



## Osaka Gakuin University Repository

Title	デジタル画像におけるフーリエ記述子の回転不変性の検証 A Study on Rotation Invariant Features of Fourier Descriptors on Digital Images
Author(s)	淡 誠一郎 (Seiichiro Dan)
Citation	大阪学院大学 人文自然論叢 (THE BULLETIN OF THE CULTURAL AND NATURAL SCIENCES IN OSAKA GAKUIN UNIVERSITY), 79-80 : 1-20
Issue Date	2020.03.31
Resource Type	Article/ 論説
Resource Version	
URL	
Right	
Additional Information	

# デジタル画像におけるフーリエ記述子の 回転不変性の検証

淡 誠一郎

## A Study on Rotation Invariant Features of Fourier Descriptors on Digital Images

Seiichiro Dan

### **【Abstract】**

In object recognition and clustering, silhouette of object is one of the most useful features. In most problems, invariances of scaling and rotation are required. The Fourier descriptors are a series of techniques for shape descriptions with various invariant features by treating the coordinates or the declination angles of the point sequence constituting the silhouette as a periodic function and apply Fourier series expansion on them. They are used for morphological analysis of animals and plants, pathological diagnosis, and design of industrial products.

Theoretically, Fourier descriptors have scale and rotation invariance. Furthermore, if the image is discretized with a sufficiently short sampling interval and sufficiently many quantization levels, even digital images have these properties approximately. However, conversely, for rasterized digital images, it also means that the invariances are somewhat disrupted.

In this study, we investigated the actual extent of rotation invariance using actual digital images. As a result, it has been found that the rotation invariance can be greatly lost in digital images.

## 概 要

物体の識別やクラスタリングにおいて、シルエットはもっとも重要な特徴の一つであり、多くの場合にスケーリングや回転に対する不変性が求められる。フーリエ記述子は、シルエットを構成する点列の座標、あるいは点列の偏角を周期関数とみなしてフーリエ級数展開することによって、スケーリングや回転に対して不変な形状記述を得ようとする手法であり、いくつかの形式化のバリエーションが提案されてきた。それらは動植物の形態学的解析や病理診断、工業製品のデザインなどに利用されている。

理論的には、フーリエ記述子がスケール不変性や回転不変性をもつことに疑いの余地はない。また十分短い標準化間隔と十分な量子化レベルをもって離散化されているならば、デジタル画像（ここではラスタ表現を前提としている）であっても、近似的にそれらの性質を持つであろうことも予想できる。しかし逆に言えば、ラスタ表現されたデジタル画像に対しては、フーリエ記述子の回転不変性は多少なりとも崩れるということも意味する。

本研究は実際の画像をもちいて、フーリエ記述の回転不変性がどの程度成り立っているのかを調査するものである。結果として、デジタル画像では回転不変性が大きく崩れることがあることが分かった。

## 1. はじめに

シルエットは対象を認識したり分類したりするための重要な手がかりの一つである。動植物の形態学的解析や種の分類に用いられたり<sup>[1,2]</sup>、医学分野での臓器の形状解析や病理診断<sup>[3,4]</sup>、工業製品のデザインが人に与える印象の分析に用いられたりもする<sup>[5,6]</sup>。

たとえば、動植物の形態学的なシルエット解析は、旧来は目視による判断や人手での作業に依存していたため、容易に判断できる定性的な属性や、花卉の数などの離散的特徴量、全長や幅などの少数の定量属性に基づく分析にとどまらざるをえなかった。しかし、近年ではデジタル画像処理が手軽に利用できるようになり、シルエット解析の専用ツールが公開されるなど、形状を定量的に分析するための環境が整ってきており、計算機を用いた解析が主流となってきている。上に挙げた医学や工業分野においても同様である。

シルエット形状の記述方法にはさまざまなものがあるが、ここではフーリエ記述子を取り上げる。

フーリエ記述子の利点は、

- (1) スケール不変、回転不変の形状特徴量がえられる。
- (2) 低次の記述子のみを用いることにより形状の概形を記述できる。
- (3) 記述子と識別や診断結果との関係进行分析することで、画像による識別や診断を実現

できる。

といったことである。

一つ目に挙げた回転不変性は、フーリエ記述子の基礎であるフーリエ級数展開やフーリエ変換の性質からくる当然の性質と考えられており、実際に回転不変であるかどうか疑問視されることはない。同じ形状であれば回転させても周波数領域での記述は同じであると推測されるからである。

ただし、その性質が連続系において成り立つことは自明であっても、離散化した際にも成立するという保証はない。解像度を限りなく高く、すなわち標本化間隔を限りなく細かくし、量子化間隔も限りなく小さくしてやれば離散系で連続系を近似できるに違いない。しかし、実際の画像の解像度や量子化レベルが十分であるかどうかの検証は必要であり、盲目的にフーリエ記述子を使えば回転不変性が成り立つと考えるのは危険であろう。

そこで、本研究では、実際に人間であれば目視で識別が可能な解像度のシルエット画像を用い、フーリエ記述子の回転不変性がどの程度成り立っているのか、あるいは成り立っていないのかを検証してみたい。

## 2. フーリエ記述子

フーリエ記述子では、平面上の連続曲線を、端点から曲線に沿ってはかった道のりの長さ  $s$  の関数として記述し、その関数をフーリエ級数展開した際の係数を形状の記述ととらえる。

フーリエ級数展開は連続無限の周期関数を前提とした数学的操作であり、フーリエ記述子は、曲線の何をどう周期関数とみなすかによっていくつかのバリエーションが存在する。

以下、

- Z型フーリエ記述子
- 楕円フーリエ記述子
- G型フーリエ記述子
- P型フーリエ記述子

の概要を述べる。

① Z型フーリエ記述子

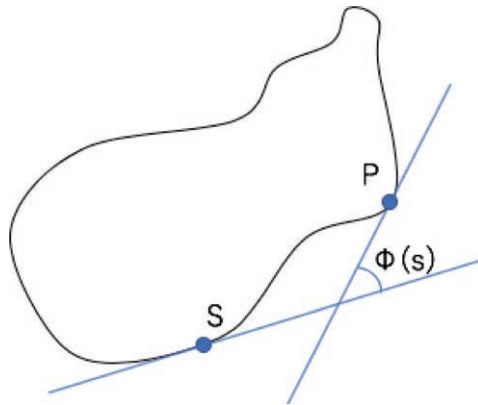


図1 偏角

まず、Z型フーリエ記述子でフーリエ記述子の基本的な考え方について説明しよう。

Z型フーリエ記述子では、対象を1つの閉曲線に限定して考える。

まず閉曲線上に任意に点Sを定め、これを始点として一定方向に曲線上をたどる。曲線上の点Pにおける接線と始点Sにおける接線のなす角を $\phi(s)$ で表し、偏角と呼ぶ(図1)。ただし、 $s$ は始点から点Pまでの弧長(経路に沿って測った道のりの長さ)である。

