
ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-341-356

**Об одной теореме о среднем значении
кратных тригонометрических сумм**

В. Н. Чубариков (г. Москва)

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Аннотация

Доказана теорема о среднем для кратных тригонометрических сумм, обобщающая теорему Г. И. Архипова [12, 13]. Первая теорема подобного типа лежит в сердцевине метода И. М. Виноградова [2]. В работе найден вариант теоремы с "равноправными" длинами промежутков изменения переменных. Интересным приложением метода И. М. Виноградова являются оценки дзетовых сумм вида

$$\sum_{n \leq P} n^{it}.$$

Подобным приложением теоремы о среднем, доказанной нами, служат оценки сумм вида

$$\sum_{n \leq P_1} \cdots \sum_{n \leq P_r} (n_1 \dots n_r + k)^{it}, \sum_{n \leq P} \tau_s(n)(n+k)^{it}, \sum_{p \leq P} (p+k)^{it}.$$

Ключевые слова: теоремы о среднем И. М. Виноградова, Г. И. Архипова; многомерная функция делителей; простые числа; дзетовая сумма.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

В. Н. Чубариков. Об одной теореме о среднем значении кратных тригонометрических сумм // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 341–356.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-341-356

On a mean-value theorem for multiple trigonometric sums

V. N. Chubarikov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.

e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Abstract

A mean-value theorem for multiple trigonometric generalizing from the G. I. Arkhipov's theorem [12, 13] was proved. The first theorem of the similar type lies in the core of the I. M. Vinogradov's method [2]. In the paper the version of theorem with "similar" lengths of changing intervals of variables. Estimates of zeta-sums of the form

$$\sum_{n \leq P} n^{it}.$$

are the interesting application of the I.M. Vinogradov's method. The similar application of the mean-value theorem proving by us serve the estimate of sums of the form

$$\sum_{n \leq P_1} \cdots \sum_{n \leq P_r} (n_1 \dots n_r + k)^{it}, \sum_{n \leq P} \tau_s(n)(n+k)^{it}, \sum_{p \leq P} (p+k)^{it}.$$

Keywords: the mean-value theorem of I. M. Vinogradov and G. I. Arkhipov, the multivariate divisor function, prime numbers, the zeta-sum.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

V. N. Chubarikov, 2020, "On a mean-value theorem for multiple trigonometric sums", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 341–356.

1. Введение

В настоящей статье дано обобщение теоремы Г. И. Архипова о среднем значении степени модуля кратной тригонометрической суммы [12]. Первая теорема о среднем, лежащая в основе метода тригонометрических сумм, найдена И. М. Виноградовым. Наиболее совершенное изложение её дано в монографии [2]. Ю. В. Линнику [7] принадлежит p -адический вариант доказательства этой теоремы, усовершенствованный впоследствии А. А. Карацубой, Н. М. Коробовым [10, 11], Г. И. Архиповым [13] и другими.

Интересное применение метода тригонометрических сумм найдено Д. Е. Литтлвудом [1] в теории дзета-функции Римана, что позволило уточнить остаток Валле-Пуссена в асимптотической формуле для числа простых, не превосходящих любой наперёд заданной границы. Основным моментом доказательства этого утверждения лежит оценка дзетовой суммы вида

$$S = S(P; t) = \sum_{n \leq P} n^{it}.$$

Дальнейшие улучшения оценки дзетовой суммы связаны с применением метода И. М. Виноградова [5, 6, 3, 8].

Нами найдены оценки для любого целого k , отличного от нуля, подобных кратных тригонометрических сумм вида

$$\sum_{n \leq P_1} \cdots \sum_{n \leq P_r} (n_1 \dots n_r + k)^{it}, \sum_{n \leq P} \tau_s(n)(n+k)^{it}, \sum_{p \leq P} (p+k)^{it},$$

где $\tau_s(n)$ — многомерная функция делителей числа n , выражающая число решений уравнения $n_1 \dots n_s = n$ в натуральных числах n_1, \dots, n_s ; а переменная p пробегает последовательность всех простых чисел.

В качестве первого шага получения этих оценок дадим доказательство теоремы о среднем для многочленов от нескольких переменных заданной степени.

Пусть $J = J(\mathbf{P}; n, k, r)$ обозначает число решений системы диофантовых уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2k} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} = 0, \quad 0 \leq t_1 + \dots + t_r \leq n, \quad t_1, \dots, t_r \geq 0,$$

где каждое неизвестное $x_{i,j}$, $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq 2k$, принимает все целые значения от 1 до P_j , причём $1 < P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_r \leq 2P_1$, $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_r)$, а величины n, k, r являются натуральными числами. Очевидно, что

$$J = J(\mathbf{P}; n, k, r) = \int \cdots \int_{\Omega} |S(A)|^{2k} dA,$$

где

$$S(A) = S(A; \mathbf{P}; n, k, r) = \sum_{x_1=1}^{P_1} \cdots \sum_{x_r=1}^{P_r} \exp \{2\pi i f(x_1, \dots, x_r)\},$$

причём $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ \dots \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^n \cdots \sum_{t_r=0}^n \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r},$$

число коэффициентов многочлена $f(\mathbf{x})$ равно $m = \binom{n+r}{r}$, символ Ω обозначает куб размерности m следующего вида

$$0 \leq \alpha(t_1, \dots, t_r) < 1, \quad 0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n,$$

буква A обозначает набор вещественных коэффициентов

$$\alpha(t_1, \dots, t_r), \quad 0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n,$$

многочлена $f(x_1, \dots, x_r)$ степени n от r переменных x_1, \dots, x_r , наконец,

$$d\Omega = \prod_{\substack{t_1=0 \\ \dots \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^n \cdots \prod_{\substack{t_r=0 \\ \dots \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^n d\alpha(t_1, \dots, t_r).$$

ТЕОРЕМА. Пусть $3 \leq n, 2 \leq r$, — натуральные числа, $0 \leq \tau$ — целое число, $m = \binom{n+r}{r}$, $m_1 = \frac{nr m}{r+1}$, и пусть $k \geq m\tau$. Тогда для величины $J = J(\mathbf{P}; n, k, r)$ имеем оценку

$$J \leq D(\tau) P_1^{2rk - \Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau) = m_1(1 - (1 - 1/n)^\tau), \quad D(\tau) = (2^{nr}(n+1)^k m^{-1})^{2k}.$$

2. Леммы

ЛЕММА 1. Пусть q — простое число, T_0 — число решений системы сравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1j}^{t_1} \dots x_{rj}^{t_r} \equiv 0 \pmod{q}$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n, m = \binom{n+r}{r},$$

где каждая неизвестная x_{ij} пробегает значения из полной системы вычетов по модулю q .

