Energiautomater, energifunktioner og Kleene-algebra

Uli Fahrenberg[1]   Kim G. Larsen[2]

Forfatterne til denne artikel har, sammen med mange gode kolleger, i en del år arbejdet med såkaldte *energiproblemer*. Disse handler om, at man i en formel model ønsker at bestemme, om der findes en endelig eller uendelig eksekvering under hvilken en given *energivariabel* aldrig bliver negativ. Den formelle model kan være en vægtet tidsautomat, som i [5, 7], en endelig automat som er annoteret med *energifunktioner*, som i [14–17], eller en lignende model [10]. Fælles for alle disse modeller er, at det har vist sig ualmindeligt svært at løse sådanne energiproblemer og at teknikker fra *Kleene-algebra* har været en stor hjælp.

Samtidigt har forskning i energiproblemer haft en høj grad af anvendelse, for eksempel i satellitschedulering [2, 11, 23], for sikkerhedskritisk Java [4] og indlejret software [9, 20], og i industriel køling [21].

Formålet med denne artikel er at give et overblik over nylig forskning i energiproblemer (for første gang på dansk) samt at udvide anvendelsen af Kleene-algebra i et forsøg på at lukke et åbent problem fra [7]. Vi henviser til [6] for yderlige baggrund om vægtede tidsautomater, energiproblemer og anvendelser.

1 Energiproblemer i vægtede tidsautomater

I artiklen [7] publiceret på FORMATS-konferencen i 2008 blev følgende introduceret:

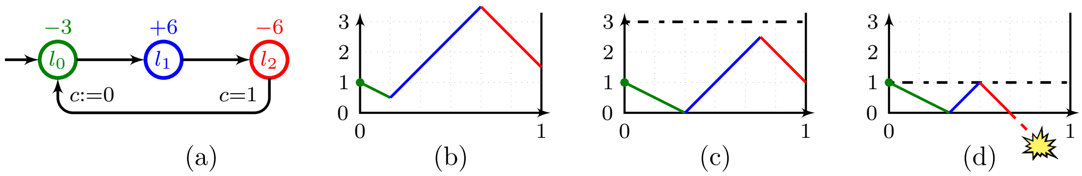
Definition 1 En *vægtet tidsautomat* $(L, l_0, C, \iota, E, r, p)$ består af en endelig mængde L af *lokationer* med initiallokation $l_0 \in L$, en endelig mængde C af *ure*, *lokationsinvarianter* $\iota : L \to \Phi(C)$, en endelig mængde $E \subseteq L \times \Phi(C) \times 2^C \times \mathbb{Z} \times L$ af *vægtede kanter* samt *vægtrater* $r : L \to \mathbb{Z}$.

Her betegner $\Phi(C)$ mængden af *urbetingelser* givet ved den kontekstfrie grammatik $\Phi(C) \ni \phi, \phi_1, \phi_2 ::= x \le k \mid x \ge k \mid \phi_1 \land \phi_2$ for $x \in C$ og $k \in \mathbb{N}$. (For nemhedens skyld ser vi i denne artikel bort fra *åbne* urbetingelser af formen $x < k$ eller $x > k$ og betragter kun deres *lukkede* varianter.)

Vi lader $\mathbb{R}_{\ge 0}^C$ betegne mængden af *urværdier*, altså funktioner fra C til mængden af ikke-negative reelle tal, og $v_0 \in \mathbb{R}_{\ge 0}^C$ funktionen givet ved $v_0(c) = 0$ for ethvert $c \in C$. For $v \in \mathbb{R}_{\ge 0}^C$ og $\phi \in \Phi(C)$ skriver vi $v \models \phi$ hvis urværdierne v opfylder betingelsen givet ved ϕ. Vi indfører to operationer på urværdier: for $v \in \mathbb{R}_{\ge 0}^C$, $t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ og $R \subseteq C$ lader vi $v + t$ og $v[R \leftarrow 0]$ betegne urværdierne givet som følger:

$$(v + t)(c) = v(c) + t \qquad v[R \leftarrow 0](c) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } c \in R \\ v(c) & \text{hvis } c \notin R \end{cases}$$

[1]Laboratoire d'informatique, École polytechnique, Paris, Frankrig
[2]Institut for datalogi, Aalborg Universitet, Danmark
This paper was presented at the NIK-2018 conference; see http://www.nik.no/.



Figur 1: En vægtet tidsautomat med ét ur (a); bemærk at ethvert gennemløb skal fordele én tidsenhed på de tre lokationer l_0, l_1 og l_2. Skema (b) viser en løsning til automatens energiproblem, idet den akkumulerede vægt i slutningen af første gennemløb er større end i dets begyndelse, ergo kan gennemløbet gentages. Samme ræsonnement viser, at skema (c) giver en løsning til intervalproblemet med øvre grænse 3. Det kan vises, at med øvre grænse 1 kan intervalproblemet ikke løses (d).

Semantikken af en vægtet tidsautomat $A = (L, l_0, C, \iota, E, r, p)$ er givet ved det (normalt uendelige) vægtede transitionssystem $[\![A]\!] = (S, s_0, T)$, hvor $S = \{(l, v) \in L \times \mathbb{R}^C_{\geq 0} \mid v \models \iota(l)\}$ med $s_0 = (l_0, v_0)$, og $T \subseteq S \times \mathbb{R} \times S$ består af *vente-* og *overgangs*-transitioner:

$$
\begin{aligned}
T = \{(l,v) \xrightarrow{r(l)\,d} (l, v+d) \mid \forall t \in [0,d] : v+t \models \iota(l)\} \\
\cup \{(l,v) \xrightarrow{p} (l', v[R \leftarrow 0]) \mid (l, \phi, R, p, l') \in E, v \models \phi\}
\end{aligned}
$$

Et *gennemløb* af en tidsautomat A er en uendelig sti $\gamma = (l_0, v_0) \xrightarrow{x_0} (l_1, v_1) \xrightarrow{x_1} \cdots$ i transitionssystemet $[\![A]\!]$. For en givet begyndelsesværdi c og en øvre grænse B siges gennemløbet γ at være *tilladeligt* hvis dens akkumulerede vægte aldrig bliver negative eller overstiger B, dvs. hvis $0 \leq c + \sum_{i=0}^{n} x_n \leq B$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Energiproblemet for vægtede tidsautomater er nu som følger:

> Givet en vægtet tidsautomat A, en begyndelsesværdi c og en øvre grænse B, find da ud af om A har et tilladeligt gennemløb.