曲線上をたどって再び始点に戻ったあとも、続けて曲線上をぐるぐると回り続けるものとし、始点に戻っても $s$ や偏角はリセットせず積算する。そうすると、 $\phi(s)$ は1周ごとに $2\pi$ 増加していくような関数となる。

ここで、

$$t = \frac{2\pi s}{L} \quad \dots(1)$$

と変数変換し、新たに

$$\Phi(t) = \phi(t) - t \quad \dots(2)$$

という関数を定義して、**正規化偏角関数**とよぶことにする。変数 $t$ の値は周回ごとに $2\pi$ 増加していき、 $\Phi(t)$ は周期 $2\pi$ の連続周期関数となる。仮に図形の形状が真円だとすれば、 $\phi(t) = t, \Phi(t) = 0$ となる。

例えば、図2(a)に示す図形の偏角と正規化偏角関数は(b)のようになる。図のグラフは2周分をプロットしてある。

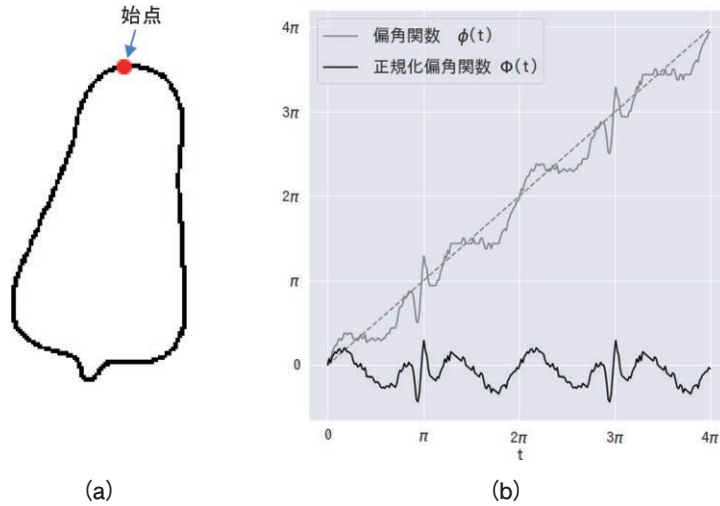


図2 偏角と正規化偏角関数

正規化偏角関数  $\Phi(t)$  は周期  $2\pi$  の周期関数となるので、

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(jkt) \quad \dots(3)$$

とフーリエ級数展開できる。このとき、 $c_k$  を Z 型フーリエ記述子とよぶ。ただし、 $j$  は虚数単位であり、

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) \exp(-jkt) dt \quad \dots(4)$$

である。

### Z 型フーリエ記述子の離散表現

ここまで述べてきた理論は連続閉曲線を前提としているが、われわれが実際に扱うのはデジタル画像である。そこで、閉曲線上に等間隔に  $N$  個の標本点  $P_0, P_1, \dots, P_{N-1}$  を取って、閉曲線を等辺多角形で近似することを考え、各辺の方向ベクトル  $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$  が基準辺の方向ベクトル  $\overrightarrow{P_0 P_1}$  となす角  $\theta_i$  を「偏角」と考えて、離散表現する。

離散系の正規化偏角関数は、

$$\Phi_i = \theta_i - \frac{2\pi(i \bmod N)}{N} \quad \dots(5)$$

と記述できる。 $\Phi_i; i = 0, 1, \dots$  は周期  $N$  の周期関数となり、

$$\Phi_i = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(j \frac{2\pi k i}{N}\right) \quad \dots(6)$$

と表せる。ここで、

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi_i \exp\left(-j \frac{2\pi k i}{N}\right) \quad \dots(7)$$

である。

注意しないといけないのは、離散フーリエ変換ではで  $k$  が大きいほど高調波に対応するとは限らないという点である。

$$\exp\left(j \frac{2\pi(N-k)}{N}\right) = \exp\left(j \frac{2\pi N}{N}\right) \exp\left(j \frac{-2\pi k}{N}\right) = \exp\left(j \frac{-2\pi k}{N}\right) \quad \dots(8)$$

であるから、

$$c_{N-k} = c_{-k} \quad \dots(9)$$

の関係がある。簡単のため、 $N$  を偶数とすると、(6)式は、

$$\Phi_i = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} c_k \exp\left(j \frac{2\pi k i}{N}\right) \quad \dots(6)'$$

と書ける。

始点  $(x_0, y_0)$  とフーリエ記述子  $c_k$  がわかっているならば、次の計算式により、すべての標本点の座標  $(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N-1$  を復元することができ、標本点を順次繋いでいくことによって、元の曲線の近似多角形が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \Phi_i + \frac{2\pi(i \bmod N)}{N} \\ x_i &= x_0 + \delta \sum_{k=0}^i \cos\theta_k \\ y_i &= y_0 + \delta \sum_{k=0}^i \sin\theta_k \end{aligned} \right\} \quad \dots(10)$$

ここで、 $\delta$  は標本点間の距離、つまり多角形近似における 1 辺の長さである。

### Z型フーリエ記述子の性質

理論上、Z型フーリエ記述子は、以下の性質を持つ。

- 記述子の大きさ  $|c_k|$  は平行移動、拡大縮小、回転に対して不変である。
- 低い周波数のみを用いて逆変換をほどこすことで、元の図形の近似形状が得られる。  
高周波成分を加えていくことによって、任意に詳細なレベルの形状変化まで再現できる。

平行移動と回転に関する不変性はフーリエ級数展開やフーリエ変換に共通する特徴である。理屈の上では、波形の周波数成分は平行移動や回転に左右されないため、この不変性は当然と言える。Z型フーリエ記述子は変換対象が角度であるため、拡大縮小に関しても不変性を持つ点特徴的である。

ただし、注意しないといけないのは、上に挙げた不変性はあくまでも連続関数に対する性質であり、離散化されたデータに対して成立するという保証はないという点である。

一般にフーリエ級数展開において高次の項をカットし、低次の項だけを用いて逆変換を行うと、高周波ノイズが除去され、平滑化された波形を得ることができる。Z型フーリエ記述子についても同様であるが、Z型フーリエ記述子では変換・逆変換の対象はシルエットではなく、正規化された偏角であり、形状は偏角から間接的に再構成しなければならない。このとき得られる曲線が閉じるという保証はない。