Тогда для величины T_0 справедлива оценка

$$T_0 \leq (n(n+1))^{r-1} 2^m q^{2mr-m+1}, m = \binom{n+r}{r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$T_0 = q^{-m} \sum_{a(0, \dots, 0)=1}^q \dots \sum_{a(t_1, \dots, t_r)=1}^q \dots \sum_{a(0, \dots, n)=1}^q \left| \sum_{x_1=1}^q \dots \sum_{x_r=1}^q e^{2\pi i F_A(x_1, \dots, x_r)/q} \right|^{2m},$$

где

$$F_A(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^n \dots \sum_{t_r=0}^n a(t_1, \dots, t_r),$$

$$t_1 + \dots + t_r \leq n$$

причём A — целочисленный набор $a(t_1, \dots, t_r)$, $0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n$.

Произведём следующую замену переменных суммирования

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2 + y_1^{n+1}, \\ \dots \quad \dots \\ x_r = y_r + y_1^{(n+1)^{r-1}}. \end{cases}$$

Поскольку в сумме для T_0 переменные x_1, \dots, x_r пробегают полные системы вычетов по модулю q , переменные y_1, \dots, y_r будут пробегать полные системы вычетов по модулю q , и наоборот. Следовательно,

$$T_0 = q^{-m} \sum_{a(0, \dots, 0)=1}^q \dots \sum_{a(t_1, \dots, t_r)=1}^q \dots \sum_{a(0, \dots, n)=1}^q 1 \times$$

$$\times \left| \sum_{y_1=1}^q \dots \sum_{y_r=1}^q e^{2\pi i F_A(y_1, y_2 + y_1^{n+1}, \dots, y_r + y_1^{(n+1)^{r-1}})/q} \right|^{2m}.$$

Далее при $p > 1$ воспользуемся неравенством Гёльдера в виде

$$\left(\sum_{\nu} |a_{\nu}| \right)^p \leq \left(\sum_{\nu} 1 \right)^{p-1} \sum_{\nu} |a_{\nu}|^p.$$

При $p = 2m$ получим

$$\left| \sum_{y_1=1}^q \dots \sum_{y_r=1}^q e^{2\pi i F_A(y_1, y_2 + y_1^{n+1}, \dots, y_r + y_1^{(n+1)^{r-1}})/q} \right|^{2m} \leq$$

$$\leq q^{(r-1)(2m-1)} \sum_{y_2=1}^q \dots \sum_{y_r=1}^q \left| \sum_{y_1=1}^q e^{2\pi i F_A(y_1, y_2 + y_1^{n+1}, \dots, y_r + y_1^{(n+1)^{r-1}})/q} \right|^{2m}.$$

Отсюда находим

$$T_0 \leq q^{(r-1)(2m-1)} U,$$

где

$$U = \sum_{y_2=1}^q \cdots \sum_{y_r=1}^q 1 \times \times q^{-m} \sum_{a(0,\dots,0)=1}^q \cdots \sum_{a(t_1,\dots,t_r)=1}^q \cdots \sum_{a(0,\dots,n)=1}^q \left| \sum_{y_1=1}^q e^{2\pi i F_A(y_1, y_2 + y_1^{n+1}, \dots, y_r + y_1^{(n+1)^{r-1}})} \right|^{2m}.$$

Имеем

$$U = \sum_{y_2=1}^q \cdots \sum_{y_r=1}^q U(y_2, \dots, y_r),$$

где $U(y_2, \dots, y_r)$ равно числу решений следующей системы сравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j y_{1,j}^{t_1} (y_2 + y_{1,j}^{n+1})^{t_2} \cdots (y_r + y_{1,j}^{(n+1)^{r-1}})^{t_r} \equiv 0 \pmod{q},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \cdots + t_r \leq n,$$

причём неизвестные $y_{1,j}, 1 \leq j \leq 2m$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю q .

Заметим, что величина $U^* = U(y_2, \dots, y_r)$ не зависит от переменных y_2, \dots, y_r , так как вместе с решением $(y_{1,j}, y_2 + y_{1,j}^{n+1}, \dots, y_r + y_{1,j}^{(n+1)^{r-1}})$ предыдущей системы сравнений её решением является $(y_{1,j}, y_{1,j}^{n+1}, \dots, y_{1,j}^{(n+1)^{r-1}})$, и наоборот. В этом легко убеждаемся, предположив, что $x_{i,j}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq 2m$, решение системы сравнений, тогда $x_{i,j} + a_i, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq 2m$, также будет решением системы сравнений. Действительно,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j (x_{1,j} + a_1)^{t_1} \cdots (x_{r,j} + a_r)^{t_r} = \\ & = \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j \sum_{v_1=0}^{t_1} \binom{t_1}{v_1} a_1^{t_1-v_1} x_{1,j}^{v_1} \cdots \sum_{v_r=0}^{t_r} \binom{t_r}{v_r} a_r^{t_r-v_r} x_{r,j}^{v_r} = \\ & = \sum_{v_1=0}^{t_1} \cdots \sum_{v_r=0}^{t_r} \binom{t_1}{v_1} a_1^{t_1-v_1} \cdots \binom{t_r}{v_r} a_r^{t_r-v_r} \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1,j}^{v_1} \cdots x_{r,j}^{v_r} \equiv 0 \pmod{q}. \end{aligned}$$

Следовательно, положив $(a_1, a_2, \dots, a_r) = (0, -y_2, \dots, -y_r)$, получим эквивалентную систему сравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j y_{1,j}^{t_1+t_2(n+1)+\dots+t_r(n+1)^{r-1}} \equiv 0 \pmod{q},$$

$$0 \leq t_1, t_2, \dots, t_r, t_1 + t_2 + \cdots + t_r \leq n.$$

Так как любое значение t вида

$$t = t_1 + t_2(n+1) + \cdots + t_r(n+1)^{r-1}, 0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \cdots + t_r \leq n,$$

Принимается не более одного раза, то последнюю систему сравнений можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j z_j^t \equiv 0 \pmod{q}, t = t_1 + t_2(n+1) + \cdots + t_r(n+1)^{r-1},$$

$$0 \leq t_1, t_2, \dots, t_r, 1 \leq t_1 + t_2 + \cdots + t_r \leq n.$$

Количество сравнений в этой системе сравнений равно $m - 1$, где $m = \binom{n+r}{r}$. Степени многочленов её не превосходят $n(n+1)^{r-1}$. Занумеруем числа t , представимые в виде

$$t = t_1 + t_2(n+1) + \cdots + t_r(n+1)^{r-1}, 0 \leq t_1, \dots, t_r, 1 \leq t_1 + \cdots + t_r \leq n,$$

в порядке возрастания $1 = s_1 < s_2 < \dots < s_{m-1} = n(n+1)^{r-1}$.