Det viser sig at metoderne der kan bruges for at løse dette energiproblem er vidt forskellige alt afhængigt af om B er reel eller $B = \infty$, så i den forstand definerer ovenstående faktisk to forskellige energiproblemer. Vi vil her kalde problemet med $B < \infty$ for *intervalproblemet* og reservere navnet *energiproblem* for tilfældet $B = \infty$; dette følger nogenlunde de konventioner der er blevet etableret siden vores artikel [7] fra 2008. Figur 1, taget fra [6], viser en vægtet tidsautomat og tilhørende energi- og intervalproblemer.

Artiklen [7] viser, at for vægtede tidsautomater med ét ur og *uden kantvægte*, dvs. med $p = 0$ for alle kanter (l, ϕ, R, p, l'), kan energiproblemet løses i polynomiel tid. Der gives ingen resultater for intervalproblemet eller for tidsautomater med mere end ét ur. Resultatet for energiproblemet i ét-urs-tidsautomater fås ved at bemærke, at problemet kan overføres til automatens *hjørnepunktsabstraktion* [6] og at denne har polynomiel størrelse når tidsautomaten kun har ét ur.

Det er sidenhen blevet vist, at intervalproblemet er uafgørbart for tidsautomater med mindst *to* ure [22] og at energiproblemet er uafgørbart for tidsautomater med mindst *fire* ure [8]. Man kan også udvide problemet til såkaldte *multivægtede* tidsautomater, og her er det blevet vist at for tidsautomater med ét ur er intervalproblemet uafgørbart ved mindst to vægte og energiproblemet ved mindst fire vægte [19]. Afgørbarheden af intervalproblemet for ét ur (og én vægt) er et åbent problem.

2 Vægtede tidsautomater med ét ur og kantvægte

Energiproblemet for tidsautomater med ét ur og kantvægte kan ikke overføres til hjørnepunktsabstraktionen, så i en opfølgende artikel [5] publiceret på HSCC-konferencen i 2010 indførte vi en ny fremgangsmåde til at løse problemet. Løsningen baserer sig på at beregne *energifunktioner* hørende til stier langs hvilke uret ikke nulstilles. For nemhedens skyld antager vi i det følgende at alle vægtrater $r(l) \geq 0$.

Efter indledende konstruktioner som omskriver en given vægtet tidsautomat A således at uret maksimalt kan antage værdien 1 og der om enhver lokations indgående kanter gælder, at de enten alle nulstiller uret eller alle bibeholder urets værdi, konstrueres udfra A en endelig automat B, der som tilstande har alle A's lokationer der ikke har indgående kanter som bibeholder urets værdi. Transitionerne i B svarer til alle de stier mellem sådanne lokationer i A, som indeholder højst to kopier af enhver simpel kreds, og er vægtede med funktioner som afbilder en startenergi til den maksimalt opnåelige energiværdi ved udgangen af stien.

Mere præcist ved vi om en sådan sti, at uret har værdi 0 i starten og at det ikke bliver nulstillet langs stien bortset fra i sidste kant. Eftersom alle vægtrater er ikke-negative og urets maksimalværdi er 1, har vi således én tidsenhed som vi kan opholde os i alle stiens lokationer (her tæller vi ikke stiens sidste lokation med). Vi står altså med et *optimeringsproblem*: givet en energiværdi i starten af stien, fordel én tidsenhed på ventetiden i stiens lokationer således at energiværdien ved udgangen af stien er maksimal.

Det vises i [5] at det for dette optimeringsproblem er nok at betragte stier der indeholder højst to kopier af enhver simpel kreds, og at de resulterende *energifunktioner* f langs disse stier har følgende egenskab: Der findes et endeligt antal rationelle tal $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ således at f er en monoton funktion $[x_0, \infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x_i)$ er rationel for ethvert i og alle restriktioner $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ er lineære funktioner $x \mapsto a_i x + b_i$ for rationelle a_i og b_i med $a_i \geq 1$.

Artiklen [5] fortsætter så ved at notere at maksima og kompositioner af disse energifunktioner igen er energifunktioner, og at man nemt kan beregne deres *fikspunkter*. Dette bruges til at løse en variant af energiproblemet i den endelige *energiautomat* B og derefter til at løse energiproblemet i den oprindelige vægtede tidsautomat A.

3 Energiautomater

Det er et oplagt spørgsmål, om konceptet *energiautomat* som indført i [5] kan generaliseres og overføres til andre situationer, og hvad den *algebraiske* baggrund er for at energiproblemer kan løses i endelige energiautomater. Dette spørgsmål forsøgte vi at besvare i artiklen [15] som præsenteredes på ATVA-konferencen i 2013. Her indførtes følgende:

Definition 2 Lad $\mathbb{R}_* = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\perp, \infty\}$ betegne de ikke-negative reelle tal udvidet med ∞ og et ekstra element $\perp$, således at $\perp < x < \infty$, $\perp + x = \perp - x = \perp$ og $\infty + x = \infty - x = \infty$ for alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ samt $\perp + \infty = \perp - \infty = \infty - \perp = \perp$. En *energifunktion* er en afbildning $f : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}_*$ for hvilken $f(\perp) = \perp$, $f(\infty) = \infty$ medmindre $f(x) = \perp$ for alle $x \in \mathbb{R}_*$, og således at

$$f(x_2) - f(x_1) \geq x_2 - x_1 \quad \text{for alle } x_1 \leq x_2 \in \mathbb{R}_* . \tag{1}$$

Her skal $\perp$ ses som en værdi der betegner *udefineret*, og som er bundelementet i det *fuldstændige gitter* $\mathbb{R}_*$. Det følger fra (1) at hvis f er defineret i et $x_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dvs. $f(x_1) > \perp$, da er $f(x_2) \geq f(x_1) + x_2 - x_1 > \perp$ for samtlige $x_2 \geq x_1$, altså er f defineret på et lukket interval $[x_0, \infty]$ eller et åbent interval $]x_0, \infty]$. Ergo er energifunktionerne fra definition 2 en generalisering a funktionerne fra [5]. Vi lader $\mathcal{E}$ betegne mængden af energifunktioner.

Definition 3 En *energiautomat* $A = (S, T, I, F)$ består af en endelig mængde S af *tilstande*, en endelig mængde $T \subseteq S \times \mathcal{E} \times S$ af *transitioner* samt delmængder $I, F \subseteq S$ af *initiale* og *accepterende* tilstande.