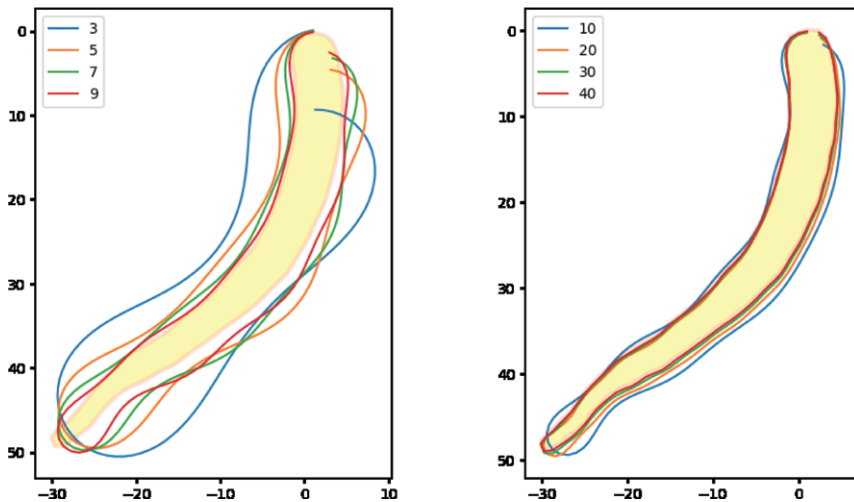


図3 Z型フーリエ記述子による復元形状

図3にZ型フーリエ記述子からの形状復元の例を示す。左は復元に用いる係数の最大次数を3,5,7,9とした場合、右は10,20,30,40とした場合である。次数が低いほど元の形状から離れると同時に、終点の位置が始点から大きくずれていく。



### ② 楕円フーリエ記述子

楕円フーリエ記述子も Z 型同様閉曲線を前提とした変換である。

曲線上に任意の点 S を定め、S から一定速度で曲線上を移動しながら周回する動点 P を考えると、点 P の  $x$  座標、 $y$  座標はそれぞれ独立した周期関数とみなせる (図 4)。これをフーリエ級数展開することで得られる三角関数の係数が楕円フーリエ記述子である。

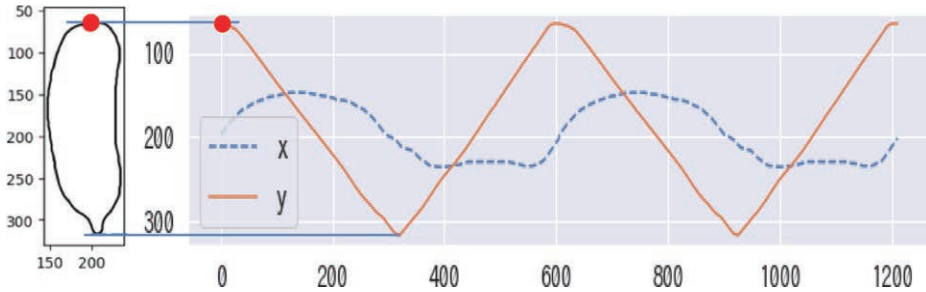


図 4 閉曲線上の動点の  $x$  座標と  $y$  座標

楕円フーリエ記述子は次に述べる G 型フーリエ記述子と数学的には同等である。G 型フーリエ記述子の方が楕円フーリエ記述子より理論の記述がコンパクトになるので、楕円フーリエ記述子の理論説明は省略する。

なお、楕円フーリエ記述子は回転不変性を持たない。 $x$  座標の周期関数と  $y$  座標の周期関数の形が図形の回転によって変化するからである。このため、楕円フーリエ記述子を形状分析や識別等に用いる場合は、図形の近似楕円の方向と大きさを基準に記述子を正規化しなければならない。

### ③ G 型フーリエ記述子

楕円フーリエ記述子では、 $x$  座標と  $y$  座標をそれぞれ別々に弧長の関数と考えたが、G 型フーリエ記述子では、 $x$  座標が実部、 $y$  座標が虚部であるような複素関数ととらえてフーリエ級数展開を施す。

平面座標  $(x, y)$  と複素数  $z = x + jy$  を同一視して考える。

$N$  個の標本点、すなわち等辺  $N$  角形の頂点の集合は  $N$  個の複素数の集合  $z_i; i = 0, 1, \dots, N - 1$  と同一視される。ただし、 $z_i; i = 0, 1, \dots, N - 1$  は閉曲線上をたどった時の出現順に並んでおり、先頭の頂点と末尾の頂点は、他の隣接頂点と同じ間隔だけ離れて隣接しているものとする。

いま、 $z_i; i = 0, 1, \dots$  を周期  $N$  で 1 周する周期関数とみなし、 $N$  は閉曲線を近似するのに十分な数であるものとするれば、

$$z_i = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} c_k \exp\left(\frac{j2\pi ki}{N}\right) \quad \dots(11)$$

とフーリエ級数展開できる。ここで、

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z_i \exp\left(-j\frac{2\pi ki}{N}\right) \quad \dots(12)$$

である。

このとき、係数  $c_k$  を **G 型フーリエ記述子** とよぶ。

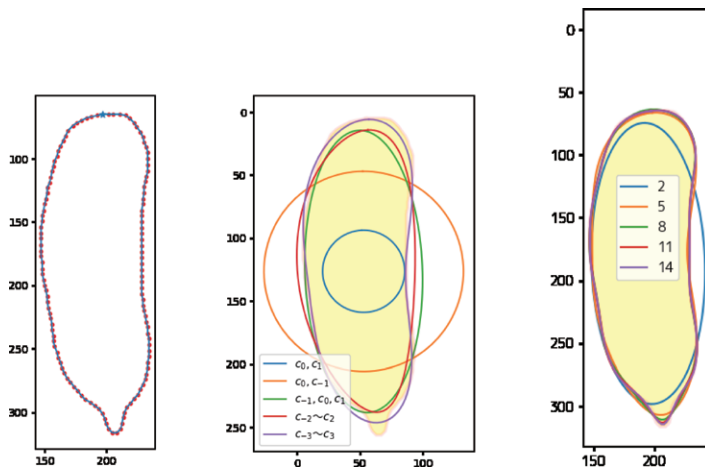


図5 G型フーリエ記述子から得られる復元形状

### G 型フーリエ記述子の性質

以上のことをふまえ、G 型フーリエ記述子の特徴をまとめておく。

- 直流成分  $c_0$  は図形の重心位置を表す。
- $c_0$  以外の  $|c_k|$  は、平行移動、回転に関する不変性を持つ。
- 高次成分をカットして逆変換することで近似曲線を得ることができる。  $c_1$  と  $c_{-1}$  のみを用いて逆変換すると原図形の近似楕円がえられる。
- この近似楕円の中心、軸方向、長径の大きさを基準として図形を正規化することで、G 型フーリエ記述子は平行移動、回転、スケーリングに対して不変となる。

