Atti del VI Convegno Nazionale
di DIdattica della FIsica e della MAtematica
DI.FI.MA. 2013

I DOCENTI DI MATEMATICA E DI FISICA DI FRONTE AI MUTAMENTI DELLA SCUOLA: CONCETTI, PROCESSI, VALUTAZIONE

Torino 2-4 ottobre 2013 - Liceo "M. D'Azeglio"

a cura di
Ornella Robutti e Miranda Mosca

lacasadegli insegnanti
GeoGebra Institute of TORINO
Ledizioni
The Innovative LEDIpublishing Company
Fisica Torino
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO
Scuola di Scienze della Natura
REGIONE PIEMONTE
PROVINCIA DI TORINO
Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca
Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte
Direzione Generale

Atti del VI Convegno Nazionale
di DIdattica della FIsica e della MAtematica
DI.FI.MA. 2013

I DOCENTI DI MATEMATICA E DI FISICA DI FRONTE AI MUTAMENTI DELLA SCUOLA: CONCETTI, PROCESSI, VALUTAZIONE

2-3-4 ottobre 2013, Liceo Classico M. D'Azeglio, Torino

A cura di:

Ornella Robutti e Miranda Mosca

Ledizioni

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy

www.ledizioni.it

info@ledizioni.it

I DOCENTI DI MATEMATICA E FISICA DI FRONTE AI MUTAMENTI DELLA SCUOLA: CONCETTI, PROCESSI E VALUTAZIONE

Atti del VI Convegno Nazionale di DIdattica della FIsica e della MAtematica DI.FI.MA. 2013

A cura di: Ornella Robutti e Miranda Mosca, Ledizioni 2015
Revisione testo: Elisa Gentile

Comitato scientifico:
Ferdinando Arzarello, Alessio Drivet, Tommaso Marino, Daniela Marocchi, Simona Martinotti, Francesca Morselli, Miranda Mosca, Giuseppina Rinaudo, Ornella Robutti, Ada Sargenti, Claudia Testa
Responsabile del Convegno: Ornella Robutti
Responsabile del progetto grafico: Maria Grazia Imarisio
Responsabile amministrativo: Marilena Cavaglià
Esperto tecnico: Tiziana Armano
Segreteria: Daniela Truffo

ISBN 978-88-6705-353-7

Immagine in copertina: progetto grafico di Maria Grazia Imarisio

Informazioni sul catalogo e sulle ristampe dell’editore: www.ledizioni.it

Indice

Relazioni in plenaria

Tavola rotonda: La formazione dei docenti di matematica e fisica

Tavola rotonda. L’insegnamento della matematica e della fisica in Europa

Workshop

Comunicazioni

GeoGebra Day

Tavola rotonda degli Istituti italiani: ricerca, formazione, sperimentazione con GeoGebra

Comunicazioni

VI CONVEGNO NAZIONALE DI DIDATTICA DELLA FISICA E DELLA MATEMATICA
DI.FI.MA. 2013

I docenti di matematica e di fisica di fronte ai mutamenti della scuola:

Concetti, processi, valutazione

2-3-4 ottobre 2013
Aula Magna Liceo Classico M. D'Azeglio, Torino

Mercoledì 2 ottobre

h. 14.00	Ornella Robutti	Apertura lavori
h. 14.15	Autorità	Ufficio Scolastico Regionale, Provincia di Torino, Scuola di Scienze della Natura, Dipartimento di Matematica, Dipartimento di Fisica, CIFIS, Liceo D'Azeglio
h. 14.30	Alison Clark-Wilson	The Cornerstone Mathematics project
h. 15.15	Francesca Morselli (coordina)	Tavola rotonda: La formazione dei docenti di matematica e di fisica Interventi di: Maurizio Berni, Pietro Di Martino, Ornella Robutti. Dibattito
h. 16.15	Intervallo	
h. 16.30-18.30	Workshop e comunicazioni	

Giovedì 3 ottobre

14.30	Ernesta De Masi	Insegnare Matematica e Fisica oggi
15.15	Giuseppina Rinaudo (coordina)	Tavola rotonda: L'insegnamento della matematica e della fisica in Europa Interventi di: Ernesta De Masi, Alessio Drivet, Francesca Ruzzi. Dibattito
16.15	Intervallo	
16.30-18.30	Workshop e comunicazioni	

Venerdì 4 ottobre ***GeoGebra Italian Day***

14.30	Ornella Robutti (coordina)	Tavola rotonda degli Istituti italiani: Ricerca, formazione, sperimentazione con GeoGebra
16.00-17.30	Workshop e comunicazioni	
17.30	Cerimonia finale di chiusura	

STORIA DEI CONVEGNI DI.FI.MA.

Ornella Robutti
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Premessa

Organizzare un convegno richiede un enorme dispendio di energie, necessita di risorse finanziarie e umane, di organizzazione e diffusione delle informazioni. Il Convegno DI.FI.MA. (DIdattica della FIsica e della MAteamtica), nato nel 2003 a Torino e arrivato oggi (2013) alla sua sesta edizione, negli anni è stato realizzato grazie all'impegno di molte persone, che hanno profuso con impegno il loro tempo, le loro idee e la loro professionalità, grazie alle risorse finanziarie, materiali, umane di istituzioni che hanno saputo collaborare tra loro integrando competenze, spazi e organizzazione, e infine grazie ai partecipanti, che negli anni sono aumentati con continuità. È proprio la risposta sempre crescente del pubblico che ci ha convinti che è necessario continuare con questa impresa, anche se di anno in anno è sempre più difficile e complessa, e soprattutto vede assottigliarsi via via le risorse finanziarie indispensabili (come quelle per l'invito di relatori o della stampa dei volumi). Nonostante tali difficoltà, come responsabile di questi Convegni, ho sempre perseguito una finalità di democratizzazione della cultura e della formazione professionale in favore dei molti insegnanti di tutti gli ordini scolari che seguono le varie edizioni del convegno, ovvero la gratuità completa dell'iniziativa: dall'iscrizione, alle penne usb, ai volumi stampati, che siano atti del convegno o altri libri. La scelta è che gli insegnanti, in un Paese che non investe molto sulla scuola e sulla formazione dei docenti, che non riconosce sufficientemente il loro sforzo di aggiornamento e crescita professionale, devono poter partecipare a queste iniziative senza pagare.

Il Convegno DI.FI.MA. è nato nel 2003, come si diceva sopra, ma ha un precedente in un Convegno tenutosi a Torino il 6 e 7 aprile 2001, dedicato alla formazione scientifica degli insegnanti nelle Scuole di Specializzazione e nei corsi di laurea in Scienza della Formazione Primaria. Vista l'ampia partecipazione all'iniziativa, si ritenne indispensabile avviare un convegno con cadenza biennale, per rendere il confronto produttivo. La scelta fu di coinvolgere entrambe le discipline, la matematica e la fisica, vista la loro collaborazione nella formazione degli insegnanti di scuola secondaria negli indirizzi FIM (fisico-matematico-informatico) delle Scuole di Specializzazione. Inizialmente il convegno DI.FI.MA. era dunque rivolto ai soli insegnanti delle scuole secondarie di secondo grado, ma successivamente si ritenne opportuno aprirlo a tutti i livelli scolari per rendere il confronto più ampio, e di non limitarlo alla formazione docenti ma di aprirlo a molti altri temi interessanti, che hanno caratterizzato le varie edizioni.

Nel 2008 ci sembrava che l'intervallo tra un convegno DI.FI.MA. e l'altro fosse troppo ampio, sicché pensammo alla creazione di una piattaforma per i docenti del Piemonte, in modo da avere un luogo non solo di pubblicazione di materiali, ma anche di lavoro e interazione tra la comunità dei ricercatori in didattica della matematica e della fisica e degli insegnanti di tutti i livelli scolari. Per questo nacque la piattaforma DI.FI.MA. in rete, come progetto regionale grazie alla Facoltà di Scienze MFN e alla Provincia di Torino nel 2008. Oggi (fine 2013) la piattaforma ha ormai raggiunto rilevanza nazionale e conta circa 1700 iscritti, insegnanti di tutti i livelli scolari, docenti universitari, studenti universitari e insegnanti in formazione. Essa si presente come una vetrina allargata e un ambiente virtuale di lavoro del convegno DI.FI.MA., e contiene materiali di longlife learning, in linea con filoni di ricerca e pratica didattica condivisi a livello mondiale dalla comunità degli studiosi in *Mathematics Education* e *Physics Education*:

1. il concetto di laboratorio non solo come spazio attrezzato con strumenti, ma come pratica

didattica che mira all'apprendimento percettivo-motorio come nuova metodologia didattica;

2. le direttive di Lisbona in merito al longlife learning: l'apprendimento degli insegnanti come attività permanente, supportata, tra un'edizione e l'altra del Convegno, da una piattaforma di e-learning e da seminari in presenza;
3. le Indicazioni Nazionali per il curriculum di matematica e di fisica;
4. le indicazioni curricolari dell'UMI e dell'AIF, che, con altre associazioni disciplinari, abbracciano la modalità laboratoriale per la didattica;
5. le indicazioni provenienti dai risultati OCSE-PISA e INVALSI, per migliorare la literacy scientifica e matematica degli studenti;
6. la crescita culturale europea dei docenti delle scuole italiane, nei confronti dell'innovazione didattica, in modo da integrare una didattica per contenuti con una didattica per competenze, sempre più condivisa a livello europeo;
7. la ricaduta didattica sugli studenti delle azioni e discussioni all'interno del convegno.

Seguono la storia e le caratteristiche dei vari Convegni DI.FI.MA. che si sono succeduti fino a oggi.

Il Primo Convegno: DI.FI.MA. 2003 - La formazione degli insegnanti: approccio didattico con le nuove tecnologie (http://www.difima.unito.it/difima03/index.html)

L'8 maggio 2003 presso il Dipartimento di Fisica si è tenuto il primo Convegno Nazionale di Torino, dal titolo: "La formazione degli insegnanti: approccio didattico con le nuove tecnologie". Il Convegno, che riscosse un notevole successo, sia per la quantità dei partecipanti, provenienti da tutta Italia, sia per la qualità degli interventi, di alto livello, e per la ricchezza del dibattito, era nato dalla necessità di dare voce alle Scuole di Specializzazione e creare l'occasione per un confronto nazionale sulla formazione dei docenti. Le problematiche della formazione iniziale degli insegnanti, infatti, seppur discusse in numerose altre occasioni (convegni e seminari di ricerca), non avevano ancora trovato una collocazione stabile nel panorama della didattica, come confronto su un tema specifico.

Il Manifesto del Convegno toccava i seguenti punti:

- Le Scuole di Specializzazione per insegnanti (SSIS) costituiscono, per loro natura, un ponte tra la scuola e l'Università, essendo volte alla formazione degli insegnanti sotto un profilo professionalizzante.
- Le Scuole di Specializzazione si trovano oggi, in un momento di cambiamento a tutti i livelli scolari, a riflettere sull'esperienza accumulata in questi quattro anni, alla luce della formazione professionale che si richiede per i futuri insegnanti, della struttura della scuola, delle metodologie e dei contenuti di corsi e laboratori e della ricaduta che questa formazione può avere a livello dell'insegnamento secondario.
- Il convegno "La formazione degli insegnanti: approccio didattico con le nuove tecnologie", promosso dalla Scuola di Specializzazione del Piemonte, intende essere un'occasione di riflessione per l'indirizzo fisico-matematico-informatico, sull'esperienza di formazione accumulata al suo interno e sui collegamenti con l'esterno.
- All'interno dei laboratori dell'indirizzo, infatti, sono stati messi a punto percorsi didattici finalizzati all'insegnamento disciplinare e all'acquisizione di metodologie di lavoro volte a fornire un supporto valido agli specializzandi per la loro attuale e futura attività nell'ambito del processo di insegnamento-apprendimento.
- All'esterno, intendiamo porre l'attenzione sul fatto che la SIS da una parte può costituire, per i docenti accoglienti, un'occasione di formazione e di aggiornamento, non solo

attraverso l'esperienza del tirocinio, ma anche tramite la relazione diretta con la Scuola di Specializzazione e i docenti in essa operanti, dall'altra parte, può avere una significativa ricaduta sulla didattica laddove gli elementi qualificanti della formazione professionale della Scuola passano nell'attività di insegnamento di tutor e specializzandi.

I relatori plenari del Convegno sono stati:

- S. Invernizzi, che ha presentato attività di probabilità affrontate con l'uso delle tecnologie portatili, le calcolatrici grafiche programmabili;
- C. Laborde, che ha mostrato la semplicità di approccio a problemi di geometria tramite software di geometria dinamica;
- F. Arzarello, che ha esaminato alcune problematiche di ricerca in didattica della matematica che si possono affrontare in un laboratorio della Scuola di Specializzazione, tramite metodologia di apprendistato cognitivo e l'uso delle tecnologie.

Nella tavola rotonda, cui hanno partecipato D. Paola, L. Ciarrapico, G. Rinaudo, A. De Ambrosis e L. Borghi, si è affrontato il tema dell'uso delle tecnologie nella formazione iniziale degli insegnanti di scuola superiore.

Le presentazioni in parallelo hanno visti impegnati i partecipanti in 22 comunicazioni sull'uso delle tecnologie in classe e nella formazione docenti.

Il Secondo Convegno: DI.FI.MA. 2005 - La matematica e la fisica nella scuola e nella formazione degli insegnanti (http://www.difima.unito.it/difima05/)

Questo Convegno, programmato in continuità con il primo, di cui ha condiviso obiettivi e struttura, ha introdotto alcune novità:

- si è allargato il tema del Convegno dalla formazione insegnanti alle problematiche della ricerca didattica e delle pratiche di insegnamento in matematica e in fisica;
- il livello scolare, legato nel primo Convegno alla scuola secondaria, è stato aperto a tutti i livelli;
- il filone tecnologie, cui era circoscritto il primo Convegno, è stato ampliato a tutti i filoni di ricerca nell'ambito della didattica della matematica e della fisica;
- i giorni di lavoro sono passati da uno a tre;
- le sessioni parallele da due di mezzo pomeriggio sono diventate sette per tutto un pomeriggio;
- è stata inclusa nel Convegno la diffusione dei risultati e dei prodotti di un Progetto Europeo appena concluso, il Progetto VIM.

Le tematiche affrontate nelle relazioni plenarie hanno portato alla ribalta i principali nodi di ricerca attuale, particolarmente: gli intrecci tra la matematica e la fisica, le reciproche influenze tra la ricerca didattica e la pratica in classe, i legami tra la ricerca didattica e le altre discipline, come la psicologia, le scienze cognitive e le neuroscienze.

- P. Guidoni ha messo in luce l'interferenza costruttiva fra pensiero matematico e pensiero fisico, con le sue diverse componenti, sempre sovrapposte e intrecciate, nell'evoluzione culturale, tecnologica e sociale come nello sviluppo cognitivo individuale, ribadendo come tener conto di questa dinamica sia cruciale per il successo della mediazione didattica a ogni livello.
- C. Laborde ha descritto la varietà negli usi di un software di geometria dinamica come Cabri Géomètre in diversi Paesi europei, mostrando i risultati di vari studi di ricerca, a livello non solo di geometria, ma anche di utilizzo nell'algebra, nell'attività di modellizzazione e nell'introduzione della dimostrazione a scuola.
- F. Arzarello ha illustrato la filosofia di vari progetti attuati o in corso di attuazione in Italia in

questi ultimi anni che coinvolgono insegnanti e ricercatori in didattica della matematica (il cosiddetto progetto Dutto, le lauree scientifiche) e di proposte curricolari (programmi UMI per la scuola pre-universitaria).

- B. Montrucchio ha presentato il progetto europeo VIM (A Virtual envIronment for experiencing Mathematics) che, grazie alla collaborazione di numerose università europee, aveva l'obiettivo di: realizzare un ambiente virtuale da utilizzare per sperimentare la didattica della matematica per mezzo del linguaggio VRML; promuovere l'accesso a numerosi metodi didattici nel campo della didattica della matematica, incrementando gli scambi in ambito europeo e utilizzando programmi e ambienti multimediali.
- J. Szendrei ha presentato lo stato dell'arte della ricerca in didattica della matematica, utilizzando le categorie introdotte recentemente da M. Niss. Il grosso supporto che forniscono gli insegnanti alla ricerca, così come la disseminazione dei risultati di ricerca nella formazione e nella pratica didattica degli insegnanti, possono certamente favorire quegli intrecci tra ricerca e pratica che promuovono l'innovazione nei processi di insegnamento e apprendimento.
- E. Sassi ha discusso alcuni punti di vista, anche in riferimento ad EPEC-1 (European Physics Education Conference-1), prima conferenza organizzata dalla Società Europea di Fisica (EPS) sul tema "il perché e come della didattica della fisica", svoltasi nel luglio 2005 in Germania. Ha presentato quindi le principali aree di ricerca dal punto di vista delle più attuali sfide/problemi, prima commentando alcuni aspetti del tema "ripensare-rinnovare il curriculum di fisica", poi accennando a una proposta britannica realizzata su vasta scala per studenti di 16-18 anni, che si propone di rispondere alla domanda: "quale fisica e per chi?".
- L. Ciarrapico ha tracciato la storia della formazione degli insegnanti dal 1990, anno della legge che l'ha istituita in Italia, a oggi, mettendo in evidenza il suo ruolo cruciale nel miglioramento della qualità della formazione scolastica, a tutti i livelli di età. La contrapposizione tra una formazione basata in passato esclusivamente sulle conoscenze disciplinari, a una odierna in cui si intrecciano conoscenze disciplinari con aspetti metodologico/didattici ha costituito il cuore del suo intervento.
- G. Luzzatto ha contestualizzato nel panorama internazionale e italiano la formazione dei docenti da un punto di vista istituzionale e ha presentato la proposta per una laurea magistrale per l'insegnamento secondario.

Nella tavola rotonda, coordinata da O. Robutti, si è affrontato il tema del futuro della formazione insegnanti.

I workshop e le comunicazioni in parallelo sono stati 27 e hanno visto impegnati i partecipanti sui vari argomenti legati al tema del convegno.

È stata premiata come migliore tesi di tirocinio del concorso bandito nel 2003 quella di Silvia Serradori di Bologna, dal titolo: "Un esperimento di insegnamento della matematica applicata in una quarta classe di istituto tecnico commerciale: regressione lineare, correlazione lineare".

Il Terzo Convegno: DI.FI.MA. 2007 - Curriculum e successo formativo in matematica e fisica: proposte, esperienze, problemi (http://www.difima.unito.it/difima07/)

Fondato in continuità con i precedenti, di cui condivide obiettivi e struttura, questo Convegno ha introdotto importanti elementi di novità:

- si è consolidato il tema del Convegno sulle problematiche della ricerca didattica e delle pratiche di insegnamento in matematica e in fisica;
- il livello scolare, anche nelle plenarie, è aperto a qualunque ordine di scuola, compresa l'Università;

- il filone tecnologie accompagna filoni più tradizionali della didattica della matematica e della fisica;
- le sessioni parallele sono aumentate;
- è stato incluso nel Convegno il dibattito sulle appena uscite “Nuove Indicazioni” per la scuola dell’infanzia, primaria e secondaria di primo grado, inviate a tutte le scuole e a tutti gli insegnanti dal Ministro Fioroni.

Le tematiche affrontate nelle relazioni plenarie da professori italiani e stranieri hanno portato alla ribalta i principali nodi di ricerca attuale, particolarmente: quale idea di successo possiamo condividere, alla luce dei risultati di test internazionali, della ricerca didattica e delle proposte curricolari recenti, quale ruolo dell’insegnante si delinea in questa complessità di elementi e di loro reciproche relazioni, quale contributo possiamo ricavare dalla collaborazione tra la pratica didattica, condotta dagli insegnanti, e la ricerca didattica, condotta dai ricercatori, per cambiare e migliorare il curriculum.

- L. Spijkerboer ha messo in luce l’importanza del ruolo dell’insegnante di matematica alla luce delle più recenti indicazioni curricolari, ma anche come promotore dell’innovazione curricolare, attraverso l’introduzione di attività basate sulla “Realistic Mathematics” e caratterizzate da domande aperte, forte attività di congettura e stimolo per la discussione, perché legate a contesti esperienziali concreti.
- R.M. Sperandeo ha descritto la rilevanza di due aspetti per la costruzione di un percorso didattico di fisica: quelli fenomenologici e quelli cognitivi, legati a costruzione di significati e modelli interpretativi. I due aspetti possono interferire costruttivamente per l’acquisizione di “pensiero fisico”, differenziando la modellizzazione su più livelli di descrizione.
- G. Pezzi ha illustrato il cambiamento che può portare nell’apprendimento della fisica, attraverso la cattura di dati, la loro analisi e l’uso per la modellizzazione, una tecnologia di nuova generazione come quella introdotta da TI-*n*spire, che può essere utilizzata sia su palmari, sia su computer e si avvale di diversi ambienti di lavoro integrati fra loro: numerico, grafico, simbolico.
- P. Boero ha narrato criticamente un’esperienza più che ventennale di progetti didattici realizzati nelle scuole elementari e medie della Liguria e del Piemonte, basata sull’introduzione di metodologie didattiche fortemente innovative all’epoca, basate sui campi di esperienza, sulla discussione, sull’argomentazione in matematica, che hanno lasciato un segno profondo nelle pratiche degli insegnanti coinvolti, ma anche nei bambini che le hanno vissute, oggi studenti universitari.
- G. Häusermann, mostrando i suoi giocattoli di vario tipo, ha fornito una via per coinvolgere gli studenti nell’apprendimento della fisica, con l’obiettivo di aiutarli ad apprendere se gli insegnanti pongono loro domande e questioni interessanti, legate a contesti, giochi e tecnologie di uso comune, che possono offrire elementi motivazionali molto forti per i ragazzi.
- S. Cotoneschi, vivendo da lungo tempo l’esperienza di lavoro presso la Scuola-Città Pestalozzi, prima come insegnante della primaria, poi della secondaria, ha presentato una ricca documentazione critica di modalità di lavoro tipiche del laboratorio di matematica, dove insegnanti e allievi sono abituati al confronto, allo scambio, alla collaborazione nella ricerca. Queste metodologie sono da supporto nel realizzare la continuità e nell’affrontare le necessarie discontinuità presenti fra i vari livelli scolari.

La tavola rotonda, coordinata da F. Arzarello, era centrata sul tema del convegno e i relatori G. Anzellotti, L. Ciarrapico e M. Michelini hanno dibattuto sulle varie interpretazioni di successo e sulle proposte di curriculum.

Le altre sessioni (9 workshop e 22 comunicazioni) si sono mosse in sintonia con i temi delle plenarie, spesso facendo riferimento ad argomenti trattati in altre sessioni e trattandoli da altri punti di vista, per esempio quello degli insegnanti, o degli specializzati.

È stata premiata come migliore tesi di tirocinio del concorso bandito nel 2005 quella di Erik Villarboito di Torino, dal titolo: "Intuizioni e riflessioni sugli esponenziali mediante calcolatrici grafico simboliche".

Il Quarto Convegno: DI.FI.MA. 2009 - Il laboratorio in matematica e in fisica (http://www.difima.unito.it/difima09/)

Realizzato in continuità con i precedenti, di cui condivide obiettivi e struttura, questo Convegno ha introdotto importanti elementi di novità:

Molti partecipanti da fuori Piemonte si sono uniti ai docenti piemontesi.

Molti intrecci tra la fisica e la matematica nei vari interventi in plenaria e nelle sessioni parallele.

La scelta del tema e del titolo del Convegno, avvenuta attraverso la piattaforma DI.FI.MA. in rete (http://difima.i-learn.unito.it/) tramite un sondaggio tra gli iscritti e la proposta di tre titoli, che ha visto vincente quello del laboratorio.

Il programma ha previsto quattro momenti di lavoro:

- 3 sessioni dedicate alle conferenze plenarie (che hanno occupato tre mezze giornate), in cui i relatori hanno toccato temi di ricerca condivisi a livello internazionale e riguardanti il laboratorio;
- 8 workshop sulle problematiche laboratoriali a più livelli scolari;
- 22 comunicazioni su problematiche di insegnamento-apprendimento specifiche, a tutti i livelli scolari, compreso quello universitario;
- una tavola rotonda sull'apprendimento e l'insegnamento della matematica e della fisica nel 21° secolo.

Le tematiche affrontate nelle relazioni plenarie da esperti italiani e stranieri hanno portato alla ribalta i principali nodi di ricerca attuale, particolarmente: quale idea di laboratorio possiamo condividere, alla luce delle ricerche internazionali, dei risultati dei test OCSE-PISA e dell'emergenza di una attenzione particolare alle discipline scientifiche, dei cambiamenti nella didattica che ne conseguono, della necessità di lavorare in comunità di pratica, dell'importanza nell'uso di materiali, strumenti, tecnologie.

- N. Malara ha presentato un quadro degli studi sull'insegnamento/apprendimento dell'algebra e sul ruolo dell'insegnante nell'insegnamento socio-costruttivo, per favorire un approccio di tipo linguistico all'algebra in attività laboratoriali per insegnanti, finalizzate a promuovere le capacità di gestione delle corrispondenti attività nelle classi. Evidenziando difficoltà emerse negli insegnanti nel realizzare questo approccio, la relatrice ha descritto le consapevolezze da loro maturate durante il processo di sperimentazione.
- G. Rinaudo ha descritto quali risultati e insegnamenti si sono potuti ricavare sul laboratorio di fisica per la scuola dell'obbligo dalle esperienze di formazione recenti di insegnanti, attuate in collaborazione fra l'Università, la Scuola, l'Ufficio Scolastico Regionale e le Associazioni degli insegnanti. A partire dal dibattito che ha accompagnato i risultati delle prove di valutazione INVALSI e OCSE-PISA, dal piano di formazione nazionale I.S.S., dai corsi universitari per la formazione degli insegnanti di scuola primaria e di scuola secondaria di primo grado, nonché dal Master universitario di Didattica delle Scienze per insegnanti di scuola primaria, la relatrice ha enucleato le principali tematiche, i punti critici, le possibili soluzioni che si possono attivare.
- R. Tortora nella sua presentazione ha discusso su che cosa si debba intendere per modellizzazione, mettendo a confronto punti di vista diversi, e descrivendo alcuni esempi

di attività didattiche con bambini della scuola di base, condotte in campi di esperienza ricchi di conoscenza informale, come forze, equilibri, equivalenze. Gli esempi illustravano l'integrazione tra competenze matematiche, scientifiche e linguistiche, quando si lavora con i bambini facendo appello alle loro strategie cognitive naturali.

- L. Trouche ha introdotto il tema delle tecnologie nel laboratorio di matematica, facendone vedere l'importanza e la valenza formativa, se utilizzato per costruire significati matematici in situazioni in contesto, dove gli allievi hanno la possibilità di esplorare problemi aperti, formulare congetture e metterle alla prova grazie agli strumenti tecnologici stessi. La presentazione di progetti francesi ha fornito esempi laboratoriali di attività di classe e di collaborazione di docenti.
- M. D'Anna ha descritto nei dettagli un percorso didattico di fisica, articolato in aspetti disciplinari, metodologia e uso di strumenti, facente capo al quadro teorico della scuola di Karlsruhe, che da alcuni anni si sta diffondendo nella didattica della fisica. Tale percorso, che rifiuta la classica organizzazione curriculare universitaria, è caratterizzato da un uso dell'analogia concettuale e formale, supportata da basi sperimentali che il relatore ha presentato su alcuni esempi.

I docenti delle scuole Quarini di Chieri e Addis Abeba di Biella hanno presentato un'esperienza didattica realizzata nelle due scuole secondarie di primo grado su un percorso che dai numeri conduce alle relazioni, attraverso la generalizzazione. Tale percorso ha la doppia finalità di costruzione di significati matematici a partire da attività di laboratorio di matematica in cui gli allievi sono protagonisti nell'esplorazione e nella congettura, e la costruzione di comunità di pratica sia di docenti, sia di studenti, grazie ad attività di e-learning in presenza e a distanza tramite piattaforma Moodle.

La tavola rotonda sul tema dell'apprendimento e dell'insegnamento nel 21° secolo, coordinata da F. Arzarello, ha visto come protagonisti rappresentanti della didattica della matematica (C. Danè, O. Robutti, W. Maraschini), della didattica della fisica (O. Levrini), delle scienze educative, (D. Maccario), dell'istituzione (S. Mosca), che hanno portato contributi essenzialmente legati alla parola chiave *cambiamento*, vista nei suoi vari aspetti legati all'apprendimento, all'insegnamento, alla formazione insegnanti, al curriculum, ai progetti, alla valutazione.

Le altre attività (workshop e comunicazioni) si sono mosse in sintonia con i temi delle plenarie, spesso facendo riferimento ad argomenti trattati in altre sessioni.

Novità del Convegno è stata la premiazione degli insegnanti che hanno presentato le migliori attività didattiche nell'ambito del Progetto DI.FI.MA. in rete, collegato con il Convegno.

Il Quinto Convegno: DI.FI.MA. 2011 – Il curriculum di matematica e di fisica nella scuola del terzo millennio: infanzia, primaria, secondaria di primo e secondo grado (http://www.difima.unito.it/difima11/)

Il quinto convegno DI.FI.MA., organizzato da Dipartimento di Matematica, Dipartimento di Fisica, Facoltà di Scienze MFN dell'Università di Torino, Provincia di Torino, si è tenuto presso l'ITIS Avogadro di Torino da mercoledì 5 ottobre a venerdì 7 ottobre 2011. Il tema su cui si sono confrontati studiosi, ricercatori in didattica della matematica e della fisica, insegnanti di tutti i livelli scolari, insegnanti in formazione, era: "Il curriculum di matematica e di fisica nel III millennio" (www.difima.unito.it/difima11/). Hanno partecipato circa trecento persone da tutta l'Italia, insieme con alcuni ricercatori di prestigio a livello internazionale. Il Convegno ha avuto, così come nelle precedenti edizioni, un'apertura a insegnanti e ricercatori di tutti i livelli scolari, dall'infanzia all'Università e a futuri insegnanti, attualmente in formazione.

Novità è stata l'integrazione del Convegno DI.FI.MA. con una giornata dedicata a GeoGebra, vista la creazione dell'Istituto Italiano di GeoGebra (http://institutes.geogebra.org/it/) avvenuta l'anno precedente a Torino, in collaborazione tra il Dipartimento di Matematica e la Casa degli

Insegnanti. L'Istituto di Torino condivide con l'International GeoGebra Institute (http://www.geogebra.org/igi/) le seguenti finalità:

- Formazione e supporto: coordinare e fornire opportunità di sviluppo professionale sia nella formazione iniziale, sia in quella in servizio dei docenti;
- Sviluppo e condivisione: sviluppare e condividere le risorse di seminari e materiali didattici, incrementare ed estendere continuamente il software matematico dinamico GeoGebra;
- Ricerca e collaborazione: condurre e sostenere ricerche relative a GeoGebra con attenzione all'insegnamento e all'apprendimento della matematica, informare e incrementare le attività di formazione e sviluppo, promuovere la collaborazione tra l'IGI e gli Istituti locali di GeoGebra, e infine tra colleghi di diversi Paesi.

Il GeoGebra Institute di Torino opera nella formazione degli insegnanti tramite corsi a vari livelli, consegnando poi loro, dietro verifica delle competenze raggiunte, certificazioni secondo tre livelli: utenti, esperti, formatori, in base ai parametri fissati dall'IGI. Nel corso del Convegno DI.FI.MA. sono state consegnate le certificazioni acquisite durante l'anno 2010-11 nei corsi di formazione.

Il GeoGebra Institute di Torino, per la condivisione e la diffusione di informazioni e materiali, utilizza, oltre agli spazi ufficiali di GeoGebra, anche la piattaforma DI.FI.MA. (http://difima.i-learn.unito.it/) e la piattaforma de La Casa degli Insegnanti (http://www.lacasadegliinsegnanti.it/PORTALE/) per i docenti che partecipano ai progetti di formazione e sperimentazione.

Il programma ha previsto due diversi momenti di lavoro: quello relativo al Convegno DI.FI.MA., nei primi due giorni, e quello dedicato a GeoGebra, il terzo giorno.

Nel Convegno DI.FI.MA. si sono susseguite le seguenti fasi:

- 4 conferenze plenarie, in cui i relatori hanno toccato temi di ricerca condivisi a livello internazionale e riguardanti il curriculum;
- una tavola rotonda sul curriculum di matematica e di fisica nel terzo millennio;
- 6 workshop su vari temi a diversi livelli scolari;
- 26 comunicazioni su problematiche di insegnamento-apprendimento specifiche, a tutti i livelli scolari, compreso quello universitario.

Le tematiche affrontate nelle relazioni plenarie da esperti italiani e stranieri hanno portato alla ribalta i principali nodi di ricerca attuale, particolarmente: quale curriculum possiamo condividere, alla luce delle ricerche internazionali, delle esperienze curricolari di vari Paesi nel mondo, dei risultati delle valutazioni nazionali e internazionali, dell'uso di strumenti e materiali, delle metodologie laboratoriali e delle varie proposte di formazione docenti iniziali e in servizio.

I relatori in plenaria sono stati:

- M. Michelini, che ci ha presentato, in un quadro di ricerca internazionale di didattica della fisica, esempi di didattica laboratoriale a diversi livelli scolari, mirata a costruire significati di concetti fisici, alla luce di fenomeni ed esperienze, con indicazione per i docenti di seguire i processi degli studenti che apprendono;
- M. Menghini, che ha tracciato uno scorcio della scuola italiana dell'ultimo secolo, con particolare attenzione all'apporto dei matematici nelle varie riforme che si sono susseguite, con elementi che hanno caratterizzato l'insegnamento in modo positivo e negativo;
- L. Giacardi, che ha presentato la storia del laboratorio nella didattica della matematica nell'ultimo secolo, con panoramica internazionale e nazionale, e sullo sfondo il dibattito dei maggiori matematici che si sono occupati di didattica;
- N. Sinclair, che, tradotta in simultanea da C. Sabena, ha sottolineato l'importanza della geometria nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica, e ha mostrato un

approccio alle figure geometriche con bambini di 4-5 anni in Canada, attraverso l'uso di un software di geometria.

La tavola rotonda, sul tema del curriculum nel III millennio, coordinata da G. Rinaudo, ha visto come protagonisti rappresentanti della didattica della matematica a livello di ricerca e di istituzioni (F. Arzarello, L. Ciarrapico) e della didattica della fisica a livello di ricerca e di istituzioni (S. Sgrignoli, F. Rocca), che hanno portato riflessioni e idee in merito ai recenti cambiamenti curricolari introdotti dalla riforma che ha caratterizzato da qualche anno la scuola dell'obbligo e da poco anche il secondo ciclo.

Le altre sessioni (workshop e comunicazioni) hanno presentato temi interessati legati ad aspetti di implementazione delle nuove Indicazioni Nazionali, che mettono in luce l'importanza di una didattica laboratoriale, di metodologie diverse dalla sola lezione frontale, dell'uso di materiali e strumenti.

Novità del Convegno è stata la premiazione di un docente come millesimo iscritto alla piattaforma DI.FI.MA. in rete.

Nel I GeoGebra Day (http://institutes.geogebra.org/it/) si sono susseguite le seguenti fasi:

- 4 conferenze plenarie, in cui i relatori hanno toccato temi di ricerca condivisi a livello internazionale e riguardanti metodologie, contenuti e attività matematiche affrontate con il software GeoGebra;
- 2 workshop su vari temi a diversi livelli scolari;
- 16 comunicazioni su problematiche di insegnamento-apprendimento specifiche, a tutti i livelli scolari.

Nelle relazioni plenarie l'esperto straniero e gli esperti italiani hanno mostrato come il software GeoGebra può essere utilizzato nella formazione dei docenti, nella ricerca sulla didattica della matematica e nelle attività di insegnamento e apprendimento. Ciò che si evince è che un software dato in mano agli studenti non produce apprendimento di per sé, ma occorre una buona programmazione didattica e un attento lavoro del docente per migliorare l'apprendimento della matematica.

I relatori in plenaria sono stati:

- Z. Lavicza, che ha tracciato la storia dell'evoluzione e della diffusione del software GeoGebra e delle principali applicazioni che esso può offrire nella didattica della matematica;
- O. Robutti e A. Sargenti, che hanno presentato i lavori dell'Istituto di GeoGebra di Torino, in merito a ricerca didattica, formazione insegnanti e sperimentazioni in classe;
- E. Faggiano, che ha presentato i lavori dell'Istituto di GeoGebra di Bari, con particolare attenzione alla collaborazione con le scuole;
- Un gruppo di docenti, coordinati da A. Sargenti, che hanno presentato esempi di attività con GeoGebra.

Il Sesto Convegno: DI.FI.MA. 2013 – I docenti di matematica e di fisica di fronte ai mutamenti della scuola: concetti, processi, valutazione (http://www.difima.unito.it/difima13/)

Il sesto convegno DI.FI.MA., organizzato dal Dipartimento di Matematica, dal Dipartimento di Fisica e dalla Provincia di Torino, si è tenuto presso il liceo D'Azeglio di Torino da mercoledì 2 ottobre a venerdì 4 ottobre 2013. Il tema del convegno è stato: “I docenti di matematica e di fisica di fronte ai mutamenti della scuola: concetti, processi, valutazione” (www.difima.unito.it/difima13/). Hanno partecipato circa 400 docenti da tutta l'Italia, insieme con alcuni ricercatori di prestigio a livello internazionale, insegnanti impegnati nel master, neo-abilitati nel tirocinio e studenti universitari dell'indirizzo didattico.

Anche il VI Convegno DI.FI.MA. ha dedicato una giornata al GeoGebra Day (http://institutes.geogebra.org/it/), il III (visto che il I era incorporato nel V Convegno DI.FI.MA. del 2011 e il II si è svolto nel settembre 2012 al liceo D'Azeglio).

Nel Convegno DI.FI.MA. si sono susseguite le seguenti fasi:

- 2 conferenze plenarie, in cui i relatori hanno toccato temi di ricerca condivisi a livello internazionale e riguardanti il curriculum;
- 2 tavole rotonde: una sulla formazione insegnanti e l'altra sull'insegnamento della matematica e della fisica nei Paesi europei;
- 8 workshop su vari temi a diversi livelli scolari;
- 32 comunicazioni su problematiche di insegnamento-apprendimento specifiche, a tutti i livelli scolari, compreso quello universitario.

Le tematiche affrontate nelle relazioni plenarie da esperti italiani e stranieri hanno portato alla ribalta i principali nodi di ricerca attuale, particolarmente: quale curriculum possiamo condividere, alla luce delle ricerche internazionali, delle esperienze curricolari di vari Paesi nel mondo, dei risultati delle valutazioni nazionali e internazionali, dell'uso di strumenti e materiali, delle metodologie laboratoriali e delle varie proposte di formazione docenti iniziali e in servizio.

I relatori in plenaria sono stati:

- A. Clark-Wilson, che, tradotta in simultanea da C. Sabena, ha presentato il progetto anglo-americano Cornerstone Maths, che ha come obiettivo l'utilizzo di tecnologie per la rappresentazione dinamica di oggetti matematici nella scuola secondaria, coinvolgendo un grande numero di scuole nei due Paesi;
- E. De Masi, che ha presentato una serie di dati sull'insegnamento delle discipline scientifiche nel mondo, presi da indagini e progetti di analisi e valutazione, come il TIMSS o il PISA, per passare poi alla situazione nazionale nel suo contesto istituzionale (Indicazioni e INVALSI).

La prima tavola rotonda, sul tema della formazione insegnanti, coordinata da F. Morselli, ha visto come relatori: M. Berni della CIIM, che ha presentato un quadro storico-istituzionale della formazione in Italia, a partire dalle Scuole di Specializzazione; O. Robutti, che ha esaminato punti di forza e punti di debolezza della formazione insegnanti nel Tirocinio Formativo Attivo, presentando esempi di prove scritte di ingresso e loro interpretazione alla luce del profilo di ingresso del tirocinante; P. De Martino, che ha portato le sue riflessioni in merito all'esperienza del TFA appena terminata, come coordinatore e come docente.

La seconda tavola rotonda, sul tema dell'insegnamento di matematica e fisica nei Paesi europei, ha visto impegnati: E. De Masi, che ha presentato l'insegnamento della fisica nei licei europei, dal curricolo alla sua valutazione; A. Drivet, che ha sottolineato come, dal rapporto Eurydice, si evince che il modo per migliorare la scuola sia quello di investire sulla formazione degli insegnanti; F. Ruzzi, che ha descritto la sua esperienza di osservatore nelle scuole finlandesi che sono esempio di successo nelle valutazioni internazionali di literacy scientifica.

Le altre sessioni (workshop e comunicazioni) hanno presentato un'ampia gamma di temi legati ad aspetti di uso delle tecnologie, metodologie laboratoriali, attività, esperienze e problemi, il tutto molto contestualizzato istituzionalmente nelle Indicazioni Nazionali.

Nel **Convegno GeoGebra Day** si sono susseguite le seguenti fasi:

- 4 interventi in plenaria, in cui i rappresentanti di diversi Istituti di GeoGebra hanno affrontato problematiche sull'uso del software GeoGebra, sulla formazione docenti, sulla ricerca didattica;
- 13 comunicazioni sull'uso di GeoGebra in classe a diversi livelli scolari.

In plenaria ci sono stati gli interventi dei rappresentanti di diversi GeoGebra Institute:

- O. Robutti e A. Sargenti (Istituto di Torino) hanno presentato i lavori effettuati nello scorso anno dall'Istituto, per quanto riguarda la ricerca, la sperimentazione e la formazione insegnanti, il nuovo libro appena stampato con il sostegno del Progetto Lauree Scientifiche, i progetti per il futuro, e le novità del software (per questi aspetti tecnologici si sono usate le diapositive di S. Riva);
- E. Faggiano (Istituto di Bari), ha descritto le attività dell'Istituto e alcuni importanti aspetti legati all'uso del software nell'apprendimento della matematica;
- O. Rizzo (Istituto di Milano) ha sottolineato le valenze di un software aperto come GeoGebra e le difficoltà nel suo uso in ambito editoriale.

RELAZIONI
IN PLENARIA

CORNERSTONE MATHS: AN APPROACH TO TECHNOLOGY-ENHANCED INNOVATION AT SCALE

Alison Clark-Wilson
London Knowledge Lab, Institute of Education, University of London

Abstract

In this paper I describe the research behind the Cornerstone Maths project in the UK and I provide an insight into how this UK/US collaboration is helping us to understand how to scale-up the evidence-based uses of technology within many secondary mathematics classrooms. I will outline the design principles for the project and, through the examples of two of the curriculum units, show how these principles are enacted. The paper concludes with some of the early outcomes of this ambitious multi-phased project.

Why is this project needed?

Currently in the UK, most secondary mathematics students do not use technology in lessons despite the schools being very well equipped with technology, which suggests that the access to technology is not the problem. It is more likely that most secondary mathematics teachers have had limited professional development to feel confident and competent to enable their students to use mathematical technologies in their lessons (Bretscher, 2014).

The overall vision of Cornerstone Maths seeks to exploit the dynamic and visual nature of digital technology to stimulate engagement with mathematical ways of thinking by:

- focusing on the 'big mathematical ideas';
- making links between key representations;
- providing an environment for students to explore and solve problems within guided structured activities;
- embedding activities within realistic contexts;

Cornerstone Maths is a carefully designed and evidence-based curriculum intervention that aims to work with teachers to enable students to have substantial engagement with web-based software that enhances key concepts in lower secondary mathematics (11-14 years). Cornerstone Maths:

- Co-develops replacement curriculum units with digital technologies to enhance the teaching and learning of core mathematical ideas that are hard to teach and learn ……..everywhere.
- Co-develops teacher professional development materials and provides structures for professional learning and support for teachers in schools.

Incorporates cycles of design research to plan for the project to scale to hundreds of schools in the UK.

How has the Cornerstone Maths project evolved?

Cornerstone Maths began as a collaboration between SRI International (USA) & the London Knowledge Lab, with funding from the Li Ka Shing Foundation. It adopts a design-based research approach in England derived from extensive work in the USA/UK (over 15+ years) (Healy & Hoyles, 2001; Hegedus & Roschelle, 2013; Kaput, Hoyles, & Noss, 2002; Mavrikis, Noss, Hoyles, & Geraniou, 2012).

The project has been phased as follows:

- Planning Phase 1 (Jun-Jul 2011)
- Phase 1 (Jul – Dec 2011) – Pilot phase (unit 1)
- Phase 2 (Jan – Jul 2012) – Pilot phase (unit 2)
- Phase 3 (Dec 2012 – Nov 2014) – Ongoing (re)design cycles with Design schools alongside scaling to 100+ Focus schools

The project aims to research the:

- implementation of the Cornerstone Maths innovation in terms of student learning and teacher engagement;
- implications of the work for teacher professional development and for material/software design in order to inform the larger-scale project;
- epistemological dimension of scalability - that is to build an a *priori* set of theories concerning the process and content of the expanding project.

The focus for the research has evolved through the three phases, which is illustrated in Figure 1.

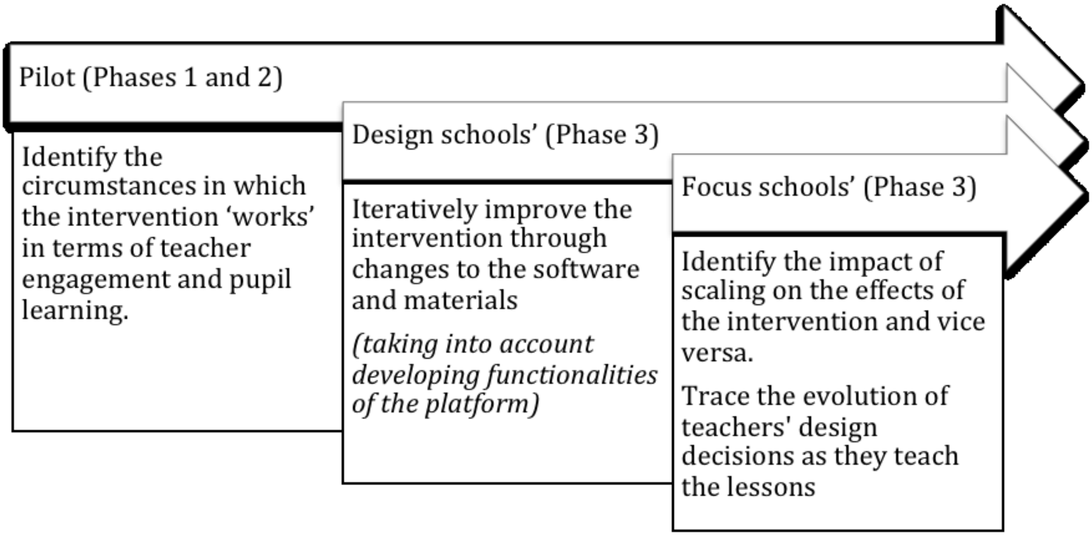


Figure 1. The Phases of the Cornerstone Maths research

The role of the 'Design schools' is to work very closely with the developers and researchers to support the evaluation of both the design of the resources (software, teaching materials, professional development events) and of the classroom outcomes with respect to the students.

By comparison, the 'Focus Schools' are more distant from the designers and researchers. By collecting data on the 'Focus school' teachers' classroom implementations, we are able to trace how the design decisions made by the designers/researchers are adapted by the teachers and identify the course of adaptation, which may be 'good' in that they further enhance mathematical learning or 'bad' in that they subvert the original intentions of the designers.

The approach to scaling the Cornerstone Maths project is illustrated in Figure 2.

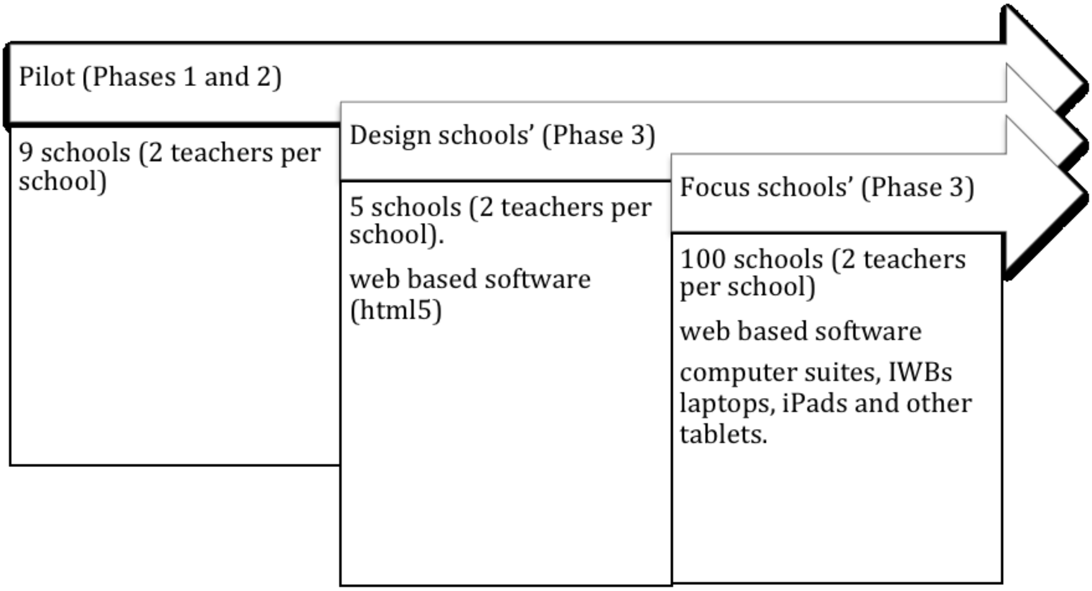


Figure 2. The process of scaling the project

Different data collection methods are being used to collect information from teachers and students in each of the school types, as outlined in Figure 3.

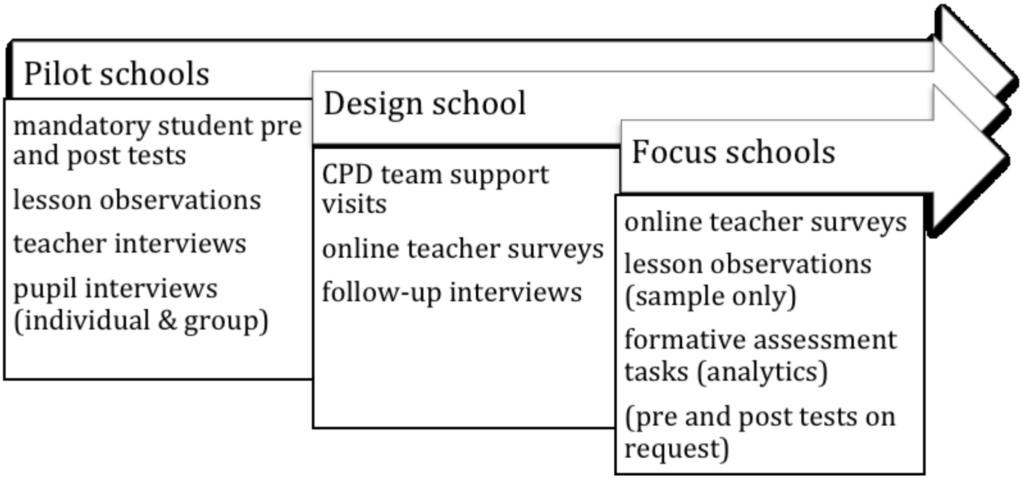


Figure 3. The Data Collection methods

A description of the Cornerstone Maths

In the UK, the teachers attend a one-day workshop in school time (with another teacher being paid to teach their classes) in order to learn about the curriculum units of work and to prepare to teach the lessons in their classroom. The teachers choose whether they intend to teach 1, 2 or all 3 units of work.

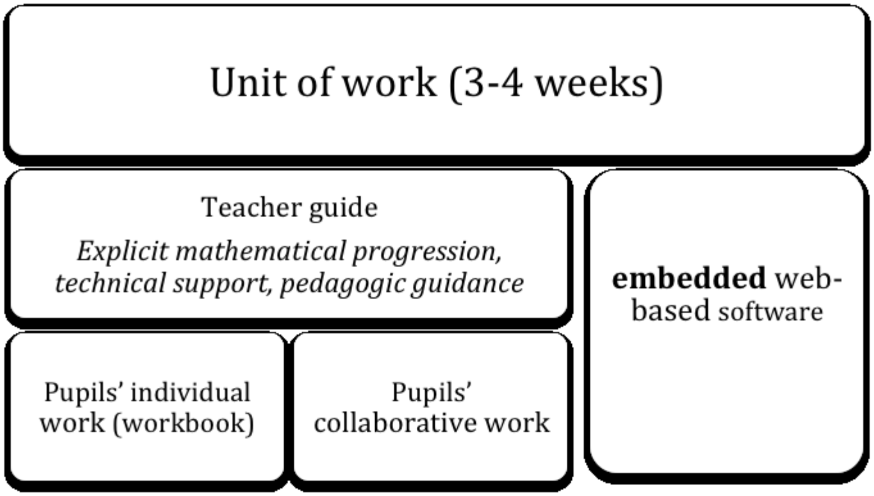


Figure 4. The structure of a Cornerstone Maths unit of work

Figure 5 to Figure 7 illustrate both the teachers' professional development events and the students' experiences of Cornerstone Maths lessons.

Figure 5. Design school teachers at a professional development session

Figure 6. A teacher at the Interactive Whiteboard with a student

Figure 7. A typical Cornerstone Maths lesson - in a normal mathematics classroom with laptops for each group.

Currently, there are three curriculum units of work at different stages of development, which focus on the following mathematical topics:

- Linear functions (Unit 1)
- Geometric similarity (Unit 2)
- Generalisation and algebraic expressions (Unit 3) (early in development)

The first two units will now be described briefly.

Linear functions (Unit 1)

The 'real-life' context for the unit puts the students in the role of someone who is developing games for mobile phones, that is using mathematics to analyse and create simulated motion games**.**

The design principles for the activities in this unit of work include:

- dynamic simulation and linking between representations
- control the simulation from the graph or the function
- show/hide representations, as appropriate.

The 'big mathematical ideas' in the unit concern:

- Coordinating algebraic, graphical, and tabular representations.
- $y= mx+c$ as a model of constant velocity motion – the meaning of m and c in the motion context.
- Velocity as speed with direction and average velocity.

Figure 8 shows a screen shot from one of the activities within unit 1 in which the students learn how to control the motion of 'Shaky the robot' via the draggable features of the graph or by editing the function.

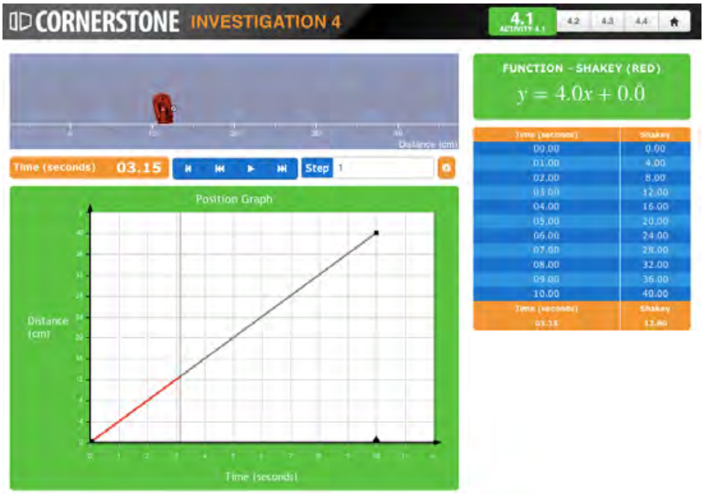


Figure 8. A screenshot of a software activity in Unit 1 'Shaky the robot'

The online activity is supported by a structured set of questions for the activity, which the students complete in a pre-printed workbook that contains all of the activities within the unit, as shown in Figure 9.

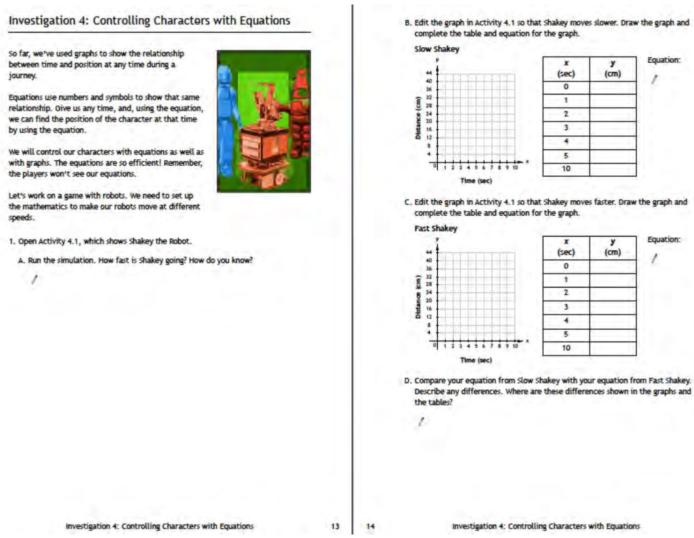


Figure 9. Extract from the Student's workbook for the Activity 'Shaky the robot'

Unit 2: Geometric similarity

The 'real-life' context for this unit of work is that students adopt the role of a designer for a digital magazine that requires them to produce the front cover by creating mathematically similar images.

The design principles for unit 2 include:

- dynamic measurements and comparisons
- structuring recording within tables

- link geometrical manipulation with tables and ratio checker

and the 'big mathematical ideas' concern:

- Identifying the variants and invariants in shapes that are mathematically similar, including identification of scale factor of enlargements.
- Recognise the important one-to-one geometric correspondence of sides and vertices within mathematically similar polygons.

The online software includes the facility to measure angles and sides for given sets of figures and to drag measurements from the figure to the Measurement Table. It is then possible for students to take snapshots of particular figures and their measurements. In addition, students can drag measurements to the Ratio Checker, which provides feedback on whether ratios are equivalent (or not).

Figure 10 illustrates this for the activity 'Scale factor'.

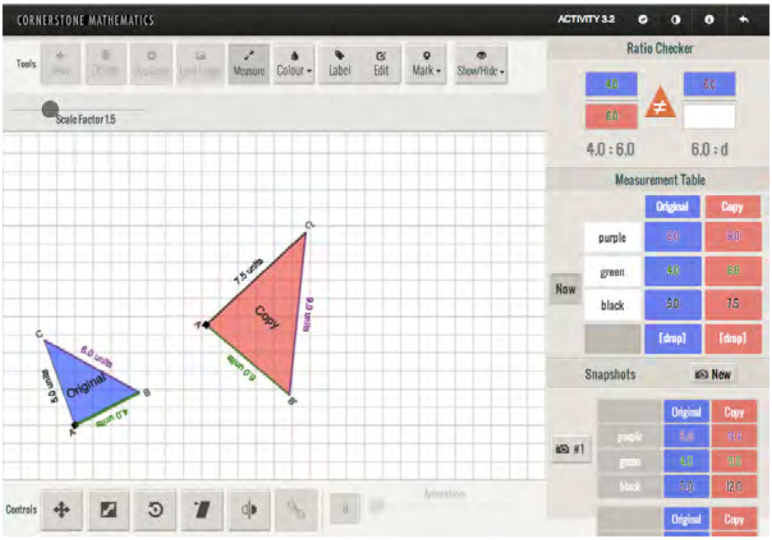


Figure 10. Screenshot of the online activity 'Scale factor'

Research results

In the pilot phase, there were conclusive results that demonstrated that the learning gains (as measured by pre- and post-tests) were comparable to (or exceeded) those from the results of the Texas study in the US (RCT) (Hegedus & Roschelle, 2013; Hoyles, Noss, Vahey, & Roschelle, 2013).

In addition, the materials were effective for a wide range of student backgrounds, although lower attaining students required additional support to derive the maximum benefits. The teachers reported that the materials helped them to meet their students' learning goals in a manner that was more effective than their traditional approach and they adapted the materials for their contexts to ensure that all pupils gained understanding of the complex ideas. These adaptations included: the development of additional materials for to support the beginning of lessons and 'mini whole- class plenaries' during the lessons and by amending the phasing of lessons to spend more (or less) time on particular mathematical ideas.

At the time of writing, the 'Design Schools' had finished implementing Unit 1 on the new web-based platform and, although four schools were able to do this successfully, the remaining schools had IT issues that prevented them from using the resources 'as designed'. This has led to the development of an 'IT knowledge base' that will be shared with the Focus schools when the project enters its next stage of scaling. In addition, the feedback from the Design Schools has highlighted that the following aspects needed a greater emphasis within the Teacher's Guide (and Student Workbook) for teachers and/or pupils during the lessons:

- The mathematical connections between the simulation, graph, table and function representations.
- The need to 'predict-check-explain' as part of the underlying approach in each activity.

More information about Cornerstone Maths can be found at:

www.cornerstonemaths.co.uk

References

Bretscher, Nicola. (2014). *Exploring the Quantitative and Qualitative Gap Between Expectation and Implementation: A Survey of English Mathematics Teachers' Uses of ICT.* In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development* (Vol. 2). Dordrecht: Springer.

Healy, L., & Hoyles, C. (2001). *Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3).

Hegedus, Stephen J., & Roschelle, Jeremy. (2013). *The SimCalc Vision and Contributions.* Netherlands: Springer.

Hoyles, Celia, Noss, Richard, Vahey, Phil, & Roschelle, Jeremy. (2013). *Cornerstone Mathematics: Designing digital technology for teacher adaptation and scaling.* ZDM, 45(7), 1057-1070.

Kaput, Jim, Hoyles, Celia, & Noss, Richard. (2002). *Developing new notations for a learnable mathematics in the computational era.* In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 51-75). London: Erlbaum.

Mavrikis, Manolis, Noss, Richard, Hoyles, Celia, & Geraniou, Eirini. (2012). *Sowing the seeds of algebraic generalisation: designing epistemic affordances for an intelligent microworld.* Journal of Computer Assisted Learning, 29(1), 68-84.

INSEGNARE MATEMATICA E FISICA OGGI

Ernesta De Masi
Liceo "A. Gatto" di Agropoli (SA)

Premessa

L'insegnamento della Matematica e della Fisica oggi, in tutti i livelli di scolarità e, in particolare per tutti i tipi d'istruzione secondaria di secondo grado, pone notevoli e non semplici sfide.

I nostri alunni vivono in una società complessa, in continua e rapida trasformazione, circondati da oggetti tecnologici sempre più sofisticati e veloci, di cui sono fruitori accaniti a vari livelli. La Matematica e la Fisica non possono essere più considerate discipline che solo pochi appassionati e studiosi possono capire ma oggi, più che mai, devono fornire ai giovani strumenti per affrontare la complessità, per comprendere il mondo che li circonda e operare scelte consapevoli. Una sfida certamente ardua!

Di contro, il sistema scolastico evidenzia difficoltà nel soddisfare le nuove esigenze che le rapide trasformazioni sociali e tecnologiche impongono. In questo mio intervento descriverò la situazione italiana ed europea dell'insegnamento scientifico e non che emerge da alcune indagini internazionali, le raccomandazioni che ci provengono da organismi europei e dalle istituzioni italiane e alcune attività che, in abito nazionale e internazionale, promuovono l'innovazione e il potenziamento della didattica delle discipline scientifiche.

Risultati di alcune indagini internazionali sulla professionalità docente e sui livelli di apprendimento degli alunni

Indagine TALIS

TALIS (Teaching And Learning International Survey/Indagine Internazionale sull'Insegnamento e Apprendimento) è un'indagine internazionale, promossa dall'OCSE, che esamina rilevanti aspetti dell'attività professionale degli insegnanti:

- i loro orientamenti pedagogici,
- le loro pratiche didattiche,
- la loro interazione all'interno della scuola con i colleghi e la dirigenza scolastica.

L'indagine è rivolta ai docenti e dirigenti scolastici del level 2 -International Standard Classification of Education ISCED-97- che corrisponde in Italia alla scuola secondaria di primo grado.

Scopo principale dell'indagine è elaborare un quadro comparativo di indicatori internazionali, utili a sostenere i paesi nello sviluppo delle loro politiche sull'insegnamento, sull'apprendimento e sui docenti. L'iniziativa ha il supporto della Commissione Europea.

La prima edizione di TALIS, denominata TALIS2008, si è svolta nell'anno scolastico 2007/2008 e vi hanno partecipato 24 paesi tra cui l'Italia. I risultati di TALIS 2008 sono diffusi sul sito dell'OCSE (http://www.oecd.org/education/preschoolandschool/43023606.pdf).

TALIS2013 ha ripreso e ampliato i temi di TALIS 2008. Nell'edizione in corso il numero dei paesi partecipanti è salito a 33.

Nella presentazione dei risultati dell'indagine TALIS 2008 emerge con grande chiarezza la necessità del cambiamento, si legge, infatti:

"Le sfide per il cambiamento dei sistemi d'istruzione continuano a intensificarsi nel mondo.

Nella moderna economia basata sulla conoscenza, la domanda di competenze di alto livello continuerà a crescere notevolmente, il compito in molti paesi è quello di trasformare i modelli tradizionali di istruzione, che sono stati efficaci a distinguere gli studenti che sono più accademicamente di talento (academically talented) da quelli che lo sono meno, in sistemi di apprendimento personalizzati che identificano e sviluppano i talenti di tutti gli studenti.

Ciò richiederà la creazione di sistemi "knowledge-rich", in cui i dirigenti scolastici e gli insegnanti agiscono come una comunità professionale con l'autorità di agire, con le necessarie informazioni per farlo con saggezza e con un accesso ai sistemi di supporto efficace per aiutarli a realizzare il cambiamento."

Per affrontare le sfide che i veloci cambiamenti sociali impongono, occorre una seria preparazione da parte dei docenti. Il grafico di Figura 1 evidenzia che il numero di docenti che in Italia impegnano le proprie energie nel personale aggiornamento è al di sotto del livello medio TALIS ma, quanti si dedicano al proprio sviluppo personale in Italia, Figura2, lo fanno dedicando a questo molto tempo.

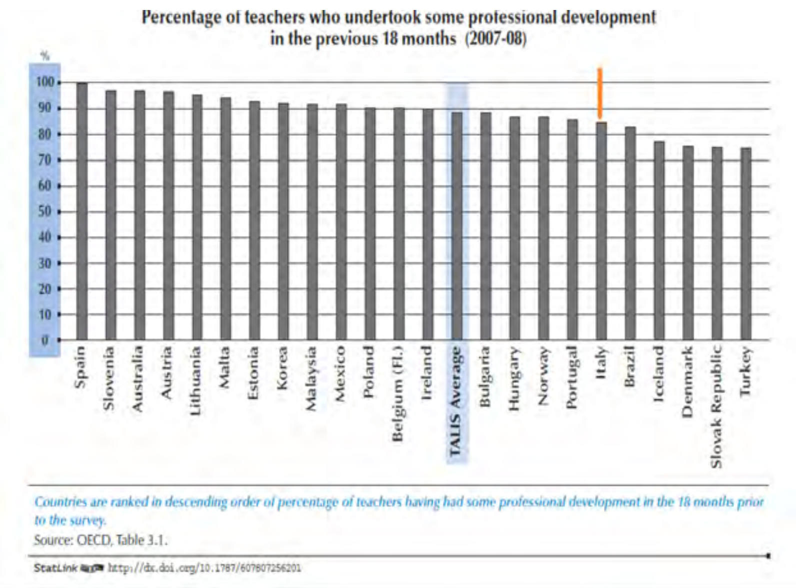


Figura 1

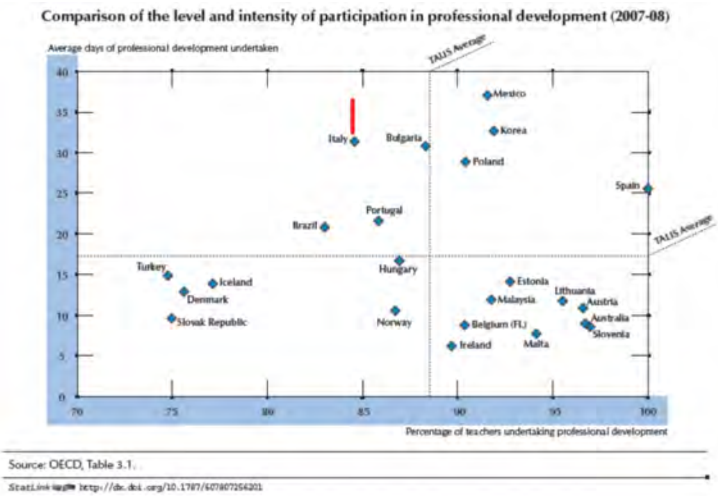


Figura 2

Occorre dunque fortemente motivare gli insegnanti all'aggiornamento personale, primo passo verso un cambiamento di qualità: c'è molto da fare in questa direzione.

Talis indaga sui punti di vista degli insegnanti circa le metodologie d'insegnamento. Agli insegnanti viene chiesto se nella didattica quotidiana seguono un insegnamento trasmissivo o di tipo costruttivista.

I documenti TALIS precisano che in un insegnamento di tipo trasmissivo:

- un insegnante efficacie/bravo mostra il modo corretto per risolvere un problema,
- l'istruzione dovrebbe essere costruita attorno a problemi con risposte chiare e corrette e intorno alle idee che la maggior parte degli studenti possono cogliere rapidamente,
- l'apprendimento degli studenti dipende dalla loro preparazione di base,
- una classe tranquilla è generalmente necessaria per un apprendimento efficace.

In un insegnamento costruttivista:

- il ruolo dell'insegnante è quello di facilitare l'investigazione (inquiry) degli studenti,
- gli studenti imparano meglio se trovano le soluzioni ai problemi da soli,
- gli studenti dovrebbero essere incentivati a ricercare soluzioni a problemi pratici prima che l'insegnante mostri loro come si risolvono,
- i processi di ragionamento sono più importanti del contenuto specifico del curriculum.

Il grafico di Figura 3 mostra come gli insegnanti hanno risposto: in Italia l'insegnamento di tipo trasmissivo è ancora preferito a quello di tipo costruttivista. Tra tutti i paesi che hanno partecipato all'indagine, il grafico mostra che siamo "in coda": questo significa che gli insegnanti italiani sono poco disponibili all'innovazione didattica.

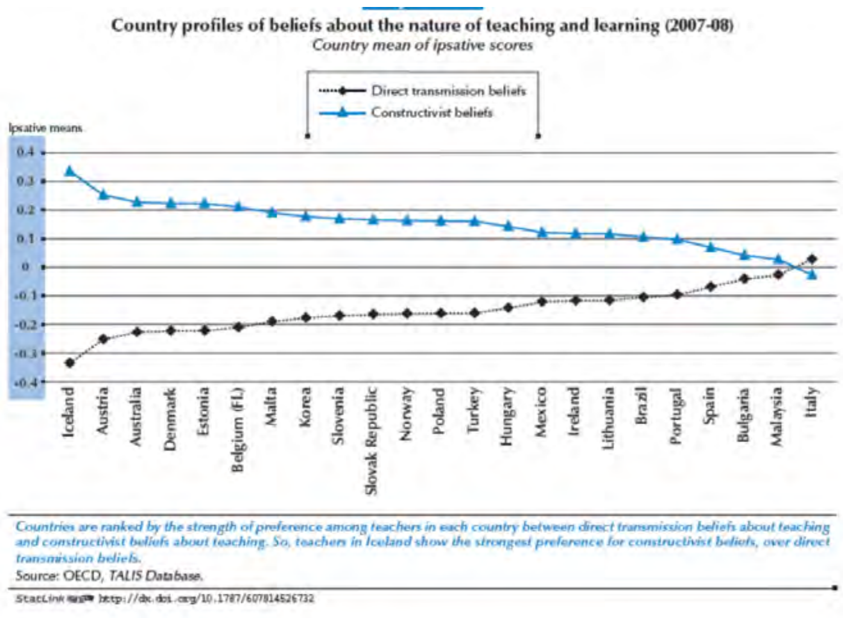


Figura 3

I questionari chiedono inoltre ai docenti di rispondere ad item su tre tipologie di organizzazione dell'attività didattica così descritte:

- attività strutturata: esplicitazione degli obiettivi di apprendimento, sintesi delle lezioni precedenti, revisione compiti a casa controllando il quaderno, controllo della comprensione degli studenti durante la lezione in classe;
- attività student-oriented: gli studenti lavorano in piccoli gruppi per trovare una soluzione

comune a un problema o compito, l'insegnante valuta le capacità di lavorare in gruppo, la partecipazione degli studenti nella pianificazione dell'attività in aula, è prevista l'autovalutazione degli studenti;

- attività avanzate: gli studenti lavorano su progetti che richiedono almeno una settimana per essere portati a termine, è prevista la realizzazione di un prodotto, la scrittura di un saggio e la condivisione dei risultati.

Il grafico di Figura 4 evidenzia che gli insegnanti italiani prediligono un'organizzazione dell'attività didattica di tipo tradizionale.

Il grafico di Figura 5 mostra che, in effetti, per l'insegnamento delle discipline scientifiche, e per la matematica in particolare, i docenti prediligono un'organizzazione dell'attività didattica strutturata: anche in altri paesi esiste una certa difficoltà a innovare la prassi didattica per queste discipline.

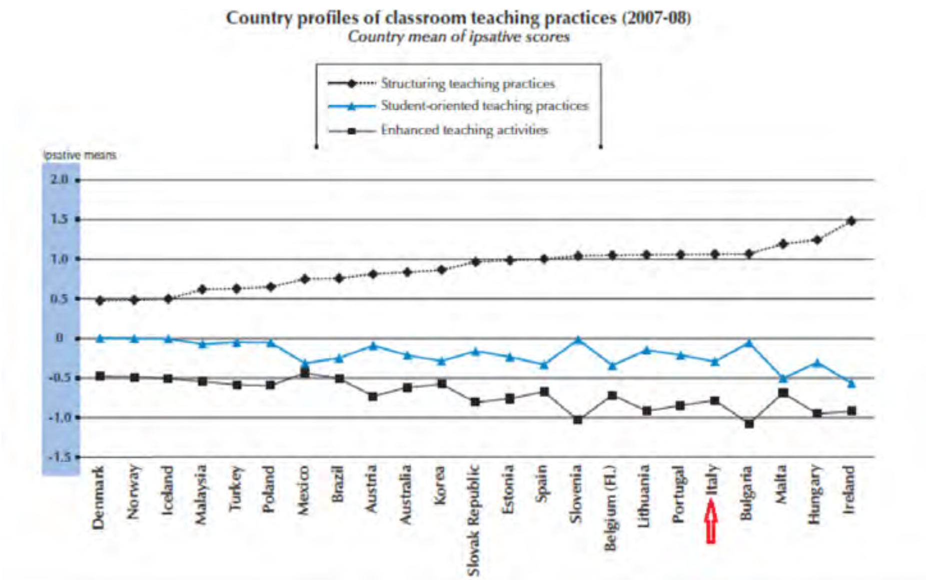
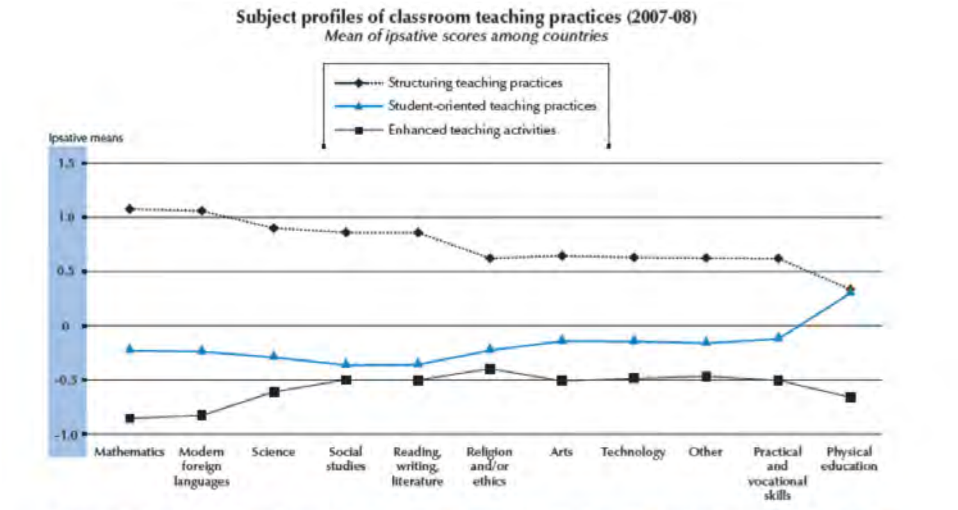


Figura 4



Subjects are ranked in descending order of the degree to which the use of different practices differs. Across countries, for example, mathematics teachers use structuring teaching practices much more than they do either student-oriented practices or enhanced activities.
Source: OECD, *TALIS Database*.

Figura 5

Come gli insegnanti utilizzano il tempo a loro disposizione?

Dalla Figura 6 emerge che gli insegnanti italiani dedicano il 15% circa del loro tempo a garantire la disciplina: forse la vivacità degli alunni italiani può rappresentare un ostacolo all'innovazione nella prassi didattica.

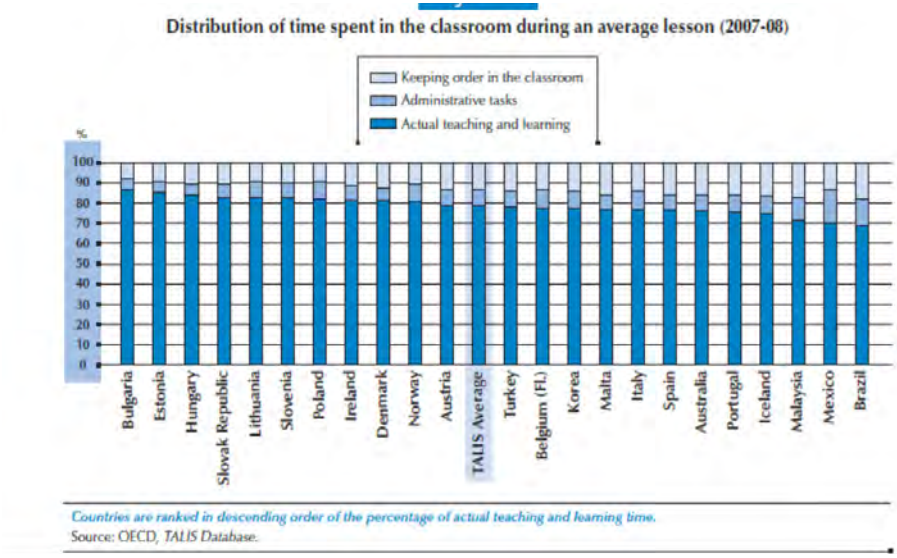


Figura 6

Per un approfondimento degli interessanti risultati dell'indagine TALIS, si rimanda al sito già prima menzionato: http://www.oecd.org/education/preschoolandschool/43023606.pdf.

Indagine EURYDICE

EURYDICE è un progetto finanziato dal programma di azione comunitaria nel campo dell'apprendimento permanente (LLP) e si avvale di:

- un'Unità Europea che coordina la rete e pubblica i propri studi con sede a Bruxelles,
- 37 Unità Nazionali con sede in tutti i 33 paesi che partecipano al programma europeo di apprendimento permanente (LLP).

Eurydice pubblica i risultati delle ricerche su: EURYPEDIA, l'enciclopedia europea sui sistemi educativi https://webgate.ec.europa.eu.

Il report dell'indagine più recente di EURYDICE sulla professione docente dal titolo: KEY DATA ON TEACHERS AND SCHOOL LEADERS IN EUROPE (2013) fornisce informazioni per docenti della scuola dell'infanzia (ISCED 0), primaria (ISCED 1) e secondaria di primo e secondo grado (ISCED 2-3).

I contenuti di tale report riguardano la formazione iniziale dei docenti, l'assunzione, i datori di lavoro e contratti, la mobilità e lo sviluppo professionale permanente, le condizioni di lavoro e la retribuzione, i livelli di autonomia e responsabilità dei docenti, i dirigenti scolastici. Il report fornisce dunque un'ampia gamma d'informazioni; di seguito ci limiteremo a fornire alcune informazioni che riguardano in particolare l'insegnamento della Matematica e delle Scienze.

I grafici di Figura 7 e Figura 8 confortano la situazione italiana circa le carenze o inadeguatezze degli insegnanti di Matematica e Scienze: gli insegnanti italiani non occupano le ultimeposizioni!

		Grade	EU	BE nl	CZ	DK	DE	IE	ES	IT	LT	HU	MT	NL	AT	PL	PT	RO	SI	SK	FI	SE	UK-ENG	UK-NIR	HR	NO
Not at all / a little	Science	4	74.4	71.7	88.0	70.8	79.6	54.7	82.9	52.1	99.3	83.3	52.5	44.1	78.5	94.0	59.7	75.6	98.4	88.1	74.5	74.9	76.1	66.1	79.1	67.4
		8	82.1	x	x	x	x	x	x	73.3	95.4	78.3	x	x	x	x	x	81.1	99.7	x	93.0	78.8	89.7	x	x	85.6
	Mathematics	4	81.1	78.7	90.3	79.3	93.2	70.2	83.3	63.7	97.3	86.5	71.2	60.3	88.1	92.6	66.2	80.9	97.7	88.7	80.9	78.1	78.1	85.4	78.1	69.3
		8	83.1	x	x	x	x	x	x	76.4	93.2	81.9	x	x	x	x	x	86.2	98.0	x	91.8	73.3	88.2	x	x	89.1
Some	Science	4	19.5	24.5	4.8	21.1	18.8	28.6	14.1	38.6	0.1	6.3	35.9	39.5	16.8	4.6	35.1	6.8	1.6	8.3	18.6	19.5	18.5	21.5	13.3	31.2
		8	10.9	x	x	x	x	x	x	18.9	0.9	6.1	x	x	x	x	x	3.2	0.3	x	2.3	17.8	7.7	x	x	12.8
	Mathematics	4	14.7	17.5	3.9	16.9	5.6	23.6	14.1	29.4	2.2	4.0	22.2	30.9	9.4	6.6	30.5	7.4	2.3	6.8	15.1	18.1	17.7	12.9	14.4	29.3
		8	11.3	x	x	x	x	x	x	18.0	4.0	3.0	x	x	x	x	x	2.1	2.0	x	3.6	25.1	9.1	x	x	8.7
A lot	Science	4	6.0	3.8	7.2	8.1	1.6	16.8	3.0	9.3	0.5	10.4	11.5	16.4	4.7	1.4	5.2	17.6	0.0	3.6	6.9	5.6	5.3	12.4	7.5	1.4
		8	7.0	x	x	x	x	x	x	7.8	3.7	15.5	x	x	x	x	x	15.7	0.0	x	4.7	3.3	2.5	x	x	1.6
	Mathematics	4	4.2	3.8	5.8	3.8	1.3	6.1	2.5	6.9	0.5	9.4	6.6	8.8	2.5	0.7	3.3	11.6	0.0	4.5	4.0	3.8	4.2	1.7	7.4	1.4
		8	5.6	x	x	x	x	x	x	5.6	2.8	15.2	x	x	x	x	x	11.7	0.0	x	4.7	1.6	2.7	x	x	2.2

■ Science ■ Mathematics x Countries not contributing to data collection

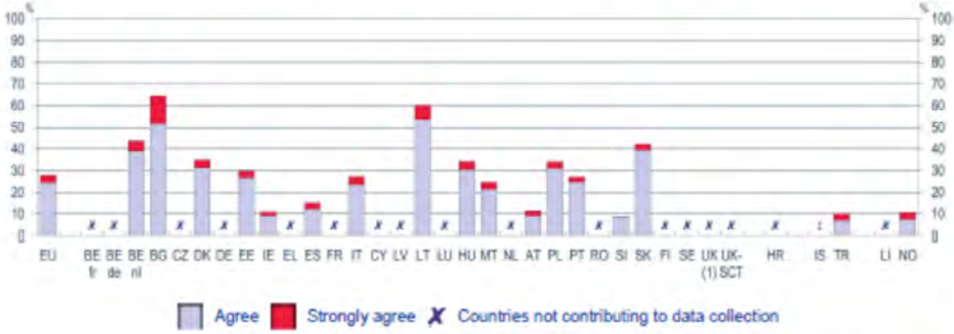
Source: IEA, TIMSS 2011 international database.