Semantikken af en energiautomat A er givet ved det (normalt uendelige) transitionssystem $[\![A]\!] = (Q, U, Q_0, Q_f)$, hvor $Q = S \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, $Q_0 = I \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, $Q_f = F \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, og $U \subseteq Q \times Q$ er givet ved $U = \{(s, x) \to (s', x') \mid \exists (s, f, s') \in T : f(x) = x'\}$. To interessante problemstillinger kan formuleres for energiautomater:

- *Opnåelighed:* Givet en energiautomat A og $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, findes der en endelig sti $(s_0, x_0) \to \cdots \to (s_n, x_n)$ i $[\![A]\!]$ med $s_0 \in I$ og $s_n \in F$?
- *Büchi-accept:* Givet en energiautomat A og $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, findes der en uendelig sti $(s_0, x_0) \to (s_1, x_1) \to \cdots$ i $[\![A]\!]$ med $s_0 \in I$ og således at $s_i \in F$ for uendeligt mange indices i?

Vi skriver $\mathsf{Reach}(A, x_0)$ for opnåeligheds-prædikatet og $\mathsf{Büchi}(A, x_0)$ for Büchi-prædikatet. Büchi-problemet er en generalisering af energiproblemet fra afsnit 1, og for at løse energiproblemet i tidsautomaten i afsnit 2 skal både opnåeligheds- og Büchi-problemet løses i den associerede energiautomat.

For to funktioner $f, g \in \mathcal{E}$ kan vi definere deres *maksimum* og *sammensætning* $f \vee g$ og $f; g$ som følger:

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)) \qquad (f; g)(x) = g(f(x))$$

Bemærk at vi skriver sammensætning $f; g$ fra venstre til højre i stedet for det mere almindelige $g \circ f$; vi vil også tit skrive fg i stedet for $f; g$. Det er nemt at se at $f \vee g$ og fg igen er energifunktioner.

Med operationerne $\vee$ som addition og ; som multiplikation danner $\mathcal{E}$ en *semiring* [12], dvs. en algebraisk struktur hvor $\vee$ er associativ og kommutativ og ; er associativ samt distribuerer over $\vee$. Enhederne for $\vee$ og ; er funktionerne $\underline{\perp}$ og id givet ved $\underline{\perp}(x) = \perp$ og $\mathsf{id}(x) = x$.

En energiautomat A er nu en *vægtet* automat i semiringen $\mathcal{E}$. For en endelig sti $\pi = s_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} s_n$ og et $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gælder der at π giver anledning til en sti $(s_0, x_0) \to \cdots \to (s_n, x_n)$ i $[\![A]\!]$ hvis og kun hvis $(f_0; \ldots; f_{n-1})(x_0) \neq \perp$, og for en uendelig sti $\rho = s_0 \xrightarrow{f_0} s_1 \xrightarrow{f_1} \cdots$ gælder der at ρ giver anledning til en uendelig sti $(s_0, x_0) \to (s_1, x_1) \to \cdots$ i $[\![A]\!]$ hvis og kun hvis $(f_0; \ldots; f_i)(x_0) \neq \perp$ for alle indices i. Dette leder os frem til følgende

Lemma 4 *For en energiautomat $A = (S, T, I, F)$ og $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ holder $\mathsf{Reach}(A, x_0)$ hvis og kun hvis der findes en endelig sti $s_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} s_n$ i A med $s_0 \in I$, $s_n \in F$ og $(f_0; \ldots; f_{n-1})(x_0) \neq \perp$, og $\mathsf{Büchi}(A, x_0)$ holder hvis og kun hvis der findes en uendelig sti $s_0 \xrightarrow{f_0} s_1 \xrightarrow{f_1} \cdots$ i A med $s_0 \in I$, $s_i \in F$ for uendeligt mange indices i og $(f_0; \ldots; f_i)(x_0) \neq \perp$ for alle indices i.*

Det betyder, at opnåeligheds- og Büchi-problemet kan løses *syntaktisk*, i A, og at teknikker fra teorien om semiring-vægtede automater [12] kan bruges som tilgang.

Vi skal bruge en tredje operation på $\mathcal{E}$, Kleene-stjernen *, for at kunne håndtere løkker i energiautomater. For $f \in \mathcal{E}$ definerer vi $f^* \in \mathcal{E}$ ved

$$f^*(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } f(x) \leq x\,, \\ \infty & \text{hvis } f(x) > x\,. \end{cases}$$

Det vises i [15] at der gælder $fg^*h = \bigvee\{fg^nh \mid n \in \mathbb{N}\}$ for alle $f, g, h \in \mathcal{E}$, dvs. $\mathcal{E}$ er en *-*kontinuert Kleene-algebra* [12]. Intuitionen er, at $f^*(x)$ giver den maksimale værdi der kan opnås udfra x ved at anvende f et vilkårligt antal gange, og på grund af egenskaben (1) gælder der, at hvis $f(x) \leq x$, så fås denne ved slet ikke at anvende f, medens når $f(x) > x$, så forøges værdien ved hver iteration.

For en arbitrær semiring S og $n \in \mathbb{N}$ kan man danne *matrix-semiringen* $S^{n\times n}$, hvis elementer er $n\times n$-matricer med indgange i S og hvor addition og multiplikation er defineret som sædvanligt for matricer. Hvis S er en *-kontinuert Kleene-algebra, så er $S^{n\times n}$ også, og *-operationen på $S^{n\times n}$ kan beregnes induktivt som følger: lad $M \in S^{n\times n}$ og skriv $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ med $a \in S^{k\times k}$ for et $k < n$, da er

$$M^* = \begin{pmatrix} (a \vee bd^*c)^* & (a \vee bd^*c)^*bd^* \\ (d \vee ca^*b)^*ca^* & (d \vee ca^*b)^* \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Indgangene i formlen for M^* kan ses som en generalisering af Floyd-Warshall-algoritmen for at beregne korteste stier i en vægtet graf, eller som en generalisering af algoritmen for at konvertere en endelig automat til et regulært udtryk.