近似楕円による正規化まで含めて考えれば、楕円フーリエ記述子も同様の不変性が成り立つ。

図5にG型フーリエ記述子をもとに逆変換して得られる近似図形の例を示す。左の図

が原図形，中央の図は記述子の組  $\{c_0, c_1\}, \{c_{-1}, c_0\}, \{c_0, c_{\pm 1}\}, \{c_0, c_{\pm 1}, c_{\pm 2}\}, \{c_0, c_{\pm 1}, c_{\pm 2}, c_{\pm 3}\}$  からの逆変換で得られる形状，右の図は，2次，5次，8次，11次，14次までの記述子からの逆変換で得られる形状である．なお，この実験で用いた標本点の数は128である．

④ P型フーリエ記述子

図6にP型フーリエ記述子の考え方を示す．P型フーリエ記述子は等辺N角形近似における辺の方向ベクトルの変化を周期関数とみなす．

まず図形を図6(a)のように等辺多角形近似する．任意の辺を最初の辺0として選び，その方向を基準方向と考える．辺0から順に近似多角形の辺を接続順に一定方向に巡回していくときに，出現する辺の方向ベクトルを始点が原点となるように複素平面上に描いていくと(b)のようになる．辺を巡って1周すると元の位置に戻るが，それ以降も辺をたどり続けると考えて，辺の方向ベクトルの列を周期関数とみなし，フーリエ級数展開する，というのがP型の基本的なアイデアである．

輪郭上に等間隔に  $N+1$  個の標本点  $P_i; i = 0, 1, \dots, N$  を取る．ただし， $P_N = P_0$  である． $P_i = (x_i, y_i)$  に複素平面上の点  $z_i = x_i + jy_i$  を対応づけ，両者を同一視することにする．

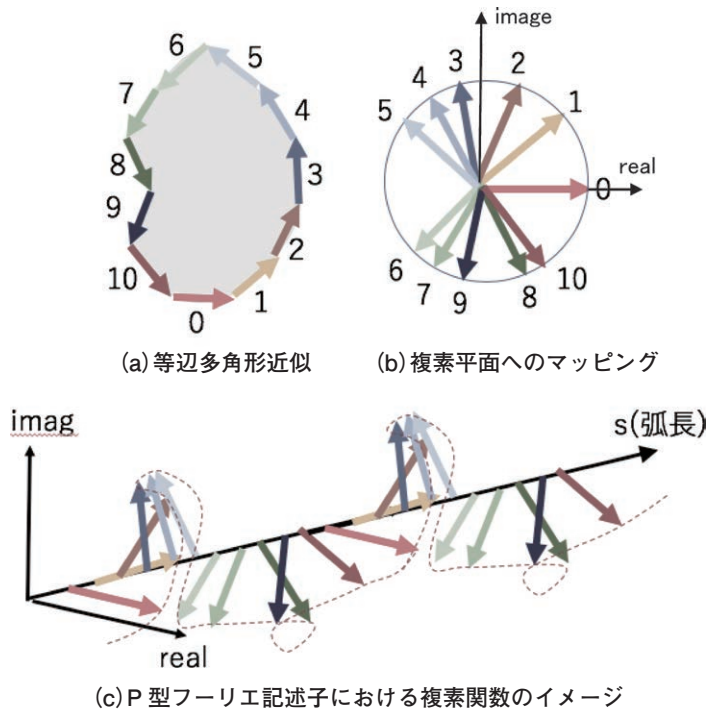


図6 P型フーリエ記述子

ここでは，ベクトル  $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$  と  $x$  軸（実数軸）のなす角  $\theta_i$  をベクトル  $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$  の偏角とよ

ぶことにする。ここで、 $w_i = \cos\theta_i + j\sin\theta_i$  と定義すると、偏角  $\theta_i$  は複素平面上的の複素数  $w_i$  の偏角に一致する。

いま、等辺  $N$  角形の一つの辺の長さを  $\delta$  とすれば、

$$w_i = \cos\theta_i + j\sin\theta_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\delta} + j\frac{y_{i+1} - y_i}{\delta} = \frac{z_{i+1} - z_i}{\delta} \quad \dots(13)$$

である。

逆に、 $w_i: i = 0, 1, \dots, n$  と始点  $z_0$  が与えられたならば、 $z_n = z_0 + \delta \sum_{i=0}^n w_i$  として、近似多角形の頂点の位置が求まり、原図形は、位置・形ともに復元できる。また、始点  $z_0$  がわからなくても、任意の点を始点と定めることで、図形の形状は復元できる。

輪郭を巡回することを考えると、 $w_n: n = 0, 1, \dots$  は周期  $N$  の複素周期関数とみなすことができるので、

$$w_i = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} W_k \exp\left(j\frac{2\pi ki}{N}\right) \quad \dots(14)$$

とフーリエ級数展開することができるはずである。ここで、

$$W_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} w_i \exp\left(-j\frac{2\pi ki}{N}\right) \quad \dots(15)$$

である。この、 $W_k$  を **P 型フーリエ記述子** と呼ぶ。

### P 型フーリエ記述子の性質

偏角は図形の位置に左右されないので、P 型フーリエ記述子は G 型の項で述べたのと同じ理屈により、回転、拡大縮小に関して不変である。この性質を含め、P 型フーリエ記述子は、

- 平行移動、回転、拡大縮小に関して不変である。
- 低い周波数のみを用いて逆変換をほどこすことで、近似形状が得られる。高周波を加えていくにつれて任意に詳細なレベルの形状変化まで再現できる。
- P 型には、Z 型の短所であった逆変換図形が閉曲線とならない、という欠点はない。
- 開曲線に対しても適用可能である。

などの特徴を有する。P 型フーリエ記述子は偏角をフーリエ変換するという意味では Z 型フーリエ記述子と考え方も結果として得られる性質も類似している。

図 7 に P 型フーリエ記述子の一部からの逆変換により得られた復元形状の例を示す。

凡例の意味はこれまでと同様なので説明は省く。記述子の一部を用いて得られる近似形状については G 型記述子の場合と大きな違いはない。近似図形の位置が異なるのは、P 型の結果が始点位置を基準に描かれているのに対し、G 型の結果は重心位置が保存されるような位置に描かれているからである。G 型は 0 次の記述子が重心を表すが、P 型は角度の変換であるため、重心位置の情報を含まない。