Figura 7

Figura 8

Il grafico di Figura 9 mostra che in alcuni paesi quali Bulgaria, Lituania, Slovacchia e Belgio i docenti sono molto severi nel giudicare i colleghi con basse performance: dovrebbero essere allontanati dalla scuola! In Italia si evidenzia una maggiore tolleranza in tal senso.

Figure B11: Percentage of ISCED 2 teachers who agree or strongly agree that in their school teachers would be dismissed because of sustained poor performance, 2008



UK (1) = UK-ENG/WLS/NIR

	EU	BE nl	BG	DK	EE	IE	ES	IT	LT	HU	MT	AT	PL	PT	SI	SK	IS	TR	NO
Agree	24.4	39.0	51.6	31.3	26.7	9.3	12.3	23.5	53.6	30.3	21.2	9.2	31.0	24.7	8.6	39.5	:	7.0	7.5
Strongly agree	3.7	4.7	13.1	3.7	3.0	1.7	2.9	3.8	6.6	4.0	3.4	2.3	3.2	2.5	0.2	2.9	:	3.3	3.2

Source: OECD, TALIS 2008 database.

Figura 9

I dirigenti scolastici pensano che i docenti italiani hanno una bassa preparazione pedagogica, come mostrato nel grafico di Figura 10. Il giudizio dei dirigenti italiani è molto negativo confrontato con le altre situazioni europee.

Figure C7: Percentage of ISCED 2 teachers whose school heads considered that teachers' 'lack of pedagogical preparation' hindered instruction 'to some extent' and 'a lot' in their school, 2008

UK (1) = UK-ENG/WLS/NIR

	EU	BE nl	BG	DK	EE	IE	ES	IT	LT	HU	MT	AT	PL	PT	SI	SK	IS	TR	NO
To some extent	14.0	8.5	3.3	5.1	4.3	:	20.6	39.2	27.2	14.6	10.7	15.0	1.0	16.4	10.7	3.5	:	12.4	10.9
A lot	3.9	0.3	0.0	5.9	0.7	:	17.4	14.3	10.5	7.0	6.9	1.0	1.4	2.1	3.8	0.0	:	30.5	

Source: OECD, TALIS 2008 database.

Figura 10

Ma gli incentivi per incoraggiare i docenti a partecipare al CPD (Continuing Professional Development) sono bassi rispetto a quanto si fa in Europa (grafico di Figura11).

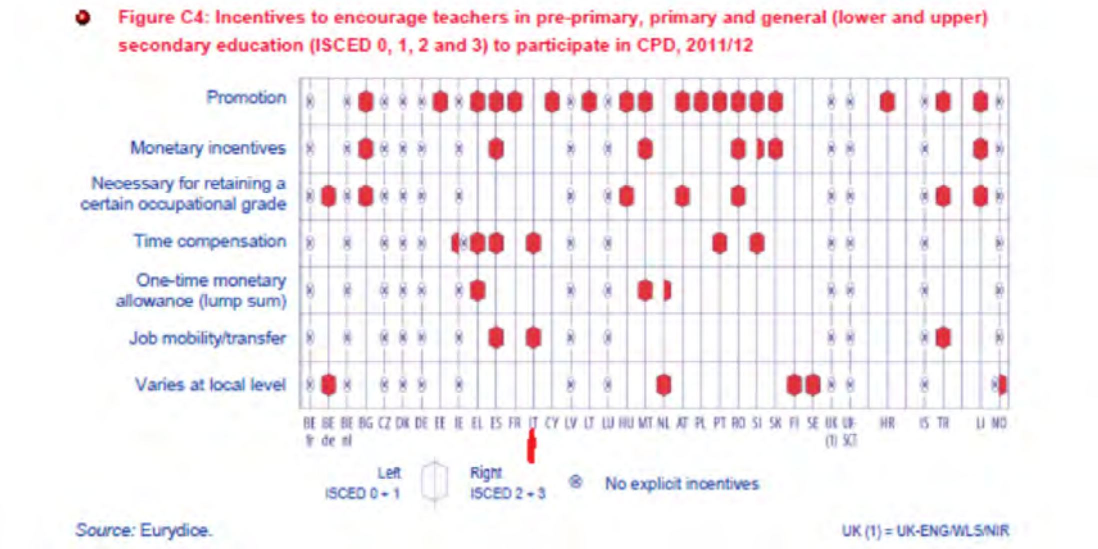


Figura 11

Per ulteriori approfondimenti sull'indagine EURYDICE si rimanda al sito già sopra citato: https://webgate.ec.europa.eu

Sono di sicuro interesse i risultati che riguardano le condizioni di lavoro quali, per esempio, il numero di alunni per docente o le condizioni salariali che vedono la situazione degli insegnanti italiani in posizioni intermedie rispetto agli altri paesi: le nostre classi non sono le più numerose, gli stipendi degli insegnanti italiani, in rapporto alle ore effettive di attività svolte a scuola, non sono i più bassi. C'è da dire che in Italia non viene quantificato il tempo che gli insegnanti impiegano per preparazione e valutazione delle attività didattiche, questo avviene in altri paesi europei.

Indagini TIMSS, OCSE-PISA e INVALSI

L'indagine **TIMSS 2011** (Trends in International Mathematics and Science Study) è il quinto ciclo di una ricerca internazionale promossa dalla IEA (International Association for the Evaluation of Educational Assessment), analizza il rendimento degli studenti in Matematica e Scienze in oltre 60 Paesi**.** L'indagine TIMSS misura la performance degli studenti **relativamente alla IV classe della scuola primaria e III secondaria di I grado** e monitora l'implementazione dei curricoli scolastici nei Paesi partecipanti all'indagine.

Obiettivo della ricerca è:

- comparare gli apprendimenti degli studenti in funzione dei differenti sistemi scolastici dei diversi paesi;
- individuare, a livello comparativo, punti di forza e di debolezza dei rispettivi sistemi educativi e migliorare, così, l'insegnamento e l'apprendimento della Matematica e delle Scienze;
- misurare i cambiamenti nel tempo (analisi di trend) degli apprendimenti in Matematica e Scienze degli studenti dei singoli Paesi: la stessa coorte di studenti valutata in quarta primaria in un ciclo TIMSS è valutata in terza secondaria di I grado del ciclo successivo;
- identificare i fattori che influenzano le performance in Matematica e Scienze con particolare attenzione alle variabili di sfondo di tipo socio-economico e culturale, ai curricoli e alle strategie didattiche;

- individuare a spiegare le differenze nei sistemi d'istruzione tra Paesi al fine di contribuire a migliorare l'insegnamento e l'apprendimento della Matematica e delle Scienze.

Per un'analisi dettagliata dei risultati dell'indagine si rimanda al sito: http://www.invalsi.it/invalsi/ric.php?page=timss2011.

In sintesi, complessivamente, la performance degli alunni italiani è migliore nella quarta primaria, al di sopra della media TIMSS, che nel segmento scolastico successivo. Ciò rimane vero anche quando si restringe il confronto a un più naturale termine di paragone, ossia i Paesi OCSE e UE. Si riscontra, inoltre, che le percentuali degli studenti che non raggiungono neanche il livello basso sono in Italia piuttosto piccole e, sovente, inferiori a quelle degli altri Paesi OCSE e UE. Il sistema scolastico italiano sembra, invece, più in difficoltà a coltivare i livelli elevati di competenza che sono spesso meno rappresentati in Italia rispetto agli altri Paesi considerati in queste analisi.

L'indagine TIMSS confronta inoltre gli esiti delle diverse rilevazioni, espressi come differenza dalle rispettive medie nazionali, nelle macro-aree del Paese: il Mezzogiorno ha un ritardo già in quarta primaria, tale gap va ampliandosi col procedere del percorso di studi.

L'indagine **OCSE-PISA** (*Programme for International Student Assessment*) è forse la più nota tra le indagini menzionate grazie anche allo spazio che i media hanno dato ai risultati di questo lavoro. Nel 2012, PISA è arrivata alla quinta edizione: PISA ha l'obiettivo di misurare le competenze degli studenti quindicenni in Matematica, Scienze, Lettura e Problem Solving. Per ogni ciclo di PISA, viene approfondito un ambito in particolare: PISA 2012 ha avuto come domini principali la competenza in Matematica e in Problem Solving.

Anche per la rilevazione 2012 l'Italia consegue una performance peggiore della media OCSE. Confrontando il 2012 con le prime edizioni della rilevazione PISA, l'Italia evidenzia segnali di miglioramento: tra 2006 e 2009 i risultati si innalzano e il 2012 conferma tale inversione di tendenza.

Ampi sono i divari territoriali, con le regioni del Nord Ovest e del Nord Est avanti, mentre il Mezzogiorno, pur con segnali di miglioramento dal 2006 in poi, specie in alcune regioni, è sotto la media nazionale, sui cui valori si situa il Centro.

Fra i paesi OCSE, ottengono un punteggio inferiore all'Italia solo Svezia, Ungheria, Israele, Grecia, Cile e Messico; sono equiparabili all'Italia (avendo valori che non se ne discostano in termini statisticamente significativi) Norvegia, Portogallo, Spagna, Repubblica Slovacca e Stati Uniti.

Solo leggermente migliori sono i risultati in Lettura e Scienze, con valori dell'Italia rispettivamente di 490 e 494 (a fronte di valori medi OCSE rispettivamente pari a 496 e 499).

Per un'analisi dettagliata dei risultati si rimanda al sito: http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/rappnaz/Sintesi_OCSE_PISA__2012.pdf

Le prove **INVALSI**, a differenza delle precedenti, hanno carattere censuario, sono rivolte cioè a tutti gli alunni di II e V primaria, I secondaria di primo grado e II secondaria di secondo grado. Inoltre l'INVALSI cura la prova nazionale che fa parte delle prove dell'esame di Stato conclusivo del primo ciclo d'istruzione.

L'INVALSI è l'Ente di ricerca dotato di personalità giuridica di diritto pubblico che gestisce il Sistema Nazionale di Valutazione (SNV).

I risultati delle prove INVALSI sono in accordo con il trend indicato dalle prove OCSE-PISA (Figura 12).

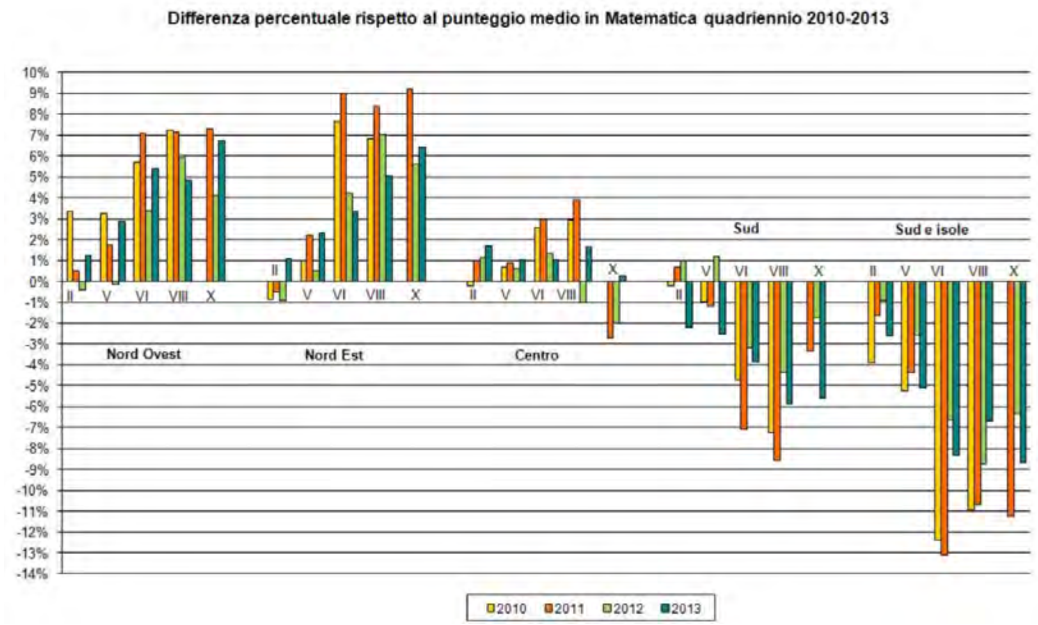


Figura 12

Un analisi dettagliata dei risultati delle prove INVALSI è al sito: www.invalsi.it.

Raccomandazioni d'istituzioni europee e nazionali

In questo quadro così variegato di grandi trasformazioni e di evidente crisi dei sistemi d'istruzione non solo italiani, si inseriscono le Raccomandazioni del Parlamento e del Consiglio d'Europa (18/12/2006) che definiscono le otto competenze chiave che sono quelle di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione. Tra le otto, tre riguardano in particolare l'insegnamento scientifico: competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia, competenza digitale, imparare a imparare.

I documenti relativi all'obbligo d'istruzione (Fioroni – agosto 2007) fanno ampiamente riferimento alle Raccomandazioni del Parlamento e del Consiglio d'Europa (http://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/dm139_07.shtml).

Più recentemente, il programma "Education and Training 2020" (ET 2020) del Consiglio Europeo è un quadro strategico aggiornato per la cooperazione europea nel settore dell'istruzione e della formazione, che prende le mosse dai progressi realizzati nel quadro del programma di lavoro "Education and Training 2010" (ET 2010).

Esso stabilisce gli obiettivi strategici comuni per gli Stati membri, incluso un certo numero di misure volte a raggiungere gli obiettivi stabiliti, nonché metodi di lavoro comuni che definiscono una serie di settori prioritari per ciascun ciclo di lavoro. Il settore dell'istruzione è ritenuto fortemente prioritario: punto di partenza per garantire progresso economico e sociale.

Il progetto S.F.I.D.E. (Strategie Formative per l'Implementazione e la Disseminazione di ET2020) è uno degli strumenti della campagna di comunicazione che il MIUR ha intrapreso per accompagnare l'evoluzione in atto del sistema di istruzione e formazione http://www.progettosfide.eu.

Nei documenti pubblicati si leggono forti e incisive raccomandazioni per l'innovazione, per il potenziamento della ricerca e dell'istruzione in campo scientifico, per la cooperazione transnazionale e la diffusione della tecnologia, per investimenti efficienti nei sistemi d'istruzione e formazione a tutti i livelli, dalla scuola materna all'insegnamento superiore.

Il quadro di riferimento nazionale in cui muoversi è costituito dalle Indicazioni Nazionali (riforma della scuola secondaria di secondo grado – marzo 2010 e le Indicazioni nazionali 2012 per la scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione).

Le Indicazioni Nazionali, studiate in modo adeguato, sono per i docenti uno strumento di lavoro che può guidare verso l'innovazione della didattica. È mancata, forse, una capillare formazione dei docenti che, in alcuni casi, ignorano i contenuti della normativa o ne hanno una conoscenza molto superficiale.

Iniziative nazionali per il miglioramento dell'insegnamento delle discipline scientifiche

Le iniziative per il miglioramento della didattica delle discipline scientifiche sono molteplici. Molti sono i piani di formazione docenti a livello nazionale e locale, spesso in modalità blended learning (erogazione di percorsi formativi che integrano e-learning e formazione d'aula).

I docenti in formazione sono anche invitati a sperimentare in classe segmenti del materiale didattico proposto e a «restituire» gli esiti della sperimentazione: non sono dunque solo ascoltatori passivi.

Di seguito sono elencate le iniziative di carattere nazionale più significative:

- m@t.abel (formazione nazionale per Matematica)
- Insegnare Scienze Sperimentali (piano ISS)
- PQM (Piano nazionale Qualità e Merito)
- PON Educazione scientifica
- DIDATEC (formazione tecnologica)

I materiali prodotti e sperimentati sono accessibili al sito: http://risorsedocentipon.indire.it/home_piattaforma.

A queste iniziative nazionali di formazione si aggiungono quelle promosse localmente da reti di scuole, associazioni e università.

Le SSIS e il più recente TFA, con tutti i limiti, hanno contribuito a una formazione iniziale dei docenti più efficace.

A queste iniziative si aggiungono ancora le attività del Piano Lauree Scientifiche e progetti di formazione e condivisione europei.

Le attività volte a innovare la didattica sono molte, di sicuro interesse ed efficacia ma tutte queste iniziative non sono programmate in modo sinergico: a volte determinano dispersione di energie intellettuali ed economiche.

Conclusioni

Come vive oggi nella scuola un insegnante di discipline scientifiche?

Vi è una più che evidente **crisi** del sistema d'istruzione:

- gli alunni sono meno disposti alla riflessione, all'analisi, a dedicare il loro tempo allo studio;
- esiste la consapevolezza **dell'inadeguatezza delle metodologie** «tradizionali» e la necessità **di innovare** e **contestualizzare** l'insegnamento ma sussistono **difficoltà** a calare nella pratica quotidiana suggerimenti e indicazioni del quadro normativo (**mancanza di esempi** e di una **efficace formazione** che raggiunga tutti): vi è un gap elevato tra la norma e la pratica quotidiana;

- gli esiti della **ricerca didattica**, spesso, restano confinati negli ambienti universitari: difficoltà di interazione e comunicazione;
- difficoltà a collaborare con i colleghi nel proprio ambiente di lavoro (pochi momenti di scambi efficaci …), abitudine a un forte individualismo, gli organi collegiali funzionano poco.

Tutto questo in un contesto di profonda crisi economica:

- **diminuzione** degli investimenti per istruzione e ricerca;
- **cambiamento** del modo di vedere la scuola e l'istruzione da parte di genitori e alunni, **scarsa fiducia** nelle istituzioni;
- **scarsa fiducia** nell'istruzione come garanzia per il successo nella ricerca del lavoro.
- …

Ma, in un quadro certamente poco confortante, nelle scuole c'è grande vitalità, gli insegnanti hanno acquisito professionalità che forse un decennio fa non avevano: sanno progettare, hanno imparato a comunicare le proprie idee, sanno collaborare con le università, viaggiano, si confrontano.

Un insegnante *deve* essere una persona ottimista: alle nuove generazioni è necessario fornire modelli positivi, comunicare speranze per il futuro, entusiasmo e desiderio di fare.

Sitografia

https://webgate.ec.europa.eu
http://www.oecd.org/education/preschoolandschool/43023606.pdf
http://www.invalsi.it/invalsi/ric.php?page=timss2011
http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/rappnaz/Sintesi_OCSE_PISA__2012.pdf
www.invalsi.it
http://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/dm139_07.shtml
http://www.progettosfide.eu
http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/index.html
www.indicazioninazionali.it

TAVOLA
ROTONDA
LA FORMAZIONE DEI DOCENTI DI MATEMATICA E DI FISICA

TFA – LA FORMAZIONE INIZIALE "DIMEZZATA"

Pietro Di Martino
Dip. Matematica – Università di Pisa – dimartin@dm.unipi.it

"Insegnare è imparare due volte."
Joseph Joubert, Pensieri

TFA: il mio punto di vista

Il Decreto Legislativo n.249, del 10 settembre 2010, seppur accolto da opinioni e giudizi diversi nel merito dei contenuti, è stato accolto con una certa soddisfazione da coloro che si interessano della formazione in ingresso degli insegnanti. La chiusura improvvisa delle SSIS e la mancanza di una legislazione che offrisse alternative al conseguimento dell'abilitazione all'insegnamento, oltre che aver frustrato l'ambizione e le speranze di molti giovani laureati interessati all'insegnamento, avevano infatti riportato l'orologio del tempo indietro, creando una sorta di "anomalia italiana": sotto la spinta di un attacco violento a ciò che avevano rappresentato le SSIS[1], ha ripreso forza l'idea che percorsi abilitanti all'insegnamento siano inutili se non dannosi.

Il Decreto Legislativo n.249 ha rappresentato l'interruzione di questa anomalia, definendo un percorso per abilitarsi all'insegnamento lungo 3 anni[2] che includesse crediti di didattiche disciplinari, di pedagogia e di tirocinio diretto e indiretto.

D'altra parte però l'inserimento di norme transitorie che prevedevano, con il possesso di una Laurea Magistrale, il conseguimento dell'abilitazione attraverso il solo anno di Tirocinio Formativo Attivo, seppur motivate appunto dal vuoto normativo di alcuni anni (e dunque tese a non penalizzare ulteriormente chi era già stato penalizzato in termini di attesa), di fatto ha "dimezzato" l'impianto formativo previsto dal Decreto stesso.

Coloro, come me, che sono convinti della bontà di un percorso abilitante, come quello immaginato a regime dal Decreto, che preveda una Laurea Magistrale "dedicata" di 2 anni e un anno di Tirocinio, si sono preoccupati conoscendo la storia e la "resistenza" delle norme transitorie italiane. Dopo 3 anni, possiamo purtroppo affermare che tali preoccupazioni erano fondate: all'orizzonte non solo non c'è più traccia dell'attivazione delle Lauree Magistrali per l'insegnamento (contravvenendo a un Decreto Legislativo tra l'altro mai modificato o integrato), ma addirittura siamo al paradosso che non si dà nemmeno continuità alla fase transitoria, non bandendo il nuovo anno di Tirocinio Formativo Attivo.

Dunque il TFA è un percorso abilitante che nasce come una importante novità, ma in un certo senso come percorso "dimezzato": per questo è significativo cercare di fare un bilancio della prima (e ad ora unica) esperienza. Una esperienza le cui contraddizioni sono intuibili già da un incrocio di date: i concorsi di accesso al TFA anno accademico 2011-2012 partono a giugno

1 Si può discutere sui difetti e sui pregi delle Scuole di Specializzazione, l'aspetto curioso è che gli attacchi più violenti all'esperienza SSIS da parte accademica sono venuti da persone che non hanno vissuto quella esperienza.

2 "I percorsi formativi sono così articolati: b) per l'insegnamento nella scuola secondaria di primo e secondo grado, un corso di laurea magistrale biennale ed un successivo anno di tirocinio formativo attivo [art. 3, comma 2] (…) A conclusione del tirocinio formativo attivo, previo superamento di un esame finale, si consegue il titolo di abilitazione all'insegnamento [art. 10, comma 1]".

2012, e le sedi più "rapide" iniziano i corsi a fine novembre 2012.

Quello che propongo sono le mie impressioni, maturate nel corso del tempo: sono stato infatti, dall'uscita del Decreto Legislativo n.249, coinvolto nelle discussioni promosse dall'Unione Matematica Italiana (UMI) - più nello specifico all'interno della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM) di cui faccio parte - al fine di tracciare una linea comune per i percorsi abilitanti l'insegnamento della matematica ai diversi livelli scolari. Uscito il bando del primo TFA ho lavorato – come Presidente di Commissione – alle prove di accesso per la classe A049 della Regione Toscana, ho coordinato l'organizzazione della classe A047 per la sede didattica di Pisa, e per la stessa classe sono stato docente di corso e in commissione per l'Esame di Stato abilitante.

In questa multi-ottica ritengo di aver avuto, nel primo anno di vita del TFA, la possibilità di poter approcciare diversi aspetti del Tirocinio Formativo Attivo. Intenderei proprio descrivere alcuni di questi aspetti, in particolare quelli che ritengo possano essere comuni anche a contesti diversi da quello della specifica sede didattica in cui ho operato. Vorrei discutere quelli che ritengo essere stati i tanti punti di debolezza, dovuti sia a fattori esterni che interni (cioè dovuti a scelte probabilmente sbagliate da parte nostra), ma anche i punti di forza di questa esperienza.

Ho finora brevemente richiamato il contesto in cui siamo partiti con questa esperienza: le difficoltà incontrate. Vorrei anche riportare alcuni aspetti "sorprendenti", che non mi aspettavo e su cui è importante riflettere: uno di questi, legato alla forte motivazione dimostrata dai corsisti, è legato anche alla necessità di non abbandonare al termine del percorso di formazione iniziale chi, proprio nel momento in cui entra a scuola, sente maggiormente il bisogno di essere supportato.

Su tutti gli aspetti precedenti incide comunque molto il fatto che l'esperienza del TFA sia a livello formale (per quanto previsto originariamente dalla legge), ma anche a livello sostanziale, un percorso di formazione iniziale dimezzato, con l'aggravante di essere stato (per ritardi di varia natura) ancor più compresso rispetto all'idea originaria. Il percorso 3+2+1 (con gli ultimi 3 anni dedicati alla formazione per la professione insegnante) che ritengo abbia una importante valenza culturale e formativa, è stato ridotto a un 5+1, dove solo l'ultimo anno è dedicato specificatamente alla formazione. Questa scelta, che doveva essere provvisoria e che purtroppo rischia di diventare definitiva, è causa di diverse problematiche che effettivamente sono emerse in questo primo anno di TFA.

Quello che è accaduto è che, attraverso i test d'ingresso, c'è stata sicuramente una selezione più forte sui contenuti rispetto all'ingresso alle vecchie scuole di specializzazione, ma sono entrate persone con esperienze e bisogni diversi: i tempi compressi e le scarse risorse degli Atenei non hanno permesso la necessaria personalizzazione dei percorsi (il sistema dei crediti maturati ha inciso solo su esoneri rispetto a cose da fare).

La parte sicuramente più sacrificata è stata quella più importante, ovvero quella del tirocinio in classe, seguito da una riflessione in aula con i formatori: il tirocinio è stato molto compresso, e fatto nella parte finale dell'anno scolastico, con tutti i problemi connessi. La parte di riflessione comune a tutto il gruppo è praticamente mancata. A differenza di alcuni commentatori, ritengo da una parte che l'abitudine alla riflessione critica sulle proprie e altrui pratiche sia anch'essa una competenza che può e deve essere educata (insomma "non si nasce imparati"), dall'altra che la ricerca in didattica della matematica abbia detto e abbia da dire tanto su questi aspetti, e dunque che un confronto a posteriori (rispetto al tirocinio) con i ricercatori di questa disciplina possa essere molto importante per la formazione dei futuri insegnanti.

D'altra parte, come detto, uno degli aspetti più positivi sono stati loro: i tirocinanti, ed è un motivo di ulteriore rimpianto non essere riusciti a dar loro quanto avremmo potuto dare e quanto avrebbero voluto ricevere. Mi rimane infatti impresso uno dei commenti di una tirocinante, che proprio riguardo alla compressione del tirocinio in classe e alla mancanza di un confronto con noi, ha detto: "in definitiva il TFA è stata una occasione persa", purtroppo lo credo anche io.

LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI NEL TIROCINIO FORMATIVO ATTIVO

Ornella Robutti
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Premessa: il TFA area Scienze

La formazione dei docenti di matematica e di fisica lo scorso anno ha visto protagonista i corsi del Tirocinio Formativo Attivo (TFA), che in Piemonte sono stati gestiti dal CIFIS, con la collaborazione delle ex-Facoltà (ora Scuole) e dei Dipartimenti. Al primo anno di avvio, il TFA ha presentato non pochi problemi (di organizzazione, di tempo, di scelte, di normativa, di collaborazione tra le varie istituzioni coinvolte) e in tutta Italia le selezioni di ingresso sono state tra luglio e novembre-dicembre, mentre i corsi sono partiti in tempi diversi, all'incirca tra novembre e marzo, per concludersi tra giugno e i messi successivi.

In Piemonte i corsi attivati sono stati quelli della A049 (Matematica e Fisica), A047 (Matematica), A038 (Fisica), A059 (Matematica e Scienze nella scuola secondaria di primo grado), gli ultimi due distribuiti tra la sede di Torino e quella di Alessandria (Università del Piemonte Orientale), i primi due nella sola Università di Torino. Responsabile per la Scuola di Scienze della natura e consigliera nel CIFIS era la sottoscritta, che nell'organizzazione dei corsi nelle varie classi è stata aiutata dai colleghi Dambrosio, Marocchi e Perazzone.

Punti di forza e di debolezza

I punti di forza di un'esperienza formativa svolta nella fretta e spesso nella non chiarezza normativa fortunatamente ci sono stati, anche se non molti. Basandosi su una stretta interazione tra i coordinatori delle 4 classi (4 su Torino, 2 su Alessandria), i docenti, i tutor, le segreterie, siamo riusciti a completare il percorso formativo e gli esami entro la fine di giugno, dopo aver cominciato i corsi a inizio febbraio.

I tirocinanti, selezionati da esami iniziali decisamente duri, avevano una buona preparazione disciplinare di base, e non è stato difficile per noi docenti entusiasmarli con le più moderne teorie e pratiche didattiche e metodologiche, con attività e progetti formativi nazionali e internazionali, con osservazioni sui libri di testo o progettazione di percorsi formativi per la scuola. Hanno mostrato disponibilità a lavorare con impegno, a discutere, a mettersi in gioco e un generale livello di attenzione molto alto e pazienza per i ritardi burocratici. Si sono rivelati brillanti, partecipativi, competenti nelle loro discipline e aperti ad apprendere quelle delle scienze dell'educazione; entusiasti nei tirocini. Coloro che avevano già esperienze nella scuola hanno trovato nel TFA un luogo di confronto su molti livelli e hanno sicuramente apprezzato alcuni corsi, anche dell'area trasversale. Gli studenti con scarsa o nulla esperienza nel mondo della scuola hanno acquisito la consapevolezza dell'importanza di una formazione pedagogica e didattica e di un tirocinio specifico. Purtroppo, soprattutto per questi ultimi, il percorso è risultato fortemente ridotto e accelerato rispetto a quello che dovrebbe essere. Ma ciò in cui hanno veramente dato il massimo, sono state le tesi, alcune delle quali sono presenti come articoli in questo volume.

I tutor accoglienti, ovvero gli insegnanti che hanno accolto i tirocinanti nelle loro classi per le sperimentazioni dei tirocini, sono stati ampiamente flessibili e disponibili, collaborando in modo da favorire il buon esito delle attività progettate. I tutor coordinatori, ovvero i docenti distaccati parzialmente in Università per gestire i tirocini hanno saputo collaborare tra loro e con i coordinatori di area e di classe, mettendo in campo un'alta professionalità nel seguire i tirocinanti e un'ampia disponibilità all'organizzazione. I docenti dei corsi, tutti universitari, erano reclutati sia tra esperti nella didattica disciplinare, sia tra esperti della disciplina: tutti hanno dato il massimo per cogliere le peculiarità del contesto formativo e adattarsi a tempi, modalità, metodologie. I coordinatori tutti (Torino e Alessandria) hanno impegnato la gran parte del loro tempo all'organizzazione di corsi, esami di ingresso ed esami finali, con un buon livello di collaborazione e di condivisione delle scelte, spesso tutt'altro che facili.

Venendo ai punti di debolezza, prima di tutto citerei le ore impiegate dai coordinatori, che per l'area Scienze possono essere stimate globalmente in 1500 ore, con punte di concentrazione nell'autunno e nella tarda primavera. Questo numero è eccessivamente alto, se contiamo che le questioni affrontate erano prevalentemente amministrative e organizzative (meno didattico-scientifiche): sono troppe perché hanno sottratto alla ricerca e ai progetti molte energie di professori.

Altro punto importante è stato il dialogo e l'interconnessione tra le istituzioni. I ritardi delle istituzioni e la mancanza di assunzione di responsabilità sono stati in alcuni casi molto gravi e hanno causato danni al sistema, pesando sul tempo menzionato sopra. In merito ai ritardi si possono citare i più importanti: un ritardo di due mesi dell'Università nella nomina del Consiglio CIFIS, che ha causato ritardi organizzativi nelle prove di ingresso; un ritardo di due mesi dell'USR nella nomina dei tutor, con conseguente uso del tempo dei coordinatori universitari per cercare scuole e tutor accoglienti; un ritardo dell'USR nella nomina dei rappresentanti USR nelle commissioni degli esami finali; un ritardo del MIUR nel dare indicazioni e sciogliere dubbi normativi.

Le incertezze normative hanno costituito un altro punto di debolezza, perché talvolta si era di fronte a molti dubbi sul modo di procedere, sia negli esami di ingresso, sia nell'organizzazione dei tirocini, sia negli esami di abilitazione. A fronte di richieste ufficiali al MIUR fatte dalla segreteria, non si sono mai ottenute risposte.

La prova di ammissione nazionale ha costituito un punto di estrema debolezza disciplinare: il test delle varie classi (non solo quelle di area Scienze), era più costruito per la verifica di obiettivi legati a specifici esami universitari (soprattutto in matematica), che per la selezione di futuri docenti, e in quasi tutte le classi presentava errori nelle risposte, tanto che il MIUR è dovuto intervenire, a test già corretto e risultati pubblicati, per rettificare alcune risposte e cancellare dalla valutazione alcune domande.

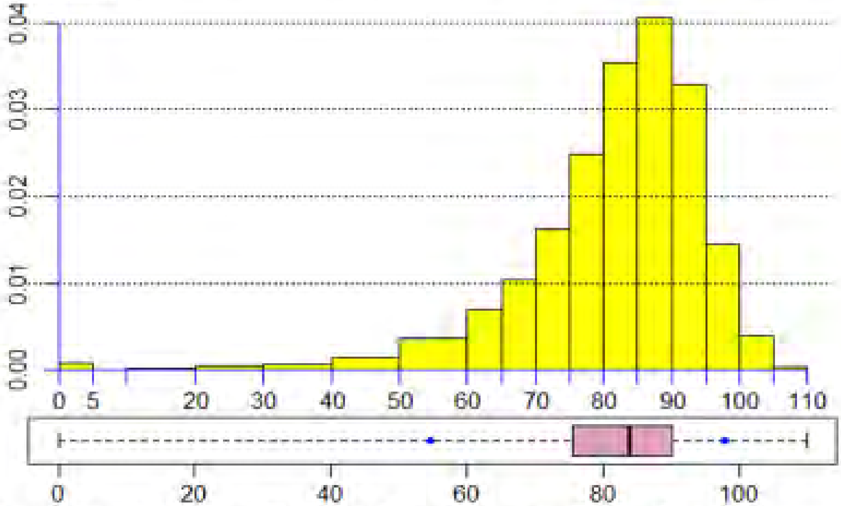
La prova scritta d'ingresso

La prova di selezione dei tirocinanti TFA verteva in un test (nazionale ed effettuato nel luglio 2012), una prova scritta (locale ed effettuata nell'ottobre), e una prova orale. Se sul test si è già detto nel paragrafo precedente, sulla prova scritta utilizzerò alcune riflessioni che ho fatto nell'ambito della raccolta (decisa dalla CIIM e da me coordinata) delle prove somministrate nelle varie sedi dei TFA. La prova scritta che i tirocinanti hanno dovuto affrontare è stata costruita attorno ad alcuni nodi concettuali (dalle varie sedi ritenuti fondamentali e irrinunciabili) per le conoscenze del futuro insegnante, che verranno illustrati attraverso esempi di prove assegnate. Si può pensare di caratterizzare (in modo non troppo rigido) le prove usando come indicatori i nodi concettuali toccati e gli obiettivi coinvolti, seguendo la tassonomia di Bloom come riferimento (livelli di conoscenza, comprensione, applicazione, analisi, sintesi, valutazione).

Per esempio, il problema della prova proposta nella classe A049 e rappresentato in Figura 1 tocca i nodi: istogramma, percentuali, indici statistici, percentile e distribuzioni, mentre coinvolge gli obiettivi di conoscenza (indici statistici e rappresentazioni di dati), comprensione (distribuzioni gaussiana, esponenziale), valutazione (argomentare risposte, "motiva, brevemente, le risposte").

QUESITO 1

Sotto sono riprodotti l'istogramma di distribuzione e il box-plot relativi all'età dei morti in Italia nel 2006 (l'istogramma è ottenuto classificando i morti nelle fasce di età in anni [0,5), [5,10), [10,20), …). Sull'asse verticale dell'istogramma sono rappresentate le densità di frequenza (ossia le frequenze relative divise per le ampiezze degli intervalli). Il box-plot evidenzia con un rettangolo il 50% centrale dei dati; la linea che lo divide corrisponde al 50° percentile; i "pallini" corrispondono al 5° e al 95° percentile.



A) Qual è la percentuale dei morti di almeno 90 anni? (arrotonda a 2 cifre)
Quanto vale la mediana? Scegli tra: 55.0, 75.6, 81.2, 83.9, 90.3
Quanto vale il 10° percentile? Scegli tra: 33.7, 45.5, 54.6, 64.4, 75.6
Quanto vale la media? Scegli tra: 55.0, 75.1, 81.1, 84.0, 85.2
Motiva, brevemente, le risposte.

B) Evidentemente questo è un fenomeno che ha andamento non gaussiano. Invero sono ben pochi i fenomeni le cui misure hanno andamento gaussiano, anche in ambito fisico. Per quali motivi la distribuzione gaussiana è importante nelle applicazioni?

C) Una delle distribuzioni che ha maggiori applicazioni nelle scienze sia tecniche che sociali è la distribuzione esponenziale, che ha una funzione di densità, definita in $[0, \infty)$, del tipo:

$x \rightarrow h \cdot e^{k\,x}$.

Se $h = 0.4$, quanto vale k?
Schizza il grafico di tale funzione di densità

Figura 1

Oppure, il problema proposto in un'altra sede nella classe A049 e rappresentato in Figura 2 tocca i nodi: trasformazioni del piano(similitudine), invarianti (punti uniti, rapporti), immagini di punti e curve nella similitudine e coinvolge obiettivi di: conoscenza (similitudini), comprensione (invarianti), applicazione (immagini nella similitudine), analisi (spiegazione del metodo usato), sintesi (il problema poteva essere risolto in molti punti senza calcoli ma solo con ragionamenti e significati), valutazione (argomentazione e motivazione delle risposte).I due problemi proposti in altre sedi, come quello della Figura 3 sulla A049 e quello della Figura 4 sulla A047, sono di tipologia diversa: insistono di più su nodi concettuali, teoria (come definizioni e dimostrazioni), quindi su livelli di conoscenza, comprensione e applicazione, che su livelli di analisi, sintesi e valutazione.

Domanda 2

In un piano cartesiano ad assi ortogonali monometrici sia data la trasformazione f di equazioni:

$$x^0 = x + y + 1$$

$$y^0 = - x + y + 2$$

1. Di quale trasformazione si tratta? Individuarla sulla base degli enti caratteristici della definizione. Ha dei punti uniti? Se si, determinarli; se no, giustificare la risposta.
2. Dati i punti $O(0,0)$, $A(-1,1)$ e $B(1,1)$ determinare le loro immagini (rispettivamente O^0, A^0, B^0) secondo la trasformazione f. Calcolare il rapporto tra il perimetro del triangolo $A^0O^0B^0$ e il perimetro del triangolo AOB e spiegare il metodo utilizzato.
3. Data la parabola di equazione $y = x^2$ determinare la sua immagine secondo la trasformazione f e dire di quale curva si tratta. La curva ottenuta è una funzione? Perché?
4. Ci si poteva aspettare questo tipo di curva, senza determinare l'equazione? Perché?

Figura 2

PROBLEMA 2. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in una variabile a coefficienti in $\mathbb{R}$.

(a1) Definire la relazione di divisibilità in $\mathbb{R}[x]$ e discutere se si tratta di un ordinamento su $\mathbb{R}[x]$.

(a2) Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ monico di grado 2 tale che per $p(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $p(x)$ è somma di sue quadrati di $\mathbb{R}[x]$.

(b1) Dimostrare più in generale che se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ è monico di grado $n \geq 2$, e strettamente maggiore di 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $p(x)$ è somma di quadrati in $\mathbb{R}[x]$.

(b2) Il risultato al punto **(b1)** continua ad essere vero se supponiamo $p(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Figura 3

Esercizio 5 **(6 punti)**

Quando un insieme ha la cardinalità del numerabile? Quando un insieme ha la cardinalità del continuo?

Calcolare la cardinalità dell'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ costituito da tutte le funzioni reali di variabile reale definite su tutto $\mathbb{R}$. Qual è la cardinalità dell'insieme $\mathcal{C}$ costituito dalle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (definite su tutto $\mathbb{R}$)? [Suggerimento: si confronti $\mathcal{C}$ con l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ costituito da tutte le funzioni da $\mathbb{Q}$ verso $\mathbb{R}$, dove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali.]

Si provi che se h e k sono due cardinali con $2 \leq h \leq k$ e k infinito, allora $h^k = 2^k$ (dove l'esponenziazione è intesa in senso cardinale).

Figura 4

I percorsi formativi delle varie classi attivate nell'area scientifica sono stati progettati sulla base di un profilo di uscita dei tirocinanti, nel concreto dei riferimenti istituzionali, culturali, scientifici e didattici. L'intreccio tra la parte istituzionale e quella disciplinare è sempre stata costruita con uno sfondo diretto a evidenziare le competenze del futuro insegnante che opera nella scuola in questi tempi.

È chiaro che alla base della formulazione di ciascuno di questi problemi vi è non solo una precisa immagine della matematica, ma anche un profilo d'ingresso del tirocinante che si vuole selezionare come futuro docente della scuola secondaria di II grado. Forse varrebbe la pensa di riflettere, in sede istituzionale, quale profilo possiamo condividere a livello nazionale e quali scelte condivise si possono fare in merito, perché altrimenti, con problemi di taglio così diverso, si rischia nelle varie sedi di scegliere tirocinanti con profili piuttosto diversi.

LA FORMAZIONE DEI DOCENTI DI MATEMATICA E DI FISICA

Maurizio Berni
Tutor coordinatore del TFA - Università di Pisa

Premessa

La formazione iniziale degli insegnanti di matematica e di fisica nel nostro paese ha risentito di tutte le incertezze derivanti dalle scelte non effettuate, rimandate, e anche da quelle effettuate, non in base a scelte politiche inserite in un preciso programma, ma episodiche, spesso incoerenti e in uno stato di perenne revisione; tale revisione non appare mai dettata da una rielaborazione critica delle esperienze realizzate, ma si limita ad una semplice riscrittura periodica delle norme, priva di motivazioni esplicite delle modifiche adottate; a questa formazione iniziale modello "tela di Penelope" seguono poi procedure di reclutamento all'insegna di una perenne emergenza.

Possiamo distinguere tre fasi, rispetto ad un'esperienza lunga, significativa, e bruscamente interrotta: quella delle SSIS.

Il periodo pre-SSIS

Possiamo fare un passo all'indietro fino al 1922. Le scelte effettuate in quel periodo, in cui si stava instaurando il regime fascista, hanno rilasciato nei tempi lunghi i loro effetti. Guido Castelnuovo scrisse per conto di una apposita Commissione istituita presso l'Accademia dei Lincei una relazione sulla riforma Gentile (Israel, 1998) nella quale espresse con chiarezza e lucidità i pericoli della riunione sotto lo stesso docente: "... di insegnamenti disparati, quali storia e filosofia, matematica e fisica, scienze naturali, chimica e geografia." In questi raggruppamenti riconosciamo la struttura delle attuali cattedre delle classi di concorso A037, A049 e A060. Castelnuovo così si espresse in proposito: "La minore competenza o il minore interesse dell'insegnante per una delle discipline che è chiamato a impartire potranno rendere meno efficace la sua opera e ne diminuiranno il prestigio presso la scolaresca", e conclude "Perciò la nostra Commissione teme che una riforma, ispirata da ragioni astratte, possa in pratica recar danno, nel tempo stesso, alla cultura degli allievi e al prestigio degli insegnanti."

Forse sono preoccupazioni eccessive, ma hanno avuto il merito di lasciar intravedere una grave criticità che si è puntualmente realizzata: la difficoltà di predisporre una efficace formazione iniziale e una efficace procedura di reclutamento degli insegnanti di queste classi.

Per quanto ci riguarda, venne istituita una laurea in matematica e fisica, mentre le scuole superiori in cui proprio queste due discipline erano affrontate più in profondità, cioè le sezioni fisico-matematiche degli istituti tecnici, venivano chiuse, per far posto ad un liceo scientifico che di scientifico aveva ben poco. La "laurea mista" (così veniva anche chiamata) ebbe vita stentata, e fu definitivamente chiusa nel 1961.

Arriviamo al vero periodo pre-SSIS, anni ottanta e novanta. In quel periodo vennero indetti dei concorsi ordinari per il conseguimento dell'abilitazione e, se in posizione utile, per la cattedra di ruolo: uno nel 1982, uno nel 1985, poi nel 1990, e infine uno nel 1999, contestualmente all'apertura della SSIS.

Faccio delle considerazioni qualitative perché non ho a disposizione dati quantitativi, ma in questo periodo è certamente avvenuto che la struttura rigidamente monodisciplinare dei corsi di laurea, messa alla prova della tipologia di prove da superare nei concorsi ordinari, ha fatto sì che il sistema di formazione iniziale e di reclutamento non sia mai stato pienamente in grado di far fronte al fabbisogno numerico di docenti della scuola statale; in particolare sono stati penalizzati i laureati in matematica, per i quali è stato sempre molto difficile superare, delle tre prove (scritto, laboratorio, orale), la seconda, quella di laboratorio di fisica.

L'effetto perverso di questa severità è stato quello di dover far ricorso in modo esteso, nel tempo e nella distribuzione territoriale, a personale non abilitato, creando quel meccanismo contraddittorio per cui un giorno si dice a una persona che non è in grado di insegnare, e il giorno dopo le si chiede di insegnare.

Naturalmente dopo un certo numero di anni di anzianità di servizio si rendeva necessaria una sanatoria, vanificando lo scopo del rigore dei concorsi.

Infatti nel 1999, contestualmente con l'apertura della SSIS, furono indetti due concorsi riservati, uno di seguito all'altro: con una manciata di ore di lezione, dedicate per il 50% a questioni metodologiche e per il 50% a quelle disciplinari (da suddividere ulteriormente tra le due discipline), e senza alcuna prova né esercitazione di laboratorio, si poteva conseguire l'abilitazione in matematica e fisica.

Si poteva chiedere di predisporre delle prove d'esame più facili nei concorsi ordinari? Certamente no, e quindi che fare? Forse, col solo meccanismo dei concorsi, nulla. Occorreva piuttosto un supplemento di formazione, per rinforzare gli aspetti disciplinari laddove necessario, e introdurre quelli didattici, da sempre (incredibilmente) ignorati.

Il periodo della SSIS

L'istruzione supplementare è arrivata con la SSIS; tra luci ed ombre essa aveva messo in evidenza, tra l'altro, che l'insegnamento specialistico universitario lasciava spesso intatta una visione *naif* della parte elementare della disciplina, oggetto dell'insegnamento secondario; appresa per la prima volta in giovane età, e quindi strutturata in modo ingenuo, questa parte della disciplina non è parsa in molti casi suscettibile di una rielaborazione spontanea alla luce delle conoscenze specialistiche acquisite all'università; necessitava piuttosto di una sollecitazione mirata, fornita da specifici corsi (ad es. Matematiche Elementari dal Punto di Vista Superiore), non sempre presenti nei piani di studio. Questo è stato fatto nella SSIS: si è ripensata la disciplina oggetto di insegnamento alla luce delle conoscenze disciplinari specialistiche acquisiste nella carriera accademica, e si è trovato il nesso tra formazione universitaria e oggetto dell'insegnamento. Diceva Enriques: "Non vi è iato o scissura fra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell'albero dalla tenera pianticina. E come, riguardando l'albero, potremo scoprire nella pianticina nuovi aspetti o comprendere caratteri di cui ci era sfuggito il significato, così anche lo sviluppo dei problemi matematici recherà luce sulle dottrine elementari in cui essi sprofondano le loro radici." (Enriques, 1921).

Nella SSIS si potevano conseguire contemporaneamente più abilitazioni, a reciproco vantaggio degli specializzandi e del mondo della scuola. Nello specifico, la struttura modulare dei percorsi didattici legittimava la percezione della classe A049 come somma di due abilitazioni, una in matematica e una in fisica, con la logica conseguenza che fosse del tutto naturale aspettarsi un impegno, per la A049, maggiore di quello richiesto per conseguire le abilitazioni monodisciplinari A047, A048 e A038; tanto è vero che questo maggiore impegno ha comportato in molti casi il prolungamento del corso di uno o più semestri, così come espressamente previsto dal DM MURST 26/5/98[1]. Paradossalmente, limitare il numero di abilitazioni da conseguire ad una sola, mentre appare a prima vista come una forma di maggior rigore, ha invece effetti perversi

1 Art. 4 comma 6 lett. b): "[Il Consiglio approva per ogni studente un piano di studio individuale. Tale piano:] (…) b) definisce un curricolo integrato, eventualmente prolungato di uno o due semestri per l'allievo che intenda conseguire contemporaneamente una pluralità di abilitazioni; (...)

proprio per quelle classi pluridisciplinari nate dalla riforma Gentile, in quanto il carico di lavoro (fissato per decreto) risulta definito per ogni singola classe di abilitazione, indipendentemente dalla sua struttura interna mono o pluridisciplinare[2].

Ma la SSIS non è stata solo un ponte per collegare la disciplina specialistica con quella elementare, oggetto dell'insegnamento; è stata anche, e finalmente, un'occasione per riaprire delle connessioni virtuose tra scuola e università, ripristinando canali di comunicazione tra i due settori formativi che per troppo tempo sono rimasti isolati e autoreferenziali. La SSIS è stata un laboratorio di esperienza strutturata di docenti di scuola secondaria coinvolti, insieme ai docenti universitari, nella formazione dei loro colleghi, con il coinvolgimento nei corsi di laboratorio didattico e nel tirocinio. Ma non basta: nella valutazione del tirocinio di coloro che avevano ampi crediti dovuti a lunghe esperienze di insegnamento si è fatto un esercizio preziosissimo [e forse pionieristico] di valutazione del servizio dei docenti, rispettoso della libertà di insegnamento, e nello stesso tempo utile a valorizzare e potenziare la capacità dei docenti specializzandi di *motivare* le scelte metodologiche, di *osservare* ed *interpretare* i risultati raggiunti dagli allievi, di *ipotizzare* i percorsi mediante i quali migliorare l'efficacia didattica.

Dal punto di vista quantitativo la SSIS ha sufficientemente soddisfatto i bisogni del sistema, e anzi ha creato in alcune zone del paese e per alcune classi di concorso una sacca di precariato abilitato. I numeri dovevano (e dovranno in futuro) essere programmati meglio. Tuttavia non si può negare che il modello di procedura di ingresso era del tutto adeguato all'ammissione ad un percorso formativo: era prevista infatti la possibilità di attribuire dei debiti formativi, pur fissando una soglia minima di accettabilità: c'erano due (o più) anni a disposizione per colmare le lacune. Attribuire debiti formativi non ha mai significato abbassare i livelli richiesti per l'ammissione, quanto piuttosto permettere in modo trasparente di ammettere "*sub condicione*" anche alcuni tra quelli che quei livelli non avevano ancora raggiunto, dando loro la possibilità di maturare, di crescere, di rinforzarsi, grazie a percorsi personalizzati e l'eventuale prolungamento del corso di studi. Naturalmente col meccanismo dei concorsi tutto questo non sarebbe stato possibile, perché la selezione non era all'ingresso di un corso di formazione, quindi di crescita, ma in uscita, per l'immissione diretta nel ruolo. Dunque l'esperienza aveva insegnato come superare le criticità del precedente sistema dei concorsi, e aveva introdotto dei preziosissimi elementi di valutazione della professione docente.

Ma nel 2008 le SSIS furono chiuse. Furono dette molte banalità per creare consenso intorno a questa operazione e non fu mai fatta una valutazione seria delle singole SSIS, per cui ogni singolo problema poteva essere generalizzato ed essere oggetto di propaganda negativa.

Il periodo post-SSIS

Veniamo al **periodo post-SSIS**, caratterizzato da una serie di questioni che mi limito ad elencare:

- il blocco quadriennale dei percorsi formativi e la corsa alle "facili" abilitazioni straniere, conseguite tramite agenzie private, in seguito riconosciute dal MIUR con decreti *ad personam* (si vedano le decine di riconoscimenti di abilitazioni straniere conseguite da persone di nazionalità italiana sul sito del MIUR alla voce "riconoscimento professione docente");
- la lunga gestazione di un TFA transitorio, oggettivamente più debole del percorso SSIS, in quanto privo del presupposto (previsto a regime ma percepito da più parti come difficilmente realizzabile) della laurea specialistica per l'insegnamento;
- i gravi ritardi accumulati nella realizzazione del primo ciclo TFA (si veda a tale proposito il rapporto ANFIS sul TFA 2013);
- il falso rigore del corso TFA "monoabilitante", che ha minato la qualità dei percorsi delle classi

2 Dei pericoli di trattare nello stesso modo le abilitazioni monodisciplinari e pluridisciplinari avevo già avuto modo di intervenire (cfr. Berni, 2006, 2007)

di abilitazione "complesse", come la A049 e la A052: bisognava distinguere tra abilitazioni monodisciplinari e pluridisciplinari

- l'eccessiva selettività delle prove d'ingresso ha fatto ricadere nello stesso errore dei concorsi degli anni 90: sono stati lasciati vacanti quasi la metà dei posti disponibili nel TFA (9000 su 20000); si è così ricreato quel pericoloso meccanismo che non garantisce il fabbisogno di abilitati del sistema; come abbiamo già avuto modo di verificare a suo tempo, questo crea automaticamente nuovo precariato non abilitato, che conseguirà l'abilitazione mediante corsi speciali, aggirando quella selezione che si è voluta mantenere così "rigorosa";
- i prossimi corsi speciali (PAS, Percorsi Abilitanti Speciali), sono ormai alle porte; ad essi sono iscritti, senza selezione, quasi 70000 precari, che verranno abilitati senza una sola ora di tirocinio diretto o indiretto; la norma istitutiva, senza alcuna ragionevolezza, riconosce alla pratica didattica effettuata in assenza di titolo abilitante (dunque senza una preparazione specifica come docenti), e priva della benché minima valutazione, lo stesso valore di un tirocinio effettuato in contemporanea con la formazione, sotto la supervisione di un tutor e valutato da una commissione formata da docenti universitari e docenti di scuola secondaria;
- il concorso ordinario a cattedre (tuttora in fase di esecuzione) è stato precluso ai giovani laureati dopo il 2008: esso infatti prevedeva *per essi* l'obbligo di possedere l'abilitazione all'insegnamento; ma non è mai stata data loro l'opportunità di conseguirla, a causa della non attivazione di percorsi abilitanti a seguito della soppressione delle SSIS; il concorso era invece aperto a non abilitati, purché dotati di una vecchia laurea, anteriore al 2002, cioè a persone che in questi ultimi 11 anni potrebbero aver fatto tutt'altro che insegnare, e che hanno avuto molte opportunità per abilitarsi, visto che i cicli della SSIS si sono succeduti dal 1999 al 2008; peggio, si è determinata una strana situazione per cui persone non abilitate e impiegate in qualsiasi settore, ad eccezione della scuola, hanno potuto partecipare al concorso, purché dotati di laurea "sufficientemente vecchia"; mentre insegnanti di ruolo in un certo ordine di scuola, che avessero aspirato a passare ad un diverso ordine (si pensi per esempio al passaggio primaria-secondaria, o ad altra classe di concorso rispetto a quello di titolarità, magari in soprannumero...) si sono visti precludere questa opportunità, anche se abilitati nella classe a cui avrebbero aspirato di concorrere.

La sensazione che si trae da questa successione di eventi, che non sembrano seguire una logica linea evolutiva, ma che si sono susseguiti in un intreccio piuttosto incoerente, è che occorra intervenire energicamente sul carattere di episodicità, quasi di improvvisazione, delle scelte in fatto di formazione e reclutamento degli insegnanti; troppi provvedimenti "una tantum" in un "sistema" che non ha mai preso seriamente avvio hanno determinato uno stato di emergenza cronica a cui si è tentato di porre rimedio sovrapponendo altri provvedimenti dello stesso tipo, che mentre risolvevano singoli problemi contingenti ne aprivano altri, alimentando un circolo vizioso; questo stato di cose sta prolungando pericolosamente nel tempo l'ipoteca sulla qualità della formazione dei docenti, e in particolare quelli dell'area scientifico-matematica; è un'area strategica riconosciuta per la società della conoscenza, ma su cui il nostro paese deve recuperare molto terreno, dovendo scontare una pesante eredità antiscientifica di stampo gentiliano, che, insieme ad una visione riduttiva dell'importanza dell'istruzione, e in particolare della figura docente, ancora condiziona scelte e comportamenti.

Bibliografia

Berni, M. (2006). Sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica. *Notiziario della Unione Matematica Italiana. XXXIII, 1-2, 31-41.*

Berni, M. (2007). La formazione dei docenti di matematica: dalle criticità del passato alle prospettive future, *Pianeta Galileo 2007: i convegni*, a cura del Consiglio Regionale della Toscana, pagg. 341-348; (http://eduscienze.areaopen.progettotrio.it/doc/convegni_gal2007.pdf, ultimo accesso 20/11/2013).

Enriques F. (1921). Insegnamento dinamico, *Periodico di matematiche,* s. IV, I, 1921, 6-16.

Israel G. (1998). Vito Volterra e la riforma scolastica Gentile, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana,* Serie 8, Vol. 1-A La Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.3, p. 269–287

TAVOLA ROTONDA

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLA FISICA IN EUROPA

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA IN EUROPA NEL RAPPORTO EURYDICE 2011

Alessio Drivet
Comitato scientifico-organizzativo DI.FI.MA.

Premessa

L'Unione europea ha individuato nella competenza in matematica una delle abilità chiave per la realizzazione personale, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupabilità nella società della conoscenza del 21° secolo. La preoccupazione riguardo ai livelli di rendimento ha portato alla costituzione di un benchmark a livello europeo per le competenze di base, da raggiungere entro il 2020: "La percentuale di 15enni con competenze insufficienti in lettura, matematica e scienze dovrà essere inferiore al 15%"[1].

Il rendimento in matematica

Attualmente il rendimento in matematica degli studenti viene valutato attraverso due indagini internazionali su ampia scala: TIMSS e PISA. Da queste indagini si possono trarre alcune conclusioni:

- Tra i paesi c'è solo una variazione dell'11% nella performance degli studenti. La variazione rimanente è all'interno dei paesi, ovvero tra programmi educativi, tra scuole e tra studenti all'interno delle scuole.
- Le ricerche hanno stabilito chiaramente che il contesto familiare e il background dello studente sono molto importanti per il rendimento scolastico.
- Nella maggior parte dei paesi la condizione sociale di una scuola è fortemente associata al rendimento in matematica; il contesto socio-economico di una scuola è molto più predittivo del rendimento in matematica rispetto alle differenze socio-economiche dei singoli studenti.
- Un atteggiamento positivo nei confronti della matematica e la fiducia nelle proprie capacità di apprendimento della materia sono associati a un rendimento migliore.
- In matematica le differenze di genere non sono nette.

Il curricolo di matematica

In tutti i paesi europei il curricolo di matematica è stato rivisto nel corso dell'ultimo decennio e, nella vasta maggioranza dei paesi, sono stati introdotti importanti aggiornamenti a partire dal 2007. Una delle ragioni principali della necessità di aggiornamenti più recenti era l'inclusione dell'approccio basato sui risultati dell'apprendimento. Nel Quadro europeo delle qualifiche (EQF), i risultati dell'apprendimento sono definiti come affermazioni su ciò che uno studente sa, comprende ed è in grado di fare a conclusione di un processo di apprendimento; queste vengono descritte in termini di conoscenze, abilità e competenze.

Gli obiettivi e i risultati dell'apprendimento sono parti importanti del processo di apprendimento. Gli obiettivi di apprendimento sono generalmente espressi come scopi di un modulo o corso, mentre i risultati dell'apprendimento sono generalmente espressi come ciò che lo studente è tenuto a sapere, comprendere ed essere in grado di fare al completamento di un livello o modulo.

---

1 Secondo PISA 2009, nei 27 paesi UE, una media di 22,2% degli studenti ha ottenuto risultati scarsi in matematica (25% in Italia).

Attualmente quasi tutti i paesi europei prescrivono sia gli obiettivi sia i risultati dell'apprendimento mentre in Italia sono solo raccomandati[2].

A titolo di esempio, nei paesi UE che hanno partecipato al TIMMS, gli insegnanti dell'ottavo anno hanno dichiarato di dedicare il 23% delle ore di insegnamento della matematica a "numero" (ad es. numeri naturali, frazioni, decimali, rapporti, proporzioni e percentuali), il 31% all'algebra (es. rapporti, equazioni, formule e relazioni), il 28% alla geometria (ad es. linee e angoli, forme, congruenza e similitudine, relazioni spaziali, simmetria e trasformazioni), il 14% a dati e probabilità (ad es. leggere, organizzare e rappresentare dati, interpretazione di dati e probabilità) e il 5% ad altre aree.

Approcci didattici e metodi

Le ricerche relative ai diversi approcci e metodi suggeriscono che non esiste un modo corretto di insegnare la matematica; alcuni ricercatori sostengono che metodi diversi funzionano in contesti diversi, e altri affermano che gli insegnanti devono scegliere il metodo più appropriato per il loro contesto e per uno specifico rendimento scolastico. La conclusione sembrerebbe che l'approccio più valido per migliorare l'insegnamento sia lo sviluppo professionale degli insegnanti in una varietà di metodi diversi, nonché la possibilità di prendere decisioni su quale metodo utilizzare. Le autorità educative di molti paesi europei raccomandano l'apprendimento basato sui problemi, oppure l'apprendimento esplorativo o investigativo.

Un esempio della promozione di un approccio ampio all'insegnamento della matematica si riscontra in Germania, dove le istituzioni federali hanno lanciato il programma SINUS[3]. Il programma si basa su undici moduli tra cui istituti e insegnanti possono scegliere. Tali moduli coprono argomenti come l'apprendimento basato sui problemi, apprendimento dagli errori, approcci interdisciplinari e cooperazione tra studenti.

Come per i dati delle ricerche sui metodi di insegnamento sopraindicati, non è possibile affermare che le TIC servano di per sé a migliorare il rendimento in matematica. È più probabile che funzionino per determinate cose e in determinati contesti. I risultati delle ricerche sulla pedagogia efficace suggeriscono che il repertorio di un insegnante debba comporsi di una varietà di metodi, e che è probabile che le TIC siano uno degli aspetti[4]. Gli insegnanti efficaci devono sapere quanto e quando utilizzarle al meglio.

Le ricerche sull'utilizzo dei compiti a casa e i risultati delle indagini internazionali suggeriscono che, in matematica, essi possono avere un limitato effetto positivo, soprattutto con gli studenti più giovani.

Il combattere lo scarso rendimento

Nella maggioranza dei paesi europei le autorità educative centrali prescrivono o raccomandano misure, o forniscono assistenza a insegnanti e istituti per affrontare lo scarso rendimento in matematica. Le misure a livello centrale variano da ampi programmi nazionali obbligatori al sostegno per un numero limitato di attività, come corsi di formazione per gli insegnanti, progetti di ricerca o banche dati di risorse per l'apprendimento della matematica.

2 Nei documenti ufficiali intitolati *Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento* (per la scuola secondaria superiore) e *Indicazioni per il curricolo* (primaria e secondaria inferiore). Sono presenti descrizioni generali dei principali obiettivi di apprendimento e risultati attesi ai vari livelli d'istruzione.

3 *Steigerung der Effizienz des mathematischnaturwissenschaftlichen Unterrichts (Aumentare l'efficienza dell'insegnamento della matematica e delle scienze)*

4 I dati suggeriscono che, anche se i computer erano disponibili, non erano ampiamente utilizzati nelle lezioni di matematica. Questo vale sia per i paesi in cui il curricolo nazionale contiene un'indicazione sull'utilizzo dei computer nelle lezioni di matematica, sia per tutti i paesi privi di prescrizioni o raccomandazioni in tal senso.

Alcune misure si applicano a tutti gli studenti della classe e includono metodi di insegnamento quali l'apprendimento differenziato e la contestualizzazione, che contribuiscono ad aumentare il rendimento e la motivazione degli studenti in generale. Altre, invece, si focalizzano sugli studenti dal rendimento scarso e incoraggiano la prevenzione, la diagnosi precoce e gli interventi individuali.

Attualmente, meno della metà dei paesi europei ha strategie nazionali o iniziative coordinate a livello centrale che, tra le altre cose, mirano ad aumentare la motivazione all'apprendimento della matematica[5].

La valutazione in matematica

In Europa la valutazione degli studenti assume varie forme e fa uso di strumenti e metodi diversi. I modelli utilizzati possono essere interni o esterni, formativi o sommativi, e i risultati possono essere utilizzati per diverse finalità. Tuttavia, le ricerche mostrano che la valutazione è troppo spesso utilizzata per attribuire voti agli studenti anziché per aiutarli a migliorare il rendimento. Soltanto una minoranza di sistemi educativi europei svolge indagini o redige rapporti sulla scelta operata dagli insegnanti sui metodi per valutare gli studenti in matematica.

5 In Portogallo è stato lanciato il "Piano d'azione per la matematica. L'Austria ha lanciato il progetto nazionale "IMST" *(Innovationen machen Schulen Top)*.

L'INSEGNAMENTO DELLA FISICA NEI LICEI EUROPEI

Ernesta De Masi
Liceo Scientifico "A. Gatto" di Agropoli (SA)

Premessa

Le Scuole Europee sono state istituite fin dal 1957 al fine di garantire l'istruzione dei figli dei dipendenti delle Istituzioni Europee.

Obiettivo delle scuole è formare cittadini europei, a partire dalla scuola primaria fino all'ingresso all'Università, fornendo livelli elevati di istruzione, nel rispetto delle differenti identità culturali dei singoli.

L'insegnamento delle discipline scientifiche e della fisica, in particolare, occupa un posto rilevante nel curriculum di queste scuole.

Descrizione delle Scuole Europee e organizzazione degli studi

Nella cartina di figura 1 sono evidenziate le sedi delle scuole in Europa : tre in Germania (Francoforte sulla Main, Karlsrube, Monaco), cinque in Belgio (quattro a Bruxelles e una a Mol), una in Spagna (Alicante), una in Italia (Varese), due a Lussemburgo, una in Olanda (Bergen), una in UK (Culham).

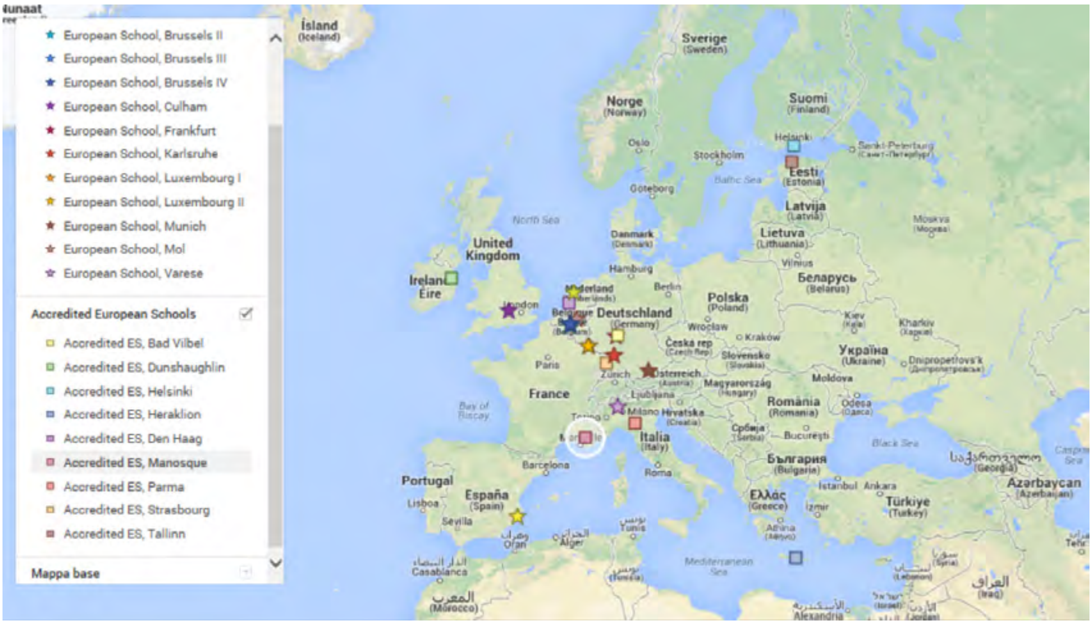


Figura 1 Localizzazione delle scuole europee
http://schola-europaea.eu/download/map.html

Sono presenti anche nove scuole accreditate: in Germania (Bad Vilbed), Irlanda (Dunshaughlin), Finlandia (Helsinki), Grecia (Heraklion), Olanda (L'Aia), Francia (Manosque e Strasburgo), Italia (Parma), Estonia (Tallin).

Le scuole europee accreditate sono scuole che non fanno parte della rete di scuole europee che dipendono dall'organizzazione intergovernativa 'The European Schools', esse offrono una formazione europea con i requisiti pedagogici stabiliti per le scuole europee, ma nell'ambito delle reti di scuole nazionali degli Stati Membri e quindi all'esterno del quadro giuridico, amministrativo e finanziario a cui le scuole europee sono obbligatoriamente soggette.

Organizzazione degli studi

Il corso di studi prevede due anni di scuola materna, cinque anni di scuola primaria e sette anni di scuola secondaria, così come indicato nella seguente tabella 1.

Cycle	Classes	Age
«Early education» (Nursery)	1-2	4 et 5
Primary	1-5	6-10
Secondary Observation cycle Pre-orientation cycle Orientation cycle	 1-3 4-5 6-7	 11-13 14-15 16-18

Tabella 1

Per entrare nella prima classe elementare, i bambini devono aver compiuto sei anni di età entro la fine dell'anno solare in cui sono iscritti.

Nella **scuola primaria** il focus è sulla lingua materna, la matematica e la prima lingua straniera ma arte, musica, educazione fisica, esplorando il nostro mondo e la religione/etica sono importanti, come lo sono le "ore europee", in cui sono previste varie attività che coinvolgono bambini di differenti nazionalità.

Nella **scuola secondaria** gli alunni entrano quando compiono undici anni nell'anno solare in cui si iscrivono e dopo il completamento del ciclo primario della scuola europea o di un corso equivalente debitamente certificato da una scuola ufficialmente riconosciuta.

Per le prime tre classi della scuola secondaria, gli alunni seguono un percorso comune, noto come ciclo di osservazione.

La maggior parte delle materie vengono insegnate in lingua madre, nella seconda classe tutti devono iniziare una seconda lingua straniera e nella terza classe tutti iniziano a studiare la storia e la geografia in L2. Lo studio del Latino è offerto come opzione nella terza classe. È previsto un corso **di scienze integrate**, distinto dal corso di matematica, con quattro ore settimanali. Anche per la matematica sono previste quattro ore settimanali. L'insegnamento delle scienze prevede dunque un numero elevato di ore nei primi anni in cui gli alunni iniziano a studiare queste discipline. Questa scelta favorisce una formazione iniziale efficace.

Nelle classi 4 e 5 il corso obbligatorio in scienze integrate viene suddiviso nei corsi di fisica (due ore settimanali), chimica (due ore settimanali) e biologia (due ore settimanali) e gli alunni possono scegliere tra un corso di matematica avanzato o normale. Altre opzioni includono l'economia, una terza lingua straniera e il greco antico.

Le classi 6 e 7 formano un'unità che porta alla licenza liceale europea. Anche se vi è un nucleo di materie obbligatorie tra cui lingua madre, L2, matematica, una disciplina scientifica (tra queste la fisica con quattro ore settimanali), filosofia, educazione fisica, storia e geografia, gli studenti hanno una vasta gamma di opzioni e possono scegliere di studiare alcune materie a un livello standard o ad un livello avanzato. Tra le discipline complementari è possibile scegliere Storia delle Idee e Microelettronica.

Illustrazione del "Sillabo" di Scienze Integrate e di Fisica

Gli insegnanti, per organizzare il proprio lavoro, fanno riferimento a un Sillabo molto dettagliato, in cui vengono indicati anche i livelli di approfondimento per ciascun argomento. In particolare, il Sillabo per le classi 6 e 7 descrive le formule da utilizzare e le unità di misura: dettaglio da non trascurare in un contesto d'insegnamento internazionale. Il Sillabo è una guida validissima per orientare l'insegnante nel lavoro di preparazione degli alunni all'esame finale.

I sillabi sono consultabili all'indirizzo: http://www.eursc.eu/index.php?id=143

Articolazione dell'esame di Fisica di Baccalaureato

Il corso di scuola secondaria si conclude con gli esami licenza liceale europea, alla fine della classe settima. Il certificato rilasciato è pienamente riconosciuto in tutti i paesi dell'Unione europea, nonché in una serie di altri paesi. Il certificato ha gli stessi diritti e benefici del diploma di scuola media superiore del paese di origine, tra cui il diritto stesso dei cittadini, con qualifiche equivalenti, a chiedere l'ammissione a ogni università o istituto di istruzione superiore nell'Unione Europea.

La Commissione esaminatrice, che supervisiona gli esami in tutte le sezioni linguistiche, è presieduta da un professore universitario ed è composta da esaminatori provenienti da ciascun paese dell'Unione. Sono nominati annualmente dal Consiglio Direttivo e devono soddisfare i requisiti stabiliti nei rispettivi paesi d'origine per la nomina di commissioni di esame dello stesso livello.

L'esame di Baccalaureato valuta gli apprendimenti delle materie di insegnamento nelle classi sesta e settima, per ottenere l' ammissione agli esami gli studenti devono aver completato almeno le ultime due classi del ciclo di studi secondari presso la scuola europea.

La valutazione di ogni studente si compone dei seguenti elementi:

- valutazione delle prove della settima classe (40 per cento del voto finale)
- cinque prove scritte, (36 per cento del voto finale), delle quali, prova in madrelingua, prima lingua straniera e matematica sono obbligatorie per tutti i candidati.
- quattro esami orali, (24 per cento del voto finale), di cui la prova in madrelingua e in prima lingua straniera sono obbligatorie, così come la storia o geografia se il candidato non ha già effettuato un esame scritto in queste materie.

Il voto minimo per superare l'esame di licenza liceale è 60/cento.

L'attento esame della Commissione, che richiede la doppia correzione e può richiedere un terzo correttore, garantisce l'alto livello e la qualità della licenza liceale.

Il certificato viene quindi assegnato solo agli alunni che hanno le competenze e le conoscenze necessarie per proseguire con l'istruzione universitaria.

Descrizione dei problemi assegnati alla prova scritta di fisica

La prova scritta di fisica si articola in sei problemi che riguardano i seguenti argomenti: gravitazione, elettromagnetismo, onde, luce (interferenza e diffrazione), meccanica quantistica, fisica nucleare. Il candidato deve svolgere quattro dei sei problemi proposti.

La commissione internazionale che prepara le prove decide anche la griglia di valutazione che è la stessa per tutti. Il punteggio massimo assegnabile a ciascun problema è 25. La prova si ritiene superata con un punteggio minimo di 60/100. Il voto finale viene riportato in decimi.

I problemi sono molto articolati, richiedono una conoscenza approfondita degli argomenti e abilità nel problem solving: spesso si parte da situazioni reali, articoli scientifici …

I risultati ottenuti dagli alunni sono ottimali: il grafico 1 mostra i risultati della prova dell'a. s.

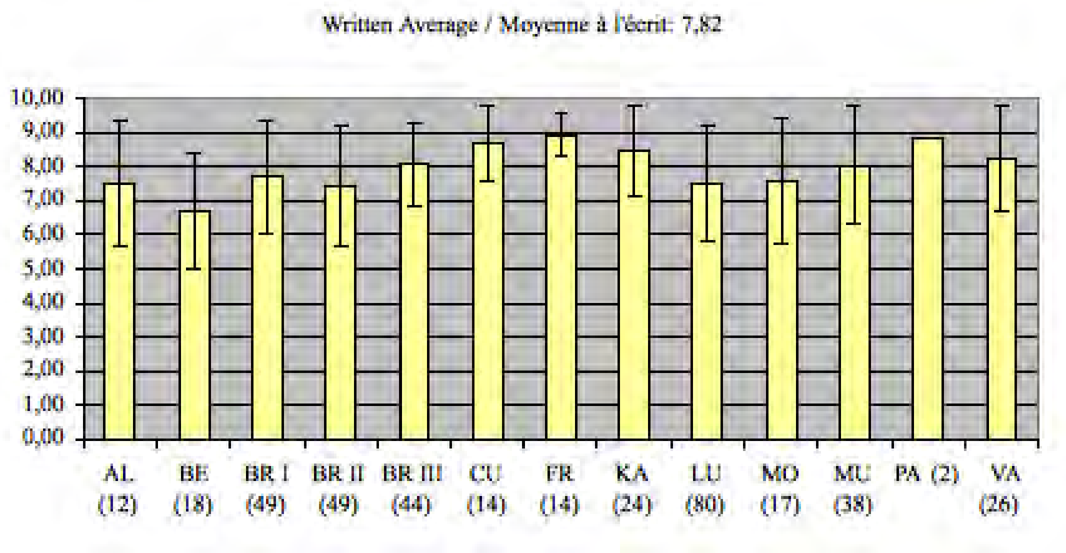


Grafico 1 Risultati della prova scritta a.s. 2009/10

Conclusioni

Le motivazioni per gli ottimi risultati ottenuti nei licei europei per l'insegnamento della fisica sono, a mio avviso, da ricercarsi nei seguenti punti:

classi poco numerose, insegnamento individualizzato e molto curato,

sillabo dettagliato,

efficace distribuzione delle ore d'insegnamento: potenziamento nei primi anni della scuola secondaria (quattro ore di Scienze Integrate), anni cruciali per la formazione scientifica degli allievi, e quattro ore nella sesta e settima classe con possibilità di approfondimento,

metodi d'insegnamento dinamici, con approccio legato a problemi reali.

Sitografia

http://www.eursc.eu

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA IN FINLANDIA

Francesca Ruzzi
Liceo Tito Lucrezio Caro - Roma

Premessa

Gli ottimi risultati degli studenti finlandesi nelle prove OCSE PISA degli ultimi dieci anni hanno reso, agli occhi della comunità internazionale, il sistema scolastico finlandese uno dei più efficaci in Europa. I quindicenni finlandesi si posizionano sempre ai vertici della classifica non solo per la Matematica ma anche per la Lettura e le Scienze. Inoltre, i punteggi riportati presentano una varianza tra scuole, e all'interno delle scuole, che è inferiore rispetto a quella degli altri Paesi, evidenziando una forte omogeneità nel livello di acquisizione delle competenze. Contribuiscono al giudizio favorevole anche il basso tasso di dispersione scolastica (nel 2010 la percentuale dei diplomati era pari all'80%) e il buon livello di soddisfazione dei vari protagonisti della scuola, studenti, professori e genitori, come indicatore della fiducia che la società ripone nel sistema stesso. Effettivamente la professione docente in Finlandia è una professione molto ambita, non solo per la buona retribuzione, ma anche per il prestigio che le viene riconosciuto. Individuare i motivi di questo successo richiede non solo l'analisi della proposta didattica ma anche del contesto sociale e culturale di riferimento.

Struttura del sistema scolastico

Il sistema scolastico finlandese si compone di un ciclo unico obbligatorio di 9 anni (dai 7 ai 16 anni di età) al termine del quale si accede alla scuola superiore, liceo o istituto professionale, di una durata di 3 o 4 anni. L'ammissione alla scuola superiore avviene in base alle valutazioni finali ottenute dallo studente nelle singole discipline. Non vi è alcun esame da sostenere.

La maggioranza degli alunni che concludono il primo ciclo si iscrive alle scuole professionali, che offrono una grandissima varietà di indirizzi didattici diversi. I licei, invece, non si differenziano in base a un indirizzo specifico. Per tutti l'offerta formativa si articola in corsi obbligatori (47) e facoltativi (28). Nella pianificazione del percorso di studi, il singolo studente deve tener conto anche di quella che sarà la sua eventuale scelta universitaria. La prima selezione per l'accesso alle Facoltà Scientifiche e a Medicina, ad esempio, avviene proprio sulla base del programma svolto e del voto conseguito in Matematica nell'Esame di Stato finale. La scelta dei corsi facoltativi non riguarda infatti solo le discipline ma anche il livello di approfondimento dei contenuti. L'offerta si divide in programma "lyhyt" (semplificato) e programma "pitka" (ampio).

Un docente tutor aiuta i ragazzi nell'organizzazione del percorso e li segue durante gli anni del liceo. I corsi di cui si compone la proposta didattica del liceo sono moduli tematici della durata di 38 ore, si svolgono in 6 settimane e al termine di ciascun corso c'è una prova scritta preparata dal docente. Non vi sono mai verifiche orali, né nella scuola dell'obbligo, né in quella superiore. Ciò accade per tutte le discipline a esclusione delle lingue straniere.

Per quel che riguarda la Matematica sono previsti 6 corsi obbligatori (Formule e funzioni – Geometria - Modelli matematici 1 - Analisi matematica - Statistica e Probabilità - Modelli matematici 2). Inserendo altri 4 corsi nel piano di studi si può scegliere la Matematica come una delle discipline in cui sostenere la prova d'esame finale. Se si sceglie il programma "lungo" i corsi da seguire sono 14 (Formule e funzioni - Funzioni polinomiali – Geometria - Geometria analitica – Vettori - Statistica e Probabilità – Derivate - Funzioni esponenziali e logaritmiche -Funzioni goniometriche e Successioni - Calcolo integrale -Teoria dei Numeri e Logica -Metodi numerici e algebrici - Calcolo differenziale e integrale - modulo di ripasso dei corsi precedenti).

Il percorso di studi secondario si conclude con l'Esame di Stato finale (Ylioppilastutkinto). Le materie oggetto d'esame devono essere almeno quattro tra cui obbligatorio è il Finlandese. Le altre tre vengono scelte dal candidato e in almeno due di queste il candidato deve presentarsi sul programma "lungo". Le prove d'esame sono redatte e valutate a livello centrale dal Comitato Nazionale degli Esami Finali che ha sede a Helsinki. Le valutazioni ottenute nelle singole discipline sono il primo criterio di selezione per l'accesso all'Università. Le facoltà sono infatti tutte a numero chiuso: ogni anno sono disponibili circa 20.000 posti in tutto il Paese su circa 40.000 studenti che sostengono l'esame finale.

Aspetti metodologici

Entrando nel merito della proposta didattica è da notare che il curriculum attuale e l'adozione del ciclo unico obbligatorio di 9 anni sono frutto della riforma del sistema scolastico avvenuta alla fine degli anni '70 e che i primi successi degli studenti finlandesi a livello internazionale risalgono all'indagine dell'IEA del 1991. Dal 2000 nelle indagini PISA non solo la media dei punteggi dei quindicenni finlandesi è sempre all'apice della classifica, ma la differenza nei risultati tra scuole e nelle scuole è molto bassa. Gli studenti, quindi, ottengono risultati soddisfacenti a prescindere dal contesto socio-economico. Ecco perché il sistema finlandese appare alla comunità internazionale uno dei più equi. In effetti, rispetto all'Italia, la differenziazione del percorso di studi avviene più tardi, cioè all'età di 16 anni: i quindicenni coinvolti nelle prove OCSE PISA in Finlandia sono studenti della scuola di base, facenti parte di gruppi più eterogenei al loro interno in termini di abilità e aspettative; in Italia sono ragazzi del primo o secondo anno di scuola superiore. La nostra proposta didattica, sempre in riferimento alle prove PISA risulta adeguata nei licei, assolutamente non soddisfacente nei tecnici e nei professionali. Inoltre dal punto di vista metodologico i nove anni della scuola dell'obbligo costituiscono un percorso piuttosto continuo.

Per quel che riguarda la Matematica, le lezioni sono strutturate nello stesso modo nei vari anni e comunque appaiono abbastanza tradizionali: un primo momento, piuttosto breve, di spiegazione dei concetti a cui fa seguito una lunga serie di applicazioni da svolgere individualmente o in piccoli gruppi. Tra gli impegni del docente non c'è quello della stesura della programmazione didattica: i programmi sono fortemente prescrittivi e il riferimento per lo svolgimento del percorso didattico è il libro di testo, che assume così la funzione di vera e propria guida per l'alunno e per il docente. Il libro indica anche la scansione temporale delle attività da svolgere: ogni capitolo è suddiviso in unità che possono essere svolte in una o due lezioni. Per ogni unità, inoltre, i concetti, le definizioni, i procedimenti sono presentati in modo molto conciso e poco formale, molto più spazio viene dato agli esercizi da svolgere in classe e agli eventuali esercizi da svolgere a casa come allenamento o approfondimento per gli studenti più bravi. Gli esercizi assegnati per casa sono comunque pochissimi. È un processo di apprendimento che si svolge quasi interamente in classe: si predilige trasmettere pochi concetti ma fondamentali, stimolare il più possibile la riflessione su di essi durante la lezione, cercando di evitare uno studio mnemonico.

