



แคลคูลัสควอนตัม Quantum Calculus

เจษฎา ธารีบุญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

Jessada Tariboon

Department of Mathematics, Faculty of Applied Science, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, Thailand

*Corresponding Author, E-mail: jessada.t@sci.kmutnb.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2020.06.010

© 2020 King Mongkut's University of Technology North Bangkok. All Rights Reserved.

ความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีในปัจจุบัน ล้วนแล้วแต่มีคณิตศาสตร์อยู่เบื้องหลังทั้งสิ้น เห็นได้ชัดว่า หลังจากการค้นพบแคลคูลัสของเซอร์ ไอแซก นิวตัน (ค.ศ. 1643–1729) และกอทท์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิซ (ค.ศ. 1646–1719) นำไปสู่การค้นพบและอธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติต่างๆ ซึ่งโดยสาระสำคัญของแคลคูลัส คือ การศึกษาการเปลี่ยนแปลงและการเคลื่อนที่ ทำให้นักวิทยาศาสตร์สามารถอธิบายการตกลงสู่พื้นโลกของวัตถุ การทำงานของเครื่องจักรกล การไหลของของเหลว การขยายตัวของก๊าซ การเติบโตของพืชและสัตว์ รวมถึงการกวัดแกว่งของผลกำไร เป็นต้น

การศึกษาปรากฏการณ์ต่างๆ นั้น สามารถทำได้โดยการสร้างความสัมพันธ์ของสมการคณิตศาสตร์ หรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ทั้งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แต่ในบางปรากฏการณ์ที่การวัดข้อมูลไม่สามารถวัดได้อย่างต่อเนื่อง ข้อมูลวิฤต (Discrete Data) เหล่านี้ ไม่สามารถนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ หรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ จึงทำให้นักคณิตศาสตร์พัฒนา

แคลคูลัสขึ้นมาอีกสาขาหนึ่งเรียกว่า แคลคูลัสเชิงผลต่าง (Difference Calculus) ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากข้อมูลวิฤต โดยแบบจำลองดังกล่าวจะอยู่ในรูปของสมการผลต่างที่มีตัวแปรเวลาอยู่ในเซตของจำนวนเต็ม

แคลคูลัสควอนตัม (Quantum Calculus) หรือ แคลคูลัสคว (q-Calculus) นั้น ได้เริ่มต้นขึ้นเป็นครั้งแรกในการศึกษาอนุกรมไฮเปอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric series) ของ Euler (ค.ศ. 1798–1852) จากนั้นพัฒนาการช่วงแรกของสาขาวิชานี้ยังอยู่ที่งานด้านการทาสสมบัติต่างๆ ของอนุกรมควิโดย Gudermann (ค.ศ. 1798–1852), Weierstrass (ค.ศ. 1815–1897), Heaviside (ค.ศ. 1850–1925) เป็นต้น ต่อมาในปี ค.ศ. 1910 Jackson [1] ได้เป็นคนแรกที่ได้นำองค์ความรู้แคลคูลัสควของอนุกรมอนันต์มานิยามอนุพันธ์ควและอินทิกรัลควเพื่อศึกษาสมการผลต่างคว โดยเขาได้นิยามอนุพันธ์ควของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0, \infty)$ ดังสมการที่ (1)

$$D_q f(t) = \frac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t} \quad (1)$$



โดยที่ $0 < q < 1$ และ $D_q f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} D_q f(t)$ และได้ นิยามอินทิกรัลจำกัดเขตคิวดของฟังก์ชัน f ซึ่งอยู่ในรูปของ อนุกรมอนันต์ดังสมการที่ (2)

$$\int_0^t f(s) d_q s = (1-q)t \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i t) \quad (2)$$

ตัวอย่างสำหรับนิยามข้างต้น ถ้า $f(t) = t^2$ แล้ว $D_q t^2 = \frac{t^2 - q^2 t^2}{(1-q)t} = (1+q)t$ จะเห็นได้ว่าถ้า $q \rightarrow 1$ แล้ว

อนุพันธ์คิวดของฟังก์ชัน $f(t) = t^2$ จะเป็นอนุพันธ์ปกติ คือ $f'(t) = 2t$ สำหรับกรณีเฉพาะของอนุพันธ์คิวด เช่น $D_{\frac{1}{2}} t^2 = \frac{3}{2}t, D_{\frac{1}{8}} t^2 = \frac{4}{3}t$ เป็นต้น ต่อไปอินทิกรัลคิวดของ