Таким образом, число решений U^* рассматриваемой системы сравнений можно представить в виде

$$V = q^{-m+1} \sum_{b_{s_1}=1}^q \dots \sum_{b_{s_{m-1}}=1}^q \left| \sum_{z=1}^q e^{2\pi i f_B(z)/q} \right|^{2m}, \quad f_B(z) = \sum_{u=1}^{m-1} b_t z^{s_u}.$$

Используя оценку А.Вейля, получим

$$U^* \leq q^{m+1} + (n(n+1)^r - 1)^{2m} q^m \leq (n(n+1))^{r-1} 2m q^{m+1}.$$

Отсюда находим

$$U = \sum_{y_2=1}^q \dots \sum_{y_r=1}^q U^* = q^{r-1} U^* \leq (n(n+1))^{r-1} 2m q^{m+r}, \quad T_0 \leq (n(n+1))^{r-1} 2m q^{2mr-m+1}.$$

Лемма 1 доказана. \square

Докажем несколько полезных тождеств.

ЛЕММА 2. Пусть t_1, \dots, t_r — неотрицательные целые числа. Тогда имеем тождества

$$\begin{aligned} m^* &= m^*(n, r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r=n}}^n \dots \sum_{t_r=0}^n 1 = \binom{n+r-1}{r-1}; \\ m &= m(n, r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^n \dots \sum_{t_r=0}^n 1 = \binom{n+r}{r}; \\ m_1^* &= m_1^*(n, r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r=n}}^n \dots \sum_{t_r=0}^n (t_1 + \dots + t_r) = r \left(\binom{n+r}{r} - \binom{n+r-1}{r-1} \right); \\ m_1 &= m_1(n, r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^n \dots \sum_{t_r=0}^n (t_1 + \dots + t_r) = \frac{rn}{r+1} \binom{n+r}{r}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим при $|z| < 1$ производящую функцию $F(z)$ для последовательности m_0 . Имеем

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m^*(n, r) z^n = \sum_{t_1=0}^{\infty} \dots \sum_{t_r=0}^{\infty} z^{t_1+\dots+t_r} = \left(\sum_{t_1=0}^{\infty} z^{t_1} \right) \dots \left(\sum_{t_r=0}^{\infty} z^{t_r} \right) = \frac{1}{(1-z)^r}.$$

Следовательно,

$$m^* = m^*(n, r) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{(1-z)^r} \Big|_{z=0} = \frac{r(r+1) \dots (r+n-1)}{n!} = \binom{n+r-1}{r-1}.$$

Далее величина $m = m(n, r) = \sum_{k=0}^n m^*(k, r)$ равна числу решений уравнения $t_1 + \dots + t_{r+1} = n$ в целых неотрицательных числах t_1, \dots, t_{r+1} , т.е.

$$m = m(n, r) = m^*(n, r+1) = \binom{n+r}{r}.$$

Рассмотрим теперь при $|z| < 1$ производящую функцию $F_1(z)$ последовательности $m_1^*(n, r)$. Находим

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m_1^*(n, r) z^n = \sum_{t_1=0}^{\infty} \dots \sum_{t_r=0}^{\infty} (t_1 + \dots + t_r) z^{t_1+\dots+t_r} =$$

$$= rz \left(\frac{1}{1-z} \right)' r \frac{z}{(1-z)^{r-1}} = r \frac{z}{(1-z)^{r+1}} = r \left(\frac{1}{(1-z)^{r+1}} - \frac{1}{(1-z)^r} \right).$$

Отсюда и из вида производящей функции $F(z)$ имеем

$$m_1^*(n, r) = r \left(\binom{n+r}{r} - \binom{n+r-1}{r-1} \right).$$

Наконец, используя при $0 \leq k \leq n$ формулу для $m_1^*(k, r)$ и для $m(k, r)$, имеем

$$m_1(n, r) = \sum_{k=0}^n m_1^*(k, r) = r \binom{n+r+1}{r+1} - r \binom{n+r}{r} = \frac{rn}{r+1} \binom{n+r}{r}.$$

Лемма доказана. \square

Перейдём к формулировке и доказательству леммы о числе решений полной системы сравнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задана матрица M , имеющая $m = \binom{n+r}{r}$ строк и $k \geq 1$ столбцов,

$$M = (x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r}),$$

где

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n, 1 \leq j \leq k.$$

Набор векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$, где $\mathbf{x}_s = (x_{1,s}, \dots, x_{r,s}), 1 \leq s \leq k$, называют **регулярным по модулю q** , если ранг матрицы M , элементами которой являются вычеты $x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r}$ по простому модулю q , будет максимален. В частности, при $k \geq m$, он равен m .

ЛЕММА 3. Пусть p — простое число, T — число решений системы сравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} \equiv 0 \pmod{p^{t_1 + \dots + t_r}},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, 1 \leq t_1 + \dots + t_r \leq n,$$

где неизвестные $x_{s,j}, 1 \leq s \leq r, 1 \leq j \leq k$, пробегает значения из полной системы вычетов по модулю p^n , например, $0 \leq x_{s,j} < p^n$, и пусть векторы $\mathbf{x}_j, j = 2, 4, \dots, 2m$, удовлетворяют условию регулярности по модулю p .

Тогда справедлива следующая оценка

$$T \leq (n+1)^{2rm} p^A, A = 2rnm - m_1, \quad m = \binom{n+r}{r}, \quad m_1 = \frac{rn}{r+1} \binom{n+r}{r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $p > n$, так как в противном случае решения системы сравнений, удовлетворяющие условию регулярности, отсутствуют.

Представим каждую неизвестную $x_{s,j}, 1 \leq s \leq r, 1 \leq j \leq 2m$, в виде

$$x_{s,j} = \sum_{l=0}^{n-1} p^l x_{s,j,l}, 0 \leq x_{s,j,l} < p,$$

и подставим эти выражения в систему сравнений.

Сначала отметим, что сравнения полученной системы обязаны выполняться по модулю p , т.е.