Nel complesso emerge una visione applicativa della Matematica, priva di tutto il suo apparato formale e che non mira all'inserimento dei concetti in un quadro teorico più ampio. Soprattutto nel ciclo obbligatorio gli argomenti vengono proposti in modo piuttosto intuitivo, molto conciso ed evidenziando solo il loro aspetto funzionale. Ne deriva una forte attenzione a problemi relativi a vari ambiti del mondo reale e per i quali le informazioni vanno ricercate non solo nel testo tradizionale ma anche in grafici, tabelle, disegni. Notevole importanza viene data nei diversi anni alla trattazione delle relazioni tra grandezze mediante tutti e tre i registri rappresentativi: grafico, algebrico e funzionale.

I concetti, le tecniche, i procedimenti vengono sempre ripresi nel tempo e intrecciati tra loro in contesti diversi e secondo livelli di approfondimento differenti. Ad esempio le equazioni di primo grado vengono trattate per la prima volta nel 7° anno di corso in relazione alla risoluzione di problemi e poi vengono riprese nel 9° anno dopo aver introdotto l'equazione della retta. Colpisce la quasi totale assenza delle dimostrazioni o anche solo del riferimento alla necessità del dimostrare. La geometria, ad esempio, è affrontata ai vari livelli senza mai sottolineare l'importanza dei concetti di postulato, definizione, teorema. Quello che interessa è saper riconoscere le caratteristiche delle figure geometriche ed essere in grado di determinarne il perimetro, l'area e il volume. Del tempo viene invece dedicato alla manipolazione, alla costruzione di oggetti e alle costruzioni con riga e compasso. Le prime dimostrazioni compaiono soltanto nel percorso "lungo" della scuola secondaria, ma in numero piuttosto ridotto. Per quel che riguarda la geometria analitica e l'analisi ci si limita sempre a casi molto semplici da un punto di vista algebrico. Più spazio viene dato alla probabilità e alla statistica. È una proposta che può apparire riduttiva sia nei contenuti che nella modalità di trasmissione, ma certamente è caratterizzata da un'estrema chiarezza degli obiettivi specifici e da una forte omogeneità nella metodologia di lavoro. Risulta possibile in questo contesto somministrare prove di verifica a livello nazionale e dare valore ai risultati conseguiti. Gli studenti, inoltre, si sentono guidati nel loro percorso e le prove di verifica non destano eccessive preoccupazioni, perché non si discostano mai da quanto è stato affrontato. Inoltre, la soglia della sufficienza è alquanto bassa (ad esempio nella prova d'esame si raggiunge svolgendo 2 esercizi su 10) ed il problema della valutazione, così sentito nella scuola italiana, sembra non sussistere nella scuola finlandese.

Èmolto raro essere respinti ma di fatto la sola sufficienza non permette di accedere ai gradi d'istruzione superiore. Già nel passaggio dalla scuola dell'obbligo al liceo ha la precedenza chi ha una media alta e la selezione diventa ancor più rigorosa per l'accesso all'università. In altre parole, l'insuccesso scolastico non corrisponde alla "bocciatura", ma alla condizione di mediocrità in cui il singolo studente si è voluto adagiare e che gli limiterà le opportunità future.

Aspetti sociali e culturali

Entra in gioco quindi il vero aspetto vincente del sistema finlandese: il senso di responsabilità degli studenti, la consapevolezza dell'importanza di un buon percorso scolastico. Sin da piccoli riescono a gestire autonomamente i vari momenti della giornata scolastica. Sono vivaci durante le attività ricreative e tranquilli durante la lezione. L'insegnante non ha bisogno di richiamare la loro attenzione. E' un clima di serenità che certamente agevola il compito del docente.

La scuola è il luogo nel quale i ragazzi investono le loro energie, negli anni rimane il luogo delle loro attività sportive e dei loro incontri e nei piccoli comuni costituisce l'unico centro culturale.

Secondo una ricerca sui sistemi educativi di 50 paesi realizzata nel 2012 dall'Economist Intelligence Unit per la multinazionale Pearson, l'Italia risulta al 24° posto mentre la Finlandia è prima insieme alla Corea del Sud. Che cosa accomuna due paesi aventi sistemi educativi così diversi? Quello coreano estremamente rigido, basato su un apprendimento mnemonico e continui test di verifica, e quello finlandese molto poco rigoroso, che non prevede neanche lo svolgimento di compiti a casa? Il punto in comune è l'importanza attribuita all'insegnamento, non solo in riferimento all'arruolamento della classe docente, ma soprattutto rispetto alla motivazione, al senso di responsabilità nel raggiungimento degli obiettivi, all'idea della scuola diffusa nella società come luogo in cui i ragazzi costruiscono il loro futuro. A questo proposito sembra particolarmente pertinente un'affermazione di Pasi Sahlberg, ex docente di Matematica e Fisica e oggi Direttore Generale del CIMO (Centre for International Mobility and Cooperation). Secondo lui: "Il sistema finlandese funziona sulla base della fiducia reciproca tra insegnanti, studenti, famiglie e autorità" . Per Sahlberg, la cultura della fiducia significa che le autorità e la società credono che gli insegnanti e i dirigenti scolastici hanno tutta la competenza necessaria a gestire la scuola e l'istruzione.

Bibliografia

Ruzzi, F. (2012). *L'insegnamento della Matematica nella scuola finlandese* in *PROGETTO ALICE 2012 - II · vol. XIII · n° 38*. Roma: Pagine.

Taglietti, C. (2012). *La scuola è giusta? Paese al top* in *Corriere della Sera, 27 Novembre.*

Heinonen, M. (2006). *Pii7, Pii9.* Otava: Kustannusosakeyhtio.

Hemmo, K. (2004). *Matemaattinen analyysi*. Helsinki: Tammi

WORKSHOP

DAL "METODO DEL FALEGNAME" ALL'APPROCCIO A UNA TEORIA DELLE FRAZIONI

Giulio Alluto, Andrea Poggi, Alfonsina Sibilla
Scuola Secondaria I grado di Borgio Verezzi (SV) – I.C. Pietra Ligure
Scuola Secondaria di I grado di Monterosso al Mare (SP) – I.C. Levanto
Gruppo di Ricerca sulla Didattica della Matematica e la Formazione Scientifica nella Scuola dell'Obbligo del Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova

Premessa

La conoscenza matematica è basata su una dialettica produttiva tra teoria e pratica. Da una parte la matematica è strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà, dall'altra gli aspetti concreti della matematica hanno avuto nel tempo un inquadramento culturale che fa riferimento a una serie di conoscenze teoriche, storiche ed epistemologiche. Come messo in evidenza da più parti, un elemento chiave della dialettica tra teoria e pratica in matematica è costituito dagli strumenti. L'unità di lavoro che qui presentiamo intende sviluppare questa dialettica tra teoria e pratica. L'ambiente didattico è attrezzato con due sistemi di rappresentazione: la normale notazione frazionaria e un sistema di rappresentazione grafico che sfrutta il teorema di Talete e che permette all'alunno di controllare sul piano operativo e percettivo proprietà della rappresentazione e trasferirle gradualmente, in un gioco di re-interpretazioni e giustificazioni, a relazioni e proprietà dell'oggetto matematico; lo strumento geometrico è usato come dispositivo per compiere esplorazioni (guidate dall'insegnante) sulle proprietà del nuovo insieme numerico oggetto di studio.

L'attività fa parte del progetto "Linguaggio e argomentazione nello studio della matematica dalla scuola primaria all'università" nel quadro del Progetto Lauree Scientifiche dell'Università di Genova (cfr. : http://pls.dima.unige.it/azione1/argomentazione/scuola_media/azione1_linguaggioeargomentazione_media.php). Il polo didattico di riferimento è l'Istituto Comprensivo di Carcare.

Le classi coinvolte

L'attività nell'anno scolastico 2012-2013 è stata svolta in tre classi prime, due presso l'istituto di Carcare (insegnante Emanuela Zignego, tirocinante TFA Andrea Poggi) e una presso l'Istituto di Borgio Verezzi (insegnante Giulio Alluto, docente con funzione di osservazione e di supporto Alfonsina Sibilla). In questo articolo ci riferiamo in particolare al percorso svolto nella classe I B dell'Istituto di Borgio Verezzi. La classe, a tempo prolungato, si presentava eterogenea, vivace e collaborativa. La maggioranza degli alunni evidenziava un livello basso per quanto concerne le capacità cognitive e di apprendimento. Si può dire che non fosse una classe "intuitiva e pronta" ma piuttosto lenta nell'apprendimento con numerosi alunni che manifestavano notevoli difficoltà nell'affrontare processi logici – matematici. L'attività aveva cadenza settimanale (2 ore e mezzo a settimana) per un totale complessivo di 15 ore, si svolgeva il mercoledì pomeriggio, con allievi disattenti poiché "già stanchi" dopo le cinque ore del mattino e l'ora di mensa. Nell'organizzazione scolastica le lezioni pomeridiane erano considerate laboratorio.

Il laboratorio di matematica e l'idea di insegnamento

Noi abbiamo inteso le ore di laboratorio come ambiente "in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. Nel laboratorio di matematica la costruzione di significati è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività" (Anichini, Arzarello, Ciarrapico, Robutti, 2003). Siamo convinti che anche nella pratica quotidiana debbano essere presenti momenti di laboratorio in cui "in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive" (da Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione). Per noi, infatti, l'insegnamento è un processo interattivo fra docente e allievi in cui vengono messi a confronto modi di spiegare e modi di capire, complessità dei contenuti disciplinari e patrimoni di esperienze individuali preesistenti. Ai fini dell'apprendimento degli allievi concorrono un insieme di variabili: i modi di pensare e le strategie cognitive dei singoli ragazzi, la mediazione didattica e le scelte metodologiche, la gestione del lavoro in classe e la pedagogia dell'errore. Quest'ultimo aspetto è fondamentale per noi: l'errore deve essere vissuto dagli allievi come un rischio inevitabile quando si cercano strade nuove, quando si formulano ipotesi, quando si valutano situazioni. La riflessione sulle possibili cause dell'errore e sui suoi effetti, la ricerca dei modi per superarlo o per evitarlo dovrebbe sostituire la "sanzione" dell'errore come unico sbocco del processo di valutazione.

L'impostazione metodologica

II percorso proposto si articola in diverse fasi, che solitamente prevedono l'alternanza di:

- Momenti di lavoro individuale, con l'ausilio di schede di lavoro
- Momenti di discussione collettiva guidata su quanto prodotto individualmente
- Momenti di sistematizzazione delle conoscenze da parte dall'insegnante
- Momenti di esercizio individuale per consolidare quanto appreso.

Con questa impostazione, quindi, gli studenti sono stimolati a lavorare sui problemi prima di aver affrontato in modo sistematico la teoria, diversamente dall'impostazione didattica tradizionale, in cui solitamente quest'ultima precede "gli esercizi". Gli studenti lavorano così con la matematica in una situazione di reale scoperta, fatto che ne stimola la motivazione e rafforza un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, come peraltro richiesto anche dalle indicazioni nazionali. Tale impostazione metodologica è complessivamente riconducibile a Vygotskij: gli studenti giocano un ruolo attivo nella costruzione del sapere, sia attraverso il lavoro individuale sia mediante l'interazione sociale; l'insegnante non si limita a predisporre l'ambiente di apprendimento, a orientare la discussione, formalizzare e sistematizzare le conoscenze emerse, ma svolge una mediazione diretta sia dal punto di vista linguistico sia concettuale. Altro riferimento importante è costituito dalla teoria dei campi concettuali di Vergnaud. Infatti, l'impostazione adottata si preoccupa di fornire situazioni di riferimento che costituiscano una solida base esperienziale per la formazione dei concetti: in questo caso, la suddivisione in parti uguali di una tavoletta, un foglio, un segmento sulla semiretta dei numeri. Le proprietà dei concetti (gli invarianti operatori) non sono introdotte dall'insegnante con una spiegazione, ma progressivamente riconosciute dagli studenti nei loro lavori e nella discussione guidata proprio a partire dalle situazioni di riferimento proposte. Il docente, a sua volta, interviene direttamente sul versante della rappresentazione dei concetti, introducendo gli opportuni linguaggi specifici e riconducendo quanto prodotto dagli studenti nell'ambito della cultura, operando cioè un'istituzionalizzazione delle conoscenze.

Abbiamo scelto di privilegiare nel nostro percorso la costruzione e il confronto di testi, la formulazione di ipotesi, la discussione e la dialettica tra linguaggio naturale e linguaggio algebrico.

II ruolo dell'argomentazione nel progetto

L'attività cerca di mettere in pratica le parole di Perelman nel Trattato dell'argomentazione: "perché esista argomentazione occorre che si realizzi un'effettiva comunanza spirituale. Non è possibile trascurare completamente, considerandoli irrilevanti, le condizioni psichiche e sociali in mancanza delle quali l'argomentazione rimarrebbe senza oggetto e senza risultato. La formazione di una effettiva comunità delle menti esige un insieme di condizioni.

Il minimo indispensabile dell'argomentazione sembra sia l'esistenza di un linguaggio comune, di una tecnica che permetta la comunicazione".

Nel nostro lavoro la produzione di testi, scritti o orali, è preminente rispetto ai calcoli o comunque rispetto ai testi scritti in linguaggio formale in modo particolare nelle prime fasi del lavoro. Nei percorsi scolastici tradizionali agli studenti si chiede di produrre quasi esclusivamente testi in linguaggio formalizzato, costituiti per la maggior parte dall'esecuzione di calcoli. Questo tipo di impostazione trascura completamente le competenze argomentative salvo poi richiedere improvvisamente nei gradi successivi di istruzione la dimostrazione di teoremi, senza aver preparato in alcun modo tale passo. Nel percorso in oggetto, invece, l'introduzione del linguaggio formalizzato relativo a un concetto avviene sempre dopo aver ampiamente affrontato le stesse questioni con il linguaggio naturale e la verifica procedurale.

Descrivere procedure seguite o apprese, produrre ipotesi ed enunciati, confrontarli tra loro, attività sistematicamente richieste, sono competenze propedeutiche per l'argomentazione. Due requisiti necessari per l'argomentazione sono infatti:

- possedere sufficienti conoscenze sull'oggetto dell'argomentazione. Descrivere una procedura, formulare un'ipotesi, produrre enunciati e confrontarli fra loro sono attività che conducono a una conoscenza interiorizzata, non superficiale, dell'oggetto in questione. Il bambino raggiunge la conoscenza degli oggetti che lo circondano manipolandoli, smontandoli, ricomponendoli, usandoli: le attività sopra descritte costituiscono, per la conoscenza dei concetti, l'analogo di queste operazioni. Cimentarsi con il descrivere una procedura richiede una serie di attività metacognitive, che conducono a una conoscenza più profonda della procedura stessa rispetto alla conoscenza di chi sa solo eseguire la stessa procedura, ma non descriverla. Questo primo livello di consapevolezza non appare però sufficiente per la maturazione delle competenze, essendo interno al processo attuato, per questo è importante la riflessione sull'azione compiuta, mediante la pratica didattica del confronto dei testi;
- saper gestire sul piano logico e linguistico i passi di ragionamento e la loro concatenazione. Le attività sopra citate sono assolutamente necessarie alla gestione sul piano logico e soprattutto linguistico dei passi di ragionamento: per argomentare che una procedura è preferibile a un'altra è necessario saper descrivere nei dettagli entrambe le procedure; per argomentare la validità di un'ipotesi è necessario, prima di tutto, saper formulare con chiarezza tale ipotesi. Separare le richieste di descrivere, formulare, enunciare dalla richiesta di argomentare, come viene fatto in questo percorso, aiuta gli studenti a gestire le relative difficoltà linguistiche connesse a questi compiti: lo studente, infatti, può concentrarsi sulle difficoltà logiche e linguistiche connesse in modo specifico all'argomentazione se prima si è potuto cimentare con gli aspetti logico/linguistici implicati nella descrizione, formulazione ed enunciazione.

In quasi tutte le schede si trovano inoltre richieste quali "motiva la tua risposta", "spiega perché", "spiega quale ragionamento hai fatto" e così via.

Lo strumento geometrico

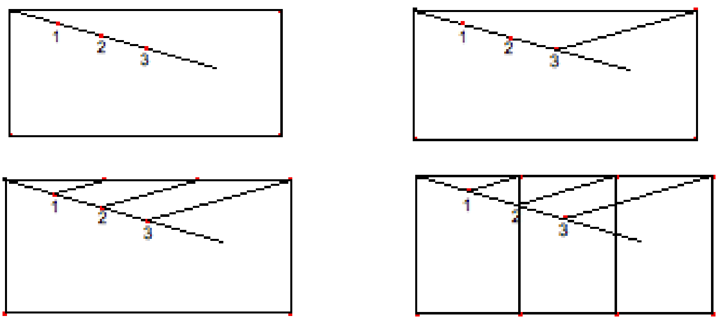
Per fare matematica e per apprendere nuove conoscenze matematiche occorre imparare a usare tecniche che, per ragioni di efficienza nello sviluppo di ogni attività, devono diventare routine. Osserviamo però che se l'attività matematica si riduce solo all'appropriazione e all'uso di specifiche tecniche, essa perde il suo carattere culturale e conoscitivo, diventa prescrizione, una serie di ricette da applicare in compiti meccanici e ripetitivi che vengono “accettate” dagli studenti in base al principio di autorità dell’insegnante . Ciò, purtroppo, è quello che caratterizza molto spesso l’attività con le frazioni dentro l’istituzione scolastica. Le attività didattiche proposte in questo progetto si basano sull’uso della linea dei numeri e sono caratterizzate da una operatività centrata su uno strumento geometrico che presenta caratteristiche specifiche, le quali consentono di affrontare una vasta varietà di compiti nell’approccio alle frazioni, attraverso la messa in atto di schemi di azione basati sull’uso implicito del Teorema di Talete. Lo strumento è costituito da due semirette che hanno origine comune, ciascuna caratterizzata da un’unità di misura. Una semiretta, detta semiretta dei numeri, serve per rappresentare i numeri razionali, la seconda semiretta, detta semiretta ripartitrice, permette di realizzare tecniche di ripartizione o di riporto di lunghezze individuate sulla semiretta dei numeri. Inizialmente l’artefatto viene presentato agli studenti come strumento operativo per compiere ripartizioni di lunghezze. Attraverso tecniche di ripartizione realizzate con riga e squadra gli alunni possono eseguire un approccio esplorativo delle proprietà dei numeri razionali . Si tratta di tecniche che producono effetti interamente controllabili sul piano percettivo motorio e che possono essere facilmente interpretate all’interno del contesto dell’attività. In questo modo, i significati costruiti possono essere messi in corrispondenza con le tecniche di trattamento della notazione frazionaria, contribuendo ad assegnare a esse un significato appropriato. Gli alunni entrano così in contatto con l’insieme numerico dei numeri razionali cogliendone proprietà che lo caratterizzano e sviluppando gradualmente la capacità di giustificarle all’interno di un quadro teorico, sulla base del riconoscimento di regolarità osservate operando sulla rappresentazione geometrica. (cfr. http:// didmat.dima.unige.it).

La struttura del progetto

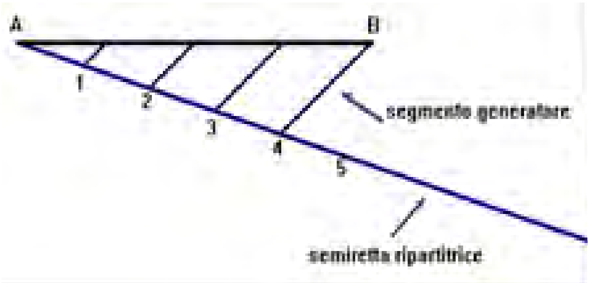
Il progetto è costituito da due attività distinte tra loro, la prima è relativa alla conoscenza dello strumento geometrico, che costituisce un prerequisito della seconda attività, quella principale, dedicata all’approccio a una teoria delle frazioni. Durante il nostro percorso ci siamo resi conto che l’introduzione contestuale all’unità di lavoro sulle frazioni del metodo grafico di rappresentazione è stato svantaggioso in quanto ha sovrapposto difficoltà inerenti lo sviluppo dei concetti numerici nuovi con difficoltà di riflessione sui significati connessi all’uso dello strumento. L’uso dello strumento grafico incorpora concetti quali quelli di partizione e di contenenza che è utile vengano sviluppate anticipatamente, per esempio in un ambito relativo a problemi di misura, in modo da consentire una migliore mediazione dell’approccio alla struttura del nuovo insieme numerico.

La prima attività: il metodo del falegname

Agli studenti suddivisi in piccoli gruppi è chiesto di dividere in tre parti uguali un foglio senza misurarlo e senza fare operazioni, e di descrivere la procedura seguita. Gli allievi, utilizzando diverse modalità, riescono nel compito, seppur in modo impreciso. Dopo aver socializzato i metodi seguiti, sintetizzandoli alla lavagna, si chiede se essi valgono in qualsiasi situazione. Dato che la classe è sicura di sì, si mostra una tavoletta di legno e si sfida la classe a dividerla in parti uguali coi metodi proposti. Si presenta così, attraverso disegni, il metodo che il falegname effettivamente usa per questo scopo:



Gli allievi collettivamente individuano e descrivono oralmente il metodo del falegname che poi viene utilizzato per ripartire in tre parti uguali alla lavagna un rettangolo rappresentante la tavoletta di legno, con l'utilizzo di riga e squadra e di un listello di legno come unità di misura. I ragazzi si cimentano poi individualmente, mentre gli insegnanti passano tra i banchi per offrire aiuto e chiarimenti. Le difficoltà principali sono legate alla poca dimestichezza nell'uso di riga e squadra per tracciare le parallele (non c'è stato sostegno da parte dell'insegnante di educazione tecnica, benché questa attività fosse adatta all'interdisciplinarità) e alla non precisa comprensione da parte di qualche ragazzo del metodo. La consegna successiva è: "Immagina di essere il falegname; spiega a un tuo assistente il metodo per ripartire in parti uguali il lato superiore di una tavoletta di legno." Molti allievi si immedesimano nel falegname e si rivolgono direttamente all'allievo. Nella descrizione della procedura si notano in parecchi ragazzi mancanza di concetti e di termini geometrici e mancanza di coerenza e di completezza. Si richiede poi il confronto tra due testi della classe scelti ad hoc dall'insegnante. Questa attività per i ragazzi si rivela molto difficile per la tendenza dei ragazzi a "interpretare" il testo, senza leggerlo "puntualmente", e per l'incapacità di orientarsi se i testi hanno stili diversi. Alla LIM si proiettano allora i due testi e si richiede di individuare i punti analoghi e di metterli a confronto;in questo modo poco per volta con la guida dell'insegnante ci si accorge delle diversità. Come ultima consegna si fanno scrivere le istruzioni per una divisione della tavoletta in un numero qualsiasi di parti uguali. Si fanno poi svolgere esercizi e dalla ripartizione della tavoletta si passa alla ripartizione di un segmento:



È stato importante "dare i nomi" alle semirette e al segmento e ragionare con i ragazzi sul significato del nome: ad esempio "segmento generatore" cioè segmento che crea la frazione e "semiretta ripartitrice", semiretta che permette di realizzare metodi operativi di partizione , in questo momento, sul segmento e in seguito sulla semiretta dei numeri.

La seconda attività : l'approccio alla teoria delle frazioni

Prima di iniziare l'attività è stata effettuata una rilevazione sulle conoscenze pregresse sulle frazioni mediante un questionario a domande aperte, per verificare se alcune conoscenze propedeutiche fossero assodate o meno e quali siano le eventuali conoscenze o misconoscenze sulle frazioni. Pochissimi allievi sono riusciti a trovare esempi significativi per l'uso extrascolastico delle frazioni (i prezzi, le ricette), la stragrande maggioranza ha portato esempi di divisione di torte o di pizze; tutta la classe, alla richiesta delle attività svolte a scuola sulle frazioni, ha parlato di divisione di torte e pizze, utilizzando non sempre disegni corretti: torte divise in parti disuguali, frazioni non corrispondenti alle fette.

La rappresentazione delle frazioni unitarie

La rappresentazione delle frazioni unitarie viene introdotta utilizzando il metodo del falegname per suddividere il segmento unitario sulla semiretta dei numeri. Agli studenti è chiesto di rappresentare diverse frazioni unitarie, di riscriverle in ordine crescente e di elencare tutte le osservazioni possibili. Circa 2/3 dei ragazzi riesce a rappresentare, pur con imprecisioni, le frazioni richieste. Per consolidare il metodo si fanno rappresentare anche altre frazioni. Si cerca di rappresentare alla lavagna la frazione 1/0, capendo che non la si può rappresentare sulla semiretta dei numeri, in quanto il suo segmento generatore è parallelo proprio alla semiretta dei numeri. Per quanto riguarda l'ordinamento, metà dei ragazzi ordina le frazioni come se fossero numeri naturali: 1/2, 1/3, 1/4, … perché "2 è minore di 3 ecc.", quando si suggerisce di osservare le frazioni sulla semiretta, si cancella e si riscrive l'ordinamento corretto. Certamente, il modello dei naturali è molto forte e in questo momento è ostacolo all'apprendimento. Non tutti i ragazzi riescono a proporre osservazioni sulla rappresentazione delle frazioni unitarie, altri ci riescono anche se non sempre in modi pertinenti. Ecco le osservazioni rilevate in alunni della classe di Borgio Verezzi:

1. Più il denominatore è alto più la frazione è vicina allo 0
2. Più il segmento generatore si avvicina all'1 della semiretta ripartitrice, più la frazione unitaria si allontana dallo 0
3. Più il denominatore è alto più la frazione è piccola
4. La frazione unitaria significa 1 ripartito in n parti
5. Il numero scelto sulla retta r come estremo del segmento generatore coincide con il denominatore della frazione
6. La frazione più grande è 1/2, alla sua destra non ci sono frazioni
7. Tutte le frazioni hanno un valore minore di 1
8. Col metodo del falegname ho capito meglio le frazioni.

Queste osservazioni vengono socializzate e discusse. Durante la discussione i ragazzi cercano spontaneamente di argomentarle, così l'osservazione 1 è spiegata dall'osservazione 2, l'osservazione 3 dall'osservazione 4 e dalla osservazione 2; per quanto riguarda le osservazioni 6 e 7, Diana, una ragazza non sempre coinvolta nelle lezioni "normali" e sovente disattenta, spiega che, a causa dell'inclinazione del segmento generatore, 1/1 è maggiore di 1/2 perché 1 è più piccolo di 2, ma 1/1 non è altro che 1, infatti è 1 è ripartito una volta sola.

Utilizzando l'intervento di Diana come stimolo, dalla discussione sulle osservazioni, si passa a una fase teorica in cui si propongono e si definiscono termini quali "enunciato", "postulato", "teorema", "dimostrazione".

Mediante l'osservazione 4, "La frazione unitaria significa 1 ripartito in n parti", si formalizza la frazione unitaria: $1/n$, con $n \in N^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Si chiede poi cosa significa $1/(n+1)$, i ragazzi interpretano correttamente la frazione.

Ordinamento delle frazioni unitarie

Gli studenti devono:

- ipotizzare l'ordinamento di alcune frazioni unitarie, indicando le previsioni sia attraverso parole sia attraverso uno schizzo, e ricorrere alla rappresentazione solo in un secondo momento, per verificare o falsificare le ipotesi fatte, spiegando poi il motivo dell'eventuale disaccordo;
- scrivere un enunciato che esprima, in generale, il criterio di ordinamento delle frazioni unitarie e spiegare perché secondo loro l'enunciato è vero;
- confrontare diversi enunciati prodotti dai compagni, scelti ad hoc dall'insegnante, prima in un lavoro individuale e in seguito con una discussione guidata.

La maggior parte degli studenti ipotizza un ordinamento corretto. Qualche allievo confonde ancora la frazione con il denominatore e pone 1/6 a 6 cm dallo 0, 1/7 a 7 cm ecc., avendo preso l'unità a 10 cm. La rappresentazione successiva evidenzia l'errore e porta a un inizio di riflessione.

La seconda consegna non è facile per allievi di quell'età, ma con l'esplorazione sullo strumento grafico gli allievi "abbracciano con lo sguardo un insieme" di oggetti che sembrano dissimili tra loro "ed afferrano in tutti un medesimo e unico genere, degno di dare il nome a tutti" e sono così in grado di scrivere l'enunciato in linguaggio naturale, che viene validato in un primo momento dallo strumento grafico stesso. (Molinari, Chiappini, Corradi, Sibilla,1998). Nella classe di Borgio Verezzi, su 19 allievi, 7 si limitano a esempi numerici, 3 si riferiscono a 1/n e 1/(n+1) (frazioni scritte precedentemente alla lavagna e non cancellate), 7 trattano le frazioni unitarie in generale. Per quanto riguarda l'argomentazione 5 fanno riferimento a torte o a strisce, 4 fanno riferimento al segmento generatore dello schema grafico, 3 fanno riferimento alle parti in cui resta diviso 1, 2 fanno riferimento alla vicinanza allo 0.

Gli enunciati scelti per il confronto a due a due, A con B, B con C, sono i seguenti:

A "Fra queste due frazioni 1/10 e 1/11, la frazione minore è 1/11"

B "Se vuoi ordinare le frazioni unitarie e ne hai due col denominatore consecutivo (1/n, 1/(n+1)) quella col denominatore maggiore è minore"

C "Tra due frazioni unitarie è più piccola quella col denominatore maggiore".

Parecchi ragazzi nel confronto scritto non notano differenze tra l'enunciato A e l'enunciato B.

Molto interessante si rivela la discussione su questi due enunciati. Nella classe si contrappongono due tesi contrapposte relative all'equivalenza tra le coppie di frazioni 1/10, 1/11 e 1/n, 1/(n+1). La prima tesi è proposta da Erika: *"secondo me i numeri sono uguali perché, ok può essere qualsiasi numero, tipo quei numeri lì 1/10 e 1/11, 11 è 10 più 1 quindi 1/n è 1/10 e n+1 10+1 è 11, quindi sono uguali"* e da Ginevra: *"secondo me sono uguali perché può essere qualsiasi numero, sì, può essere un altro numero però può essere anche quello",* la seconda tesi *è* sostenuta da Lorenzo: " non sono uguali, 1/10 e 1/11 sono fissi, invece un enne e un ennesimo più 1 sono liberi, perché un enne può essere 1/14 e un ennesimo più 1 1/15", da Veronica: "*possono essere la stessa cosa ma possono anche non esserlo perché n sono tutti i numeri naturali"* e da Diana: *"ha ragione Lorenzo, è un esempio quello che dice Erika".*

È interessante la tendenza a "dare nomi": Lorenzo chiama "fisse" le frazioni costanti e "libere" le frazioni generiche, queste ultime Diana in seguito le chiamerà "neutre".

Tutti gli allievi sono interessati alla discussione, anche quelli che non intervengono. I sostenitori dell'una o dell'altra tesi sono ragazzi di vario genere, sia "studenti modelli" come Alice e Ginevra, sia alunni poco motivati nelle lezioni tradizionali come Erika, Lorenzo e Diana, che in questa attività hanno sempre partecipato in modo attivo e proficuo. Noi abbiamo cercato di risolvere il conflitto tra le due diverse ipotesi attraverso la distinzione tra il "può" e il "deve", riprendendo l'intervento di Veronica e facendo riferimento a una attività svolta precedentemente, il gioco "pensa un numero"(cft. Testera, Morselli, Sibilla, 2011), in cui il numero pensato era scelto diversamente da ciascun bambino, ma "*per il professore che non sapeva quale numero pensavamo, quel numero era n"* (Diana).

È interessante analizzare in dettaglio la posizione di Erika, la studentessa che sostiene la tesi "non corretta" per quasi tutta la discussione. Il nucleo dell'argomentazione di Erika può essere riassunto così: la relazione esistente fra 1/n e 1/(n+1) è la stessa che intercorre fra 1/10 e 1/11, quindi i due enunciati sono equivalenti. Evidentemente Erika non ha ancora metabolizzato completamente il concetto di variabile né l'uso di lettere come generalizzazione di numeri e quando dice "i numeri sono uguali" comunica in effetti una sua scoperta: i due enunciati presentano una forte analogia. Per Erika questa analogia non è scontata e la sua attenzione è ancora rivolta a individuare ed esplorare le somiglianze esistenti fra le due affermazioni. Non ha infatti alcun senso individuare differenze fra enunciati completamente scorrelati. Per poter esaminare le differenze fra due enunciati è preliminarmente necessario che siano chiare le analogie fra gli stessi. Questa ipotesi è confermata dal fatto che Erika non rileva sostanziali differenze neppure fra la sua affermazione e quella di Lorenzo, che invece aveva sostenuto chiaramente la tesi opposta*: "non sono uguali, 1/10* *e 1/11 sono fissi, invece un enne e un ennesimo più uno sono liberi, perché un enne può essere 1/14 e un ennesimo più uno 1/15"*. Dal punto di vista di Erika, anche fra 1/14 e 1/15 intercorre sempre lo stesso tipo di relazione che passa fra 1/10 e 1/11 o fra 1/n e 1/(n+1). Solo al termine della discussione, dopo aver largamente esplorato e difeso le analogie fra i due enunciati, Erika può riconoscerne le differenze. E' significativo che ciò avvenga quando gli studenti sono invitati a mettersi nei panni di un matematico, la cui figura era stata evocata nell'attività "pensa un numero" svolta precedentemente e citata nell'attuale discussione. In questa attività si introduceva l'uso della variabile, senza alcuna trattazione esplicita del concetto. L'insegnamento di concetti fondamentali e complessi, così come propongono le Indicazioni nazionali per il curriculo, va svoltodurante tutto il percorso scolastico, permettendo agli studenti di metabolizzarli a poco a poco e di sperimentarli in situazioni di riferimento di difficoltà progressiva e con analisi via via più ricche, che popolano gradualmente di significato quei concetti. In "pensa un numero" viene evocata la figura del matematico: non si sente la sua voce "virgolettata", ma poco per volta la si definisce; il matematico usa un linguaggio appropriato, generalizza, ricerca la completezza e la sintesi, sa semplificare la complessità, si pone il problema del vero e del falso, congettura, argomenta. Gli allievi si sforzano di fare un salto qualitativo per avvicinarsi al "matematico" ed è proprio questa sfida culturale che permette alla classe, attraverso le discussioni, le prime argomentazioni e le loro confutazioni, di diventare un'effettiva comunità. Quando l'insegnante chiede "quale enunciato, tra A e B, sceglierebbe un matematico", Erika, sino allora non del tutto convinta, si immedesima nel matematico e risponde correttamente con sicurezza. La già citata pedagogia dell'errore si rivela in questo caso cruciale: la possibilità che Erika ha avuto di sostenere e difendere la tesi "sbagliata", il fatto che la sua posizione non sia stata immediatamente sanzionata, ma accolta come un contributo importante, il confronto dialettico fra le diverse posizioni, sono stati determinanti nella costruzione del concetto di variabile e di lettera come generalizzazione dei numeri, non solo per Erika ma probabilmente per tutta la classe.

Molti ragazzi trovano anche difficoltà nel confronto tra l'enunciato B *"Se vuoi ordinare le frazioni unitarie e ne hai due col denominatore consecutivo (1/n, 1/(n+1)) quella col denominatore maggiore è minore"* e l'enunciato D "*Tra due frazioni unitarie è più piccola quella col denominatore maggiore"*. Con la guida dell'insegnante si analizzano allora le condizioni per cui sono validi i due enunciati: l'enunciato D parla di due qualsiasi frazioni unitarie, per esempio 1/8 e 1/30, l'enunciato C parla di due frazioni unitarie particolari, le frazioni unitarie che hanno il denominatore consecutivo.

Gli enunciati scelti dalla classe e la loro traduzione nel linguaggio algebrico

Dopo un lavoro puntuale, partecipato dai ragazzi, di miglioramento dei testi per renderli più simili a quello che potrebbe scrivere un matematico, gli enunciati che i ragazzi decidono far parte della teoria delle frazioni della classe sono i seguenti:

1. se due frazioni unitarie hanno il denominatore consecutivo, la frazione col denominatore maggiore è minore;

2. date due frazioni unitarie, è maggiore la frazione che ha denominatore minore.

Il primo enunciato viene tradotto spontaneamente da alcuni ragazzi, l'uso dei simboli di maggiore e di minore era già stato introdotto in precedenza:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad n \in N^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Tutti gli allievi riescono a padroneggiare la scrittura. La lettera n non rappresenta solo la sostituzione di numeri particolari letti sullo strumento geometrico, ma rappresenta la continuità dei numeri interi, anche quelli che non si vedono sul sistema grafico (lettera come variabile), e nello stesso tempo rappresenta la sintesi di tutti questi numeri (lettera come generalizzazione).

Più complessa la traduzione del secondo enunciato, in quanto si devono maneggiare due variabili indipendenti tra loro, con la condizione che una sia minore dell'altra: in questa fase è stata importante la mediazione dell'insegnante.

Gli esercizi di consolidamento e di approfondimento

I ragazzi inizialmente devono rispondere a quesiti riguardanti l'ordinamento di frazioni numeriche per consolidare gli apprendimenti, la verifica avviene attraverso la rappresentazione col metodo grafico. In seguito, la classe si deve destreggiare con l'ordinamento di frazioni con lettere. Attraverso la discussione si socializzano le ipotesi degli allievi, le si valutano e ci si abitua a trattare le variabili. I ragazzi hanno ormai capito che devono ordinare il denominatore per poi ordinare le frazioni. Per esempio nell'ordinamento di $1/a, 1/(a+2), 1/(a-1), a+2$, viene visto come a a cui si aggiungono due unità, così mentalmente si muovono sulla semiretta dei numeri ed ordinano $1/(a+2), 1/a,\ 1/(a-1)$.

Per l'ordinamento di $1/a, 1/(a+1), 1/b$, molti allievi pongono $1/b$ all'inizio o alla fine dell'ordinamento. Attraverso la discussione, i ragazzi che hanno capito che b è indipendente da a , convincono gli altri che, a meno di qualche condizione su b relativa ad a , $1/b$ non è ordinabile. Interessante è la discussione sull'ordinamento di $1/(a+5), 1/a, 1/(2a),$, alcuni allievi spontaneamente pongono condizioni su a : se a è …, allora l'ordinamento è $1/(2a), 1/(a+5), 1/a$, oppure è $1/(a+5), 1/(2a), 1/a$.. Alla richiesta dell'insegnante *"esisterà una condizione per poter ordinare le frazioni senza sostituire ogni volta il valore ad a?"*, qualche allievo trova il valore "limite" 5. In alcuni casi le richieste di ordinamento non sono banali, non tutta la classe riesce a essere autonoma, ma molti si sforzano di seguire gli interventi dei compagni più esperti, cercando di orientarsi in questo nuovo linguaggio.

L'approccio ad una teoria delle frazioni

L'insegnante propone di dimostrare, così come fanno i matematici, l'affermazione "1/5 è maggiore di 1/9", in due modi diversi, utilizzando prima l'enunciato 1 e poi l'enunciato 2. In un'atmosfera permeata di interesse per un argomento "da grandi", i ragazzi non trovano profonda difficoltà a dimostrare l'affermazione, utilizzando l'enunciato 2: *"poiché 5 è minore di 9, 1/5 è maggiore di 1/9"*. In questo momento, così come in altri, sarebbe stato conveniente l'appoggio dell'insegnante di lettere per esempio per un lavoro proficuo sui connettivi: perché, poiché, se, …. Più mediata dall'insegnante è stata la dimostrazione attraverso il primo enunciato. I ragazzi collettivamente hanno costruito le disuguaglianze, vere per l'enunciato 1, 1/5 > 1/6, 1/6 > 1/7, 1/7 > 1/8, 1/8 > 1/9. Ricordata poi la proprietà transitiva, che i ragazzi avevano già incontrato, si dimostra l'affermazione.

Dopo questa attività, ripensando ai termini postulato e teorema, si decide che l'affermazione 1 venga considerata un postulato, mentre l'affermazione 2, che però deve ancora essere dimostrato vera per tutte le coppie di frazioni unitarie, non solo per 1/5 e 1/9, un teorema.

Per ora la teoria delle frazioni della classe è costituita da

<u>def 1.</u> : le frazioni unitarie sono le frazioni che hanno come numeratore 1 e come denominatore un numero naturale diverso da 0. 1/n con $n \in N^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 1/n significa 1 ripartito in n parti uguali;

<u>postulato 1</u>: se due frazioni unitarie hanno il denominatore consecutivo, la frazione col denominatore maggiore è minore 1/(n+1) < 1/n con $n \in N^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$;

<u>teorema 1</u>: date due frazioni unitarie, è maggiore la frazione che ha denominatore minore"

se $a < b, 1/a > 1/b$

La dimostrazione del teorema

In questa fase il ruolo di mediatore semiotico esercitato dall'insegnante è fondamentale per lo sviluppo dell'attività. Gli studenti si cimentano subito con il tentativo di esprimere il teorema in linguaggio algebrico, procedendo per ipotesi da sottoporre a verifica: *"1/n > 1/(n+1)"*, confutazione "*esprime il postulato, non il teorema*", "1/n > 1/n+2", confutazione "*non esprime il teorema in forma generale, perché l'esempio visto prima (1/5>1/9) non è esprimibile così ma con 1/n >1/(n+4)", 1/a > 1/(a+a),* confutazione *"no, perché la seconda frazione non è indipendente dalla prima", "1/a >1/(a+…)", …* . Questa lunga attività iniziale è importante perché consente agli allievi di familiarizzare con il linguaggio algebrico. Una volta trovata la formalizzazione corretta 1/a > 1/(a+c), con c ≠0, gli allievi, rifacendosi al postulato 1, faticosamente costruiscono la catena 1/a>1/(a+1), 1/(a+1)>1/(a+2), … e utilizzando la proprietà transitiva dimostrano il teorema.

Dalle frazioni unitarie alle frazioni qualsiasi

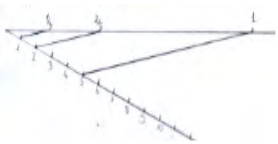
Per passare alle frazioni generiche si chiede agli studenti cosa significhi secondo loro 2/5 e di ipotizzare come si possa rappresentare tale frazione sulla semiretta dei numeri con il metodo del falegname. Alcuni studenti rappresentano 2/5 come la quinta parte di 2, altri usano un miscuglio (errato) dei due metodi.

Durante la discussione in classe, i ragazzi che avevano sbagliato, si rendono conto del loro

errore

e consolidano il concetto di 2/5 come la quinta parte di 2.

Veronica propone una interpretazione diversa: 2/5 come 2 volte 1/5



La classe inizialmente resta sconcertata, sembra quasi che la matematica sia un'opinione, ma applicando i due metodi sullo stesso schema grafico si nota che i punti coincidono. Si capisce allora che 2/5 si può interpretare in due modi diversi, ambedue validi.

Generalizzando la proprietà verificata con lo strumento di rappresentazione, si aggiunge alla teoria delle frazioni il postulato 2: a/b = a*1/b

Si utilizza il metodo "di Veronica" per rappresentare 3/5, 4/5, …

Attraverso questo metodo si confrontano le frazioni con l'unità e si trovano le condizioni per cui una frazione è minore, uguale o maggiore di 1.

Come sempre si propongono esercizi di consolidamento e problemi che richiedono di trasferire ed estendere le conoscenze ed abilità apprese in un contesto più ampio, per esempio "sotto quali condizioni a/b =2", mettendo così in gioco le competenze sulle frazioni.

Le "diverse reazioni" degli alunni nei confronti dell'attività proposta

Dalle reazioni degli alunni all'attività laboratoriale proposta sopra descritta e confrontando queste "reazioni" con i comportamenti che i ragazzi manifestano durante le lezioni tradizionali si potrebbero ipotizzare diverse tipologie di alunni:

- ragazzi "bravi" che manifestano interesse per la matematica, studiano ed "elaborano molto" gli argomenti studiati: essi possono diventare i “leader” nelle attività di argomentazione, elaborando loro “metodi e teorie” che poi diventano i “metodi e le teorie della classe”;

- alunni “bravi” che però applicano “le ricette matematiche” imparate dai libri durante le lezioni tradizionali e possono trovarsi in difficoltà durante questo tipo di attività poiché non ritengono importante “l’esprimere la propria opinione” e sovente preferiscono le soluzioni certe comunicate dall’insegnante;
- alunni con poca voglia di studiare ma intelligenti: possono trovare in queste attività degli stimoli importanti, si sentono più protagonisti e meno legati agli schemi; possono osare, intervenire, ipotizzare e molte volte fanno osservazioni interessanti;
- ragazzi che hanno difficoltà logico matematiche ma manifestano impegno per le attività proposte: generalmente intervengono e molte volte gli interventi sono pertinenti e utili alla discussione.

Analizzando queste diverse tipologie di reazione degli alunni si potrebbe dire che l’attività proposta ha determinato delle ricadute positive nella maggioranza degli alunni, poiché riassume in sé alcune caratteristiche presenti nella teoria triarchica dell’intelligenza di Sterberg ovvero l’intelligenza si esprime attraverso tre modalità fondamentali: analitica (comprende la capacità di analizzare, di valutare, di esprimere giudizi, operare confronti tra elementi diversi), creativa (legata all’intuizione, si realizza nella capacità di inventare, di ipotizzare, …) e pratica (la capacità di usare strumenti, applicare procedure,…).

Bibliografia

Anichini, G.; Arzarello, F.; Ciarrapico, L. & Robutti, O. (a cura di) (2003). *Matematica 2001. La matematica per il cittadino.* Lucca: Matteoni stampatore.

Indicazioni nazionali per il curriculo della scuola d’infanzia e del primo grado di istruzione (2012).

Molinari, M.; Chiappini, G.; Corradi, P.; Sibilla, A. (1998). Osservazione di processi di apprendimento: il caso dei numeri razionali. In *Atti del III convegno internuclei della Scuola dell’obbligo,* Salsomaggiore. Dipartimento di Matematica, Università di Parma.

Sternberg, R. (1998) *Stili di pensiero.* Trento: Erickson.

Testera, M., Morselli, F., Sibilla, A. (2011). “Pensa un numero…. Attività argomentative nella scuola secondaria di primo grado”. In O. Robutti & M. Mosca (eds.) *Il laboratorio in matematica e in fisica. Atti del IV Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2009,* 213-225.

Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathématiques.* 10, 133-169. [Trad. it. di Francesco Speranza: La matematica e la sua didattica, 1, 1992, 4-19].

Vygotskij, L. (2007). *Pensiero e linguaggio.* Firenze: Giunti Editore.

IL PROBLEMA DEI PROBLEMI

Pietro Di Martino
Dip. Matematica – Università di Pisa – dimartin@dm.unipi.it

Introduzione

Già nei programmi per le scuole elementari del 1985 è esplicitato che *"Il pensiero matematico è caratterizzato dall'attività di risoluzione di problemi"*. Nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo del 2007, in un certo senso si *rafforza* l'indicazione didattica, si afferma infatti che la pratica matematica è caratterizzata dalla risoluzione di problemi (*"Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi*"), e tale assunto rimane intatto anche nelle ultime Indicazioni Nazionali per il primo ciclo del 2012.

D'altra parte, studenti e docenti del primo ciclo effettivamente ritengono di affrontare spesso (per gli studenti a volte anche troppo spesso), a scuola nelle ore di matematica (o a casa per le ore di matematica), problemi da risolvere:ma è proprio così?

Il punto sembra essere nella definizione dei termini usati: cosa significa problema? E cosa si intende per attività di problem solving? Ne sembra essere ben conscio anche il legislatore, che a margine della frase precedentemente citata sulla caratterizzazione della pratica matematica, scrive: "[problemi] *che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola."*

Ci domandiamo allora che cosa è un problema, non necessariamente di matematica, cercando di ricavare una definizione, alla quale probabilmente molti di noi non hanno mai pensato, partendo da esempi.

Fai un esempio di problema di vita quotidiana

Solitamente gli esempi che emergono sono enunciati in poche parole, talvolta ne basta una: *"il tempo", "i soldi"*. A questo punto, prima di cercare caratteristiche in comune tra gli esempi portati, è importante discutere se e quanto i problemi sono riconosciuti come tali.

Discutere sugli esempi: li riconosciamo tutti come problemi?

Ciò che emerge spesso è che, condividendo uno stesso contesto generale di situazione, tutti riconoscono gli esempi portati come effettivi possibili problemi, emerge però anche il fatto che non siano problemi di tutti.

A questo punto, considerando gli esempi fatti, si chiede di trovarne le caratteristiche comuni per provare a dare una definizione di problema.

Quello che emerge (quasi) sempre è che la parola "problema" è associata a un disagio, e alla necessità di risolvere una situazione attraverso un ragionamento. Talvolta è osservato un aspetto singolare e interessante, che distingue gli esempi di problema riportati dal problema scolastico: negli esempi riportati non è quasi mai presente una domanda, domanda che invece caratterizza la chiosa dei problemi scolastici. In questi casi è possibile aprire una riflessione molto interessante sul perché di questa differenza, riflessione che porterebbe alla distinzione tra problemi autoposti ed eteroposti, e, volendo, a osservare – non senza sforzo – che le situazioni descritte nei problemi scolastici raramente inducono una "condivisione di problema" (come invece fa la semplice dichiarazione "il tempo": si intuisce che chi la fa non sa come organizzare il tempo per fare tutto quello che dovrebbe fare), semplicemente perché non descrivono situazioni problematiche (nemmeno immedesimandosi nei protagonisti della storia, se una storia è presente). Per questo nei problemi scolastici c'è bisogno della domanda: per esplicitare un "problema" che non è implicito nella situazione descritta.

Una definizione di problema che ci sembra molto interessante è quella proposta dallo psicologo della Gestalt, Karl Duncker (1969):

"Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta, ma non sa come raggiungerla"

Questa definizione caratterizza il problema per due caratteristiche (discusse approfonditamente in Zan 2007):

1. Il fatto di avere una meta, un obiettivo.
2. Il fatto di non sapere come raggiungerlo.

Il problema e la meta

La prima caratteristica della definizione di Duncker, il fatto che il soggetto si trova di fronte a un problema se ha una meta, in qualche modo allarga lo spettro dei problemi, togliendo la caratterizzazione di disagio di cui abbiamo discusso nell'introduzione. Inoltre, sempre riferendosi alle caratterizzazioni di problemi che emergono nelle discussioni con gli insegnanti, questa parte della definizione di Duncker *tramuta* l'aspetto *prescrittivo* (*"una situazione che il soggetto* deve *risolvere*") in *volitivo* ("*una meta che il soggetto* vuole *raggiungere*"): la differenza, anche in contesto scolastico (e a maggior ragione nel primo ciclo), non è da poco sul piano affettivo-motivazionale.

Il fatto di avere una meta, non implica che la meta sia univocamente determinata dalla situazione: soprattutto in contesto scolastico è molto facile che la meta che si prefigge lo studente non sia quella che si è prefisso l'insegnante dando il problema all'allievo. Come osserva Zan (ibidem), il giudizio sulla razionalità di una persona di fronte a un problema (e dunque in particolare il giudizio sulla razionalità degli allievi nella risoluzione di problemi di matematica) non può prescindere dall'interpretazione della meta che quella persona ha: il rischio che si corre è di bollare come irrazionali (e dunque rinunciare a intervenire) comportamenti tutt'altro che irrazionali, ma mirati a una meta diversa da quella di risolvere correttamente il problema. È probabilmente esperienza di tutti, in una situazione scolastica di valutazione sottoposti a forte stress, aver voglia di uscire il prima possibile da quella situazione; in questi casi, il comportamento più frequente è quello di "dire qualsiasi cosa" per poter appunto finire (bene o male diventa irrilevante) quel *supplizio*. Questo "dire qualsiasi cosa", seppur spesso (sempre?) non efficiente per l'obiettivo di rispondere bene, è un comportamento coerente con l'obiettivo di uscire dalla situazione.

Zan (ibidem) osserva che, il riconoscere la necessità della presenza di una meta per parlare di problema, induce anche una definizione di "fallimento" dinanzi a un problema: si dirà che una persona ha fallito se non raggiunge la meta che si era prefisso. Una volta ancora si può capire l'importanza di interpretare la meta che un individuo si è posto, prima di poter parlare di fallimento.

La definizione di problema data è molto generale, non limitata al singolo problema di matematica: supponiamo che una persona abbia come meta quella di far bene in matematica a scuola e non sappia come raggiungere questa meta. Questo esempio mostra come in contesto didattico (e in particolare di recupero) è molto importante caratterizzare il fallimento, discuterne e individuarne, interpretarne le cause insieme ai propri allievi. Per avviare un'azione di recupero, infatti, condizione necessaria è che il fallimento riconosciuto dall'insegnante sia condiviso anche dall'allievo: se l'allievo non condivide il fatto di aver fallito rispetto alla meta di far bene in matematica, perché dovrebbe investire risorse in un'azione di recupero?

Il condividere il fallimento è un passaggio necessario per avviare un'azione di recupero, ma è solo il primo. Una volta preso atto di un fallimento, in termini didattici (e di recupero), sono molto importanti quelle che Wiener (1974) chiama attribuzioni causali, ovvero i motivi che la persona pensa abbiano portato al fallimento[1].

È interessante, anche in questo caso, partire da esempi concreti, si può dunque, ad esempio, chiedere:

Fai un esempio di fallimento vissuto come insegnante

E dopo aver raccolto esempi di fallimenti (l'esperienza di attività di questo tipo insegna che si raccolgono molti esempi generici "*non riuscire a motivare gli studenti*", e un numero minore di esempi specifici *"con Luca* [nome di fantasia] *non sono riuscito a entrare in sintonia, a dargli quell'aiuto di cui probabilmente aveva bisogno"*) vissuti dagli insegnanti, si cerca di studiarne caratteristiche simili e differenze.

A questo proposito, Wiener descrive tre dimensioni molto importanti delle attribuzioni causali:

- Causa interna/esterna: ad esempio uno studente può pensare di aver fatto male un compito perché non ha studiato (causa interna "*Io non ho studiato*"), oppure perché l'insegnante ha proposto una prova troppo difficile (causa esterna);
- Causa stabile/instabile: a seconda che la persona riconosca la causa come stabile nel tempo oppure temporanea;
- Causa controllabile/incontrollabile: a seconda che la persona pensi di poter modificare o meno la causa del fallimento.

Anche il riconoscimento di questi attributi delle attribuzioni causali può variare a seconda del soggetto (ovvero c'è un certo grado di soggettività): ad esempio l'impegno spesso è considerato controllabile dallo studente che lo riconosce come causa del proprio insuccesso, ma frequentemente il docente pensa che quello studente "non riesca" a impegnarsi.

A prescindere dalla considerazione sulla soggettività, Wiener osserva che se un soggetto attribuisce i suoi fallimenti a cause stabili e incontrollabili, non ha motivo per investire risorse nel cercare di cambiare le cose (è convinto di non poter intervenire sulle cause del fallimento). Dal nostro studio (basato sulla raccolta di temi autobiografici dal titolo "*io e la matematica*") sul rapporto degli studenti italiani con la matematica (Di Martino & Zan, 2005) emerge come spesso lo studente in difficoltà in matematica abbia attribuzioni di fallimento legate a cause incontrollabili e stabili:

"Ho provato a studiare con tutte le mie forze ma non c'era niente da fare, la professoressa trovava sempre qualcosa che non andava"

Lisa, classe 2a secondaria di secondo grado

"Posso dire che per me la matematica è una malattia di cui non riesco a guarire. Comunque io mi impegno lo stesso per quanto possa riuscirci, ma ormai mi sono convinta che la matematica non mi entra in testa"

Cinzia, 5a primaria

1 Wiener parla di attribuzioni causali anche nel caso di successo (che spesso vanno a formare, col tempo e rinforzate da esperienze ripetute, delle vere e proprie teorie del successo).

Frequentemente, prima o dopo, quando uno studente persiste nell'avere difficoltà in matematica, anche l'insegnante condivide che le cause di tali difficoltà siano, per lui insegnante, incontrollabili. Si arriva quindi al consolidamento della convinzione, da parte di entrambi (allievo e insegnante), che non ci sia niente da fare e dunque la rinuncia di entrambi a *impegnare* risorse per superare le difficoltà[2].

Questa discussione sul fallimento e sulle difficoltà può sembrare una digressione rispetto al tema dei problemi, ma non è esattamente così: abbiamo discusso di come per intervenire sulle difficoltà, per sperare che un soggetto investa risorse nel proprio recupero, è fondamentale che sia convinto di poter intervenire sulle cause del proprio insuccesso. Un'attività che permetta di valorizzare le risposte parziali, i piccoli contributi, le idee originali è dunque ideale per intraprendere questo percorso: il problem solving permette proprio di fare tutto questo.

Il problema e il pensiero produttivo

La seconda caratteristica della definizione di Duncker richiama il fatto che il soggetto non sappia come raggiungere la meta che si è prefisso: questa caratteristica differenzia il problema (la risoluzione del quale dunque richiede l'attivazione di un pensiero produttivo) dall'esercizio (in cui si richiede l'attivazione di un pensiero riproduttivo). Nel risolvere un problema bisogna attuare un comportamento strategico, prendere decisioni; nel risolvere un esercizio bisogna attivare un comportamento automatico: è evidente come sia importante riconoscere un problema o un esercizio, per non attivare un comportamento strategico laddove si possa attuare un comportamento automatico (e dunque meno dispendioso) e, viceversa, per non attivare un comportamento automatico di fronte a un problema.

L'impressione è che nella tradizione scolastica italiana si facciano pochissimi problemi e molti esercizi in matematica: spesso il "bravo" insegnante (Zan, 2001), quello che si preoccupa dell'autostima dei propri allievi, ritiene giusto non proporre mai situazioni nuove, sente l'esigenza di far vedere agli studenti "*come si fa*" prima di proporre un quesito.

Nella tradizione scolastica italiana in matematica, salvo casi sporadici, è privilegiata l'esecuzione di un numero anche cospicuo di esercizi, rispetto alla discussione di situazioni realmente problematiche.

"*Se non faccio vedere come si fa, poi non riescono a farlo, sbagliano*": questa frase, che testimonia una preoccupazione sentita da molti insegnanti, mostra come siano gli insegnanti stessi i primi a preoccuparsi degli errori e dei possibili procedimenti risolutivi incompleti. Tutto questo è sicuramente molto comprensibile dal punto di vista psicologico, ma se ci fermiamo a riflettere un po' proprio sulla definizione di problema che abbiamo dato, è piuttosto contraddittorio: in un problema, dove il soggetto non sa come raggiungere la meta, l'errore e anche il mancato raggiungimento della meta deve essere messa nel conto, ed è possibile comunque valorizzare non solo il prodotto finale, ma anche i processi risolutivi messi in atto.

A questo proposito è, a mio avviso, significativa l'introduzione di un libro molto bello di algebra per l'Università scritto dal famoso matematico Hernstein (2010):

"Due parole sui problemi. Ve ne sono molti, e solo un studente eccezionale potrebbe risolverli tutti. Alcuni servono solo a completare dimostrazioni del testo, altri hanno lo scopo di illustrare i risultati ottenuti e far pratica su di essi. Molti non vengono proposti tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati. Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione, quanto nelle idee che fa sorgere in chi la affronta e nei tentativi messi in atto".

L'auspicio è che gli insegnanti possano vincere la paura del fallimento nel proporre problemi, e

2 Abbassare le richieste ovviamente è una azione possibile, non stiamo qui a valutare se appropriata o meno (evidentemente dipende da molte considerazioni legate ai singoli casi), ma è comunque una decisione legata probabilmente proprio alla convinzione dell'insegnante che non ci sia niente da fare e quindi che ci si debba accontentare di risultati inferiori a quelli stabiliti in partenza.

recuperino il gusto di far fare problemi ai loro allievi: quelli che lo hanno fatto, non solo sono andati incontro alle indicazioni normative e alle opinioni degli esperti, ma hanno provato la soddisfazione di raccogliere appieno la creatività e l'ingegno dei propri allievi.

Bibliografia

Duncker, K. (1969). *La psicologia del pensiero produttivo.* Firenze: Giunti-Barbera.

Di Martino, P. & Zan, R. (2005). Raccontare il contare: l'incontro scontro con la matematica nei resoconti degli allievi. In P. Gisfredi (a cura di) I*tinerari tra storie e cambiamento. Momenti e processi formativi.* Bologna: CLUEB, 105-124.

Hernstein, I.N. (2010). *Algebra*. Editori Riuniti – University Press.

Wiener, B. (1974). *Achievement motivation and attribution theory.* Morristown, N.J.: General Learning Press.

Zan, R. (2001). I danni del 'bravo' insegnante. In L. Livorni, G. Meloni &A. Pesci (a cura di) *Le difficoltà in matematica: da problema di pochi a risorsa per tutti*. Bologna: Pitagora Editrice, 135-141.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica.* Milano: Springer.

SPIEGA COME, SPIEGA PERCHÉ ... UN PERCORSO TRA ARITMETICA E GEOMETRIA NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

***Elisabetta Panucci*[1], *Francesca Morselli*[2]**
[1]*I. C. Carcare - Plesso di Altare*
[2]*Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione Università di Torino*

Introduzione

In questo contributo saranno discussi i passi salienti di un percorso volto a favorire l'attività argomentativa nella scuola secondaria di primo grado. Il percorso, realizzato in una classe prima, ruota intorno al problema dei rettangoli isoperimetrici ed è svolto in continua dialettica tra aritmetica e geometria.

Il contributo mostra la struttura del percorso pensata a priori e le variazioni che sono state decise in itinere. L'analisi del percorso è su due livelli: il livello dei processi e il livello della progettazione.

Da un lato, l'analisi si concentra sui processi messi in atto dagli studenti di fronte a consegne del tipo "*Spiega come*" e "*Spiega perché*".

Dall'altro, l'analisi consente di riflettere sulla dialettica progettazione – sperimentazione e sull'importanza di una progettazione flessibile e aperta alle variazioni che tengano conto dei contributi e delle idee degli studenti.

Argomentazione e spiegazione: un breve inquadramento teorico

Balacheff (1982, 1987, 1988, 1999) distingue tra *spiegazione*[1]*, prova e dimostrazione.* La spiegazione è il discorso che ha lo scopo di rendere evidente il carattere di verità di una proposizione. Le ragioni addotte possono essere accettate o contestate. Certe spiegazioni sono accettate all'interno della comunità, cioè prese come prove. Certe prove sono strutturate come una sequenza di enunciati "ammissibili" collegati da inerenze "lecite": tali prove si dicono dimostrazioni.

Adottando questa distinzione, possiamo vedere le spiegazioni come il primo passo verso le dimostrazioni matematiche.

Le spiegazioni possono a loro volta essere distinte a seconda del loro oggetto (che cosa spiegano) e della loro funzione all'interno dell'insegnamento-apprendimento della matematica. Levenson & Barkai (2013) individuano le seguenti funzioni:

- **Funzione 1**: descrizione del proprio ragionamento nella risoluzione di un problema (*Es.: spiega che cosa hai fatto*); in questo caso la spiegazione mette in gioco soprattutto la conoscenza di tipo procedurale.
- **Funzione 2**: giustificazione del perché si è scelto di risolvere il problema in un certo modo, con giustificazione della plausibilità di un ragionamento (*spiega perché hai fatto così*). Da

1 È opportuno sottolineare che il termine originale francese utilizzato da Balacheff è *explication*, tradotto con il termine italiano *spiegazione*. In francese, *explication* significa "développement destiné à éclaircir le sens de quelque chose; ce qui rend compte d'un fait; éclaircissement sur les intentions" (*Le Robert micro,* 1998). In italiano, *spiegazione* significa "atto di spiegare ciò che presenta difficoltà di comprensione; ciò che serve a spiegare, a chiarire, a risolvere; manifestazione del pensiero proprio o altrui in relazione a parole, fatti e simili che siano stati intesi in altro senso o in senso grave" (*Zingarelli*, 1970).

notare che le spiegazioni possono non essere correlate a proprietà matematiche esplicite.

- **Funzione 3:** Spiegazione come risposta a una domanda che presuppone l'utilizzo di proprietà matematiche (*Es.: è vero o falso? Spiega perché*). In questo caso la spiegazione mette in gioco la conoscenza di tipo relazionale.

Tale descrizione mette in evidenza che diverse domande (spiega che cosa hai fatto, spiega perché hai fatto così …) richiedono la produzione di spiegazioni da parte degli alunni, e che l'abitudine e la capacità di fornire spiegazioni nasce ben prima delle attività del terzo tipo (spiegare perché un'affermazione è vera o falsa).

Le spiegazioni prodotte, indipendentemente dalla loro funzione, sono degli esempi di argomentazione.

Il progetto "Linguaggio e argomentazione nello studio della matematica dalla scuola dell'infanzia all'università"

Il percorso si inserisce nel progetto "Linguaggio e argomentazione nello studio della matematica dalla scuola primaria all'Università" (Laboratorio del Piano nazionale Lauree Scientifiche). Il progetto, avviato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova nel 2008-09 e tuttora in corso, è finalizzato alla messa a punto e sperimentazione di percorsi di media e lunga durata attorno al "nodo" dell'argomentazione in campo matematico.

L'argomentazione è riconosciuta nelle Nuove Indicazioni (2012) come competenza centrale nelle attività matematiche e, più in generale, come obiettivo importante della formazione intellettuale del cittadino. Inoltre, la crucialità di argomentazione e dimostrazione nell'insegnamento-apprendimento della matematica è ampiamente documentata in letteratura (Hanna & De Villiers, 2012).

Due le caratteristiche fondamentali del Laboratorio, che vede l'Istituto Comprensivo di Carcare (SV) come polo di riferimento:

- il coinvolgimento di insegnanti di diversi livelli scolari, dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria di secondo grado, in un'ottica di continuità verticale;
- la stretta collaborazione tra ricercatori universitari e insegnanti in tutte le fasi del laboratorio, dalla progettazione, alla realizzazione, all'analisi in itinere e a posteriori.

Queste caratteristiche rendono il Laboratorio un vero "laboratorio di progettazione", dove i percorsi progettati sono progressivamente sperimentati e affinati mediante cicli di sperimentazioni in parallelo (lo stesso percorso su più classi) e in serie (modifiche di percorsi nel corso degli anni). Per questa ragione, il Laboratorio si configura anche come occasione di sviluppo professionale per i docenti coinvolti. A questa ricaduta "diretta" si aggiunge l'importanza di produrre e mettere a disposizione anche di insegnanti non direttamente coinvolti nel progetto, mediante la documentazione caricata sul sito http://pls.dima.unige.it/azione1/argomentazione/scuola_media/azione1_linguaggioeargomentazione_media.php, proposte di percorsi didattici, motivati dal punto di vista teorico, sperimentati in classe e illustrati anche a partire da estratti significativi del lavoro in classe.

Con particolare riferimento alla scuola secondaria di I grado, i percorsi hanno lo scopo di recuperare/consolidare i prerequisiti logico-linguistici indispensabili per l'attività argomentativa e favorire lo sviluppo di un "atteggiamento argomentativo", per cui ogni opinione o scelta deve essere giustificata in modo adeguato e comprensibile. Inoltre, i percorsi portano gli studenti a muovere i primi passi nella "cultura dei teoremi" (Boero, 2007), con particolare riferimento all'uso dell'algebra come strumento dimostrativo.

I rettangoli isoperimetrici

Un percorso in continuità verticale

Il percorso sui rettangoli isoperimetrici è stato progettato congiuntamente dagli insegnanti dei diversi livelli scolari. Il percorso ha un contenuto comune (i rettangoli isoperimetrici) e si declina in modo diverso nei diversi livelli scolastici (scuola primaria, secondaria di primo grado e secondaria di secondo grado), in un'ottica di continuità verticale. Il presente contributo si riferisce alla versione per la scuola secondaria di primo grado.

Il contesto

Il percorso è stato realizzato in due classi prime del plesso di Altare (SV), per un totale di 30 studenti. Per l'occasione, le classi sono state unite e hanno svolto il percorso come se fossero un'unica classe. In particolare, nei lavori di gruppo si sono creati gruppi «misti» per favorire lo scambio e l'interazione tra classi.

Le due classi, al momento della sperimentazione, avevano già svolto l'attività «Pensa un numero» in cui avevano incontrato per la prima volta le lettere come strumento di pensiero (Testera, Morselli & Sibilla, 2011).

Il percorso

Il percorso inizia con la costruzione di rettangoli aventi lo stesso perimetro (disegnati su carta e poi ritagliati nel cartoncino) e continua con l'esplorazione della situazione e la produzione di congetture sull'area massima. A una prima ricerca di giustificazioni del fatto 'tra tutti i rettangoli aventi la stessa area il quadrato è quello con area massima', segue una dimostrazione algebrica, costruita in forma di discussione con una forte mediazione dell'insegnante. Dapprima gli studenti ricostruiscono la dimostrazione (con l'aiuto di una scheda guidata); le ricostruzioni individuali sono poi confrontate e analizzate nel corso di una discussione di classe. Il percorso si conclude con una scheda di ripensamento sull'intero percorso svolto, con domande mirate a far riflettere sulla difficoltà e utilità di ogni tappa, con particolare riferimento alle diverse modalità di lavoro (disegno, ritaglio su cartoncino, uso delle lettere, …).

Nelle sessioni si alternano momenti di lavoro individuale, lavoro in piccoli gruppi, discussioni di classe. I gruppi, oltre a essere eterogenei per classe di appartenenza, sono omogenei per livello, in modo da favorire una reale partecipazione di tutti gli studenti.

Il percorso si è articolato in 5 sessioni di 3 ore ciascuna, svolte con cadenza settimanale nel secondo quadrimestre dell'anno scolastico 2012-13.

Nel paragrafo successivo si presentano nei dettagli le attività relative alla prima parte del percorso (costruzione dei rettangoli isoperimetrici).

La prima attività: costruire i rettangoli

La prima consegna, svolta individualmente dagli studenti, è la seguente:

Disegna quattro rettangoli aventi tutto lo stesso perimetro di 20 cm.

Successivamente gli studenti, divisi in gruppi, svolgono la consegna della seconda scheda:

Confrontate i metodi seguiti per disegnare i diversi rettangoli.

La scheda 2 chiede di esplicitare e mettere a confronto i metodi utilizzati per la costruzione dei rettangoli; in riferimento alla classificazione delle funzioni della spiegazione illustrata da Levenson & Barkai (2013), si passa dalla risoluzione di un problema (costruire i rettangoli) alla descrizione della strategia adottata (funzione 1 della spiegazione: *spiega che cosa hai fatto*).

La strategia più diffusa consiste nel passare dalla richiesta iniziale (perimetro pari a 20 cm) a una richiesta equivalente (semiperimetro pari a 10 cm). In questo modo il problema geometrico della costruzione dei rettangoli si riconduce a un problema di tipo aritmetico, ovvero determinare due numeri la cui somma sia 10. Come mostrano i seguenti estratti dai lavori di gruppo, gli studenti trovano senza difficoltà coppie di numeri la cui somma sia 10, aiutati anche dalla conoscenza, che risale alla scuola primaria, degli "amici del 10".

Gruppo 1

Per formare i rettangoli con il perimetro 20 cm bisogna formare 10 cm e poi moltiplicare per 2. Con questo metodo si possono formare 9 rettangoli: 6+4, 7+3, 8+2, 9+1, 4+6, 3+7, 2+8 e 1+9, però il primo, secondo, terzo e quarto sono uguali agli ultimi quattro. 5+5 non si può fare perché si forma un quadrato.

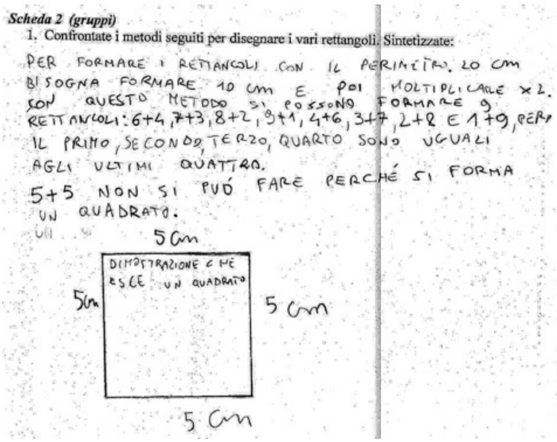


Figura 1. Gruppo 1

Gruppo 2

Abbiamo sommato due lati diversi la cui somma era 10 che moltiplicato per due il risultato era 20, ovvero il perimetro del rettangolo.

Non sono possibili altri perimetri di 20 cm se non con questi lati 6cm+4cm ×2, 8+2 cm ×2, 9+1 cm ×2, 7+3 cm ×2.

5+5+5+5 cm =20 non è un rettangolo, ma un quadrato.

10+10 cm = 20 cm, ma non è un rettangolo.

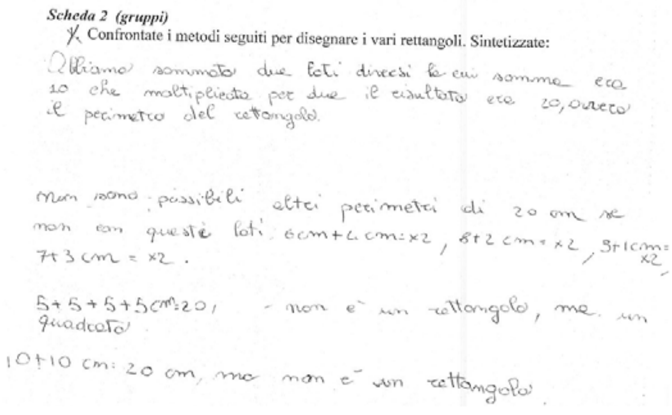


Figura 2. Gruppo 2

Una prima analisi delle risposte alle schede 1 e 2 mette in evidenza alcuni comportamenti ricorrenti. In primo luogo, gli studenti costruiscono rettangoli aventi misure intere (in centimetri). Questo è comprensibile, dal momento che la scheda 1 richiede di costruire un numero limitato di rettangoli e quindi è possibile fornire la risposta senza "scomodare" le misure non intere. D'altro canto, la risposta del gruppo 2 (*non sono possibili altri perimetri di 20 cm*) rende necessario, agli occhi dell'insegnante e dell'osservatrice, approfondire la questione e far riflettere gli studenti sul fatto che *sono possibili* altri perimetri.

Altro elemento osservato è la mancata inclusione del quadrato tra i rettangoli aventi perimetro pari a 20 cm. Anche questa questione sembra degna di un momento di approfondimento e sistemazione.

Inoltre, l'analisi mostra che nessun gruppo, a differenza di quanto avvenuto in precedenti sperimentazioni, ha utilizzato il metodo dell'"aggiungere e togliere": partendo da un rettangolo di perimetro 20 cm, è possibile ottenere un altro rettangolo avente lo stesso perimetro aggiungendo e togliendo a base e altezza la stessa quantità. Insegnante e osservatrice ritengono importante che gli studenti riflettano anche su tale metodo, che prepara alla successiva modellizzazione algebrica del problema.

In virtù delle considerazioni riportate sopra, insegnante e osservatrice decidono di proporre, come lavoro da svolgere a casa, la seguente consegna, volta a far emergere la "necessità" delle misure non intere:

Trova dei rettangoli diversi da quelli dei compagni.

La sessione successiva inizia con la condivisione dei rettangoli trovati a casa.

Come mostra la fotografia della lavagna, contenente le proposte individuali, la maggior parte degli studenti, per perseguire lo scopo di trovare un rettangolo "diverso da quelli pensati dai compagni", si rivolge alle misure non intere. Lo studente A.B. sceglie misure aventi tre cifre decimali. Da notare che gli studenti si limitano a indicare le misure dei rettangoli, senza disegnarli. Questo rende possibile, come emerso nella discussione, immaginare anche rettangoli aventi molte cifre decimali, che nella pratica sarebbero però difficilmente realizzabili. La differenza tra rettangolo "immaginabile" e rettangolo "effettivamente costruibile" non è stata approfondita durante la discussione. L'insegnante si riserva di riprendere la questione in altro momento; inoltre, a livello di affinamento del percorso, si prevede di inserire una domanda specifica nel percorso che sarà sperimentato nel prossimo anno scolastico.

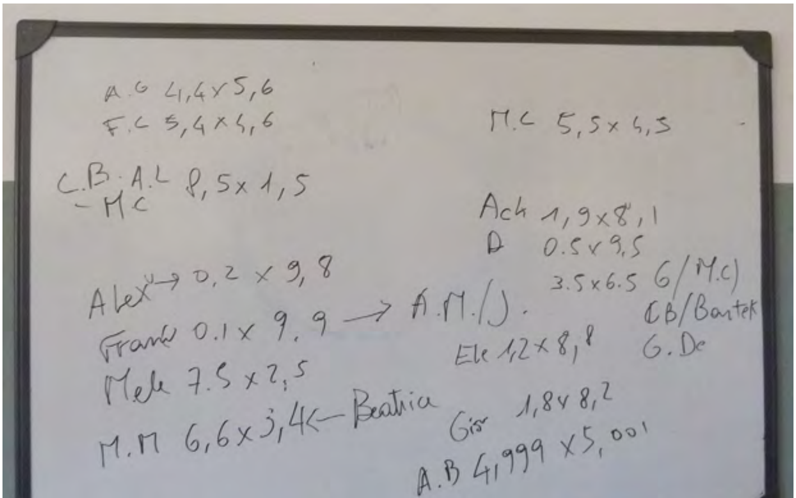


Figura 3. Trova dei rettangoli diversi da quelli dei compagni

Nel proseguimento della discussione di classe emerge la strategia dell'"aggiungere e togliere". Nella discussione si promuove il passaggio dalla descrizione delle strategie alla riflessione sui fondamenti della strategia (funzione 2 della spiegazione: *spiega perché hai fatto così*).

Tale riflessione, oltre a essere funzionale alla prosecuzione del percorso (è importante che emergano strategie per la costruzione dei rettangoli che siano utili per la successiva modellizzazione algebrica della situazione problematica), promuove il passaggio dall'esecuzione alla riflessione e la produzione di argomentazioni legate all'accettabilità dei metodi.

L'insegnante propone allora agli studenti la seguente consegna:

Prova a scrivere perché aggiungendo e togliendo uno stesso numero ai due lati il perimetro non cambia.

Gli studenti dapprima illustrano la strategia attraverso esempi numerici, poi introducono le lettere per evidenziare il fatto che uno stesso contributo dapprima è sommato e successivamente sottratto, per cui i due contributi si annullano (in classe è emersa spontaneamente l'espressione "si neutralizzano").

Da notare che gli studenti, memori della discussione precedente sulla possibilità di utilizzare misure non intere, scelgono inizialmente una rappresentazione letterale[2] in cui è usata una lettera per la parte intera e una per la parte decimale (X,Y e N,Y)[3]. In discussione si arriva poi a una rappresentazione letterale, in cui i due lati del rettangolo di partenza sono rappresentati dalle lettere X e N e M è la quantità che è aggiunta/tolta rispettivamente a X e N per ottenere un nuovo rettangolo[4].

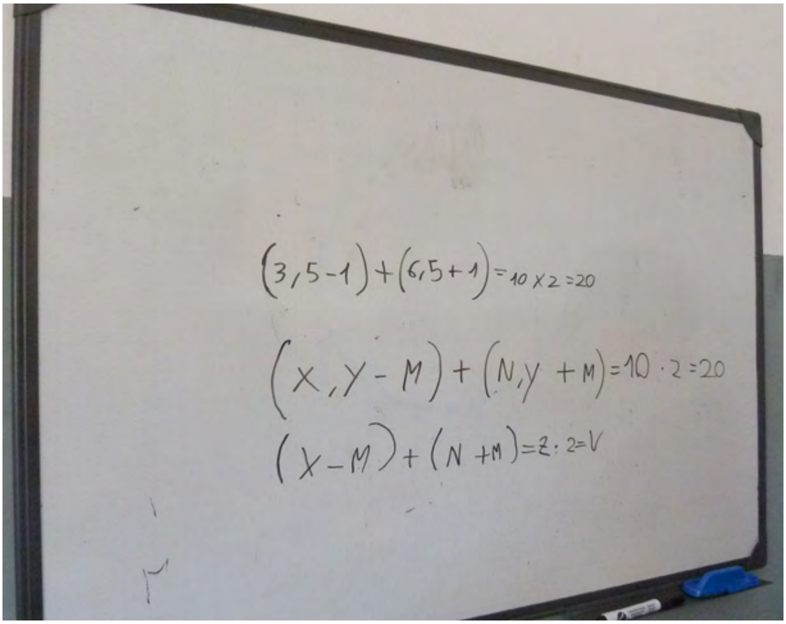


Figura 4. Strategia dell'aggiungere e togliere

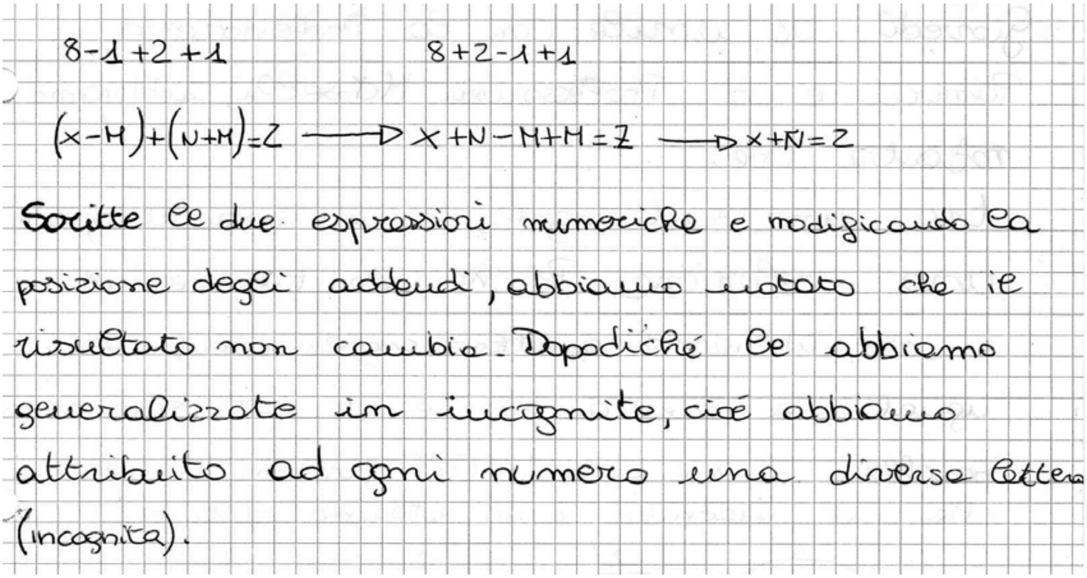
2 Gli studenti hanno già fatto esperienza di utilizzo delle lettere come strumento di generalizzazione e dimostrazione all'interno del percorso "Pensa un numero" (Testera, Morselli, Sibilla, 2011).

3 Si noti che le misure di base e altezza non hanno necessariamente la stessa cifra dopo la virgola, si pensi per esempio al rettangolo di base 3,2 cm e altezza 6,8 cm.

4 Si può anche notare che le scrittura presenti sulla lavagna sono non corrette, per un uso procedurale e non relazione del segno di uguaglianza. Durante la discussione, insegnante e osservatore hanno deciso di concentrare inizialmente l'attenzione sulla rappresentazione letterale dei due lati, e solo in un secondo tempo di far riflettere sul segno di uguaglianza.

Gli studenti sono invitati a *spiegare* la nuova strategia nelle relazioni individuali da svolgere a casa. Alcuni studenti sono in grado di passare dallo spiegare come si trova un nuovo rettangolo allo spiegare perché aggiungendo e togliendo una stessa quantità il risultato non cambia.

Elena parte da un esempio numerico e poi passa alla generalizzazione con le lettere.



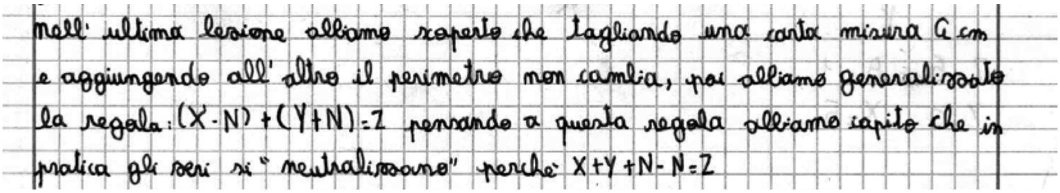
8-1+2+1 8+2-1+1

(x-M)+(N+M)=Z ⟶ x+N-M+M=Z ⟶ x+N=Z

Scritte le due espressioni numeriche e modificando la posizione degli addendi, abbiamo notato che il risultato non cambia. Dopodiché le abbiamo generalizzate in incognite, cioé abbiamo attribuito ad ogni numero una diversa lettera (incognita).