ฟังก์ชัน $f(t) = t^2$ โดยใช้นิยาม (2) จะได้ดังสมการที่ (3)

$$\begin{aligned} \int_0^t s^2 d_q s &= (1-q)t \sum_{i=0}^{\infty} q^i (q^i t)^2 = (1-q)t^3 \sum_{i=0}^{\infty} (q^3)^i \\ &= \frac{(1-q)t^3}{1-q^3} = \frac{t^3}{1+q+q^2} \end{aligned} \quad (3)$$

จะเห็นได้ว่าถ้า $q \rightarrow 1$ แล้วอินทิกรัลคิวดของฟังก์ชัน f จะเป็น

อินทิกรัลปกติ คือ $\int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3}$ กรณีเฉพาะสำหรับอินทิกรัลคิวด

เช่น $\int_0^t s^2 d_{\frac{1}{2}} s = \frac{4}{7}t^3, \int_0^t s^2 d_{\frac{1}{3}} s = \frac{9}{13}t^3$ เป็นต้น หลังจากนี้

Jackson ได้สร้างสมการผลต่างคิวดแล้วก็ได้มีนักคณิตศาสตร์ หลายท่านที่ได้ศึกษาสมการผลต่างคิวดต่อมา เช่น Carmichael [2], Mason [3], Adams [4], Trjitzinsky [5] เป็นต้น

ในปี ค.ศ. 1930-1980 ผลของการศึกษาสมการผลต่างคิวดนั้นยังไม่มีควมคืบหน้ามากนัก จนกระทั่งประมาณปี ค.ศ. 1980 จึงเริ่มมีผลงานที่น่าสนใจของนักคณิตศาสตร์มา อีกครั้ง จากการศึกษาแคลคูลัสคิวดในด้าน q-combinatorics, q-arithmetics, q-integrable system และ variational q-calculus [6] ทำให้เกิดความตื่นตัวในการศึกษาสาขา วิชานี้อีกครั้งอันเนื่องมาจาก มีการนำสมการผลต่างคิวดไปใช้

อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ในทางฟิสิกส์ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในกลศาสตร์ควอนตัม เช่น Fock [7] ได้ศึกษาความสมมาตร ของอะตอมไฮโดรเจนโดยใช้สมการผลต่างคิวดในปี ค.ศ. 1990 Raychev และคณะ [8] ได้นำสมการผลต่างคิวดไปใช้ในการ ศึกษาโมเลกุลและฟิสิกส์นิวเคลียร์ ในปี ค.ศ. 1994 Cheng [9] ได้ศึกษาทฤษฎี Yang-Mills ซึ่งเป็นทฤษฎีที่อธิบาย ปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ในสนามสัมพัทธภาพทั่วไป และใน ปีเดียวกันนี้เอง Gavrilik [10] ได้ศึกษาฟิสิกส์ของอนุภาค มูลฐาน และเคมีคัลฟิสิกส์ (Elementary Particle Physics and Chemical Physics) โดยใช้สมการผลต่างคิวด นอกจากนี้ Siegel [11] ยังได้ประยุกต์ผลของการศึกษาสมการผลต่างคิวด ในการศึกษาทฤษฎีสตริง (String Theory) เป็นต้น จวบจน ปัจจุบันการศึกษาด้านแคลคูลัสคิวดและสมการผลต่างคิวดได้มี ความก้าวหน้าไปอย่างมาก โดยนักคณิตศาสตร์ยังได้พัฒนา แคลคูลัสคิวดเชิงเศษส่วนอีกด้วย [12], [13]

ในปี ค.ศ. 2012 เจษฎา ธารีบุญ ได้มองเห็นปัญหา ของนิยามอนุพันธ์ของแคลคูลัสคิวดในสมการที่ (1) ในกรณี ที่เกิดปรากฏการณ์อิมพัลส์คิวดนี้ ถ้าให้ t_1 เป็นจุดที่เกิดอิมพัลส์ โดยที่ $qt < t_1 < t$ ซึ่งทำให้ $f(t_1^-) \neq f(t_1^+)$ เมื่อ $f(t_1^-)$ และ $f(t_1^+)$ เป็นลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวาของฟังก์ชัน f ที่จุด t_1 แล้วค่าของอนุพันธ์คิวดที่ได้จากสมการที่ (1) มีความ ผิดพลาดจากผลของอิมพัลส์ จากการตรวจสอบผลงานวิจัย อย่างละเอียดทั่วโลกพบว่า ยังไม่มีนักคณิตศาสตร์คนใด สามารถสร้างสมการผลต่างคิวดอิมพัลส์ ทั้งนี้ อันเนื่องมาจาก ปัญหาที่เกิดขึ้นกับนิยามของอนุพันธ์คิวดนั่นเอง จนกระทั่งใน วันที่ 20 พฤษภาคม ปี ค.ศ. 2013 [14] เขาได้คิดค้นนิยามใหม่ ของอนุพันธ์คิวดและอินทิกรัลจำกัดเขตคิวดของฟังก์ชัน f บน ช่วงจำกัดของฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วง $[t_k, t_{k+1}] \subset \mathbb{R}$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$D_{q_k} f(t) = \frac{f(t) - f(q_k t + (1-q_k)t_k)}{(1-q_k)(t-t_k)} \quad (6)$$