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1,j,0}^{t_1} \dots x_{r,j,0}^{t_r} \equiv 0 \pmod{p},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, 1 \leq t_1 + \dots + t_r \leq n,$$

и неизвестные $\mathbf{x}_{2v,0} = (x_{1,2v,0}, \dots, x_{r,2v,0}), 1 \leq v \leq m$, удовлетворяют условию регулярности. Число решений этой системы сравнений обозначим через T_0 . По лемме 1 имеем

$$T_0 \leq (n(n+1))^{r-1} 2^m p^{2mr-m+1}, m = \binom{n+r}{r}.$$

Итак, неравенство для величины T_0 даёт оценку сверху количества нулевых координат $x_{s,j,0}$, удовлетворяющих системе сравнений из условия леммы. Оценку числа других координат проведем по индукции по параметру ν . При $\nu = 0$ такая оценка получена выше.

Далее первоначальную систему сравнений рассмотрим по модулю $p^{\nu+1}$, $1 \leq \nu \leq n$. Положим

$$u_{s,j,\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} p^{\mu} x_{s,j,\mu} = u_{s,j,\nu-1} + p^{\nu} x_{s,j,\nu}, u(s, j, 0) = x(s, j, 0).$$

Имеем $x_{s,j} \equiv u(s, j, \nu) \pmod{p^{\nu+1}}$. Следовательно, обязана выполняться система сравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j u_{1,j,\nu}^{t_1} \dots u_{r,j,\nu}^{t_r} \equiv 0 \pmod{p^{\nu+1}},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, \nu + 1 \leq t_1 + \dots + t_r \leq n,$$

и неизвестные $\mathbf{x}_{2\nu,0} = (x_{1,2\nu,0}, \dots, x_{r,2\nu,0})$, $1 \leq \nu \leq m$, удовлетворяют условию регулярности по модулю p . Число решений этой системы сравнений обозначим через T_{ν} .

Предположим, что справедлива оценка $T_{\nu-1}$. Зафиксируем любое решение $u_{s,j,\nu-1}$, $1 \leq s \leq r$, $1 \leq j \leq 2m$. Для этого фиксированного решения оценим величину $T(\nu)$.

Поскольку

$$u_{1,j,\nu}^{t_1} \dots u_{r,j,\nu}^{t_r} \equiv u_{1,j,\nu-1}^{t_1} \dots u_{r,j,\nu-1}^{t_r} + p^{\nu} \psi_j(t_1, \dots, t_r),$$

где

$$\psi_j(t_1, \dots, t_r) = \sum_{\lambda=1}^r t_{\lambda} u_{1,j,\nu-1}^{t_1} \dots u_{\lambda,j,\nu-1}^{t_{\lambda}-1} \dots u_{r,j,\nu-1}^{t_r} x_{\lambda,j,\nu} \pmod{p},$$

где при $t_{\lambda} = 0$ соответствующее слагаемое в последней сумме равно 0.

Отсюда приходим к системе сравнений с неизвестными $x_{s,j,\nu}$, $1 \leq s \leq r$, $1 \leq j \leq 2m$,

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j \psi_j(t_1, \dots, t_r) \equiv p^{-\nu} \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j u_{1,j,\nu-1}^{t_1} \dots u_{r,j,\nu-1}^{t_r} \equiv \lambda(t_1, \dots, t_r) \pmod{p},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, \nu + 1 \leq t_1 + \dots + t_r \leq n,$$

причём набор векторов $\mathbf{u}_{2j,\nu-1} = (u_{1,2j,\nu-1}, \dots, u_{r,2j,\nu-1})$, $1 \leq j \leq m$, удовлетворяет условию регулярности по модулю p .

Для оценки $T(\nu)$ из предыдущей системы сравнений составим r подсистем сравнений. В первую подсистему войдут сравнения с условиями $t_1 \geq \nu + 1, t_2 = \dots = t_r = 0$, во вторую те сравнения, для которых $t_1 + t_2 \geq \nu + 1, t_2 \neq 0, t_3 = \dots = t_r = 0$, и т.д., наконец, в r -ю подсистему включим сравнения с условиями $t_1 + \dots + t_r \geq \nu + 1, t_r \neq 0$.

Пусть $R_s(\nu + 1)$ обозначает число решений в целых числах неравенств $\nu + 1 \leq t_1 + \dots + t_s \leq n$, $0 \leq t_1, \dots, t_s$. Тогда в первую подсистему войдут $R_1(\nu + 1)$ сравнений, во вторую — войдут $R_2(\nu + 1) - R_1(\nu + 1)$, и т.д., в r -ю войдут сравнения в количестве $R_r(\nu + 1) - R_{r-1}(\nu + 1)$.

Первая подсистема будет состоять из сравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1,j,0}^{t_1-1} x_{1,j,\nu} \equiv \lambda(t_1, 0, \dots, 0) \pmod{p}, \nu + 1 \leq t_1 \leq n,$$

с неизвестными $x_{1,j,\nu}$, $1 \leq j \leq 2m$, и с условием регулярности по модулю p , которое означает, что матрица её коэффициентов имеет максимальный ранг по модулю p . Последнее означает, что найдутся $\rho = R_1(\nu + 1)$ коэффициентов с номерами $1 \leq j_1 \leq j_{\rho} \leq 2m$, таких, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} x_{1,j_1,0}^{\nu+1} & \dots & x_{1,j_{\rho},0}^{\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1,j_1,0}^n & \dots & x_{1,j_{\rho},0}^n \end{pmatrix}$$

не сравним с 0 по модулю p . Следовательно, первая подсистема сравнений имеет не более $p^{2m-R_1(\nu+1)}$ решений.

Рассмотрим теперь s -ю подсистему сравнений. Она приводится к виду

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1,j,0}^{t_1} \dots x_{s,j,0}^{t_s-1} x_{s,j,\nu} \equiv \lambda'(t_1, \dots, t_s, 0, \dots, 0) \pmod{p}, \nu + 1 \leq t_1 \leq n,$$

$$\nu + 1 \leq t_1 + \dots + t_s \leq n, t_s \neq 0, 0 \leq t_1, \dots, t_s,$$

с неизвестными $x_{1,j,\nu}, 1 \leq j \leq 2m$, из полной системы по модулю вычетов p , и с условием регулярности по модулю p , т.е. с условием линейной независимости сравнений системы по модулю p . Как и раньше, получим, что число решений этой системы сравнений не превосходит $p^{R_s(\nu+1)-R_{s-1}(\nu+1)}$.