Figura 5. Elena, relazione individuale

Matteo è in grado di esplicitare anche a parole il fatto che i due contributi si annullano. Da notare che gli studenti, per giustificare la "neutralizzazione", utilizzano le proprietà delle operazioni studiate in precedenza, in particolare la commutatività dell'addizione.



nell' ultima lesione abbiamo scoperto che tagliando una carta misura a cm e aggiungendo all' altro il perimetro non cambia, poi abbiamo generalizzato la regola: (X-N)+(Y+N)=Z pensando a questa regola abbiamo capito che in pratica gli seri si "neutralissano" perchè X+Y+N-N=Z

Figura 6. Matteo, relazione individuale

Conclusioni

Come illustrato nella breve analisi del paragrafo precedente, all'interno del percorso complessivo (finalizzato alla congettura e dimostrazione del fatto che, fissato il perimetro, il quadrato è il rettangolo di area massima) si è aperta una ***parentesi sulla costruzione dei rettangoli isoperimetrici*** che ha dato luogo a un'interessante attività argomentativa. Tale parentesi ha creato un ***ponte tra aritmetica e geometria*** e ha costituito un'esperienza di riferimento per il proseguimento del percorso.

L'esperienza geometrica nella classe prima ha appassionato i ragazzi fin dall'inizio; ha sgretolato l'errata e innata concezione che la geometria risulti così distante dall'aritmetica, disciplina a loro assai più familiare. Ha accelerato nell'intero gruppo (ragazzi che hanno appena lasciato la scuola primaria) il passaggio dal concreto all'astratto, le attività manipolative di partenza accompagnate da un atteggiamento argomentativo continuo hanno permesso di operare sull'oggetto geometrico in questione arrivando a una modellizzazione algebrica.

Bibliografia

Boero, P. (2007). *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Douek, N. & Morselli, F. (2012). Preuve et algèbre au collège: de la conception d'une séquence d'apprentissage à l'évolution du cadre théorique de référence. *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Numéro hors série de la Revue Recherches en Didactiques des mathématiques, r*édacteurs L. Coulange & J.P. Drouhard, 283-304.

Hanna, G. & de Villiers, M. (Eds.), *Proof and proving in mathematics education*. Springer, ISBN 978-94-007-2128-9

Morselli, F. (2009). Il processo dimostrativo in una prospettiva culturale. In: F. Ferrara, L. Giacardi & M. Mosca (a cura di), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2008-2009,* pp. 63-82. Torino: Kim Williams Books.

Morselli, F. (2013). The "Language and argumentation" project: researchers and teachers collaborating in task design. In Watson *et ai* (Eds), *Proceedings of ICMI Study 22* – Task design in mathematics education, 487-496.

Morselli, F. (2011). Argomentare e dimostrare nella scuola secondaria di primo grado: teoria e pratica. *Atti del XIX Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, 62.

Morselli, F., & Testera, M. (2011). Argomentare in matematica: cronache di un'esperienza italo-francese. *Scuola e didattica*, vol. 9; p. 76-81, ISSN: 0036-9861.

Morselli, F. & Testera, M. (2010). L'argomentazione in matematica. *Scuola italiana moderna, n. 2,* 35-36.

Testera, M., Morselli, F.& Sibilla, A. (2011). "Pensa un numero…". Attività argomentative nella scuola secondaria di primo grado. In O. Robutti & M. Mosca (a cura di), *Il laboratorio in matematica e in fisica*. *Atti del IV Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2009*, 213-225.

BUILDING THE CONCEPT OF RELATIONS

Lambrecht Spijkerboer
APS-international, the Netherlands, L.spijkerboer@aps.nl

Summary

The influence of one variable to another or other variables is one of the key-concepts of mathematics and used many times in science education. The relation between x and y is often expressed by a formula. Students learn how to deal with formulas in order to be able to predict certain situations, dependencies, or discrepancies between theory and practice. Much time is spent for the education of working with brackets, solving equations, drawing a graph in connection to a formula, etc. Manipulation with formulas is probably the most eye-catching activity for students in math and science classroom. Mathematics is may be sometimes seen as to be equal to dealing with formulas.

Different ways of getting into relations between some (unexpected) variables, described in a non-regular way, can show the different approaches of building the concept of relations. Not only by straight forward formulas, but also how to use a graph as a description, use a table or story by explaining the dependency of one variable to another. Science contexts can help mathematics teachers to see opportunities for better understanding the need, the use and helpfulness of working with other representations, among formulas. It is a choice where to start and to explore new knowledge by doing application first and understanding later.

Introduction

The science and mathematics curriculum in lower secondary education contains subjects, preparing the students to be able to understand the science curricula in upper secondary education. Not only what is educated but also how is the way of working, exploring, researching etc. in this subject? Both are important to be educated. Lower secondary students learn the subject concepts and explore their affinity to the subject, in order to be able to decide to go on with this in upper secondary education, and develop the feeling of their subject abilities. The focus of the teaching should be: getting to know the subject, explore their abilities and show the way of thinking, way of working, to help students with their own decisions.

For that reason, the learning result for students in the science and mathematics classroom contains knowledge and abilities (skills).Science describes the world around, they learn how things works and why and that discovery process helps by computing, describing relations, doing predictions to be proved, etc.

In science the application is always in focus. Besides the usefulness of the theory in many subjects also some concepts, knowledge and definitions are basic to understand the description of phenomena. Most of the times knowledge is based on concepts. Regularly in math and science classrooms the lessons start with the education of concepts, but is that what motivates students the most? Is that where the learning process starts in nature? Or would we focus on phenomena and explore them first, to come to description of the knowledge behind, later?

It is both, not only the productive assignments (with explorations) are important, also the reproductive assignments for better understanding are useful for students to master the subject.

OBIT*-model

**OBIT contains learning activities called Onthouden=Remembering, Begrijpen=Understanding, Integreren=Integration, Toepassen=Application.*

In the Netherlands the different approaches as described above are formulated in the learning model called OBIT*-model. This model distinguishes two types of learning; called surface approach and deep approach (Smith and Colby, 2007).

Surface approach contains Remembering and Understanding. With these learning activities the knowledge is mostly build up in the short memory of the brains. This is called surface approach because after some days / weeks, this knowledge can vanish when it is not connected to some other experiences. Knowledge in the short term memory should be repeated continuously to get it into the long term memory for later use.

If learning takes place in use, with learning activities like Integration and Application the knowledge is stored in the long term memory. The knowledge is connected to other knowledge and is connected to memories like emotions and information got by other senses. For that reason it is not easily forgotten, that is why this type of knowledge building is called deep approach.

OBIT* in math and science education

The OBIT-model was introduced in 2007 (Ebbens) based on the research of Boekaerts and Simons (1995) and is used for observing teaching and learning. Also many times used to analyse tests and to build a reasonable test design (Spijkerboer et al., 2007).

We can recognise different learning activities also in math and science education.

Onthouden = Remembering

For doing Remembering activities it is not necessary to know what you are learning exactly, it is only a copy-paste activity. You learn by heart the definition of power, the law of Pythagoras and Archimedes, the formulas $F=m\cdot a$, $a^2 + b^2 = c^2$, etc. Remembering is based on reproduction of the knowledge you know, not necessarily understand.

Begrijpen = Understanding

The learning activity Understanding is shown when a student is able to explain in his/her own words what was learned during the lessons. He/she is able to copy the way of working, the way of solving problems the same ways as was educated by the teacher in class or with help of the explanation in the book. Understanding is a straight forward activity, and can be done by students who take their work serious, do their homework and are mentally present in class. The thinking steps are given, not to be made by the student themselves. Understanding questions are: compute the energy absorbed in the given situation, what impedance is needed to make the current cut down to 4,0 mA, explain two reasons why nuclear power is connected to a lot of security steps. All answers were done before, so it is a rehearsal.

Integreren = Integration

By the learning activity Integration the focus is on the relation between different parts of knowledge. Integration means you use your insight in the situation. You make use of your knowledge and connect it to the new information achieved. Compared to understanding, during integration activities there are more thinking steps, and the learner add something themselves, it is a productive activity, not only reproductive.

Especially this learning activity makes clear that students can or cannot continue with the subject in further education (i.e. upper secondary education).

Examples of Integration questions are: Explain why the profit of an electronic engine is lowered by higher temperatures, what has the result of solution of question a) to do with the solution of question c)?, explain why, For what reason a balloon filled with Helium, doesn't fall down to earth immediately?, etc.

Toepassen = Application

In the learning activity Application the thinking steps are not given anymore, like in Integration, but the student have to build a sometimes creative thinking process, to solve the problem; "What do I know?", "What can I use?", "How to connect the different know-how I have or I want to gain to make sure the correct solution of the problem?". In this learning activity the student really make use of his/her own skills, as well as (subject) knowledge. There is a design process going on, which is stimulated by a new situation, never faced before in context.

Research assignments are mostly seen in experiments in or outside classroom. Students have to find out certain phenomena and try to explain why it is happening. Because students can learn so much form each other especially application activities can very well be carried out in groups. Cooperative work gives space for different approaches, different tasks and different learning styles. That seems to be useful. Connection between real life and the subject science or mathematics has to be made. The teacher has to take care of the complexity of these kind of assignments, because easily the learning activity application can confuse the student. It is important that they approach the tasks open minded, and with self-confidence, without being prepared to make a lot of calculations, the focus is really to find out, apply their knowledge and explore.

Building the concept of relations

The discovery of relations is an important part of science and mathematics education. Relations are described by stories, tables, formulas and graphs. Why to start with the computing part every time? Does it make sense to start with the description in words, doing manipulations in the field and go from there to the more numeric side of the problem?

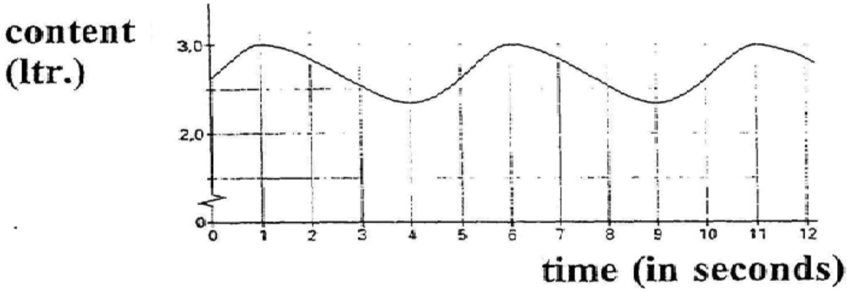
By using the OBIT-model, you see different approaches in building the concept of relations. Mostly math and science books start with a formula, to make a table and graph of it. The relation is imagined by the graph, several questions are asked, to read the graph properly. All this kind of activities, are mostly done by learning activities like Remembering and Understanding (surface approach), in order to come to deep approach later. After a lot of rehearsals.

Manipulation with formulas is also part of the knowledge to be educated. But do students discover that way, what is the meaning of a relation? There is another way to start: with Integration and Application.

In the example below, the questions 1 and 2 are expected. They give the student a chance to interpret the graph properly.

Example 1.

Il grafico mostra la quantità d'aria presente nei polmoni di Carl, mentre è sdraiato comodamente sul letto. A causa della respirazione la quantità d'aria cambia continuamente.

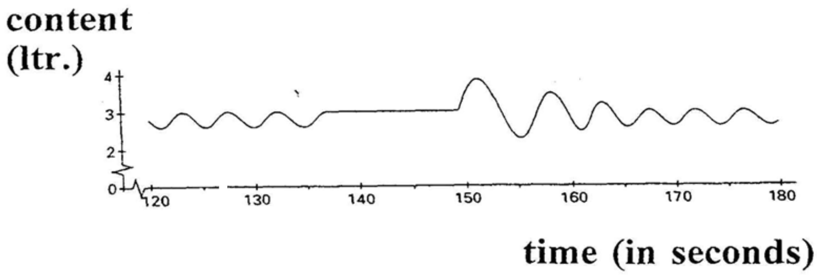


1. Quanto tempo impiega per inspirare?
2. Quanta aria fuoriesce in una espirazione?

Elisa ha corso per parecchi chilometri. La sua frequenza di respirazione adesso è 20. Dopo l'inspirazione ci sono 4.9 litri di aria nei suoi polmoni e dopo l'espirazione soltanto 2.8 litri.

3. Traccia il grafico di due respiri completi di Elisa

Il grafico mostra il respiro di Renzo in un minuto.



4. Descrivi a parole il respiro di Renzo.

The tasks 3 and 4 are more Integration based, the student have to put in some own thinking.

But to start with building the concept of relations, the following tasks like 5 – 10 can be carried out by developing the notion of the meaning of a relation described by a graph.

5. Prova a respirare come ha fatto Renzo.
6. Che cosa è inusuale, non è realistico?
7. Disegna un grafico del respiro da far riprodurre al tuo vicino.
8. Disegna un grafico che sia difficile da riprodurre.
9. Quale stato d'animo può essere collegato a questo grafico?
10. ….

It is a didactical choice to start with Integration and Application (deep approach) and to go to Understanding later. The need for doing calculations and computation is more obvious after students have learned the key of the concept and about the application of the concept because that motivates the learning.

Manipulations with formula's

A key activity by using the formula as a tool for describing relations is that formulas should be moved into another expression, like:

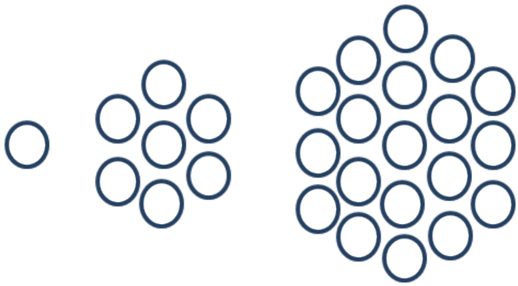
Make x free in the following expression: $$Y = \frac{4a - 45}{x^2 + 5}$$

For students in lower secondary this task is free of application and mostly experienced as hard.

Connected to the theory of OBIT, we can also see an alternative method to learn first what a formula describes, that a formula is the condensed way of thinking. Looking at the situation in different ways makes it possible to make different formulas connected to the same situation. Different formulas just describe the situation in the way you are experiencing it.

Example 2.

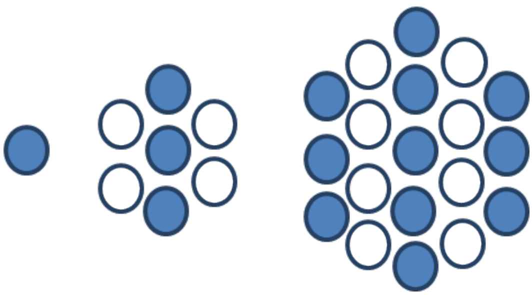
Design the formula for the number of chips for the figure with number n



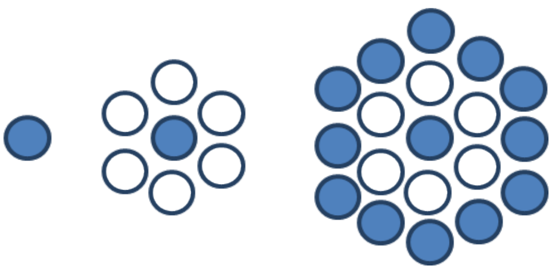
n = 1 *n = 2* *n=3*

If the assignment is given with the illustration above, the approach is open and the student can decide in what way this configuration is seen.

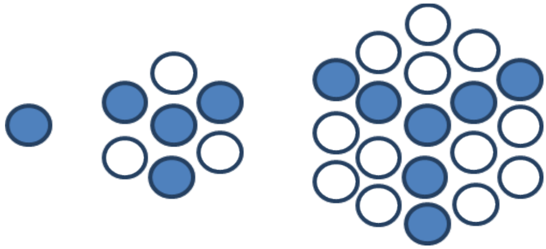
If we shade the chips differently, we promote a certain formula. In the following different ways of shading of the figure we get different formulas, which are supposed to be the same.



This configuration leads to N = ?



This configuration leads to N = ?



This configuration leads to $N = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$

Every part of the formula can be shown in the figure.

We see three 'squares' of 2 x 2, The side 2 is one digit less than the number of the figure: The number of chips in one square is $(n-1)^2$ .Three squares, so $3(n-1)^2$.

We see 3 'lines' between the 'squares'. If we count the central chip separately, the number of chips in a line is 2, also one digit less than the number of the figure: (n-1) chips in a line. Three lines, so 3(n-1).

And the central chip add: + 1

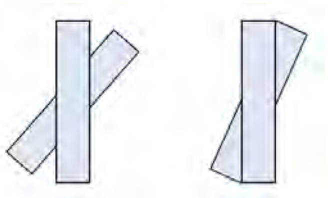
By doing this activity it became clear that formulas are describing a way of looking at the configuration, and formulas manipulation is nothing more than looking to the situation in another way. In terms of OBIT* we start with Application and Integration, to come to Understanding.

Level-raising questions

The didactical method described above give space for level raising questions, in order to deal with differences in the mathematics and science classroom. Not every student learns the same way and that is an invitation for teachers to vary the exploration of the concepts in focus. Variation in questioning and reasoning as well as in level of complexity. Not only the activities like Integration and Application are saved for level-raising questions. Also with activities like Understanding you may be able to design level-raising questions. Teachers know the place of the concept in the long-term curriculum, so they can find the key to the next step in the achievement of mathematics and science. Level-raising questions are important for the students to adept to their learning process.

Example 3.

2 Strisce di carta



Qual è la relazione tra l'angolo α e l'area A nel mezzo?

$A = f(\alpha)$

Easy questions can be:

- What is the figure in which they overlap?

- Why are you sure it is a rhomb?
- Is a square also a rhomb?
- What do I have to change in the situation to get another figure?
- Does the figure change when the stripes overlap nearly?

More questions, also level-raising:

- What definition you want to choose for the angle between the stripes?
- What is the meaning of zero degrees?
- Does the slope of the figure change, by increasing or decreasing the angle α?
- Can the graph of this situation be a parabola?
- What is the meaning of an asymptote?
- Does the area go to infinity?
- In which realistic situation the graph touches the y-axis?
- Is the slope convex, concave, linear?
- Is the graph continuous?
- What about differentiation? Also continuous?

....

A lot of mathematical content is included at different levels, we see:

- Poligoni: Parallelogramma, Rombo, Rettangolo, Quadrato
- Area, Angolo
- Trigonometria
- Esprimere relazioni: formula, grafico
- Grafico: simmetria, massimo, minimo, crescita, infinito, parabola
- Funzione: Derivata, continuità, derivata continua, …

In this approach we see the same as in the other examples; to start with the application and integration questions, the student is getting used to the situation before going to manipulate with formulas and doing calculations.

The OBIT-model helps teachers to design their lessons in a way students are more motivated, there is more deep learning going on and the need for doing reproductive and understanding activities is more obvious.

References

Biggs, J.& Collis, K. F.(1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy.* New York: Academic.

Boekaerts, M. & Simons, P. R. (1995). *Leren en instructie,* Gorcum b.v.

Ebbens, S. & Ettekoven, S. (2013). *Actief leren*. Bronnenboek, Noordhoff, Netherlands.

Hattie, J. A. C., Clinton, J. C. ,Thompson, M. & Schmitt-Davis, H..(1996). *Identifying expert teachers*. Technical report presented to the National Board for Professional Standards, Detroit, MI.

Hattie, J. A. C. & Jaeger, R.(1998). Assessment and classroom learning: A deductive approach. *Assessment in Education* 5 (1): 111–21.

Marton, F. & Säljö, R. (1976). On qualitative differences in learning: Outcome as a function of

VERO O FALSO?
UN'ATTIVITÀ INTERDISCIPLINARE
TRA ESEMPI E CONTROESEMPI

Monica Testera[1], Francesca Morselli[2]
[1]I.C. Carcare - Plesso di Altare
[2]Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione Università di Torino

Introduzione

Il progetto "Linguaggio e argomentazione nello studio della matematica dalla scuola dell'infanzia all'Università" è stato avviato nel 2008 in collaborazione tra il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova e l'Ufficio Scolastico Regionale della Liguria, nel quadro del Progetto Lauree Scientifiche (MIUR-Confindustria). L'Istituto Comprensivo di Carcare, in ragione delle esperienze già avviate a livello verticale all'interno del Dipartimento Scientifico, è stato scelto come Polo didattico di riferimento per il progetto, che da allora è stato inserito come nucleo fondante e unificante del Piano dell'Offerta Formativa dell'Istituto.

Il progetto, sviluppato in collaborazione tra ricercatori universitari e insegnanti, ha come scopo quello di costruire e proporre in classe percorsi e attività ad ampio respiro attorno al "nodo" dell'argomentazione in campo matematico (Morselli e Testera, 2010; Testera, Morselli & Sibilla, 2011). Tali percorsi sono ispirati a una didattica lunga, rivolti all'attività curricolare, dedicati a studenti di tutti i livelli scolari (dalla scuola dell'infanzia alla scuola Secondaria di II grado, in una prospettiva di continuità verticale), e finalizzati a favorire un ingresso graduale nella "cultura dei teoremi" (Boero, 2007). Inoltre alcune delle attività inserite nel progetto investono diversi ambiti in un'ottica di interdisciplinarietà, non solo derivante dal carattere trasversale del fine perseguito (quello di migliorare le competenze argomentative) ma anche dalle tematiche coinvolte.

Le attività del Progetto rispondono appieno ai traguardi delle competenze dei vari livelli e di differenti discipline contenuti nelle Indicazioni Nazionali per la Scuola dell'infanzia e il Primo ciclo di Istruzione (2012), oltre che alle finalità generali relative all'attenzione della centralità della persona e alla cura dell'ambiente di apprendimento.

L'attività "Vero o Falso?", oggetto del presente contributo, è una delle tappe di un percorso volto a favorire l'attività argomentativa nella Scuola Secondaria di I grado. Il valore aggiunto dell'azione didattica descritta in questo contributo è quello di essere stata svolta in "continuità" tra le classi di prima secondaria di I grado e quinta primaria dell'I.C. di Carcare. Ne segue che il lavoro di preparazione e realizzazione del percorso è stato un'occasione significativa di confronto tra i docenti dei due livelli e di discipline differenti (non solo in ambito matematico).

Il Progetto "Linguaggio e argomentazione nello studio della matematica dalla scuola dell'infanzia all'Università"

L'importanza dell'argomentazione come competenza centrale nelle attività matematiche e, più in generale, come obiettivo importante della formazione intellettuale del cittadino è riconosciuta nelle recenti "Indicazioni per il curricolo" (MIUR, 2012). Il ruolo cruciale dell'argomentazione e l'approccio alla dimostrazione in matematica sono d'altra parte un tema di ricerca quanto mai attuale in didattica della matematica (Boero *et al.,* 2010; Hanna & de Villiers, 2012).

Come già illustrato nell'introduzione, scopo del progetto è la messa a punto e sperimentazione di percorsi ad alto contenuto argomentativo. A tal fine, si sono costituiti piccoli gruppi di lavoro, caratterizzati dalla stretta collaborazione tra insegnanti e ricercatori, secondo le modalità del paradigma italiano di ricerca per l'innovazione (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998). In sintesi il progetto si è articolato nelle seguenti fasi:

1. condivisione dei presupposti teorici (tramite la stesura collaborativa di un documento di programma, contenente un inquadramento unitario per le attività didattiche sull'argomentazione da svolgersi ai vari livelli scolastici; si veda: http://pls.dima.unige.it/azione1/argomentazione/scuola_media/azione1_linguaggioeargomentazione_media.php);
2. progettazione di percorsi didattici attorno al nodo dell'argomentazione (tramite la raccolta, analisi e sintesi di esempi di attività didattiche già esistenti sull'argomentare e la successiva costruzione di nuove proposte);
3. implementazione in classe dei percorsi progettati;
4. analisi a posteriori, eventuale affinamento della progettazione.

Nel seguito, si illustrano nei dettagli i presupposti teorici e le scelte metodologiche alla base del progetto.

I presupposti teorici

Sono riferimenti di base per il progetto il modello di Toulmin per l'argomentazione (Toulmin, 1975) e la descrizione di comportamento razionale sviluppata da Habermas (2003) e adattata al caso della dimostrazione matematica (Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010).

Il modello di Toulmin descrive l'argomentazione come costituita da uno o più "segmenti argomentativi" concatenati; ogni segmento argomentativo è costituito da un dato ("Data"), da una conclusione ("Conclusion") e da una una "regola di garanzia" ("Warrant"), che permette di passare dal dato alla garanzia. Il warrant può essere sostenuto da una "conoscenza di supporto" ("Backing"), ad esempio un sistema di affermazioni appartenenti a una teoria accreditata.

Il modello di Toulmin può essere utilizzato dall'insegnante per analizzare le argomentazioni prodotte dagli studenti, mettendone in luce le caratteristiche e le eventuali mancanze. Per esempio, spesso le argomentazioni sono non complete, nel senso che la garanzia che permette di passare dal dato alla conclusione resta implicita, oppure il passaggio è realizzato con il supporto di una garanzia che in realtà non è adeguata.

Il modello di Toulmin consente di riflettere sui caratteri di trasversalità dell'argomentazione e al tempo stesso sulle specificità dell'argomentazione in matematica, i cui warrant hanno determinate caratteristiche.

Habermas individua tre componenti di un comportamento razionale: la componente epistemica (conosciamo qualcosa sullo scopo o sui mezzi di un'azione quando "sappiamo perché è vero"), la componente teleologica (si agisce razionalmente quando si agisce in base a uno scopo e si persegue lo scopo con mezzi intenzionalmente scelti e messi in opera), la componente comunicativa (si comunica razionalmente quando si ha lo scopo di far condividere all'interlocutore il proprio contenuto di comunicazione e si scelgono consapevolmente i mezzi per rendere efficace la comunicazione). Intendendo la dimostrazione come un processo, in cui l'individuo è impegnato nella risoluzione di un problema e al tempo stesso nella costruzione di un prodotto finale sottoposto a regole di comunicazione stabilite dalla comunità di riferimento (la classe, la comunità dei matematici, …), si può adattare la descrizione di Habermas e descrivere la dimostrazione come un comportamento razionale. Rientra nella razionalità epistemica la giustificazione delle affermazioni fatte, nella razionalità teleologica la scelta consapevole di mezzi ritenuti adeguati in modo giustificabile e condivisibile in relazione agli scopi, nella razionalità comunicativa la scelta di mezzi comunicativi ritenuti idonei per raggiungere l'interlocutore.

Anche il modello di Habermas può essere usato come strumento di analisi del comportamento degli studenti, per cogliere l'intreccio tra le tre dimensioni nelle attività dimostrative e per guidare gli interventi dell'insegnante.

Integrando i due modelli teorici di riferimento (Boero *et al.*, 2010), appare evidente l'importanza delle argomentazioni non solo sul contenuto matematico, ma anche sulle scelte operate nel momento in cui si argomenta. All'interno di opportune discussioni matematiche (Bartolini Bussi *et al.*, 1995), l'insegnante ha il compito fondamentale di aiutare gli studenti a giustificare, mediante garanzie, anche le scelte strategiche e comunicative che stanno dietro i loro passi di ragionamento. Solo attraverso l'esplicitazione di tali garanzie lo studente può divenire consapevole delle diverse dimensioni della razionalità del dimostrare.

Scelte pedagogiche e didattiche per lo sviluppo dell'argomentazione

La competenza argomentativa non si esaurisce in una serie di tecniche e nozioni, ma è costituita da un insieme di atteggiamenti, valori, risorse logico-linguistiche da costruire progressivamente. L'argomentare deve allora diventare una prestazione trasversale, che si inserisce in molte attività in ambiti disciplinari diversi.

Per argomentare occorre prima di tutto, in riferimento al modello di Toulmin, possedere conoscenze sul contenuto dell'argomentazione, ovvero avere a disposizione conoscenze che possano diventare garanzie e fondamenti. Inoltre occorre saper gestire sul terreno logico e linguistico i passi di ragionamento e la loro concatenazione (connettivi logici ecc.). Questo significa, per esempio, conoscere i connettivi logici che introducono la garanzia (perché, in quanto, ...) e quelli che introducono la conclusione (quindi, allora, …).

Occorre anche possedere un atteggiamento argomentativo, avere cioè colto che l'argomentazione è la via privilegiata per affermare e condividere la propria opinione con gli altri.

A livello di scelte didattiche, saper argomentare è una competenza che va costruita nel tempo e mediante un contratto didattico adeguato. In particolare, attività che favoriscono lo sviluppo delle competenze argomentative sono le attività di formulazione di ipotesi motivate, di confronto di ipotesi, di esplicitazione e confronto di strategie. Tali consegne presuppongono un contratto didattico in cui tutti i contributi siano valorizzati e un lavoro in classe in cui si presti attenzione alla precisione e pertinenza del linguaggio verbale. A livello di modalità di lavoro sono particolarmente indicati i lavori in piccolo gruppo e le discussioni, secondo il modello della discussione matematica (Bartolini Bussi *et al.*, 1995).

Il legame con le Indicazioni per il Curricolo

Le metodologie delle attività del progetto richiamano alcuni dei principi contenuti nella sezione dedicata all'Ambiente di Apprendimento e alla Centralità della persona delle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo di Istruzione (MIUR, 2012). Si veda ad esempio il seguente estratto:

"Favorire l'esplorazione e la scoperta, al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze. In questa prospettiva, la problematizzazione svolge una funzione insostituibile: sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d'indagine, a cercare soluzioni originali.

Incoraggiare l'apprendimento collaborativo. Imparare non è solo un processo individuale. La dimensione sociale dell'apprendimento svolge un ruolo significativo. In tal senso, molte sono le forme di interazione e collaborazione che possono essere introdotte (dall'aiuto reciproco all'apprendimento cooperativo, all'apprendimento tra pari), sia all'interno della classe, sia attraverso la formazione di gruppi di lavoro con alunni di classi e di età diverse.

Promuovere la consapevolezza del proprio modo di apprendere, al fine di "imparare ad apprendere". Riconoscere le difficoltà incontrate e le strategie adottate per superarle, prendere *atto degli errori commessi, ma anche comprendere le ragioni di un insuccesso, conoscere i propri punti di forza, sono tutte competenze necessarie a rendere l'alunno consapevole del proprio stile di apprendimento e capace di sviluppare autonomia nello studio.*

Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che si fa. Il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri.

Particolare cura è necessario dedicare alla formazione della classe come gruppo, alla promozione dei legami cooperativi fra i suoi componenti, alla gestione degli inevitabili conflitti indotti dalla socializzazione […]. La formazione di importanti legami di gruppo non contraddice la scelta di porre la persona al centro dell'azione educativa, ma è al contrario condizione indispensabile per lo sviluppo della personalità di ognuno."

Inoltre l'acquisizione di competenze argomentative è uno dei traguardi dello sviluppo di competenze sia al termine della scuola primaria (*"Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri"*), sia al termine della scuola secondaria di I grado ("*Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite. […] Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di un'argomentazione corretta*").

L'argomentazione è esplicitamente indicata anche nelle parti delle Indicazioni relative a discipline diverse dalla Matematica. Ad esempio, negli Obiettivi di Storia per la terza classe della scuola secondaria di primo grado si legge: *"Argomentare su conoscenze e concetti appresi usando il linguaggio specifico della disciplina"* e negli obiettivi di Italiano per la terza classe della scuola secondaria di primo grado si trova "*Argomentare la propria tesi su un tema affrontato nello studio e nel dialogo in classe con dati pertinenti e motivazioni valide*".

L'argomentazione nella scuola secondaria di primo grado

Per quanto riguarda percorsi ed esigenze specifiche della scuola secondaria di primo grado, all'interno del progetto si è scelto di progettare e realizzare attività che prevedono da un lato lo sviluppo coordinato di attività argomentative in ambiti disciplinari diversi, dall'altro, nelle ore di Matematica e Scienze, accanto all'argomentazione in matematica, lo sfruttamento di tutte le occasioni che possono permettere un esercizio dell'argomentazione su temi non strettamente matematico-scientifici.

In questo contributo concentriamo l'attenzione su un'attività interdisciplinare sul vero e falso (in Matematica e nelle altre discipline), con particolare riferimento al ruolo di esempi e controesempi (Watson & Mason, 2005). Dapprima si discutono le caratteristiche peculiari dell'attività, anche mediante l'analisi di episodi significativi, dopodiché si presentano episodi, relativi ad altre sperimentazioni realizzate all'interno del progetto, che suggeriscono che l'attività del Vero e falso sia divenuta esperienza di riferimento per gli studenti.

L'attività "Vero o falso?"

L'attività "Vero o Falso?" è inserita nel percorso "Pensa un numero" (Testera, Morselli & Sibilla, 2011), rivolto a studenti del primo anno della scuola secondaria di I grado. Il percorso da un lato propone situazioni aperte in aritmetica, nelle quali gli studenti si trovano a produrre argomentazioni , dall'altro introduce il linguaggio algebrico come strumento utile a produrre argomentazioni. La scheda relativa al Vero o falso propone un'attività interdisciplinare che ha funzione di ponte tra due diverse fasi del percorso (il gioco "Pensa un numero" e l'esplorazione e dimostrazione di proprietà in teoria elementare dei numeri).

La consegna

La scheda "Vero o falso?" è pensata come un primo approccio alla valutazione della verità delle affermazioni.

Sono proposte alcune affermazioni, tra le quali solo una di natura matematica, per le quali bisogna stabilire la verità o la falsità. Inoltre, per ogni affermazione, gli studenti devono rispondere a due domande. La prima (*Come hai fatto a stabilirlo?*) serve per sondare le modalità scelte dagli studenti per decidere in merito a ogni affermazione e permette di indirizzare la discussione sull'argomentazione. La seconda domanda (*Come potresti convincere qualcuno che non la pensa come te?*) fa cambiare la prospettiva della giustificazione da esibire, che deve essere tale da convincere qualcuno che la pensa diversamente. La domanda riprende quanto suggerito da Mason, Burton & Stacey (1982) sulle funzioni della dimostrazione (convinci te stesso, convinci un amico, convinci un nemico).

Affermazione	Vero o falso?	Pensi che i tuoi compagni abbiano risposto come te? Motiva	Come potresti convincere qualcuno che non la pensa come te?
Se il 17 del mese cade di venerdì, in quel giorno bisogna stare attenti			
Tutti i liguri sono tirchi			
Nella nostra classe c'è almeno una ragazza bionda			
La somma di due numeri dispari è un numero pari			
Una affermazione è vera se è vera per la maggioranza della gente			

Figura 1.La scheda

Il percorso in continuità: metodo di lavoro

Nell'a.s. 2011-12 l'attività "Vero o falso?" è stata realizzata in continuità tra la V primaria e la I secondaria di I grado. La preparazione della proposta di lavoro "Vero o Falso" si è avviata con un primo incontro tra i docenti dei due ordini di scuola (le docenti della V primaria con i colleghi di matematica della classe prima secondaria di I grado) per concordare la scheda e programmare le modalità di somministrazione. Dopo aver somministrato la scheda separatamente (ogni insegnante nel proprio livello scolare), i docenti si sono rivisti per confrontarsi sugli esiti e preparare una selezione delle risposte da proporre in discussione a gruppi misti formati da studenti di V primaria e I secondaria di I grado[1]. La discussione è stata condotta dai docenti dei due livelli e dall'osservatore esterno (FM).

1 Per consentire lo svolgimento di una discussione che fosse davvero produttiva si sono formati due gruppi misti e si sono realizzati due "turni" di discussione in classe.

Gli esiti

In sede di discussione di classe sono state mostrate le seguenti risposte, ritenute significative per stimolare il confronto.

Alla richiesta di stabilire la verità o la falsità dell' affermazione ***Se il 17 del mese cade di venerdì, quel giorno bisogna stare attenti***, le risposte più significative sono state:

A: Falso, se in quel giorno accade qualcosa è un caso

B: Falso, io non sono superstiziosa

C: Falso, sono nata venerdì 17 e non mi ha portato sfortuna

D: Falso, il giorno che porta sfortuna è venerdì 13

E: Falso, il venerdì 17 non cade ogni mese

F: Vero, venerdì 17 porta sfortuna e lo so perché l'ho visto alla TV

In classe le risposte sono state commentate e gli alunni hanno riflettuto sul significato di superstizione, su come questa varia da paese a paese e sulla validità dell'utilizzo delle esperienze personali per confutare la verità della affermazione . La risposta E, basata su un fraintendimento del significato della proposizione, ha dato l'opportunità di riflettere sull'importanza di una comprensione esatta del testo. L'evocare ciò che si è visto in TV come prova della validità delle affermazioni è frequente nelle argomentazioni degli alunni e stimola sempre interessanti e formative discussioni sulla validità delle fonti.

Alla domanda: "***Come hai fatto a stabilirlo?***" per motivare la risposta FALSO è stato portato un controesempio:

"Il mio decimo compleanno è stato festeggiato venerdì 17 dicembre. La festa è stata bellissima e non è successo niente a nessuno".

Come esempio di risposta alla richiesta "***Come potresti convincere qualcuno che non la pensa come te?***" è stata selezionata la seguente:

"Gli chiederei se un venerdì 17 gli fosse mai successo qualcosa. Se risponde di sì gli direi che è stata solo una coincidenza. Se risponde di no dovrebbe capirlo da solo…"

Già in queste discussioni affiora il significato di controesempio che viene ulteriormente approfondito nella discussione delle risposte relative al valore di verità dell'affermazione "***Tutti i liguri sono tirchi***". Questo modo di dire, molto conosciuto dagli alunni e calato nella realtà territoriale, si è dimostrato molto utile per introdurre un tipo di argomentazione necessaria nelle attività matematiche più impegnative: trovare controesempi a una affermazione per dimostrarne la falsità . Di seguito alcune risposte:

A: FALSO: non tutte le persone di un popolo possono essere tirchie.

B: FALSO: dipende da persona a persona.

C: FALSO: conosco molte persone, compresa la mia famiglia, che non sono tirchie.

D: VERO: quando vado a comprare ci sono dei prezzi da svenire, invece quando compro in altre *regioni a volte costano meno.*

La condivisione e la discussione delle risposte ha dato la possibilità di far riflettere gli studenti sul fatto che non sono sufficienti alcuni esempi per dimostrare la verità di una affermazione di tipo universale, mentre è sufficiente un solo controesempio per dimostrarne la falsità. La risposta D evidenzia una non conoscenza dei termini che spesso sta alla base dell'incomprensione delle affermazioni.

Per quanto riguarda la domand*a "**Come hai fatto a stabilirlo?**"*, è stata selezionata la seguente risposta:

FALSO. È facile: dipende da persona a persona, un ligure può essere tirchio, ma a un altro potrebbe piacere spendere

Per quanto riguarda la domanda *"**Come potresti convincere qualcuno che non la pensa come te?**"*, è stato proposto un controesempio:

Se ad esempio tu sei tirchio, mentre tuo fratello no e abitate entrambi in Liguria, vuol dire che i Liguri non sono tutti tirchi. I tirchi ci sono in Liguria, ma come in tutto il resto del mondo, quindi è falso dirlo.

Da notare che per convincere qualcuno della falsità dell'affermazione è sufficiente portare il controesempio del fratello non tirchio, mentre la seconda parte (i tirchi ci sono in Liguria, ma come in tutto il resto del mondo) non è pertinente, perché si riferisce a un'altra possibile affermazione del tipo Tutti i tirchi sono liguri, e non all'affermazione proposta nella scheda (Tutti i liguri sono tirchi).

La discussione sui liguri diventa esperienza di riferimento nella discussione sull'affermazione della scheda : "***La somma di due numeri dispari è un numero pari***". Tutti hanno risposto vero; qui di seguito la selezione di risposte alla richiesta *"**Come hai fatto a stabilirlo?**":*

A: VERO: sono riuscita a farlo perché ad esempio 1 è un numero dispari più un altro 1 fanno 2 che è un numero pari

B: VERO: Ho provato a fare ad esempio 3+3 che è un numero dispari, il risultato è 6, cioè un numero pari

C: VERO: Me l'ha insegnato il mio maestro

Da notare che alla prova empirica (provare che cosa succede per un esempio numerico) si affiancano spiegazioni di altro tipo, legate all'autorità dell'insegnante, visto come depositario delle "verità" matematiche, e una visione passiva dell'apprendimento (io so quello che mi ha detto il io maestro). È estremamente importante portare in discussione risposte di questo tipo, per scardinare un'immagine "autoritaria" e passiva della matematica e sostituirla gradualmente con una visione in cui lo studente è protagonista del processo di apprendimento.

Di fronte alla domanda *"**Come potresti convincere qualcuno che non la pensa come te?**"* gli alunni hanno elencato le seguenti considerazioni:

D: Basta fargli provare a fare un'addizione con due numeri dispari e il numero che gli uscirà sarà pari.

E: Gli porto un quaderno di matematica.

F: Lo manderei da una maestra di matematica e glielo farei dire. 2) Glielo farei fare.

Anche in questo caso si segnalano prove di tipo empirico (Balacheff, 1982) o riferimenti ad autorità esterne (la maestra!).

Gli ultimi esempi che si riportano dimostrano quanto le discussioni sia in ambito matematico che extramatematico sulla verità o falsità delle affermazioni conducano a riflessioni significative sulle caratteristiche che una giustificazione deve possedere per essere ritenuta accettabile.

In contrasto con le risposte relative all'autorità dell'insegnante, le risposte all'ultima affermazione proposta nella scheda (*“**Un’affermazione è vera se è vera per la maggioranza della gente**”*) mostrano che secondo gli studenti la verità delle affermazioni risulta indipendente sia dal numero di persone che le sostengono che dalle fonti. Da notare che l’affermazione non fa riferimento alla realtà scolastica, tanto meno alla matematica, il che spiega forse le risposte più “aperte” e l’assenza di riferimenti ad autorità esterne.

A: FALSO, perché se una risposta è vera, non conta niente la maggioranza della gente.

B: FALSO, perché anche se la maggioranza dice che una cosa è vera non vuol dire che lo sia. Infatti bisogna avere delle prove concrete e testimonianze.

Relativamente alla domanda “***Come potresti convincere qualcuno che non la pensa come te?***”, la risposta D è particolarmente interessante: lo studente che l’ha prodotta è stato in grado di citare un fatto storico e utilizzarlo come controesempio.

C: Per convincerlo gli potrei dire che se una risposta è giusta non servono i voti della gente perché quelli servono solo per le votazioni

D: Facendogli vedere che nel medioevo pensavano che la Terra fosse piatta. Si è rivelato che la Terra invece è tonda.

L’attività del “Vero o falso” come esperienza di riferimento

Gli estratti appena proposti si riferiscono alla sperimentazione realizzata nell’a.s. 2011-12. L’attività, all’interno del percorso “Pensa un numero”, è svolta con regolarità nelle classi aderenti al progetto già dall’a.s. 2008-09. In questo paragrafo si riportano alcuni episodi, raccolti in anni diversi e relativi ad altre attività dimostrative, in cui riemergono alcuni temi affrontati nell’esperienza del “Vero o falso?”.

Primo episodio

Il percorso “Pensa un numero” contiene attività di prova o confutazione di affermazioni in teoria elementare dei numeri. In tali attività è cruciale comprendere in quali casi è sufficiente portare un controesempio e in quali è necessaria una spiegazione di carattere generale. La discussione sulla frase “***Tutti i liguri sono tirchi***” è risultata talmente significativa da divenire esperienza di riferimento, come mostra il seguente episodio.

La consegna rivolta alla classe è la seguente: “***Se un numero intero termina per 7 e non è divisibile per 3 allora è un numero primo***”. Gli studenti esplorano la situazione problematica, alla ricerca di una spiegazione generale o di un controesempio. Le prime esplorazioni fanno propendere per la verità dell’affermazione (si trova che l’affermazione è vera per numeri piccoli, come 7 e 17, e anche per numeri più “grandi” come 107), però uno studente trova il controesempio (77), numero che termina per 7, non è divisibile per 3 ma non è un numero primo.

Si riporta un estratto dalla discussione in cui l’insegnante stimola la riflessione sul ragionamento effettuato:

Prof: *Che cosa avevate trovato per 107?*

C: *Che è un numero primo.*

Prof: *Avevate quindi trovato che 107 termina per 7, non è divisibile per 3 ed è un numero primo. Era per quello che avevate detto: allora la proprietà è vera? Erano esempi di questo tipo che vi avevano fatto pensare che la proprietà fosse vera. Ora, non so se è quello che vi rendeva perplessi prima, però se io faccio vedere il 107 mi verrebbe da concludere che l’affermazione è vera, però poi c’è il 77 e allora dico: chiuso tutto, l’affermazione è falsa. La capite la differenza?*

D: *È come l’esercizio che abbiamo fatto l’altra volta, che tutti i liguri sono tirchi. Basta uno che non è tirchio e la regola non è vera.*

Il breve estratto mostra che il meccanismo del controesempio è stato compreso in contesto non matematico (i liguri) e diventa esperienza di riferimento per l'argomentazione in campo aritmetico. Successivamente gli studenti trovano altri controesempi per confutare l'affermazione ma l'insegnante li fa riflettere sul fatto che ne basta solamente uno per invalidare l'affermazione.

Secondo episodio

Gli studenti sono alle prese con l'affermazione "***I numeri primi, escluso il 2, sono numeri dispari***". Le spiegazioni individuali prodotte sono portate in discussione e confrontate. Lo studente Zeta illustra ai compagni la sua spiegazione:

Zeta: *Ogni numero pari maggiore di 2 è multiplo di 2 e quindi ha almeno tre divisori.*

Prof: *Dopo la spiegazione fornita da ZETA abbiamo ancora voglia di andare a prendere dei numeri pari e andare a controllare se sono nella tabella dei numeri primi?*

Alunni: *No. Lo sappiamo già*

Prof: *Perché lo sappiamo? Perché li abbiamo controllati o perché ci soddisfa quello che ha detto ZETA?*

Alunni: *Ci soddisfa*

Prof: *Ci convince?*

Alunni: *Sì, perché tutti i numeri pari sono divisibili per 2*

Emme: *Io, prof, sarei convinto se lo dicesse uno scienziato, però se…*

Alunni: *Se lo dice ZETA …*

Alunni: *Quindi se lo scienziato dice a EMME che i bambini nascono con le cicogne, lui ci crede!*

Prof: *Quindi tu qualsiasi cosa dica uno scienziato, ci credi, qualsiasi cosa dica ZETA, no! Io deduco quello!*

Zeta: *Quindi EMME, se io ti dico che 2+2 fa 4, tu non ci credi?*

Allo studente EMME, che nutre dei dubbi sulla giustificazione perché formulata dal compagno ZETA e dichiara che la stessa affermazione sarebbe attendibile se proposta da uno scienziato, i compagni replicano con considerazioni importanti che danno la possibilità di riflettere sulla autorevolezza delle fonti, sui metodi attraverso i quali le ricerche vengono validate, sugli strumenti oggettivi e razionali che il metodo matematico offre per dimostrare la validità delle affermazioni, sull'evoluzione del pensiero scientifico.

Questa discussione fa da eco alla discussione sulla frase "***Un'affermazione è vera se è vera per la maggioranza della gente***", dal momento che è in gioco la questione cruciale delle fonti di autorità per le spiegazioni prodotte. È essenziale che si costruisca una "cultura dei teoremi" in cui una spiegazione è accettata o refutata sulla base degli argomenti che porta (piano epistemico) e del modo in cui è comunicata (piano comunicativo), ma non sulla base dell'autorità di chi la propone.

Le discussioni ricche e coinvolgenti sui temi descritti sono uno strumento prezioso per l'insegnante nella ricerca dello sviluppo del senso critico, obiettivo essenziale per la formazione del cittadino consapevole.

Considerazioni finali

L'attività descritta presenta una rilevante importanza su due livelli: uno per il modo con la quale è stata preparata e concretizzata, l'altro per le potenzialità delle consegne.

Le modalità seguite in fase di progettazione e realizzazione dell'attività svolta tra la classe quinta primaria e prima secondaria di I grado si inseriscono in un modo di interpretare la continuità ormai radicata da anni nell'Istituto Comprensivo di Carcare: la continuità è in primis da ricercare nella comunità di intenti dei docenti, che si può realizzare solo avendo occasioni di "lavoro" a stretto contatto su prassi didattiche. Le "frequentazioni" tra alunni dei diversi livelli assumono significatività se svolte su esperienze comuni e sul loro confronto.

Le consegne dell'attività "Vero o falso?", sperimentate da almeno 5 anni, offrono sempre occasioni di argomentazioni ricche e stimolanti sia a livello di contenuto che a livello metamatematico. Le differenti tipologie di affermazioni, che spaziano dagli ambiti matematici a quelli extramatematici, danno l'opportunità di riflettere sulle analogie e le differenze tra le argomentazioni in matematica e quelle nelle altre discipline, dando anche l'opportunità di collegamenti interdisciplinari in ambito umanistico (superstizione, opinione della maggioranza della gente ecc.). Le analisi delle risposte hanno mostrato come i riferimenti extramatematici abbiano aiutato i ragazzi ad assimilare il concetto di controesempio, fondamentale in campo matematico. Inoltre, il soffermarsi a confrontare la propria convinzione con quella altrui, il cimentarsi sui differenti livelli di motivazione per convincere qualcun altro delle proprie convinzioni alimenta quell'abitudine all'ascolto e all'educazione alle corrette relazioni, elementi fondamentali per la crescita dell'adolescente, dando un valore etico e sociale all'attività. Infine, ma non ultimo in quanto obiettivo primario del progetto, la ricerca di oggettività e validità universale delle prove dà riconoscimento alla potenza dello strumento della dimostrazione matematica.

Bibliografia

Arzarello, F. & Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian Trends of Research in Mathematics Education: A National Case Study in the International Perspective. In J. Kilpatrick & A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, (pp. 243-262), Kluwer A. P., Dordrecht.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en Mathématiques au collège. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 3(3), 261-304.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola*, rapporto tecnico n. 10, Centro di Documentazione Educativa, Modena.

Boero, P. (2007). *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice.*

Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 179-209. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Hanna, G. & de Villiers, M. (Eds.) (2012). *Proof and proving in mathematics education*. Springer, ISBN 978-94-007-2128-9.

Mason, J, Burton, L. & Stacey, K. (1982) *Thinking mathematically*, Addison-Wesley.

Morselli, F. & Boero, P. (2009). Habermas' construct of rational behaviour as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. In Lin, Hsieh, Hanna & de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education*. The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, vol. 2, pp. 100-105.

Morselli, F. & Testera, M. (2010). L'argomentazione in matematica. *Scuola italiana moderna, n. 2,* 35-36.

Testera, M., Morselli, F. & Sibilla A. (2011). "Pensa un numero …". Attività argomentative nella scuola secondaria di primo grado. In O. Robutti & M. Mosca (a cura di), *Il laboratorio in matematica e in fisica. Atti del IV Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2009*, 213-225.

Toulmin, S. (1975). *Gli Usi dell'Argomentazione.* Torino: Rosenberg & Sellier.

Watson, A. & Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity. Learners generating examples. London: Lawrence Erlbaum Associates..

STRADE DIVERSE PER L'APPROCCIO ALL'ENERGIA NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE DELLA NUOVA RIFORMA

Antonella Cuppari[1], Manuela Boltri[2], Giulia Cantamessa[2], Simona Falabino[1], Tommaso Marino[3], Daniela Marocchi[4], Giuseppina Rinaudo[4], Paolo Tamagno[5], Laura Vandoni [6]

[1]Liceo Scientifico Gobetti di Torino,[2]Liceo Scientifico Bobbio di Carignano,
[3]Liceo Scientifico Curie di Collegno, [4]Dipartimento di Fisica dell'Università di Torino,
[5]Liceo Scientifico Curie di Pinerolo, [6]Liceo Porporato di Pinerolo

Premessa

L'avvio della riforma della Scuola Secondaria di II grado ha comportato, per quel che riguarda l'insegnamento della fisica, modifiche importanti e in media positive al curriculum. Ciò che manca tuttavia nelle indicazioni nazionali, nell'affrontare i diversi temi di fisica ai vari livelli, è una chiara sottolineatura del ruolo essenziale del concetto di energia. Questa carenza si riflette poi nell'impostazione di molti libri di testo, nei quali il tema dell'energia viene spesso affrontato in modo confuso e marginale rispetto ad altri temi, con il risultato che non emergono le proprietà fondamentali dell'energia, che sono unificanti rispetto ai diversi fenomeni (meccanici, termici, elettromagnetici, ottici, ecc.).

Questo articolo presenta alcuni percorsi sviluppati e in parte sperimentati per introdurre l'energia fin dall'inizio della descrizione dei diversi fenomeni, mostrando come bastano piccole modifiche ai percorsi tradizionali per riportare l'energia al ruolo che le compete come descrittore essenziale, che allo stesso tempo unifica aspetti tradizionalmente visti come separati e disconnessi. Dopo un breve inquadramento in cui si esamina criticamente il ruolo che l'energia dovrebbe ricoprire, vengono discusse le modalità generali che sono alla base delle singole proposte e vengono presentati in dettaglio quattro percorsi riguardanti fenomeni meccanici, termici, elettromagnetici e luminosi. Per ciascun percorso, dopo un esame delle indicazioni nazionali, vengono discussi alcuni aspetti cruciali, necessari per una introduzione precoce del concetto di energia, quali le possibili attività di laboratorio, i materiali e le difficoltà che tipicamente si incontrano, nella speranza che, oltre al confronto tra i diversi modi di affrontare il tema dell'energia, si riesca ad allargare la discussione ai colleghi di altre scuole secondarie e coinvolgere docenti e ricercatori di altre discipline la cui didattica sul tema dell'energia è collegata direttamente o indirettamente a quella della fisica.

L'energia come concetto unificante

Siamo abituati a caratterizzare i diversi fenomeni fisici (meccanici, elettrici, termici, ecc.) attraverso i tipi di *interazione* che, durante il "fenomeno", avvengono all'interno del corpo o del sistema, oppure fra corpi o sistemi diversi. Ad esempio, tradizionalmente, l'interazione è descritta

- nei fenomeni "meccanici" ricorrendo alle forze che agiscono sui corpi (leggi della dinamica e interazione gravitazionale),
- nei fenomeni "termici" ricorrendo alle differenze di temperatura fra i corpi o fra parti diverse dello stesso corpo (equilibrio termico e legge della calorimetria),
- nei fenomeni "elettrici" attraverso la forza di attrazione o repulsione elettrostatica e le leggi che governano la corrente elettrica nei circuiti,

- nei fenomeni “luminosi” partendo dalle leggi di propagazione della luce ed esaminando poi come la luce interagisce con la materia (ottica geometrica e ondulatoria), ecc.

In tutti questi fenomeni si arriva prima o poi a scoprire che la descrizione non è completa se non si introduce *l’energia*, che è una grandezza fondamentale per la descrizione del singolo tipo di fenomeno, ma addirittura essenziale per la descrizione di tutti quei fenomeni (che sono praticamente la totalità dei fenomeni reali) in cui l’interazione non è puramente meccanica, termica, elettrica, ecc., ma ha aspetti comuni alle diverse tipologie.

L’energia è pertanto una *grandezza unificante* dei diversi tipi di interazione, anche se si arriva a definirla e calcolarla ricorrendo a dei “descrittori” tipici delle singole interazioni (forza, temperatura, corrente elettrica, ecc.). Purtroppo è proprio il fatto di usare descrittori tipici delle singole interazioni che fa sì che, alla fine, tali descrittori appaiano più fondamentali dell’energia e, soprattutto, non vengano evidenziate in modo sufficiente le proprietà unificanti dell’energia, comuni a tutti i fenomeni. Esse sono:

- l’energia è una *variabile “di stato”*, dipende cioè dallo stato del corpo o del sistema in un certo istante, e non dalla sua storia precedente (ad esempio l’energia cinetica dipende dalla massa e dal quadrato della velocità, quella potenziale gravitazionale dipende dalla massa e dalla posizione, l’energia interna termica dipende da massa, temperatura e calore specifico, ecc.),
- l’energia ha forme diverse e si può *trasformare* da una forma all’altra grazie a diversi tipi di interazione (ad esempio da “potenziale gravitazionale” a “cinetica” per l’azione della forza peso),
- l’energia si può *trasferire* da un corpo all’altro grazie a diversi tipi di interazione (ad esempio si trasferisce energia cinetica in una interazione meccanica come un urto),
- nei trasferimenti e trasformazioni globalmente *si conserva*,
- tuttavia non tutte le interazioni portano a risultati egualmente “utili”, perché c’è sempre un *degrado* dell’energia (tipicamente l’energia si trasforma in energia termica di bassa temperatura, difficilmente riutilizzabile per il secondo principio della termodinamica).

Ne segue chiaramente che l’energia *è un descrittore essenziale delle interazioni* in cui avvengono trasferimenti, trasformazioni, immagazzinamenti, ecc. Da notare che, a livello globale, intuitivo e qualitativo, queste proprietà sono ben presenti anche a un ragazzino piccolo e in genere a chiunque colga il significato di energia in base all’uso che se ne fa nel linguaggio quotidiano: il problema è di arrivare alla *definizione operativa* dell’energia nei diversi fenomeni, alla sua *misura* e *calcolo quantitativo*. Nella didattica tradizionale, invece, l’approccio è spesso invertito: ci si preoccupa con dettaglio eccessivo di tutti i passaggi che permettono di giungere alla definizione e misura rigorosa dell’energia, con il risultato che, alla fine, si perde completamente di vista il quadro globale e si fa quindi fatica a riconoscere, in quella grandezza che si è così faticosamente riusciti a definire e misurare, le proprietà dell’energia che nella vita quotidiana sono percepite chiaramente e che sono, in definitiva, le più importanti. C’è, ad esempio, un libro di testo, anche pregevole sotto altri aspetti, in cui occorre arrivare a pagina 156 del volume sulla meccanica per incontrare per la prima volta la parola “energia”!

Ciò è in parte conseguenza del fatto che nelle *indicazioni nazionali* la strada verso l’energia non è indicata in modo esplicito e chiaro, anche se le indicazioni non escludono che si possano seguire strade indirette. Infatti, anche se negli obiettivi di apprendimento dei singoli temi spesso non è indicato esplicitamente come e con quale peso parlare di energia, nella premessa generale al primo biennio si raccomanda di abituare “*lo studente a semplificare e modellizzare situazioni reali, a risolvere problemi e ad avere consapevolezza critica del proprio operato*”: si lasciano quindi aperte strade per giungere, già nel primo biennio, a una modellizzazione dei fenomeni che includa come parte essenziale l’aspetto energetico, perché non si vede come modellizzare un qualunque fenomeno “reale” senza capirne l’aspetto energetico!

Nel seguito, vedremo in dettaglio, per i singoli tipi di fenomeno e nel rispetto dello spirito se non della lettera delle indicazioni, come costruire un percorso che dia all'energia, fin dal biennio, il ruolo che le spetta nella descrizione e interpretazione dei fenomeni. Per motivi di spazio, descriveremo solo le linee del percorso, mentre per gli esempi dettagliati rimandiamo alla pagina della piattaforma DIFIMA dedicata alla Fisica nella Scuola Secondaria (DIFIMA Fisica, 2013)

La strada "meccanica" all'energia

Discutiamo con maggiore ampiezza i fenomeni meccanici perché sono quelli tradizionalmente trattati in modo più ampio e che pongono in qualche modo la base dell'approccio alla disciplina, anche per il loro stretto utilizzo della formalizzazione matematica.

Per la meccanica, l'indicazione nel primo biennio è: "*……i moti saranno affrontati innanzitutto dal punto di vista cinematico giungendo alla dinamica con una prima esposizione delle leggi di Newton, con particolare attenzione alla seconda legge. Dall'analisi dei fenomeni meccanici lo studente comincerà a familiarizzare con i concetti di lavoro ed energia, per arrivare a una prima trattazione della legge di conservazione dell'energia meccanica totale.*" Non è quindi indicato esplicitamente come si giunge al concetto di energia, anche se la traccia sembra essere quella tradizionale: inizio con la cinematica, una trattazione semplificata della seconda legge della dinamica, concetto di lavoro e infine concetto di energia. Essendo posto alla fine del percorso, il concetto di energia finisce col diventare la "ciliegina sulla torta", che viene messa se rimane tempo e se gli studenti riescono ad approdarvi dopo aver superato gli scogli della trattazione, sia pure semplificata, della seconda legge della dinamica, mentre dovrebbe essere l'obiettivo che ci si pone fin dall'inizio dello studio dei fenomeni meccanici: se non miriamo al concetto di energia, a che cosa serve studiare la dinamica? Solo a descrivere la traiettoria di un proiettile o dei pianeti come ai tempi di Newton?

Anche nelle raccomandazioni per il secondo biennio l'energia non ha un ruolo centrale, compare una frase generica riguardante "*…..l'approfondimento del principio di conservazione dell'energia meccanica, applicato anche al moto dei fluidi e l'affronto degli altri principi di conservazione…che permetteranno allo studente di rileggere i fenomeni meccanici mediante grandezze diverse e di estenderne lo studio ai sistemi di corpi.*" Sarebbe invece importante cominciare a trattare l'energia non come una delle tante grandezze utili, ma come la *grandezza fondamentale* per la descrizione dei fenomeni, anche in vista dell'estensione ai temi di fisica moderna proposti nel quinto anno.

Nelle indicazioni per il quinto anno si dice infatti "*…l'aver affrontato l'equivalenza massa-energia gli permetterà di sviluppare un'interpretazione energetica dei fenomeni nucleari… la discussione delle teorie e dei risultati sperimentali che evidenziano la presenza di livelli energetici diversi nell'atomo..* ". L'aspetto energetico è essenziale per la comprensione dei fenomeni relativistici e quantistici e non si può aspettare al quinto anno per iniziare a parlarne! Tutta l'attenzione all'aspetto energetico dei fenomeni meccanici che suggeriamo fin dal primo biennio può quindi essere vista anche come propedeutica all'introduzione al quinto anno dei fenomeni relativistici e quantistici.

Le difficoltà legate all'approccio tradizionale all'energia meccanica

Come già discusso sopra, il problema nasce principalmente dal fatto che l'approccio tradizionale alla dinamica, che si trova nella maggioranza dei libri di testo, segue un'impostazione newtoniana, nel senso che tutta l'attenzione è posta su forza, massa e accelerazione, ignorando l'energia.

Come ad esempio dichiara esplicitamente il Romeni all'inizio del primo capitolo [Romeni, 2012], lo scopo della dinamica viene limitato essenzialmente alle applicazioni della seconda legge: "il problema fondamentale della dinamica può essere così schematizzato: nota la massa di un corpo e le forze che agiscono su di esso, determinare l'accelerazione del corpo e le caratteristiche del suo moto….", come se l'aspetto energetico non fosse essenziale per la completezza della descrizione del moto! Ciò significa che ci si ferma all'orizzonte della fisica del Seicento (i "principia" di Newton sono del 1687) quando effettivamente ciò che interessava era principalmente descrivere l'orbita dei pianeti o la traiettoria dei proiettili! Poiché non è indispensabile per risolvere il problema del calcolo delle traiettorie (anche se è utile, come riconosce lo stesso Romeni), il concetto di energia è quindi assente nella dinamica newtoniana.

Storicamente, si comincia a parlare di energia nel problema degli urti fra corpi rigidi, nei quali si riconosce che, oltre alla quantità di moto, si conserva anche un'altra grandezza, che è appunto l'energia, tuttavia l'energia rimane a livello di interesse "accademico" non essendo una grandezza rilevante per le applicazioni. Lo diventa, come è ben noto, con lo sviluppo delle "macchine" a partire dal Settecento, quando si capisce che è rilevante conoscere il "lavoro" fatto dalla macchina, cioè la variazione di energia "meccanica", e valutarne la potenza[1]. Storicamente quindi il concetto di lavoro è nato prima di quello di energia e questo spiega perché anche oggi il concetto di energia meccanica è spesso subordinato a quello di lavoro, come appare evidente dall'analisi della maggioranza dei libri di testo. Seguendo l'approccio storico, cioè introducendo l'energia attraverso il lavoro, si finisce quasi sempre di tralasciare la riflessione sulle proprietà caratteristiche dell'energia che sono essenziali perché permettono di riconoscere l'energia come *concetto unificante* dato di tutti i tipi di interazione (termica, elettrica, ecc.).

In primis c'è il fatto che l'energia è una *variabile di stato*, che dipende cioè dallo stato del sistema e non dal modo con cui questo stato è stato raggiunto, mentre il lavoro NON è una variabile di stato, perché, essendo l'integrale del prodotto di forza per spostamento, dipende sia dallo stato iniziale che da quello finale: ad esempio l'energia cinetica di un corpo di massa m che viaggia a velocità v è $\frac{1}{2}mv^2$, indipendentemente dal fatto che abbia raggiunto questa velocità perché ha frenato a partire da una velocità più alta utilizzando una forza che ha fatto un lavoro negativo o, viceversa, perché ha accelerato a partire da una velocità inferiore, mentre il lavoro fatto nei due casi può essere molto diverso! Così pure l'energia potenziale è funzione della posizione, (ad esempio nel campo della gravità vale mgh, dove g è l'accelerazione di gravità e h è l'altezza rispetto a un livello zero di riferimento) indipendentemente da come il corpo è arrivato al livello h: potrebbe esserci arrivato anche grazie al lavoro di forze non conservative!

Il fatto che l'energia sia una variabile di stato è essenziale per discutere tre proprietà unificanti dell'energia: *che si può trasformare*, che *può essere trasferita* e che, nei passaggi e nelle trasformazioni, globalmente *si conserva*. Nessuna di queste proprietà sarebbe valida se, nei passaggi e nelle trasformazioni di energia si dovesse conoscere "come" il corpo è giunto ad avere tale energia!

Oltre a non mettere in evidenza la differenza concettuale fra energia e lavoro (l'energia è una variabile di stato mentre il lavoro non lo è e serve solo a calcolare le variazioni di energia) spesso nel libro di testo non si dà neppure la motivazione per definire il "lavoro", cioè il fatto che, se le forze sono conservative, il lavoro non dipende da come esso viene ottenuto (se con un piccolo spostamento e una grande forza o viceversa, vedi "macchine semplici"). Se poi le forze non sono conservative, il lavoro dipende dallo spostamento, il che dovrebbe aprire la strada alla discussione che ci sono in gioco altri tipi di interazione in cui l'energia è ancora una grandezza fondamentale come descrittore, mentre il lavoro non lo è.

Infine, la crisi del concetto di energia meccanica introdotta attraverso il lavoro è evidentissima quando diventa difficile parlare di lavoro, perché viene a cadere il concetto di forza come concetto primario, come avviene nella relatività e nella meccanica quantistica: questo è un altro

1 In realtà il concetto di lavoro è antichissimo: lo si ritrova già nel "Libro dei morti" dell'antico Egitto, in cui si parla di rimunerare il lavoro di un operaio che trasporta i massi per costruire la piramide sulla base del prodotto del numero di massi trasportati per la lunghezza del percorso (ringraziamo per l'interessante segnalazione il prof. Paolo Mascheretti dell'Università di Pavia).

motivo per porre cura, fin dall'inizio, a non legare troppo strettamente l'energia ai concetti di forza e lavoro in modo da non doverne ripensare completamente il significato quando si giunge alla "fisica moderna".

Che cosa fare per introdurre correttamente l'energia per la via meccanica

In base alle considerazioni precedenti, gli aspetti da curare, pur senza discostarsi del tutto dall'approccio tradizionale qual è in generale quello del libro di testo, sono quindi:

- nella presentazione di qualunque problema meccanico, parlare di energia fin dall'inizio, facendo riferimento alla conoscenza intuitiva e "globale" che l'allievo ha del ruolo dell'energia nel fenomeno, e quindi non limitarsi alle leggi della dinamica newtoniana, come se queste tre leggi fossero sufficienti per descrivere completamente il moto, ma richiamare l'attenzione sul fatto che ci sono altri aspetti che vanno tenuti in conto per descrivere il fenomeno;
- non subordinare l'energia al lavoro ma fare l'inverso, mettendo in evidenza la differenza fra i concetti di lavoro e di energia; in particolare insistere sulle proprietà che sono tipiche dell'energia mentre non lo sono del lavoro: l'energia meccanica è una variabile di stato, ha forme diverse (può essere potenziale o cinetica), si trasforma da una forma all'altra, viene trasferita da un corpo all'altro negli urti, mentre il lavoro non ha nessuna di queste proprietà;
- motivare l'introduzione del lavoro mettendo chiaramente in evidenza che il calcolo del lavoro permette di calcolare la variazione di energia fra lo stato iniziale e quello finale, note le forze applicate, e che, per le forze conservative, il lavoro dipende solo dallo stato iniziale e finale e non dalle modalità di spostamento intermedio,

Questi tre punti indicano anche il percorso da seguire per un approccio corretto: essenzialmente è necessario modificare la sequenza tradizionale "cinematica (velocità e accelerazione) →dinamica (forza e quantità di moto) →lavoro → energia meccanica" in favore di una sequenza:

energia (qualitativa) → forza → lavoro → energia (quantitativa)

Discutiamo in dettaglio un esempio per mostrare che ciò sia possibile senza sconvolgere interamente l'approccio tradizionale, iniziando dal moto più semplice, quello "rettilineo".

Un esempio: l'energia nel moto rettilineo

Nella maggior parte dei libri di testo si parte, giustamente, dal moto rettilineo perché è il più semplice e permette di riconoscere i descrittori essenziali del moto senza la complicazione della descrizione vettoriale. La descrizione viene fatta in quattro passi successivi, spesso molto separati temporalmente fra di loro perché messi in capitoli successivi: questa è la prima deformazione da superare, cioè il fatto che, prima di passare al passaggio concettuale successivo, si discutono tutti i tipi di moto (moto in due o tre dimensioni con la "composizione dei moti", moto circolare, oscillatorio, ecc.), perdendo così di vista il filo logico che dovrebbe portare subito, per ogni moto, all'identificazione del lavoro e dell'energia.

Primo passo, la "cinematica": i descrittori sono distanza percorsa, tempo impiegato, velocità e accelerazione. Vengono date le relazioni analitiche tra queste variabili e la loro rappresentazione grafica, discussi i concetti di velocità "media" e velocità "istantanea", quest'ultimo essenziale per passare al concetto di accelerazione. La rappresentazione grafica della relazione fra distanza percorsa e tempo impiegato porta a pensare allo spazio come *funzione* continua del tempo e quindi anche alla velocità e accelerazione come funzioni del tempo. Compatibilmente con lo sviluppo del programma di matematica, si introduce anche il passaggio al limite e l'interpretazione di velocità e accelerazione come "derivate". Nei libri di testo dei Licei Scientifici e della Scienze Applicate questa parte è svolta nel primo biennio (vedasi ad esempio Walker 2010).

Secondo passo, la "dinamica newtoniana": dopo la lunga parentesi cinematica (perché, prima di passare alla dinamica, si discutono gli aspetti cinematici di tutti i tipi di moto come accennato sopra) si arriva finalmente a chiedersi che cosa c'è alla base del moto e si introducono i "principi della dinamica". In genere il concetto di forza viene prima introdotto operativamente attraverso la "statica" (vedasi ad esempio Walker 2010), per poi essere ridefinito attraverso il secondo principio della dinamica che conduce anche alla definizione dell'unità di misura SI, il newton. Da notare che, anche per la dinamica, prima di passare al passo successivo, si discutono gli aspetti "dinamici", nel senso di applicazioni del secondo principio, di tutti i tipi di moto (moto in due o tre dimensioni con la "composizione dei moti", moto circolare, oscillatorio, ecc.). Nei libri di testo dei Licei Scientifici e della Scienze Applicate questa parte è svolta in parte nel primo biennio (vedasi ad esempio Walker 2010) e poi ripresa e approfondita nel secondo biennio (vedasi ad esempio Caforio 2012, Walker 2012).

Terzo passo, "lavoro" ed "energia". Il concetto di lavoro viene introdotto attraverso una definizione che viene giustificata come "completamento" della trattazione delle forze, rispetto alle quali il lavoro presenta il vantaggio di essere una grandezza scalare anziché vettoriale (Romeni 2012). In altri casi la giustificazione è "operativa": il lavoro permette di descrivere attività, come spingere il carrello al supermercato, che dipendono anche dallo "spostamento" oltre che dalla forza (Walker 2010). Definito il lavoro, si definisce l'equivalenza del lavoro con la variazione di energia cinetica dal teorema delle forze vive: è a questo punto che compare finalmente la parola "energia".

Quarto passo, conservazione e "dissipazione" dell'energia meccanica: il lavoro delle forze conservative porta anche alla definizione dell'energia potenziale e alla conservazione dell'energia. Le forze non conservative, come la forza di attrito, conducono invece a una dissipazione dell'energia meccanica per la quale si rimanda al capitolo della termodinamica. In alcuni testi (Romeni 2012) si accenna anche ad altre trasformazioni dell'energia meccanica che portano ad una variazione non dissipativa di energia meccanica, come ad esempio quella in energia elettrica attraverso una dinamo o quella inversa di un motore elettrico.

Che cosa cambiare:

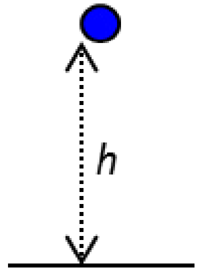
- individuare, fin dall'inizio, l'energia come una grandezza fondamentale per descrivere il moto, accanto a velocità, accelerazione e forza, facendo riferimento all'idea intuitiva che ne ha l'allievo (ad esempio è diverso correre per 100 metri o per 2 km!);
- evitare di dedicare un tempo eccessivo alla separazione dei concetti di "velocità media" e "velocità istantanea": può essere utile in matematica per introdurre il concetto di passaggio al limite e il calcolo differenziale, ma in fisica può offuscare il significato fisico di *velocità istantanea*, che è la grandezza dinamicamente rilevante perché legata all'energia cinetica e che oggi si misura direttamente con strumenti di uso comune come i tachimetri; inoltre l'allievo ha fin da piccolo una percezione "corporea" diretta della velocità istantanea molto più chiara di quella di velocità media, che va invece costruita matematicamente attraverso le misure di spazio percorso e tempo impiegato;
- introdurre la definizione e la misura della forza attraverso il secondo principio della dinamica, e subito dopo il "lavoro" per giungere alla misura della variazione di energia,
- una volta fatto il passaggio attraverso il lavoro, fermarsi a discutere che la grandezza, la cui variazione è stata così misurata, ha tutte le caratteristiche che ci aspettiamo intuitivamente per l'energia.

L'intero percorso va portato a termine per il moto rettilineo prima di passare ad altri moti, in modo che se ne capisca l'organicità: si parte dall'idea intuitiva di energia e dalla percezione fisica di velocità istantanea, si passa attraverso la misura quantitativa di velocità e accelerazione, si calcolano forza e lavoro per giungere all'energia "quantitativa".

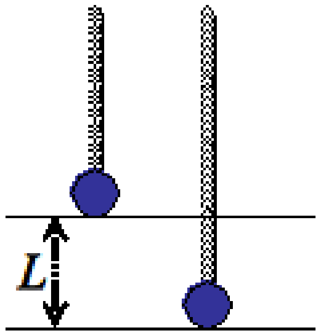
Il percorso va ripetuto nella sua completezza per ciascuno degli altri tipi di moto.

Un concetto difficile: l'energia potenziale

Il problema più delicato nel discutere l'energia meccanica è come trattare l'energia "potenziale" o, in generale, l'energia "di posizione": a differenza dell'energia cinetica, non è infatti evidente che l'energia potenziale possa essere considerata una grandezza caratteristica del corpo "A", perché dipende dalla posizione rispetto a un altro corpo "B" e dalla forza che si esercita fra i due corpi durante lo spostamento nella nuova posizione e quindi non può essere considerata caratteristica esclusiva del corpo A, ma dei due corpi insieme.



Il caso più frequente è quello dell'energia potenziale gravitazionale: una palla di massa m che cade a terra partendo da ferma da un'altezza h rispetto al suolo acquista un'energia *cinetica* $E_{kin}=1/2\ m\ v^2$. Nella descrizione del moto, la si pone pari all'energia *potenziale* $E_{pot}= mgh$ che la palla aveva quando si trovava all'altezza h, per cui si dice che, nella caduta, l'energia potenziale "si trasforma" in energia cinetica e che l'*energia meccanica totale,* $E_{tot}= E_{kin}+ E_{pot}$, si conserva. La stessa descrizione viene fatta del moto di un pendolo o della caduta su un piano inclinato. In questi casi il "corpo B" è la Terra, ma la sua massa è talmente grande rispetto a quella della pallina che si può considerarla ferma durante la caduta e considerare solo l'energia della palla, come se fosse isolata[2].



Diverso è il caso dell'energia potenziale "elastica". Ad esempio, se un corpo appeso a una molla di costante elastica k scende facendo allungare la molla di un tratto L, occorre esaminare l'intero sistema "massa-molla", considerando le energie potenziali gravitazionali della palla e della molla e l'energia potenziale elastica $E_{elastica}=1/2kL^2$ come energie potenziali del "sistema massa-molla".

La strada "termica" all'energia

Anche per l'energia termica i problemi sono simili a quelli della meccanica. La raccomandazione delle indicazioni nazionali per il primo biennio è: "*…Lo studio dei fenomeni termici definirà, da un punto di vista macroscopico, le grandezze temperatura e quantità di calore scambiato introducendo il concetto di equilibrio termico e trattando i passaggi di stato.*"

Nel secondo biennio "*...Si completerà lo studio dei fenomeni termici con le leggi dei gas, familiarizzando con la semplificazione concettuale del gas perfetto e con la relativa teoria cinetica (…). Lo studio dei principi della termodinamica permetterà allo studente di generalizzare la legge di conservazione dell'energia e di comprendere i limiti intrinseci alle trasformazioni tra forme di energia, anche nelle loro implicazioni tecnologiche, in termini quantitativi e matematicamente formalizzati.*"

Prendendo alla lettera le indicazioni, si dovrebbe aspettare a parlare di energia nel secondo

2 In una trattazione rigorosa della "forza a distanza", come è appunto quella gravitazionale, occorrerebbe descrivere la forza in termini di "campo gravitazionale". Nello spazio intorno alla Terra c'è infatti un campo gravitazionale, con un potenziale gravitazionale dato dalla legge della gravitazione di Newton che è funzione della posizione. Quando la palla scende dall'altezza h fino al suolo, *scambia energia* con il campo e la trasforma in energia cinetica. Una descrizione di questo tipo è chiaramente molto più astratta di quella che abbiamo proposto interpretando l'energia potenziale come energia che è "immagazzinata" nella palla, senza fornire una chiave interpretativa più chiara, per cui, a nostro avviso, non vale la pena utilizzarla. Diverso è invece il caso del moto in un campo elettromagnetico, perché in quel caso, come discuteremo più avanti, l'energia "immagazzinata" nel campo diventa un concetto rilevante in vista dell'estensione all'onda elettromagnetica.

biennio associandola ai principi della termodinamica, mentre anche una massaia sa benissimo che ciò che passa dalla fiamma calda all'acqua della pentola è "energia": se ne accorge infatti quando deve pagare la bolletta del gas, che è una "bolletta di energia"!

Le difficoltà legate all'approccio tradizionale

I libri di testo, salvo rare eccezioni, si attengono fedelmente alla lettera delle indicazioni nazionali, non però allo spirito, come già discusso per la meccanica. Tipicamente, nel primo biennio, si inizia con la "termologia", si presentano termometri e misura della temperatura, si parla di "calore" senza chiarire esplicitamente la sua relazione con l'*energia termica*, mentre di energia si parla solo nel secondo biennio, introducendo i principi della termodinamica. Conseguenze legate al fatto di non chiarire fin dal primo biennio il significato del termine scientifico "calore" sono:

- nasce un pasticcio quando si discute la "conduzione del calore", perché spesso viene incluso *l'irraggiamento*, in cui ciò che si propaga non è affatto "calore" (cioè energia termica scambiata fra corpi di temperatura diversa) ma "radiazione termica o infrarossa" (cioè energia elettromagnetica);
- altra confusione riguarda i passaggi di stato, legata anche al termine "calore latente" che fa pensare al calore come a qualcosa che "sta dentro" al corpo, mentre sarebbe più chiaro parlare subito di energia che può "stare dentro" al corpo in forme diverse, come energia termica oppure come *energia dello stato di aggregazione fisica*;
- sempre nel biennio è probabile che si parli di "calore" e della sua misura nel corso di Scienze, discutendo i passaggi di stato e le reazioni chimiche, anche se le indicazioni nazionali non sono chiarissime al riguardo: come per la fisica, anche per le Scienze il discorso energetico sembra rinviato al secondo biennio, ma è esperienza comune che il calore viene spesso discusso prima nel corso di Scienze che nel corso di fisica, con la conseguenza che rimane, nello studente, questa prima "impronta chimica" (inclusa l'unità di misura!);
- introducendo il concetto di "calore" prima che quello di "energia termica" avviene una distorsione simile a quella sopra discussa che avviene introducendo il concetto di "lavoro" prima di quello di "energia meccanica": il calore finisce con l'apparire più fondamentale dell'energia, mentre non lo è, dato che il calore è solo il termine breve con cui si indica la quantità di energia termica che viene trasferita in presenza di una differenza di temperatura!

Che cosa fare per introdurre correttamente l'energia per la via termica

In base alle considerazioni precedenti, riassumiamo brevemente gli aspetti da curare volendo introdurre precocemente il concetto di energia nella presentazione di qualunque problema termico, pur senza discostarsi del tutto dall'approccio tradizionale qual è in generale quello del libro di testo:

- *parlare di energia fin dall'inizio*, facendo riferimento alla conoscenza intuitiva e "globale" che l'allievo ha del ruolo dell'energia nel fenomeno in base alle sue proprietà: ad esempio, scaldando sulla fiamma calda di un fornello l'acqua contenuta in un pentolino, l'energia *passa* dalla fiamma calda all'acqua meno calda (l'energia prima era contenuta nella fiamma e dopo il passaggio è contenuta nell'acqua e nel pentolino che sono diventati più caldi);
- *individuare e misurare la temperatura come descrittore caratteristico dei fenomeni termici*: la temperatura è diversa dall'energia, ma allo stesso tempo è legata all'energia perché la variazione di temperatura è un indicatore del passaggio di energia: misurando di quanto cambia la temperatura possiamo infatti monitorare quanta energia è passata. La temperatura è una proprietà caratteristica del corpo (variabile di stato), dipende cioè dallo stato del corpo in un dato istante e non dalla storia precedente, ma è "atipica", rispetto ad altre grandezze che caratterizzano i corpi come il volume o la massa, perché varia in relazione

alla temperatura dei corpi vicini (*equilibrio termico*), può variare in presenza di interazioni (fenomeni di attrito, reazioni chimiche, assorbimento di radiazione) e, infine, ha modalità di misura e di determinazione dell'unità di misura diverse da quelle delle altre grandezze (scala di temperatura e "punti fissi");

- *discutere il significato di equilibrio termico*: è un *principio* (il cosiddetto "principio zero" della termodinamica), basato sull'evidenza sperimentale attraverso un ragionamento di "bootstrap", in base al quale, per definire il funzionamento del termometro, si postula il principio che, quando corpi a temperatura diversa sono messi in contatto (come, appunto, il termometro e il corpo di cui si vuole misurare la temperatura), avvengano degli scambi di "energia termica" che continuano finché si raggiunge un equilibrio termico e tuttavia si usa il termometro per definire il raggiungimento dell'equilibrio termico;
- *discutere la percezione del flusso di energia* che avviene nei fenomeni di conduzione termica, nei quali si intuisce che qualcosa fluisce, *attraverso il contatto,* dal corpo a temperatura più alta (la fiamma) al corpo a temperatura più bassa (l'acqua e il pentolino) e che questa "cosa" non è materiale ma ha le proprietà dell'energia: infatti si *trasferisce* da un corpo all'altro, è *immagazzinata* nel corpo inizialmente più caldo e poi rimane immagazzinata nell'altro corpo, si *conserva*, perché l'energia che "esce" da un corpo "entra" nell'altro corpo (questo è in realtà un atto di fede nel caso in esame, come nella maggior parte dei casi!);
- *discutere il significato del termine "energia termica"*, che viene dato a questa forma di energia che fluisce attraverso il contatto da un corpo più caldo a un corpo meno caldo per ricordare che la sua variazione viene segnalata da una variazione di temperatura.