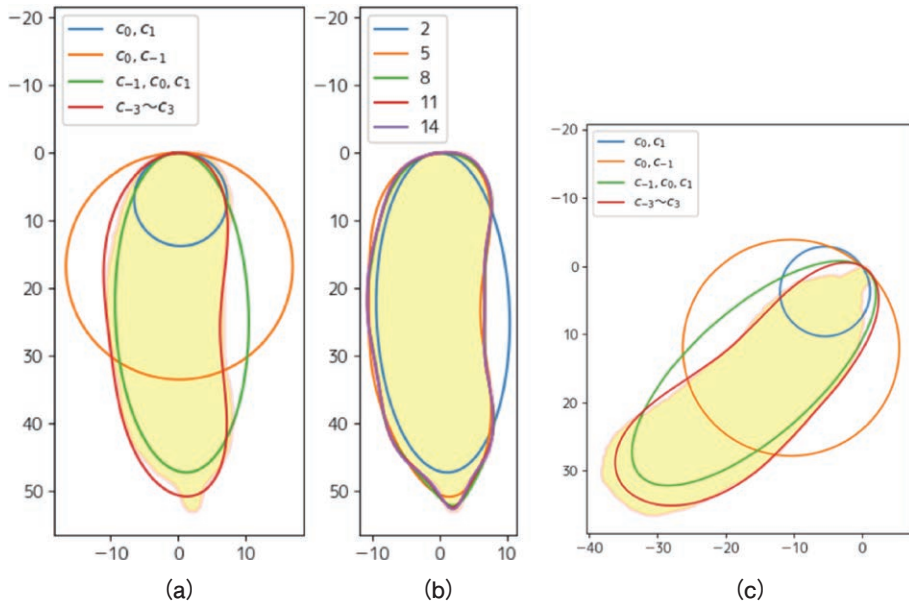


図7 P型フーリエ記述子から得られる復元形状の例

### 3. デジタル画像に対するフーリエ記述子の回転不変性の検証

検証実験に入る前に、フーリエ記述子が回転不変性をもつとされる理由を確認しておこう。

複素平面上の点  $z$  を原点周りに  $\theta$  回転させた点を  $z'$  とすれば、

$$z' = z \exp(j\theta) \quad \dots(16)$$

と表せる。N 個の標本点全体、 $z_i: i = 0, 1, \dots, N-1$  を原点周りに  $\theta$  回転させたものを  $z'_i: i = 0, 1, \dots, N-1$  として、そのフーリエ記述子を  $c'_k$  とすれば、

$$c'_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z'_i \exp\left(-j \frac{2\pi k i}{N}\right) = \frac{\exp(j\theta)}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z_i \exp\left(-j \frac{2\pi k i}{N}\right) = c_k \exp(j\theta) \quad \dots(17)$$

となり、回転後の記述子は回転前の記述子を原点周りに $\theta$ 回転させた値をとることがわかる。回転によって変わるのは位相だけで絶対値は変化しない。原点以外を中心とした回転については、原点周りの回転と平行移動に分解して考える。平行移動は0次の項にしか影響せず、1次以上の記述子の不変性は損なわれない。

楕円フーリエ記述子は $x$ 座標と $y$ 座標を別々に周期関数化する。それらの関数は回転によって形状が変化してしまうため、そのままでは回転不変とならないが、応用の際には1次の項から近似楕円を算出し、その軸方向と径で記述子を正規化することで2次的に不変な記述子を得る。

以上がフーリエ記述子における回転不変性の理論的説明である。

この理論は、回転前と回転後とで図形輪郭上の同じ点が標本点として選ばれていることを前提としていることに注意が必要である。現実には標本点の組み合わせは始点位置に左右される。回転に不変な始点の選び方があればいいが、一般的な方法はない。

さらに、デジタル画像においては標本点の位置は格子点しか選べない。回転角によって輪郭形状はわずかでもブレが生じる。近似精度を上げるために標本間隔を狭めると、逆に角度の量子化誤差が大きくなってしまう。

以下では、実用例の多い、G型とP型フーリエ記述子を対象として回転不変性の検証を行う。

### ① G型フーリエ記述子の回転不変性

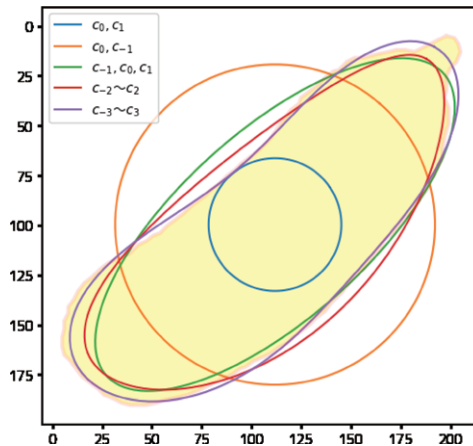


図8 G型フーリエ記述子からの復元形状（回転させた場合）

図8に図5と同じ図形を反時計回りに130度回転させた図形とその復元結果を示す。

目視では図5 (b)を回転させれば、ほぼ図8に一致しそうに見える。単なる概形記述が目的であるならばそれで十分であるが、シルエット解析やフーリエ記述子による識別が目的であるならば話は変わる。シルエット解析や識別においては、記述子そのものの類似性が問われるからである。復元形状がオリジナルの概形を捉えていることは必要条件にすぎない。記述子を用いた解析や識別においては、特徴ベクトルとしての記述子そのものが回転や拡大縮小などの幾何学的操作に対して不変であるかどうかの方が重要である。

表1 回転による記述子の変化

記述子	図5の図形		図8の図形	
	偏角(deg)	大きさ	偏角(deg)	大きさ
$c_0$	67.3	17546	41.7	19173
$c_{-1}$	-90.6	10154	-49.0	10288
$c_1$	93.2	4173	-34.5	4266
$c_{-2}$	-35.2	330	179.4	464
$c_2$	16.4	518	-97.8	469

表1に、図5と図8について、2次までのG型フーリエ記述子の実際の値を示す。G型フーリエ記述子は複素数であるので、大きさと複素平面における偏角を示した。

まず、G型フーリエ記述子は回転不変とされるが、不変なのは複素数としての記述子の大きさ(絶対値)であって、位相は回転に伴って変化する。1次の記述子( $c_1, c_{-1}$ )は近似楕円を規定する量であるが、図5と図8で、 $c_{-1}$ は約40°、 $c_1$ は約140°のずれがある(40°と140°は方向としては同一と考えられる)。実際には図8は図5を130°回転させて描かれているのだが、130°に対して約140°なので、誤差の範囲と言えるかもしれない。大きさについては $c_{-2}$ 以外は±10%程度の誤差の範囲に収まっているが、 $c_{-2}$ は図5が330であるのに対して、130°回転した図8は464と約4割増しとなっている。これは一例にすぎないが、フーリエ記述子の回転不変性が実際のデジタル画像では必ずしも成立していないことを示すには十分である。