Таким образом, число решений ν -й системы сравнений не превосходит

$$T_\nu \leq p^{2m-R_1(\nu+1)} \prod_{s=2}^r p^{R_s(\nu+1)-R_{s-1}(\nu+1)} = p^{2mr-R_r(\nu+1)}.$$

Следовательно,

$$T \leq \prod_{\nu=0}^{n-1} T_\nu \leq (n(n+1)^{r-1})^{2m} p^{2mrn-R}, R = \sum_{\nu=1}^n R_r(\nu).$$

Найдём значение величины R . Имеем

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\nu=1}^n R_r(\nu) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{k=\nu}^n R_r^*(k) = \sum_{k=1}^n R_r^*(k) \sum_{\nu=1}^k 1 = \sum_{k=1}^n k R_r^*(k) = \\ &= \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^n \dots \sum_{\substack{t_r=0 \\ t_1+\dots+t_r \leq n}}^n (t_1 + \dots + t_r) = \frac{rn}{r+1} \binom{n+r}{r} = m_1. \end{aligned}$$

□

Теперь докажем лемму о рекуррентном неравенстве.

ЛЕММА 4. Пусть $n \geq 2, r \geq 1, k \geq 2m, 1 \leq P_1 \leq \dots \leq P_r \leq 2P_1$. Тогда существует такое число p из отрезка $[P_1^{1/n}, 2P_1^{1/n}]$, что

$$J = J(\mathbf{P}; n, k, r) \leq D_1 p^{2r(k-m)+2mrn-m_1} J(\mathbf{Q}; n, k-m, r) + D_2 P_1^{2kr-2k+2m-2},$$

$$m_1 = \frac{rn}{r+1} \binom{n+r}{r}, D_1 = 2n^2 J_0 \leq 2n^2 (n+1)^{2rm} \binom{k}{m}^2, D_2 = 2^{2nm+2nk(r-1)+1} n^{2nk},$$

где $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_r), Q_s = P_s p^{-1} + 1, 1 \leq s \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $(P_1 \dots P_r)^{m_1} > D_2$, поскольку в противном случае оценка величины J становится тривиальной. При этом условии на отрезке вида $[P_1^{1/n}, 2P_1^{1/n}]$ находится по крайней мере n различных простых чисел ([14], гл. III, лемма 8, с. 105–107). Пусть p_1, \dots, p_n обозначают любые n различных таких простых чисел, $\mathbf{x}_j = (x_{1,j}, \dots, x_{r,j})$. Представим J в виде

$$J = \int \dots \int_{\Omega} \left| \sum_{\mathbf{x}_1} \sum_{\mathbf{x}_3} \dots \sum_{\mathbf{x}_{2k-1}} e^{2\pi i(f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_3)+\dots+f(\mathbf{x}_{2k-1}))} \right|^2 d\Omega,$$

где координаты векторов $\mathbf{x}_j = (x_{1,j}, \dots, x_{r,j})$ принимают значения целых чисел, причём $1 \leq x_{s,j} \leq P_s, 1 \leq s \leq r$.

Наборы векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-1}\}$ разобьём на два класса. Первый класс A будет состоять только из тех наборов, которые удовлетворяют условию регулярности по модулю $p = p_s$ при некотором $s, 1 \leq s \leq r$. Определение регулярности набора векторов по простому модулю дано перед формулировкой леммы 3. Все остальные наборы отнесём ко второму классу B .

Пусть

$$\sum_A = \sum_{\mathbf{x}_1} \sum_{\mathbf{x}_3} \dots \sum_{\substack{\mathbf{x}_{2k-1} \\ \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-1}\} \in A}} e^{2\pi i(f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_3)+\dots+f(\mathbf{x}_{2k-1}))}.$$

Сумма \sum_B определяется аналогично. Тогда справедливо неравенство

$$J = \int \cdots \int_{\Omega} \left| \sum_A + \sum_B \right|^2 d\Omega \leq 2J_1 + 2J_2,$$

где

$$J_1 = \int \cdots \int_{\Omega} \left| \sum_A \right|^2 d\Omega, \quad J_2 = \int \cdots \int_{\Omega} \left| \sum_B \right|^2 d\Omega.$$

Оценим J_1 . Класс A разобьём на n совокупностей A_1, \dots, A_n . Для всякого $s, 1 \leq s \leq n$, совокупность A_s будет состоять только из тех наборов векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-1}\}$, которые удовлетворяют условию регулярности по модулю p_s , и не входят в совокупности A_1, \dots, A_{s-1} . По неравенству Коши имеем

$$J_1 = \int \cdots \int_{\Omega} \left| \sum_{s=1}^n \sum_{A_s} \right|^2 d\Omega \leq n \sum_{s=1}^n J_1 = \int \cdots \int_{\Omega} \left| \sum_{A_s} \right|^2 d\Omega \leq n^2 J_0,$$

где J_0 обозначает ту совокупность A_t , для которой при $1 \leq s \leq n$ интеграл

$$J_s = \int \cdots \int_{\Omega} \left| \sum_{A_s} \right|^2 d\Omega$$

имеет наибольшее значение.

Рассмотрим те наборы $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-1}\}$, которые удовлетворяют условию регулярности по модулю p_t , причём первые m столбцов соответствующей матрицы M , отвечающей набору векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2m-1}\}$, являются линейно независимыми по модулю p_t . Совокупность таких наборов векторов обозначим $A_{t,0}$. Поскольку все другие наборы векторов из совокупности A_t отличаются только номером для линейно независимых столбцов матрицы M , получим неравенство

$$J_0 \leq \binom{k}{m}^2 \int \cdots \int_{\Omega} \left| \sum_{A_{t,0}} \right|^2 d\Omega.$$

Преобразуем сумму

$$\sum_{A_{t,0}} = \left\{ \sum_{\mathbf{x}_1} \cdots \sum_{\mathbf{x}_{2m-1}} \right\}' \sum_{\mathbf{x}_{2m+1}} \cdots \sum_{\mathbf{x}_{2k-1}},$$

где штрих в знаке суммы означает, что первые m векторов характеризуют условие регулярности по модулю $p = p_t$.

Заметим, что для остальных $r - m$ векторов $\mathbf{x}_j, j = 2m + 1, \dots, 2k - 1$, их координаты произвольным образом изменяются в соответствующих промежутках. Представим эти векторы \mathbf{x}_j в виде $\mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j + p\mathbf{z}_j$, где при $1 \leq s \leq r, j = 2m + 1, \dots, 2k - 1$, их координаты $y_{s,j}$ пробегают целые значения от 1 до p , а $z_{s,j}$ — от 0 до $P_s p^{-1}$.