Qualche considerazione finale sul termine "calore". Anche se è un termine molto usato nel linguaggio quotidiano per indicare brevemente il flusso di energia termica, riteniamo che convenga evitare di usarlo, per chiarezza, nella discussione dei fenomeni termici, per non introdurre un termine diverso da quello di energia e perché sovente è ambiguo. Infatti si induce l'idea che il calore sia una "forma di energia", sia pure del tutto particolare, mentre il calore

- **non** è una "forma di energia" particolare, ma è solo un modo di chiamare brevemente l'energia che è entrata o uscita dal corpo;
- **non** è una caratteristica del corpo (proprietà essenziale dell'energia) ma è la caratteristica di un *processo*, misura cioè quanta energia entra o esce dal corpo in un processo di scambio di energia,
- **non** sta nel corpo (è errato dire "questa cosa contiene molto calore"): di qui deriva la principale fonte di confusione su calore ed energia, perché si tende erroneamente a pensare che, essendo energia che entra o esce, la quantità di calore sia già nel corpo per poterne uscire o che rimanga nel corpo dopo che è entrata!

Questi tre punti indicano anche il percorso da seguire per un approccio corretto: modificare la sequenza tradizionale "temperatura → calore → energia termica" in favore di una sequenza:

energia (qualitativa) → temperatura → "calore" → energia (quantitativa)

Mettendo insieme quanto già discusso a proposito di lavoro, il primo principio della termodinamica, nella sua forma elementare, diventa semplicemente una descrizione dei diversi modi di cambiare l'energia "interna" U del corpo (o del "sistema"): si può cambiarla scambiando energia meccanica, $E_{scamb,mecc}$, mediante un lavoro L, oppure scambiando energia termica, $E_{scamb,term}$, mediante una quantità di calore Q:

$$\Delta U = E_{scamb,term} + E_{scamb,mecc} \; (= Q - L) \qquad (1)$$

Scrivendo in questo modo il primo principio della termodinamica, facendo cioè riferimento alle energie scambiate e non al calore o al lavoro, diventa molto più ovvio che si tratta di un bilancio energetico: facendo la somma algebrica delle energie che entrano e che escono dal corpo, nelle due forme di energia meccanica e termica, si ottiene l'energia "interna", cioè quella che rimane immagazzinata dentro il corpo!

L'espressione (1) è facilmente generalizzabile al caso in cui l'energia del corpo cambia grazie a un'interazione elettromagnetica, come avviene nell'*irraggiamento*, in cui viene scambiata un'energia elettromagnetica $E_{scamb,em}$: basta aggiungere un terzo termine a quelli termici e meccanici, senza dover invocare un fumoso "calore radiante":

$$\Delta U = E_{scamb,term} + E_{scamb,mecc} + E_{scamb,em}$$

Un'altra riscrittura interessante del primo principio è quella che riguarda le reazioni chimiche, in particolare quelle che avvengono a pressione costante in un sistema gassoso: sono le reazioni che si studiano più frequentemente in laboratorio e che lo studente del secondo biennio sta probabilmente trattando nel corso parallelo di Scienze. In una trasformazione isobara, in genere ha scarso interesse lo scambio di energia meccanica (che è pari a $-pDV$, dove p è la pressione e V il volume) che è comunque difficile da misurare, mentre si misura facilmente lo scambio di energia termica che i chimici chiamano "calore sviluppato o assorbito nella reazione" (che, per una mole di gas, è pari al prodotto c_pDT, dove c_p è il calore specifico molare a pressione costante e T la temperatura): conviene perciò definire una grandezza che è l'*entalpia*, la cui variazione è pari alla somma della variazione di energia interna e dell'energia meccanica scambiata:

$$\Delta H = \Delta U + E_{scamb,mecc} = E_{scamb,term} \quad \text{("}Q\text{" per i chimici!)}$$

Anche l'entalpia è una variabile di stato e ha altre proprietà che sono utilissime per calcolare in generale le variazioni di energia in trasformazioni chimiche e fisiche, su cui varrebbe la pena aprire un discorso con i colleghi di Scienze per stabilire un linguaggio comune e trasparente che lo studente riconosca passando da una disciplina all'altra.

La strada "elettromagnetica" all'energia

Anche per l'elettromagnetismo la situazione è simile a quelle discusse prima per i fenomeni meccanici e termici, anzi nelle indicazioni nazionali per il primo biennio non si fa alcun accenno ai fenomeni elettromagnetici e quindi neppure alla relativa forma di energia. Come discusso nel seguito, pare invece possibile e quanto mai opportuno iniziare a discuterne già nel primo biennio, sia pure ad un livello non approfondito teoricamente, per sottolineare fin dall'inizio il significato unificante del concetto di energia.

Secondo biennio. Anche qui le indicazioni nazionali seguono l'impostazione tradizionale, in base alla quale la conservazione dell'energia riguarda sostanzialmente solo i fenomeni meccanici e termodinamici, mentre *"…Lo studio dei fenomeni elettrici e magnetici permetterà allo studente di esaminare criticamente il concetto di interazione a distanza, già incontrato con la legge di gravitazione universale, e di arrivare al suo superamento mediante l'introduzione di interazioni mediate dal campo elettrico, del quale si darà anche una descrizione in termini di energia e potenziale, e dal campo magnetico."* Dire che si darà *anche* una descrizione del campo elettrico in termini di energia e potenziale equivale a dire che, in fondo, il concetto di energia per la descrizione del campo elettrico non è così importante. Da notare che, invece, non si parla di energia in relazione al campo magnetico e neppure di energia "elettrica", cioè di quella forma di energia associata principalmente al funzionamento dei dispositivi elettrici che è forse la forma di energia meglio nota nella vita quotidiana!

Quinto anno: *"…Lo studente completerà lo studio dell'elettromagnetismo con l'induzione magnetica e le sue applicazioni, per giungere, privilegiando gli aspetti concettuali, alla sintesi costituita dalle equazioni di Maxwell. Lo studente affronterà anche lo studio delle onde elettromagnetiche, della loro produzione e propagazione, dei loro effetti e delle loro applicazioni nelle varie bande di frequenza."*

Anche qui non si fa alcun cenno esplicito al concetto di energia. Passando poi alla fisica moderna si dice: "*...L'affermarsi del modello del quanto di luce potrà essere introdotto attraverso lo studio* *della radiazione termica e dell'ipotesi di Planck (affrontati anche solo in modo qualitativo), e sarà sviluppato da un lato con lo studio dell'effetto fotoelettrico e della sua interpretazione da parte di Einstein, e dall'altro lato con la discussione delle teorie e dei risultati sperimentali che evidenziano la presenza di livelli energetici discreti nell'atomo. L'evidenza sperimentale della natura ondulatoria della materia, postulata da De Broglie, ed il principio di indeterminazione potrebbero concludere il percorso in modo significativo*". L'energia appare quindi avere un ruolo rilevante solo nei "livelli energetici discreti", mentre appare fumoso il ruolo nello "studio della radiazione termica", dato che non è chiaro come si possa discutere di energia della radiazione termica e quindi del "quanto di luce", non avendo discusso di energia dell'onda elettromagnetica in generale.

Che cosa fare per introdurre l'energia nei fenomeni elettromagnetici

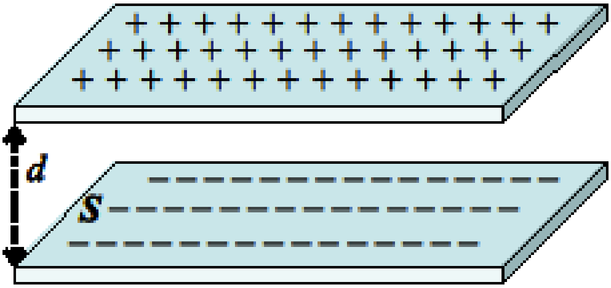
Per quanto detto prima si ritiene opportuno e possibile iniziare la trattazione dell'elettromagnetismo, e del ruolo dell'energia in tale ambito, già nel primo biennio, in particolare nella classe seconda, subito dopo una prima presentazione della conservazione dell'energia, ovviamente in modo non troppo approfondito dal punto di vista teorico, illustrando alcuni fenomeni elettrici e magnetici ben noti allo studente e dando spazio il più possibile alla sperimentazione. Molti studenti infatti hanno già affrontato questi temi nella scuola secondaria di primo grado, nell'ambito non soltanto di Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali, ma anche di Educazione tecnica (corrente elettrica e circuiti elettrici elementari, trasformazioni tra le varie forme di energia, produzione dell'energia elettrica): bastano quindi poche ore di lezione per poter riprendere alcuni aspetti essenziali, in particolare dei circuiti elettrici, che mettano in luce le trasformazioni di altre forme di energia in energia elettrica o viceversa. Nel secondo biennio e nel quinto anno, nel riprendere e completare lo studio dell'elettromagnetismo, oltre alla sistematizzazione teorica, vanno curati tutti quegli aspetti che sono legati all'energia, avendo in mente sia le applicazioni tecnologiche sia l'apertura verso le onde elettromagnetiche e la fisica dei quanti (il "quanto di luce" è un quanto di energia del campo elettromagnetico!). Discutiamo alcuni esempi.

Nel primo biennio:

- studiando i *fenomeni elettrostatici* elementari e osservandoli in laboratorio si può notare come l'elettrizzazione di un isolante per strofinio richieda un lavoro e quindi un dispendio di energia meccanica, così come nell'elettrizzazione di un conduttore mediante il generatore di Van de Graaff si abbia una trasformazione di energia meccanica in energia elettrica nel movimento della cinghia del generatore; inoltre corpi elettrizzati (isolanti o conduttori) possono esercitare forze su altri corpi carichi, spostandoli e quindi trasformando energia elettrica in energia meccanica. Anche osservando i fenomeni magnetici elementari si può notare come una calamita può attrarre un'altra calamita o un pezzo di materiale ferromagnetico sviluppando energia meccanica;
- si possono discutere, anche solo a livello qualitativo, gli aspetti energetici di semplici circuiti elettrici, mettendo in evidenza che in un circuito elettrico c'è un flusso di energia elettrica insieme alla corrente elettrica, costruendo un primo semplice modello del trasporto di energia legato a quello di "carica elettrica".

Secondo biennio e quinto anno.

- *L'energia trasportata dalla corrente elettrica*: è appunto quella che, nella vita quotidiana, chiamiamo brevemente "energia elettrica" e la cui potenza è espressa dalla legge di Joule, $W= I\ V$. Spesso, nei libri di testo, questa legge è messa in secondo piano rispetto alla più popolare legge di Ohm, mentre è fondamentale per descrivere le trasformazioni di energia che avvengono in un circuito elettrico: fra queste vanno discusse ampiamente le trasformazioni in energia meccanica e non solo quelle in energia termica, anche se sono più facili da misurare.



- *La carica e scarica di un condensatore* permette di affrontare in modo non eccessivamente astratto il concetto di energia "immagazzinata" nel campo elettrico. Utilizzando in particolare un condensatore a facce piane e parallele, come quello della figura, si vede abbastanza chiaramente che il campo elettrico si forma man mano che si caricano le due armature e che ha un volume ben definito, essendo confinato dentro il volume *hS* compreso fra le due armature.
- *L'energia elettrostatica* $E_{el\text{-}st}$ è l'energia spesa per caricare il condensatore è quindi anche quella che è immagazzinata nel campo, come ricordato sopra: è proporzionale al quadrato del campo elettrico $\bar{E}$ e al volume (*hS*), $E_{el-st} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \bar{E}^2 \cdot (hS)$, dove ε è la costante dielettrica. A differenza di quanto proposto per l'energia potenziale gravitazionale, conviene pensare all'energia elettrostatica come *energia del campo elettrico* e non come "energia potenziale delle cariche elettriche", come si fa per un corpo nel campo gravitazionale, perché il concetto di energia del campo può essere poi esteso facilmente al campo magnetico per il quale non ci sono "cariche magnetiche" ma solo "dipoli magnetici", e soprattutto perché è indispensabile quando si trattano le onde elettromagnetiche, dato che l'onda e.m. trasporta appunto l'energia dei campi elettrici e magnetici che la formano.
- *L'energia immagazzinata in un campo magnetico stazionario*: classici esperimenti di Oersted, Faraday e Ampère e motore elettrico in corrente continua.
- L'energia elettromagnetica: esperimenti di Faraday sull'induzione elettromagnetica.
- *L'onda elettromagnetica e le sue proprietà:* dispositivi per produrla e rivelarla alle diverse lunghezze d'onda (es. il telefono cellulare); energia e potenza.
- Per finire, il *"quanto di energia elettromagnetica"*, che apre tutto il capitolo della fisica quantistica: non lo affrontiamo in questo articolo perché ci porterebbe troppo lontano, ma è uno degli obiettivi che dà senso all'intero curriculum di fisica.

La strada "luminosa" all'energia

Anche per l'ottica la situazione è simile. Secondo le indicazioni nazionali, nel primo biennio si dovrebbero esaminare i fenomeni luminosi solo dal punto di vista "geometrico": "….*Attraverso lo studio dell'ottica geometrica, lo studente sarà in grado di interpretare i fenomeni della riflessione e della rifrazione della luce e il funzionamento dei principali strumenti ottici.*" Non si parla quindi esplicitamente di energia, però, come già notato a proposito dei fenomeni meccanici e termici, una descrizione, anche molto elementare, della propagazione della luce non può ignorare del tutto gli aspetti energetici, in particolare il fatto che la luce

- proviene da una "sorgente" che è sostanzialmente una sorgente di energia,
- produce degli effetti che sono legati all'energia trasportata,
- si trasforma in altre forme di energia, come energia termica, chimica, elettrica.

L'aspetto energetico è quindi essenziale per "modellizzare" i fenomeni luminosi *reali*, come richiesto nella premessa al primo biennio.

Nelle indicazioni nazionali per il secondo biennio l'energia non è citata con riferimento esplicito ai fenomeni luminosi, ma solo indirettamente con riferimento alle "forme di energia" nei fenomeni termici (vecchia abitudine di classificare l'irraggiamento tra i fenomeni termici anziché fra quelli elettromagnetici o luminosi!). Compare invece, nei contenuti suggeriti nelle indicazioni nazionali, la "*natura ondulatoria*" e vengono citati al riguardo i "*fenomeni relativi… alla sovrapposizione, interferenza e diffrazione*", senza però far riferimento esplicito alla misura della lunghezza d'onda (o della frequenza), che è invece importante per la comprensione del "quanto di luce" proposta nel quinto anno.

Quinto anno: "*L'affermarsi del modello del quanto di luce potrà essere introdotto attraverso lo studio della radiazione termica e dell'ipotesi di Planck (affrontati anche solo in modo qualitativo), e sarà sviluppato da un lato con lo studio dell'effetto fotoelettrico e della sua interpretazione da parte di Einstein*". Anche qui non si fa menzione diretta dell'aspetto energetico, che pure è essenziale per la comprensione del "quanto di luce"!

Non si può comunque aspettare al quinto anno per iniziare a parlare del ruolo dell'energia nella comprensione dei fenomeni luminosi: tutta l'attenzione all'aspetto energetico che suggeriamo fin dal primo biennio può quindi essere vista anche come propedeutica all'introduzione al quinto anno del quanto di luce e degli effetti quantistici.

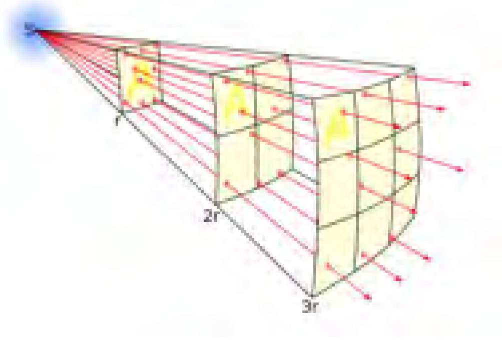
Che cosa fare per introdurre l'energia nei fenomeni luminosi

Il fatto di privilegiare nel biennio gli aspetti strettamente geometrici dell'ottica è probabilmente dettato dal voler rafforzare l'interdisciplinarietà con la matematica. Tuttavia, come già ricordato, attenendosi in modo stretto alla lettera delle indicazioni, si perdono di vista gli aspetti più tipicamente fisici dei fenomeni luminosi che sono quelli legati all'energia e sono anche quelli che l'allievo percepisce chiaramente in base alla sua esperienza della vita quotidiana. Per ovviare almeno in parte a questo inconveniente, riassumiamo gli aspetti fondamentali che conviene sottolineare e che sono accessibili fin dalla scuola media:

- *il "raggio luminoso" parte da una sorgente che fornisce l'energia necessaria* trasformando in energia luminosa altre forme di energia (ad esempio energia termica),
- il raggio viaggia nello spazio fino ad arrivare a un "utilizzatore", cioè al dispositivo in grado di *trasformare l'energia luminosa in un'altra forma di energia*, come energia termica, chimica (fotosintesi), o elettrica (cella fotovoltaica),
- quando incontra un "ostacolo", il raggio ha comportamenti diversi: può essere diffuso, riflesso, rifratto, e può anche trasmettersi al di là dell'ostacolo, portando con sé l'energia,
- *la luce può avere diversi "colori",* che possono dipendere dall'oggetto che la diffonde o dalla sorgente che la produce, ed è possibile "separarli" con un semplice prisma di vetro,
- ci sono colori che non "vediamo", come avviene per i raggi infrarossi, ma che vengono visti da opportuni dispositivi,
- *l'energia portata dalla luce* si comporta in modo molto diverso dall'energia meccanica o termica: viaggia anche nello spazio "vuoto", ciò che viaggia non è fatto di "materia", può essere assorbita, ci permette di "vedere", ecc.
- *l'energia luminosa ha però le stesse proprietà generali delle altre forme di energia*: si trasmette, si trasforma in altre forme di energia, passando e trasformandosi fa cose utili.

Questi aspetti si possono trattare senza difficoltà, a livello qualitativo e in alcuni casi anche quantitativo, già nel primo biennio. In particolare è utile esaminare semplici fenomeni in cui avviene una trasformazione dell'energia luminosa in altre forme di energia: fra tutti, il più semplice è famigliare è scaldare un oggetto con la radiazione, che va letto come trasformazione di energia luminosa in energia termica e che può essere indagato anche quantitativamente misurando l'aumento di temperatura di un oggetto di massa e calore specifico noti esposto al sole o illuminato da una lampadina a incandescenza.

Da un semplice esperimento come questo emergono alcuni concetti non banali riguardanti l'energia luminosa, che sono fondamentali per l'



- si misura una "potenza", cioè l'energia trasportata nell'unità di tempo, proprio perché l'energia luminosa è "energia che viaggia" e si intercetta rivelandola durante un certo intervallo di tempo,
- si misura una "illuminazione", cioè una energia depositata nell'unità di tempo sull'unità di superficie, proprio perché l'energia non è concentrata in un punto, ma riempie uno spazio e si attenua con la distanza dalla sorgente con la "legge dell'inverso del quadrato".

Sono misure semplici, ma che aiutano a creare le prime modellizzazioni dei fenomeni ondulatori.

Per gli aspetti ondulatori veri e propri è meglio aspettare il secondo biennio, come suggerito dalle indicazioni nazionali. Fra tutti, è importante identificare e misurare le grandezze caratteristiche dell'onda, in particolare la lunghezza d'onda che permette di assegnare un valore quantitativo al "colore", cioè a quella proprietà particolare che siamo abituati a percepire qualitativamente fin da piccoli e che è legata strettamente all'energia portata dal "quanto di luce", come si vedrà nel quinto anno. La strada passa per lo studio dei fenomeni di interferenza e diffrazione, citati nelle indicazioni nazionali, che vanno quindi approfonditi non solo per esplorare la "natura ondulatoria" della luce, ma soprattutto per capire come misurarne le proprietà caratteristiche.

Altri esperimenti che si possono affrontare nel secondo biennio e nell'ultimo anno per avvicinarsi agli aspetti quantistici presenti nella materia sono quelli relativi agli "spettri" luminosi, procedendo per passi graduali, che possono iniziare a livello qualitativo già nel primo biennio, come sopra ricordato, e sono:

- separare la luce nei suoi colori, prima con un semplice prisma, come già suggerito per il primo biennio, e poi con un reticolo di diffrazione, che permette di associare al colore una grandezza quantitativa, la "lunghezza d'onda";
- esaminare, con un semplice *spettroscopio*, uno spettro luminoso: è un esperimento da farsi in collaborazione con il corso di Scienze, per riprendere dal corso di Scienze il significato delle linee spettrali "discrete" che sono legate alle sostanze con cui la luce interagisce,
- indagare, anche solo qualitativamente, la dipendenza del picco di colore e della sua intensità dalla *temperatura* della sorgente, che è l'aspetto rilevante per legare l'energia luminosa E alla lunghezza d'onda e quindi alla frequenza f, che è l'essenza della relazione di Planck, $E=hf$, in modo da rendere un po' meno oscura la discussione sullo "spettro di corpo nero" con la quale molti testi iniziano la presentazione della fisica quantistica.

Una linea complementare, ma pure utilissima per aprire la strada alla fisica della materia suggerita fra gli approfondimenti del quinto anno, è quella dei fenomeni "optoelettronici", che oggi hanno applicazioni importantissime in molti campi, dalle celle fotovoltaiche alle trasmissioni via etere. Tutto è basato sulla risposta elettrica all'eccitazione luminosa dei "semiconduttori", cioè di quei materiali nei quali, a differenza di quanto avviene nei metalli, la densità di "elettroni quasi liberi" (o in generale di "portatori quasi liberi di carica elettrica") può essere cambiata facilmente con scambi di energia termica o di energia elettromagnetica. Come suggeriamo nelle schede presentate in "DIFIMA Fisica 2013", una sequenza possibile è

- iniziare con l'esame della variazione della resistenza elettrica di un semplice "fotoresistore" a semiconduttore, per indagare il meccanismo che è alla base della variazione della densità dei "portatori quasi liberi" in un semiconduttore in presenza di radiazione luminosa: il dispositivo non trasforma direttamente energia luminosa in energia elettrica, ma permette di *controllare* il passaggio di corrente elettrica utilizzando l'energia luminosa;

- passare all'esame di un "dispositivo attivo", come il fotodiodo o la cella fotovoltaica, che è in grado di operare autonomamente la trasformazione di energia luminosa in energia elettrica;
- utilizzare dei LED (Light Emitting Diodes) per ottenere la trasformazione inversa, da energia elettrica a luminosa; scegliendo opportunamente un LED quasi monocromatico, si può anche ricavare e giustificare l'ordine di grandezza della costante h di Planck, correlando la lunghezza d'onda del LED con il valore del potenziale elettrico a cui avviene il brusco aumento di conduttività elettrica;
- speculare infine sull'analogia fra ciò che avviene in un fotodiodo e il meccanismo della fotosintesi, in cui, passando attraverso la trasformazione di energia luminosa in energia elettrica, si giunge al risultato finale di trasformare energia luminosa in energia chimica.

Conclusioni

La proposta qui presentata per l'introduzione precoce e approfondita dell'energia come concetto unificante dei diversi fenomeni fisici non vuole essere esaustiva di tutto ciò che si può fare e presenta sicuramente ancora dei passaggi che vanno rivisti perché non rigorosi o poco chiari. Siamo tuttavia convinti che oggi sia necessario un cambiamento di rotta in questa direzione, più deciso e meglio integrato con il resto del curriculum di quanto sia stato tentato finora in alcuni libri di testo. Vanno ancora aggiunti alcuni "capitoli" importanti, in primis quelli legati alla "fisica moderna" e in particolare quello sull'*energia nucleare*, la sua peculiarità e le sue trasformazioni. Ci stiamo lavorando, anzi rivolgiamo un invito alla collaborazione costruttiva attraverso la piattaforma DIFIMA a quanti sono convinti che oggi questo cambiamento di prospettiva è necessario.

Bibliografia

Caforio, A., Ferilli, A. (2012). *FISICA! Le regole del gioco*. Ed. Le Monnier Scuola
DIFIMA Fisica (2013). http://difima.i-learn.unito.it/course/view.php?id=15
Romeni, C. (2012). "Fisica e realtà.blu", Ed Zanichelli
Walker, J.S. (2010). "Corso di fisica. Primo biennio", Ed. linx - Pearson
Walker, J.S. (2012). "Dalla meccanica alla fisica moderna, volume 1", Ed. linx - Pearson

FISICA CON GLI SMARTPHONE

Giovanni Pezzi
Palestra della Scienza del Comune di Faenza

Premessa

Gli *smartphone* sono sempre più diffusi fra i giovani, ma non tutti coloro che li usano per telefonare, inviare messaggi, scattare foto, stare in contatto attraverso i *social network*, ne conoscono le potenzialità e molti ignorano di avere in tasca un *personal instrument*, per eseguire misure, più potente di tanti strumenti dei laboratori scientifici delle loro scuole.

Pur essendo, quello degli smartphone, un settore ancora molto in evoluzione, dal punto di vista hardware e software, vale la pena di esplorarlo per individuare possibili utilizzi e applicazioni in ambito scolastico.

Dopo aver descritto brevemente le caratteristiche comuni a molti smartphone, e i requisiti delle applicazioni utili in campo didattico, verranno presentate alcune sperimentazioni svolte e mostrati i risultati di prove effettuate.

Gli smartphone e i loro sensori e applicazioni

Tutti gli smartphone, compresi anche i modelli più economici, oggi hanno un'ampia dotazione di dispositivi e di sensori che arricchiscono le loro prestazioni e funzionalità. Possiamo citare:

- accelerometri
- giroscopi
- sensori di campo magnetico
- sensori di luce
- sensori di suono (microfoni)
- sensori di prossimità
- sensore di posizione (GPS)
- foto-video camere
- blue tooth
- Wi-fi

Di solito accelerometri, giroscopi e sensori di campo magnetico sono presenti in tre esemplari, orientati perpendicolarmente secondo le direzioni dei tre assi *x. y*, *z*. Alcuni sensori sono inseriti per semplici "ragioni di servizio", come ad esempio gli accelerometri, per ruotare automaticamente le immagini sul display o i sensori di prossimità per bloccare il *touch screen* durante le telefonate. Sotto il controllo di opportune *app* (le applicazioni che si scaricano sui cellulari dagli appositi siti), questi sensori possono essere usati per altri scopi, nel nostro caso per misure in laboratorio.

Le *app* sono programmi, generalmente gratuiti o del costo di pochi euro. Se si intende usarle per effettuare misure, per esempio di accelerazione, è importante che abbiano determinate caratteriste che le rendono più funzionali dal punto di vista didattico. Tra queste riteniamo importante, per l'utente, la possibilità di:

- impostare la modalità di raccolta dei dati (frequenza e durata)
- visualizzare in forma di grafici i dati raccolti
- salvare i dati
- inviarli a un PC

Poiché le dimensioni di uno smartphone non permettono una agevole elaborazione dei dati, la possibilità di trasferirli su un PC (o un tablet) è importante. La modalità attualmente più comune è quella di inviare i dati tramite email, in formato cvs, che può essere letto da fogli elettronici come Excel o da programmi di elaborazione dati più dedicati, come Logger Pro[1] .

Una caratteristica importante, attualmente ancora ai primi passi, è la possibilità di condivisione dei dati (*data sharing*). Alcuni programmi, appoggiandosi a una rete wi-fi condivisa, permettono di "distribuire" i dati raccolti o i loro grafici tra dispositivi come smartphone, tablet, PC, connessi alla stessa rete. In questo modo si può avere una rapida condivisione dei dati tra gli studenti in classe.

Alcune esperienze svolte

La bibliografia riporta alcuni articoli che descrivono esperimenti realizzati con gli smartphone ed esperienze svolte nelle classi.

L'articolo "Un'esperienza di insegnamento della trigonometria con l'aiuto degli smartphone", di Sara Orsola Parolin e Lorenza Resta", pubblicato su *Progetto Alice*, descrive un'attività didattica di insegnamento della trigonometria svolta con una classe di Liceo, in cui vengono confrontati strumenti tradizionali e smartphone per misurare altezze e distanze di oggetti accessibili e non.

L'articolo di Sara Orsola Parolin e Giovanni Pezzi, "Smartphone-aided measurements of the speed of sound in different gaseous mixtures", pubblicato su *The Physics teacher*, descrive l'uso degli smartphone, all'interno di un'attività di classe, per misure della velocità del suono in miscele di gas contenenti elio o biossido di carbonio.

L'articolo "Una caccia al tesoro scientifica: dove sta l'accelerometro in uno smartphone?", di Giovanni Pezzi, su *La Fisica nella scuola*, illustra esperimenti sull'accelerazione centripeta svolti con uno smartphone collocato su un giradischi. Nello stesso numero della rivista compaiono altri articoli su questi temi, come quello di Galante e Lombardi che riporta esperimenti di acustica realizzati con smartphone. Gli stessi autori curano un sito[2] che contiene altre attività realizzabili con smartphone.

Misure all'aperto con studenti sono state svolte in due occasioni nel parco di Mirabilandia, nel workshop "Con gli smartphone sulle attrazioni di Mirabilandia": la prima, a cui hanno partecipato circa duecento studenti, si è svolta il 18 e 19 maggio 2013, nel corso delle giornate della Fisica, realizzate in collaborazione con l'A.I.F. e la Palestra della Scienza del Comune di Faenza. Nella seconda occasione, il 4 settembre 2013, il workshop si è rivolto agli studenti partecipanti alla scuola di eccellenza OLIFIS ER-Marche[3]. In entrambe le occasioni, i ragazzi, dopo una breve presentazione, divisi in gruppi e guidati da tutor, si sono cimentati, con i loro smartphone, nella misura dell'altezza delle Torri Discovery e Columbia e delle accelerazioni a bordo. Le figure 1-3 si riferiscono ai due eventi, la figura 4 riporta la scheda usata per le attività. Nel corso di questi workshop sono state usate le *app* SparkVue (iOS) e Physics Tool Box Accelerometer (Android) per misure di accelerazione e Angle Meter (iOS) e Smart Measure (Android) per misure di angoli.

1 http://www.vernier.com/products/software/lp/
2 https://sites.google.com/site/comovinglittlelab/home
3 http://www.aif.difa.unibo.it/scuola-olimpiadi/2013/programma.html

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Esperimenti di laboratorio

Si descrivono brevemente alcuni esperimenti in cui sono stati usati gli smartphone per misure di accelerazione.

Sistema massa-molla verticale

E' un classico esperimento di oscillatore armonico verticale. In questo caso come massa oscillante è stato usato uno smartphone agganciato, tramite un dispositivo di sostegno, a una molla (figure 5 e 6). Nella figura 7 è riportato uno dei grafici ottenuti, usando l'*app* SparkVue[4], dell'accelerazione risultante in funzione del tempo.

4 https://itunes.apple.com/it/app/sparkvue/id361907181?mt=8

Fig. 5

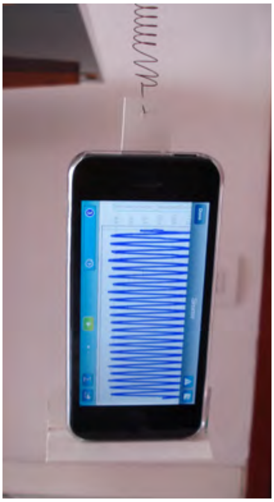


Fig. 6

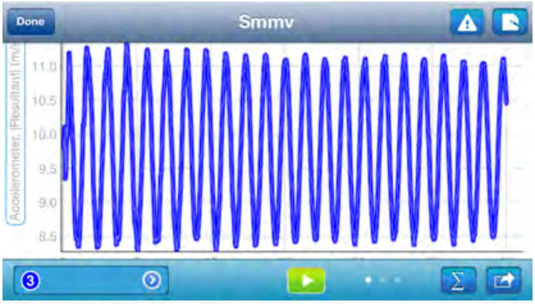


Fig. 7

Pendolo

Un pendolo fisico è realizzato agganciando uno smartphone a un dispositivo riadattato per questo esperimento (Figg. 8, 9). La figura 10 riporta il grafico accelerazione risultante in funzione del tempo; si può notare il forte smorzamento dovuto al particolare dispositivo utilizzato.

Fig. 8

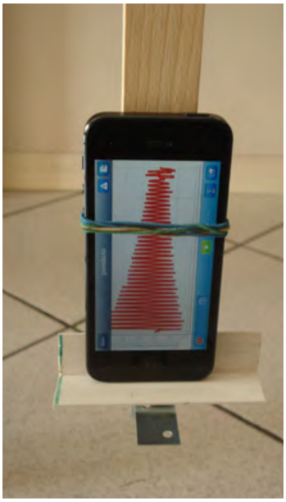


Fig. 9

Fig. 10

Conclusioni

L'utilizzo degli smartphone nella didattica è appena agli inizi. Come per tutti gli strumenti, esistono limiti al loro utilizzo: per esempio, gli accelerometri di molti smartphone hanno un range di ±2*g*, non sufficiente in alcune misure, come quelle che si possono fare su alcune attrazioni nei parchi di divertimento. Inoltre l'utilizzo del GPS, che potrebbe essere comodo per varie misure, resta limitato agli ambienti esterni, dove si può avere una buona copertura della rete satellitare.

Dal punto di vista software esistono due grandi "famiglie": i dispositivi che lavorano sotto il sistema operativo iOS (come gli Iphone) e quelli che utilizzano come S.O. Android (Samsung e altri); questo rende alcune cose più complicate, perché non sempre si trova la stessa *app* per entrambi gli ambienti e il *data sharing* è problematico tra i diversi sistemi operativi.

La diffusione di questi smartphone tra i ragazzi è già alta ed è destinata ad aumentare in futuro. L'attività didattica, specialmente di laboratorio, potrebbe trarne vantaggio, così come è positivo che i ragazzi imparino a conoscere e sfruttare le potenzialità di uno strumento che già possiedono. Inoltre uno smartphone si può rivelare utile non solo per esperimenti in laboratorio a scuola, ma anche a casa, per esperimenti "domestici" e quindi può diventare uno stimolo capace di stuzzicare la curiosità e la fantasia dei ragazzi.

Bibliografia

Parolin S.O., Resta L., (2013) Un'esperienza di insegnamento della trigonometria con l'aiuto degli smartphone", *Progetto Alice*, I, vol. XIV, n. 40

Parolin S.O., Pezzi G., (2013) Smartphone-aided measurements of the speed of sound in different gaseous mixtures", *The Physics teacher,* vol. 51, November 2013

Pezzi G., (2013) Una caccia al tesoro scientifica: dove sta l'accelerometro in uno smartphone?, *La Fisica nella Suola*, XLVI, n. 2, aprile giugno 2013

Galante L., Lombardi A.M., (2013) Acustica con una Bic e uno smartphone", *La Fisica nella Suola*,, XLVI, n. 2, aprile giugno 2013

Vogt P., Kuhn J., (2013) Analizzare i fenomeni di caduta libera con il sensore di accelerazione dello smartphone, (da *The Physics teacher*), *La Fisica nella Scuola*, XLVI, n. 2, aprile giugno 2013

IL CORSO DI FISICA DI KARLSRUHE TRA INNOVAZIONE E TRADIZIONE

***Corrado Agnes*[1]*, Angelo Merletti*[2]**

[1]Scuola di Dottorato del Politecnico di Torino, [2]Liceo Scientifico Marie Curie di Pinerolo

Premessa

Come mai le conoscenze sulla fisica elementare dell'acqua si possono considerare acquisite fin dall'antichità, forse in modo più esteso ed approfondito di come siamo soliti pensare, e si concludono subito dopo la scoperta, o la riscoperta, della scienza, secondo l'ipotesi suggestiva che essa abbia avuto origine nella civiltà ellenistica e sia stata in seguito dimenticata (Russo 2013)? Questa domanda retorica introduce alcuni punti chiave della nostra presentazione.

Primo. La fisica elementare dell'acqua costituisce un paradigma generale per tutte le altre aree della fisica, come dimostrato dalla sintesi della fisica macroscopica operata da J. W. Gibbs alla fine dell'800, in un libro sfortunatamente intitolato "Termodinamica". Dove, in analogia con tutti gli altri, uno dei termini che contribuiscono al trasporto dell'energia è un volume liquido spinto dalla differenza di pressione.

Secondo. Recenti ricerche di psicologia cognitiva (Fuchs 2011) indicano questa semplicità come una nuova "Gestalt", una "Forma Mentis" caratteristica del modo di pensare "scientifico" degli umani, la quale si struttura attraverso i concetti generici di "quantità", "intensità" e "forza / potenza". Termini in grado di immettere nel linguaggio scientifico tutta la ricchezza del linguaggio comune da cui provengono. Questo spiega il successo dei fisici antichi, ma anche quello della moderna fisica del continuo. Non solo, ma queste sono proprio le parole che potevano far conoscere il lavoro di J. W. Gibbs anche al di fuori della cerchia degli specialisti, forse evitando appunto che l'insegnamento della termodinamica diventasse così inefficiente.

Terzo. Simile al secondo ma particolarmente adatto per la DIdattica della FIsica e della MAtematica. Queste parole sono quelle adatte a descrivere "a parole" il calcolo differenziale e fare con l'acqua esperimenti sugli integrali cioè "le quantità", sulle derivate cioè " le correnti", per non tornare indietro fino alle "fluxiones" di Newton. Per ottenere un insegnamento efficace, le parole devono venire prima delle formule, come naturalmente le formule devono essere le ultime parole del discorso fisico. In definitiva è possibile costruire una comprensione sostanziale della fisica attraverso il capire narrativo, senza semplificazioni non necessarie e senza contraffazioni (Agnes 2013). Questa convinzione non contraddice la diffusa opinione che la matematica sia il linguaggio della fisica, ma sottolinea che senza parole condivise si raggiungono solo gli aspiranti specialisti. Questo circolo, "virtuoso" forse per la ricerca, ma certamente "vizioso" per la diffusione della cultura in generale, e non solo quella "scientifica", è destinato a perpetuarsi a causa della naturale "inerzia didattica", per cui si insegna come si è imparato. Non solo a questo si riduce ovviamente la tradizione didattica, ma in larga parte non si tratta di qualcosa costruito appositamente per l'insegnamento, ma della somma di tutte queste inerzie. Dobbiamo renderci conto che la didattica della fisica è una disciplina recente, nella quale l'insegnamento è pensato non per la ricerca, ma per l'utilizzatore finale nella scuola di tutti. Le innovazioni proposte sono in larga parte tradizione dimenticata, ed in piccola parte tradizione che non ha potuto nascere fino a quando l'insegnamento ha dovuto seguire il cammino della ricerca con tutte le sue sinuosità.

Introduzione

Il Corso di Fisica di Karlsruhe (KPK Herrmann 1985) si è infatti sviluppato sia recuperando dai paradigmi superati quanto di didatticamente utile, sia rimuovendo con moderni strumenti antiche difficoltà di insegnamento. Un nucleo tradizionale che con il paradigma dell'acqua va dai fisici antichi fino alla termodinamica di J.W.Gibbs, ed un nucleo innovativo basato essenzialmente su nuove parole per insegnare la fisica. La capacità di questo linguaggio di immettere nella didattica sia l'essenziale del formalismo matematico, che i risultati della psicologia cognitiva a cui accennavamo, è dovuto all'uso del "modello di sostanza"[1], in sostituzione del tradizionale "modello di particella". Si deve a questo modello la caratteristica più vistosa del KPK, un utilizzo generalizzato delle analogie. In questo articolo le analogie sono focalizzate su alcuni stati fisici di equilibrio nella prima parte, e sulle oscillazioni attorno alle medesime nella seconda.

Per introdurre rapidamente la struttura della fisica secondo il KPK cominciamo con l'idea, condivisa da molti insegnanti, che alcune grandezze fisiche debbano essere considerate più importanti per la comprensione della disciplina, e di qui nasce la mia decisione di chiamarle grandezze fisiche primarie.[2] Come alcune parole sono più pregnanti e significative di altre cosicché possano descrivere molte differenti situazioni, le grandezze fisiche primarie condensano in una parola secoli di osservazioni scientifiche e di pensieri sulla loro metrizzazione quantitativa. Come le parole del dizionario filosofico, non sono facili, ma, una volta imparate, esse aprono nuovi orizzonti di pensiero. Esse sono l'energia e le "variabili coniugate" della termodinamica classica, quelle estensive (in passato chiamate variabili di scambio) e le intensive (in passato chiamate variabili di contatto), termini che contengono idee importanti da recuperare, e che ragionevolmente vorrei chiamare "quantità" e "intensità". A livello di principianti l'energia viene introdotta con la domanda: che cosa hanno in comune acqua calda, acqua sotto pressione, acqua in movimento, elettricità, pane, etc … ragionevolmente chiamati "portatori di energia". Esse sono il nucleo del "modello di sostanza" che vale la pena di richiamare per sommi capi. Vediamo prima le proprietà generali delle quantità: esse sono additive nel senso in cui l'estensione lo è, esse si riferiscono ad un volume nel senso di riempirlo con una certa densità, esse hanno una corrente che fluisce dentro o fuori del volume, e le correnti sono anch'esse additive. Riassumendo esse sono "quantità di …" nel senso che è significativo rappresentarle come una specie di "roba" che può essere trasferita da un sistema fisico ad un altro. A ciascuna grandezza primaria del tipo "quantità di …" corrisponde una "intensità di …" che misura quanto la quantità sia carica di energia. Esse sono il livello o potenziale gravitazionale, la temperatura, la velocità, la pressione, il potenziale elettrico, il potenziale chimico , etc. La proprietà di essere intensive significa che quando mettiamo insieme due sistemi fisici con lo stesso valore di intensità, questa rimane invariata. Esse si riferiscono ad un punto e quindi dovremo parlare di valori medi per regioni estese. Inoltre non sono additive, anzi potremmo dire che sono sottrattive, nel senso che la differenza di intensità si può immaginare come una spinta per la corrente della quantità. La loro dipendenza dal tempo ha la caratteristica di un tasso di variazione e non quella di una corrente. Esse sono semplici da misurare perché indicano con precisione il confine del sistema fisico con l'esterno, aprono e chiudono le porte per gli scambi delle quantità e fissano, come vedremo, gli stati di equilibrio. La relazione tra quantità, intensità ed energia è il bilancio, la conservazione dell'energia nella forma fondamentale di J.W.Gibbs, che è limitante chiamare "primo principio della termodinamica" poiché vale per sistemi meccanici, termici, elettromagnetici, idraulici, chimici, etc. ; Per processi stazionari $I_E = \varsigma\, I_Q$ è la relazione tra la corrente di energia, la corrente del portatore e la differenza di potenziale, ben nota nelle versioni meccanica ed elettrica, P(otenza) = $F \cdot v$ oppure $U \cdot I$.

---

1 Questo termine riassume le proposte presenti nella Guida per gli insegnanti del Corso di Fisica di Karlsruhe, ed il modello è da tempo in uso nella fisica del continuo e nei programmi di simulazione dinamica, senza però alcun riconoscimento ufficiale. Ed è un importante esempio di idea relativamente recente, nata nell'ambito della ricerca, divenuta utile per semplificare l'insegnamento tradizionale.

2 Questo non ha nulla a che vedere con la distinzione tra grandezze "fondamentali" e "derivate" e la scelta delle unità di misura, dove sono in gioco questioni legali con conseguenze pratiche nella vita reale.

Analogie per Sistemi Fisici in Equilibrio

Tenendo presente, come dicevamo all'inizio, il semplice ma paradigmatico esempio di una quantità di acqua, ripassiamo le regole di questa "fisica generale unificata". Consideriamo il processo di scambio di Q[3] tra due contenitori (sistemi fisici dello stesso tipo), ognuno caratterizzato dalla capacità C, grandezza che misura il dislivello causato da Q quando entra nel o esce dal contenitore, secondo la relazione $Q = C\,\varsigma$.

Si tratta dell'antico esperimento dei vasi comunicanti rappresentato in figura: la variante da noi introdotta è che i vasi comunicano da sopra con un tubo che fa da sifone, e questo al solo scopo di sottolineare la generalità che vogliamo attribuire a questo esperimento dimostrativo[4].

La grandezza che abbiamo imparato a conoscere come fattore di carico dell'energia sul portatore, il potenziale, acquista un ulteriore, importante significato: ogni quantità va sempre "spontaneamente" dal potenziale più alto al potenziale più basso. Descrivere processi fisici con l'antico paradigma della reazione permette di formulare una regola così semplice per prevedere il senso di evoluzione del processo, e conferma l'idea di usare vecchi strumenti didattici per migliorare l'insegnamento delle nuove conoscenze.[5] Possiamo formulare un'altra regola generale: ogni quantità può sempre andare "artificialmente" dal potenziale più basso al potenziale più alto, fornendo energia e un'altra differenza di potenziale, ed il suo strumento, sia esso batteria, pompa o motore.

Seguiamo l'esperimento fino alla fine quando l'acqua è ferma ed il dislivello uguale nei due contenitori, ora diventati uno solo. Perché chiamiamo questo stato "equilibrio per scambio di Q" e invece nella situazione iniziale l'acqua è semplicemente ferma e basta? La risposta non è banale e si può dimostrare con il calcolo, ma è equivalente alle regole enunciate in precedenza. Per gli stati di equilibrio valgono il principio di minimo dell'energia e quello di massimo per l'entropia prodotta. Questa produzione avviene per ogni corrente che incontra una resistenza R, grandezza che misura il dislivello necessario per far fluire la corrente I, secondo la relazione $\varsigma = R\,I$. Quindi non si dà equilibrio senza resistenza e dissipazione, e lo stato di equilibrio ha pertanto un carattere definitivo, mentre uno stato di quiete può essere tale solo perché la spinta presente è inibita da troppa resistenza. Come una reazione chimica impedita dal fatto che le sostanze sono chiuse in barattoli lontani. Al contrario, la conservazione dell'energia costringe il sistema ad oscillare, chiama a partecipare al fenomeno altri portatori, ed il più disponibile è sempre la quantità di moto. Nel nostro esempio è complicato infatti raggiungere l'equilibrio senza far muovere l'acqua! C'è dunque una continuità logica tra equilibrio ed oscillazioni: la natura comincia e finisce sempre oscillando, poco o molto a seconda della dissipazione. Siano dunque Q_1 e Q_2 le quantità, C_1 e C_2 le capacità, ς_1 e ς_2 i dislivelli e supponiamo inoltre che valga una legge di bilancio (conservazione, cioè nessuna evaporazione o condensazione) del tipo $Q_{1in} + Q_{2in} = Q_{1eq} + Q_{2eq}$, da cui deriva immediatamente $C_1\,\varsigma_1 + C_2\,\varsigma_2 = C_1\,\varsigma_{eq} + C_2\,\varsigma_{eq}$. Questo risultato, così facile da calcolare, deriva direttamente dal principio di minimo per l'energia. Quindi vale per tutti i termini di essa, anche per quelli in cui la grandezza intensiva è la corrente elettrica e quella estensiva il flusso magnetico. Introducendo l'induttanza L, la grandezza che misura la spinta che si oppone al cambiamento della corrente nel conduttore, secondo la relazione $L=\Phi(B)/I$,

3 Si potrebbe recuperare il fascino palindromico della parola biblica per l'acqua "mem" scrivendo aQa, e rendere ossessivo il suo ruolo di esempio paradigmatico, ma ve lo risparmieremo.

4 Lo scopo è di "liberare" visivamente la dimostrazione dal collegamento: pressione dell'acqua – campo di gravità; seguendo l'idea corretta che la pressione dell'acqua nasce quando le gocce diventano volume, e poi viene raggiunto l'equilibrio per scambio di massa nel campo gravitazionale (esempio1).

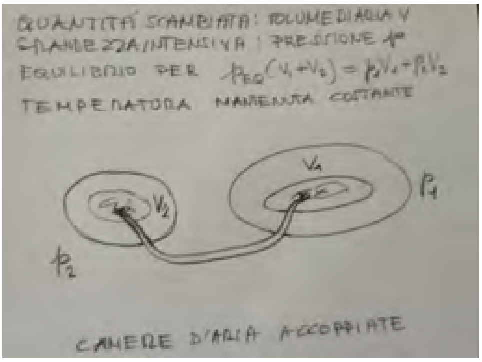
5 La così detta fisica moderna è alla portata degli studenti della scuola secondaria inferiore, se trattata con le reazioni, non solo nucleari, ma atomiche e dello stato solido (Herrmann 1985).

otteniamo $L_1\, I_1 + L_2\, I_2 = L_1\, I_{eq} + L_2\, I_{eq}$. Analogo risultato vale in meccanica per la forza (corrente di quantità di moto) e lo spostamento, e la relazione di quest'ultimo con la forza elastica $F = k\, X$, o piuttosto $X = 1/k \cdot F$, mostra un evidente carattere "induttivo"(vedi esempio 5).

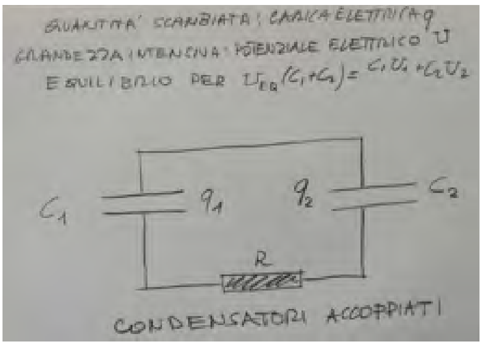
L'analogia tra la meccanica e l'elettromagnetismo, tra la massa di un corpo come capacità di contenere la quantità di moto, e quella del condensatore per la carica, tra (l'inverso del)la costante elastica della molla e l'induttanza della bobina ha ormai 150 anni, ed incredibilmente è visibile solo a chi ha uno sguardo attento alle forme ed ai funzionamenti, pensate alla rappresentazione grafica di questi due sistemi fisici, ed alla bobina che, se fosse libera, si estenderebbe e comprimerebbe al passaggio della corrente. Non se invocare l'arte o la techne[6], invece che la scienza, dove l'analogia è nata, o la didattica che l'ha dimenticata.

Esempi

Passiamo ora a considerare alcuni esempi particolari dalla meccanica, dalla meccanica dei fluidi, e dall'elettromagnetismo. Molte altre dimostrazioni di equilibrio spontaneo e di produzione artificiale di differenze stabili, si trovano in rete (parola chiave Learngineer ; D'Anna, Rosenberg 2010). La scelta di intitolare gli esempi con la grandezza intensiva che diventa eguale alla fine del processo, va sempre nel senso di sottolineare l'analogia.

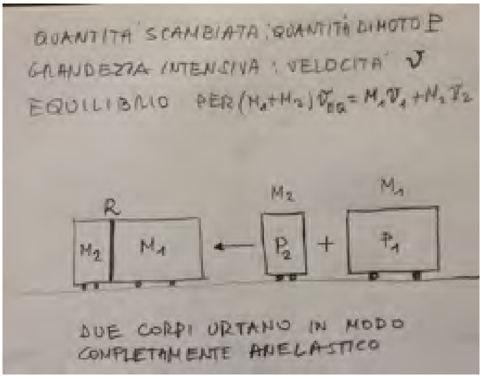


Equilibrio di Pressione: la condizione di mantenere costante la temperatura significa mantenere l'equilibrio per scambio di entropia, quella prodotta e ceduta all'ambiente



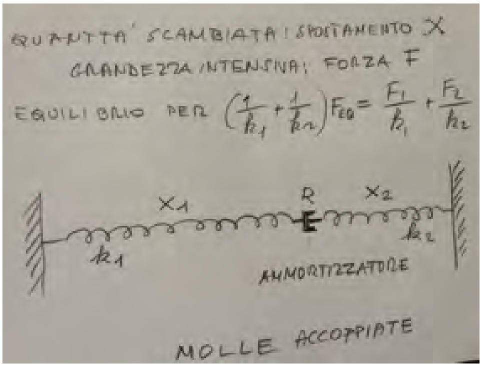
Equilibrio (di Potenziale) Elettrico

6 Scusate il greco ma vorremmo che pensaste alle vecchie tecnologie, non alle nuove.

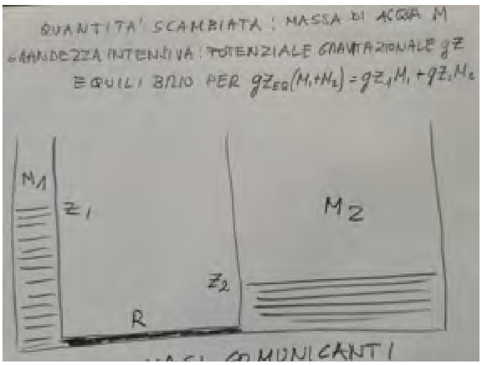


Equilibrio di Velocità

Equilibrio di Corrente Elettrica: il motivo di utilizzare bobine superconduttrici non è solo per concentrare la dissipazione nella resistenza come in tutti gli altri esempi, ma per suggerire che l'esperimento analogo con un circuito idraulico sarebbe possibile, se invece dell'acqua usassimo elio superfluido.



Equilibrio di Forze: per ottenere un oscillatore bisogna sostituire l'ammortizzatore che dissipa energia (la trasferisce nell'ambiente insieme al portatore entropia prodotta) con un altro contenitore di energia, per esempio una massa.



Equilibrio di Pressione e Potenziale Gravitazionale: Il motivo di posticipare "l'esempio" è che esso rappresenta una situazione più complicata degli altri dal punto di vista teorico. Ed è proprio la struttura analogica evidenziata in precedenza che ce ne fa accorgere. Non si tratta solo di equilibrio per scambio di due quantità diverse, ma del fatto che i due potenziali non sono costanti al variare dell'altezza. La massa cambia potenziale gravitazionale (posizione nel campo gravitazionale), ed il volume cambia pressione. Solo la somma è costante, e solo così ci si difende dalla domanda maligna: l'acqua al fondo del recipiente ha una pressione più alta di quella in superficie, come mai non sale spontaneamente?

Analogie per Sistemi Fisici Oscillanti

Verranno qui analizzati alcuni sistemi oscillanti tramite lo strumento dell'analogia come proposto nel corso di fisica di Karlsruhe. Per ogni sistema si individueranno una coppia di grandezze estensive ed la corrispondente coppia coniugata di grandezze intensive.

Dal confronto tra le correnti delle grandezze estensive si dedurranno le relazioni per calcolare i parametri caratteristici di un sistema oscillatorio; capacità e frequenza.

Struttura generale

Per identificare la grandezza intensiva occorre pensare a quale grandezza ha valore nullo allorché il il sistema non contiene la quantità identificata dalla grandezza estensiva.

Es. condizione necessaria e sufficiente affinché un carrellino non contenga quantità di moto è che la sua velocità sia zero: la grandezza intensiva è la velocità

Condizione necessaria e sufficiente affinché una molla non sia allungata è che non sia sottoposta a nessuna forza: la grandezza intensiva è la forza

Condizione necessaria e sufficiente affinché un condensatore non abbia un eccesso di cariche su un'armatura è che è che la tensione tra le armature sia nulla: la grandezza intensiva è la tensione fra le armature.

La definizione delle grandezze intensive avviene mediante la forma fondamentale di Gibbs che esprime le variazioni di energia di un sistema attraverso tutti i possibili portatori:

Portatore energia	**Energia**	**Grandezza estensiva**	**Grandezza intensiva**
Meccanico	$dE_m = vdp$	Quantità di moto	Velocità
	$dE_g = PdV$	Volume	Pressione
Termico	$dE_T = TdS$	Entropia	Temperatura
Elettrico	$dE_q = Vdq$	Carica elettrica	Potenziale elettrico
Chimico	$dE_c = \mu dn$	Numero di moli	Potenziale chimico

Sommando i termini in seconda colonna si ottiene la variazione totale di energia (forma fondamentale di Gibbs)

$$dE = vdp + pdV + TdS + Vdq + \mu\, dn + \ldots$$

che è un differenziale esatto, dunque le grandezze intensive che compaiono sono in relazione alle estensive ed all'energia con:

$$v = \frac{\partial E}{\partial p};\;\; p = \frac{\partial E}{\partial V};\;\; T = \frac{\partial E}{\partial S};\;\; V = \frac{\partial E}{\partial q};\;\; \mu = \frac{\partial E}{\partial n};\ldots$$

Gli esempi analizzati sono costituiti da due sistemi accoppiati. Per ognuno esiste una grandezza estensiva ed una intensiva, quindi due grandezze estensive e due intensive. La descrizione può essere fatta scegliendo una coppia estensiva-intensiva fra le grandezze del sistema.

Deduzione delle equazioni per due sistemi accoppiati

Nel caso di due sistemi accoppiati la forma fondamentale di Gibbs diventa:

$$dE = p_1 dV_1 + p_2 dV_2$$

Dove sono state indicate con V_1 e V_2 le grandezze estensive e con p_1 e p_2 le corrispondenti coniugate intensive.

Oltre che dalla forma di Gibbs il sistema è caratterizzato da due equazioni costitutive che descrivono la relazione tra grandezza estensiva e intensiva. Queste equazioni hanno il ruolo di fissare il valore della "quantità" di grandezza estensiva in base al livello della grandezza intensiva. Il linguaggio è mutuato dall'analogia con l'idraulica. La quantità di acqua contenuta il un secchio cilindrico è il prodotto tra la sua base e l'altezza. L'altezza è la grandezza intensiva mentre la base ha funzione di "capacità" del secchio. In modo analogo la quantità di carica sulle armature di un condensatore è il prodotto tra una costante (legata alle caratteristiche del condensatore) e la differenza di potenziale fra le sue armature. Così la quantità di moto di un carrello è data dal prodotto della sua massa ("capacità di inerzia") per la sua velocità. In questi casi la relazione tra grandezza estensiva ed intensiva è lineare; in generale, tuttavia, la relazione è non lineare e questo complica la descrizione (si veda il caso delle oscillazioni in un gas).

Siano $V_1 = f_1(p_1)$ e $V_2 = f_2(p_2)$ le equazioni costitutive dei due sistemi.

Supporremo il sistema complessivo isolato ovvero che non siano presenti correnti energia entranti o uscenti nel o dal sistema. In questa ipotesi:

$$dE = 0 \qquad \text{e} \qquad p_1 dV_1 + p_2 dV_2 = 0$$

Poiché $p_1 = \dfrac{\partial E}{\partial V_1}; \quad p_2 = \dfrac{\partial E}{\partial V_2};$ segue: $\dfrac{\partial E}{\partial V_1} dV_1 + \dfrac{\partial E}{\partial V_2} dV_2 = 0;$ ovvero:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V_1} \dot{V}_1 + \frac{\partial E}{\partial V_2} \dot{V}_2 \right) dt = 0; \qquad I_1 \equiv \dot{V}_1 = \frac{\partial E}{\partial V_2} = p_2; \qquad I_2 \equiv \dot{V}_2 = -\frac{\partial E}{\partial V_1} = -p_1;$$

Possiamo riassumere nello schema:

Grandezza estensiva	Corrente	Grandezza intensiva
V_1	I_1	p_1
V_2	I_2	p_2

Dedurremo le equazioni nel caso semplice in cui la relazione tra grandezza estensiva ed intensiva è lineare. Se non fosse così possiamo studiare le piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio sviluppando al prim'ordine questa relazione.

$$\begin{cases} I_1 = p_2 \\ I_2 = -p_1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} V_1 = C_1 p_1 \\ V_2 = C_2 p_2 \end{cases} \qquad \text{e anche:} \qquad \begin{cases} \dot{V}_1 = p_2 \\ \dot{V}_2 = -p_1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \dot{V}_1 = C_1 \dot{p}_1 \\ \dot{V}_2 = C_2 \dot{p}_2 \end{cases}$$

Derivando la prima rispetto al tempo: $\ddot{V}_1 = \dot{p}_2 = \dfrac{\dot{V}_2}{C_2} = \dfrac{-p_1}{C_2} = -\dfrac{V_1}{C_2 C_1}$;

ovvero: $\ddot{V}_1 + \dfrac{V_1}{C_2 C_1} = 0$ analogamente per la seconda.

Derivando invece la prima equazione del secondo gruppo: $C_1 \ddot{p}_1 = \dot{p}_2 = \frac{\dot{V}_2}{C_2} = -\frac{\dot{p}_1}{C_2}$

da cui: $\ddot{p}_1 + \frac{p_1}{C_2 C_1} = 0$ e analogamente per p_2.

Queste grandezze oscillano con frequenza angolare $\omega = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2}}$, e con periodo: $T = 2\pi \sqrt{C_1 C_2}$

Oscillazione meccaniche

Il sistema è costituito dall'accoppiamento di una molla (di costante elastica k) e un carrellino (di massa m). Per il carrellino la grandezza estensiva è la quantità di moto (p) mentre quella intensiva è la velocità (v) (se la velocità è nulla, la quantità di moto è nulla).

Per la molla la grandezza estensiva è l'allungamento (x) mentre quella intensiva è la forza (F) (se la forza applicata alla molla è nulla l'allungamento è nullo.

L'equazione costitutiva per il carrellino è: $p = mv$. Per la molla: $x = F/k$. Riassumendo:

	Grandezza estensiva	Corrente	Grandezza intensiva	Eq. costitutiva
Carrellino	Quantità di moto: p	I_p	v (velocità)	p = mv
Molla	Allungamento: x	I_x	F (Forza)	x = F/k

La forma fondamentale di Gibbs è: $dE = vdp + Fdx$ che risolta nel caso di sistema isolato ($dE=0$) da: $I_p = F$, $I_x = -v$.

$$\begin{cases} I_p = F = \dot{p} & p = mv & \dot{p} = m\dot{v} \\ I_x = -v = \dot{x} & x = (1/k)F & \dot{x} = (1/k)\dot{F} \end{cases}$$

- Descrizione con le variabili della molla: x, F.

Nella variabile estensiva: $\ddot{x} = -\dot{v} = -\frac{\dot{p}}{m} = -\frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x;$ cioè: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0;$

oppure nella variabile intensiva: $\frac{1}{k}\ddot{F} = -\dot{v} = -\frac{\dot{p}}{m} = -\frac{F}{m}$; cioè: $\ddot{F} + \frac{k}{m}F = 0$

- Descrizione con le variabili del carrellino: p, v.

Nella variabile estensiva: $\ddot{p} = \dot{F} = k\dot{x} = -kv = -\frac{k}{m}p$; cioè: $\ddot{p} + \frac{k}{m}p = 0$

Nella variabile intensiva: $\ddot{v} = \frac{\dot{F}}{m} = \frac{k}{m}\dot{x} = -\frac{k}{m}v$; cioè: $\ddot{v} + \frac{k}{m}v = 0$

Queste grandezze oscillano con frequenza angolare $\sqrt{\frac{k}{m}}$, ovvero hanno periodo: $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Il ruolo di capacità per il carrellino è la massa inerziale m, mentre per la molla è l'inverso della costante elastica $1/k$.

Oscillazioni in elettricità

Il sistema analizzato è il classico accoppiamento condensatore – bobina, nel quale si trascureranno gli effetti dissipativi. Il condensatore ha capacità C mentre la bobina ha induttanza L. Per il condensatore la grandezza estensiva è la carica elettrica sulle armature (q) mentre quella intensiva è la tensione tra le armature (V) (se la tensione è nulla, la quantità di carica elettrica è nulla). Per la bobina la grandezza estensiva è il flusso magnetico (Φ) mentre quella intensiva è la corrente elettrica circolante I (se la corrente nella bobina è nulla il flusso magnetico è nullo). Si introduce nel sistema una spinta mediante un impulso di tensione: le grandezze estensive ed intensive iniziano ad oscillare.

L'equazione costitutiva per il condensatore è: $q = CV$. Per la bobina: $\Phi = LI$. Riassumendo:

	Grandezza estensiva	Corrente	Grandezza intensiva	Eq. costitutiva
Condensatore	Carica elettrica: q	I_q	V (tensione)	q = CV
Bobina	Flusso magnetico: Φ	I_Φ	I (corrente)	Φ =LI

La forma fondamentale di Gibbs è: $dE = Vdq + Id\Phi$ che risolta nel caso si di sistema isolato (*dE=0)* da: $I_p = I$, $I_\Phi = -V$.

$$\begin{cases} I_q = I = \dot{q} \qquad q = CV \qquad \dot{q} = C\dot{V} \\ I_\Phi = -V = \dot{\Phi} \qquad \Phi = LI \qquad \dot{\Phi} = L\dot{I} \end{cases}$$

Seguendo la traccia dell'esempio meccanico si ricavano le equazioni:

Descrizione con le variabili del condensatore: $\ddot{q} + \dfrac{1}{LC} q = 0$ e $\ddot{V} + \dfrac{1}{LC} V = 0$

Descrizione con le variabili della bobina: $\ddot{\Phi} + \dfrac{1}{LC} \Phi = 0$ e $\ddot{I} + \dfrac{1}{LC} I = 0$

che oscillano con frequenza angolare $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ e hanno periodo di $T = 2\pi\sqrt{LC}$

Il ruolo di capacità per il condensatore è C, mentre per la bobina è L (capacità di contenere flusso magnetico).

Oscillazioni in idraulica (tubo a U)

Il sistema analizzato è un tubo ad U contenente acqua accoppiato al campo gravitazionale. La presenza del campo di gravità si traduce nella pressione idrostatica sul fondo di una colonna d'acqua.

Si introduce nel sistema una spinta abbassando il livello dell'acqua in un ramo del tubo. Il dislivello dell'acqua tra i due rami aumenta segnalando un aumento di gradiente di pressione tra i livelli nei due rami. Il circuito è chiuso. Lasciando libero il sistema esso inizia ad oscillare.

Lo scambio di energia avviene tra il campo di gravità e l'inerzia dell'acqua in movimento. Il tubo a destra si svuota e quello a sinistra si riempie. La massa nel tubo di destra $m_d = \delta A\, h_d$, analogamente per quello di sinistra. $m_s = \delta A\, h_s$ dove A è la sezione del tubo.

Le grandezze estensive sono la differenza di volume tra i due rami e la quantità di moto dell'acqua per unità di area; quelle intensive sono rispettivamente la differenza di pressione tra i due rami e la portata dell'acqua.

	Grandezza estensiva	Corrente	Grandezza intensiva	Eq. costitutiva
Inerzia	Qnt. di moto/Area: p_A	I_p	Q (portata)	$p_A = (m/A^2)Q$
Tubo a U	Volume: V	I_V	P (pressione)	$V = 2A/\delta g$

E' istruttivo vedere come si possono ricavare tali grandezze.

L'energia totale del sistema è immagazzinata nel campo di gravità e nel movimento dell'acqua all'interno del tubo.

Campo di gravità: $E_G = 1/2\delta gAh_s^{\ 2} + 1/2\delta gAh_d^{\ 2}$;

e $dE_G = \delta gAh_s dh_s + \delta gAh_d dh_d$;

posto: $h_s = h_0 - y$ e $h_d = h_0 + y$ (dove h_0 è il livello di equilibrio tra i due rami) si ottiene: $dE_G = 2\delta gAydy$; poiché $P = \delta gy$ è la differenza di pressione tra i due rami e $2Ady$ è la variazione di volume dV (tra i due rami) per una variazione di livello dy dell'acqua.

Allora: $dE_G = PdV$

L'energia contenuta nell'inerzia dell'acqua in movimento è invece: $E_p = p^2/2m$,dove p è la quantità di moto dell'acqua, ovvero $E_p = \frac{p^2}{2m} = \frac{(p/A)^2}{2m/A^2} = \frac{p_A^{\ 2}}{2m/A^2}$

Allora: $dE_p = \frac{p_A}{m/A^2} dp_A = Qdp_A$

Le equazioni costitutive sono: $V = \frac{2A}{\delta g}P$ per il volume, mentre $p_A \equiv \frac{p}{A} = \frac{mQ}{A^2}$ per l'inerzia.

Il termine $\frac{2A}{\delta g}$ ha ruolo di capacità per il tubo e la gravità mentre $\frac{m}{A^2}$ ha ruolo di capacità per l'inerzia. La forma fondamentale di Gibbs è: $dE = PdV + p_A dQ$ che risolta:

$$\begin{cases} I_p = \dot{p}_A = P & p_A = \frac{m}{A^2}Q & \dot{p}_A = \frac{m}{A^2}\dot{Q} \\ I_V = \dot{V} = -Q & V = \frac{2A}{\delta g}P & \dot{V} = \frac{2A}{\delta g}\dot{P} \end{cases}$$

Seguendo la traccia degli esempi precedenti si ricavano le equazioni:

nelle variabili inerzia: $\ddot{p}_A + \left(\frac{\delta gA}{2m}\right)p_A = 0$; $\ddot{Q} + \left(\frac{\delta gA}{2m}\right)Q = 0$

nelle variabili pressione: $\ddot{V} + \left(\frac{\delta gA}{2m}\right)V = 0$; $\ddot{P} + \left(\frac{\delta gA}{2m}\right)P = 0$

queste variabili oscillano con frequenza angolare $\omega = 1/\sqrt{\left(\frac{2A}{\delta g}\right)\left(\frac{m}{A^2}\right)} = 1/\sqrt{\frac{2l}{g}}$ dove l è la lunghezza della parte di tubo riempita d'acqua e $A/\delta g$ è la capacità di uno dei due rami del tubo; la capacità complessiva è il doppio. Il periodo di oscillazione è: $T = 2\pi\sqrt{2l/g}$. Il tubo a U è l'equivalente di un circuito elettrico con due condensatori uguali in parallelo ad una bobina.

Oscillazioni nei gas

Il sistema analizzato è costituito da un cilindro termicamente isolato contenente un gas perfetto chiuso da un pistone mobile. Si introduce nel sistema una corrente di quantità di moto spostando il pistone in modo da far diminuire il volume. Il gas si comprime adiabaticamente. Il circuito è chiuso. Lasciando la presa, la corrente trasporta quantità di moto nel pistone e la pressione nel gas diminuisce progressivamente. Il pistone si carica di quantità di moto mv e comincia a scambiare energia con il gas oscillando. I sistemi accoppiati sono: il pistone di massa m e il gas contenuto nel cilindro di volume V; queste sono anche le variabili estensive del sistema; la velocità v del pistone e la pressione P del gas sono rispettivamente le variabili intensive. Le equazioni costitutive sono $p = mv$ per il pistone e $PV^{\gamma} = k$ per il gas (trasformazione adiabatica). Poiché questa equazione è non lineare, studieremo le piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio. La versione linearizzata è $dV = -(V_E/\gamma\, P_E)dP$. Per ragioni dimensionali conviene moltiplicare la pressione per l'area A del cilindro e dividere il volume per la stessa.

	Grandezza estensiva	Corrente	Grandezza intensiva	Eq. costitutiva
Pistone	Quantità di moto: p	I_p	v (velocità)	p = mv
Gas	Volume: V/A	I_x	PA (Pressione)	$dV/A=-(V_E/\gamma A^2 P_E)dPA$

La capacità per il pistone è la sua massa m mentre per il gas è $(V_E/\gamma A^2\, P_E)$. Il significato del segno negativo nell'equazione costitutiva è che un aumento di volume fa diminuire la pressione. La forma fondamentale di Gibbs è: $dE = -APdV/A + vdp$ che risolta:

$$\begin{cases} \dot{p} = AP & p = mv \quad \dot{p} = m\dot{v} \\ \dfrac{\dot{V}}{A} = v & dV = -\dfrac{V_E}{\gamma P_E}dP \end{cases}$$

Al solito si ottengono le equazioni:

pistone: $\ddot{p} + \dfrac{A^2\gamma P_E}{mV_E}p = 0 \qquad \ddot{v} + \dfrac{A^2\gamma P_E}{mV_E}v = 0$

gas: $\ddot{V} + \dfrac{A^2\gamma P_E}{mV_E}V = 0 \qquad \ddot{P} + \dfrac{A^2\gamma P_E}{mV_E}P = 0$

La frequenza angolare è $\omega = \sqrt{A^2\gamma P_E / mV_E}$, mentre il periodo è: $T = 2\pi\sqrt{mV_E / A^2\gamma P}$

Conclusioni

Le analogie sono importanti quando smettono di essere tali La conoscenza diventa più profonda quando scopre una sintesi che mostra l'argomento sotto un punto di vista più generale; ma una analisi più approfondita, porta alla luce le differenze essenziali; permette di svelare le caratteristiche di un sistema fisico alla luce di quanto imparato nello studio di altri sistemi in ambiti diversi. Permette inoltre di andare alla radice delle loro peculiarità rispetto ad altri evidenziandone le differenze sostanziali. Proprio queste risultano interessanti per attivare un rapporto dialettico tra i vari campi della fisica non più isolati l'uno dall'altro. Riprendere quanto imparato per un sistema per confrontarlo con un altro è un esercizio molto fecondo che, tra l'altro, aiuta a risparmiare tempo non dovendo tutte le volte rispiegare concetti già acquisiti: si tratterà semplicemente di riprenderli, con i linguaggi specifici dell'ambito in esame. In particolare nello studio delle oscillazioni, senza entrare nell'ambito delle equazioni differenziali, basta acquisire il concetto di capacità di un sistema per calcolare di volta in volta la frequenza di oscillazione. L'altra idea forte è che due sistemi accoppiati possano scambiare, assieme all'energia, altre grandezze fisiche in modo che si stabilisca una periodicità e che questo non dipende tanto dal tipo di grandezza, quanto dalla relazione che intercorre tra loro. A questo punto ci si potrebbe chiedere se fosse possibile realizzare ulteriori sistemi oscillanti: meccano-elettrico, idraulico-elettrico, meccano-chimico… ed eventualmente capire quando ciò non è possibile e perché.

Bibliografia

Agnes, C. (2013) *Eguaglianza e Differenze: Parabole dalla Scienza alla Politica*. Dialogo con Nadia Urbinati, Columbia University New York; Biennale Democrazia, Torino 2013 http://biennaledemocrazia.it/eventi/eguaglianza-e-differenze-dalla-natura-alla-politica/

D'Anna, M. ; Rosenberg, J. (2010). *Demonstration Experiments* In F. Herrmann (Chairman) *Analogies: a key to understanding physics*. Symposium GIREP-ICPE-MPTL Conference Reims http://www.univ-reims.fr/site/evenement/girep-conference/list-of-submitted-full-papers-for-proceedings,13181,23070.html

Fuchs, H.U. (2010). *Force Dynamic Gestalt, Metaphor, and Scientific Thought*. Invited talk at the Conference "*Innovazione nella didattica delle scienze nella scuola primaria: al crocevia fra discipline scientifiche e umanistiche"*, Università di Modena e Reggio Emilia, 12-13 novembre. https://home.zhaw.ch/~fusa/QP_Site/QP_Frame.html

Herrmann, F. (1985). *Der Karlsruher Physikkurs*, Köln: Aulis; trad. italiana v. http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/publication/pub_fremdsprachen/italienisch.html

Russo, L. (2013) *La Rivoluzione Dimenticata*. Terza Edizione , Feltrinelli Milano 2013

COMUNICAZIONI

SCACCHIERA E POP-CORN: UNA SITUAZIONE PROBLEMATICA PER LA SCUOLA PRIMARIA

Giada Astorri, Michela Maschietto
Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia

Premessa

In questo contributo si presenta un percorso didattico finalizzato alla risoluzione di una situazione problematica complessa. Il progetto è stato pianificato nell'ambito della tesi di laurea del Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria e realizzato in una classe IV di scuola primaria nell'anno scolastico 2012/2013 (Astorri, 2013).

La scelta di trattare questo argomento deriva dal fatto che "porsi e risolvere problemi" è uno dei nodi centrali dell'attività matematica scolastica (Zan, 2007). Nella prassi scolastica spesso tale attività si limita allo svolgimento di esercizi di routine, mentre la possibilità di affrontare problemi, al posto di soli esercizi ripetitivi o risolvibili attraverso l'applicazione di una procedura già conosciuta, è invece fondamentale al fine di permettere agli alunni di attivare comportamenti strategici (Zan, 1996). Anche nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo* (2012) viene sottolineata la distinzione tra esercizio e problema e ribadita la necessità di proporre agli alunni attività in grado di sollecitare e favorire la presa di decisioni e l'assunzione di responsabilità nei confronti dei propri processi decisionali.

Il percorso didattico qui presentato prende avvio dalla lettura della leggenda sulla nascita degli scacchi. Mentre gli alunni sono ancora alle prese con la risoluzione del problema evocato dalla storia e stanno effettuando il conteggio dei chicchi presenti sulla scacchiera, l'insegnante, attraverso domande poste in momenti opportuni, li impegna prima a determinare se la quantità di chicchi presenti sulla scacchiera è sufficiente per realizzare dei pop-corn per la classe, e successivamente nell'individuazione della casella della scacchiera contenente tale quantità.

Il presente articolo si compone di quattro sezioni. Nella prima sezione sono presentati alcuni riferimenti teorici che hanno guidato la progettazione e l'analisi della sperimentazione, nella successiva sezione viene esposto lo schema progettuale, nella terza sezione viene presentata la sperimentazione, mentre l'ultima sezione contiene alcuni commenti conclusivi sul lavoro svolto.

Riferimenti teorici

Il problema viene assunto in questo percorso come costrutto metodologico per la costruzione del sapere. Operare attraverso la didattica per problemi stimola l'interazione con l'insegnante e i compagni e permette lo sviluppo di capacità interpersonali. Ad esempio, la stesura di diari, la verifica personale dei risultati, la discussione critica delle idee promuovono tali capacità; mentre il coinvolgimento motivazionale, finalizzato alla ricerca della risoluzione di un compito, porta gli alunni a farsi carico della responsabilità del proprio apprendimento (Martini, 2006).

Nell'attività didattica sui problemi assume un ruolo cruciale la distinzione tra esercizio e problema. Zan (2010), analizzando la definizione di problema data dallo psicologo della Gestalt Duncker "un problema nasce quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla", mette in evidenza che per poter parlare di problema è necessario che ci sia un soggetto che vive una determinata situazione come tale, ma anche che deve essere presente uno scopo (una meta, un obiettivo) che sfida le capacità possedute del soggetto. È proprio il fatto di non sapere come raggiungere la meta a connotare diversamente esercizi e problemi.

Nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo* (2012) l'attività di soluzione dei problemi viene descritta come “caratteristica della pratica matematica” (p.49); viene inoltre sottolineata l’importanza di contestualizzare i problemi matematici in situazioni concrete. Infatti si legge: “la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana”; e ancora “i problemi devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola” (p.49).

Come sottolinea Zan (2010), invece, nella prassi scolastica spesso l’attività di soluzione di problemi si riduce allo svolgimento di esercizi di routine che, essendo fortemente caratterizzati, nel tempo producono dei veri e propri stereotipi sulla risoluzione di problemi e contribuiscono alla formazione di convinzioni, quali ad esempio: i problemi di matematica hanno sempre una e una sola soluzione; un problema si può risolvere in dieci minuti; nei problemi vanno applicate le conoscenze appena studiate. Anche nella gestione dell’attività risolutiva in classe è possibile individuare delle modalità ricorrenti: ad esempio, i problemi richiedono poco tempo per essere risolti e per farlo si ricorre a conoscenze matematiche apprese in un periodo recente. Inoltre, l’obiettivo che generalmente si pone l’insegnante quando propone un problema è quello valutativo, mentre difficilmente i problemi vengono usati per consolidare o introdurre delle nuove conoscenze o abilità come quella di problem-solving (Zan, 2007). Pertanto, se l’attività di soluzione dei problemi finisce con coincidere unicamente con la proposta di esercizi, si può solo attivare negli alunni un pensiero ri-produttivo (Zan, 2010).

Purtroppo nella prassi didattica raramente si sfruttano le potenzialità dell’attività di soluzione di problemi, potenzialità che sono molteplici. Tale attività, infatti, rappresenta un ambiente favorevole allo sviluppo di capacità metacognitive, in quanto le decisioni che il risolutore è chiamato a prendere durante il processo risolutivo sono strategie di regolazione che coinvolgono la consapevolezza delle proprie risorse. Ma i suoi vantaggi riguardano anche la possibilità per l’allievo di assumersi la responsabilità del proprio apprendimento, passaggio che viene favorito dal fatto che durante l’attività risolutiva l’alunno è direttamente impegnato a prendere decisioni (Zan, 1996). Inoltre, essendo questa attività influenzata da fattori di natura affettiva, quali convinzioni e atteggiamenti negativi frutto delle esperienze passate dell’alunno, ma anche dalla consapevolezza delle proprie capacità (senso di autoefficacia), attraverso questa tipologia di attività è possibile mettere in evidenza le convinzioni scorrette, favorendo così quei processi che potrebbero portare alla loro rimozione (Zan, 1996). Questa attività ha pertanto un ruolo di estrema importanza sia in riferimento alla crescita delle competenze degli alunni, sia ai fini dello sviluppo di un’adeguata visione della matematica, che non deve essere ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta come contesto per affrontare e porsi problemi significativi.

Il progetto didattico

Gli obiettivi della sperimentazione

La caratteristica peculiare di questa proposta didattica consiste nel fatto che l’alunno è calato in prima persona nella situazione problematica proposta ed è direttamente chiamato in causa nel farsi carico del problema, condividendo lo scopo di risoluzione con i compagni e l’insegnante. Gli obiettivi di questo percorso di apprendimento sono quelli di promuovere negli alunni la partecipazione attiva, spronarli all’utilizzo del pensiero strategico, stimolarli a comunicare e argomentare le loro idee, far emergere eventuali difficoltà concettuali e attivare la riflessione metacognitiva sulle attività svolte.

Nell’affrontare il percorso risolutivo vengono anche introdotti nuovi concetti e abilità e richiamate competenze precedentemente acquisite. Nello specifico, facendo riferimento alle *Indicazioni nazionali per il curricolo* (2012), le competenze interessate in riferimento al nucleo “Numeri” sono:

- eseguire le quattro operazioni con sicurezza valutando l’opportunità di ricorrere al calcolo mentale, scritto o con la calcolatrice a seconda delle situazioni.

In particolare, in questo percorso, gli alunni operano con i grandi numeri.

Le competenze mobilitate in riferimento al nucleo “Relazioni, dati e previsioni” sono:

- rappresentare relazioni e dati, e in situazioni significative utilizzare le rappresentazioni per ricavare informazioni, formulare giudizi e prendere decisioni;
- usare le nozioni di frequenza, di moda e di media aritmetica;
- utilizzare le unità di misura per calcolare e fare stime di pesi e di volumi/capacità;
- passare da un’unità di misura a un’altra;
- misurare grandezze utilizzando sia unità arbitrarie, sia unità e strumenti convenzionali.

Lo schema progettuale

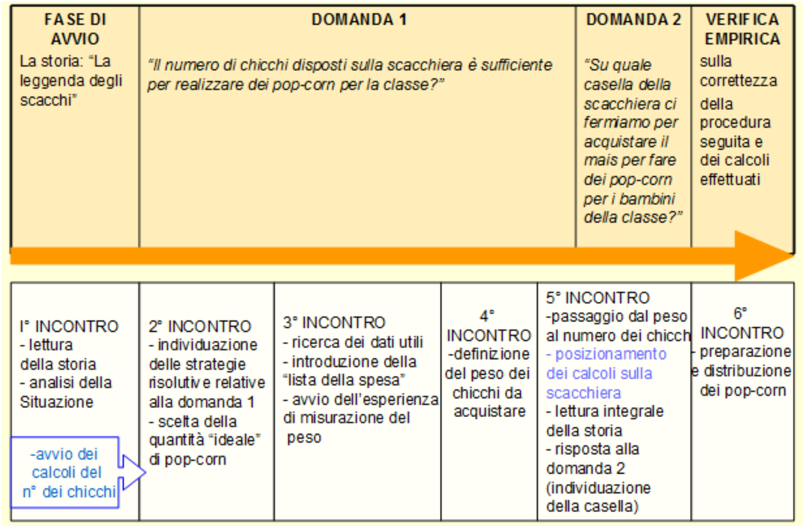


Figura 1. Lo schema del percorso

Il percorso didattico, schematizzato nella Figura 1, si sviluppa in sei incontri della durata di circa due ore. Ai bambini è stata inizialmente presentata una storia, “La leggenda degli scacchi”, che in realtà nasconde un sofisticato problema matematico. Mentre sono ancora alle prese con la risoluzione di questo primo problema, l’insegnante, attraverso delle domande poste in momenti opportuni, li introduce nella situazione problematica che li impegna nel calcolo della quantità di mais necessaria per poter realizzare dei pop-corn per tutti i bambini della classe.