และ

$$\int_{t_k}^t f(s) d_{q_k} s = (1-q_k)(t-t_k) \sum_{i=0}^{\infty} q_k^i f(q_k^i t + (1-q_k^i)t_k) \quad (7)$$

ตามลำดับ จากนิยามข้างต้นพบว่าถ้า $t_k = 0$ และ $q_k = q$ อนุพันธ์ควมและอินทิกรัลควมในสมการที่ (6) และ (7) จะถูกลดรูปไปเป็นสมการที่ (1) และ (2) ตามลำดับ จากนั้นเขาได้นำเสนอแนวคิดนี้เพื่อทำวิจัยร่วมกับ Sotiris และ Bashir ผู้ซึ่งมีความเชี่ยวชาญด้านสมการผลต่างควมและสมการเชิงอนุพันธ์อิมพัลส์ จนกระทั่งประสบความสำเร็จในการสร้างแคลคูลัสควมและได้สร้างสมการผลต่างควมอิมพัลส์ของปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบได้เป็นครั้งแรกของโลก [15] และนี่ก็คือจุดเริ่มต้นของการวางรากฐานในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ด้านแคลคูลัสควมอนตัมในประเทศไทย

เอกสารอ้างอิง

- [1] H. F. Jackson, "q-Difference equations," *American Journal of Mathematics*, vol. 32, no. 4, pp. 305–314, 1910.
- [2] R. D. Carmichael, "The general theory of linear q-difference equations," *American Journal of Mathematics*, vol. 34, no. 2, pp. 147–168, 1912.
- [3] T. E. Mason, "On properties of the solution of linear q-difference equations with entire function coefficients," *American Journal of Mathematics*, vol. 37, no. 4, pp. 439–444, 1915.
- [4] C. R. Adams, "On the linear ordinary q-difference equation," *Annals of Mathematics*, vol. 30, no. 2, pp. 195–205, 1929.
- [5] W. J. Trjitzinsky, "Analytic theory of linear q-difference equations," *Acta Mathematica*, vol. 61, pp. 1–38, 1993.
- [6] V. Kac and P. Cheung, *Quantum Calculus*. Springer-Verlag, Springer, 2002.
- [7] V. Fock, "Zur theorie des wasserstoffatoms," *Zeitschrift fur Physik*, vol. 98, no. 3–4, pp. 145–154, 1935.
- [8] P. P. Raychev, R. P. Roussev, and Yu. F. Smirnov, "The quantum algebra $SU_q(2)$ and rotational spectra of deformed nuclei," *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, vol. 16, no. 8, pp. 137–141, 1990.
- [9] H. Cheng, "Canonical quantization of Yang-Mills theories," *Perspectives in Mathematical Physics*, International press, 1994.
- [10] A. M. Gavrilik, "q-Serre relations in and q-deformed meson mass sum rules," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 27, no. 3, pp. 91–94, 1994.
- [11] W. Siegel, *Introduction to String Field Theory*. World Scientific Publishing Co., 1988.
- [12] T. Ernst, *A Comprehensive Treatment of q-Calculus*. Birkhauser, 2012.
- [13] M. H. Annaby and Z. S. Mansour, *q-Fractional Calculus and Equation*. Springer, 2012.
- [14] J. Tariboon and S. K. Ntouyas, "Quantum calculus on finite intervals and applications to impulsive difference equations," *Advances in Difference Equations*, vol. 282, 2013.
- [15] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, and J. Tariboon, "Quantum calculus: New concepts, impulsive IVPs and BVPs, inequalities," *Trends in Abstract and Applied Analysis*, vol. 4, Singapore: World Scientific, 2016.



รองศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ธารีบุญญ
กองบรรณาธิการ