Применяя неравенство Гёльдера, найдем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{A_{t,0}} \right|^2 &\leq \left| \left\{ \sum_{\mathbf{x}_1} \cdots \sum_{\mathbf{x}_{2m-1}} \right\}' \right|^2 \left| \sum_{\mathbf{y}} \sum_{\mathbf{z}} \right|^{2(k-m)} \leq \\ &\leq p^{2r(k-m)-r} \sum_{\mathbf{y}} \left| \left\{ \sum_{\mathbf{x}_1} \cdots \sum_{\mathbf{x}_{2m-1}} \right\}' \right|^2 \left| \sum_{\mathbf{z}} \right|^{2(k-m)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_0 \leq \binom{k}{m}^2 p^{2r(k-m)} \max_{\mathbf{y}} \int \cdots \int_{\Omega} \left| \left\{ \sum_{\mathbf{x}_1} \cdots \sum_{\mathbf{x}_{2m-1}} \right\}' \right|^2 \left| \sum_{\mathbf{z}} \right|^{2(k-m)} d\Omega.$$

Отсюда при некотором $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{r,0})$ интеграл в левой части последнего неравенства представляет собой число решений следующей системы диофантовых уравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} = \sum_{j=2m+1}^{2k} (-1)^j (y_{1,0} + pz_{1,j})^{t_1} \dots (y_{r,0} + pz_{r,j})^{t_r},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n,$$

где неизвестные векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2m-1}$, удовлетворяют условию регулярности по модулю p , а неизвестные $z_{s,j}, 1 \leq s \leq r, j = 2m + 1, 2m + 2, \dots, 2k$ пробегает все целые значения от 0 до $P_s p^{-1}$.

Не изменяя числа решений в этой системе, произведём сдвиг векторов неизвестных на вектор $-\mathbf{y}_0$. Получим следующую систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j (x_{1,j} - y_{1,0})^{t_1} \dots (x_{r,j} - y_{r,0})^{t_r} = p^{t_1 + \dots + t_r} \sum_{j=2m+1}^{2k} (-1)^j z_{1,j}^{t_1} \dots z_{r,j}^{t_r},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n.$$

Так как число $J(\Lambda)$ решений системы уравнений

$$\sum_{j=2m+1}^{2k} (-1)^j z_{1,j}^{t_1} \dots z_{r,j}^{t_r} = \lambda(t_1, \dots, t_r), (0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n),$$

не превосходит числа решений подобной системы уравнений при $\lambda(t_1, \dots, t_r) = 0$ для всех $0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n$, то имеем

$$J(\Lambda) \leq J(\mathbf{Q}; n, k - m, r).$$

Пусть T обозначает число решений системы сравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j (x_{1,j} - y_{1,0})^{t_1} \dots (x_{r,j} - y_{r,0})^{t_r} \equiv 0 \pmod{p^{t_1 + \dots + t_r}},$$

$$0 \leq t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \leq n,$$

причём переменные $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$, удовлетворяют условию регулярности по модулю p и пробегает полные системы вычетов по модулю p^n .

Воспользуемся оценкой величины T из леммы 3. Находим

$$J_0 \leq \binom{k}{m}^2 p^{2r(k-m)} T J(\mathbf{Q}; n, k - m, r),$$

$$J_1 \leq n^2 J_0 \leq n^2 (n + 1)^{2rm} \binom{k}{m}^2 p^{2r(k-m) + 2mrn - m_1} J(\mathbf{Q}; n, k - m, r).$$

Перейдём к оценке J_2 . Для любого $1 \leq s \leq n$ наборы векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-1}$, входящие в класс B , не являются регулярными по модулю p_s . Следовательно, найдутся целые числа $c_s(t_1, \dots, t_r)$, не все сравнимые с нулём по модулям $p_s, 1 \leq s \leq n$, такие, что справедливы сравнения

$$\sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1 + \dots + t_r \leq n}}^n \dots t_r = 0^n c_s(t_1, \dots, t_r) x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} \equiv 0 \pmod{p_s},$$

$$j = 1, 3, \dots, 2k - 1.$$

Отсюда имеем, что при фиксированном наборе $c_s(t_1, \dots, t_r), t_1 + \dots + t_r \leq n$, отличном от нулевого по модулю p_s , число решений $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-1}$ предыдущего сравнения не превосходит $(np_s^{r-1})^k$. Число указанных наборов $c_s(t_1, \dots, t_r), t_1 + \dots + t_r \leq n$, не превосходит $2p_s^{m-1}$, поскольку можно считать, что $c_s(0, \dots, 0)$ может принимать лишь два значения 0 или 1. Таким образом, количество всех возможных наборов $\mathbf{x}_1(p_s), \mathbf{x}_3(p_s), \dots, \mathbf{x}_{2k-1}(p_s)$ вычетов по модулю p_s не превосходит $2p_s^{m-1} (np_s)^k$.

Итак, для всякого набора $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-1}$ из B и любого $p_s, 1 \leq s \leq n$, найдётся $\mathbf{x}_j(p_s)$ такое, что

$$\mathbf{x}_j \equiv \mathbf{x}_j(p_s) \pmod{p_s}.$$

Зафиксируем любой набор вычетов векторов

$$\mathbf{x}_j(p_s) \equiv \mathbf{a}_{p_s}, 1 \leq s \leq n, j = 1, 3, \dots, 2k-1.$$

Тогда по китайской теореме найдется единственный набор векторов \mathbf{a}_j по модулю $p_1 \dots p_n$ такой, что

$$\mathbf{x}_j \equiv \mathbf{a}_j \pmod{p_1 \dots p_n}.$$

Таким образом, число наборов векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-1}$, входящие в класс B , не превосходит

$$U = \prod_{s=1}^n (2p_s^{m-1} (np_s^r)^k).$$

Поскольку для любого $1 \leq s \leq n$ справедливо неравенство $p_s \leq 2P_1^{1/n}$, имеем

$$U \leq 2^{n+n(m-1)+kn(r-1)} n^{nk} P_1^{kr-k+m-1}.$$

Так как модуль сравнения $p_1 \dots p_n$ не превосходит P_1 , то соответствующие сравнения эквивалентны равенствам

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{a}_j, j = 1, 3, \dots, 2k-1.$$

Это означает, что число элементов в классе B не превосходит U .

Следовательно,

$$J_2 \leq U^2 \leq 2^{2nm+2nk(r-1)} n^{2nk} P_1^{2kr-2k+2m-2}$$

Лемма 4 доказана. \square

3. Доказательство теоремы

Проведем индукцию по параметру $\tau \geq 0$. Пусть $\tau = 0$. Тогда $\Delta(\tau) = 0$ и выполняется тривиальная оценка $J \leq (P_1 \dots P_r)^{2k}$.