È utile precisare che lo schema progettuale contiene solo indicazioni orientative che sono andate progressivamente definendosi in base alle scelte e alle decisioni assunte dagli alunni durante la fase attuativa. La caratteristica che infatti contraddistingue il lavorare per progetti, come sostiene Ugolini (2006), è il carattere di flessibilità che orienta tutto il fare. In questa esperienza di apprendimento sono gli alunni a essere gli attori del proprio percorso di conoscenza, mentre l’insegnante assume il ruolo di regista organizzando e dirigendo il confronto finalizzato alla costruzione del sapere.

Gli strumenti metodologici

All’inizio del percorso a ciascun bambino è stato consegnato un “Diario di bordo” personale nel quale annotare il resoconto e le riflessioni delle esperienze vissute. Tale strumento è stato utilizzato dall’insegnate per poter meglio comprendere l’andamento del processo di apprendimento, ed è servito agli alunni come spazio di riflessione ed elaborazione personale dell’esperienza.

Un altro strumento utilizzato nel corso della sperimentazione per guidare e strutturare il lavoro della classe è la "lista della spesa". La lista, nel procedere del percorso, ha assunto la funzione di guida e di traccia di ciò che occorreva fare e avere a disposizione per raggiungere lo scopo. Il cartellone contenente la lista è stato appeso sulle pareti dell'aula ed è stato continuamente aggiornato dagli alunni.

I materiali

Gli strumenti e i materiali messi a disposizione degli alunni sono stati: bilance, lavagna, cartelloni, cartoncino rigido, carta, matita, chicchi di mais, contenitori di diverse forme e dimensioni (bicchieri grandi e piccoli, sacchettini di plastica), materiali di diverso tipo utili nella fase di cottura e realizzazione dei pop-corn (fornellino elettrico, pentole, mestoli, cucchiai, contenitori).

La sperimentazione didattica

In accordo con i riferimenti teorici sopra accennati, attraverso l'analisi della sperimentazione del percorso, si intende discutere dei vantaggi che possono derivare dall'utilizzo di un percorso di insegnamento-apprendimento centrato sui problemi. In questa sezione, si cercherà quindi di mettere in evidenza come il percorso proposto e l'approccio didattico che lo sostiene sono stati in grado di: promuovere la partecipazione attiva degli alunni e la loro progressiva assunzione di responsabilità nell'apprendimento; spronare l'utilizzo del pensiero strategico, richiamando e organizzando le conoscenze possedute e creandone di nuove; stimolare la comunicazione tra gli alunni per sostenere e argomentare le loro idee al fine di poter prendere decisioni condivise; far emergere le difficoltà concettuali con lo scopo di affrontarle; attivare la riflessione metacognitiva sulle attività svolte.

Primo incontro

Il punto di partenza di questo percorso è la storia delle origini del gioco degli scacchi: "La leggenda della nascita degli scacchi", di cui si possono trovare diverse varianti anche su internet[1]. Nel primo incontro, la storia non è stata integralmente letta, ma la lettura si è arrestata alla reazione di derisione del re alla richiesta del bramino. Il finale è stato poi letto nell'ultimo incontro del percorso.

L'impegno richiesto agli alunni in questa fase è stato quello di leggere la storia e di comprenderne e interpretarne il testo per costruire una valida rappresentazione del problema in essa contenuto. Il processo risolutivo, infatti, implica come primo passaggio un'adeguata rappresentazione del problema che passa attraverso la comprensione del testo. Per realizzare quest'ultima si richiede al lettore di mettere in gioco diverse tipologie di conoscenze: c'è innanzitutto la conoscenza del significato delle parole (il cosiddetto dizionario), c'è la conoscenza delle cose del mondo (il sapere enciclopedico) e c'è la capacità di saper cogliere gli impliciti presenti nel testo (Zan, 2012). A tal fine, sotto la guida dell'insegnante, i bambini hanno individuato il contesto geografico e temporale della storia, parafrasato il testo, descritto la struttura della scacchiera, progettato e realizzato il modello in cartoncino della stessa (Figura 2), riconosciuto la situazione problematica presente nella storia (che è quella di sapere quanti chicchi di riso arriva a contenere la scacchiera) e individuato l'opportuna strategia di calcolo utile alla sua risoluzione (che consiste nel raddoppiare il numero dei chicchi a ogni passaggio di casella e poi sommare tra loro le quantità così ottenute).

1 http://www.matean.net/index.php/scacchi-e-curiosita/24-origine-degli-scacchi-leggende-2 oppure http://it.wikipedia.org/wiki/Scacchi

Figura 2. La realizzazione della scacchiera

Si è scelto di far procedere l'attività di calcolo dei chicchi presenti nelle diverse caselle della scacchiera in maniera indipendente, al di fuori degli incontri. A turno, a ogni bambino è stato dato il compito di calcolare il numero di chicchi di una determinata casella della scacchiera a partire dal calcolo effettuato per la casella precedente. L'insegnante si è fatta carico di monitorare giornalmente la "staffetta" dei conteggi, raccogliendo il foglietto contenente il calcolo eseguito dall'alunno incaricato e una volta trascritto il risultato su un altro foglietto lo ha consegnato a un nuovo incaricato. Quindi ciascun allievo non ha dovuto determinare tutti i prodotti (le caselle sono 64, quindi i prodotti da svolgere sono 63), ma solo due o tre, fino a che tutti i calcoli non sono stati eseguiti. In tal modo, ogni alunno ha potuto rendersi conto solamente della quantità di chicchi presente nelle caselle per le quali ha effettuato il calcolo, in quanto, solo al termine del percorso, i foglietti sono stati posizionati sul modellino della scacchiera costruito dai bambini e tutti i risultati sono stati resi noti.

Secondo incontro

Mentre gli alunni erano impegnati nei calcoli finalizzati a risolvere il problema sollevato dalla storia, l'insegnante li ha introdotti in una nuova situazione problematica. Agli alunni è stato chiesto di studiare il problema mettendo al posto del riso dei chicchi di mais con l'obiettivo di fabbricare dei pop-corn per la classe: *"Fino ad ora abbiamo parlato di chicchi di riso, ma se sulla scacchiera invece del riso avessimo dei chicchi di mais, questi sarebbero sufficienti per fare dei pop-corn per la classe?".*

Questa variante al problema iniziale ha saputo coinvolgere e impegnare gli alunni in discussioni e previsioni dalle quali sono scaturite due possibili strategie risolutive:

- terminare di calcolare i chicchi della scacchiera e dividerli per il totale delle persone (alunni e maestre), al fine di ottenere quanti pop-corn può avere ciascuna persona;
- decidere prima quanti pop-corn ciascuno deve avere, calcolare i pop-corn totali e poi confrontarli con quelli calcolati sulla scacchiera.

Tale passaggio è stato particolarmente critico in quanto gli alunni hanno faticato a raggiungere una decisione unanime. Questo aspetto è caratteristico dell'attività di risoluzione di problemi: infatti, per risolvere un problema, occorre prendere decisioni che si configurano come strategie di regolazione nelle quali occorre avere la consapevolezza delle proprie risorse e saperle dirigere in funzione del raggiungimento di un obiettivo (Zan, 1996). Per aiutarli a compiere una scelta tra i due possibili sviluppi del problema l'insegnante ha messo in evidenza come per entrambe le vie fosse utile definire una quantità "ideale" di pop-corn alla quale riferirsi. Per agevolare tale scelta ha poi mostrato alla classe alcuni contenitori colmi di pop-corn: un sacchettino di plastica trasparente, un bicchiere di piccole dimensioni e uno di grandi dimensioni. I bambini hanno concordato nel ritenere il sacchettino di plastica trasparente il contenitore della quantità "ideale" di pop-corn, che pertanto è stato assunto come la quantità campione da distribuire a ciascun bambino della classe[2].

Terzo incontro

In questo incontro gli alunni hanno discusso tra loro al fine di mettere in evidenza gli elementi utili per poter procedere verso la soluzione del problema:

> Andrea C.: Venticinque numero dei bambini e delle maestre.
>
> Sara: Dobbiamo anche trovare il numero dei pop-corn per ogni bambino.
>
> [...]
>
> Giulia: Non possiamo contarli uno alla volta...
>
> [...]
>
> Insegnante: Come possiamo misurarla questa quantità?
>
> Luca A.:Con il peso...

Per sostenere la costruzione della strategia risolutiva, l'insegnante ha proposto di compilare una "lista della spesa", da aggiornare nel corso delle lezioni, nella quale inserire tutto ciò che sarebbe potuto servire per realizzare i pop-corn per la classe. La lista è stata utilizzata come una "guida", come una traccia di ciò che occorreva fare per raggiungere lo scopo. Agli alunni è stato precisato che il materiale in essa indicato sarebbe stato procurato dall'insegnante e messo a disposizione nell'incontro successivo, anche se alcuni oggetti avrebbero anche potuto essere già disponibili perché già presenti all'interno della grande borsa che l'insegnante porta sempre con sé.

Durante la fase di compilazione della "lista della spesa" i bambini hanno deciso di inserire la pesa, con lo scopo di misurare la quantità di pop-corn assunta come campione. Inoltre, sempre nel corso di tale attività, i bambini hanno consapevolmente precisato che l'insegnante, per poter acquistare il mais necessario, ha la necessità di conoscere il peso dei chicchi e non quello dei pop-corn. A questo punto si è reso indispensabile un chiarimento: i bambini si sono chiesti se il peso dei pop-corn fosse lo stesso di quello dei chicchi, e hanno ragionato e discusso sul cambiamento che subisce durante la cottura il chicco di mais che da granello si trasforma in pop-corn. L'interessante discussione che ne è scaturita (di cui si riporta uno stralcio qui di seguito), dimostra come le idee, che inizialmente vengono espresse in forma incompiuta, attraverso il confronto con gli altri vanno progressivamente assumendo una forma sempre più precisa:

> Insegnante: Secondo voi i pop-corn pesano come i chicchi?
>
> Secondo Bryan quelli non ancora preparati sono più pesanti; la classe concorda con la sua opinione.
>
> Jennifer: Pesa di più il pop-corn perché è più grosso….
>
> Giulia: I pop-corn sono più leggeri perché nella cottura tutto l'interno è scoppiato e quindi è più leggero. Perché nello scoppio una parte del pop-corn esce e rimane nella padella ...
>
> Elisa: Secondo me hanno lo stesso peso perché il pop-corn è più grande ed è più leggero, invece il chicco è più pesante ma più piccolo.
>
> Insegnante: Quindi secondo te hanno lo stesso peso?
>
> Elisa: Sì.

---

2 In questo passaggio, per rendere più fluida la discussione del gruppo si sarebbe potuto proporre agli alunni di elaborare le strategie risolutive prima nel piccolo gruppo e allargare la discussione all'intero gruppo classe solo in un secondo momento. Oppure, seguendo il suggerimento di un'alunna, si sarebbero potuti distribuire agli alunni dei bigliettini nei quali i bambini, a coppie o individualmente, potevano esprimere la propria idea per poi confrontarla con quella dei compagni durante la discussione di gruppo.

Andrea C.: Secondo me i chicchi sono più pesanti perché quando vanno nella pentola si aprono, diventano più leggeri, invece i chicchi di mais sono ancora un po' pesanti.

Sara: Io ero d'accordo con Elisa però perché il chicco di mais nello scoppio diventa il pop-corn ma diventa più grande perché la parte interna è uscita ma quella esterna c'è sempre, quindi secondo me hanno lo stesso peso.

Riccardo: Ero d'accordo con Elisa perché chicco e pop-corn sono sempre pop-corn e non cambia niente!

Giulia: Adesso che ci penso però do ragione a Elisa perché è sempre la stessa cosa solamente che cambia la forma.

Nel corso di questo incontro un'alunna ha suggerito una possibile modalità per distribuire i pop-corn in uguale misura a tutti i bambini della classe. La bambina ha infatti proposto di preparare tanti sacchettini quanti sono coloro ai quali saranno distribuiti i pop-corn. Il suggerimento è stato accolto dalla classe e tale modalità di distribuzione è stata utilizzata nell'incontro conclusivo[3].

Nel corso dell'incontro, pur non essendo ancora stata delineata una precisa strategia risolutiva, l'insegnante ha preso la decisione di avviare comunque l'esperienza della misurazione del peso, nella convinzione che questa esperienza potesse contribuire a mettere in evidenza altri elementi utili all'individuazione della strategia stessa. Gli alunni sono stati, quindi, suddivisi in gruppi e a ciascun gruppo sono stati consegnati una bilancia e un foglio di lavoro. Prima di procedere con le misurazioni, agli alunni è stato chiesto di realizzare una breve descrizione dello strumento in generale e delle singole parti che lo compongono, eventualmente accompagnata da disegni (Figura 3). Questa attività descrittiva ha permesso ai bambini di esplorare lo strumento e di conoscerne le potenzialità senza passare immediatamente agli schemi di utilizzo (Bartolini Bussi, 2010). Inoltre, poiché le bilance messe a disposizione dei gruppi erano di diverso tipo, la loro descrizione è stata utile nel momento della discussione collettiva, quando i dati ottenuti dai gruppi sono stati messi a confronto tra loro. Una volta terminata la fase esplorativa e descrittiva, due rappresentanti per ogni gruppo hanno potuto esporre alla classe il lavoro svolto.

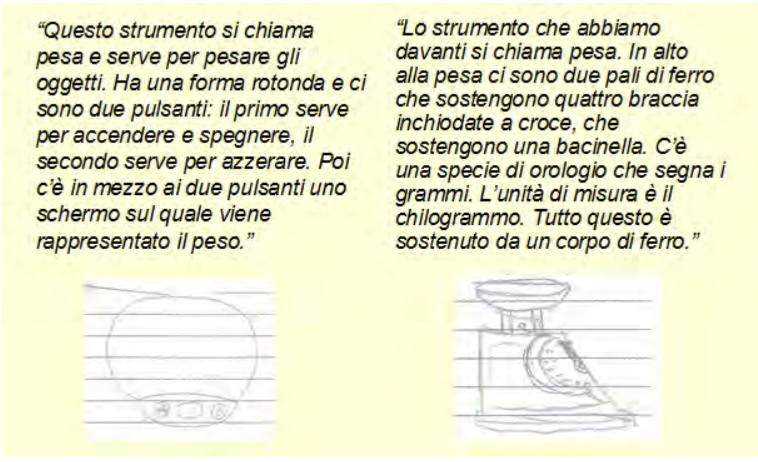


Figura 3. Esplorazione degli strumenti messi a disposizione degli allievi

3 In fase di progettazione era stato previsto che la distribuzione dei pop-corn avvenisse riempiendo all'orlo i contenitori scelti dai bambini. Questa opzione avrebbe loro permesso di osservare che per comprare i pop-corn è il peso a essere rilevante, mentre per la distribuzione è il volume dei pop-corn o la capacità del contenitore a dover essere tenuto in considerazione. Invece i bambini, avendo scelto come contenitore un sacchettino di plastica, hanno valutato di adottare per la distribuzione dei pop-corn il parametro del peso, pertanto nel corso della discussione non si è arrivati a parlare né di volume né di capacità.

Quarto incontro

In questo incontro i bambini hanno definito, attraverso una discussione collettiva, le modalità con le quali organizzare l'esperienza con le bilance. Innanzitutto è stato necessario stabilire cosa pesare: i bambini hanno scelto di misurare prima il peso del sacchetto campione colmo di pop-corn, e poi del solo sacchetto di plastica (Figura 4). Inoltre, essendosi accorti nel corso della fase esplorativa che in pesate successive dello stesso oggetto si registravano numeri leggermente differenti, hanno stabilito di effettuare tre misurazioni per gruppo e di assumere come valore definitivo il numero che si sarebbe presentato con maggiore frequenza. Questo tipo di processo è caratteristico della risoluzione di problemi: i bambini, pur non avendo ancora affrontato a scuola i concetti di moda e media, li hanno utilizzati al fine di individuare tra una serie di dati quello più indicato a rappresentare il peso dell'oggetto considerato.

Figura 4. Le pesate

I dati delle pesate sono stati registrati in tabella sui fogli di lavoro a disposizione dei gruppi e successivamente, per poter essere messi a confronto, sono stati raccolti in due tabelle disegnate alla lavagna, una relativa al peso del sacchetto e dei pop-corn e una relativa al peso del solo sacchetto (Figura 5). Queste tabelle sono state utilizzate dai bambini per formulare giudizi e prendere decisioni; dalla loro analisi sono scaturiti molti spunti di riflessione interessanti, come ad esempio quelli relativi al concetto di sensibilità dello strumento o quelli riguardanti gli errori di misura.

Figura 5. La tabella delle pesate alla lavagna

Una volta individuato il valore definitivo degli oggetti pesati, gli alunni hanno potuto calcolare il peso dei soli pop-corn contenuti nel sacchetto campione e il peso del quantitativo totale dei pop-corn da distribuire. Infine, hanno saputo stabilire il peso dei chicchi da acquistare e lo hanno inserito nella "lista della spesa".

Quinto incontro

Anche se gli alunni hanno ormai definito il peso del mais necessario a realizzare i pop-corn da distribuire alla classe, la domanda posta inizialmente dall'insegnante rimane ancora senza risposta: i bambini devono ancora individuare il numero di chicchi presenti in tale quantità, per confrontarlo con i numeri dei chicchi sulla scacchiera. Per riuscire a passare dal peso al numero dei chicchi gli alunni hanno evidenziato la necessità di individuare il peso di un singolo pop-corn. Quindi hanno provato a pesare un pop-corn, ma il tentativo è fallito perché le bilance a loro disposizione non sono state in grado di rilevarne il peso. In questo passaggio hanno anche compiuto la scelta di pesare il chicco di mais anziché il pop-corn perché, non spezzandosi, risultava più semplice da manipolare. Gli alunni sono allora intervenuti a modificare la strategia operativa e hanno deciso di pesare 100 chicchi per volta, come emerge dall'estratto della discussione qui sotto riportato.

> Sara: Prima dobbiamo pesare una quantità sapendo quanti sono i chicchi.
>
> Insegnante: Avevamo già individuato una quantità da pesare.
>
> Sara: Sì, cento chicchi. Dobbiamo pesarli e poi troviamo il peso di un chicco dividendo il peso del sacchettino per il numero dei chicchi presenti nel sacchetto.
>
> Insegnante: C'è un altro elemento da considerare prima di fare la divisione?
>
> Sara: Dobbiamo togliere il peso del contenitore.

Per permettere tale misurazione, l'insegnante ha diviso la classe in due gruppi e ha consegnato a ciascun gruppo una bilancia, un sacchettino contenente 100 chicchi e un foglio di lavoro. Dopo aver effettuato tre pesate per gruppo del sacchettino, i bambini hanno registrato i risultati ottenuti sul foglio di lavoro. I dati sono stati poi riportati in una tabella alla lavagna per essere confrontati al fine dell'individuazione del peso definitivo del sacchettino. In seguito, per poter trovare il peso del chicco medio, i bambini hanno proceduto dividendo il peso del sacchettino per il numero dei chicchi in esso contenuti, cioè 100. Per arrivare a conoscere il numero di chicchi contenuti nella quantità di mais utile al fine di realizzare i pop-corn per la classe, un alunno ha proposto di dividere il peso dei pop-corn che ci sono nel sacchetto campione per il peso di un pop-corn al fine di ottenere il numero dei chicchi in esso contenuti per poi moltiplicare tale risultato per il totale delle persone alle quali dovranno essere distribuiti.

Una volta ultimati i calcoli relativi alla scacchiera, gli alunni hanno riletto la storia dalla quale aveva preso avvio tutto il percorso, questa volta completa del finale. In seguito hanno provveduto a incollare i foglietti contenenti i calcoli dei chicchi sul modellino della scacchiera (Figura 6). L'insegnante ha poi ripreso la domanda iniziale che era servita a introdurre gli alunni nella situazione problematica, e cioè: *il numero di chicchi disposti sulla scacchiera è sufficiente per realizzare dei pop-corn per la classe?* A questo punto i bambini hanno potuto affermare con certezza che i chicchi non solo bastano ma avanzano in abbondanza.

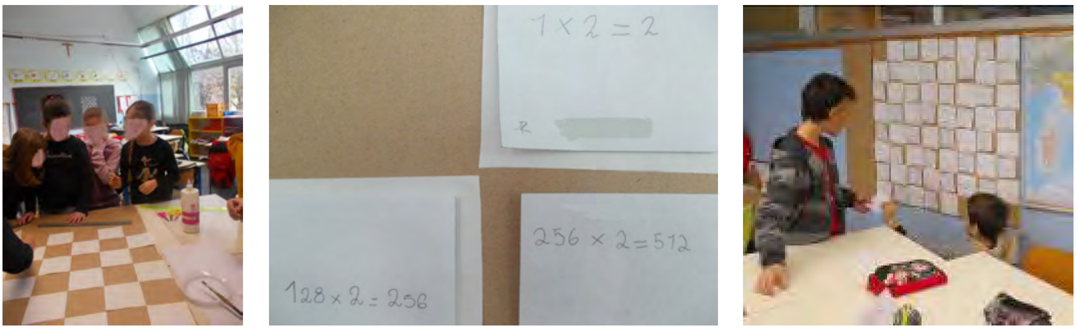


Figura 6. La scacchiera con i calcoli dei chicchi di riso

Per riprendere e legare maggiormente tra loro il problema evocato dalla storia e quello sollevato dalla prima domanda stimolo, l'insegnante ha proposto una seconda domanda che ha impegnato gli alunni nella ricerca della casella della scacchiera sulla quale ci si deve fermare per acquistare il mais per fare dei pop-corn per i bambini della classe.

Sesto incontro

L'incontro conclusivo del percorso è stato destinato alla preparazione e distribuzione dei pop-corn. Questo passaggio è stato per i bambini fondamentale, sia perché lo scopo iniziale che la classe ha assunto come proprio è stato raggiunto, sia perché i bambini hanno potuto verificare empiricamente la correttezza della procedura seguita e dei calcoli effettuati.

Per ricreare le medesime condizioni nelle quali l'insegnante ha sperimentato la trasformazione dei chicchi di mais in pop-corn, si è deciso di effettuare la cottura in classe utilizzando un fornellino elettrico[4]. Una volta terminata la preparazione dei pop-corn, i bambini, a turno, hanno potuto riempire il loro sacchettino con la quantità stabilita pesandolo sulla bilancia (Figura 7). Durante la cottura qualche chicco non è scoppiato, nonostante questo si è deciso di inserire nei sacchettini anche i chicchi non esplosi per arrivare a ottenere comunque il peso stabilito attraverso i calcoli e quindi poterne verificare la correttezza. Un altro momento critico che si è verificato scegliendo questo tipo di cottura è dovuto al fatto che togliendo i coperchi dalle pentole alcuni pop-corn scoppiando sono finiti a terra.

Tutti i sacchettini previsti sono stati riempiti ma uno di essi ha raggiunto un peso di poco inferiore a quello stabilito. I bambini hanno comunque ritenuto che la quantità di pop-corn mancanti per completare l'ultimo sacchettino fosse compatibile con la quantità finita sul pavimento dell'aula. Gli alunni hanno quindi potuto concludere che il procedimento seguito e i calcoli effettuati nel percorso risolutivo sono stati corretti.

Figura 7. La realizzazione dei popcorn e il riempimento dei sacchetti

Conclusioni

La situazione problematica proposta ha saputo motivare dall'interno gli alunni a farsi carico del problema. Nella ricerca delle soluzioni possibili e nella condivisione dell'obiettivo di risoluzione con i compagni e l'insegnante, gli alunni hanno saputo utilizzare il pensiero strategico, si sono confrontati e hanno argomentato le loro idee, sono stati in grado di ricercare informazioni richiamando conoscenze già possedute e creandone di nuove, utilizzando anche concetti non ancora affrontati a scuola. Tutto questo processo ha richiesto un notevole investimento motivazionale e di tempo e la messa in gioco di competenze complesse e varie. Sono stati molteplici i concetti affrontati e, mentre alcuni sono stati solo abbozzati, altri sono stati sviluppati e anche utilizzati più volte nel corso della sperimentazione. Gli alunni hanno operato con i grandi numeri, conosciuto e utilizzato la pesa come strumento di misura, affrontato il concetto di peso ma anche quelli di peso lordo, peso netto e di sensibilità dello strumento, ricercato dati

4 Una valida alternativa per la realizzazione dei pop-corn in classe potrebbe essere l'utilizzo di apposite macchinette elettriche.

rappresentandoli in tabelle, utilizzato le nozioni di moda e media, pur non avendole ancora affrontate a scuola.

Oltre allo scopo del fare i pop-corn per la classe, a motivare gli alunni è stata anche la progressiva consapevolezza, maturata durante il percorso, di essere loro a compiere le scelte. Gli alunni hanno formulato strategie risolutive articolate e hanno prodotto risposte non stereotipate, frutto di ragionamenti complessi.

Nel procedere del percorso, gli interventi dei bambini sono diventati più significativi e i ragionamenti si sono fatti più complessi, mentre le risposte impulsive e automatiche hanno lasciato spazio a riflessioni sempre più articolate.

Un aspetto delicato nella sperimentazione di questo percorso didattico è stato quello del fattore tempo. Proporre un percorso improntato sulla didattica per problemi comporta infatti un'attenta gestione di questo parametro. L'insegnante nel guidare tale attività deve da una parte considerare e rispettare i tempi di riflessione e di apprendimento dei bambini, ma al contempo essere attenta e consapevole del tempo che ha a disposizione, per utilizzarlo attribuendo uno spazio maggiore alle attività che ritiene realmente significative.

Bibliografia

Astorri, G. (2013). *"Per me non sono tanti perché…", Un percorso didattico sui problemi nella scuola primaria*. Tesi di laurea in Scienze della Formazione Primaria A.A. 2011/2012 (non pubblicata), Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia.

Bartolini Bussi, M. G. (2010). Quadro di riferimento. In USR E-R, ANSAS e IRRE E-R, Regione Emilia-Romagna, F. Martignone (ed.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna, vol. 2*, 40-55. Napoli: Tecnodid Editrice.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma. Sito: http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/prot5559_12

Martini, B. (2006). La programmazione per problemi. In M. Baldacci (ed.), *Unità di apprendimento e programmazione*. Napoli: Tecnodid Editrice.

Ugolini, L. (2006). Il progetto didattico. In M. Baldacci (ed.), *Unità di apprendimento e programmazione*. Napoli: Tecnodid Editrice.

Zan, R. (1996). Difficoltà di apprendimento e problem solving: proposte per un'attività di recupero. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 19(B), n.4, 311-350.

Zan, R. (2007). La comprensione del problema matematico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 30(A-B), n. 6, 741-762.

Zan, R. (2010). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri) formulazione del testo (parte I). *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 35(A), n.2, 107-126.

LA COMPETENZA NELL'APPROCCIO AI PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO IN PREPARAZIONE ALL'ESAME DI STATO RIFORMATO

Enrico Baccaglini
Liceo Scientifico Paritario Cairoli, Torino
TFA Piemonte classe A049 A.A. 2011/2012

Premessa

Il presente lavoro descrive l'attività condotta nel corso del Tirocinio Formativo Attivo svolto nella classe quinta di un Liceo Scientifico di Torino. Tale attività ha riguardato principalmente l'analisi del concetto di competenza nella sua applicazione ai problemi di massimo e di minimo in preparazione all'Esame di Stato riformato. Questi tipi di problemi permettono di evidenziare bene la definizione di competenza, intesa come mobilizzazione integrata di risorse in situazione.

Quando gli studenti cominciano ad affrontare tale tipologia di esercizio hanno ormai a disposizione le risorse necessarie, ma spesso si trovano in difficoltà durante lo svolgimento in quanto non hanno una padronanza adeguata a mobilitare in maniera efficace tali risorse. La varietà di problemi è particolarmente ricca e l'incertezza legata al saper scegliere e argomentare la strada più efficace per risolvere il quesito può essere marcata anche in studenti considerati abili.

Obiettivo del progetto di tirocinio è stato quello di cercare di sviluppare buone pratiche per affrontare opportunamente questo tipo di problemi dando la priorità a quelle volte a sviluppare competenza.

Dalla esplicitazione dei passaggi necessari a risolvere un problema di massimo e di minimo si evidenzia che è richiesto, oltre a un ricco bagaglio di risorse, anche la capacità di riflettere criticamente nel corso dello svolgimento e attivare strutture di interpretazione, azione e autoregolazione. Molti dei passi, infatti, possono essere compiuti in modi logicamente equivalenti ma computazionalmente più complessi. Il mero calcolo matematico è limitato a un singolo passo, mentre tutti gli altri richiedono scelte, formulazioni, verifiche che offrono un diverso grado di personalizzazione e di approfondimento.

I processi mentali coinvolti sono di varia natura: rappresentare, scegliere, formulare, calcolare, verificare e attivano strutture mentali diverse. Infine, è necessaria una forte e risolutiva azione metacognitiva durante tutto il processo, in quanto è essenziale saper validare e aggiornare periodicamente le decisione prese.

Quadro di riferimento teorico e istituzionale

Le indagini comparative OCSE-PISA promosse a partire dal 2000[1] dall'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico hanno rilevato tra gli studenti della Scuola Secondaria di primo e secondo grado gravi carenze nell'ambito di quelle competenze di base giudicate indispensabili per comprendere e agire nella società. Le indagini hanno avuto l'obiettivo di analizzare le forme di apprendimento che non si limitano alla trasmissione di conoscenze e nozioni, ma che si misurano invece con la *maturazione di competenze flessibili* e tali da svilupparsi anche dopo il termine dell'obbligo di istruzione. Le prove PISA valutano infatti fino a che punto i quindicenni hanno acquisito alcune delle conoscenze e delle abilità

1 PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I) http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-e

essenziali per una completa partecipazione alla società e coprono gli àmbiti della lettura e dell'alfabetizzazione matematica e scientifica. Per la matematica, l'OCSE sceglie di privilegiare le competenze legate alla soluzione di problemi tratti dalla vita reale e quindi i quesiti sono generalmente contestualizzati e richiedono una gamma di prestazioni che vanno da modeste abilità di calcolo a riflessioni critiche sulla modalità di soluzione del problema proposto. Tra le principali carenze evidenziate dalle prove PISA, e confermate dalle prove INVALSI, sembrano essere particolarmente rilevanti per il loro aspetto trasversale i seguenti aspetti:

- gli studenti *non applicano* le abilità apprese a scuola a un contesto meno strutturato in cui devono decidere quali siano le conoscenze pertinenti e come si possano utilmente applicare;
- durante lo svolgimento di un compito di natura matematica risulta spesso scisso il rapporto tra gli aspetti verbali e gli aspetti simbolici ovvero gli studenti *non utilizzano le capacità* di espressione proprie della loro lingua per descrivere in maniera adeguata i procedimenti matematici svolti.

A conferma di quest'ultimo punto si può aggiungere quanto sostenuto dallo psicologo e docente statunitense Gardner: "Anche gli studenti meglio preparati e dotati di tutti i carismi del successo scolastico – [...] valutazioni molto elevate, buoni punteggi nei test, – non mostrano una comprensione adeguata. […] Posti di fronte a problemi elementari formulati in modo anche solo leggermente diverso da quello in cui li avevano affrontati a scuola […] danno spiegazioni sostanzialmente identiche a quelle proposte da studenti che non si sono mai cimentati con quella disciplina." (Gardner, 1993).

La necessità di acquisire competenze in ambito scolastico risulta quindi evidente da queste osservazioni. L'introduzione del concetto di competenza in questo ambito pone, però, nuove sfide all'insegnamento tradizionale e impatta evidentemente sia sui discenti sia sui docenti.

La richiesta di competenze

Secondo il pedagogista Bernard Rey, il concetto di competenza dovrebbe essere assunto in stretta relazione alla nozione di "compito" e non tanto a partire dalla definizione dei processi cognitivi e delle operazioni mentali coinvolte (Rey, 2003). Il nucleo fondante, secondo questa posizione che rispecchia anche l'approccio del tirocinio, è quindi costituito dall'*attitudine* a svolgere *efficacemente* un compito. La competenza può essere definita quindi come "mobilizzazione[2] integrata di apprendimenti che una persona è in grado di operare in autonomia per risolvere problemi di una certa complessità" (Maccario, 2012) e quindi "un soggetto è competente quando, dal proprio patrimonio di acquisizioni sa attingere quelle richieste dal compito al fine di costruire una strategia risolutiva che non è la semplice applicazione diretta di conoscenze precedentemente apprese".

La Raccomandazione del Parlamento europeo e del Consiglio del 23 aprile 2008 sulla costituzione del Quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente, definisce la *competenza* come la comprovata capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale. Tale Raccomandazione è stata declinata in Italia attraverso la stesura di Indicazioni nazionali per il curricolo pubblicate dal MIUR in data 26 maggio 2010. Per ogni disciplina sono state redatte linee generali che comprendono una descrizione delle competenze attese alla fine del percorso scolastico con l'obiettivo di soddisfare tali raccomandazioni.

Nell'insegnamento della matematica risultano prioritarie alcune grandi *competenze disciplinari* (Arzarello, 2012), quali avere il senso del numero, del grafico, del simbolo, nonché saper analizzare dati e rielaborarli, costruire modelli a partire da dati e fare previsioni in condizioni di incertezza. Inoltre è fondamentale che gli studenti sappiano risolvere problemi aperti o chiusi, utilizzare il linguaggio e il ragionamento scientifico nonché fare dimostrazioni.

2 Traduzione del termine francese *mobilisation*.

In particolare, nel corso del tirocinio sono state analizzate le seguenti competenze: sapere analizzare dati e rielaborarli, saper risolvere problemi aperti o chiusi e fare dimostrazioni. Queste competenze sono indicative per la formazione del cittadino europeo e costituiscono la peculiarità della matematica nei rapporti con le altre discipline e con la realtà quotidiana, in quanto promuovono la capacità di interpretare fatti e fenomeni attraverso la rielaborazione di dati. Sempre con l'obiettivo di facilitare lo sviluppo di competenze in matematica, molti studiosi ritengono importante estendere il significato dei concetti matematici per mezzo delle cosiddette *connessioni multiple*[3]. Un modo per sviluppare tali connessioni è quello di risolvere problemi in modo diverso dai percorsi tradizionali (Fennema, 1999; Cobb, 2000). Qui gli insegnanti hanno il duplice ruolo di incoraggiare i loro alunni a risolvere i problemi in modi diversi e permettere loro di presentare le loro soluzioni anche se l'attività in quel modo non era stata pianificata. Tale approccio risulta più impegnativo per il docente, in quanto le soluzioni proposte dagli studenti potrebbero essere alternative a quella che il docente ritiene la più efficace, ma ha l'indubbio vantaggio di fare in modo che i ragazzi provino a intraprendere metodi risolutivi alternativi.

Le proposte

Vista la necessità di riconsiderare le conoscenze matematiche in un quadro di riferimento più complesso, il MIUR e diverse associazioni disciplinari (come ad esempio l'UMI e la Società Italiana di Statistica) hanno promosso diverse iniziative volte sia a migliorare l'approccio a tali tipologie di prove, ma soprattutto a sviluppare un curricolo che orienti alla costruzione di competenze trasversali e disciplinari che si ritengono indispensabili per il cittadino europeo.

A partire dal 2006, ad esempio, il MIUR insieme agli Uffici Scolastici Regionali, ha promosso il piano nazionale m@t.abel[4] per il rinnovamento e il miglioramento dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica. L'iniziativa m@t.abel prevede percorsi di formazione dedicati ai docenti di matematica della scuola secondaria di primo grado e del biennio di scuola secondaria di secondo grado per supportarli nell'insegnamento della disciplina, mediante una metodologia pratica e laboratoriale. La finalità dell'attività educativa di m@t.abel è quella di ispirare proposte didattiche orientate all'esperimento e, quindi, in grado di suscitare l'interesse e l'entusiasmo negli studenti. Il piano m@t.abel si avvale dei materiali prodotti nel piano pluriennale "La matematica per il cittadino" e che riguardano l'insegnamento della matematica dai 6 ai 19 anni.

Dall'a.s. 2009/2010, l'offerta formativa per i docenti è stata ulteriormente arricchita con l'intento di garantire una profonda analisi dell'intero curricolo di matematica relativo all'obbligo di istruzione. Il corso PON (Programma Operativo Nazionale) m@t.abel si è affiancato al piano nazionale m@t.abel coinvolgendo esclusivamente le regioni convergenza Calabria, Campania, Puglia e Sicilia.

I problemi di massimo e di minimo

I problemi di massimo e di minimo vengono solitamente affrontati nell'ultima classe dei Licei Scientifici come applicazione del calcolo differenziale. Tali problemi svolgono un ruolo significativo nell'applicazione della matematica alla risoluzione di problemi sia matematici sia legati a scelte e ottimizzazioni. Si tratta quindi di un buono strumento per sviluppare una didattica per competenze anche oltre il termine dell'obbligo di istruzione. L'argomento è anche trattato durante l'ultimo anno in diversi Istituti Tecnici in Matematica applicata e finanziaria. Inoltre, come anche proposto dal piano m@t.abel e da diversi libri di testo, alcuni problemi possono essere efficacemente proposti già nella classe seconda del primo biennio riformato

3 Un compito a connessione multipla si collega a più parti del curricolo e può quindi essere svolto in modi diversi (Arzarello, 2009).

4 m@t.abel, Matematica. Apprendimenti di base con e-learning, http://formazionedocentipon.indire.it/?p=165

ovvero al termine dell'obbligo d'istruzione. Nel caso della classe seconda, i prerequisiti risultano essere il calcolo simbolico e la proporzionalità quadratica mentre, per problemi più complessi da svolgere nella classe quinta, è necessario il calcolo differenziale nonché la geometria euclidea nel piano e nello spazio.

Per avviare il tirocinio, sono state studiate alcune attività m@t.abel ("Rettangoli e fontane" e alcuni problemi di minimo nel piano) in quanto sono accompagnate da indicazioni metodologiche e da una parte teorica. Pur essendo attività nate per il biennio offrono diversi spunti e approfondimenti anche per la classe quinta. Inoltre, è stato analizzato l'approccio proposto in un'unità didattica frutto del Laboratorio di Didattica della Matematica della SSIS Toscana (Teglielli, 2006).

Le Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico post-riforma Gelmini[5] prevedono che una trattazione più ampia di questo argomento sia sviluppata nel quinto anno. Il nucleo tematico "Relazioni e funzioni" prevede infatti che lo studente acquisisca "familiarità con l'idea generale di ottimizzazione e con le sue applicazioni in numerosi ambiti" al termine del modulo relativo al calcolo infinitesimale e differenziale.

Progettazione didattica

Per risolvere in maniera efficace i problemi di massimo e di minimo è richiesta, oltre a un bagaglio di risorse eterogeneo, anche la capacità di ragionare autonomamente nel corso dello svolgimento. Ogni passo, infatti, può essere svolto in diversi modi logicamente equivalenti ma computazionalmente di diversa complessità. Il puro calcolo matematico è limitato a un passaggio mentre tutti gli altri richiedono scelte, formulazioni, verifiche che offrono un diverso grado di personalizzazione e approfondimento.

I processi mentali coinvolti secondo la classificazione di Anderson e Krathwohl (Anderson, 2001) sono di varia natura: rappresentare, scegliere, formulare, calcolare, verificare; coinvolgono infatti strutture mentali diverse. Inoltre è presente una forte e risolutiva azione metacognitiva durante tutto il processo in quanto è necessario saper validare costantemente le scelte fatte.

I problemi di massimo e di minimo sono stati introdotti nel mese di febbraio al termine del modulo relativo allo studio dei massimi, minimi e flessi di una funzione. L'intervento di tirocinio svoltosi a partire dal mese di marzo non ha quindi avuto bisogno di ulteriori premesse legate a prerequisiti, in quanto l'argomento era già stato precedentemente contestualizzato nell'ambito matematico dalla docente accogliente.

L'abilità richiesta nello svolgere tale tipologia di problemi nasce dalla sinergia di due fattori:

- avere nel proprio bagaglio di conoscenze le risorse richieste dal problema;
- saperle mobilitare in maniera efficace.

Nella didattica per competenze è buona prassi partire da una *situazione-problema* complessa e reale come la seguente che è stata utilizzata in sede di presentazione dell'attività.

Come può Mr. Pemberton (il "Sig. Coca Cola") vendere il suo prodotto utilizzando il minor quantitativo di latta per realizzare la lattina? Supponi che Mr. Pemberton sia autorizzato a vendere 33 cl di Coca Cola utilizzando un contenitore cilindrico. Supponi, per semplicità che la latta richiesta ricopra tutta la superficie laterale più la base e il coperchio.

Successivamente, è stato opportuno evidenziare che la superficie totale può variare, pur mantenendo costante la capacità del cilindro: un contenitore 'basso e largo' ha una superficie laterale complessiva diversa da quella di un contenitore 'alto e stretto'. Questo non è stato subito evidente a tutti. Tre studenti hanno avuto difficoltà a comprendere questa considerazione.

D'accordo con la docente accogliente, è stato poi chiesto ai ragazzi qual è secondo loro

5 INDIRE, Costruire i nuovi Licei, Indicazioni Nazionali 2010, http://nuovilicei.indire.it/

la strategia migliore per Mr. Pemberton senza svolgere alcun tipo di calcolo. Alcuni hanno affermato che più alta è la lattina, meglio è; altri che la superficie laterale deve essere uguale alla somma della base e del coperchio. La maggior parte degli studenti, pur comprendendo il problema, non ha proposto strategie risolutive.

Nella didattica per competenze la situazione-problema iniziale ha l'obiettivo di coinvolgere lo studente e far assomigliare il problema a una *sfida*. Inoltre la situazione-problema serve a far rendere conto allo studente che potrebbero esserci più strade risolutive e che la soluzione potrebbe non essere scontata.

I ragazzi sono stati poi chiamati alla lavagna per risolvere problemi più semplici in modo da elaborare una strategia risolutiva che permettesse in seguito di risolvere il problema di Mr Pemberton. A titolo di esempio un problema era il seguente:

Tra tutti i rettangoli con una data area, trovare quello di perimetro minimo.

Il problema è stato risolto alla lavagna in maniera quasi autonoma da uno studente: ha capito che, definito un lato come incognita, l'altro lato può essere espresso in funzione dell'area e dell'incognita. Successivamente si può scrivere la funzione perimetro come il doppio della somma dei due lati esplicitati precedentemente. Il passaggio successivo (derivazione della funzione e deduzione del minimo) è stato accennato dalla docente accogliente e quindi risolto dallo studente.

Alcuni studenti hanno prontamente fatto notare che il punto cercato corrisponde al vertice della parabola rappresentata dalla funzione trovata e quindi che non è necessario eseguire il calcolo della derivata. E' stato precisato che calcolare le coordinate del vertice è sicuramente una strategia più rapida e d'altra parte che il calcolo della derivata è uno strumento più potente che consente di studiare l'andamento di una gamma più ampia di funzioni.

Abbiamo quindi potuto discutere i passaggi per risolvere qualunque problema di massimo e di minimo utilizzando come esempio l'esercizio svolto dallo studente alla lavagna. Il risultato della discussione è stato riassunto nel modo seguente:

- Rappresentazione grafica (anche approssimata) della richiesta;
- Scelta della variabile da usare come incognita (se non esplicitamente dichiarata nel testo);
- Esplicitazione del vincolo sulla variabile;
- Formulazione analitica della funzione da minimizzare/massimizzare;
- Calcolo della funzione derivata e deduzione del punto cercato;
- Verifica della validità analitica del risultato (coerenza con vincolo, significato analitico).

Successivamente, alcune ore sono state dedicate ad allenare gli studenti su tipologie analoghe, anche tratte dalla geometria analitica. L'argomento è risultato ostico in quanto molti ragazzi *non ricordano* le espressioni da utilizzare (distanza punto-punto, punto-retta...) e perciò sono stati dati esercizi a casa.

Verifiche e criteri di valutazione

Si possono individuare principalmente quattro indicatori che mostrano un agire competente da parte di un allievo posto di fronte a un compito complesso che richiede l'attivazione di competenze: risorse, strutture di interpretazione, strutture di azione, strutture di autoregolazione (Trinchero, 2012). Gli ultimi tre indicatori fanno parte del concetto di mobilizzazione. È importante sottolineare che la competenza non coincide con la prestazione e la prestazione può essere indizio di competenza. Non è competente chi ha risorse ma chi le sa mobilitare nelle situazioni che lo richiedono.

Per poter inferire la competenza dell'allievo misurando la sua prestazione è opportuno definire innanzitutto i profili di competenza ovvero la situazione attesa (Maccario 2012).

Successivamente è opportuno proporre attività ed esperienze significative nelle quali l'allievo faccia emergere prestazioni indicatrici della presenza di risorse e della loro mobilitazione (situazione osservata).

La valutazione per competenze potrà quindi avvenire in maniera efficace mediante le cosiddette *rubriche*[6] *valutative* che hanno l'obiettivo di esplicitare i criteri di valutazione, i livelli di qualità della prestazione e i criteri di attribuzione dei punteggi alle prestazioni. I seguenti passaggi sono volti a sviluppare una buona rubrica valutativa (Arter, 2001):

- Raccogliere esempi di prestazioni degli studenti "buone" e "meno buone";
- Decidere (anche prendendo spunto da modelli teorici) livelli e gradi su cui classificarle;
- Identificare induttivamente i criteri che consentono la differenziazione dei livelli e gradi, esplicitandoli analiticamente;
- Sperimentare la classificazione su vari esempi di prestazioni e rivederla se necessario.

La valutazione scritta per competenze

La valutazione dell'apprendimento relativa ai problemi di massimo e di minimo è stata fatta utilizzando una rubrica valutativa che fa riferimento al DM 139/07 (Assi culturali) e alla normativa di riordino del II ciclo di istruzione (in particolare le Indicazioni Nazionali per i Nuovi Licei). È stato preso come riferimento per la stesura della rubrica valutativa quanto proposto in Albanese (2011) e riferito alla certificazione di competenze al termine dell'obbligo di istruzione. Tale lavoro è stato modificato in modo da renderlo fruibile per la classe quinta del Liceo Scientifico relativamente all'argomento oggetto della prova. La competenza di riferimento al termine del periodo dell'obbligo di istruzione "Individuare le strategie appropriate per la risoluzione dei problemi" è specificatamente prevista tra le Competenze chiave dell'Unione Europea[7] e ribadita tra le Competenze chiave di cittadinanza nazionale (DM 139/07) "Risolvere problemi".

I livelli di competenza raggiunta (base/medio/avanzato) riflettono i raggruppamenti previsti per le competenze matematiche nell'ambito del Quadro di Riferimento PISA 2006 (riproduzione, connessione, riflessione). La classificazione di ciascun item è fatta rispetto a questi livelli per tutte e quattro le competenze dell'Asse Matematico (Trinchero, 2012).

Per la verifica scritta è stato dato agli studenti un testo composto da tre problemi, divisi a loro volta in quesiti, e un tempo di due ore. È stato inoltre detto, come ribadito più volte nelle lezioni precedenti, che per ottenere una buona valutazione è necessario commentare dettagliatamente i passaggi svolti così come previsto dalla rubrica valutativa adottata.

I tre problemi proposti presentavano un grado di complessità crescente come descritto nel seguito.

1. *Trova due numeri la cui somma sia 10 e per i quali la somma dei loro quadrati sia minima. Disegna anche graficamente la funzione obiettivo da minimizzare.*
2. *È dato un cordino di lunghezza nota. Lo si taglia in modo da ottenere con una parte il perimetro di un quadrato e con l'altra la circonferenza di un cerchio. a) Come devo tagliare il cordino affinché la somma delle due aree sia minima? b) E affinché sia massima?*
3. *Si vogliono costruire scatole di carta dello stesso volume minimizzando il consumo di carta. Qual è la forma migliore se si decide di farle a forma di parallelepipedo? e se si decide di farle cilindriche?*

6 In docimologia, con il termine rubrica (*rubric*) si intende l'insieme di norme, prescrizioni e criteri, atti a formulare giudizi valutativi su performance complesse (Arter ,2001).

7 Competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia, Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente (2006/962/CE)

Giustifica ed esplicita ogni passaggio e svolto.

Il primo problema ha l'obiettivo di valutare le competenze di base (livello di *riproduzione*, Trinchero, 2012) ovvero essere in grado, come descritto in classe, di evidenziare le variabili e la funzione da minimizzare. Si richiede di eseguire calcoli elementari e rappresentare graficamente, mediante procedure standard, la funzione. È inoltre necessario commentare adeguatamente il risultato verificando la coerenza tra il risultato analitico e la rappresentazione grafica.

Il secondo problema è tratto dall'Esame di Stato per il Liceo Scientifico e ha l'obiettivo di valutare competenze intermedie (livello della *connessione*). Si richiede di essere in grado, in particolare per quanto riguarda il punto (b), di ragionare autonomamente e di applicare strategie opportune. Il punto di massimo infatti si trova agli estremi del dominio della funzione e quindi non risulta esplicitamente dallo studio della derivata.

Il terzo problema ha l'obiettivo di sondare il livello avanzato delle competenze (livello della *riflessione*). Serve a evidenziare la capacità di affrontare problemi non esplicitamente trattati nell'attività didattica insieme a un significativo grado di capacità riflessiva. L'allievo deve essere in grado di selezionare e valutare strategie appropriate e saperle sviluppare utilizzando abilità di ragionamento. È necessaria un'attenta fase iniziale di studio ed è necessario rappresentare il problema nello spazio per esplicitare le variabili. È inoltre richiesto il passaggio logico di tradurre il costrutto 'consumo di carta' nel linguaggio matematico 'superficie complessiva del solido'. Il problema potrebbe presentare diverse strade risolutive.

Per quanto riguarda i risultati ottenuti, il tempo di due ore è risultato sufficiente e tutti gli studenti hanno consegnato nei tempi previsti. Solo uno studente su cinque ha provato a svolgere il terzo problema (competenze avanzate) a conferma del fatto che si tratta di un esercizio complesso almeno nella forma nella quale è stato proposto. Gli altri due problemi sono stati affrontati da tutti gli studenti, con risultati diversi. Il primo problema è stato svolto e commentato correttamente da circa quattro studenti su cinque mentre il secondo da circa metà classe.

Tramite la griglia di valutazione ho provveduto ad assegnare i voti in modo tale che il primo esercizio svolto e commentato correttamente valesse due punti così come il secondo, mentre al terzo esercizio ho assegnato un valore di tre punti. Il punteggio base era 3, quello massimo 10. Tale assegnazione di valutazione ha fatto sì che la media fosse vicina al 6 (sufficienza) e la mediana leggermente maggiore. Il punteggio massimo è stato 7/8, quello minimo 4.

A titolo di esempio, in Figura 1 si riporta lo svolgimento del primo esercizio da parte di uno studente che ha conseguito una valutazione alta.

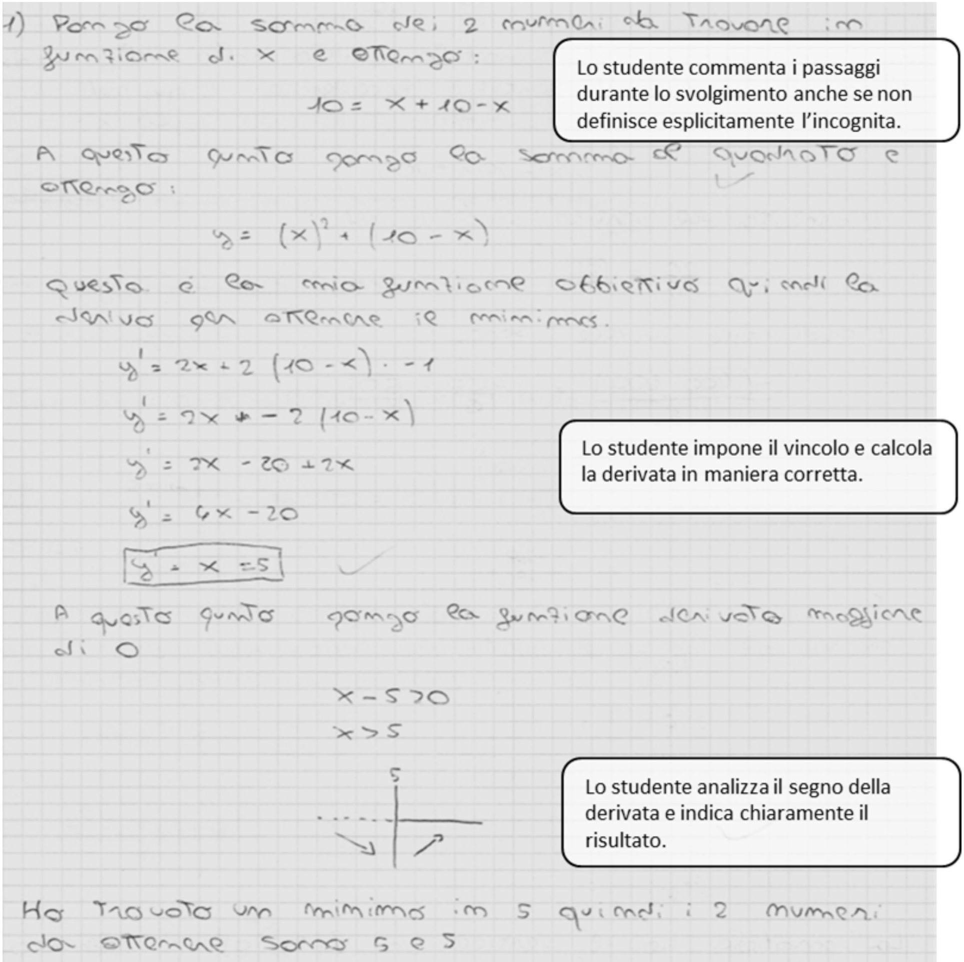
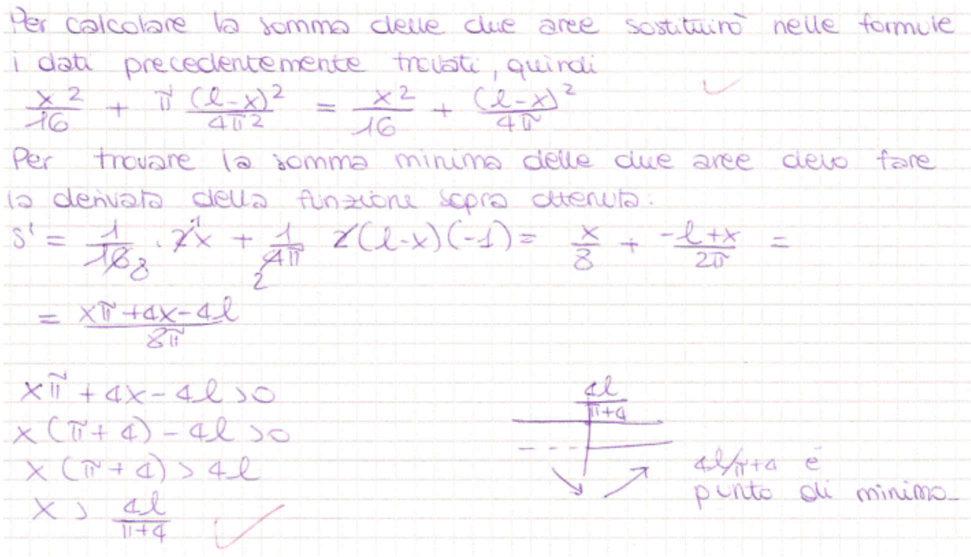


Figura 1. Esempio di risoluzione del problema 1 per competenze

Per quanto riguarda l'esercizio 2, solo uno studente ha risolto completamente l'esercizio. La maggior parte degli studenti non è riuscita a superare la difficoltà relativa al punto (b) dell'esercizio, benché fossero stati affrontati problemi analoghi. Si riporta in Figura 2 l'ultima parte della risoluzione dell'esercizio di una studentessa generalmente valutata in maniera discreta che ha svolto solo il punto (a). La studentessa commenta in maniera esauriente i passaggi logici e svolge i calcoli previsti in maniera corretta. Trova il punto di minimo corretto ma non è in grado di dedurre il valore del punto di massimo richiesto dal testo.



Per calcolare la somma delle due aree sostituirò nelle formule i dati precedentemente trovati, quindi

$$\frac{x^2}{16} + \pi\frac{(l-x)^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{16} + \frac{(l-x)^2}{4\pi}$$

Per trovare la somma minima delle due aree devo fare la derivata della funzione sopra ottenuta:

$$S' = \frac{1}{\cancel{16}_{8}} \cdot \cancel{2}x + \frac{1}{\cancel{4\pi}_{2}} \cancel{2}(l-x)(-1) = \frac{x}{8} + \frac{-l+x}{2\pi} = \frac{x\pi+4x-4l}{8\pi}$$

$$x\pi + 4x - 4l > 0$$
$$x(\pi+4) - 4l > 0$$
$$x(\pi+4) > 4l$$
$$x > \frac{4l}{\pi+4}$$

$\frac{4l}{\pi+4}$

$4l/\pi+4$ è punto di minimo

Figura 2. Esempio di risoluzione dell'esercizio 2 per competenze

La difficoltà nello svolgimento del punto (b) è stata principalmente legata al fatto che gli studenti non hanno esplicitato le limitazioni geometriche del problema e quindi non hanno ricercato agli estremi del dominio della variabile il punto di massimo. Nella correzione del compito si è poi particolarmente insistito su questo esercizio assegnando inoltre per lo studio individuale problemi che presentassero le medesime caratteristiche.

La valutazione orale

Nell'interrogazione orale è stato valutato positivamente lo studente che è stato in grado di ricostruire i passaggi logici alla base della risoluzione e gli altri indicatori significativi già discussi nella rubrica valutativa per lo scritto. In questo modo, è stato possibile distinguere gli studenti che non sanno come affrontare il problema da quelli che conoscono i passaggi logici da compiere ma si bloccano, ad esempio, in un passaggio dello svolgimento.

Nell'interrogazione orale ho spesso riscontrato nei ragazzi difficoltà nello scegliere quale variabile utilizzare come incognita. Questo può essere dovuto al fatto che tale passaggio richiede già comunque una conoscenza, seppur parziale, della funzione che si dovrà poi studiare. Inoltre, è necessario avere una *visione dinamica* del problema ovvero comprendere quali grandezze variano al variare di un'incognita scelta. Se nell'esempio del rettangolo di area massima, la scelta relativa al lato da fissare come incognita è indifferente, lo stesso discorso non vale per problemi più complessi, soprattutto di geometria solida. Tipicamente, invece, la rappresentazione grafica della richiesta non crea problemi. Sia che si tratti di problemi di geometria solida, sia che si tratti di problemi di varia natura, la visualizzazione del problema è sufficientemente chiara. Inevitabili sono poi gli errori di calcolo anche perché spesso sono presenti vari parametri anche se l'incognita è unica. Questo porta gli studenti a confondersi quando si tratta di derivare la funzione. Ho ritenuto opportuno non dare un peso eccessivo alla fase computazionale del problema tenendo conto del focus del progetto.

Analisi a posteriori del processo e conclusioni

Per quanto riguarda l'analisi a posteriori del processo ipotizzato e gli obiettivi educativi raggiunti, l'attività legata ai problemi di massimo e di minimo ha interessato molto positivamente gli allievi. I ragazzi sono poco abituati a commentare lo svolgimento degli esercizi proposti ovvero hanno difficoltà ad esplicitare chiaramente quali siano le *strutture di interpretazione e di azione* per lo svolgimento dei problemi di qualunque natura. *Imparare ad esprimersi in un linguaggio adatto alla situazione* è una competenza trasversale che deve interessare pienamente l'area tecnico-scientifica. Nella valutazione orale, quanto espresso da Gardner ha trovato spesso conferma: gli studenti posti di fronte a problemi anche semplici ma tratti dal mondo reale e formulati in modo leggermente diverso da quello in cui li avevano affrontati precedentemente danno spiegazioni simili a quelle proposte da studenti che non si sono mai cimentati con la disciplina. È ormai esperienza consolidata il fatto che gli studenti ritengano quanto appreso a scuola come fatto slegato dalla loro realtà quotidiana. Questo non significa che gli studenti ritengano inutile quanto appreso a scuola, ma piuttosto che l'oggetto di studio non possa praticamente essere *usato* nell'agire quotidiano e perciò, nell'affrontare un qualsiasi problema *reale* non mettono in campo quanto hanno nel loro bagaglio di risorse.

Potrebbe essere opportuno avviare lo sviluppo di questa attività fin dall'inizio dell'anno scolastico o, meglio ancora, tenerla come filo conduttore anche al termine dell'obbligo di istruzione. I problemi di massimo e di minimo, ove questi richiedano lo studio di un'equazione di secondo grado, possono infatti già essere proposti nella classe seconda. Analogo discorso può essere fatto per la geometria piana e solida dove, scegliendo opportunamente gli esercizi da proporre, potrebbe non essere necessario il calcolo differenziale.

Per quanto riguarda le metodologie utilizzate, l'approccio per competenze è risultato essere estremamente qualificante. La possibilità di partire da una situazione-problema complessa per sviluppare un'attività didattica che mobiliti risorse già apprese ha l'indubbio vantaggio di servire anche come ripasso del programma svolto e precisare alcuni punti. D'altro canto, non possono essere sufficienti un paio di verifiche sommative per verificare il livello di avanzamento di una competenza, soprattutto quando si vuole verificarla in una classe quinta. Questo problema può però essere risolto se si decide di avviare l'attività già all'inizio dell'anno anche con un'ora a disposizione in più ogni settimana così come stabilito dal piano di studio del nuovo Liceo Scientifico. A questo proposito, anticipare eccessivamente l'introduzione di questa tipologia di problemi già nel primo biennio potrebbe risultare ostica ai ragazzi in quanto potrebbe essere più complesso trovare buone situazioni-problema iniziali. La sensibilità e il livello di capacità critica di uno studente adolescenziale è diversa da quella di uno studente ormai maggiorenne e questo implica che le loro rappresentazioni del mondo li portino a riuscire a immaginare particolari situazioni-problema. Nel primo biennio, comunque, sviluppando ancora in maniera marcata il nucleo 'numeri', potrebbe essere sufficiente ragionare su tipologie di problemi prettamente numerici fatto salvo il vincolo sulla tipologia di funzione.

Lo sviluppo di competenze soprattutto nel passaggio legato all'autoregolamentazione del ragazzo prevede infine che il docente lo invogli a proporre a voce alta le possibilità di risoluzione del problema assegnato. Tale passaggio richiede necessariamente interazioni con gli studenti, con il rischio di analizzare *strategie risolutive* non ipotizzate a priori dal docente.

Bibliografia

Albanese, D., Baresi, M. *et al.*(2011). *Prova autentica di Matematica con rubrica di valutazione*, Progetto "Valutare le competenze 2010/2011", Asse matematico, Vicenza. www.itcfusinieri.eu/default/competenze/Prova_autentica_Matematica__CTF_Vicenza.pdf

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R. *et al.* (2001), *A taxonomy for learning, teaching, and assessing. A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*, New York, Addison Wesley Longman.

Arter, J. A., McTighe, J. (2001). *Scoring rubrics in the classroom: Using performance criteria for assessing and improving student performance*,.Thousand Oaks (CA), Sage.

Arzarello F. *et al.* (2012), *M@t.abel – Matematica per gli studenti alla soglia del terzo millennio: panorama e quadro scientifico del progetto*, INDIRE-ANSAS, Firenze.

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (Eds.) (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Routledge.

Fennema, E., Romberg, T. A. (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gardner ,H. (2003). *Educare al comprendere*. Milano: Feltrinelli.

Maccario, D. (2012).*A scuola di competenze. Verso un nuovo modello didattico*, Torino, SEI.

Rey, B. (2003). *Ripensare le competenze trasversali*, Milano: Franco Angeli.

Teglielli, L. (2006). *I problemi di massimo e minimo, relazione di laboratorio di didattica della Matematica*. SSIS Toscana. digidownload.libero.it/leo723/materiali/UD_ssis/UD_max_min_.pdf

Trinchero, R. (2012). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*. Milano: Franco Angeli.

DALLE DIMOSTRAZIONI VISUALI ALLE DIMOSTRAZIONI DEDUTTIVE

Cristina Bardelle
Università del Piemonte Orientale "A. Avogadro"

"Theories of the known, which are described by different physical ideas, may be equivalent in all their predictions and hence scientifically indistinguishable. However, they are not psychologically identical when trying to move from that base into the unknown. For different views suggest different kinds of modifications which might be made and hence are not equivalent in the hypotheses one generates from them in one's attempt to understand what is not yet understood."

R.P. Feynman, 1966

Premessa

Nella cultura matematica odierna le argomentazioni basate su immagini non hanno un ruolo nella dimostrazione matematica razionale ma rivestono perlopiù un ruolo euristico. Questo aspetto ha influenzato anche l'insegnamento della matematica, basato soprattutto, almeno in Italia, sulle rappresentazioni simboliche dell'algebra (vedi anche Mariotti, 1995). La scarsa promozione del ragionamento visuale si evince anche dai libri di testo adottati nelle scuole in cui le immagini sono poco presenti e perlopiù relegate alla geometria euclidea. L'interesse per le "dimostrazioni" basate su immagini si è comunque accresciuto negli ultimi decenni, anche grazie allo sviluppo delle tecnologie per la rappresentazione grafica, sul versante informatico-logico e filosofico-epistemologico (cf. ad esempio Barwise e Etchemendy, 1991, Giaquinto, 2007 e referenze ivi contenute) e, in particolare, la rilevanza del "pensiero visuale" nell'apprendimento della matematica è stata discussa da molti ricercatori in didattica (Dreyfus 1991, Dvora & Dreyfus 2004, Presmeg 1992, Hanna 1989, Tall 1991).

L'attività didattica qui descritta è un tentativo di promuovere il "pensiero visuale" come fattore che favorisce lo sviluppo dell'argomentazione in contesto matematico. L'attività è stata inserita all'interno delle attività didattiche svolte per il tirocinio formativo attivo presso una classe seconda del Liceo Scientifico di Alessandria nell'anno scolastico 2012/2013. L'attività, che si è inserita nel percorso didattico inerente la geometria euclidea, è stata incentrata sull'uso delle immagini nel contesto della dimostrazione matematica. La rilevanza dell'argomento è sottolineata dalla maggior parte dei documenti programmatici. Per il liceo scientifico "Le linee generali e competenze" delle Indicazioni Nazionali pongono tra i gruppi di concetti e metodi degli obiettivi di studio: "1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni)" (pag. 337). Anche il quadro di riferimento INVALSI sottolinea l'importanza della dimostrazione matematica ponendo l'accento sui processi (oggetto di valutazione delle prove INVALSI) coinvolti nella dimostrazione e in particolar modo pone come obiettivo di apprendimento il saper "utilizzare forme tipiche del ragionamento matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, dimostrare,…)". Evidenzia inoltre, in modo più incisivo rispetto alle Indicazioni Nazionali, come obiettivo di apprendimento la coordinazione di differenti sistemi semiotici: "conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (verbale, numerica, simbolica, grafica)". L'attività fa dunque riferimento ai nuclei tematici "Geometria" e "Spazio e figure", e al nucleo trasversale argomentare, congetturare, dimostrare identificato dalle indicazioni del documento “La matematica per il cittadino” dell’Unione Matematica Italiana.

I contenuti matematici dell’attività riguardano in particolare l’equivalenza e l’equiscomponibilità di figure piane, il teorema di Pitagora, i teoremi di Euclide, la congruenza e la similitudine in particolare di triangoli. In questo contesto l’attività condotta è stata incentrata sullo sviluppo di processi cognitivi legati al ragionamento matematico di tipo visuale. A tale scopo sono state utilizzate dimostrazioni visuali, ovvero dimostrazioni basate completamente, o solo in parte, sull’uso di figure, diagrammi e grafici. In tutti i casi, comunque, le inferenze sono possibili solo attraverso l’uso dell’immagine. L’attività didattica sulle dimostrazioni visuali ben si colloca in una progettazione didattica per competenze (Maccario 2012). Data la complessità dell’argomento e la scarsa tempistica l’attività è lungi dall’aver effettivamente trasmesso la competenza di usare le immagini per l’argomentazione matematica, ma ha promosso l’apprendimento di alcune risorse mobilitabili (capacità, abilità, micro-competenze) quali la coordinazione di differenti rappresentazioni semiotiche, l’applicazione di teoremi, l’individuazione di proprietà nelle figure, ecc.

Quadro teorico di riferimento

In letteratura le dimostrazioni visuali sono solitamente presentate senza commenti in forma verbale (cioè “senza parole”), ma solo con l’ausilio di immagini, eventualmente corredate da segni come numeri, lettere, frecce, simboli per la denotazione di angoli, ecc. che chiameremo “marcatori visuali” e talvolta accompagnate da espressioni simboliche; la ricostruzione è lasciata al lettore.

Si trovano in letteratura diversi lavori, come ad esempio i libri di Nelsen (1993, 2001), che forniscono un’ampia selezione di dimostrazioni visuali da fonti differenti.

Tra le più note dimostrazioni visuali ci sono quelle riferite al Teorema di Pitagora; la figura 1 ne rappresenta una semplice dimostrazione visuale. In questa immagine i colori svolgono il ruolo di marcatori visuali e hanno lo scopo di comunicare l’equivalenza delle figure geometriche a sinistra con quelle geometriche a destra.

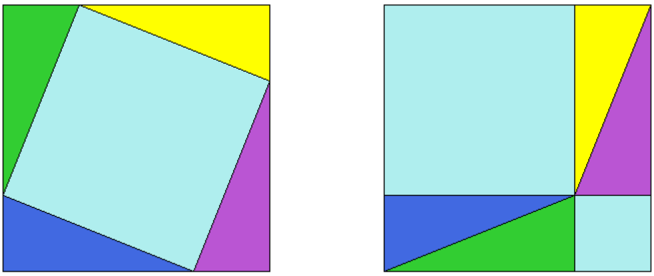


Figura 1: Teorema di Pitagora

Un altro esempio noto di dimostrazione visuale è presentato in figura 2 che rappresenta la dimostrazione del teorema ‘la somma dei primi n numeri dispari è uguale a $n2$’. In questo caso non abbiamo figure geometriche nel senso usuale, ma la rappresentazione di numeri tramite configurazioni geometriche di pallini. Le spezzate a forma di elle rovesciata sono marcatori visuali il cui scopo è quello di evidenziare le configurazioni dei numeri dispari.

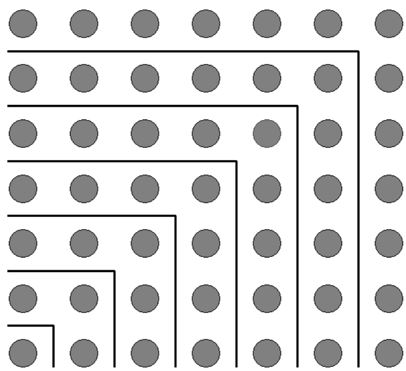


Figura 2: Somma dei primi n numeri naturali dispari

Per ricostruzione di una dimostrazione visuale si intende il passaggio dalle evidenze visive delle immagini alla stesura della dimostrazione razionale. Questo passaggio si concretizza nella costruzione, manipolazione di figure e nell'osservazione di proprietà implicite nelle figure stesse e, in tale passaggio, i marcatori visuali giocano un ruolo importante favorendo le congetture dei passi della dimostrazione rigorosa. Un'altra fondamentale questione da prendere in considerazione è il fatto che le dimostrazioni visuali sono direttamente collegabili (in un senso strettamente matematico) alle dimostrazioni usuali. Le dimostrazioni classiche sono costituite da un numero finito di passi deduttivi che nelle dimostrazioni figurali corrispondono a un ordine ben preciso (ma non univoco) di azioni, quali la costruzione e manipolazione della figura, l'estrapolazione di informazioni da essa, ecc. I passi inferenziali delle dimostrazioni visuali dipendono anche dall'ordine tenuto nella costruzione della figura. Per questo si può creare un conflitto tra la componente concettuale e quella percettiva (iconica) delle dimostrazioni visuali. In altre parole, le figure geometriche delle dimostrazioni visuali concettualmente sono delle vere e proprie costruzioni ordinate le cui proprietà rilevanti sono frutto di scelte consapevoli, mentre dal punto di vista percettivo suggeriscono un'idea di staticità e possono inglobare proprietà in modo occasionale. Questo si lega alla prototipicità delle figure geometriche, confrontata con la generalità di quelle simboliche. In particolare il carattere di generalità è molto importante, infatti le dimostrazioni visuali per loro natura possono essere costruite solo per unici valori del dominio di validità del teorema ma rappresentano la dimostrazione per tutti i valori del dominio.

Per l'utilizzo delle dimostrazioni visuali nell'insegnamento occorre tenere presente alcuni ostacoli di tipo cognitivo che potrebbero presentarsi e alcune abilità specifiche richieste per la loro trattazione. Prima di tutto lavorare con le dimostrazioni visuali richiede di saper passare dal sistema semiotico figurale al linguaggio verbale o alla rappresentazione simbolica e viceversa (per ulteriori informazioni sulla coordinazione di sistemi semiotici si veda Duval, 1993). In Presmeg (1992) viene puntualizzato che il pensiero visuale, affinché sia efficace, richiede l'abilità di decifrare relazioni in termini di configurazioni visuali-spaziali (pattern imagery). In Bardelle (2009, 2010) viene presentato uno studio esplorativo sulla comprensione di dimostrazioni visuali in studenti di matematica universitari. Lo studio rivela una notevole difficoltà nella comprensione di tali dimostrazioni. In primo luogo essa necessita di conoscenze matematiche come ad esempio i criteri di similitudine, i teoremi di Euclide, il Teorema di Pitagora, ecc. La problematica non risiede tanto nel fatto che gli studenti non abbiano tali risorse, ma quanto nel fatto che tali risorse non siano mobilitabili in contesti inusuali. Questo aspetto è comunque comune alla maggior parte delle dimostrazioni matematiche anche non visuali. In secondo luogo gli studenti spesso non sentono la necessità di dimostrare alcune informazioni contenute nelle figure. Questo aspetto si ritrova anche negli studi di Dvora & Dreyfus (2004) dove viene evidenziato come spesso gli studenti traggano conclusioni non provate deduttivamente dalle figure geometriche. Questo fatto risulta fondamentale per il passaggio dalla evidenza visiva alla dimostrazione deduttiva. Ad esempio nella figura 1 gli studenti tendono a non motivare il fatto che i quadrati siano effettivamente tali. Inoltre in tale studio è emerso che le figure delle dimostrazioni visuali non sono viste come dei processi ma dei semplici strumenti di aiuto per trovare risultati. Questo è provato dal fatto che gli studenti non ricostruivano la figura ma usavano alcune sue parti per trarre conclusioni spesso impostando calcoli algebrici. Infine l'aspetto percettivo è importante per la comprensione delle immagini ma, come messo in evidenza da Fischbein (1993), la percezione è uno strumento utile solo se controllato da fatti concettuali.

La sperimentazione didattica

L'esperimento ha coinvolto 22 studenti di una classe II del Liceo Scientifico "Galileo Galilei" di Alessandria nel corso del secondo quadrimestre dell'anno scolastico 2012/13.

La progettazione

L'attività didattica si colloca in una progettazione didattica per competenze. Secondo Le Boterf (1994) la competenza risiede nella mobilitazione delle risorse dell'individuo (conoscenze, capacità, atteggiamenti …), e non nelle risorse stesse; si configura quindi come un saper agire (o reagire) in una determinata situazione, in un determinato contesto, allo scopo di conseguire una performance. Una rielaborazione di tale definizione si trova in Maccario (2012) secondo cui per competenza si intende la mobilizzazione integrata di risorse personali (conoscenze, abilità, micro-competenze, capacità, attitudini… anche in ordine alla sfera socio-relazionale, emotivo-affettiva, fisico-corporeo-percettiva, etico-valoriale) e contestuali che si attiva nell'affrontare compiti/situazioni relativamente complessi (che rappresentano famiglie di compiti/situazioni simili) e che richiedono di essere 'visti' e interpretati come tali in autonomia da parte dell'alunno. E' inoltre richiesto, affinché si tratti di competenza, che il problema complesso ammetta più strategie di soluzione.

In questa attività didattica la ricostruzione di dimostrazioni deduttive basate su immagini è il compito/situazione complesso che richiede di essere visto e interpretato dall'alunno. Inoltre le dimostrazioni possono essere differenti: ad esempio il processo di costruzione della figura può non essere unico, si possono utilizzare diversi linguaggi o far appello a risorse differenti. Si osserva che, data la complessità dell'argomento, si sono trattate le dimostrazioni inerenti a figure geometriche piane. Si noti inoltre che l'attività proposta agli studenti non era intesa a far apprendere tale competenza, data la scarsità di tempo in rapporto alla complessità dell'argomento, ma comunque a fornire delle abilità o micro-competenze legate all'uso delle rappresentazioni figurali nell'apprendimento della matematica.

La seguente tabella riassume la progettazione per competenze dell'attività.

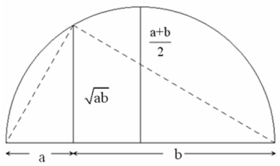
Competenza attesa	Ricostruire una dimostrazione deduttiva a partire da una immagine (figura geometrica, diagramma, ecc.) e più in generale saper sviluppare argomentazioni di carattere deduttivo basate su rappresentazioni grafiche.	
Situazione-problema	Ricostruire la dimostrazione deduttiva della proprietà $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ per ogni *a*, *b>0* a partire dalla seguente figura  	
Apprendimenti-risorsa da sviluppare	**Abilità/capacità/microcompetenze** 1) Coordinare la rappresentazione simbolica, grafica e verbale 2) Riconoscere proprietà di figure geometriche 3) Saper applicare i criteri di congruenza, di similitudine, Teoremi di Euclide, Pitagora, Talete, ecc. 4) Individuare relazioni in diagrammi e tradurle in equazioni e disequazioni algebriche. 5) Utilizzare in modo critico le rappresentazioni grafiche. 6) Effettuare costruzioni di geometria euclidea. 7) Individuare pattern (configurazioni) nelle rappresentazioni grafiche. 8) Distinguere se figure possiedano proprietà geometriche per costruzione, oppure se queste siano conseguenza di processi deduttivi.	Conoscenze Similitudine, Congruenza Teorema di Pitagora, Teoremi di Euclide, Equivalenza ed equiscomponibilità di figure piane.
Prerequisiti	**Abilità/capacità/microcompetenze** Calcolare espressioni algebriche con termini numerici e letterali. Calcolare aree e perimetri delle principali figure piane. Saper applicare le proprietà degli angoli, il Teorema di Talete, il Teorema delle parallele, ecc. in contesti in cui viene espressamente richiesto.	Conoscenze Calcolo letterale Relazioni di uguaglianza, disuguaglianza Equazioni e disequazioni Angoli Proprietà degli angoli dei poligoni Parallelismo e perpendicolarità Cerchio e circonferenza Poligoni inscritti e circoscritti Angoli al centro e angoli alla circonferenza Teorema delle parallele, Teorema di Talete
Metodologia	Lezioni frontali e interattive, attività individuali e di gruppo per la sistematizzazione degli apprendimenti risorsa e per l'immersione in situazioni complesse.	

Tabella 1: La progettazione per competenze

L'attività didattica

Durante lo svolgimento dell'attività sono stati presentati alla classe il teorema di Pitagora e i due teoremi di Euclide. Il teorema di Pitagora è stato dimostrato con una lezione frontale interattiva a partire dalla dimostrazione di figura 1, in cui sono state sottolineate alcune criticità riguardanti in particolare il punto 8). I teoremi di Euclide sono stati presentati sia con le dimostrazioni basate sulla similitudine di triangoli, sia con la equiscomponibilità ed equivalenza delle figure. Questo secondo approccio è risultato decisamente più complicato per gli studenti. Per il Teorema di Pitagora si è presentata agli studenti l'immagine realizzata con GeoGebra nel laboratorio di informatica. Purtroppo solo tale dimostrazione è stata presentata con l'ausilio di GeoGebra poiché questa classe si trova in una succursale della scuola in cui non è presente il laboratorio di informatica.

In particolare per favorire l'apprendimento dell'abilità 5), cioè di utilizzare in modo critico le rappresentazioni grafiche e non fare assunzioni sbagliate, si è presentata agli studenti l'immagine in figura 3 che sembrerebbe dimostrare che 31,5=30,5 chiedendo di provare a capire quale fosse la motivazione di tale stranezza.

E' stata presentata una scheda con diverse dimostrazioni visuali. La presentazione delle dimostrazioni visuali inerenti il Teorema di Pitagora è stata corredata da notizie storiche circa la loro attribuzione (vedi Giusti, 2001).

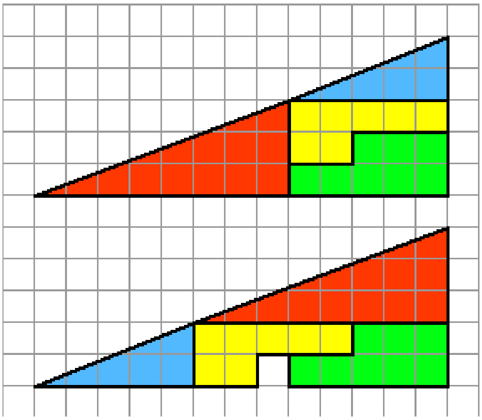


Figura 3

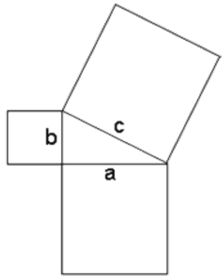
L'attività è stata guidata in quanto è risultata troppo complicata per gli studenti ed è stata impostata tramite lavoro di gruppo intervallato da discussioni in classe.

La verifica degli apprendimenti

La verifica è stata ideata con l'intenzione di valutare l'apprendimento delle abilità, capacità, micro-competenze e conoscenze elencate nella tabella 1. Per la scarsità di tempo non è stato possibile sviluppare totalmente la competenza degli studenti nel risolvere la situazione/problema. Per tale motivo il problema, inerente una dimostrazione visuale del teorema di Pitagora, è stato suddiviso in 10 passi, ciascuno dei quali valuta gli apprendimenti risorsa. Il problema è stato aggiunto alla regolare prova di verifica sommativa. Poiché le risposte ai primi tre sottoquesiti dipendono dall'ordine di costruzione degli oggetti geometrici della figura, tutti gli studenti, le cui risposte sono apparse dubbie, sono stati intervistati al fine di chiarire la loro costruzione.

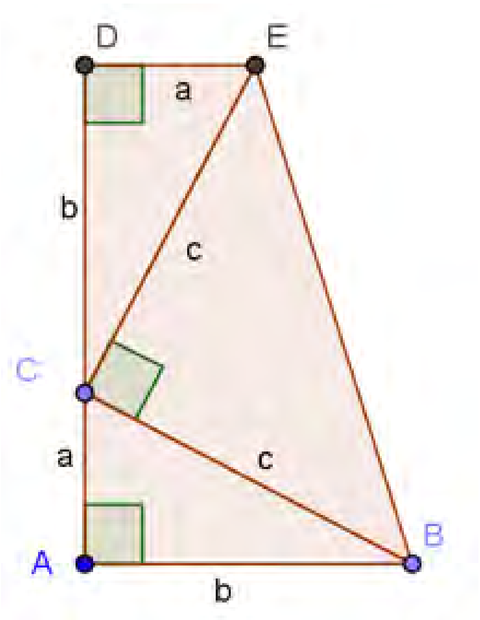
PROBLEMA (Item 4). Il Teorema di Pitagora afferma che

$a^2+b^2=c^2$



Dalla figura qui a lato se ne può ricavare una dimostrazione.

Rispondi alle seguenti domande relative alla ricostruzione della dimostrazione



1) L'angolo in *D* è retto per costruzione. V F

Se hai risposto falso, spiega perché l'angolo è retto.

2) L'angolo in *A* è retto per costruzione. V F

Se hai risposto falso, spiega perché l'angolo è retto.

3) L'angolo *BCE* è retto per costruzione. V F

Se hai risposto falso, spiega perché l'angolo è retto.

4) Esprimi l'area del triangolo *ABC* usando a,b,c e motivando la risposta.

5) Esprimi l'area del triangolo *DCE* usando a,b,c e motivando la risposta.