En givet energiautomat $A = (S, T, I, F)$ kan konverteres til *matrixform* (α, M, k). Skriv $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ således at $F = \{s_1, \dots, s_k\}$ består af de første k tilstande, og lad $M \in \mathcal{E}^{n\times n}$ være matricen givet ved $M_{ij} = \bigvee\{f \mid (s_i, f, s_j) \in T\}$. Lad $\alpha, \kappa \in \mathcal{E}^n$ være vektorerne givet ved

$$\alpha_i = \begin{cases} \mathsf{id} & \text{hvis } s_i \in I\,, \\ \perp & \text{hvis } s_i \notin I\,, \end{cases} \qquad \kappa_i = \begin{cases} \mathsf{id} & \text{for } i \leq k\,, \\ \perp & \text{for } i > k\,. \end{cases}$$

Den næste sætning følger nu direkte fra lemma 4 og teorien om vægtede automater med vægte i *-kontinuerte Kleene-algebraer [12]:

Sætning 5 *For en energiautomat $A = (\alpha, M, k)$ og $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ holder $\mathsf{Reach}(A, x_0)$ hvis og kun hvis $\alpha M^* \kappa(x_0) \neq \perp$.*

Artiklen [15] fortsætter så med at vise, at en tilsvarende formel kan benyttes for at beregne $\mathsf{Büchi}(A, x_0)$. Metoderne der bruges for at nå frem til dette resultat er sidenhen blevet generaliseret i [16, 17], og vi udskyder derfor sætningen til efter næste afsnit.

4 Ésik-algebraer

Vi har allerede set på semiringe og *-kontinuerte Kleene-algebraer i sidste afsnit, og som en generalisering af sætning 5 gælder der følgende [12]:

Sætning 6 *Lad $A = (\alpha, M, k)$ være en vægtet automat med vægte i en *-kontinuert Kleene-algebra. Da er*

$$\alpha M^* \kappa = \bigvee \{x_1 \cdots x_{n-1} \mid i_1 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}} i_n \text{ endelig sti i } A \text{ med } \alpha_{i_1} = 1 \text{ og } i_n \leq k\} .$$

For at opnå et tilsvarende resultat for uendelige stier må vi udvide vores semiring S med et *semimodul* V. Semimoduler over semiringe er algebraisk-konceptuelt det samme som moduler over ringe eller vektorrum over legemer og blev først indført i [3]. Vi har i artiklen [13], som blev præsenteret på DLT-konferencen i 2015, introduceret **-kontinuerte Kleene-ω-algebraer* som er en speciel klasse af semimoduler over *-kontinuerte Kleene-algebraer. Til ære for den nyligt afdøde Zoltán Ésik vil vi her kalde disse for *Ésik-algebraer*.

En *semimodul* over en semiring $(S, +, \cdot, 0, 1)$ er en kommutativ monoide $(V, +, 0)$ sammen med en virkning $S \times V \to V$, skrevet $(x, v) \to xv$, som opfylder følgende love:

$$\begin{array}{ccc} (x + x')v = xv + x'v & x(v + v') = xv + xv' & 0v = 0 \\ (xx')v = x(x'v) & x0 = 0 & 1v = v \end{array}$$

Definition 7 En *Ésik-algebra* (S, V) består af en *-kontinuert Kleene-algebra $(S, \vee, \cdot, ^*, \perp, 1)$ og en semimodul $(V, \vee, \perp)$ over S samt et *uendeligt produkt* $S^\omega \to V$ som afbilder følger $(x_0, x_1, \dots)$ til elementer $\prod_{n\geq 0} x_n$ af V. Følgende egenskaber kræves:

1. For alle $x, y \in S$ og $v \in V$ er $xy^*v = \bigvee_{n\geq 0} xy^n v$.
2. For alle $x_0, x_1, \dots \in S$ er $\prod_{n\geq 0} x_n = x_0 \prod_{n\geq 1} x_n$.
3. Lad $x_0, x_1, \dots \in S$ og $0 = n_0 \leq n_1 \leq \cdots$ en monoton og ubegrænset følge. Lad $y_k = x_{n_k} \cdots x_{n_{k+1}-1}$ for alle $k \geq 0$, da er $\prod_{n\geq 0} x_n = \prod_{k\geq 0} y_k$.
4. For alle $x_0, x_1, \dots$ og y, z i S er $\prod_{n\geq 0}(x_n(y \vee z)) = \bigvee_{x'_n \in \{y,z\}} \prod_{n\geq 0} x_n x'_n$.
5. For alle $x, y_0, y_1, \dots \in S$ er $\prod_{n\geq 0} x^* y_n = \bigvee_{k_n \geq 0} \prod_{n\geq 0} x^{k_n} y_n$.

Det første af ovenstående aksiomer er det samme som den definerende egenskab ved *-kontinuerte Kleene-algebraer, og strukturer (S, V) som kun opfylder dette første aksiom kaldes også for *generaliserede *-kontinuerte Kleene-algebraer*. Aksiomerne 2 og 3 bestemmer at det uendelige produkt er en udvidelse af det binære produkt, aksiom 4 betyder at $\vee$ distribuerer over $\prod$, og aksiom 5 kræver samme distributivitet for uendelige suprema af formen $\bigvee_{n\geq 0} x^n$. Tilsammen definerer disse egenskaber en generalisering af de *fuldstændige idempotente semimoduler* fra [18], og det vil senere vise sig at energifunktioner danner en Ésik-algebra.

I enhver Ésik-algebra (S, V) kan defineres en *$^\omega$-operation* fra S til V ved $x^\omega = \prod_{n\geq 0} x$. Med denne operation danner (S, V) en *Wilke-algebra* [24].

Lad nu (S, V) være en Ésik-algebra og $n \in \mathbb{N}$. Mængden V^n af vektorer med n indgange i V danner en kommutativ monoide under den sædvanlige vektoraddition, og med matrix-vektor-multiplikation som virkning $S^{n\times n} \times V^n \to V^n$ er V^n således en $S^{n\times n}$-semimodul.