次に、フーリエ記述子の不変性がどの程度成立しているのか、逆に回転角によってどのように変化するかをもっと詳細に調査してみる。

先の図形について、5度単位で画像を回転させた場合の記述子の変化を図9に示す。回転角をグラフのx軸からの角度に、記述子の絶対値を中心からの距離に対応させてプロットしてある。次数によって振幅に大きな差異があるので、2つのグラフに分けて示してある。 $c_2$ と $c_{-3}$ は両方のグラフに示した。

この図形の場合、楕円近似を表す $c_{-1}$ と $c_1$ は図形を回転させていっても変動はわずか

デジタル画像におけるフーリエ記述子の回転不変性の検証

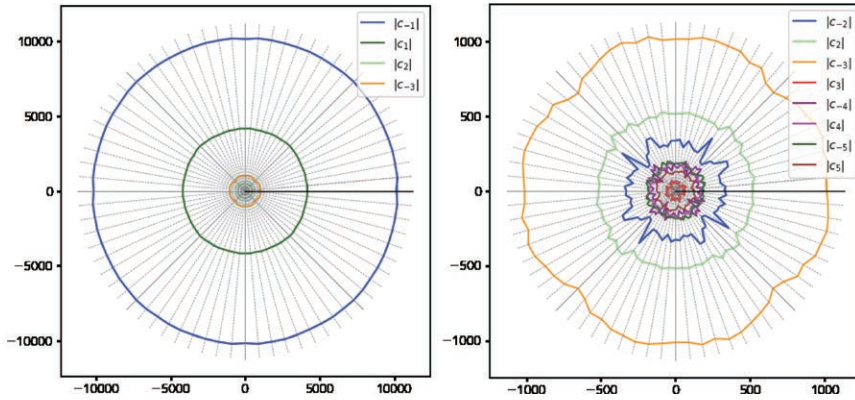


図9 回転角によるG型フーリエ記述子の変動

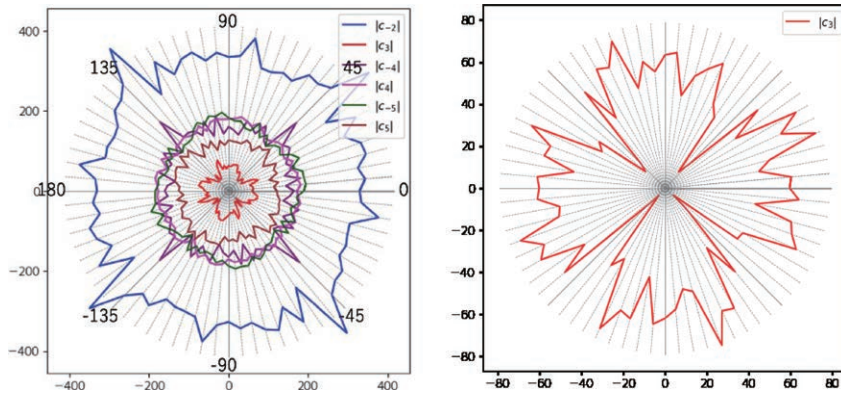


図10 回転角による変動幅の大きい記述子 (G型)

である。また、 $c_2$  と  $c_{-3}$  も比較的安定している。この程度の変動であれば回転不変と言ってもよいかもしれない。それ以外の記述子は回転角に対する変動が結構大きく、グラフを見ると概ね90度周期の変化がみて取れる。

図10に記述子のうちで絶対値の小さい項だけ抜き出したグラフを示す。図5(a)の図形の場合、 $|c_{-2}|, |c_3|$  の変動幅が大きく、特に45+90n度 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 付近で著しく変化する。これはおそらくデジタル画像では画素が格子状に配置されていることと関係するもので、避けられない現象であろうと推察される。

1例だけではこの図形に限られた現象の可能性があるので、複数の図形について同様の実験を試みた。1次の記述子に関してはどの図形も最初の例と同様に回転に対して安定した値となる。 $c_2$  と  $c_{-3}$  も比較的安定している。最初の例で観察されたのと同様、90度周期で記述子の値が変動することも確認できた。追加実験の結果例を図11に示す。