Пусть, теперь, $\tau = 1$. Так как $k \geq m$, то, очевидно, имеем

$$J(\mathbf{P}; n, k, r) \leq (P_1 \dots P_r)^{2(k-m)} J(\mathbf{P}; n, m, r), \Delta(1) = m_1/n = \frac{r}{r+1} \binom{n+r}{r} = \frac{r}{r+1} m.$$

Возьмём простое число q из отрезка $[P_r, 2P_r], 1 < P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_r \leq 2P_1$. Из леммы 1 находим

$$\begin{aligned} J(\mathbf{P}; n, m, r) &\leq (n(n+1)^{r-1})^{2m} q^{2mr-m+1} \leq (n+1)^{2mr} (4P_1)^{2mr-m+1} \leq \\ &\leq 4^{2mr-m+1} (n+1)^{2mr} (P_1 \dots P_r)^{2m} P_1^{-m+1} \leq 4^{2mr-m+1} (n+1)^{2mr} (P_1 \dots P_r)^{2m} P_1^{-\Delta(1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J(\mathbf{P}; n, k, r) \leq D(1)(P_1 \dots P_r)^{2k} P_1^{-\Delta(1)}.$$

Утверждение теоремы достаточно доказать при $k = m\tau$. Предположим, что утверждение справедливо при $\tau = l \geq 1$. Докажем, что оно имеет место при $\tau = l+1$. Применим лемму 4. Получим

$$\begin{aligned} J(\mathbf{P}; n, m(l+1), r) &\leq 2n^2(n+1)^{2rm} \binom{m(l+1)}{m}^2 p^{2rml+2mrn-m_1} J(\mathbf{Q}; n, ml, r) + \\ &+ 2^{2nm+2nm(l+1)(r-1)+1} n^{2nm(l+1)} P_1^{2m(l+1)r-2m(l+1)+2m-2}, \end{aligned}$$

где $P_1^{1/n} \leq p \leq 2P_1^{1/n}, Q_s = P_s p^{-1} + 1$.

Для оценки величины $J(\mathbf{Q}; n, ml, r)$ воспользуемся предположением индукции:

$$J(\mathbf{Q}; n, ml, r) \leq D_0(l)(Q_1 \dots Q_r)^{2ml} Q_1^{-\Delta(l)}.$$

Используя эту оценку и предыдущее неравенство, находим

$$J(\mathbf{P}; n, m(l+1), r) \leq W_1 + W_2,$$

где

$$W_1 = A(l+1)D_0(l)p^{2rml+2mrn-m_1}(Q_1 \dots Q_r)^{2ml}Q_1^{-\Delta(l)} = A(l+1)D_0(l)R,$$

$$A(l+1) = 2n^2(n+1)^{2rm} \binom{m(l+1)}{m}^2,$$

$$W_2 \leq 2^{2nm+2nm(l+1)(r-1)+1}n^{2nm(l+1)}P_1^{2m(l+1)r-2m(l+1)+2m-2}.$$

Достаточно доказать, что $W_1 \leq 0,5W_0, W_2 \leq 0,5W_0$, где

$$W_0 = D(l+1)(P_1 \dots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-\Delta(l+1)}, D(l+1) \geq D_0(l+1).$$

Оценим W_1 . Имеем

$$R = p^{2rml+2mrn-m_1}(Q_1 \dots Q_r)^{2ml}Q_1^{-\Delta(l)} = R_0B,$$

$$R_0 = p^{2mrn-m_1+\Delta(l)}(P_1 \dots P_r)^{2ml}P_1^{-\Delta(l)}, B = 2^{2mr} \prod_{s=1}^r (1+pP_s^{-1})^{2ml},$$

где

$$Q_s = P_s p^{-1} + 1, 1 \leq s \leq r; P_1^{1/n} \leq p \leq 2P_1^{1/n}; 1 < P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_r \leq 2P_1.$$

Преобразуем R_0 . Находим

$$p^{2mrn-m_1+\Delta(l)} \leq (2P_1)^{2mr-\frac{m_1}{n}(1-\frac{1}{n})^l}.$$

Следовательно,

$$R_0 \leq 2^{2mr}(P_1 \dots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-\Delta(l)-\frac{m_1}{n}(1-\frac{1}{n})^l}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \Delta(l) + \frac{m_1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l &= m_1 - m_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l + \frac{m_1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l = \\ &= m_1 - m_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{l+1} = \Delta(l+1), \end{aligned}$$

то

$$R_0 \leq 2^{2mr}(P_1 \dots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-\Delta(l+1)}.$$

Оценим теперь величину B . Будем считать, что $P_1 \geq (2ml)^2$. В противном случае утверждение теоремы справедливо тривиально. Тогда, учитывая, что $n \geq 3, l \geq 2$, получим

$$pP_s^{-1} \leq pP_1^{-1} \leq 2P_1^{\frac{1}{n}-1} \leq 2(2ml)^{2(\frac{1}{n}-1)} \leq (2ml)^{-1}.$$

Таким образом, имеем

$$B \leq 2^{mr}e^r \leq 2^{r(m+2)}.$$

Собирая вместе оценки для R_0 и B , находим

$$W_1 = R_0B \leq D_0(l)A(l+1)2^{r(m+2)}(P_1 \dots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-\Delta(l+1)}.$$

Покажем, что

$$D_0(l)A(l+1)2^{r(m+2)} \leq 0,5D(l+1).$$

Действительно, имеем цепочку неравенств

$$D(l+1) \geq D_0(l+1) \geq 2D_0(l)A(l+1)2^{r(m+2)},$$

$$D_0(l) \geq 2D_0(l-1)A(l)2^{r(m+2)},$$

... ..

$$D_0(2) \geq 2D_0(1)A(2)2^{r(m+2)}.$$

Перемножая их, получим

$$D(l+1) \geq D_0(1) (2n^2 2^{2rm})^l \left(\binom{2m}{m} \dots \binom{m(l+1)}{m} \right)^2 2^{lr(m+2)+r},$$

где

$$D_0(1) \geq 2n^2 2^{2rm}.$$

Поскольку из полиномиальной формулы Ньютона

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{t_1 \\ \dots \\ t_k \\ t_1 + \dots + t_k = n}} \frac{n!}{t_1! \dots t_k!} a_1^{t_1} \dots a_k^{t_k}$$

следует неравенство

$$\frac{(m(l+1))!}{(m!)^{l+1}} \leq (l+1)^{m(l+1)},$$

получим

$$\binom{2m}{m} \dots \binom{m(l+1)}{m} = \frac{(m(l+1))!}{(m!)^{l+1}} \leq (l+1)^{m(l+1)}.$$

Следовательно, для $D(l+1)$ выполняется неравенство

$$D(l+1) \geq D_0(l+1) \geq \left(2^{r(m+2)+1} (n+1)^{2mr} (l+1)^{2m} \right)^{l+1},$$

т.е. $W_1 \leq 0,5W_0$.