6) Esprimi l'area del triangolo *BCE* usando a,b,c e motivando la risposta.

7) Esprimi l'area di *ABED* come somma delle aree dei triangoli *ABC*, *DCE*, *BCE*.

8) I lati *AB* e *DE* sono paralleli. V F. Motiva la risposta.

9) Esprimi l'area di ABED applicando la formula dell'area del trapezio

$$Area = \frac{(base\ maggiore + base\ minore)\cdot altezza}{2}$$

10) Eguaglia le espressioni ottenute ai punti 7) e 9) e ricava la tesi del Teorema di Pitagora $a^2+b^2=c^2$

Analisi dei dati

La suddivisione della dimostrazione in 10 passi ha avuto l'effetto di ridurre notevolmente la complessità del problema (come evidenziato dal relativo Indice di Difficoltà[1], ID=0,63). Infatti,

1 L'Indice di Difficoltà (ID) di un Item è dato dal rapporto tra la somma dei punteggi ottenuti da tutti gli studenti in quel dato Item (indicato con P_{tot}) e il punteggio massimo complessivo ottenibile sull'Item

molti dei punti in cui essa è stata ripartita sono risultati piuttosto facili (come ad esempio gli Item 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7), cosa che ha consentito agli studenti di ottenere punteggi complessivamente elevati per l'intero Item 4 (vedi seguente tabella sugli indici di difficoltà dei 10 sottopunti). Gli indici di difficoltà e l'intera analisi comprendono anche le risposte alle interviste effettuate in caso di risposte dubbie alla verifica scritta.

	Item 4.1	Item 4.2	Item 4.3	Item 4.4	Item 4.5	Item 4.6	Item 4.7	Item 4.8	Item 4.9	Item 4.10	Item 4
ID	0,86	0,86	0,12	0,98	0,95	0,92	0,86	0,42	0,73	0,64	0,63

Si ricorda che la competenza inerente la ricostruzione di dimostrazioni a partire da immagini richiede una mobilitazione integrata di risorse che a causa del poco tempo dedicato alle attività didattiche non è stata sufficientemente promossa. Richiedere di ricostruire la dimostrazione senza dare "tappe intermedie" avrebbe condotto a sicuri fallimenti.

Dall'analisi degli indici di difficoltà relativi ai dieci sottopunti, l'item 4.3 risulta essere il più complicato. Abbiamo assegnato un punteggio nullo sia a chi ha risposto V al posto di F, sia a chi ha risposto F ma senza motivazione o con motivazione errata. In particolare, 12 studenti hanno risposto V e 10 hanno risposto F. Di questi dieci, 4 studenti non hanno dato motivazione; dei sei studenti rimanenti 3 hanno risposto in modo sostanzialmente corretto. Gli altri 3 studenti hanno dato motivazioni errate. Abbiamo quindi 16 studenti su 22 che hanno risposto V o F senza giustificazione. Le cause di tali insuccessi possono essere diverse. Si ritiene che una delle cause principali sia stata una lettura errata dell'immagine attribuibile ad aspetti pragmatici del linguaggio[2]. Nell'immagine data gli angoli $\hat{A}$, $\hat{D}$, $\hat{C}$, sono segnalati con lo stesso simbolo per indicare che si tratta di angoli retti. Mentre gli angoli $\hat{A}$, $\hat{D}$ sono retti per costruzione, l'angolo in $\hat{C}$ è retto come conseguenza della costruzione. Gli studenti non riescono a percepire questa differenza a causa del simbolo utilizzato. Quindi il marcatore visuale usato in $\hat{C}$, che avrebbe lo scopo di aiutare il lettore nella ricostruzione, risulta essere un ostacolo perché interpretato in modo cooperativo, ovvero chi disegna l'immagine fornisce come informazione già assodata che i tre angoli sono retti. Per ovviare a questa difficoltà, in fase didattica potrebbero essere utilizzati alcuni accorgimenti visivi (ad esempio colorare i simboli degli angoli retti per ipotesi in modo diverso da quelli retti per conseguenza della costruzione, e quindi da dimostrare). Rimane comunque il fatto che l'uso condiviso nella matematica di simboli non tiene in considerazione tale distinzione. Quindi lo studente deve essere guidato a raggiungere traguardi di comprensione del linguaggio comunemente usato dagli attori della matematica.

Anche l'item 4.8 presenta notevoli ostacoli come si può notare dal suo indice di difficoltà pari a 0.44. Il valore di tale indice è comunque influenzato dal fatto che chi ha giustificato la proprietà di parallelismo tra i segmenti *AB* e *DE* con affermazioni del tipo "sono paralleli in quanto rispettivamente base maggiore e minore del trapezio rettangolo" ha ricevuto metà punteggio invece di nessun punto. Ponendo un punteggio nullo a tale risposta l'indice si abbasserebbe a 0.23 mettendo in evidenza un'altra tipica difficoltà legata alla interpretazione errata delle figure geometriche. Solo 5 persone su 22 hanno motivato correttamente il parallelismo dei segmenti *AB* e *DE*. Dei restanti 17 studenti 10 hanno motivato con affermazioni del tipo "sono paralleli in quanto rispettivamente base maggiore e minore del trapezio rettangolo". I seguenti protocolli ne sono un esempio

in esame (cioè il risultato della somma di tutti i punteggi ottenuti dagli studenti se tutti avessero risposto correttamente, indicato con P_{max}): ID= $P_{tot}/P_{max.}$ Questo indice varia tra 0 e 1 e indica quanto l'Item in esame sia da considerarsi difficile per gli studenti: valori prossimi a 0 indicano Item difficili, mentre valori prossimi a 1 sono propri di Item facili.

2 Per linguaggio si intende non solo la componente verbale ma si include qualsiasi rappresentazione semiotica.

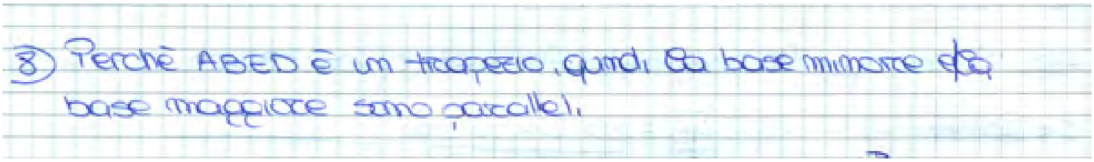


Figura 4

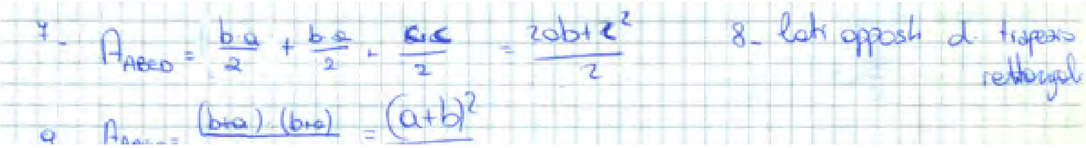


Figura 5

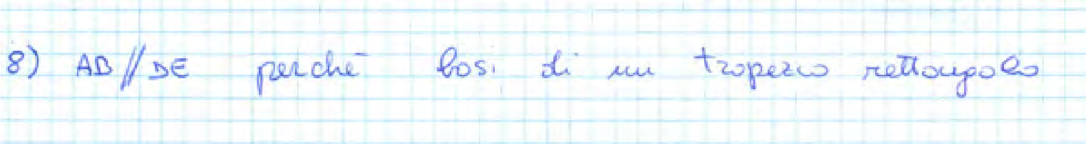


Figura 6

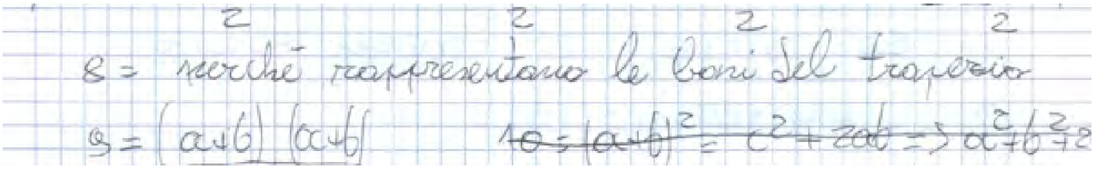


Figura 7

Altri 3 studenti hanno motivato “per costruzione”. Uno studente non ha risposto e i restanti 3 studenti hanno risposto V ma senza dare motivazione. La causa più plausibile di tale insuccesso sembrerebbe essere un uso errato delle informazioni della figura e non tanto l’incapacità di fornire la motivazione corretta. Il protocollo dello studente S13 è illuminante a tale proposito. Gli altri item non presentano particolari criticità. Sono emersi alcuni problemi sul calcolo algebrico e alcuni non hanno risposto all’item 4.10, forse per mancata comprensione della richiesta. S13 (Figura 8) fornisce tre spiegazioni differenti per dimostrare che i segmenti *AB* e *BE* sono paralleli. La prima è corretta e coerente con la traccia di dimostrazione richiesta. La seconda e terza motivazione non sono coerenti col resto della traccia. Potrebbero risultare corrette con ricostruzioni differenti.

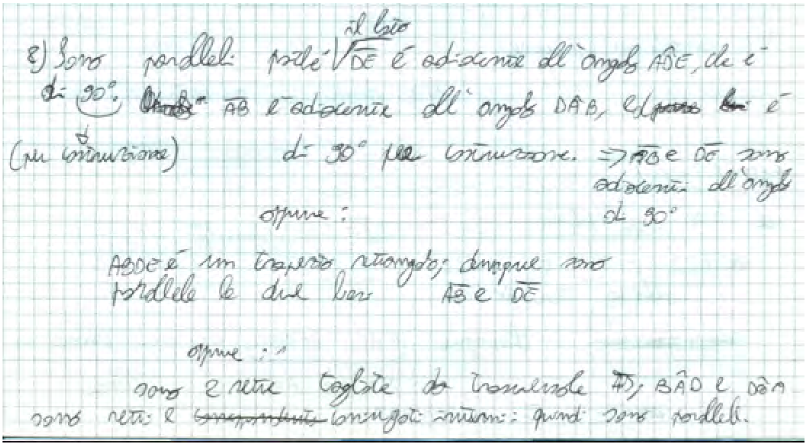
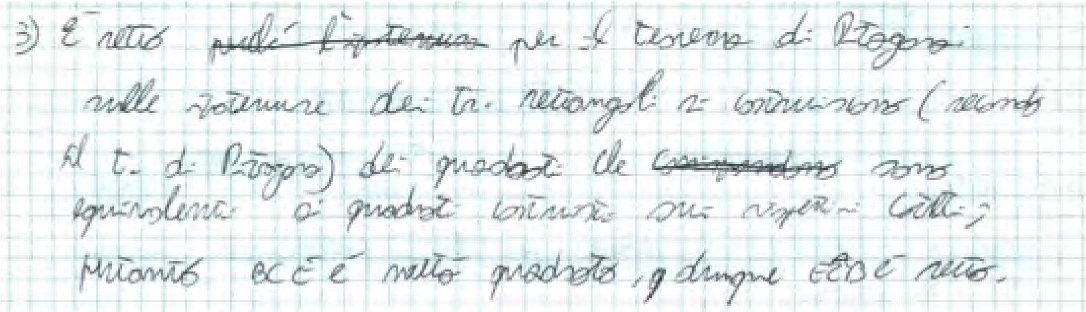


Figura 8

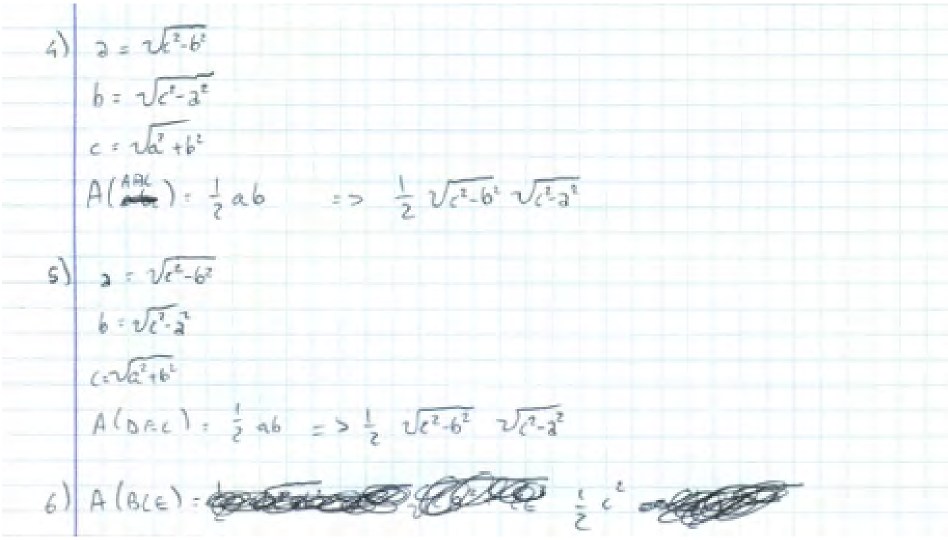
Le tre spiegazioni evidenziano il fatto che il problema non risiede nell'incapacità di mobilitare risorse ma in un uso delle immagini come fonte cooperativa di lettura di informazioni e non come strumento di trattazione per ricavare (dedurre) informazioni. Per fonte cooperativa di lettura di informazioni si intende che le proprietà "visibili" in una immagine vengono intese come informazioni trasmesse dall'autore cioè come dati acquisiti (in termini matematici come ipotesi acquisite). Questo comportamento non deve sorprendere se pensiamo che nelle pratiche didattiche le figure geometriche vengono utilizzate solitamente per rappresentare i dati di un problema in modo cooperativo.

Un'altra criticità emersa riguarda maggiormente il concetto di argomentazione. I seguenti protocolli dimostrano che gli studenti usano argomentazioni basate su "argomenti circolari" *("circular argument")* o "facendo appello alle premesse" (*"begging the premise"*) (cf. Weston, 2000). In entrambi i protocolli gli studenti usano il Teorema di Pitagora per i passaggi deduttivi non considerando che si tratta della tesi che devono dimostrare. Questo comportamento, errato non solo per le dimostrazioni deduttive ma in generale per tutti i tipi di argomentazioni, potrebbe esser stato influenzato dalla mancata comprensione della funzione dell'immagine.



3) È retto ~~poiché l'ipotenusa~~ per il teorema di Pitagora nelle ipotenuse dei tri. rettangoli è comune (secondo il t. di Pitagora) dei quadrati che ~~[illegible]~~ sono equivalenti ai quadrati costruiti sui cateti; pertanto BCE è retto quadrato, e dunque CEDC retto.

Figura 9



4) $a = \sqrt{c^2-b^2}$
$b = \sqrt{c^2-a^2}$
$c = \sqrt{a^2+b^2}$
$A(ABC) = \frac{1}{2}ab \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-a^2}$

5) $a = \sqrt{c^2-b^2}$
$b = \sqrt{c^2-a^2}$
$c = \sqrt{a^2+b^2}$
$A(DAC) = \frac{1}{2}ab \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{c^2-b^2}\ \sqrt{c^2-a^2}$

6) $A(BCE) =$ [redacted] $\frac{1}{2}c^2$ [redacted]

Figura 10

Riflessioni conclusive

Da questa esperienza didattica e da lavori precedenti (Bardelle, 2009, 2010) sulle dimostrazioni visuali si evince una difficoltà da parte di studenti della scuola secondaria di secondo grado e universitari nel ragionamento matematico di tipo visuale. In particolare, le difficoltà emerse riguardano da un lato la mobilitazione di conoscenze pregresse e dall'altro l'uso delle immagini. La mobilitazione di risorse già acquisite è requisito comune alle dimostrazioni matematiche, non solo di tipo visuale, e nel lavoro qui presentato si è cercato di ridurre questa problematica, focalizzando l'esperimento sui contenuti della geometria euclidea, già inseriti nel curricolo programmato. Inoltre la suddivisione, nella verifica, della dimostrazione visuale in sottoquesiti ha limitato problematiche inerenti la mobilitazione di risorse, facendo al contrario emergere altre difficoltà legate all'uso delle immagini. L'esperimento qui descritto ha evidenziato come queste problematicità siano legate ad aspetti pragmatici delle immagini stesse. Solitamente nella pratica scolastica e in contesti quotidiani le immagini vengono utilizzate per veicolare e trasferire informazioni. Le immagini (in questo esperimento sono le figure geometriche) usate nelle dimostrazioni visuali hanno invece una duplice funzione: da un lato veicolano informazioni (in linguaggio matematico, le ipotesi) e dall'altro suggeriscono le inferenze da dimostrare. Il passaggio dalle evidenze visive alle dimostrazioni razionali è quindi ostacolato dal discernere quale uso si debba fare delle varie "parti" che formano l'immagine. Lo stesso discorso vale per i marcatori visuali: anch'essi hanno questa duplice funzione. I marcatori visuali sono un aiuto nella comunicazione delle immagini, ma se non è chiaro il loro duplice scopo, invece di essere un supporto talvolta si rivelano essere degli ostacoli. I risultati poco soddisfacenti circa il riconoscere le funzioni di una immagine non deve sorprendere in quanto gli studenti sono abituati nella comune pratica scolastica a utilizzare le figure geometriche e i marcatori visuali come strumenti cooperativi per ricevere informazioni già assodate e non come informazioni da dedurre razionalmente. Per sviluppare capacità argomentative basate su immagini è quindi indispensabile educare gli studenti a questa duplice funzione delle componenti di una figura. Data la complessità dell'argomento le problematiche non si esauriscono in quelle sopra descritte, che tuttavia costituiscono un buon punto di partenza per lavorare con le immagini.

Bibliografia

Bardelle, C. (2009). Visual proof: An Experiment. In V. Durand-Guerrier., S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*, 251-260, January 28th - February 1st 2009. Lyon, France.

Bardelle, C. (2010). Le dimostrazioni visuali: un'indagine preliminare. Logica matematica e processi cognitivi. *Rielaborazione di alcuni interventi al Convegno "Logica matematica, costruzione dei concetti e processi socio-cognitivi" (Salerno, 30 giugno-3 luglio 2008)*, 31-38. A cura di Giangiacomo Gerla, Collana scientifica dell'Università di Salerno. Rubbettino Editore.

Barwise, J.& Etchemendy, J. (1991). Visual Information and Valid Reasoning. In W. Zimmerman & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Mathematics*, MAA Notes No.19. Washington (DC): Math. Ass. of America, 19-24.

DM 7 ottobre 2010, n. 211, *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali*. http://www.edscuola.eu/wordpress/?wpfb_dl=235

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In: F. Furinghetti (ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Assisi - vol.1, 33-48.

Dvora, T.& Dreyfus, T. (2004). Unjustified assumptions based on diagrams in geometry, In: H. M. Johnsen & F. A. Berit (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen - vol.2, 311-318.

Duval, R. (1993). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 57-74.

Fishbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139 -162.

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics: An Epistemological Study*. Oxford University Press.

Giusti, E. (2001). *Pitagora e il suo teorema*. Firenze: Polistampa.

Hanna, G. (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (eds.), Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Paris, vol. II, 45-51.

Maccario, D. (2012). *A scuola di competenze. Verso un nuovo modello didattico*: Torino: SEI.

Mariotti, M.A. (1995). Le rappresentazioni grafiche e l'apprendimento della geometria In B.. D'Amore (ed) *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*. Bologna: Pitagora, 47-58.

Nelsen, R.B. (1993, 2001). *Proofs Without Words I, II*. Washington (DC) - The Mathematical Association of America.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 595-610.

Quadro di riferimento *INVALSI*.
http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/QDR/QdR_Mat_II_ciclo.pdf

Quadro di riferimento *La matematica per il cittadino*. http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Didattica/didattica.html

Tall, D. (1991). Intuition and rigor: The role of visualization in calculus. In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*. MAA Notes Number 19. Washington DC: Mathematical Association of America. 105-120.

Weston, A. (2000). *A Rulebook for Arguments*. Indianapolis/Cambridge – Hackett publishing company.

SKETCH-UP E LA GEOMETRIA SOLIDA: UN SOFTWARE DI MODELLIZZAZIONE

Maria Isabella Calastri
I.C. G. Cena – Lanzo T.se (TO)

Premessa

Questo lavoro vuole illustrare un approccio didattico alternativo che ha gli obiettivi di avvicinare gli studenti della terza classe di scuola secondaria di primo grado allo studio della Geometria Solida, mostrando loro un'applicazione interessante, e di iniziarli all'utilizzo di un software di modellizzazione che si avvicina per struttura e comandi a un CAD che potranno ritrovare nel prosieguo dei loro studi.

Da alcuni anni i nostri ragazzi sono identificati come "nativi digitali", sottointendendo con questo appellativo la loro capacità naturale di approcciarsi a un mezzo informatico e la loro pari incapacità di utilizzare strumenti e di manipolare oggetti.

Questo progressivo distacco dalle forme reali sta rendendo sempre più difficile per i ragazzi collegare lo studio della Geometria Solida con esperienze tangibili, si pensi che un quesito INVALSI che mise in crisi più di un quattordicenne fu il calcolo del volume di un barattolo di pomodori in cui non seppero riconoscere un cilindro.

Come insegnante, vedo emergere sempre di più nel rapporto tra i quattordicenni e la Geometria le seguenti difficoltà:

- difficoltà a visualizzare i solidi, soprattutto quelli composti
- difficoltà a capire i legami tra le regole di calcolo delle superficie e la forma delle medesime
- difficoltà a visualizzare i solidi di rotazione
- difficoltà ad applicare alla realtà quanto appreso
- difficoltà a "vedere dentro" a un solido.

Ho cercato, partendo dall'idea di trovarmi di fronte a dei "nativi digitali" che si interazionano meglio con una Play-Station che con un pallone, di introdurre un software di modellizzazione che permettesse loro di ritrovare nel mondo virtuale, a cui sono abituati, i solidi che sono studiati nel terzo anno anno di Scuola Secondaria di Primo Grado.

La nascita dell'Idea

L'idea dell'utilizzo di un software di modellizzazione nasce lontano dal mondo della scuola, tutto incominciò quando vidi un'amica architetto utilizzare il software Sketch-Up per modellizzare le costruzioni e presentare ai committenti il risultato della progettazione. Con l'aiuto di questo software, sostituiva i costosissimi e molto ingombranti plastici, che dovevano rendere l'idea della costruzione finita e inserita nel contesto urbano, con tour virtuali e presentazioni video ai committenti.

Vedendola lavorare, scoprendo che i comandi base sono molto semplici e intuitivi e che la versione base del software è gratuita, ho pensato di introdurre questo strumento per visualizzare sulla LIM quanto avrei spiegato nelle lezioni di Geometria.

Utilizzando Sketch-Up a lezione, al posto dei tradizionali disegni alla lavagna, i ragazzi stessi mi hanno chiesto se potevano portarsi il personal da casa e riprodurre quanto eseguivo.

In un primo tempo ho lasciato che utilizzassero questo metodo al posto del disegno su carta, ma questo modo era inefficiente perché si rallentava notevolmente il ritmo della lezione, dovendo insegnare anche l'utilizzo dei comandi, e inefficace perché i ragazzi perdevano l'abitudine a corredare il lavoro con il disegno del solido in assonometria, richiesto all'esame.

Ho rivisto la modalità di utilizzo, tenendo una lezione introduttiva sull'utilizzo dei principali comandi, affidando come compito aggiutivo la visione dei video tutorial a disposizione su Internet. Gli studenti che scelgono di cimentarsi con l'utilizzo di Sketch-Up hanno come compito a casa la modellizzazione dei solidi che saranno affrontati nella lezione successiva e la loro presentazione alla classe. In questo modo, costruendo il solido e presentando il modello, i ragazzi capiscono e introiettano le regole di calcolo.

Il Software SKETCH-UP

In questo paragrafo presento brevemente questo software, le sue potenzialità, i suoi limiti e principali comandi.

Cosa non è SKETCH-UP

Per sgombrare il campo dai dubbi, per chi non abbia mai visto questo software, chiarisco subito i limiti di utilizzo, dettagliando brevemente cosa non può fare:

Sketch-Up:

- non è un Ambiente di Calcolo Evoluto (es. MAPLE, MATHLAB, …): non posso costruire, mediante un linguaggio di programmazione, algoritmi in grado sia di effettuare calcoli dimensionali sia di rappresentare graficamente funzioni matematiche, poligoni e superficie
- non è uno strumento di calcolo (fogli elettronici di calcolo, Excel): non ha la possibilità, mediante inserimento di dati in tabelle o in formule, di effettuare calcoli anche molto semplici (perimetri, aree, volumi);
- non è uno strumento di calcolo simbolico (GeoGebra): non ha la possibilità di associare alle figure geometriche riprodotte formule di calcolo;
- non è un ambiente di grafica evoluta (Autocad); non è in grado di riprodurre oggetti mediante regole matematiche come simmetrie, duplicazioni, omotetie, di gestire layer di progettazione personalizzati;
- non è uno strumento di progettazione integrata (es. KATIA) che restituisce al termine della progettazione le cosiddette "matematiche", cioè la trasformazione delle superficie in reticoli di curve.

Cosa è SKETCH-UP

In una frase: Sketch-Up è un software, gratuito nella versione base, di modellizzazione grafica, facile da imparare e piacevole da usare. Il suo lavoro non è fare calcoli, rappresentare funzioni, scrivere testi interattivi ma semplicemente modellizzare in scala i solidi geometrici.

È utilizzato in molti ambiti in cui è necessario produrre modelli grafici:

- Architettura (progettazione e ristrutturazione di edifici, interior design, progettazione di elementi di arredo, progettazione paesaggistica, pianificazione urbanistica)
- Ingegneria
- Lavorazione del legno
- Scenografia teatrale e cinematografica
- Insegnamento

E proprio per l'insegnamento esistono in tutto il mondo community di insegnanti che condividono le loro esperienze didattiche, materiali e videolezioni.

I Comandi Principali

Prima di iniziare a disegnare bisogna scegliere nella maschera di apertura il template corretto per avere le dimensioni in metri o in millimetri.

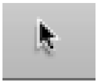
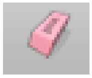
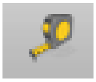
La struttura della pagina di Sketch-Up è simile a tutti i programmi di disegno computerizzato in cui sono presenti i tre assi cartesiani ortogonali rappresentati nei tre colori: rosso per l'asse delle ascisse x, verde per l'asse delle ordinate y e blu per l'asse delle altezze z.

Un discorso a parte si deve fare per le viste, in quanto Sketch-Up di default presenta la prospettiva, mentre per disegnare è più comodo passare a quella che è chiamata Proiezione Parallela (sotto il menù a tendina Telecamera nella barra dei comandi) che presenta in apertura l'assonometria isometrica. Nel menù degli strumenti è possibile scegliere la vista assonometrica e le varie proiezioni ortogonali semplicemente cliccando sulla relativa icona, ciò permette di visualizzare il solido dai vari punti. 

Se si tracciano linee rette parallele a uno degli assi queste assumeranno nel momento del disegno il colore dell'asse, mentre saranno rosa se si tracciano perpendicolari ad altri segmenti.

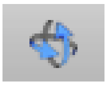
Mentre si disegna sono sempre identificati: gli estremi e il punto medio di un segmento e quando si tracciano segmenti incidenti il software ci segnala il punto di contatto tra questi.

I comandi principali che sono sufficienti per poter utilizzare Sketch-Up a scopo didattico sono:

seleziona:  come per tutti i software la freccia ci permette di selezionare parti di un modello o tutto; matita:  per disegnare linee rette; gomma:  per annullare gli elementi desiderati; secchiello di vernice:  per colorare le superficie; muovi:  per spostare il disegno; misura:  per misurare gli elementi.

A questi si aggiungono: Rettangolo e Cerchio:  per disegnare rettangoli, quadrati e circonferenze; Estrude (Spingi-tira):  per creare solidi partendo da una figura piana e Follow-me (Seguimi): per creare modelli di solido di rotazione.

Per completare il nostro modello si possono aggiungere le quote con l'apposito strumento 

Molto impotante per la didattica è il comando Orbita  che permette di ruotare la figura creata e vederla da tutti i punti di vista possibili.

Per completare la carrellata sui comandi più comuni, nella barra principale sotto la tendina "Disegno" si trova il comando "Poligono" che permette di disegnare poligoni regolari dato il numero dei lati e il raggio.

Per l'utilizzo degli strumenti e la scoperta di tutte le potenzialità rimando sia al testo " Open TIC" Ed. Petrini, sia ai video tutorial presenti in rete e direttamente usufruibili all'interno del software.

Esempi di applicazioni didattiche di SKETCH-UP

In questo paragrafo presento tre momenti didattici, il primo in cui i ragazzi hanno prodotto un modello sulla base dei dati di un problema, il secondo una lezione di Geometria Solida condotta con l'ausilio di Sketch-Up e un terzo sulla presentazione dei solidi di rotazione.

Fare i compiti con Sketch-Up

Uno degli utilizzi possibili è quello di chiedere ai ragazzi di realizzare modelli sulla base dei problemi di Geometria Solida assegnati come compito a casa. Prima della soluzione, li si invita a costruire il modello, rispettando le dimensioni richieste nel problema, a colorare le varie parti e a esplorare il suo interno cancellando gli spigoli. Riporto qui un esempio con il prodotto finale eseguito dai ragazzi.

Problema assegnato: *un solido è costituito da due parallelepipedi sovrapposti. Il primo parallelepipedo, le cui dimensioni di base sono rispettivamente lunghe 30 cm e 10 cm come l'altezza, è sormontato dal secondo parallepipedo che ha la base quadrata di spigolo pari a 5 cm ed è alto 12,5 cm. Si calcolino l'area della superifcie totale e il volume del solido così composto.*

Ho aggiunto di riprodurre sia su carta che su Sketch-Up il solido, colorando alla fine della costruzione le facce dei due parallelepipedi con colori diversi, il risultato consegantomi dai ragazzi lo vedete in figura 1.

I comandi utilizzati sono stati: Rettangolo, Estrudi, Secchiello, Colore e Quota.

La possibilità di ruotare il solido per vederlo intorno e di farne in automatico le proiezioni ortogonali (esempio in Figure 2a, 2b, 2c e 3) e la possibilità di cancellare con lo strumento gomma uno spigolo (esempio in figura 4) hanno dato la possibilità di comprendere efficacemente come arrivare a calcolare l'area della superficie totale semplicemente attraverso le opportune somme e sottrazioni di aree di rettangoli e quadrati.

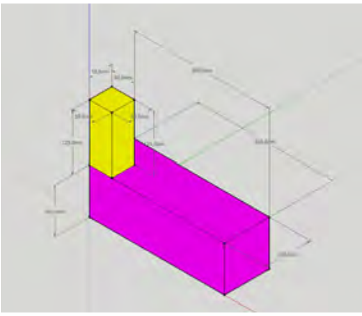


Figura 1. Il solido modellizzato dai ragazzi

Figura 2a. Proiezione ortogonale 1

Figura. 2b. Proiezione ortogonale 2

Figura 2c : Proiezione ortogonale 3

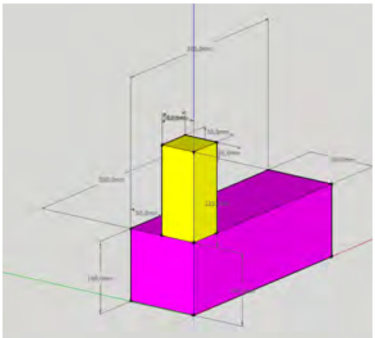


Figura 3. Altro punto di vista catturato con lo strumento Orbita

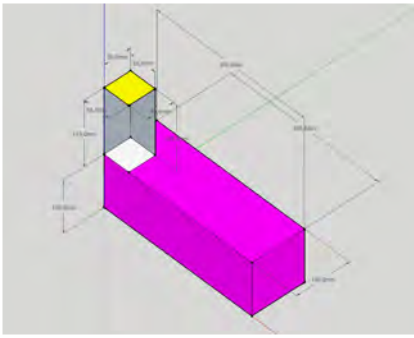


Figura 4. Visione dell'interno non colorato

Una lezione con Sketch-Up: La Piramide a base quadrangolare regolare retta.

Il secondo degli utilizzi possibili è quello di costruire passo a passo un solido alla LIM illustrando le definizioni che lo riguardano. Come esempio riporto la costruzione di una piramide a base quadrangolare regolare retta, evidenziando di volta in volta cosa si può sottolineare utilizzando i comandi di Sketch-Up.

Si parte disegnando un quadrato nel piano xy facendo attenzione a utilizzare terne pitagoriche, così da avere risultati facilmente rilevabili con gli stumenti Misura e Quota. Nel quadrato si disegnano le diagonali e gli assi dei lati, tovato così il centro si traccia l'altezza (Figura 5). Si costruiscono poi le facce laterali (Figura 6) e si può far notare come il triangolo ottenuto sia isoscele con lo strumento Misura. Si può evidenziare il triangolo rettangolo che si ottiene tracciando l'apotema della faccia laterale e lo strumento Secchiello Colore (Figura 7).

Successivamente, lasciando aperta una faccia, si possono costruire all'interno i due triangoli rettangoli che hanno per vertici l'incentro, il vertice della piramide e il punto medio dello spigolo di base e quello che ha come terzo vertice uno di quelli della base (Figura 8). Questi sono i triangoli rettangoli che servono, attraverso il teorema di Pitagora, a risolvere numericamente i problemi su questo tipo di solidi.

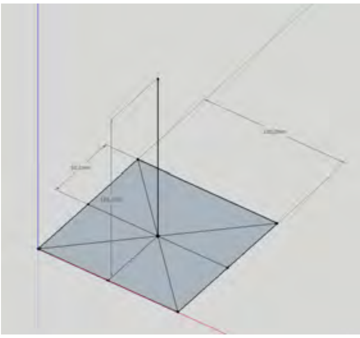


Figura. 5. Costruzione della base quadrata e dell'altezza della piramide.

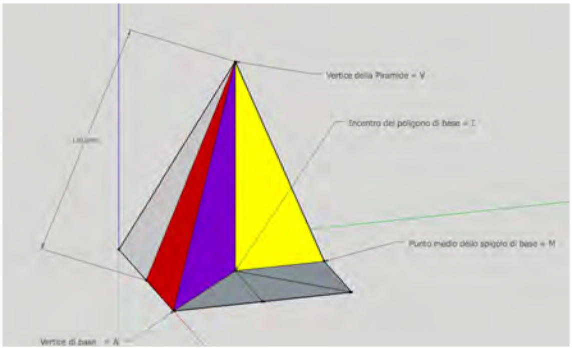


Figura 7. Costruzione e identificazione dei triangoli rettangoli presenti con misura dell'apotema laterale

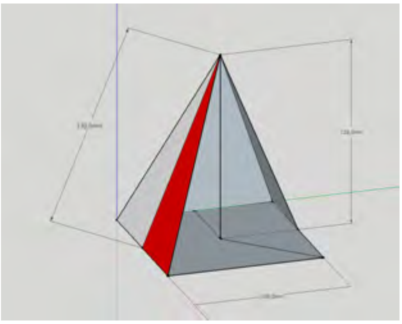


Figura 6. Costruzione delle facce laterali

Proposta di utilizzo per i solidi di rotazione con lo strumento FOLLOW-ME (SEGUIMI)

Per far comprendere come i solidi di rotazione si ottengano a partire da una figura piana che ruota attorno a un asse, si può utilizzare il commando Follow-Me (Seguimi) che permette di costruire e animare cilindri e coni. Una volta costruito il solido cancellando alcuni tratti della circonferenza di base si può visionare il solido all'interno mettendo in evidenza i tratti salienti.

Illustro i passi che si possono seguire per costruire un cono retto alla LIM con i comandi Cerchio, Matita, Follow-Me (Seguimi). Consiglio anche qui di utilizzare terne pitagoriche per far vedere ai ragazzi le dimensioni precise con lo strumento Quota.

Disegnamo un cerchio sul piano xy con centro nell'intersezione degli assi che ci apparirà blu in quanto perpendicolare all'asse z. Lungo l'asse z disegniamo a partire dal centro della circonferenza l'altezza del cono e un raggio lungo l'asse rosso. Uniamo poi il vertice con il punto della circonferenza intersezione con l'asse delle x a formare l'apotema del cono. Si formerà un triangolo rettangolo tra il raggio, l'altezza e l'apotema del cono (Figure 8 e 9) che potremo colorare con lo strumento Secchiello.

Selezioniamo la circonferenza che diventerà "blu", attenzione che sia tutta selezionata e non solo un arco; selezioniamo lo strumento Follow-me dalla barra degli strumenti e clicchiamo sul triangolo rettangolo, si formerà così il cono (Figura 10).

Cancellando alcuni tratti (ricordo che la circonferenza è approssimata da un poligono con ventiquattro lati) potremo far vedere ai ragazzi l'interno del cono e il triangolo rettangolo colorato, individuando anche qui i punti salienti della figura.

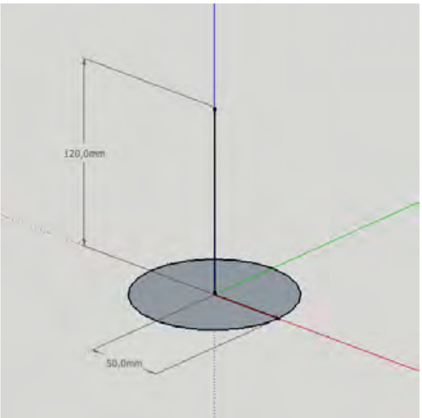
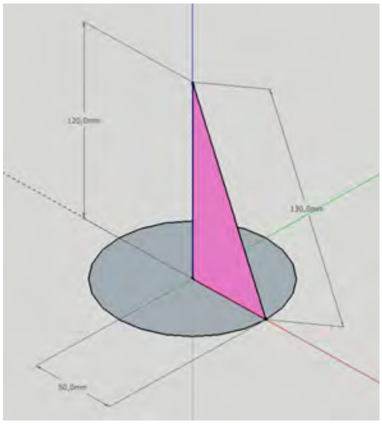


Figura 8. preparazione del disegno, circonferenza, altezza del cono e raggio di base



Fiura. 9. Costruzione del triangolo rettangolo che ruota attorno all'asse z

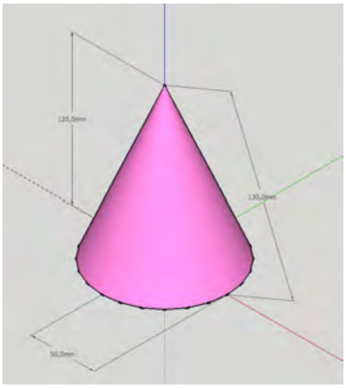


Figura 10. Cono costruito con lo strumento Follow-Me (Seguimi)

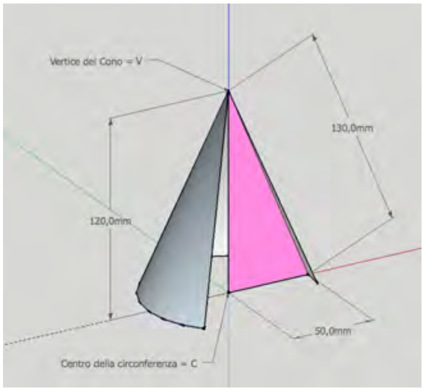


Figura 11. Interno del cono

Si possono con lo stesso comando illustrare gli integrali di rotazione in una quinta superiore. Ci si posiziona nel piano xz delle Viste standard, si traccia una linea a mano libera a partire dall'origine, richiudendola a formare un triangolo mistilineo parallelamente all'asse z e lungo l'asse x. Ci si posiziona poi nel piano yz e si traccia una circonferenza facendo attenzione che appaia "rossa" cioé perpendicolare all'asse x (Figura 12). Si seleziona la circonferenza e poi utilizzando lo strumento Follow-Me sul triangolo mistilineo, si ottiene la superficie di rotazione. (Figura 13). In questo modo gli studenti possono vedere dal vivo come il calcolo di un integrale di rotazione sia la sommatoria di infinite circonferenze di raggio pari ad

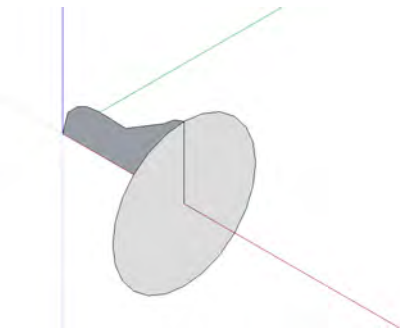


Figura 12. Preparazione del triangolo mistilineo e della circonferenza di rotazione

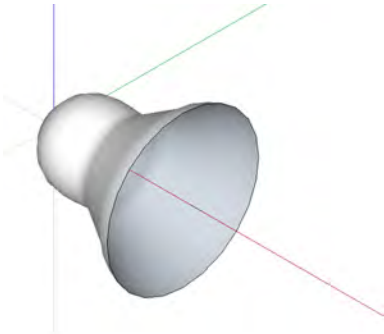


Figura 13.. Superficie di rotazione ottenuta con il comando Follow-Me

Tutti I modelli e le Viste ottenute con Sketch-Up sono stampabili, esportabili in PDF per poterli visualizzare dove non ci fosse il software installato e in DWG lo standard AUTOCAD.

Al termine di questo breve excursus su di una risorsa didattica, non nata a questo scopo ma che può aiutare la comprensione della Geometria Solida, volevo ricordare che l'utilizzo di un software di modellizzazione ottiene anche un obiettivo secondario, infatti prepara quegli allievi che, scegliendo percorsi tecnici o professionali nella scuola superiore, si troveranno già dal primo anno a dover utilizzare strumenti informatici per realizzare disegni e progetti.

I ragazzi quindi trovano una forte motivazione a realizzare i loro modelli e a comprendere come la conoscenza delle regole di Geometria sia semplicemente la traduzione in simboli della conoscenza dell'oggetto fisico.

Bibliografia

Drivet, A., Re, E. & Marino, T. (2009). *Open TIC. Dalla Teoria ai Progetti*. Torino: Petrini.

Sitografia

www.sketchup.com per scaricare il software e per i Video Tutorial

WE DON'T NEED NO EDUCATION

Alessio Drivet
Comitato scientifico-organizzativo DI.FI.MA.

"We don't need no education
We don't need no thought control
No dark sarcasm in the classroom
Teachers leave them kids alone
Hey! Teachers! Leave them kids alone!
All in all it's just another brick in the wall.
All in all you're just another brick in the wall."
Pink Floyd, *Another Brick In The Wall,* 1979

Premessa

In circolazione ci sono alcune affermazioni apodittiche, ormai entrate nell'immaginario collettivo. Frasi ripetute come un mantra da politici, economisti, industriali, insegnanti, sindacalisti, studiosi, casalinghe, ecc.

Ma siamo certi che si possano accettare senza il beneficio del dubbio?

Proviamo ad analizzare alcune affermazioni utilizzando alcuni indicatori statistici relativi a 21 paesi europei, in particolare ci si è riferiti alle prove OCSE-PISA, al TIMMS e alle prove INVALSI per quanto riguarda matematica.

Nei grafici sono riportate le rette di regressione e il coefficiente di correlazione lineare, nei commenti i valori della correlazione sono valutati utilizzando il *t* di Student $t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ con gdl = n-2. Il valore di soglia è $t_{19;0,95}$=1,73.

L'istruzione è la vera chiave della prosperità economica.

Se ciò fosse vero dovremmo aspettarci una buona correlazione tra la performance in matematica e i risultati economici di un paese. La relazione con il PIL è significativa (t=1,96), anche se non stretta come nelle attese (Figura 1) ma non sembra influire (*t*=1,00) sulla produttività di un paese (Figura 2).

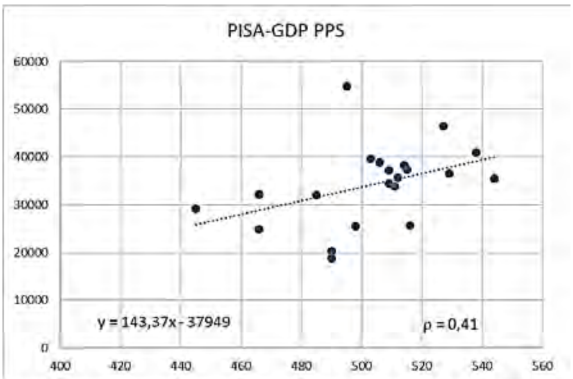


Figura 1. Relazione tra prove di matematica PISA 2003 e Prodotto Interno Lordo PPS 2009

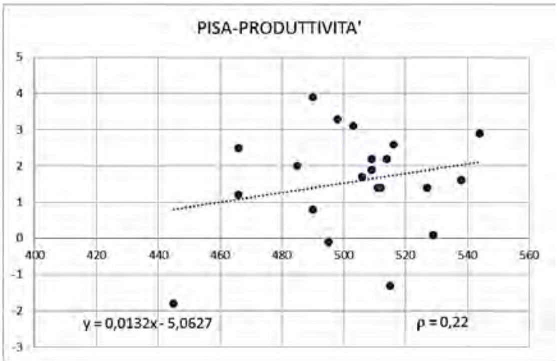


Figura 2. Relazione tra prove di matematica PISA 2003 e produttività nel triennio 2009-2011

Maggiori investimenti porterebbero a un sensibile miglioramento del livello di istruzione.

Confrontando la spesa per l'istruzione con i risultati OCSE-PISA (Figura 3) possiamo verificare che, pur in presenza di una certa qual correlazione, la relazione tra le due variabili non è statisticamente significativa (*t*= 1,51).

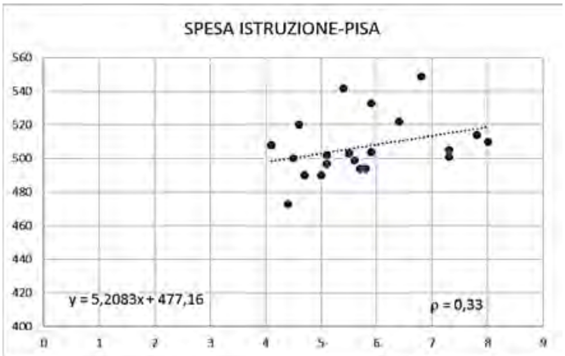


Figura 3. Relazione tra spesa percentuale per l'istruzione 2009 e risultati PISA 2009

Una alta remunerazione dei docenti porta sicuramente a risultati migliori.

Confrontando la remunerazione dei docenti (i dati si riferiscono agli stipendi massimi di docenti delle scuole medie) l'affermazione appare un po' forzata (*t*=1,55) in quanto la correlazione, pur presente, è alquanto debole (Figura 4).

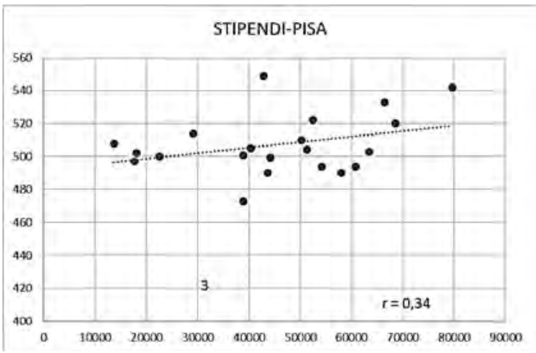


Figura 4. Relazione tra stipendi dei docenti 2009 e risultati PISA 2009.

La situazione attuale è dominata dalla "economia della conoscenza", soprattutto in un'epoca di deindustrializzazione e di informatizzazione.

In un'epoca che si suppone basata sulla conoscenza la relazione tra istruzione superiore e sviluppo è tutta da dimostrare. Il Prodotto Interno Lordo (GDP) è incorrelato (t=0,35) rispetto al numero di laureati (Figura 5) e lo stesso si può dire (t=1,29) per la produttività (figura 6).

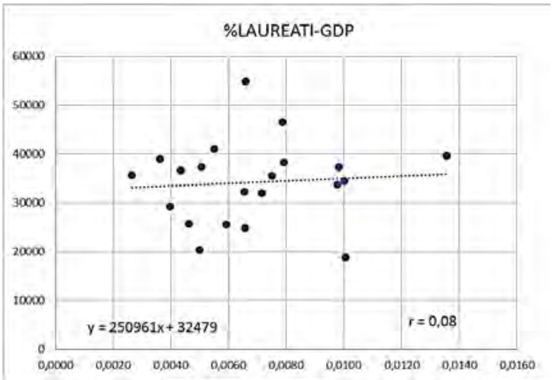


Figura 5. Relazione tra percentuale di laureati 2003 e GDP anno 2009

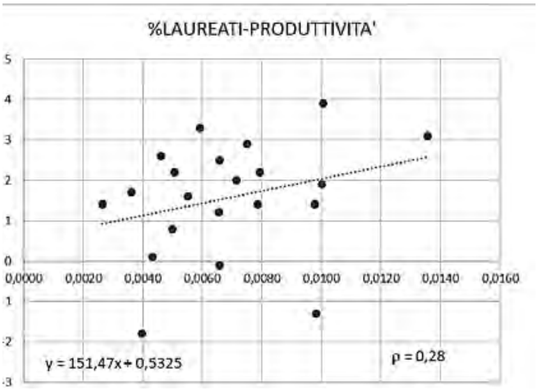


Figura 6. Relazione tra percentuale di laureati 2003 e produttività nel triennio 2009-2010

La scuola svolge un ruolo fondamentale nel migliorare le performance degli studenti.

Se si esaminano i risultati internazionali TIMMS nel passaggio tra la classe 4ª e la 8ª (Figura 7) si nota, in generale, una diminuzione delle performance. Se poi si analizzano i risultati italiani nelle prove INVALSI (Figura 8) si sarebbe portati a formulare l'ipotesi che, soprattutto al Centro-Sud, la scuola "fa male".

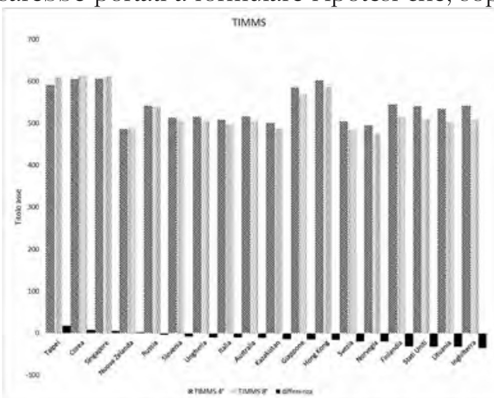


Figura 7. Confronto dei risultati TIMMS tra la 4ª e l'8ª classe

Figura 8. Risultati INVALSI in Matematica per aree e fasce scolari per l'anno 2012

Conclusioni

L'analisi dei dati porterebbe a rispondere negativamente a quasi tutte le affermazioni soprariportate.

Alcune considerazioni possono sembrare sorprendenti e sicuramente qualcuno potrebbe contestarle sul piano metodologico o portando a supporto altri dati. Secondo altri questi temi potrebbero essere affrontati con chiavi di lettura diverse.

Qui i dati dicono che le affermazioni non sono suffragate da "questi" dati. Bisogna riferirsi ad altri dati? Può essere. Occorre costruire altre ipotesi? Forse sì. Ci sono variabili che non sono considerate? Quasi sicuramente sì.

D'altro canto, come ha detto l'umorista francese Jean Delacour: "Lo statistico è uno che fa un calcolo giusto partendo da premesse dubbie per arrivare a un risultato sbagliato".

Certo la conclusione non può essere che si vive meglio da ignoranti. Cimentarsi con le difficoltà della scuola sviluppando le proprie capacità è meglio che far parte dell'ampia platea di NEET (*Not in Education*, *Employment or Training*), anche se non è detto che il PIL aumenti.

Prendiamo tutto come una provocazione che mira solo a far riflettere su alcuni temi.

Sitografia

http://www.oecd.org/pisa/
http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/
http://www.invalsi.it/invalsi/index.php
http://www.oecd.org/statistics/
http://www.deagostinigeografia.it/wing/confmondo/confronti.jsp

IL MODELLO DI TOULMIN COME STRUMENTO VALUTATIVO PER GLI INSEGNANTI

Elisabetta Ferrando[1], Elisabetta Robotti[2]
Università degli Studi di Genova, [2]Università della Valle d'Aosta - Université de la Vallée d'Aoste

Premessa

Nell'arco dell'ultimo decennio, le indicazioni curricolari di molti paesi Europei ed extraeuropei (ad esempio Stati Uniti e Canada) mettono in evidenza il ruolo fondamentale dell'argomentazione come competenza essenziale, sia per le attività matematiche, a ogni livello scolare, sia per lo sviluppo intellettuale del cittadino (NCTM 2000; The Danish KOM Project: cf. Niss & Jensen, 2002 and Niss, 2003; The Ontario Curriculum; MIUR). In Italia, le richieste avanzate dalle indicazioni nazionali (cfr: Anichini, Arzarello, Ciarrapico & Robutti, 2004; Indicazioni Nazionali, 2007; 2012) e i risultati dei test INVALSI hanno favorito il proliferare di ricerche in didattica della matematica relative al "task design", che si occupano anche della creazione e sperimentazione di "teaching environements" e "tasks" (De Bock *et al.*, 2005; Ruthven *et al.*, 2009) atti a favorire lo sviluppo di competenze argomentative. La necessità dello sviluppo di competenze argomentative si richiede quindi a partire dalla scuola primaria fino ad arrivare alla scuola secondaria di secondo grado (PLS 2010-2012; Osborne *et al.*, 2004).

In accordo con questa necessità, si è fatta sempre più strada l'esigenza, da parte dei ricercatori, di definire e utilizzare strumenti strutturati che consentano il riconoscimento di tali competenze negli alunni coinvolti in attività matematiche. A questo scopo, il Modello di Toulmin rappresenta uno degli strumenti più utilizzati.

In particolare, Forman (Forman *et al.,* 1998) utilizza il Modello di Toulmin per testare l'efficacia di un particolare approccio didattico atto a favorire processi argomentativi nelle attività degli studenti. Aberdein, ha indagato l'applicabilità del Modello di Toulmin alle argomentazioni in matematica, mostrando come tale modello possa essere utilizzato per rappresentare sia argomentazioni 'regolari', cioè argomentazioni che vengono condotte all'interno di una teoria scientifica o come applicazione di essa, sia 'critiche', intese come argomentazioni che "sfidano" una teoria prevalente o cercano di giustificarne una alternativa (Aberdein, 2006). Inglis (Inglis *et al.*, 2007). Egli mostra come l'utilizzo di tutte le sei componenti del Modello di Toulmin permetta una categorizzazione superiore di un'argomentazione matematica, evidenziando che i quantificatori modali giocano un ruolo importante (e generalmente poco riconosciuto) nell'argomentazione matematica. Jimenez-Aleixandre (*et al.)* utilizza il Modello di Toulmin come strumento per analizzare le conversazioni di studenti, valutando la loro capacità di sviluppare argomentazioni nell'ambito di un corso di genetica (Jimenez-Aleixandre *et al.*, 2000). Bloome, Puro e Theodorou (1989), tramite il modello di Toulmin, hanno cercato di identificare indicatori distintivi di un discorso argomentativo che si sviluppa nell'ambito della "produzione di scienza" e quello che si sviluppa nell'ambito scolastico (quando "si fa scuola" o "si fa lezione") (Bloome, Puro, & Theodorou, 1989).

Obiettivo di questa ricerca è indagare se il modello di Toulmin può rappresentare uno strumento didattico di supporto per l'insegnante, nell'identificazione di una struttura argomentativa negli elaborati di allievi che rispondono a compiti del tipo: "Fornisci una spiegazione a sostegno dell'opinione di …" (si veda paragrafo titolato: Sperimentazione) che riguardano l'interpretazione di modelli matematici (tabelle a doppia entrata, istogrammi,…). Questo interesse nasce dall'esigenza espressa da un gruppo di insegnanti, coinvolti in un progetto nazionale denominato PLS (Piano Lauree Scientifiche), che li ha visti direttamente coinvolti nella sperimentazione di un task design costruito appositamente per favorire processi di tipo argomentativo in studenti di scuola secondaria di secondo grado (la problematica verrà affrontata in maniera esaustiva nei paragrafi successivi). Per maggiore chiarezza, introdurremo, nel paragrafo seguente, una breve descrizione del Modello di Toulmin, seguito da un esempio di una sua applicazione. Ci dedicheremo, successivamente, a illustrare i problemi proposti agli studenti e la schematizzazione delle loro argomentazioni. Illustreremo poi l'analisi che gli insegnanti fanno sulla base del modello di Toulmin delle argomentazioni prodotte dagli studenti.

Il Modello di Toulmin in breve

Il Modello di Toulmin (1958) consta di sei elementi fondamentali, ognuno dei quali gioca un ruolo distinto all'interno di una argomentazione. Il *Claim (C)* è l'enunciato di cui, chi argomenta, vuole convincere l'ascoltatore. I *Data (D)* sono gli elementi di fondo su cui si basa l'argomentazione, l'evidenza rilevante per il Claim. Il *Warrant (W)* giustifica la connessione tra i Data e il Claim, ad esempio avvalendosi di una regola, o di una definizione, o di una analogia. Il Warrant è supportato dal *Backing (B)* che rafforza il Warrant, presentando ulteriori evidenze, prove. Il *Modal Qualifier (Q)* qualifica il Claim esprimendo il grado di affidabilità. Il *Rebuttal (R)* confuta potenzialmente il Claim esprimendo le condizioni sotto le quali il Claim potrebbe non funzionare. È opportuno sottolineare che non necessariamente in ogni argomentazione tutti e sei gli elementi vengono esplicitamente verbalizzati. Lo schema sottostante (Figura 1) mostra in quale modo le sei componenti sono collegate tra loro all'interno del Modello di Toulmin.

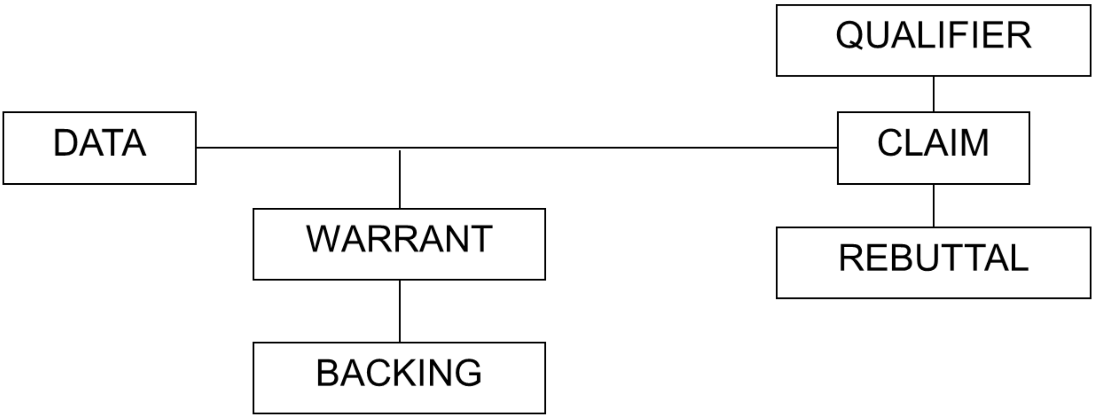


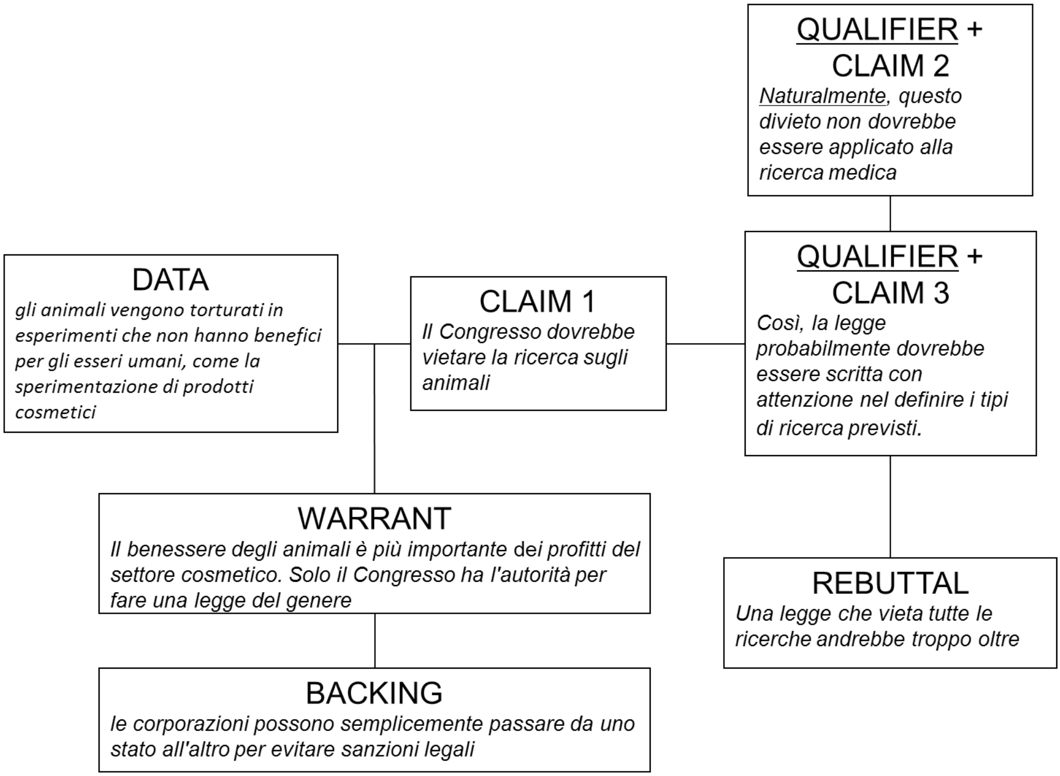
Figura 1. Schematizzazione dei sei elementi del Modello di Toulmin

Esempio di una applicazione del Modello di Toulmin

L'esempio che mostreremo è tratto dal libro *The Shape of Reason* (J. Gage, 2005) ed è storicamente ritenuto esemplificativo per mostrare la modellizzazione di Toulmin; la traduzione è opera degli autori.

Il Congresso dovrebbe vietare la ricerca sugli animali perché gli animali vengono torturati in esperimenti che non hanno benefici per gli esseri umani, come la *sperimentazione di prodotti cosmetici. Il benessere degli animali è più importante* de*i profitti del settore cosmetico. Solo il Congresso ha l'autorità per fare una legge del genere*, perché *le corporazioni possono semplicemente passare da uno stato all'altro per evitare sanzioni legali. Naturalmente, questo divieto non dovrebbe essere applicato alla ricerca medica. Una legge* che *vieta tutte le ricerche andrebbe troppo oltre. Così, la legge probabilmente dovrebbe essere scritta con attenzione nel definire i tipi di ricerca previsti1.*

1 Congress should ban animal research because animals are tortured in experiments that have no



Il Modello di Toulmin nella Didattica della Matematica

Krummheuer (1995) ha per primo utilizzato il modello di Toulmin per analizzare argomentazioni matematiche che vengono prodotte dagli studenti durante attività di classe. Egli ha applicato una versione ridotta, omettendo l'utilizzo del Rebuttal e del Modal Qualifier considerandoli irrilevanti per argomentazioni di tipo matematico. Sebbene questa versione ridotta del Modello di Toulmin possa essere stata sufficiente per il tipo di analisi compiute negli episodi di classe analizzati da Krummheuer, non è chiaro come questa omissione possa essere giustificata in un framework concettuale che verte sulla ricostruzione di processi argomentativi nei quali possono venire a mancare conclusioni logicamente necessarie (Inglis et al., 2007). Molte delle successive ricerche in didattica della matematica sembrano aver seguito Krummheuer nell'utilizzare la forma ridotta del Modello di Toulmin. Per esempio in relazione all'analisi di argomentazioni relative al numero (Even and Houssart, 2004), alla deduzione logica (Hoyles and Küchemann, 2002; Weber and Alcock, 2005) alla geometria (Knipping, 2003) e al general proof (Yackel, 2001).

Altri autori hanno adottato un approccio diverso nell'utilizzo del modello di Toulmin nell'ambito della Matematica formale: Aberdein (2 005, 2006) e Alcolea Banegas (1998), nell'analisi di dimostrazioni matematiche formali, prendono in considerazione il Modello di Toulmin nelle sue sei componenti. Inglis (Inglis *et al.*, 2007) dimostra che per poter analizzare nella sua completezza una argomentazione matematica (in cui si includono sia ragionamenti informali che dimostrazioni formali) è necessario e importante utilizzare il Modello di Toulmin nella sua

benefits for humans such as the testing of cosmetics. The well being of animals is more important than the profits of the cosmetics industry. Only the Congress has the authority to make such a law because the corporations can simply move from state to state to avoid legal penalties. Of course, this ban should not apply to medical research. A law to ban all research would go too far. So, the law would probably have to be carefully written to define the kinds of research intended (from: The Shape of Reason, J. Gage, 2005) completezza, quindi con tutte e sei le sue componenti. Nel loro lavoro, tali ricercatori fanno esempi di argomentazioni sviluppate da "matematici talentuosi" che richiedono l'analisi di tutti gli elementi del Modello di Toulmin inclusi il Modal Qualifier e il Rebuttal, e mostrano che tali elementi sono strettamente legati al tipo di Warrant che viene utilizzato, facendo dunque una categorizzazione di quest'ultimo. Il punto centrale della loro discussione consiste nel fatto che, spesso, in una argomentazione matematica, alcune parti dell'argomento (solitamente Backing e Rebuttal) non vengono esplicitamente verbalizzate. Inoltre, sottolineano come differenti "argomentatori" possono utilizzare differenti tipi di Warrant nel corso della loro argomentazione (tali diversi tipi di warrant sono stati esplicitati nei loro lavori). Differenti Warrant sono accompagnati da differenti Qualifier e, a tale "diversità", è legato il grado di sicurezza del Claim finale di colui che argomenta. Ciò genera diversi "livelli" di argomentazione. Inglis (*ibid. et al.*, 2007) dunque sostiene che l'approccio adottato da altri ricercatori nell'analisi delle argomentazioni matematiche, che considerano un uso ristretto del Modello di Toulmin, rischia di non permettere l'identificazione di diverse argomentazioni che, all'apparenza, potrebbero sembrare dello stesso livello. In questo modo, si rischia di considerare argomentazioni di livello diverso come argomentazioni non matematiche o come non argomentazioni. L'autore conclude dunque sostenendo che solo l'utilizzo del Modello completo di Toulmin può permettere l'accesso a una più ampia distinzione di argomentazioni matematiche.

Il Modello di Toulmin come strumento per l'identificazione di argomentazioni

La nostra ricerca si sviluppa nell'ambito del progetto nazionale PLS (Piano Lauree Scientifiche unità operativa di Genova). Essa ha coinvolto alcuni ricercatori dell'Università di Genova, tredici insegnanti di scuola secondaria di secondo grado provenienti da indirizzi diversi (Liceo Classico, Liceo Scientifico, Istituto Tecnico) e 450 studenti.

Fra gli obiettivi del progetto, segnaliamo la necessità di costruire uno strumento operativo (task design) che consentisse all'insegnante di delineare una metodologia didattica mirata allo sviluppo di competenze argomentative in campo matematico. A tale scopo è stato costruito un Laboratorio sui "Modelli Lineari". Tale scelta è stata effettuata valutando diversi fattori: si tratta infatti di un tema che risulta fondamentale nella formazione degli studenti in quanto rappresenta, fra l'altro, una delle prime esperienze di lavoro con due variabili tra loro correlate (Pierce, 2005); essa fornisce inoltre i prerequisiti imprescindibili al sapere trasversale delle discipline scientifiche; offre numerosi spunti e occasioni per individuare problemi e quesiti che favoriscano la formulazione di congetture e di processi argomentativi; è indicata come essenziale nelle nuove Indicazioni Nazionali (Indicazioni Nazionali, 2012).

Il lavoro di ricerca ha coperto un arco temporale di tre anni ed è stato caratterizzato da due fasi differenti. La prima fase consisteva nel definire e costruire l'approccio metodologico suggerito per la gestione del Laboratorio. La seconda fase ha interessato la sperimentazione del task design da parte dei tredici insegnanti, nelle proprie classi. (Per indicazioni dettagliate http://pls.dima.unige.it/azione1/argomentazione/modelli_lineari/azione1_modellilineari.php).

Nel corso del progetto si è manifestata, da parte degli insegnanti, l'esigenza di avere a disposizione non solo una **metodologia (task design) per la promozione di processi argomentativi,** ma anche uno **strumento valutativo** che consentisse loro di **identificare** competenze argomentative negli elaborati degli i studenti, in modo **oggettivo e strutturato.** A questo scopo, e in accordo con Inglis (*et al.*), la presente ricerca considera il Modello di Toulmin nella sua completezza.

Pertanto, la questione di ricerca alla quale il presente lavoro intende rispondere è la seguente: può il Modello di Toulmin essere usato dagli insegnanti come strumento efficace per identificare processi argomentativi negli elaborati e/o nelle verbalizzazioni degli studenti? E se sì, a quali condizioni?

Il presente lavoro intende quindi mostrare l'analisi dei risultati di una seconda sperimentazione condotta nell'ambito del progetto PLS, in particolare nel Laboratorio Modelli Lineari, sviluppata dal gruppo di ricerca sopra descritto che prevedeva l'uso del **Modello di Toulmin** da parte degli insegnanti **come strumento per identificare i processi argomentativi negli elaborati degli alunni.**

Sperimentazione

I problemi proposti agli studenti (adattati dai testi INVALSI e PISA)

Agli alunni delle classi coinvolte nella sperimentazione è stato chiesto di rispondere, in forma scritta, alle domande poste nei seguenti problemi. È importante sottolineare che i problemi proposti non sono stati costruiti ad hoc per il Modello di Toulmin; cioè non sono stati elaborati chiedendosi se le argomentazioni che ne sarebbero scaturite fossero o meno facilmente modellizzabili attraverso il Modello di Toulmin, come potrebbe accadere considerando problemi di una dimostrazione formale matematica.

Problema 1

Una stessa classe ha sostenuto due verifiche, una di inglese e una di spagnolo, entrambe valutate con lo stesso punteggio: da 1 a 100, dove si considera sufficiente un punteggio maggiore o uguale a 50.

La tabella riporta i punteggi ottenuti nelle due verifiche, suddivisi in intervalli di ampiezza uniforme.

	1-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-100
inglese	**1**	0	0	0	0	3	4	2	2	0
spagnolo	**0**	0	0	0	2	1	5	3	1	0

Fornisci una spiegazione a sostegno dell'affermazione dell'insegnante di Spagnolo:

"La classe è andata meglio in Spagnolo perché …"

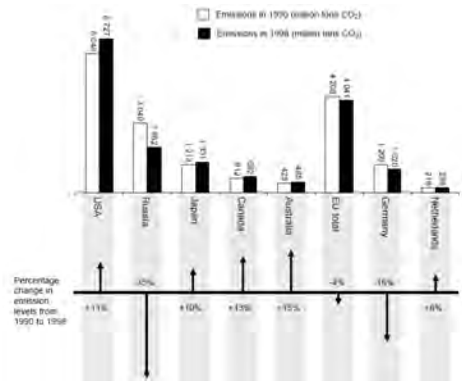
Fornisci una spiegazione a sostegno dell'affermazione dell'insegnante di Inglese:

"La classe è andata meglio in Inglese perché …"

Problema 2

Molti scienziati temono che l'incremento del livello di gas CO2 (anidride carbonica) nella nostra atmosfera stia provocando cambiamenti climatici. Il diagramma seguente mostra:

- *I livelli di emissione di CO2 nel 1990 (barre chiare) per numerose nazioni (o regioni)*
- *I livelli di emissione di CO2 nel 1998 (barre scure)*
- *La variazione (in percentuale) delle emissioni tra il 1990 e il 1998 (frecce con la percentuale)*



a) Elena analizza il diagramma e sostiene di aver scoperto un errore nella parte riguardante la variazione (in percentuale) delle emissioni tra il 1990 e il 1998: "Il decremento (in percentuale) della Germania (16%) è maggiore del decremento dell'intera Unione Europea (EU 4%). Ciò non è possibile, siccome la Germania fa parte dell'Unione Europea". Condividi l'affermazione di Elena? Giustifica e spiega la tua risposta.

b) Elena dice che la responsabilità dell'aumento di emissioni è dovuta soprattutto agli USA. Marco, invece, dice che la responsabilità dell'aumento di emissioni è dovuta soprattutto all'Australia. Spiega le ragioni di Elena e le ragioni di Marco.

Raccolta dati

La richiesta avanzata dai ricercatori agli insegnanti coinvolti nella sperimentazione è stata quella di identificare, nelle argomentazioni scritte prodotte dagli alunni, gli elementi componenti il Modello. Affinché tali elementi potessero essere percettivamente rilevabili all'interno di un testo argomentativo, è stato chiesto agli insegnanti di sottolineare con diversi colori i Data (in giallo), il Claim (in verde) il Warrant (in rosso), il Backing (in viola), il Rebuttal (in azzurro) e il Qualifier (in blu). Inoltre, è stato chiesto loro di dichiarare se gli elaborati dei loro allievi, così analizzati, costituissero una argomentazione.

Ciascun elaborato, comunque, è stato oggetto della ricostruzione strutturale da parte dei ricercatori che hanno prodotto gli schemi strutturali sulla base del Modello di Toulmin presentatinel paragrafo seguente"analisi dei dati".

Analisi dei dati

L'analisi dei dati è stata avviata inizialmente mettendo a confronto gli schemi strutturali prodotti dai ricercatori, relativi ai testi argomentativi degli studenti, con gli stessi testi sottolineati dagli insegnanti. Questa prima fase ha prodotto una distinzione degli elaborati degli insegnanti in due gruppi: quelli in cui vi erano corrispondenze fra elementi del modello di Toulmin identificati dagli insegnanti ed elementi del modello di Toulmin identificati dai ricercatori ("colore utilizzato dall'insegnante" ⇔ elemento del modello di Toulmin identificato dal ricercatore) e quelli in cui vi erano discrepanze.

Come mostreremo negli esempi successivi, la corrispondenza si è ottenuta quasi esclusivamente nei casi in cui l'argomentazione si presenta molto "lineare", cioè in assenza di frasi implicite (sottointesi, …), con una "struttura simile a una dimostrazione matematica formale e pertanto modellizzabile con la sola terna data-claim-warrant. Si vedano a proposito l'esempio 1 e l'esempio 2.

Sorprendentemente, la percentuale di discrepanze si è rivelata molto alta (il 75%) e per questo motivo i ricercatori hanno deciso di intervistare gli insegnanti. L'intervista era mirata a rilevare la percezione degli insegnanti rispetto all'usabilità e all'oggettività dello strumento e il loro grado di soddisfazione rispetto alle finalità attese di quest'ultimo. Senza entrare nel dettaglio delle interviste, si sono messi in evidenza alcuni elementi che rilevano l'usabilità del modello. Fra questi, il fatto che lo studente non abbia rispettato la consegna (per esempio esprimendo la sua opinione riguardo a una affermazione quando gli era stato chiesto di giustificarla). In questo caso, l'insegnante non ha identificato il claim nel testo elaborato dallo studente giudicando il testo non argomentativo.

Si veda a questo proposito l'esempio 3 dove si mette a confronto la struttura rilevata dall'insegnante e quella rilevata dal ricercatore, e da cui si può chiaramente leggere nell'estratto del protocollo la nota dell'insegnante: *non richiesto* sopra la frase iniziale dello studente "Ha ragione la professoressa di spagnolo". In tale caso l'insegnante invalida tutta la spiegazione. In altri casi si è rilevato che l'insegnante, di fronte a due testi strutturalmente simili, ha riconosciuto solo in uno di essi un testo argomentativo. Si veda a questo proposito l'esempio 4.

Proprio a questo riguardo, nell'ambito dell'intervista, è emerso un fattore imprevisto: l'affettività. L'ipotesi che avanziamo, che sarà oggetto di una nostra futura ricerca, è che, in questo caso, l'insegnante è portato a essere "comunicativamente cooperativo" (Ferrari, 2004) solo verso lo studente che considera portato per l'attività matematica (potremmo dire, "bravo").

Esempio 1 (corrispondenza colori ed elementi del modello: struttura "lineare")

b) Elena dice che l'aumento è dovuto agli ~~USA~~ USA perchè i valori sono più alti dell'Australia.

DATA

Grafico

CLAIM

Elena dice che l'aumento è dovuto agli USA

WARRANT

I valori sono più alti dell'Australia

Marco dice che l'aumento è dovuto all'Australia perchè la percentuale è maggiore rispetto agli USA.

DATA

Grafico

CLAIM

Marco dice che l'aumento è dovuto all'Australia

WARRANT

La percentuale è maggiore rispetto agli USA

Esempio 2 (presenza di impliciti: assenza di corrispondenza colori-elementi del modello)

b) ~~ass~~ sicuramente gli USA hanno i maggiori livelli di emissioni di CO_2 e tra l'anno 1990 e il 1998 c'è stato un amento delle emissioni del 11%

marco dice che la responsabilità dell'aumento di emissioni è dovuta all'Australia, ma possiamo vedere che l'Australia è la Nazione dopo i paesi bassi con la minor quantità di CO_2. Anche se tra il 1990 e il 1998 c'è stato un aumento del 15%.

DATA

Marco dice che la responsabilità dell'aumento di emissione è dovuta all'Australia

CLAIM (implicito)

non sono d'accordo con Marco

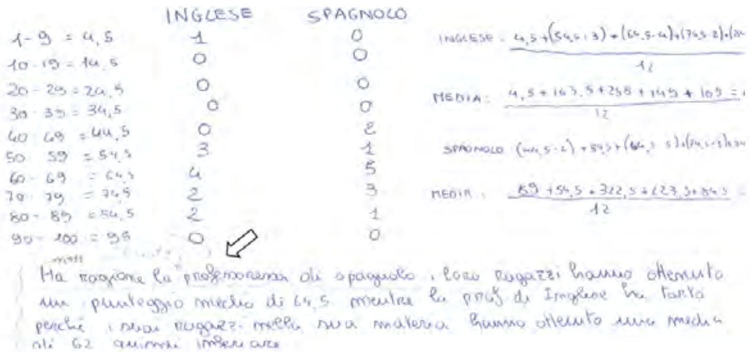
WARRANT

Australia è la nazione dopo i Paesi Bassi con la minore quantità di CO_2, anche se tra il 1990 e 1998 c'è stato un aumento del 15%

REBUTTAL (implicito)

ma è il paese con il maggior aumento percentuale

Esempio 3



	INGLESE	SPAGNOLO
1 - 9 = 4,5	1	0
10 - 19 = 14,5	0	0
20 - 29 = 24,5	0	0
30 - 39 = 34,5	0	0
40 - 49 = 44,5	0	2
50 - 59 = 54,5	3	1
60 - 69 = 64,5	4	5
70 - 79 = 74,5	2	3
80 - 89 = 84,5	2	1
90 - 100 = 95	0	0

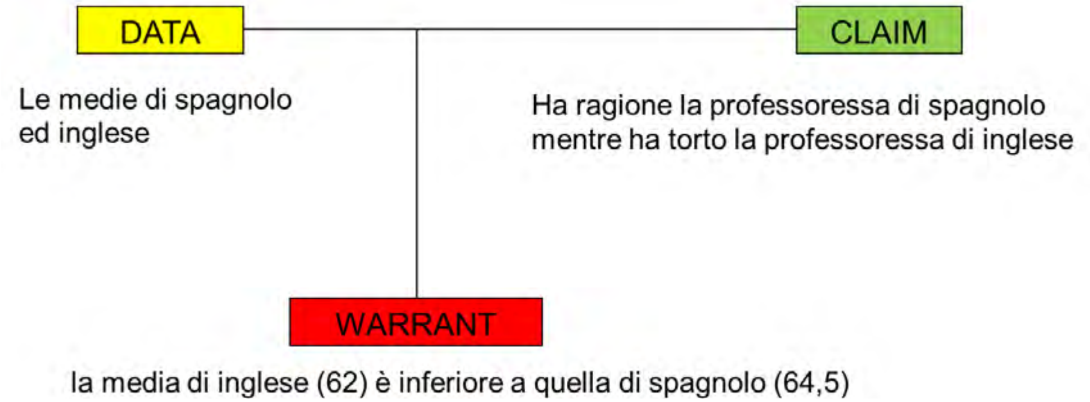
INGLESE = 4,5 + (54,5 · 3) + (64,5 · 4) + (74,5 · 2) + (8[illegible] / 12

MEDIA: 4,5 + 163,5 + 258 + 149 + 169 = [illegible] / 12

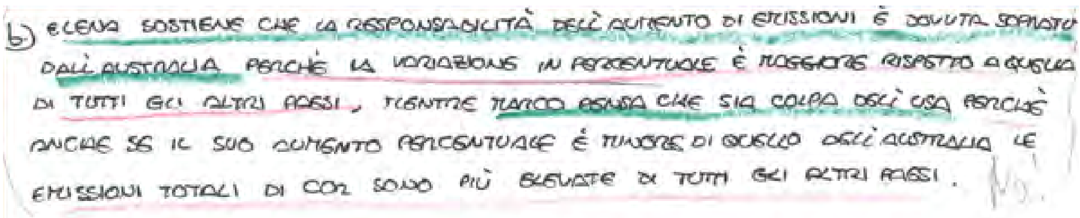
SPAGNOLO (44,5 · 2) + 54,5 + (64,5 · 5) + (74,5 · 3) + 84[illegible]

MEDIA: 89 + 54,5 + 322,5 + 223,5 + 84,5 = [illegible] / 12

Ha ragione la professoressa di spagnolo, i suoi ragazzi hanno ottenuto un punteggio medio di 64,5 mentre la prof di Inglese ha torto perché i suoi ragazzi nella sua materia hanno ottenuto una media di 62 quindi inferiore



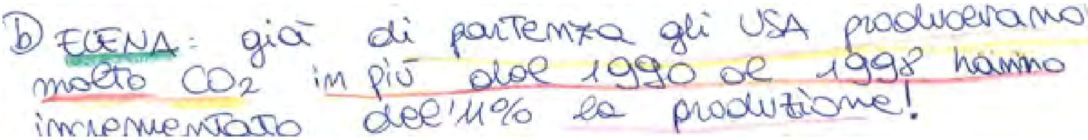
Esempio 4



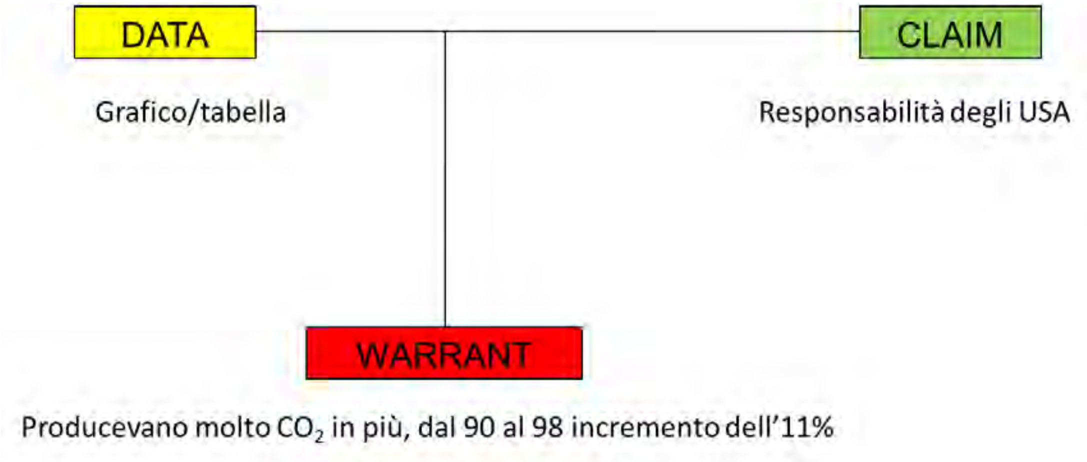
b) ELENA SOSTIENE CHE LA RESPONSABILITÀ DELL'AUMENTO DI EMISSIONI È DOVUTA SOPRATTUTTO DALL'AUSTRALIA PERCHÉ LA VARIAZIONE IN PERCENTUALE È MAGGIORE RISPETTO A QUELLA DI TUTTI GLI ALTRI PAESI, MENTRE MARCO PENSA CHE SIA COLPA DEGLI USA PERCHÉ ANCHE SE IL SUO AUMENTO PERCENTUALE È MINORE DI QUELLO DELL'AUSTRALIA LE EMISSIONI TOTALI DI CO_2 SONO PIÙ ELEVATE DI TUTTI GLI ALTRI PAESI.