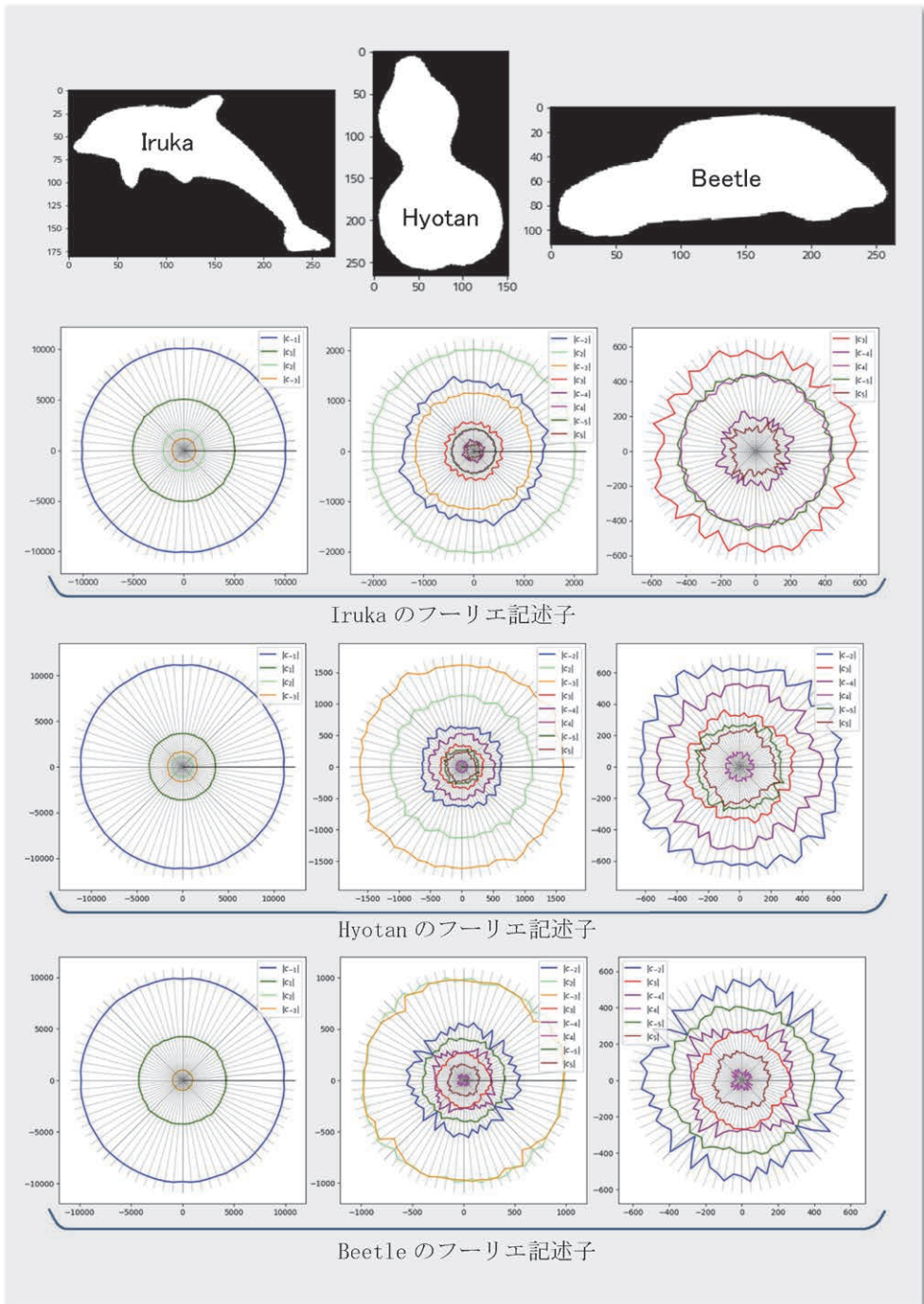


図11 回転角による G 型フーリエ記述子の変動 (Iruka, Hyotan, Beetle)

② P 型フーリエ記述子の回転不変性

P 型フーリエ記述子についても G 型同様の方法で回転不変性を調査した。

130度回転させた場合の形状復元結果については、すでに図7(c)に示してある。図7(a)と(c)とで近似図形の描画位置が違っているのは、両者の標本点の始点位置が異なるためである。先にも述べたが、P型フーリエ記述子には位置情報が含まれないため、近似図形は標本点の始点を基準として描いている。標本点の始点はラスタスキャンした際に最初に見つかる点であり、回転に伴って始点として選ばれる箇所そのものが変化する。目視では、近似形状自体は回転前とほぼ同一で、ちょうど130度回転しているように見える。

G型のとくと同様に、5度単位で画像を回転させた場合の記述子の変化を調べてみた。結果を図12～図14に示す。 $c_{-1}$ と $c_1$ についての結果をG型と比べると、G型の結果のグラフが真円に近いのに対し、P型の結果は正八角形に近いグラフとなっているのがわかる。これはG型と比べると回転不変の度合いが若干下がることを意味するが、正八角形と円の差はわずかであるので、 $c_{-1}$ と $c_1$ についてはほぼ回転不変性が成り立つと言って差し支えなからう。 $c_2$ と $c_{-3}$ が他の高次の項と比べて安定している点も同じである。記述子の値に90度周期での変動がある点もG型と同じである。

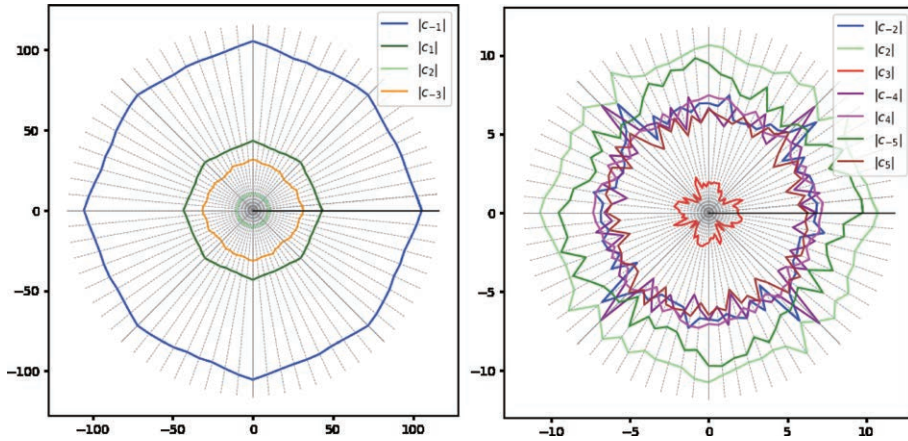


図12 回転角によるP型フーリエ記述子の変動

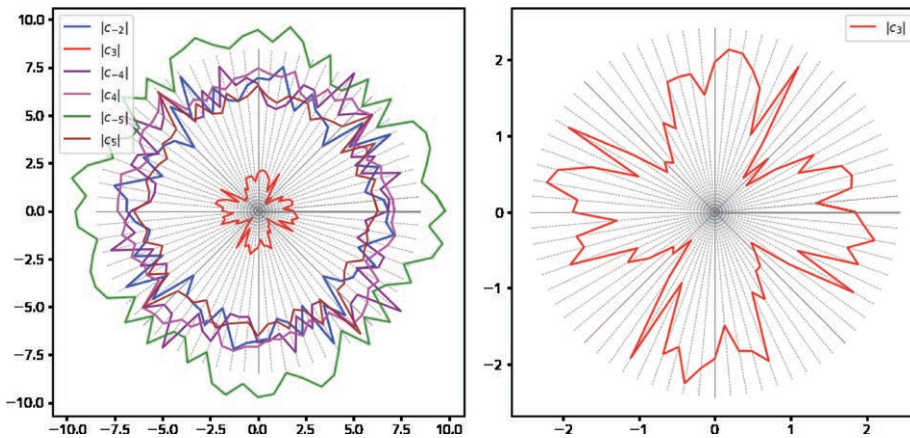


図13 回転角による変動幅の大きい記述子 (P型)