Перейдём теперь к оценке W_2 . Из определения W_2 имеем равенство

$$W_2 = A_1(l+1)P_1^{2mr(l+1)-2m(l+1)+2m-2},$$

где

$$A_1(l+1) = 2^{2nm+2nm(l+1)(r-1)+1} n^{2nm(l+1)}.$$

Достаточно доказать, что $W_2 \leq 0,5W_0$, т.е.

$$\begin{aligned} A_1(l+1)P_1^{2mr(l+1)-2m(l+1)+2m-2} &\leq A_1(l+1)(P_1 \dots P_r)^{2m(l+1)} P_1^{-2m(l+1)+2m-2} \leq \\ &\leq 0,5D(l+1)(P_1 \dots P_r)^{2m(l+1)} P_1^{-\Delta(l+1)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $A_1(l+1) \leq 0,5D(l+1)$. Утверждение будет доказано, если будет доказана справедливость неравенства

$$P_1^{-2m(l+1)+2m-2} \leq P_1^{-\Delta(l+1)},$$

т.е.

$$m_1 - m_1 \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{l+1} \leq 2ml + 2, m_1 = \frac{rnm}{r+1}.$$

Из неравенства Бернулли получим

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{l+1} \leq \frac{l+1}{n}.$$

Достаточно проверить при $l \geq 1, r \geq 2$, справедливость следующих неравенств

$$m_1 \frac{l+1}{n} \leq 2ml + 2, \frac{rnm(l+1)}{r+1} \leq 2ml + 2, \frac{2l}{l+1} \geq 1 > \frac{r}{r+1}.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

Найденная в работе теорема возникла в связи с приближением гладкой функции от нескольких переменных многочленом Тейлора, который представляет собой сумму форм различных степеней, являющихся дифференциалами данной функции. Здесь рассматривается случай, когда переменные "равноправны". Другими словами, длины промежутков изменения их имеют один и тот же порядок. Для оценок сумм, подобных дзетовой, нам понадобятся суммы с "неравноправными" длинами промежутков суммирования. Соответствующая теорема о среднем нами доказана и будет опубликована в ближайшее время.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Littlewood J. E. Researches in the theory of Riemann ζ -function // Proc. London Math. Soc.(2), 1922, Том. 20, XXII-XXVIII.
2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.
3. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1 + it)$ // Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, Том. 22, № 2, 161–164.
4. Виноградов И. М. К вопросу об оценке тригонометрических сумм // Изв. АН СССР, сер. матем., 1965, Том. 29, № 3, 493–504.
5. Чудаков Н. Г. О функциях $\zeta(s)$ и $\pi(x)$ // Докл. АН СССР, 1938, Том. 21, 425–426.
6. Titchmarsh E. C. On $\zeta(s)$ and $\pi(x)$ // Quart. J. Math., 1938, Том. 9, 97–108.
7. Линник Ю. В. Новые оценки сумм Вейля // Докл. АН СССР, 1942, Том. 34, № 7.
8. Коробов Н. М., Оценки тригонометрических сумм и их приложения // Успехи матем. наук, 1958, Том. 13, № 4, 185–192.
9. Walfisz A. Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie. — VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin. 1963, S. 231.
10. Карацуба А. А., Коробов Н. М. О теореме о среднем // Докл. АН СССР, 1963, Том. 149, № 2.
11. Карацуба А. А. Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР, сер. матем., 1966, Том. 30, № 1.
12. Архипов Г. И. Кратные тригонометрические суммы // Докл. АН СССР, 1974, Том. 219, № 5.
13. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.
14. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987, 368 с.
15. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.
16. Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР, 1984, Том. 278, № 2, 302–304.
17. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР, сер. матем., 1985, Том. 49, № 5, 1031–1067.

REFERENCES

1. Littlewood J. E., 1922, "Researches in the theory of Riemann ζ -function", *Proc. London Math. Soc.*(2), vol. 20, XXII-XXVIII.
2. Vinogradov I. M., 1980, *The method of trigonometric sums in the theory of numbers. 2nd Edition., correct. and supplement*, Moscow: Fizmatlit. pp. 144.

3. Vinogradov I. M., 1958, The new estimation of function $\zeta(1 + it)$, *Izvestija. AN SSSR, Ser.Mathem.*, vol. 22, № 2, 161–164.
4. Vinogradov I. M., 1965, "To the question on the estimation of trigonometric sums", *Izvestija. AN SSSR, Ser.Mathem.*, vol. 29, № 3, 493–504.
5. Chudakov N. G., 1938, "On functions $\zeta(s)$ and $\pi(x)$ ", *Doklady AN SSSR*, vol. 21, 425–426.
6. Titchmarsh E. C., 1938, "On $\zeta(s)$ and $\pi(x)$ ", *Quart. J. Math.*, vol. 9, 97–108.
7. Linnik J. V., 1942, "New estimation of Weyl's sums", *Doklady AN SSSR*, vol. 34, № 7.
8. Korobov N. M., 1958, "Estimations of trigonometric sums and their applications", *Uspehi mathem. nauk*, vol. 13, № 4, 185–192.
9. Walfisz A., 1963, "Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie", *VEB Deutscher Verlag der WissenSchafte: Berlin*, p. 231.
10. Karatsuba A. A., Korobov N. M. 1963, "On the mean-value theorem", *Doklady AN SSSR*, vol. 149, № 2.
11. Karatsuba A. A., 1966, "Mean-value theorem and complete trigonometric sums", *Izvestija. AN SSSR, Ser.Mathem.*, vol. 30, № 1.
12. Arkhipov G. I., 1974, "Multiple trigonometric sums", *Doklady AN SSSR*, vol. 219, № 5.
13. Arkhipov G. I., 2013, *Selected papers*, Orjol: Publ.House of the Orjol University, pp. 464.
14. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N., 1987, *The theory of multiple trigonometric sums*, Moscow.: Nauka. Fizmatlit. 368 с.
15. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A., 2004, "Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics", 39 — *Berlin, New York: Walter de Gruyter*, pp. 554.
16. Chubarikov V. N., 1984, "Multiple trigonometric sums with primes", *Doklady AN SSSR*, vol. 278, № 2, 302–304.
17. Chubarikov V. N., 1985, "Estimates of multiple trigonometric sums with primes", *Izvestija. AN SSSR, Ser.Matem.*, vol. 49, № 5, 1031–1067.

Получено 22.01.2020 г.

Принято в печать 20.03.2020 г.