Vi har allerede set, at $S^{n\times n}$ igen er en *-kontinuert Kleene-algebra, med *-operationen på matricer givet som i (2). Det viser sig nu [16], at $(S^{n\times n}, V^n)$ er en generaliseret *-kontinuert Kleene-algebra, og at man kan definere en $^\omega$-operation fra matricer i $S^{n\times n}$ til vektorer i V^n som følger: lad $M \in S^{n\times n}$ og skriv $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ med $a \in S^{k\times k}$ for et $k < n$, da er

$$M^\omega = \begin{pmatrix} (a \vee bd^*c)^\omega \vee (a \vee bd^*c)^* bd^\omega \\ (d \vee ca^*b)^\omega \vee (d \vee ca^*b)^* ca^\omega \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Vi definerer også en vektor $M^{\omega_k} \in V$ som

$$M^{\omega_k} = \begin{pmatrix} (a \vee bd^*c)^\omega \\ d^*c(a \vee bd^*c)^\omega \end{pmatrix}.$$

Tilsvarende til sætning 6 har vi nu følgende resultat om uendelige stier i vægtede automater:

Sætning 8 *Lad (S, V) være en Ésik-algebra og $A = (\alpha, M, k)$ en vægtet automat med vægte i S. Da er*

$$\alpha M^{\omega_k} = \bigvee \{x_1 x_2 \cdots \mid i_1 \xrightarrow{x_1} i_2 \xrightarrow{x_2} \cdots \text{ uendelig sti i } A \\ \text{med } \alpha_{i_1} = 1 \text{ og } i_j \le k \text{ for uendeligt mange } j\}.$$

5 Energiautomater igen

Vi går nu tilbage til at betragte vægtede automater med vægte i semiringen $\mathcal{E}$ af energifunktioner som i definition 3. Lad $\mathbb{B} = \{\mathbf{ff}, \mathbf{tt}\}$ betegne det boolske gitter med orden $\mathbf{ff} < \mathbf{tt}$, og lad $\mathcal{V}$ være mængden af monotone funktioner $v : \mathbb{R}_* \to \mathbb{B}$ med $v(\bot) = \mathbf{ff}$. Der er en virkning $\mathcal{E} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ givet ved $(f, v) \mapsto f; v$. Vi indfører et uendeligt produkt $\mathcal{E}^\omega \to \mathcal{V}$: For $f_0, f_1, \ldots \in \mathcal{E}$ definerer vi $v = \prod_{n\ge 0} f_n \in \mathcal{V}$ ved $v(x) = \mathbf{ff}$ hvis og kun hvis der er et indeks k for hvilket $(f_0; \ldots; f_k)(x) = \bot$.

Lad nu $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ være undersemimodulet af $\mathcal{V}$ frembragt af alle uendelige produkter af elementer fra $\mathcal{E}$. Det vises i [17], at parret $(\mathcal{E}, \mathcal{U})$ er en Ésik-algebra og at den til $\prod$ hørende $^\omega$-operation $\mathcal{E} \to \mathcal{U}$ er givet ved

$$f^\omega(x) = \begin{cases} \mathbf{ff} & \text{hvis } x = \bot \text{ eller } f(x) < x\,, \\ \mathbf{tt} & \text{hvis } x \ne \bot \text{ og } f(x) \ge x\,. \end{cases}$$

Intuitionen er at $f^\omega(x) = \mathbf{tt}$ hvis og kun hvis f kan anvendes på x et uendeligt antal gange, og på grund af egenskaben (1) er dette tilfældet hvis og kun hvis $f(x) \ge x$.

Vi kan nu anvende teorien om Ésik-algebraer til at opnå følgende

Sætning 9 *For en energiautomat $A = (\alpha, M, k)$ og $x_0 \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ holder* $\mathsf{Büchi}(A, x_0)$ *hvis og kun hvis $\alpha M^{\omega_k}(x_0) = \mathbf{tt}$.*

Artiklen [17] fortsætter så med at vise, at hvis man begrænser sig til mængden $\mathcal{E}_{\mathsf{pwl}}$ af *rationelt stykkevis lineære* energifunktioner som i afsnit 2, så danner $\mathcal{E}_{\mathsf{pwl}}$ en underalgebra af $\mathcal{E}$ og den tilhørende mængde $\mathcal{U}_{\mathsf{pwl}}$ af uendelige produkter fra $\mathcal{E}_{\mathsf{pwl}}$ en undermonoide af $\mathcal{U}$. Parret $(\mathcal{E}_{\mathsf{pwl}}, \mathcal{U}_{\mathsf{pwl}})$ er så igen en Ésik-algebra, men alle tilhørende operationer er nu *beregnelige* i eksponentiel tid. Det betyder at opnåeligheds- og Büchi-problemer for energiautomater med rationelt stykkevist lineære funktioner kan afgøres i eksponentiel tid.

6 Realtids-energiautomater

I artiklen [10] publiceret på FSTTCS-konferencen i 2015 har vi anvendt teorien om Ésik-algebraer på en klasse af realtids-automater, der minder om de vægtede tidsautomater fra afsnit 2. I stedet for først at reducere en givet vægtet tidsautomat til en energiautomat, anvender vi nu teorien direkte i realtids-konteksten. Lad $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \mathbb{Q} \cap [0, \infty[$ og $\mathbb{Q}_{\leq 0} = \mathbb{Q} \cap]-\infty, 0]$ betegne mængderne af ikke-negative, henholdsvist ikke-positive *rationelle* tal.

Definition 10 En *energitidsautomat* $A = (L, E, I, F, r)$ består af en endelig mængde L af *lokationer*, en endelig mængde $E \subseteq L \times \mathbb{Q}_{\leq 0} \times \mathbb{Q}_{\geq 0} \times L$ af *kanter*, delmængder $I, F \subseteq L$ af *initiale* og *accepterende* lokationer, samt *vægtrater* $r : L \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

En transition $(l, p, b, l') \in E$ skrives som $l \xrightarrow[b]{p} l'$, hvor p kaldes dens *pris* og $b \geq -p$ dens *nedre grænse*. *Semantikken* af en sådan automat er givet ved det (normalt uendelige) transitionssystem $[\![A]\!] = (Q, T, Q_0, Q_f)$, hvor $Q = L \times \mathbb{Q}^2_{\geq 0}$, $Q_0 = I \times \mathbb{Q}^2_{\geq 0}$ og $Q_f = F \times \mathbb{Q}^2_{\geq 0}$, og $T \subseteq Q \times Q$ er givet ved

$$T = \{(l, x, t) \to (l', x', t') \mid t' \leq t \text{ og } \exists (l, p, b, l') \in E : \\ x + (t - t')r(l) \geq b \text{ og } x' = x + (t - t')r(l) + p\}.$$

I en tilstand $(l, x, t) \in Q$ skal x forstås som den hidtil akkumulerede energi og t som det resterende *tidsbudget*. I en transition $(l, x, t) \to (l', x', t')$ i T bruges så en ventetid $t - t'$ i lokationen l, hvorefter overgangen $l \xrightarrow[b]{p} l'$ tages. Vi kan igen formulere to interessante problemstillinger:

- *Opnåelighed:* Givet en energitidsautomat A og $x_0, t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, findes der en endelig sti $(s_0, x_0, t) \to \cdots \to (s_n, x_n, t')$ i $[\![A]\!]$ med $s_0 \in I$ og $s_n \in F$?
- *Büchi-accept:* Givet en energitidsautomat A og $x_0, t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, findes der en uendelig sti $(s_0, x_0, t) \to (s_1, x_1, t_1) \to \cdots$ i $[\![A]\!]$ med $s_0 \in I$ og således at $s_i \in F$ for uendeligt mange indices i?