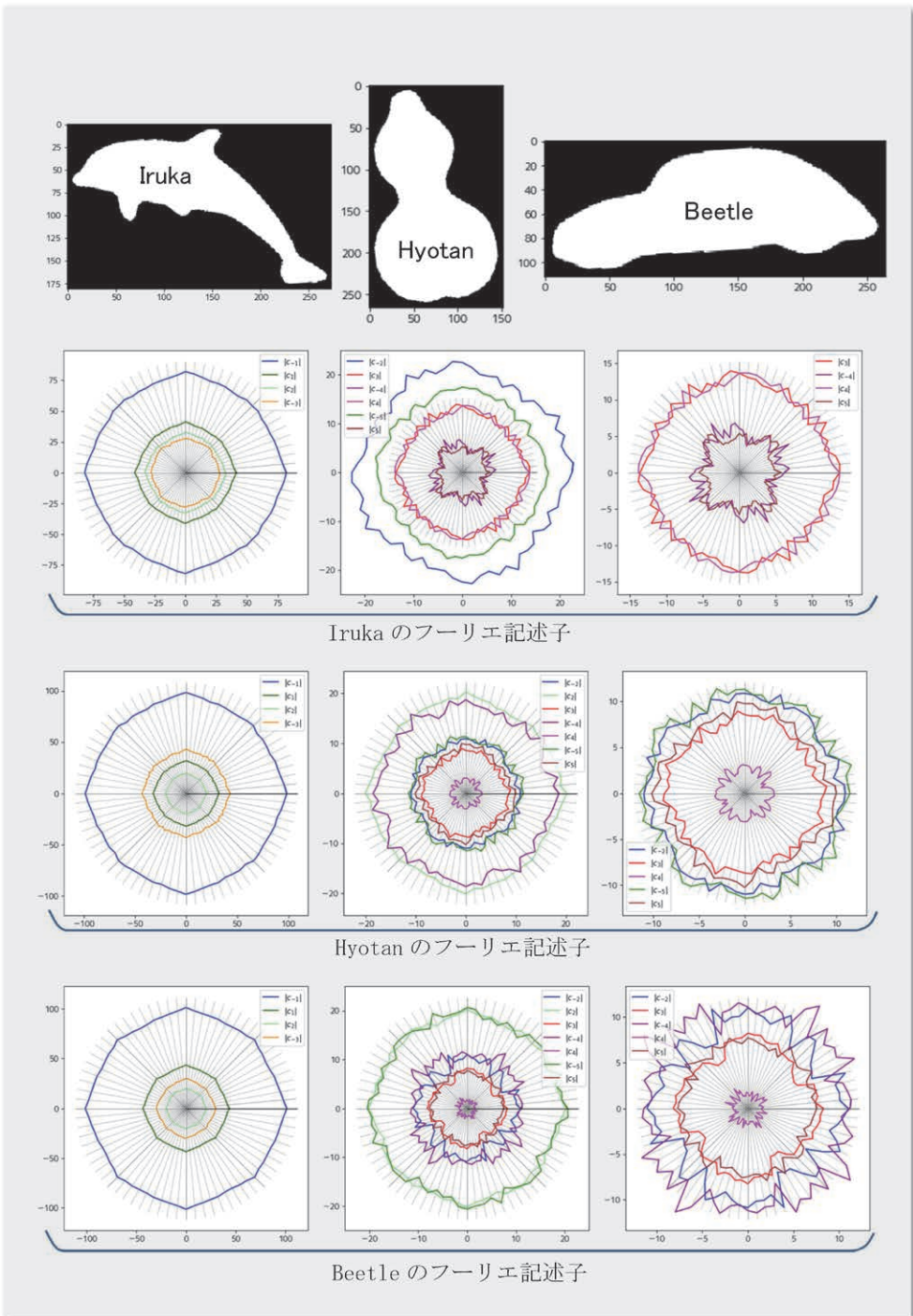


図14 回転角によるP型フーリエ記述子の変動 (Iruka, Hyotan, Beetle)

#### 4. まとめ

フーリエ記述子のうち回転不変性を有する G 型と P 型について、デジタル画像を対象とした時に回転不変性がどの程度成立するのかを実験的に検証してみた。

実際にシルエット画像から G 型と P 型のフーリエ記述子を求めるプログラムと、ローパスフィルタを通した逆変換によって近似図形を生成するプログラムを作成し、いくつかの図形を 5 度刻みで回転させ、回転に対してフーリエ記述子の各項がどう変化するかを調べた。

実験の結果をまとめると以下のとおりである。

- (1) 1 次の記述子については、G 型、P 型ともに、回転不変性が認められる。ただし、G 型と P 型の比較では、G 型の方が回転に対する変動が少ない。G 型は 360 度どの方向に回転しても記述子の値がほとんど変化しないが P 型は特性グラフが正八角形に近い形になる。
- (2) 2 次以上の記述子は、G 型、P 型ともに角度によって大きく変動する場合がある。どの次数の記述子が増動するかは図形によってまちまちであるが、角度によっては同じ記述子の値の変動が最大最小比で 2 倍以上となることもある。変動は回転角に対して 90 度周期となる。

以上の結果より、デジタル画像に対して、フーリエ記述子の回転不変性を盲目的に信じて利用するのは危険であると結論づけられる。特にフーリエ記述子を識別のための特徴として用いる場合、まず楕円近似をして図形の方向を正規化した上で記述子を再計算するとか、0～90 度の範囲で回転させたときの記述子の平均値を特徴として採用するなどという措置が必要であろう。

今回の実験はフーリエ記述子のうちの G 型、P 型のみについて調査したが、90 度周期での変動はほかの記述子についても起こるであろうと推測できる。楕円フーリエ記述子を応用する場合に正規化が行われるという話を述べたが、その正規化といままで述べた正規化とは別である。楕円フーリエ記述子の場合には正規化してはじめて理論的に回転不変となる。G 型の実験結果は正規化後の楕円フーリエ記述子の振る舞いに相当する。

どの程度の次数の記述子までなら安定的であるのか、どれ程の振り幅で記述子の値が増動するのかは、画像の解像度や量子化間隔、図形の複雑さなどに左右されるものと予想される。今回の実験に用いたプログラムでは、シルエットを囲む矩形の長辺が 256 画素となるように正規化した図形を用い、標本点の数を 128 とした。これは著者が神戸大学との共同研究として行っているダイコンの形状解析で用いている数値であり、特に粗すぎるわけではないことを記しておく。

参考文献

- [1] 鄭澤宇, 岩田洋佳, 二宮正士, 田村義保: “P形フーリエ記述子に基づくハナハス花弁の部分形状特徴の定量的評価”, 育種学研究 7, 3, pp.133-142 (2005).
- [2] 古田尚也, 二宮正士, 高橋信夫, 大森 宏, 鷓飼保雄: “ダイズ小葉形の楕円フーリエ記述子に基づく主成分スコアによる定量的評価”, Breeding science 45, 3, pp.315-320 (1995).
- [3] 川村陽子: “フーリエ記述子を用いた脳梁形状の性差の解析”, 岐阜大学工学部 博士学位論文 (2006).
- [4] 中嶋典子, 石井晃太郎, 岩田洋佳, 大鹿哲郎: “楕円フーリエ記述子に基づく水晶体形状発達の定量的解析”, 臨床眼科 65, 7, pp.137-1142 (2011).
- [5] 小林智美, 篠田一馬, 石川智治, 長谷川まどか, 加藤茂夫: “楕円フーリエ記述子を用いた衣服の輪郭形状の分類に関する一検討”, 映像情報メディア学会技術報告 39, 31, pp.5-8 (2015).
- [6] 小森政嗣, 川村 智, 横山卓未, 森下佳昌: “楕円フーリエ記述子を用いたボディソープボトル形状の分析と評価”, 日本包装学会誌 21, 6, pp.479-491 (2012).