En sti i en energitidsautomat beskriver en funktion $\mathbb{Q}^2_{\geq 0} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ som afbilder en begyndelsesenergi x og et tidsbudget t til den maksimalt opnåelige energiværdi ved udgangen af stien. Sådanne funktioner kan sammensættes, svarende til sammensætning af stier, men kompositionen er ikke den sædvanlige (som før indsætter vi ekstra værdier $\perp$ og ∞):

Definition 11 Lad $\mathcal{F}$ betegne mængden af funktioner $f : \mathbb{R}_* \times [0, \infty] \to \mathbb{R}_*$ som er monotone i begge variable og som opfylder $f(\perp, t) = \perp$ for alle t. For $f, g \in \mathcal{F}$ definerer vi $f \vee g$ og $f \rhd g$ som følger:

$$(f \vee g)(x, t) = \max(f(x, t), g(x, t)) \qquad (f \rhd g)(x, t) = \bigvee_{t_1 + t_2 = t} g(f(x, t_1), t_2)$$

Det kan vises, at $\mathcal{F}$ danner et fuldstændigt gitter under operationen $\vee$, så vi kan også definere en *-operation på $\mathcal{F}$ ved $f^*(x, t) = \bigvee_{n \geq 0} f^n(x, t)$.

Funktionen svarende til den simpleste energitidsautomat med kun én transition $l \xrightarrow[b]{p} l'$ er givet ved $f_{r(l),p,b}(x, t) = x + r(l)t + p$ hvis $x + r(l)t \geq b$ og $\perp$ ellers. Lad nu $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ betegne delmængden frembragt af sådanne simple funktioner under operationerne $\vee$ og $\rhd$. Det kan vises at operationen $\rhd$ er associativ på $\mathcal{E}$ (hvilket *ikke* er tilfældet for $\mathcal{F}$), og at $\mathcal{E}$ danner en semiring med $\vee$ som addition og $\rhd$ som multiplikation.

Lemma 12 *For ethvert $f \in \mathcal{E}$ findes $N \in \mathbb{N}$ således at $f^* = \bigvee_{n=0}^{N} f^n$.*

Ovenstående egenskab betegnes også som at $\mathcal{E}$ er *lokalt lukket* og medfører direkte, at $\mathcal{E}$ er en *-kontinuert Kleene-algebra.

Lad nu $\mathcal{V}$ betegne mængden af monotone funktioner $v : \mathbb{R}_* \times [0, \infty] \to \mathbb{B}$ som opfylder $v(\perp, t) = \mathbf{ff}$ for alle t. Der er en virkning $\mathcal{E} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ givet ved $(f, v) \mapsto f \triangleright v$. Vi indfører et uendeligt produkt $\mathcal{E}^\omega \to \mathcal{V}$: For $f_0, f_1, \ldots \in \mathcal{E}$ definerer vi $v = \prod_{n \geq 0} f_n \in \mathcal{V}$ ved $v(x, t) = \mathbf{tt}$ hvis og kun hvis der er en uendelig følge $t_0, t_1, \ldots \in [0, \infty]$ således at $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = t$ og $f_n(f_{n-1}(\cdots(f_0(x, t_0), t_1)\cdots), t_n) \neq \perp$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Med andre ord er $\prod_{n \geq 0} f_n(x, t) = \mathbf{tt}$ hvis og kun hvis alle endelige præfikser af den uendelige sammensætning $(f_0 \triangleright f_1 \triangleright \cdots)(x, t)$ er definerede. Lad $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ være undersemimodulet af $\mathcal{V}$ frembragt af alle uendelige produkter af elementer fra $\mathcal{E}$, da vises det i [10] at $(\mathcal{E}, \mathcal{U})$ er en Ésik-algebra. En energitidsautomat (L, E, I, F, r) kan konverteres til matrixform ved at lade $M_{ij} = \bigvee\{f_{r(l_i),p,b} \mid (l_i, p, b, l_j) \in E\}$, og så gælder følgende

Sætning 13 *For en energitidsautomat $A = (\alpha, M, k)$ og $x_0, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ holder* $\mathsf{Reach}(A, x_0, t)$ *hvis og kun hvis $\alpha M^* \kappa(x_0, t) \neq \perp$ og* $\mathsf{B\ddot{u}chi}(A, x_0, t)$ *hvis og kun hvis $\alpha M^{\omega_k}(x_0, t) = \mathbf{tt}$.*

I [10] vises også at alle funktioner i $\mathcal{E}$ og $\mathcal{U}$ er rationelt stykkevist lineære og at alle tilhørende operationer derfor er beregnelige (her er det vigtigt at $\mathcal{E}$ er lokalt lukket). Som en konsekvens er opnåeligheds- og Büchi-problemet for energitidsautomater afgørbare.

7 Intervalproblemet

Vi vil nu udarbejde en anvendelse af teorien om Ésik-algebraer på *intervalproblemet* fra afsnit 1, som benytter sig af *energirelationer* i stedet for energifunktioner. Som model benytter vi en variant af sidste afsnits energitidsautomater:

Definition 14 En *intervaltidsautomat* $A = (L, E, I, F, r)$ består af en endelig mængde L af *lokationer*, en endelig mængde $E \subseteq L \times \mathbb{Q}^3 \times L$ af *kanter*, delmængder $I, F \subseteq L$ af *initiale* og *accepterende* lokationer, samt *vægtrater* $r : L \to \mathbb{Q}$.

En transition $(l, p, a, b, l') \in T$ skrives som $l \xrightarrow[[a,b]]{p} l'$, hvor p kaldes dens *pris* og intervallet $[a, b]$ dens *intervalgrænse*. *Semantikken* af en sådan automat er givet ved det (normalt uendelige) transitionssystem $[\![A]\!] = (Q, T, Q_0, Q_f)$, hvor $Q = L \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $Q_0 = I \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{\geq 0}$ og $Q_f = F \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{\geq 0}$, og $T \subseteq Q \times Q$ er givet ved

$$T = \{(l, x, t) \to (l', x', t') \mid t' \leq t \text{ og } \exists (l, p, a, b, l') \in E : \\ a \leq x + (t - t')r(l) \leq b \text{ og } x' = x + (t - t')r(l) + p\}.$$

Formuleringerne af opnåeligheds- og Büchi-problemet er akkurat de samme som i sidste afsnit.

Lad $\mathbb{Q}^\infty = \mathbb{Q} \cup \{-\infty, \infty\}$ og $\mathbb{Q}_{\geq 0}^\infty = \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Definition 15 En *intervaltidsrelation* er en delmængde af $\mathbb{Q}^\infty \times \mathbb{Q}^\infty_{\geq 0} \times \mathbb{Q}^\infty$. Mængden af disse betegnes $\mathcal{Q}$. For $R_1, R_2 \in \mathcal{Q}$ definerer vi $R_1 \vee R_2 = R_1 \cup R_2$ og

$$R_1 \rhd R_2 = \{(x_0, t_1 + t_2, x_2) \mid \exists x_1 : (x_0, t_1, x_1) \in R_1, (x_1, t_2, x_2) \in R_2\}.$$

$\mathcal{Q}$ danner et fuldstændigt gitter under operationen $\vee$, med bundelement $\emptyset$ og topelement $\mathbb{Q}^\infty \times \mathbb{Q}^\infty_{\geq 0} \times \mathbb{Q}^\infty$. Derfor kan vi definere en *-operation på $\mathcal{Q}$ ved $R^* = \bigvee_{n \geq 0} R$.

Lemma 16 *$\mathcal{Q}$ er en *-kontinuert Kleene-algebra.*

Bevis: Det viser sig at $\mathcal{Q}$ faktisk er en *kontinuert* Kleene-algebra [16], dvs. at $\rhd$ respekterer vilkårlige suprema. Lad $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q}$ og $P, R \in \mathcal{Q}$, og skriv $P \rhd \mathcal{S} \rhd R = \{P \rhd Q \rhd R \mid Q \in \mathcal{S}\}$. Vi viser at $P \rhd (\bigvee \mathcal{S}) \rhd R = \bigvee (P \rhd \mathcal{S} \rhd R)$:

$$\begin{aligned} P \rhd \Big(\bigvee \mathcal{S}\Big) \rhd R &= P \rhd \{(x, t, x') \mid \exists Q \in \mathcal{S} : (x, t, x') \in Q\} \rhd R \\ &= \{(x, t, x') \mid \exists Q \in \mathcal{S} : (x, t, x') \in P \rhd Q \rhd R\} = \bigvee (P \rhd \mathcal{S} \rhd R) \qquad \square \end{aligned}$$

Lad nu $\mathcal{V}$ betegne mængden af relationer i $\mathbb{Q}^\infty \times \mathbb{Q}^\infty_{\geq 0}$. Der er en virkning $\mathcal{Q} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ givet ved $(R, U) \mapsto R \rhd U$. Vi indfører et uendeligt produkt $\mathcal{Q}^\omega \to \mathcal{V}$: For $R_0, R_1, \ldots \in \mathcal{Q}$ definerer vi $U = \prod_{n \geq 0} R_n \in \mathcal{V}$ ved $(x, t) \in U$ hvis og kun hvis der er uendelige følger $x_0, x_1, \ldots \in \mathbb{Q}^\infty$ og $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{Q}^\infty_{\geq 0}$ således at $\sum_{n=0}^\infty t_n = t$ og $(x_n, t_{n+1}, x_{n+1}) \in R_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 17 *$(\mathcal{Q}, \mathcal{V})$ er en Ésik-algebra.*

Bevis: Igen viser det sig at $\mathcal{Q}$ faktisk er en *kontinuert* Kleene-ω-algebra [16], dvs. at den opfylder aksiomerne 2 og 3 fra definition 7 samt at $P \rhd (\bigvee \mathcal{S}) \rhd U = \bigvee (P \rhd \mathcal{S} \rhd U)$ for alle $P \in \mathcal{Q}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q}$ og $U \in \mathcal{V}$ og at $\prod_{n \geq 0} (\bigvee \mathcal{S}_n) = \bigvee \{\prod_{n \geq 0} Q_n \mid \forall n : Q_n \in \mathcal{S}_n\}$ for alle $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots \subseteq \mathcal{Q}$.

At aksiomerne 2 og 3 er opfyldt følger direkte fra definitionen af $\prod$. Beviset for $P \rhd (\bigvee \mathcal{S}) \rhd U = \bigvee (P \rhd \mathcal{S} \rhd U)$ er som for lemma 16. For den sidste egenskab har vi

$$\begin{aligned} \prod_{n \geq 0} \Big(\bigvee \mathcal{S}_n\Big) &= \prod_{n \geq 0} \{(x, t, x') \mid \exists Q_n \in \mathcal{S}_n : (x, t, x') \in Q_n\} \\ &= \Big\{(x, t) \mid \exists x_0, x_1, \ldots, t_1, t_2 \ldots : \sum_{n=0}^{\infty} t_n = t \text{ og} \\ &\qquad\qquad \forall n : \exists Q_n \in \mathcal{S}_n : (x_n, t_{n+1}, x_{n+1}) \in Q_n\Big\} \\ &= \bigvee \Big\{ \prod_{n \geq 0} Q_n \mid \forall n : Q_n \in \mathcal{S}_n\Big\}. \qquad \square \end{aligned}$$

En transition $l \xrightarrow[{[a,b]}]{p} l'$ i en intervaltidsautomat (L, E, I, F, r) giver anledning til relationen $R_{r(l),p,a,b} = \{(x, t, x') \mid a \leq x + r(l)t \leq b, x' = x + r(l)t + p\} \in \mathcal{Q}$. Automaten kan nu konverteres til matrixform ved at lade $M_{ij} = \bigvee \{R_{r(l_i),p,a,b} \mid (l_i, p, a, b, l_j) \in E\}$, og så gælder følgende

Sætning 18 *For en intervaltidsautomat $A = (\alpha, M, k)$, $x_0 \in \mathbb{Q}$ og $t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ holder $\mathsf{Reach}(A, x_0, t)$ hvis og kun hvis der findes $x \in \mathbb{Q}$ så $(x_0, t, x) \in \alpha M^* \kappa$, og $\mathsf{Büchi}(A, x_0, t)$ holder hvis og kun hvis $(x_0, t) \in \alpha M^{\omega_k}$.*

Vi bemærker, at vi med ovenstående *ikke* har vist at opnåeligheds- eller Büchi-problemet for intervaltidsautomater er afgørbare; vi giver kun en måde hvorpå man kan udtrykke dem algebraisk. For at vise afgørbarhed er man nødt til at betragte delmængderne $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$ og $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ af relationerne frembragt af de basale relationer $R_{r,p,a,b}$ som ovenfor og så vise at de fire operationer $\vee$, $\rhd$, * og $^\omega$ rent faktisk kan *beregnes* på disse delmængder.

I afsnit 5 kunne vi give simple fikspunktformler for energifunktionerne f^* og f^ω, hvilket viser beregneligheden i dette tilfælde. I afsnit 6 medfører lokal lukkethed af $\mathcal{E}$ at f^* er beregnelig for funktioner stammende fra energitidsautomater, og for at beregne f^ω gives en algoritme i [10] (som vi ikke har haft plads til her). I den nyligt accepterede artikel [1] udvikler vi fikspunktformler for intervalrelationer i en kontekst, der minder om vores, men vi må her lade det være åbent om disse kan overføres til vores intervaltidsautomater.

Litteratur

[1] G. Bacci, K. G. Larsen, N. Markey, P. Bouyer-Decitre, U. Fahrenberg, and P.-A. Reynier. Optimal and robust controller synthesis using energy timed automata with uncertainty. In *FM*, 2018.

[2] M. Bisgaard, D. Gerhardt, H. Hermanns, J. Krčál, G. Nies, and M. Stenger. Battery-aware scheduling in low orbit: The GomX-3 case. In *FM*, vol. 9995 of *Lect. Notes Comput. Sci.* Springer, 2016.

[3] S. L. Bloom and Z. Ésik. *Iteration Theories: The Equational Logic of Iterative Processes.* EATCS monographs on theoretical computer science. Springer, 1993.

[4] T. Bøgholm, B. Thomsen, K. G. Larsen, and A. Mycroft. Schedulability analysis abstractions for safety critical Java. In *ISORC*. IEEE, 2012.

[5] P. Bouyer, U. Fahrenberg, K. G. Larsen, and N. Markey. Timed automata with observers under energy constraints. In *HSCC*. ACM, 2010.

[6] P. Bouyer, U. Fahrenberg, K. G. Larsen, and N. Markey. Quantitative analysis of real-time systems using priced timed automata. *Comm. ACM*, 54(9):78–87, 2011.

[7] P. Bouyer, U. Fahrenberg, K. G. Larsen, N. Markey, and J. Srba. Infinite runs in weighted timed automata with energy constraints. In *FORMATS*, vol. 5215 of *Lect. Notes Comput. Sci.* Springer, 2008.

[8] P. Bouyer, K. G. Larsen, and N. Markey. Lower-bound constrained runs in weighted timed automata. In *QEST*. IEEE Computer Society, 2012.

[9] J. Brauer, R. R. Hansen, S. Kowalewski, K. G. Larsen, and M. C. Olesen. Adaptable value-set analysis for low-level code. In *SSV*, vol. 24 of *OASICS*. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2011.

[10] D. Cachera, U. Fahrenberg, and A. Legay. An ω-algebra for real-time energy problems. In *FSTTCS*, vol. 45 of *LIPIcs*. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2015.

[11] A. David, K. G. Larsen, A. Legay, and M. Mikučionis. Schedulability of Herschel-Planck revisited using statistical model checking. In *ISoLA (2)*, vol. 7610 of *Lect. Notes Comput. Sci.* Springer, 2012.

[12] M. Droste, W. Kuich, and H. Vogler. *Handbook of Weighted Automata.* EATCS Monographs in Theoretical Computer Science. Springer, 2009.

[13] Z. Ésik, U. Fahrenberg, and A. Legay. *-continuous Kleene ω-algebras. In *DLT*, vol. 9168 of *Lect. Notes Comput. Sci.* Springer, 2015.

[14] Z. Ésik, U. Fahrenberg, and A. Legay. *-continuous Kleene ω-algebras for energy problems. In *FICS*, vol. 191 of *Electr. Proc. Theor. Comput. Sci.*, 2015.

[15] Z. Ésik, U. Fahrenberg, A. Legay, and K. Quaas. Kleene algebras and semimodules for energy problems. In *ATVA*, vol. 8172 of *Lect. Notes Comput. Sci.* Springer, 2013.

[16] Z. Ésik, U. Fahrenberg, A. Legay, and K. Quaas. An algebraic approach to energy problems I: *-continuous Kleene ω-algebras. *Acta Cybern.*, 23(1):203–228, 2017.

[17] Z. Ésik, U. Fahrenberg, A. Legay, and K. Quaas. An algebraic approach to energy problems II: The algebra of energy functions. *Acta Cybern.*, 23(1):229–268, 2017.

[18] Z. Ésik and W. Kuich. On iteration semiring-semimodule pairs. *Semigroup Forum*, 75:129–159, 2007.

[19] U. Fahrenberg, L. Juhl, K. G. Larsen, and J. Srba. Energy games in multiweighted automata. In *ICTAC*, vol. 6916 of *Lect. Notes Comput. Sci.* Springer, 2011.

[20] H. Falk, K. Hammond, K. G. Larsen, B. Lisper, and S. M. Petters. Code-level timing analysis of embedded software. In *EMSOFT*. ACM, 2012.

[21] G. Frehse, K. G. Larsen, M. Mikučionis, and B. Nielsen. Monitoring dynamical signals while testing timed aspects of a system. In *ICTSS*, vol. 7019 of *Lect. Notes Comput. Sci.* Springer, 2011.

[22] N. Markey. *Verification of Embedded Systems – Algorithms and Complexity.* Mémoire d'habilitation, École Normale Supérieure de Cachan, France, 2011.

[23] M. Mikučionis, K. G. Larsen, J. I. Rasmussen, B. Nielsen, A. Skou, S. U. Palm, J. S. Pedersen, and P. Hougaard. Schedulability analysis using Uppaal: Herschel-Planck case study. In *ISoLA (2)*, vol. 6416 of *Lect. Notes Comput. Sci.* Springer, 2010.

[24] T. Wilke. An Eilenberg theorem for infinity-languages. In *ICALP*, vol. 510 of *Lect. Notes Comput. Sci.* Springer, 1991.