Argomentazione non riconosciuta dall'insegnante

Strutturazione mediante il modello di Toulmin



Argomentazione riconosciuta dall'insegnante



Strutturazione mediante il modello di Toulmin

Conclusioni

Questa ricerca nasce dall'esigenza espressa da un gruppo di insegnanti coinvolti nel progetto nazionale PLS (Piano Lauree Scientifiche) a seguito della sperimentazione di un task design costruito per favorire processi di tipo argomentativo in studenti di scuola secondaria di secondo grado. L'esigenza degli insegnanti era dunque quella di poter identificare, negli elaborati degli studenti, i processi argomentativi in modo oggettivo.

Obiettivo di questa ricerca è stato quello di indagare se, e sotto quali condizioni, il modello di Toulmin potesse rappresentare uno strumento didattico di supporto per l'insegnante in questa fase di identificazione. In particolare, gli studenti erano chiamati a elaborare testi argomentativi in risposta a quesiti inerenti modelli matematici. A questo scopo, abbiamo considerato il Modello di Toulmin, completo di tutte le sue componenti, come modello identificativo di una struttura argomentativa. La modalità d'uso dello strumento consisteva nell'identificazione, da parte dell'insegnate, gli elementi costituenti il modello di Toulmin all'interno dei testi prodotti dagli studenti coinvolti. In accordo con Inglis, abbiamo considerato il Modello di Toulmin completo di tutte le sue sei componenti perché l'omissione di alcuni suoi elementi, fra questi il Modal Qualifier e il Rebuttal, rischiava di non permettere l'identificazione di alcune argomentazioni. Le argomentazioni considerate includono sia ragionamenti informali che dimostrazioni formali. L'identificazione, tramite il modello di Toulmin, di argomentazioni nei testi prodotti dagli studenti è stato un processo eseguito anche dai ricercatori in modo autonomo rispetto agli insegnanti. La sperimentazione ha previsto poi un confronto fra gli elaborati degli insegnanti e quelli dei ricercatori. Sorprendentemente, la percentuale di discrepanze è risultata notevolmente superiore alle corrispondenze.

L'analisi dei risultati ottenuti mette in evidenza alcuni fattori importanti che influiscono sul riconoscimento di un testo argomentativo e non dipendono esclusivamente dallo strumento usato, nel caso, il Modello di Toulmin. E' stato messo in evidenza che il Modal Qualifier e il Rebuttal sono strettamente legati al tipo di Warrant che viene utilizzato. Così, differenti Warrant sono accompagnati da differenti Qualifier e, questo, risulta essere legato al grado di sicurezza del Claim finale di colui che argomenta. Ciò ha generato diversi “livelli” di argomentazione che non sempre sono stati identificati dall’insegnante. In accordo con Inglis, possiamo avanzare l’ipotesi che alcuni insegnanti siano stati implicitamente portati a considerare il modello nella sua forma ristretta avendo come riferimento, di fatto, solo argomentazioni matematiche di tipo formale. Questo non ha permesso loro l’identificazione delle argomentazioni descritte sopra. Ciò ha messo in evidenza non solo, che considerando il Modello di Toulmin nella sua completezza è possibile una categorizzazione dell’argomentazione, ma anche che alcuni insegnanti sono portati a considerare argomentazione solo testi che hanno una struttura maggiormente aderente all’ argomentazione matematica formale, spesso modellizzabile anche con la sola terna Data-Claim-Warrant.

Inoltre, si è messo in evidenza che non sempre l’insegnante ha identificato nei testi prodotti dagli studenti parti dell’argomento quando non esplicitamente verbalizzate. L’ipotesi che avanziamo a riguardo è che ciò potrebbe dipendere da fattori legati alla “cooperazione comunicativa”, come osservato da Ferrari (Ferrari, 2004): molti scambi fra studenti e insegnanti (come un’interrogazione o un compito scritto) tendono a essere cooperativi, in modo anche ambiguo: lo studente che deve rispondere a una domanda è consapevole che l’insegnante conosce già la risposta e può essere portato ad aspettarsi un certo grado di cooperazione, che normalmente viene accordato. Motivi dunque di tipo emozionale da parte dell’insegnante che, legandolo allo studente mediante la conoscenza della “sua storia”, potrebbero portare a un atteggiamento non obbiettivo, cosa che non accade al ricercatore che spesso non conosce colui che argomenta.

Obiettivo futuro della ricerca sarà indagare quanto e come la “cooperazione comunicativa” risulta essere un fattore dominante nel processo di identificazione di processi argomentativi .

Bibliografia

Aberdein, A. (2005). The Uses of Argument in Mathematics. *Argumentation.* (19), 287-301.

Aberdein, A. (2006). The informal logic of mathematical proof. In R. Hersh (Ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, (pp.56–70). Berlin Heidelberg New York: Springer.

Alcolea Banegas, J. (1998). L’Argumentació en matemàtiques. In E. C. i Moya (Ed.), *XIIè Congrés Valencià de Filosofia*, (pp.135–147). Valencià, Spain: Diputació de Valencià.

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. & Robutti, O. , Eds. (2004). Matematica 2003. Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola superiore). http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/arzarello/index.htm. Lucca: Matteoni stampatore.

De Bock, D., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: task design and small-scale experiment. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 93-122. Melbourne: PME.

Evens, H.,& Houssart, J. (2004). Categorizing pupils’ written answers to a mathematics test question: ‘I know but I can’t explain’. *Educational Research*, *46*, 269–282.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Forman, E., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M.K.;&Brown, K. (1998). “You’re going to want to find out which and prove it”: collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction.* (8. 6), 527–548.

Gage, J. (2005). *The Shape of Reason: Argumentative writing in College.* Longman Publishing Group.

Indicazioni Nazionali 2007 e 2012
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_decre-

to_indicazioni_nazionali.pdf

Hoyles, C. & Küchemann, D. (2002). Students' understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(3), 193–223.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J.P. & Simpson, A. (2007). Modeling mathematical Argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*. (66), 3-21.

INVALSI http://www.invalsi.it/invalsi/index.php

Jimenez-Aleixandre, M.P., Rodriguez, A. & Duschl, R.A. (2000). "Doing the Lesson" or "Doing Science": Argument in High School Genetics. *Sci. Ed.* (84), 757–792.

Knipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the third congress of the european society for research in mathematics education*. Bellaria, Italy, ERME.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. In P. Cobb and H. Bauersfeld (Eds.) *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*, pp. 229–269. Hillsdale: Erlbaum.

MIUR http://www.istruzione.it/web/hub;jsessionid=4C268DAF773540D3D896DD19DA058052

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In Gagatsis, A. & Papastavridis, S. (eds.) *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124). Athens, Greece: Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

Niss, M. & Jensen, T. H. (Eds.) (2002). Kompetencer og matematiklæring – Idéer og inspiration til udviklingaf matematikundervisning i Danmark. *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, 18. Copenhagen, Denmark: The Ministry of Education.

Osborne, J., Erduran, S. & Simon, S. (2004). Enhancing the Quality of Argumentation in School Science. *Journal of research in science teaching* (41. 10), 994–1020.

Pierce, R., (2005). Linear functions and triple influence of teaching on the development of students' algebraic expectation. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.81-88). Melbourne, Australia: PME.

PLS http://pls.dima.unige.it/azione1/argomentazione/modelli_lineari/azione1_modellilineari.php

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J. & Tiberghien, A. (2009). Design Tools in Didactical Research: Instrumenting the Epistemological and Cognitive Aspects of the Design of Teaching Sequences. *Educational Researcher* (38. 5), 329–342. © 2009 AERA.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. UK: Cambridge University Press.

The Ontario Curriculum, Grades 1-8. Mathematics. 2005. Ministry of Education. ISBN 0-7794-8121-6 (Print). ISBN 0-7794-8122-4

Weber, K., & Alcock, L. (2005). Using warranted implications to understand and validate proofs. *For the Learning of Mathematics*, *25*(1), 34–38.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th international conference on the psychology of mathematics education*, Vol 1, pp.9–23. Utrecht, Holland, IGPME.

LE CONICHE: UN APPROCCIO LABORATORIALE

Mariacristina Morando
Istituto Superiore Statale "Leardi", Casale Monferrato (AL)
TFA Piemonte classe A047

> *"Penso al futuro insegnante di matematica come ad un insegnante che abbia una certa consapevolezza critica nei confronti dei tabù della nostra disciplina, che sia anche capace di inventare nuovi simboli, capace di guardare alla matematica senza reverenza e senza sudditanza, capace di piegare le tecnologie alla propria fantasia e alla fantasia degli studenti. Penso a un insegnante curioso e aggiornato, che legge le riviste della matematica, che non si affida ciecamente al libro di testo, che studia e propone le applicazioni della matematica in altre discipline, che sa mostrare ai propri studenti la matematica all'opera, nei fatti. Penso ad un insegnante capace di comporre un proprio curriculum che abbia una struttura, un senso e una coerenza rispetto ai contenuti previsti. Penso a un insegnante di matematica padrone del proprio destino."*
>
> Michele Impedovo

Premessa

In questo intervento presento un progetto didattico da me sperimentato in una classe Terza di un Istituto Superiore Tecnico Commerciale durante l'a.s. 2012-2013. Esso ha avuto origine nell'ambito dell'attività di tirocinio attivo diretto da me svolto all'interno del corso abilitante TFA (Tirocinio Formativo Attivo) Piemonte 2011-2012 sulla classe di abilitazione A047.

In un periodo particolarmente delicato nella nostra scuola (il Ministero sta elaborando nuovi modelli e nuove proposte curricolari), il corso di specializzazione per insegnanti TFA si proponeva tra l'altro di fare il punto sulla delicata funzione che il professore di matematica della secondaria viene ad assumere nel quadro dei progetti di riforma della scuola (visto il ruolo cruciale che le conoscenze matematiche giocano, e giocheranno sempre più, per la formazione dei futuri cittadini a tutti i livelli professionali): da un lato occorre pensare a percorsi di insegnamento moderni nei contenuti e a modalità nuove e alternative di proporli in classe che rendano appetibile la disciplina agli allievi, dall'altro occorre fornire, rispetto alla continua ristrutturazione dei saperi e al ruolo delle nuove tecnologie, una formazione iniziale e in servizio per gli insegnanti di matematica. Durante il corso TFA mi sono sentita ripetere: è necessario cambiare qualcosa nel processo di apprendimento-insegnamento della Matematica, quali sono le possibili vie che gli insegnanti possono intraprendere? Le generazioni attuali di studenti vivono in una società che li bombarda di immagini in ogni occasione e che al contrario attribuisce poco peso alle parole e ai concetti: la scuola deve adattarsi a usare anche questi canali di comunicazione se vuole raggiungere le menti e i cuori dei ragazzi. Non si può più pensare che i giovani siano sempre disposti ad apprendere solo leggendo libri e sentendo unicamente la voce dell'insegnante; l'uso classico della lavagna e del libro di testo, sempre molto importante per diversi aspetti, deve però cominciare a lasciare più spazio ad altri registri comunicativi più vicini alla sensibilità dei giovani di oggi. D'altra parte nell'insegnamento contemporaneo della matematica appare non solo auspicabile, ma addirittura doverosa, un'attenzione maggiore per temi ed esercizi più legati alla vita reale, alla tecnologia, alla scienza, e più improntati al "problem-solving". Questa matematica più attenta alle applicazioni e alla vita di tutti i giorni dello studente-cittadino, immerso in una società in cui occorre saper leggere grafici, interpretare dati, gestire spese e investimenti, rendere efficienti i processi, effettuare scelte, valutare probabilità, eccetera, è d'altronde quella su cui insistono organismi di valutazione come INVALSI e OCSE PISA nel certificare le *competenze* dello studente.

A partire da queste considerazioni, ho deciso di sfruttare l'occasione dell'attività di tirocinio diretto a scuola per cercare di "vivere" in classe ciò che mi era stato proposto in modo così affascinante durante i corsi e i laboratori del TFA.

Parte teorica

Quadro di riferimento teorico

L'idea centrale del mio progetto di tirocinio è stata la valorizzazione di pratiche didattiche a carattere attivo, quali le pratiche a carattere *laboratoriale* nell'ambito di un approccio per *competenze* alla didattica secondo le nuove Indicazioni Nazionali per la scuola Superiore. Si è innanzitutto cercato di creare in classe un *laboratorio di matematica*. Il *laboratorio di matematica* è stato oggetto di una approfondita riflessione da parte della commissione dell'Unione Matematica Italiana (UMI); una definizione di *laboratorio di matematica* è proposta nei CURRICULI UMI-CIIM 2001-2003-2004, prodotti dall'UMI, nel progetto *Matematica per il cittadino*, avviato nel 2000. Esso va visto come "una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici. Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della *bottega rinascimentale* (Arzarello, Bazzini, Chiappini), nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività". La concezione della scuola come laboratorio in Italia è lontana nel tempo, anche se raramente realizzata. Circa un secolo fa il matematico Giovanni Vailati scriveva: "la scuola non può essere una mera palestra mnemonica dove l'allievo apprende e troppo poco comprende. La scuola deve essere un *laboratorio* dove l'allievo, sotto la guida dell' insegnante, apprende ad addestrarsi e a risolvere questioni, a misurare e soprattutto a misurarsi e a mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e a difficoltà, atti a stimolare la sua sagacia e a coltivare la sua iniziativa. Occorre rendere l'insegnamento della matematica più proficuo, più efficace e insieme più attraente". Oggi è più che mai attuale il pensiero di Vailati!

Il laboratorio di matematica riveste particolare rilievo nella formazione degli studenti in *m@t.abel, Matematica per gli studenti alla soglia del terzo millennio*, progetto che si propone una rinnovata formazione dei docenti puntando a una nuova metodologia d'approccio all'insegnamento-apprendimento della matematica. Si sostiene che "la formazione matematica degli allievi vada costruita attraverso un attento lavoro di laboratorio. È solo un'illusione, peraltro molto diffusa, pensare di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso delle parole. Per un'autentica assimilazione delle idee matematiche è invece fondamentale l'interazione che si sviluppa tra le persone durante lo svolgimento di attività". La ricerca in didattica della matematica (a tal proposito si veda D. Paola o gli Atti del XXIII Convegno UMI - CIIM, L'insegnante di matematica nella scuola d'oggi: formazione e pratica professionali, 2002) ha individuato nella promozione della didattica laboratoriale non l'unico punto ma quello focale per il miglioramento della didattica.

Altro obiettivo che mi sono posta è stato quello di proporre un' *attività per competenze*, con particolare riferimento alla competenza matematica *costruire modelli a partire da dati e utilizzare modelli per esplorare fenomeni e situazioni*. Per *competenza matematica* si intende la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica ha nel mondo, per trarre giudizi ben fondati e utilizzare la matematica in modi che soddisfino le esigenze della vita di quell'individuo nelle vesti di *cittadino* attivo, partecipe e riflessivo. I cittadini devono misurarsi con la necessità di leggere moduli, interpretare orari di autobus e treni, portare a termine positivamente transazioni di denaro, determinare gli acquisti a miglior prezzo, e così via. I processi di valutazione matematica PISA e INVALSI focalizzano la loro attenzione sulla capacità degli studenti di usare le loro conoscenze matematiche per comprendere queste questioni e svolgere le relative mansioni. Questo orientamento riflette un mutamento negli obiettivi degli stessi programmi di studio, che sono sempre più interessati a ciò che gli studenti sono in grado di fare, piuttosto che al loro padroneggiare o meno determinati contenuti curricolari.

Quadro istituzionale

Nella scelta del tema e nella progettazione dell'intervento ho fatto riferimento alle *Linee Guida degli Istituti Tecnici,* emanate nel 2010, che definiscono il passaggio al Nuovo Ordinamento degli Istituti Tecnici. In particolare ho preso in considerazione i seguenti punti:

- il potenziale didattico-formativo delle pratiche a carattere laboratoriale;
- la promozione della *competenza*;
- la *modellizzazione* matematica della realtà;
- la consapevolezza critica dei rapporti tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico in cui è avvenuto;
- i collegamenti concettuali e di metodo della matematica con le altre discipline.

Progettazione didattica (descrizione dell'attività di tirocinio a priori)

Inquadramento del progetto contestualizzato alla classe

Il progetto didattico è stato realizzato in una classe Terza composta da 21 allievi, di cui 10 maschi e 11 femmine, con la presenza di una ragazza disabile certificata. Come previsto dal TFA, il tirocinio attivo è stato preceduto da un certo numero di ore di tirocinio osservativo in classe; quest'ultimo è stato molto utile poiché mi ha consentito di conoscere le principali caratteristiche degli alunni in ambito sociale e cognitivo e, in base a esse, scegliere le strategie didattiche, gli obiettivi, le metodologie e gli strumenti più adatti per il mio intervento didattico. L'impressione che ho avuto è stata quella di una classe che "sopporta" la matematica e che vi si applica solo in funzione del voto. Risultava evidente che purtroppo in molti manca la motivazione, il desiderio di apprendere e capire; la matematica viene sentita come una materia arida, fatta solo di numeri e formule da imparare a memoria, senza un collegamento con la realtà e la quotidianità. Questa mia riflessione è stata più volte condivisa dalla mia Tutor di tirocinio, docente titolare della classe, la quale mi ha sempre illustrato la classe come di livello medio, con alcune individualità discrete ma nessuna eccellenza. Questo si rifletteva anche nel comportamento: non c'era quasi mai silenzio, neppure durante le spiegazioni, e la docente doveva spesso intervenire per richiamare persone rumorose o disattente. Nella fase di osservazione, durata circa due mesi, ho potuto osservare la metodologia didattica adoperata dalla tutor e numerose interrogazioni: lo stile di insegnamento era fondamentalmente basato su un approccio tradizionale, con scansione in moduli dei contenuti, lezioni frontali nelle quali l'insegnante presenta i nuovi argomenti alla lavagna con definizioni, dimostrazioni e risoluzioni di esercizi relativi.

Obiettivi iniziali del progetto

L'argomento scelto, in accordo con la docente Tutor, è stato: *Le coniche: un approccio laboratoriale*. L'inizio del mio intervento attivo è stato previsto a inizio maggio, una volta che la Tutor avesse esaurito lo studio delle coniche (circonferenza, parabola, ellisse, iperbole) dal punto di vista algebrico-cartesiano. Nel progettare l'intervento sono partita dalla constatazione, suggerita anche dall'insegnante Tutor, di quanto la classe fosse ancorata a un'immagine della matematica molto esecutiva e procedurale (tra l'altro un argomento come le coniche dal punto di vista della geometria analitica è uno di quegli argomenti nei quali la procedura risolutiva degli esercizi tende a rivestire il ruolo principale). Inoltre nelle numerose interrogazioni sulle coniche cui avevo assistito, avevo notato che il tutto si risolveva nello sforzo dei ragazzi di ricordarsi a memoria formule e definizioni, senza una effettiva comprensione e interpretazione geometrica delle definizioni, ad es. di eccentricità, di asse maggiore, di luogo geometrico. Partendo da queste premesse ho cercato di progettare un intervento che rispondesse ai deficit che avevo riscontrato. Alla base di questo progetto c'è stata quindi la volontà di trasmettere un senso, un significato e un gusto per la geometria analitica applicata alle coniche. Ho scelto di proporre lo studio delle coniche, argomento già studiato dal punto di vista della geometria analitica, utilizzando più registri e punti di vista nuovi: oltre a quello algebrico più formale, quello geometrico (utilizzando software di geometria dinamica e materiali 'poveri' e inusuali: foglio, cartoncino, spago, ...), quello storico-epistemologico, quello delle applicazioni delle coniche alla vita quotidiana. Avevo in mente di condurre le lezioni nella maniera più aperta possibile a domande sul "senso" di quello che veniva fatto e di stimolare io stessa riflessioni in merito. Volevo trasmettere un approccio meno esecutivo e più problematico della geometria analitica, con richieste di opinioni o di soluzioni a problemi aperti, discussioni, domande frequenti rivolte alla classe. Intendevo inoltre, stimolando la loro curiosità con argomenti inusuali o oggetti concreti, far passare il messaggio che la matematica e il 'fare matematica' può comprendere anche queste cose, e che l'uso di oggetti, lungi dal banalizzare l'argomento trattato, lo rende ancora più profondo e, a volte, assai difficile. La passione per l'argomento l'ho scoperta io stessa durante la preparazione delle idee e del materiale per il progetto tirocinio, cercando di trasferire in classe ciò che avevo appreso con entusiasmo nei corsi TFA: ritengo che un insegnante appassionato abbia più possibilità di arrivare alla mente e al cuore degli studenti e abbia il compito di trasmettere loro questa passione!

Gli obiettivi principali che mi sono prefissata nella progettazione a priori dell'intervento didattico si possono così riassumere:

- rendere stimolante un argomento usuale del curriculo scolastico come quello delle coniche utilizzando metodologie inusuali e alternative;
- vedere gli oggetti di studio da nuovi e diversi punti di vista e aprire orizzonti di ricerca non ancora esplorati;
- mostrare applicazioni delle coniche nella realtà;
- favorire un avvicinamento degli studenti al mondo della matematica, facendone comprendere l'utilità per *modellizzare* la realtà;
- far comprendere agli alunni che la matematica è collegata alle altre discipline scolastiche e non è avulsa dal mondo concreto;
- trasmettere un approccio meno esecutivo e più ragionato della geometria analitica;
- coinvolgere nelle attività anche l'alunna con disabilità.

Il progetto ha subito solo alcune modifiche nel corso della sua attuazione, in base alle risposte e richieste degli alunni, rimanendo nella sostanza aderente alla formulazione iniziale.

Metodologie e strumenti

Nella fase di progettazione ho fissato i contenuti e gli obiettivi che avrei perseguito insieme con la Tutor che mi ha lasciato libera circa la metodologia da seguire.. Riflettendo sulla mia pratica didattica e su quella della docente Tutor ho riscontrato alcuni aspetti nell'insegnamento della matematica che, alla luce di quanto appreso nei corsi TFA, possono essere negativi: il fatto che raramente si proponga la matematizzazione di situazioni reali; si tende a riproporre a scuola l'insegnamento ricevuto nella scuola superiore e/o all'università; mancano i riferimenti tra matematica e mondo reale; non si propone un uso sistematico delle nuove tecnologie. Riflettendo poi sull'esperienza di classe si evince che uno dei punti più deboli dell'insegnamento della matematica è il disinteresse e la noia che pervade gli studenti durante le ore di lezione. I possibili modi per aumentare la motivazione degli studenti possono essere:

- inquadrare sotto un profilo storico ed epistemologico i vari argomenti (la matematica non è sempre esistita, è frutto di studio ed è derivata da esigenze dell'uomo);
- collegare gli argomenti trattati a contesti reali e connetterli con altre discipline (troppo spesso purtroppo la matematica è vista come materia a se stante, che non sarà più di alcuna utilità nella vita);
- utilizzare strumenti alternativi, tecnologici e non, soprattutto informatici, per proporre attività più interessanti, stimolanti e varie.

Partendo da queste riflessioni ho deciso di sfruttare l'occasione per verificare il potenziale didattico-formativo delle pratiche a carattere laboratoriale in una classe in cui il docente titolare usava la metodologia della lezione frontale, in accordo con i suggerimenti ricevuti nei corsi TFA in base alla nuove Indicazioni Nazionali. Gli strumenti previsti nell'attività di tirocinio, inteso come laboratorio, sono stati:

- materiali poveri (piegatura della carta, cartoncino e spago, coni gelato e coltello)
- macchine matematiche (righello, calcolatrice);
- software di geometria dinamica (GeoGebra);
- fogli elettronici (EXCEL);
- filmati scaricati dal web;
- presentazioni in PowerPoint.

Nell'esperienza di laboratorio ho pensato di applicare la didattica del *cooperative learning,* in cui gli studenti lavorano in piccoli gruppi per la risoluzione delle schede di lavoro: poiché la soluzione è correlata al livello di competenza che si possiede e in genere quasi mai accade che tutti si trovino allo stesso livello, il fattore collaborativo diventa decisivo. Si tratta di una didattica che può dare buoni risultati nelle esperienze di laboratorio in quanto, in queste attività, anche i meno motivati risultano più interessati e partecipi. Nell'organizzare le lezioni ho cercato di strutturarle in modo che gli allievi potessero parteciparvi il più attivamente possibile, compresa l'alunna disabile della classe: la costruzione della conoscenza doveva avvenire anche grazie all'intervento dei ragazzi nelle discussioni di gruppo. Ero conscia che sarebbe stato faticoso per me questo tipo di approccio: il ruolo dell'insegnante è diverso dall'usuale, non è più primo attore di tutto il processo ma ne diventa il regista, e questo richiede che la sua competenza sia matura non solo a livello disciplinare ma anche relazionale. Inoltre è necessario lasciare il tempo ai ragazzi di riflettere, di formulare ipotesi, di discutere, il docente non può avere fretta e pretendere che si giunga subito alle conclusioni che ha in mente. In questo sono stata aiutata dal fatto che, essendo in classe in qualità di tirocinante e non di docente titolare, non avevo l'assillo delle ore che passano e del programma da finire!

Realizzazione e analisi del progetto d'intervento

In questa sezione verranno esaminate nel dettaglio le varie fasi del mio intervento didattico: verranno più approfonditamente analizzati quei momenti nei quali è stata proposta ai ragazzi una matematica alternativa, fatta non solo di lezione frontale, lavagna e pennarello, ma basata su software, filmati, presentazioni in PowerPoint, cartoncino e spago, coni gelato, lavori di gruppo collaborativi, schede per competenze, notazioni storico-epistemologiche. L'intervento è stato realizzato secondo il seguente percorso:

- approccio informatico (software di geometria dinamica GeoGebra)
- approccio geometrico (materiali «poveri»)
- approccio multimediale (diapositive e presentazioni in power-point)
- approccio storico-epistemologico (filmato scaricato da web)

Approccio informatico - software di geometria dinamica GeoGebra

Per catturare fin da subito l'attenzione dei ragazzi ho utilizzato un registro di tipo visivo ottenuto mediante l'uso di un sussidio tecnologico. Ho scelto il software di geometria dinamica GeoGebra: non lo conoscevo, durante il TFA ho imparato a utilizzarlo e ad "amarlo" per la sua capacità di favorire la comprensione dei concetti e facilitare le visualizzazioni di figure geometriche. Ho utilizzato GeoGebra insieme al mio computer portatile e al videoproiettore messo a disposizione dalla scuola (il proiettore è stato utilizzato durante la quasi totalità delle mie ore di tirocinio!): questo accorgimento si è reso necessario per l'indisponibilità dell'aula informatica durante le ore di tirocinio. Non è stato quindi possibile far usare direttamente il software ai ragazzi. Il computer collegato al proiettore ha consentito solo un uso dimostrativo delle potenzialità di GeoGebra: si è configurato come una lavagna potenziata sulla quale si fanno disegni più precisi e geometricamente corretti ma, soprattutto, "in movimento". Il tracciamento di un grafico è immediato, con in più la possibilità di osservare come variano le caratteristiche del grafico al variare di determinati parametri (mediante l'utilizzo del comando *slider,* caratteristico di GeoGebra). Gli alunni non conoscevano GeoGebra, per molti era la prima volta che vedevano le potenzialità di un software di geometria dinamica e ciò non ha mancato di suscitare interesse. Neppure l'insegnante Tutor conosceva GeoGebra e ne è rimasta affascinata: alla fine del tirocinio mi ha chiesto di passarle tutti i file GeoGebra che avevo utilizzato, colpita dalla loro immediatezza e facilità d'uso.

Ho utilizzato lo stesso schema di lezione sia per la parabola sia per l'ellisse, approccio dialogato di continuità con il percorso precedente: "Cosa ricordate sulla parabola (ellisse)?"; richiamo veloce sulla lavagna dell'equazione cartesiana della parabola (dell'ellisse) e delle formule caratteristiche; visione dei file Geogebra; costruzione a partire dalla definizione di luogo di punti (Figura 2); collegamenti tra le variazioni delle caratteristiche del grafico al variare di determinati parametri (Figura 1) e le formule corrispondenti; riflessioni su eccentricità e casi particolari. L'esercizio è stato sviluppato cercando di interagire al massimo con la classe; di sollecitare i ragazzi a riflettere, a sviluppare la soluzione sulla base delle conoscenze pregresse, a incoraggiare la costruzione di significati matematici. Alcuni ragazzi hanno compreso il discorso, altri invece (era evidente dal loro sguardo) non hanno colto appieno il ragionamento rigoroso sulle formule, hanno seguito solo il ragionamento intuitivo sul grafico GeoGebra. Poi è stata consegnata loro una scheda di lavoro sulla parabola (rispettivamente l'ellisse) da svolgere in coppia, che ripercorreva i ragionamenti svolti insieme: nel caso della scheda sulla parabola qualche difficoltà è sorta sul significato del secondo coefficiente b dell'equazione cartesiana. La classe ha partecipato alla lezione in maniera attiva, mostrando di aver gradito una lezione diversa dal solito. In alcuni momenti vi è stata qualche espressione di stupore di fronte ad alcune costruzioni fatte con GeoGebra (la geometria dinamica è sempre spettacolare!).

I pregi dell'utilizzo di supporti tecnologici in classe sono molteplici: l'interesse destato dalla "novità" dell'impostazione; l'acquisizione di una buona padronanza nell'uso di tecnologie informatiche, che potrà rivelarsi utile anche in altri contesti, matematici e non. Il limite principale dell'utilizzo di supporti tecnologici è il rischio che gli aspetti informatici e tecnologici prendano il sopravvento, relegando in secondo piano gli aspetti matematici più concettuali (per es. il ragionamento sulle formule delle coniche ...).

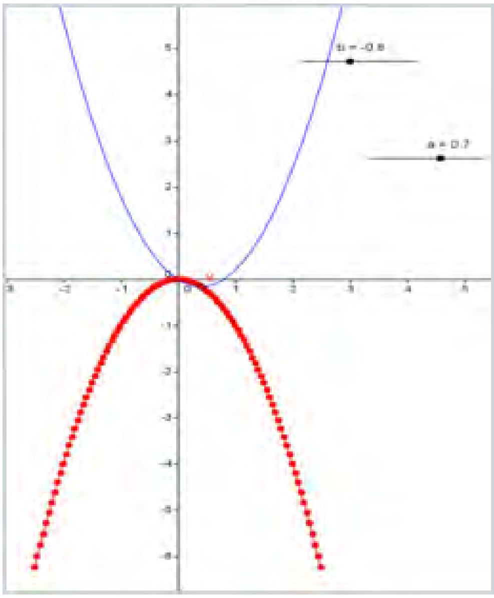


Figura 1

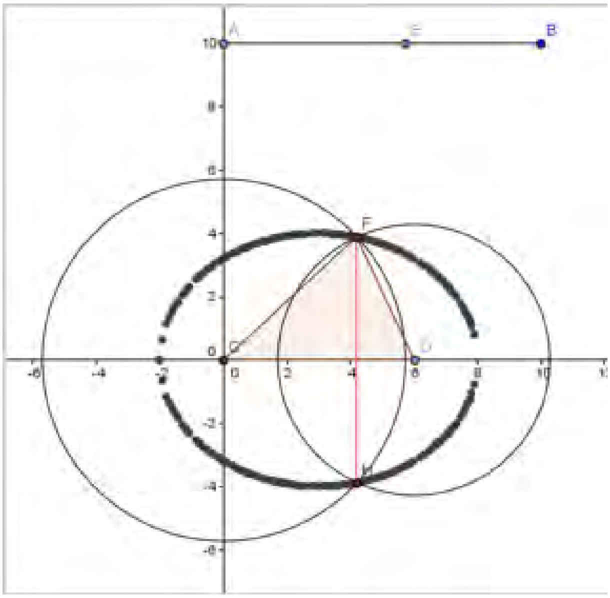


Figura 2

Approccio geometrico - utilizzo di "materiali poveri"

All'interno del laboratorio matematico l'uso di "*strumenti poveri*" è un'attività significativa e consona a rafforzare quell'atmosfera di laboratorio rinascimentale (Arzarello) che deve caratterizzare un ambiente laboratoriale. Penso che la possibilità di manipolare fisicamente oggetti induca modalità di costruzione di significato degli oggetti matematici differenti e significative: considerare parte della matematica gli oggetti della realtà contribuisce a far percepire la matematica come più concreta di quanto si pensi in genere. A partire da questo ragionamento e con lo scopo di chiarire la definizione delle coniche come "luogo geometrico di punti" (i ragazzi mi erano sembrati molto confusi su questo punto durante le interrogazioni!), nelle successive ore di tirocinio ho presentato alla classe la costruzione della *parabola 'piegando il foglio'* (Figura 3) (mi era stata presentata durante un laboratorio del TFA) e dell' *'ellisse del giardiniere'* (Figura 5). La lezione successiva ho introdotto il termine di *coniche*: era la prima volta che i ragazzi sentivano questo termine, la docente Tutor aveva introdotto le curve solo mediante la definizione di luogo geometrico di punti. Mi sono procurata in gelateria tre coni di cialda e li ho sezionati con un coltello (Figura 4): credo di aver decisamente spiazzato i ragazzi, almeno a giudicare dalle loro facce stupite. Questo metodo molto "artigianale" ha permesso ai ragazzi, in maniera molto accattivante e inusuale, di scoprire qualcosa di inaspettato: la parabola, l'iperbole e l'ellisse, benché definite analiticamente in maniera molto diversa, possono essere ottenute anche sezionando un cono, cioè possono essere viste come appartenenti a un'unica famiglia di curve chiamate, per ovvi motivi, *sezioni coniche:* si tratta di curve bidimensionali che sono però generate attraverso solidi tridimensionali. Non è stato necessario un mio intervento per "spiegare" una cosa sotto gli occhi di tutti. Questa fase 'geometrica' è stata molto importante: ho raggiunto il duplice scopo di creare nella mente dei ragazzi un collegamento fra la parabola e la realtà fisica quotidiana e di incuriosire e interessare gli studenti (in effetti ho avuto reazioni positive di stupore!).

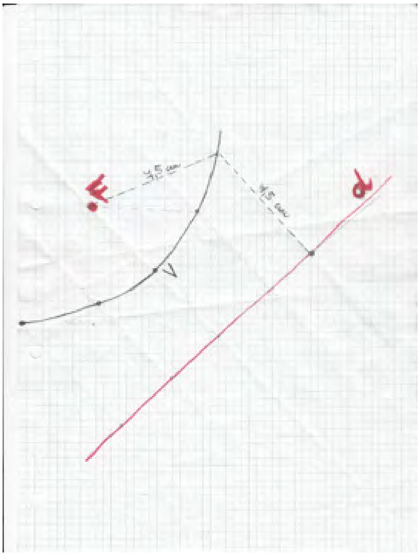


Figura 3. Parabola piegando il foglio

Figura 4. Sezioni coniche

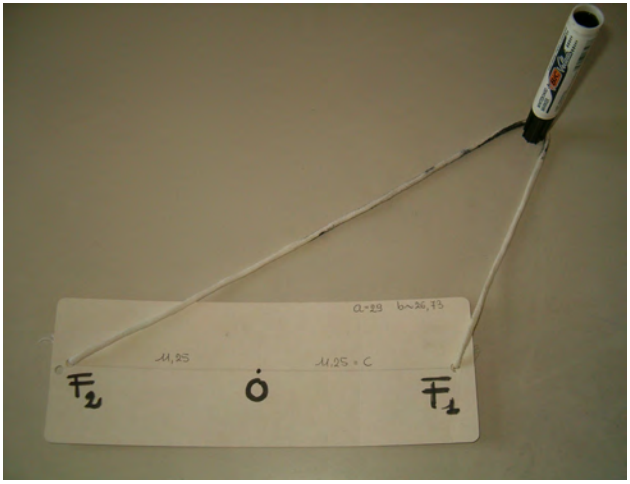


Figura 5. Ellisse "del giardiniere"

Approccio storico e multimediale - filmati e presentazione in power-point

Per trasmettere un'idea corretta della disciplina è utile stimolare nei ragazzi l'interesse a cogliere i momenti *storico-filosofici* che hanno portato alle conoscenze matematiche del giorno d'oggi. In questo modo si rendono gli allievi consapevoli del fatto che i processi che portano alla costruzione dei saperi sono lunghi e complessi e che i temi che si affrontano a scuola sono stati trattati nel corso dei secoli da grandi matematici. Per introdurre gli aspetti storico-filosofici che stanno alla base delle coniche nella tradizione greca ho mostrato un filmato scaricato da web, la scena diciannovesima intitolata "L'ellisse" del film *Agorà,* 2009. Si parla di Hypatia, l'unica filosofa dell'antichità a noi nota, assorta nel suo dilemma: come conciliare la teoria eliocentrica, già formulata dai pitagorici, con l'apparente variazione nelle dimensioni del sole tra estate e inverno? Nella scena Hypatia trova nell'ellisse la soluzione che cercava: il movimento della Terra intorno al Sole non si dispiega in forma circolare ma attraverso orbite ellittiche. Questo filmato è interessante da mostrare ai ragazzi per tre motivi: si scorge il cono di legno di Apollonio (che modellizza il cono gelato); mostra la costruzione della figura di un'ellisse sulla sabbia mediante due paletti legati alle estremità di una corda e da un terzo paletto libero; mostra ai ragazzi quanto una figura matematica apparentemente astratta come l'ellisse sia in verità facilmente collegabile alla realtà quotidiana, in particolare al moto dei pianeti intorno al Sole.

Sempre in relazione alle tematiche dell'Universo, ho mostrato alla classe una *animazione computerizzata tratta dal sito del Planetario di Milano*, nella quale è ottimamente mostrato come si possano ottenere le varie coniche intersecando una superficie conica con un piano: nelle prime sequenze il piano entra nell'immagine perpendicolarmente all'asse del cono e letteralmente ne "taglia" via il vertice, mettendo in rilievo come la curva di intersezione non sia nient'altro che una circonferenza. Poi il piano si inclina evidenziando un'ellisse. Proseguendo a inclinarsi il piano forma poi con il cono una parabola, quando è parallelo a una delle infinite generatrici del cono e infine iperboli, finché non ritorna parallelo alle generatrici del cono. Nella parte conclusiva del filmato viene mostrato come queste varie coniche possono rappresentare diversi tipi di orbita per un oggetto celeste. Questa animazione ha destato grande interesse nella classe; proprio nel finale i ragazzi hanno potuto osservare un diretto collegamento fra la matematica, in particolare le coniche, e l'astronomia, rendendosi così conto dello stretto legame esistente fra il mondo fisico che ci circonda e la matematica.

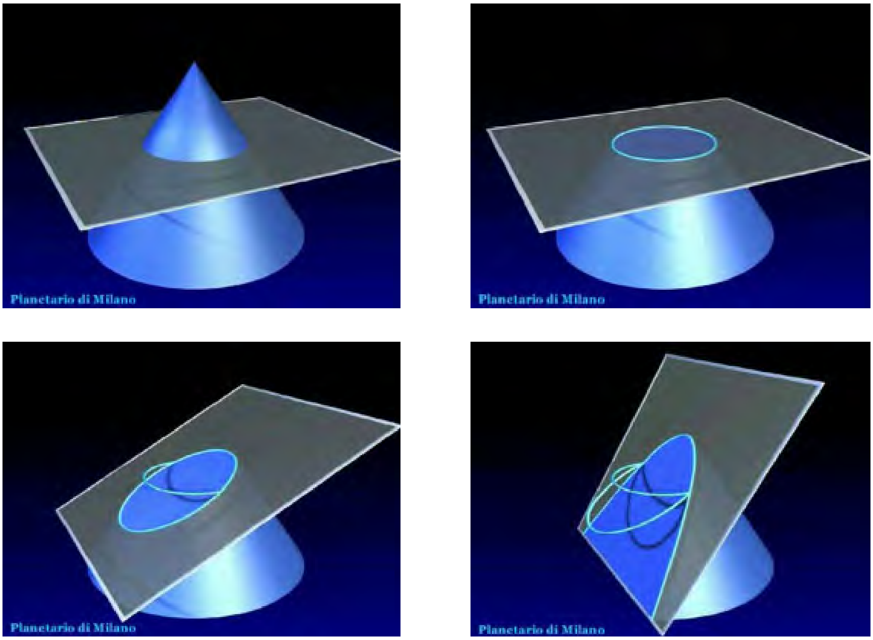


Figura 6. Sezioni coniche

Ciò che era stato visto nell'animazione è stato poi ricreato in classe con una semplice torcia elettrica (utilizzata per creare un cono di luce) e la lavagna (nel ruolo di piano secante al cono). La torcia è stata puntata verso la lavagna prima perpendicolarmente, mostrando come si formasse una circonferenza sul piano della lavagna, poi inclinandola sempre più, ricreando dal vivo prima il crearsi di un'ellisse, poi di una parabola e infine di un ramo d'iperbole, esattamente come mostrato prima nel filmato.

A chiusura dell'argomento coniche ho preparato una *presentazione in power-point* in cui ho ripreso i due approcci alle coniche, quello analitico-cartesiano e quello greco come sezioni di un piano con un cono, le coniche viste come fasci di luce, le coniche nella realtà concreta, in architettura e nell'Universo. Quanto stupore nei ragazzi nel riconoscere le curve, da loro studiate in modo astratto e distaccato, nella realtà: l'ellisse nell'immagine del Colosseo o di

Piazza San Pietro; la parabola nei ponti a sospensione con tiranti come il Golden Gate Bridge di San Francisco; la catenaria nella progettazione della Sagrada Familia di Barcellona o nel Gateway Arch a Saint Louis nel Missouri!

Figura 7. Coniche nella realtà

Approccio per competenze - scheda di lavoro di gruppo

L'ultima attività è stata una scheda di lavoro *per competenze*. La scheda è stata da me adattata da una scheda della rubrica 'Matematica per il cittadino', con problemi simili a quelli delle prove internazionali PISA. L'attività proponeva una situazione-problema legata all'economia, materia di indirizzo della classe, nella quale si ritrovavano buona parte degli argomenti trattati in classe durante la risoluzione di canonici esercizi di geometria analitica sulla parabola. Questa scheda è stata proposta come *lavoro di gruppo*. Scopo di quest'attività è stata la valorizzazione dell'opzione laboratoriale posta in relazione all'istanza di promozione della competenza, come auspicato dalle nuove Indicazioni Nazionali della scuola superiore.

Analisi a posteriori: valutazione dell'attività di tirocinio

Nel merito delle proposte didattiche i risultati sono stati positivi: la classe ha risposto a tutte le proposte, evidenziando una certa curiosità. Per quanto riguarda le metodologie, sono rimasta positivamente molto sorpresa e soddisfatta dei risultati ottenuti con la modalità di *cooperative-learning*; per il futuro dovrò sicuramente perfezionarla e correggerne alcuni dettagli (un limite del metodo è che occorre molto tempo, le attività rischiano di essere dispersive, per cui gli allievi possono avere difficoltà a cogliere i punti realmente importanti), ma potrà diventare una risorsa in più da utilizzare. L'approccio laboratoriale si è rivelato molto motivante e stimolante, sia nella fase di progettazione sia nella realizzazione. Si sono realizzati i due obiettivi iniziali: costruzione della conoscenza anche grazie all'intervento dei ragazzi nelle discussioni di gruppo, sperimentazione di modalità di lavoro diverse dalla lezione frontale, che coinvolgono maggiormente gli studenti. L'uso della metodologia del *laboratorio di matematica* ha rappresentato per me una svolta professionale, in quanto gli alunni hanno mostrato di gradire maggiormente le lezioni di tirocinio rispetto alle lezioni tradizionali. È importante che gli insegnanti stimolino gli allievi a comprendere, argomentare piuttosto che a eseguire.

Considerazioni conclusive: valutazione del corso abilitante TFA

Aver frequentato il TFA mi ha permesso di acquisire non solo le necessarie competenze disciplinari sui fondamenti storico-epistemologici della materia, ma anche conoscenze psico-pedagogiche necessarie a un insegnante. I sei mesi del corso sono stati un'occasione per mettermi in discussione, per accrescere la mia capacità di progettazione di attività didattiche, di valutazione e di collaborazione all'interno di un gruppo di colleghi, per sperimentare metodologie didattiche innovative e per competenze da affiancare alla lezione frontale. Nella professione docente deve essere sempre presente la propensione all'aggiornamento e all'autoaggiornamento. La solitudine in cui opera la maggior parte dei docenti favorisce l'autoreferenzialità e l'immutabilità delle scelte metodologiche, spesso a scapito dell'apertura al dialogo e alle innovazioni che possono rendere più efficace e gratificante l'attività didattica. Alla conoscenza delle Indicazioni Nazionali si dovrebbero sempre affiancare momenti di confronto e formazione, aggiornamenti mediante convegni e riviste di didattica.

Bibliografia

Impedovo, M. (2002). Calcolo numerico e calcolo simbolico: nuove prospettive per il curricolo di matematica. *Atti XXIII Convegno UMI - CIIM, L'insegnante di matematica nella scuola d'oggi: formazione e pratica professionale*, Loano 3 - 5 Ottobre 2002.

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994). L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche, *Quaderno 6 del CNR, Progetto strategico ITD*, Pavia.

Vailati, G. (1899), recensione di Laisant, C.-A., *La Mathématique: philosophie, enseignement*, in Vailati, G., Scritti, a cura di M.Quaranta (1987), vol. III, 261, Bologna: Forni.

m@t.abel - Matematica per gli Studenti del Terzo Millennio - progetti di formazione per docenti, 2012 INDIRE – ANSAS.

Atti XXIII Convegno UMI - CIIM, L'insegnante di matematica nella scuola d'oggi: formazione e pratica professionali, Loano 3 - 5 Ottobre 2002.

Paola, D. (2007). Dal laboratorio alla lezione: descrizione di un esempio*, Innovazione Educativa -Supplemento per l'Emilia Romagna, n. 8,* 13-20, IRRE Emilia Romagna.

PER LA PARABOLA ... CI VUOL LA PARABOLICA?

***Elena Pasqualini*[1], *Marco Bertoli*[2], *Francesca Martignone*[3]**

[1]*I.S.I.S.S. "Pietro Giordani" – Parma,* [2]*Associazione delle Macchine Matematiche,* [3]*Università del Piemonte Orientale*

Premessa

Le attività descritte in questo articolo sono state svolte nell'ambito del programma di formazione per insegnanti in servizio del Progetto MMLab-ER1. Questo progetto, finanziato dalla Regione Emilia Romagna nel primo biennio (2008-10) e cofinanziato dalle province nel 2012, è coordinato dal gruppo di ricerca del Laboratorio delle Macchine Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia (www.mmlab.unimore.it) in collaborazione con l'Associazione delle Macchine Matematiche (www.macchinematematiche.org).

Grazie al progetto sono stati allestiti, in scuole e centri di documentazione, aule attrezzate, sul modello del laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena, con collezioni di diverse macchine matematiche e con tavoli, sedie e lavagne per permettere la realizzazione di sessioni di laboratorio con gli studenti. Il cuore del progetto sono stati i programmi di formazione per insegnanti in servizio (principalmente di scuola secondaria di primo e secondo grado, ma anche della scuola primaria e di alcuni centri di formazione professionale).

Il quadro teorico di riferimento condiviso tra insegnanti e ricercatori è stato quello della *mediazione semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Questo quadro, che si pone esplicitamente nella tradizione Vygotskiana, ha come oggetto di studio le relazioni tra i contenuti matematici, il ruolo dell'insegnante, l'utilizzo di artefatti e l'attività laboratoriale svolta dagli studenti. Le attività svolte si basano sull'ipotesi che l'utilizzo di artefatti (le Macchine Matematiche) usati nella storia della matematica per studiare e per incorporare proprietà matematiche possa favorire l'insegnamento e apprendimento della matematica, attraverso specifiche consegne che favoriscano lo sviluppo di processi riguardanti la costruzione di definizioni o la produzione di congetture e argomentazioni (Martignone, 2011; Antonini & Martignone, 2011).

La collaborazione tra insegnanti, tutor e docenti formatori (di cui gli autori di questo articolo sono alcuni dei rappresentanti) ha portato allo sviluppo di diverse sperimentazioni nelle classi. In particolare in questo articolo descriveremo un percorso didattico sviluppato dalla docente Elena Pasqualini in una classe IV del I.I.S. "Pietro Giordani" di Parma.

Il percorso è stato ispirato dalla consapevolezza che in un istituto professionale, spesso, gli studenti non hanno un rapporto positivo con la matematica. Parlando di matematica, infatti, non si può prescindere dal rapporto che gli studenti (di ogni ordine di scuola) hanno con una disciplina capace di suscitare emozioni opposte (amore/odio, ad esempio) e dalle concezioni, spesso distorte, riguardo alla stessa. Quante volte sentiamo dire dai ragazzi le seguenti frasi: "in matematica ci vuole tanta memoria" o "la matematica è incontrollabile" o ancora "decide tutto l'insegnante: non ci sono decisioni da prendere"? Tali concezioni, che Rosetta Zan e altri ricercatori hanno definito "distorte" (Zan, 1999), producono atteggiamenti negativi, emozioni negative e comportamenti inefficaci. A proposito dei primi, parliamo soprattutto di scarsa motivazione e interesse legati, in special modo, al percorso scolastico; in secondo luogo, non dimentichiamo l'insicurezza e il fatalismo: essi sono causati da paura, ansia e sono relazionati alle convinzioni che gli studenti hanno di sé e della matematica.

Tra gli obiettivi della sperimentazione vi era far avvicinare gli studenti a concetti matematici utilizzando una metodologia laboratoriale in cui sono centrali le attività di esplorazione di

1 http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna.html

oggetti concreti, di discussione e condivisione di diversi punti di vista. Gli argomenti affrontati sono stati la parabola e le disequazioni di secondo grado che generalmente sono trattati in modo esclusivamente teorico. Nella sperimentazione la parte di elaborazione algebrica delle proprietà del luogo geometrico, che rappresenta una tradizionale introduzione alla parabola, è stata volutamente ridotta ai minimi termini per privilegiare la parte laboratoriale e di ricerca/rielaborazione personale.

L'obiettivo dell'articolo è di comunicare questa esperienza, poiché si ritiene che la condivisione delle esperienze e il confronto costante con altri docenti debbano caratterizzare il lavoro dell'insegnante mentre è spesso, al contrario, connotato da un forte individualismo.

Sperimentazione

La sperimentazione svolta in classe è stata condotta utilizzando, come strumento di studio, il parabolografo a filo[2]. Va precisato che tra gli obiettivi del percorso didattico non vi era una trattazione esaustiva delle coniche o lo studio dei problemi classici di geometria analitica riguardanti la parabola (quali la determinazione dell'equazione della parabola date alcune condizioni o determinazione delle tangenti e così via), ma arrivare a studiare le disequazioni di secondo grado usando il ben noto metodo grafico o metodo della parabola. La finalità principale era, quindi, che gli studenti sapessero costruire con consapevolezza il grafico di una parabola per poi utilizzarlo nella risoluzione delle disequazioni di 2° grado.

Perché, allora, la volontà di impostare un'attività che richiedesse l'uso del parabolografo? Perché si riteneva che l'esplorazione e l'analisi del parabolografo avrebbero coinvolto gli studenti a tal punto da affrontare lo studio di questo tema in modo non passivo come, invece, spesso accade. Il percorso didattico voleva anche essere uno stimolo ad "aprire lo sguardo tramite la matematica" (Castelnuovo, 2003), ossia essere un'occasione per "guardare fuori", per scoprire e capire meglio certi aspetti legati al mondo fisico e tecnologico che ci circonda e che caratterizza, in modo spesso inconsapevole, molti aspetti della nostra vita quotidiana. Si voleva infine, stimolare gli studenti a RAC-CONTARE il percorso fatto per indurli a parlare/scrivere di matematica con la speranza che questo potesse far emergere in loro una sensazione di maggior vicinanza con la disciplina che, sappiamo, è fatta dagli uomini per gli uomini, non è arida, né avulsa dalla realtà come, invece, spesso appare da un suo studio frettoloso e superficiale.

La prima fase del percorso è stata dedicata a un'attività di Problem Solving relativa all'analisi di come varia l'area di rettangoli isoperimetrici. Successivamente ci si è dedicati a un'attività laboratoriale che ha implicato la scoperta e l'uso del parabolografo a filo. Infine, dopo aver eseguito alcune lezioni frontali nelle quali l'obiettivo è stato lo studio della parabola all'interno del piano cartesiano, si sono discusse le circostanze della vita quotidiana nelle quali gli studenti avevano incontrato il concetto di parabola. Terminata la fase di studio e di ricerca, gli studenti hanno rielaborato per iscritto tutto il percorso fatto.

I rettangoli isoperimetrici e il parabolografo

Considerato, per fissare le idee, un rettangolo di perimetro 40 (cm) e indicata con x la lunghezza di una delle sue dimensioni, l'altra dimensione misura $(20\text{-}x)$ e la sua area, data dal prodotto delle due dimensioni, è $x(20\text{-}x)$. Rappresentando graficamente per punti, nel piano cartesiano, la funzione ottenuta, è stato possibile far ottenere agli studenti, per la prima volta nel loro percorso scolastico, un andamento di tipo parabolico (Figura 1).

2 http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=124&Itemid=207

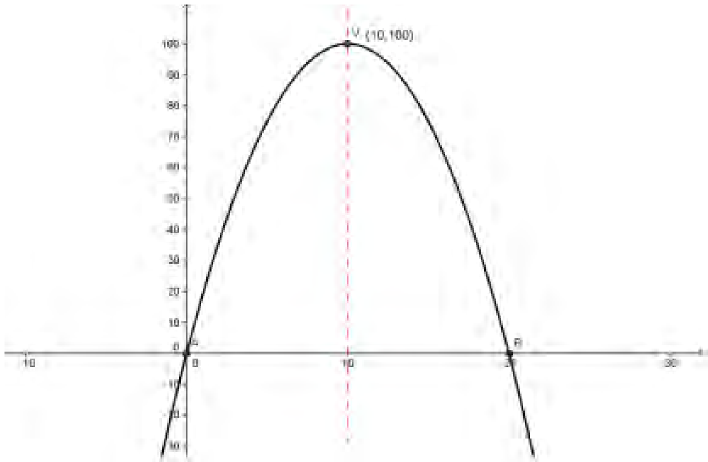


Figura 1

A questo punto è stato possibile introdurre il parabolografo a filo (Figura 2).

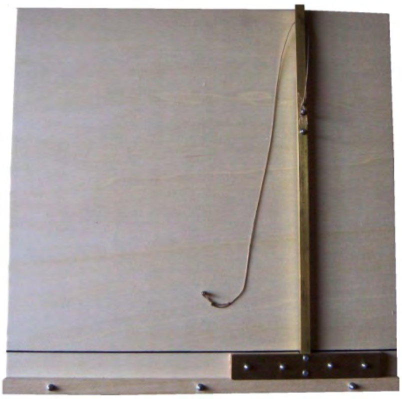


Fig. 2a: Fotografia

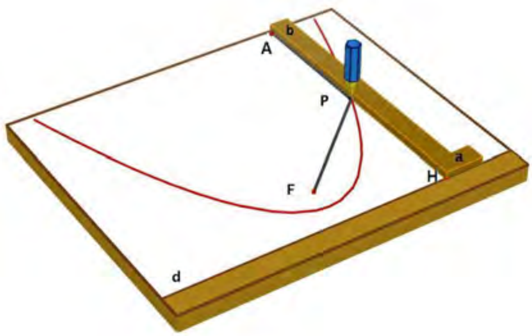


Fig. 2b: Immagine di una animazione virtuale

Una squadra costituita dalle aste perpendicolari *a* e *b* ha il lato a scorrevole su una guida rettilinea *d*; F è un perno fissato sul piano e A è un perno fissato su *b*. Un filo di lunghezza *l* =AH è vincolato nei suoi estremi ai punti A e F.

Se si fa scorrere *a* lungo *d* e contemporaneamente con la punta di una matita si mantiene il filo teso e accostato all'asta *b*, si disegna un arco di parabola avente fuoco in F e direttrice coincidente con *d*. Questo perché PF= *l*-AP =AH-AP=PH ossia il punto P è sempre equidistante da F e *d* (proprietà caratteristica della parabola).

Effettivamente il parabolografo, proprio per come è costruito, si presta benissimo a far riconoscere la natura della parabola come luogo geometrico. Il perno che funge da fuoco rimane così tanto impresso nell'esperienza degli studenti che capiscono da subito anche il "limite costruttivo" dello strumento, ovvero il fatto che avendo un unico fuoco e un'unica direttrice permette di ottenere sempre e solo la stessa parabola.

Una volta appreso il concetto di fuoco della parabola, risulta abbastanza facile guidare gli studenti nella comprensione delle proprietà fisiche di cui gode tale curva, analizzando il funzionamento dei fari delle auto e delle moderne tecnologie satellitari (Figura 3). Questo approfondimento ha permesso un aggancio importante con la vita quotidiana dei ragazzi.

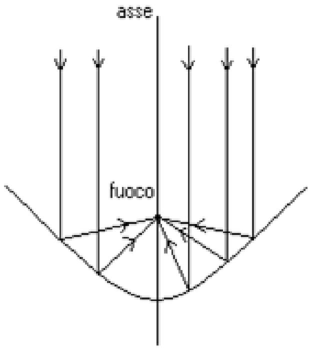


Figura 3

Dal CONTARE al RAC-CONTARE

Terminata la fase del “CONTARE”, cioè la fase nella quale è stato necessario studiare, capire, indagare, determinare le relazioni e gli invarianti delle leggi analizzate, si è passati alla fase del “RAC-CONTO”, cioè la fase nella quale gli studenti hanno dovuto ripercorrere tutto il percorso fatto e raccontarlo nel modo più personale possibile.

Gli elaborati prodotti

Sapendo che l’esperienza del raccontare un percorso didattico di matematica non era mai stata fatta dalla classe, si è deciso di assegnare una traccia che contenesse alcuni spunti di riflessione e che potesse essere un’utile guida.

Gli elaborati dovevano avere, innanzitutto, un proprio titolo: scherzoso, ironico, giornalistico, poetico … insomma: un titolo personale! Il tema prodotto doveva avere come obiettivo principale quello di far capire a chi non aveva seguito le lezioni il senso di tutto il percorso compiuto.

La traccia conteneva, inoltre, domande provocatorie, quali:

- prima di questa esperienza avevi mai sentito il termine parabola? Se sì, in quale contesto?
- l’esperienza vissuta ha modificato la tua percezione della matematica? Ti sembra ancora una scienza solamente teorica e completamente slegata dal mondo fisico?
- ti ha interessato il percorso fatto? Perché?
- ti sembra che questo tipo di approccio ti abbia aiutato a capire meglio gli argomenti in precedenza studiati in modo solo teorico?

Riportiamo di seguito, alcuni brani particolarmente curiosi e interessanti degli elaborati prodotti, con il relativo titolo.

Tratto da “La parabola come stile di vita”.

Abbiamo affrontato lo studio del parabolografo. Questo strumento a filo viene descritto dall’insegnante in un modo particolarmente interessante. Ho imparato che, se per disegnare una retta basta unire due punti e prolungare il segmento ottenuto in entrambe le direzioni, se per disegnare una circonferenza basta solo un compasso, il disegno della parabola è un bel problema pratico! Il parabolografo ci viene in aiuto in questo caso.

Tratto da "Parabola e iperbole … figure retoriche della matematica".

Per quanto la parabola sia una figura relativamente facile da disegnare, l'innato ingegno che gli umani hanno nell'inventare tutto ciò che possa facilitarci un qualsiasi compito non ha potuto trattenersi dall'inventare il "Parabolografo"! Questo, a primo impatto, strano arnese fatto di travi, legno e fili, è, scherzi a parte, un ottimo e valido aiuto nel disegno delle coniche e della parabola.

Tratto da "La parabola prende fuoco!"

Dal mio umile punto di vista, con molta onestà, trovo che la parabola sia un concetto che mi è ancora in gran parte sconosciuto e poco chiaro, ma tra gli argomenti di matematica che mi sono sconosciuti e poco chiari (e ce ne sono!) è quello che conosco meglio. Tutto ciò è merito del metodo con cui ci è stato presentato, per la prima volta qualcuno ha risposto alla domanda che generazioni di studenti si pongono da anni, "ma a me questo cosa serve?"

Tratto da "La parabola: dov'è il buon Samaritano?"

Pensando alla parabola da piccola conoscevo solo quella del buon samaritano, crescendo ho conosciuto l'antenna parabolica e a scuola ho scoperto la parabola in ambito matematico. Grazie all'insegnante ho potuto vedere in prima persona l'uso del parabolografo a filo teso e provare un'illusione straordinaria tramite lo specchio magico. Non è stato il solito argomento matematico pieno di calcoli, è stato interessante e piacevole: una realtà diversa.

Dai lavori prodotti, si evince quanto sia utile, per un arricchimento comune, stimolare i ragazzi a una rielaborazione personale degli argomenti trattati. La produzione scritta, infatti, impone ai ragazzi di confrontarsi direttamente con il linguaggio tipico della disciplina, aspetto sul quale non si insiste mai abbastanza. Emerge, inoltre, quanto sia prioritario per gli studenti capire il senso di quello che si studia in classe. La domanda *"Questo a cosa mi serve?"* è, probabilmente, quella che ci si sente rivolgere con la maggior frequenza. Purtroppo, non è sempre possibile rispondere nell'immediato, ma se riusciamo a creare un aggancio con la realtà, riusciamo a convincere gli studenti dell'utilità della disciplina.

Al termine del percorso fatto, a commento dello stesso, lasciamo ancora la parola agli studenti:

- *Ovviamente questo tipo di lezioni, non sempre frontali come succede solitamente in matematica, sono state coinvolgenti e mi hanno aiutato a capire meglio l'argomento.*
- *Devo dire che questa esperienza ha modificato la mia percezione della matematica, perché ovviamente non è una materia semplice e all'inizio mi sembrava slegata dal mondo fisico. Ripensandoci la matematica si ritrova un po' nella vita di tutti i giorni anche se non nel modo in cui viene presentata a scuola, e se venisse presentata a scuola come materia che si ricollega alla nostra vita quotidiana, con degli esempi concreti, potrebbe aiutare i ragazzi ad avere un approccio migliore con la matematica stessa.*
- *Conoscevo già la parabola tramite amici che svolgevano questo argomento a scuola. L'esperienza vissuta ha modificato la mia percezione della matematica perché non credevo che la matematica potesse essere così legata al mondo fisico. Si è trattato di "dimostrazioni di realtà concreta".*
- *Prima di questa esperienza conoscevo il termine parabola solo come la parabola satellitare, ma ho capito che si chiama così perché è costruita con le stesse proprietà della parabola che ho studiato.*

- *Per me la matematica è una materia abbastanza complicata perché faccio fatica a comprenderla, però affrontandola in questo modo mi è risultata più simpatica e sono riuscita a capirla meglio.*
- *Una lezione alternativa ma efficace, a mio parere. La matematica e la scienza in generale, non sono solo teoria, ma anche pratica dimostrabile in modo gradevole agli occhi dei ragazzi giovani come noi.*
- *Secondo me la matematica non è solo simboli e numeri, ma ragionamento e comprensione. Conta molto il risultato ma conta ancora di più come arrivi a quelle determinate conclusioni. Fatta in questo modo, inoltre, ti stimola la mente.*
- *Mi ha interessato molto il percorso fatto, perché ho scoperto che, in questo caso, la parabola è possibile trovarla anche nei contesti "fuori" dalla matematica.*

I commenti scritti dai ragazzi fanno capire quanto le modalità di svolgimento della sperimentazione, diverse dalla "solita" lezione frontale, siano state apprezzate. Gli agganci con il mondo reale hanno fatto percepire agli studenti la matematica come una materia viva e reale, fatta, cioè, non solo dalle solite formule da imparare a memoria.

Infine, l'aver dovuto produrre degli elaborati personali ha fatto sentire gli studenti protagonisti attivi del percorso fatto e questo coinvolgimento in prima persona è stato fonte di grande soddisfazione come dimostra l'ultimo commento che riportiamo:

- *Purtroppo la mia conoscenza della parabola si esaurisce qui, è poco, me ne rendo conto, ma per una volta nella mia vita, sono dispiaciuta di aver già finito un compito di matematica, il che invece, è molto.*

Riflessioni finali

Un ruolo fondamentale nella nascita di interpretazioni distorte riguardanti la matematica è determinato dal sorgere di emozioni negative, quali la noia, la frustrazione, l'ansia e la paura. Queste ultime due, in particolare, derivano dalla valutazione di se stessi e del percorso scolastico che è stato fatto.

Esplicative di quanto detto, sono le parole di alcuni studenti che hanno frequentato il laboratorio: "il solito argomento, pieno di calcoli", oppure "lezioni sempre frontali come solitamente succede in matematica"; o ancora "la matematica mi sembra slegata dal mondo", "è una materia complicata e faccio fatica a comprenderla".

Non di importanza secondaria è la funzione esercitata da quelli che sono definiti comportamenti inefficaci, quali la consegna di un compito in bianco perché si crede di essere incapaci di risolverlo.

Nella sperimentazione presentata in questo intervento risulta fondamentale il ruolo di educatore ricoperto dal docente che concepisce la matematica come palestra per provare, canalizzare e conoscere le emozioni dei propri studenti. E' importante, a questo proposito, evitare l'errore di mettersi nei panni di un alunno con difficoltà in matematica per tentare di capirne meglio le motivazioni. Le emozioni percepite dall'insegnante potrebbero non essere quelle provate dal ragazzo: per comprendere quali comportamenti attuare per aiutare lo studente si potrebbe pensare a una situazione che crei (nel docente) la stessa emozione provata dal giovane (Zan, 2007).

Infine, quali sono le conseguenze di un'attività di laboratorio con le macchine matematiche, come quella descritta nel nostro articolo?

In primo luogo, la parola "fallimento" perde l'accezione negativa: viene messo in conto. Può succedere che un ragazzo scelga un percorso non vincente o che non gli consenta di raggiungere l'obiettivo prefissato: l'importante è che abbia un'idea di risoluzione, vincente o no non importa.

In secondo luogo, occorre rendere inevitabile l'errore per favorire lo sviluppo della conoscenza e riorientare l'impegno. Non è importante che l'insegnante diventi un esperto di errori o capisca quale ragionamento stia seguendo lo studente, ma che si renda conto se l'allievo stia o meno seguendo un ragionamento. In questo modo, potrà fare domande allo studente per aiutarlo a esplicitare il proprio processo mentale, piuttosto che suggerire risposte verso un percorso predefinito.

In terzo luogo, lo studente diventa responsabile delle proprie scelte: la responsabilità dell'apprendimento passa, quindi, dall'insegnante all'allievo con conseguente rimozione degli atteggiamenti negativi e crescita di autostima. Egli costruisce, infine, teorie all'interno delle quali i propri comportamenti e quelli dell'insegnante trovano una spiegazione (teorie del successo); i fattori mediatori non sono solo più oggetti ma agenti di esperienze. Si arricchisce la gamma di emozioni che non sono solo più ostacoli ma consentono di vivere in pieno e al meglio l'esperienza matematica.

Come si vede dagli estratti dai protocolli dei ragazzi, i comportamenti inefficaci e le emozioni negative sono stati, in parte, superati con conseguente crescita di autostima e senso di responsabilità.

Rosetta Zan propone un questionario (Zan, 1996), sperimentato in una classe seconda di un Liceo Pedagogico di Pisa, per valutare le convinzioni generali, quelle specifiche, gli atteggiamenti e le emozioni nei confronti della matematica e prove di problem solving: tale strumento può essere efficace per avere un quadro della classe (sarebbe opportuno proporlo all'inizio dell'anno scolastico) e attuare in modo vincente un intervento di recupero nei confronti dei ragazzi con difficoltà in matematica. Nasce, quindi, l'idea di una sperimentazione futura, nella quale proporre ai ragazzi di prima e terza secondaria di secondo grado un questionario e problem solving per analizzare gli atteggiamenti e le emozioni degli studenti verso una disciplina che può essere più creativa e stimolante di quanto si creda.

Bibliografia

Antonini, S. & Martignone, F. (2011). Argumentation in exploring mathematical machines: a study on pantographs, *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 41-48), Ankara, Turkey.

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij, in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 A-B, pagg. 269-294

Castelnuovo, E. (2003). Aprire lo sguardo tramite la matematica. In *Matematica e cultura 2003* a cura di Michele Emmer. Milano: Springer.

Martignone, F. (2011). Tasks for teachers in mathematics laboratory activities: a case study, *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, 193-200) Ankara, Turkey.

Zan, R. (1996). Difficoltà d'apprendimento e problem solving: proposte per un'attività di recupero. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.19B N. 4

Zan, R. (1999). Misconceptions e difficoltà in matematica. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 23A

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Milano:Springer.

LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA
E I VIDEO SU YOUTUBE

Ornella Robutti, Alice Battaglio, Isabella Boasso, Federica Magonara, Paolo Saracco,
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

"Anyone can learn the material when it is presented in the right way."

Tom Brannan, 19-years-old college student

Il contesto

Il corso di Didattica della Matematica 1 nella Laurea Magistrale in Matematica è da alcuni anni corso pilota nell'Università di Torino per l'uso di e-learning con metodologie avanzate, sia in classe che a distanza. Utilizzando una piattaforma Moodle (da quest'anno Moodle2), il docente instaura con gli studenti una stretta interazione, basata su molteplici attività: non solo l'upload di materiali, ma anche lavori individuali o di gruppo, sia sincroni che asincroni. Ne sono esempi il forum, la chat, la costruzione di un glossario comune, il wiki, il compito a consegna. Gli studenti della laurea magistrale che scelgono questo corso, che siano dell'indirizzo didattico o no, sanno che vanno incontro a un semestre di lavoro costante. Le lezioni non sono limitate alla tradizionale metodologia frontale, ma sono anzi fortemente interattive sia in aula (lavori a gruppi, discussioni, presentazioni, …), che tramite piattaforma. Inoltre, fa parte del contratto didattico di questo corso costruire una comunità di pratica e di ricerca comune con il fine di sostenere l'esame tutti al primo appello possibile. Si lavora quindi, fin dall'inizio, per instaurare un rapporto di interazione e cooperazione con il docente e tra gli studenti, ponendosi come scopo il conseguimento di questi due obiettivi trasversali. La diretta conseguenza è il clima che si instaura durante il corso: in genere di grande disponibilità e collaborazione. Gli studenti sono attivi e propositivi nel presentare lavori, discutere, confrontarsi sia in aula che in piattaforma (che diventa così il luogo di incontro virtuale per stabilire continuità tra una lezione e l'altra).

Ogni anno in questo corso (che segue principalmente il filone della dimostrazione in geometria, ma anche in altre branche della matematica) si producono numerosi lavori, soluzioni di attività di problem solving, ricerche su temi specifici, alla luce di due grandi sfondi teorici: quello della ricerca didattica nelle sue basi (Vygotskij, Piaget, Brousseau, Chevallard, Fischbein) e in qualche elemento più moderno (soprattutto orientato all'uso delle tecnologie: Mariotti, 2002; Robutti, 2010) e quello istituzionale, inquadrato in modo evolutivo nella storia della scuola (Indicazioni Nazionali, progetti nazionali come m@t.abel e Lauree Scientifiche, e poi le valutazioni INVALSI, OCSE-PISA).

L'ultimo compito prodotto dagli studenti consiste, solitamente, in un lavoro individuale con uso di tecnologie avanzate. Tale opera deve essere indirizzata a temi di didattica della matematica in contesti di scuola secondaria di primo o di secondo grado. Negli anni passati gli studenti hanno prodotto attività con Cabri, percorsi didattici innovativi, problem solving con GeoGebra, attività in ambiente Farmville di Facebook, mentre nello scorso anno 2012/13 si è trattato di brevi filmati didattici in YouTube. A lezione è stato creato un canale dove caricare tutti i filmati proposti dagli studenti, chiamandolo "*Didattica della Matematica*" (http://www.youtube.com/user/DIFIMARobutti/) seguito dal nome del docente del corso ("*Ornella Robutti*") e chiesto la collaborazione dell'Ateneo per collocarlo come prodotto istituzionale (http://www.youtube.com/playlist?list=PLn5VUygJL9jqrgGu_It9hzg7HxAt-4n0N). I video pubblicati sono contestualizzati nelle Indicazioni Nazionali, o in attività m@t.abel, o prove INVALSI, o quesiti di Esame di Stato. I nodi concettuali spaziano dal teorema di Pitagora alla probabilità, dal piano cartesiano ai solidi, dalla proporzionalità diretta al "si può dividere per zero?". L'insieme di tali video ha dato il via a un progetto, che è stato poi rinominato dagli studenti stessi "*Matematica in 5 minuti*" e pubblicato su Facebook. Il link al canale è stato messo anche sulla piattaforma DIFIMA in rete.

You Tube come risorsa per la didattica della matematica

Parallelamente all'uso che soprattutto i giovani fanno del W*eb 2.0* (YouTube, Podcasting, Blog, Wiki, piattaforme di vario genere), si sta sviluppando un grande interesse anche da parte dei ricercatori in didattica, in generale e in didattica della matematica in particolare. La nostra opinione è che anche i docenti dovrebbero introdurre nella consueta pratica didattica strumenti di questo genere, in modo non solo da motivare i ragazzi all'uso educativo di questi strumenti, ma anche e soprattutto a utilizzarli per costruire significati matematici, fare problem solving e argomentare. La ricerca, da parte sua, dovrebbe analizzarne potenzialità e limiti, progettarne applicazioni e percorsi di insegnamento-apprendimento, e porre questioni di studio.

Per esempio, alcuni ricercatori (Hoyles & Lagrange, 2009) hanno proposto le seguenti domande di ricerca:

- Qual è la potenzialità per creare comunità virtuali per l'apprendimento della matematica e permettere la comunicazione tra individui di diversi contesti educativi?
- Qual è il contributo potenziale all'apprendimento della matematica di diversi livelli di interattività e diverse modalità di interazione, e come si può realizzare questo potenziale?

Altri ricercatori (Shaffer, Squire, Halverson and Glee, 2008) sottolineano che, con la presenza di questi nuovi strumenti tecnologici, occorre pensare a nuovi modelli di apprendimento: mentre fino al secolo scorso l'apprendimento poteva essere identificato con la scuola, oggi con la presenza del Web 2.0, ci sono varie possibilità formative a portata di un solo click non solo su computer o tablet, ma anche sugli smartphone che gli studenti hanno in tasca. La sfida educativa è dunque, per la scuola, l'introduzione di questi tipi di tecnologie per supportare l'insegnamento e l'apprendimento delle discipline, e della matematica in particolare. Infatti, avendo a disposizione praticamente un enorme social network attraverso le apparecchiature portatili, le persone possono sperimentare una libertà di reperimento di informazioni e risorse mai avuta in precedenza. In tal modo, gli insegnanti possono supportare gli studenti in percorsi personalizzati, e anche gli studenti stessi possono integrare il percorso scolastico comune con ricerche personali. Quelle qui descritte sono potenzialità, che per la verità la scuola fatica a cogliere e nella maggior parte degli studi sulle tecnologie condotti in vari Paesi, i risultati sul loro uso nella scuola sono sconfortanti (Clark-Wilson, Robutti & Sinclair, 2013): persino tecnologie di base come software dinamici o fogli elettronici fanno fatica a inserirsi nella programmazione didattica e l'insegnamento della matematica si mantiene per lo più tradizionale. Anche quando si utilizza uno strumento come la LIM, spesso non se ne percepiscono le potenzialità e la si usa come semplice proiettore. Il risultato è che, se da una parte c'è una minoranza di insegnanti molto motivati nell'utilizzo di tecnologie di vario tipo, dall'altra la gran parte dei docenti non si preoccupa di integrarle nella didattica. Questo fatto comporta spesso una dicotomia nell'educazione dei ragazzi: tradizionale, poco accattivante dal punto di vista culturale ed emotivo quella scolastica, e divertente, motivante e varia quella che autonomamente possono condurre con l'uso di tecnologie (dal seguire lezioni a distanza su video sul web a discutere di argomenti su Yahoo al far parte di blog in cui si affrontano temi specifici). Ma quanti sono i ragazzi che sfruttano veramente il Web 2.0 per arricchire la propria cultura? E quanti sono invece coloro che lo usano per discutere di sport, divertirsi, o giocare a distanza su giochi dei social network? Senza nulla togliere a questi tipi di usi, è chiaro che i ragazzi, se non guidati, preferiscono il web per il puro divertimento che non per l'apprendimento.

Inoltre, non è sufficiente usare tali tecnologie per l'insegnamento e l'apprendimento digitali solo per consegnare del materiale agli studenti. Un nuovo “Ecosistema dell’apprendimento” si può sviluppare dove queste possono essere sfruttate per scopi collaborativi e (co)creativi, nonché per la valutazione critica e l’insegnamento *ad personam* (Duffy, 2008).

La mancata corrispondenza tra l’apprendimento a scuola e quello nella realtà della vita in un mondo post-industriale, globale, caratterizzato da una società ad alta tecnologia, può indurre a due tipi di eccessi: la demonizzazione delle tecnologie da parte di una scuola tradizionale, o il rifiuto della scuola tradizionale da parte dei nativi digitali, con tutte le posizioni intermedie non solo dei ragazzi, ma anche di docenti e genitori. La storia attuale non è diversa da quella del passato, quando capitava di demonizzare la calcolatrice o la televisione, o, se andiamo ancora più indietro, la carta a quadretti. Ci possono essere i pro e i contro ad assumere queste posizioni estreme. Noi qui analizzeremo con una lente intermedia un esempio preso dal web prima di presentare la nostra proposta.

La Khan Academy

La *Khan Academy* è un esempio di collezione di videolezioni prodotte da Salman Khan, che si sta trasformando in una vera e propria Accademia virtuale. Non solo, si potrebbe quasi parlare di una anti-Accademia, nel senso che essa sfida esplicitamente molti dei luoghi comuni dell’istruzione superiore: che gli accademici di professione siano i migliori insegnanti; che le lezioni frontali siano il miglior modo di trasmettere la conoscenza e che siano migliori dei video (Young, 2013). D’altro canto, però, la comunità che si viene a creare intorno a una simile struttura virtuale è degna di interesse: capita che gli studenti correggano il signor Khan tramite commenti ai suoi video su YouTube, e lui ritiene che questo aumenti il loro coinvolgimento. Una forma di involontaria devoluzione (nel senso attribuito da Brousseau a tale termine), probabilmente legata all’informalità del contesto.

Ricordiamo infatti che le potenzialità positive di questo “ritorno” alla comunicazione orale di tipo sociale trovano una loro giustificazione nella tesi del “*costruttivismo sociale*” di Vigotskij. Questa sostiene che l’apprendimento sia innanzitutto legato al linguaggio e alla parola e, in secondo luogo, che non sia qualcosa che si sviluppa nell’intimità del rapporto tra studente e libro, ma nella collaborazione e cooperazione tra gli studenti e con i docenti (*scaffolding*).

D’altro canto, però, quello che si evince dai filmati della Khan Academy è un uso piuttosto monotono del filmato, in cui non compaiono che scritture delle spiegazioni che si sentono a voce, senza uso di materiali, senza domande stimolo, senza proposte di argomentazione. Ci si chiede dunque quale sia il modello cognitivo di apprendimento implicitamente assunto per preparare questi video. Il rischio è che si tratti di un uso estremamente tradizionale (con metodologia di lezione frontale) di uno strumento tecnologico potenzialmente valido e aperto a usi vari e metodologie decisamente più moderne.

Interrogandoci a questo proposito, le domande che sorgono sono dunque:

- È possibile che la natura sociale del web favorisca l’apprendimento e la pratica della matematica?
- Come è possibile progettare video di matematica semplici, fruibili da docenti e studenti all’interno di un contesto istituzionale?
- E’ possibile (e come) l’introduzione di questi video nella pratica scolastica?

Il progetto “Matematica in 5 minuti”

Il progetto *“Matematica in 5 minuti”* vuole essere un prodotto che riteniamo “di qualità” e che corrisponda a una necessità di concisione e chiarezza, senza allontanarsi dall’approccio laboratoriale e ludico-costruttivista.

L’obiettivo è quello di presentare e spiegare, in modo innovativo, alcuni tra i nodi concettuali di maggior rilievo nell'ambito della didattica della matematica, in un contesto di scuola secondaria di primo o di secondo grado. Si è cercato, inoltre, di evidenziare e affrontare alcune difficoltà legate a misconcetti o a modelli formatisi precocemente.

Figura 1

La novità del progetto risiede nella metodologia didattica utilizzata: ogni concetto è illustrato mediante un filmato didattico della durata di circa 3-5 minuti. Un connubio di efficacia visiva e brevità. In ogni video la comunicatività è stata rilevante, in modo da interessare sin dai primi secondi lo spettatore.

Nei filmati prodotti, gli utenti non si limitano a *leggere* nozioni e spiegazioni, ma *vedono* e *partecipano* alla costruzione di concetti. Inoltre, interagendo con immagini visive abbinate al testo scritto (formule, termini specifici della materia), i video possono essere utilizzati come supporto per accrescere e accelerare la comprensione degli studenti.

È bene riconoscere infatti l'importanza di un uso grammaticalmente corretto delle immagini, che non accompagnano soltanto parole scritte o dette, ma alludono e sottendono molto di più. Con l'uso delle immagini si possono creare degli intrecci mnemo-cognitivi molto solidi e duraturi nel tempo. Per evitare che queste immagini creino misconcetti nello studente è necessario che i video siano realizzati da chi ha una conoscenza approfondita e una buona padronanza della matematica. Per questo motivo i video, realizzati da studenti della laurea magistrale, sono stati preventivamente visionati e approvati dal docente.

L'ambiente You Tube

Per giungere con facilità e immediatezza a un pubblico ampio ed eterogeneo, i video realizzati nel progetto sono stati caricati su YouTube sull'apposito canale **"Didattica della Matematica Ornella Robutti"**, creato dagli studenti il 30 maggio 2013. Questa scelta è un'assoluta novità nel panorama istituzionale dei corsi universitari di didattica.

"YouTube è una piattaforma web che consente la condivisione e visualizzazione in rete di video ed è il terzo sito web più visitato al mondo (dopo Google e Facebook). I video di YouTube comprendono una vasta gamma di filmati a carattere scientifico (esperimenti di chimica o fisica, documentari, videolezioni, …), fruibili sia da esperti che dagli utenti più curiosi."(da Wikipedia: l'enciclopedia libera).

Si è scelto tale ambiente perché familiare ai ragazzi di scuole secondarie di primo e secondo grado: sempre più ragazzi si affidano a tale strumento per la ricerca di video, dallo svago ad argomenti scolastici. Ha un facile e immediato utilizzo sia per l'utente che per il creatore del canale. Inoltre i video sono aperti a commenti e critiche: le possibili imprecisioni possono essere segnalate dagli utenti, che in questo modo seguono la presentazione dei concetti con più attenzione e partecipazione.

Per far comprendere la portata di tale mezzo comunicativo, dopo circa cinque mesi dall'apertura il canale ha registrato circa 20000 visualizzazioni. Per aumentare ulteriormente la diffusione, la visibilità dei video e testare le opinioni del pubblico, i video sono stati riproposti sulla pagina Facebook *"Matematica in 5 minuti"*.

I video

La prima fase della realizzazione dei video è stata la ricerca degli argomenti: alcuni studenti hanno letto attentamente le Indicazioni Nazionali e le attività m@t.abel, altri si sono confrontati con amici e parenti con dirette esperienze di difficoltà in matematica. Difficoltà che nascono anche in relazione alle prove INVALSI o dai quesiti di maturità, ma anche da argomenti di matematica nel quotidiano. Dopo aver discusso sull'argomento scelto, verificando la correttezza dell'idea da sviluppare o suggerendo procedimenti alternativi, ogni studente ha realizzato in autonomia il proprio video con creatività e fantasia.

Nella fase di produzione gli studenti si sono avvalsi di mezzi assai diversi: alcuni filmati sono stati realizzati con il computer (presentazioni PowerPoint, file GeoGebra con audio di spiegazione, …) altri girati con videocamere o smartphone.

Gli strumenti utilizzati durante la spiegazione video spaziano da quelli di tipo tradizionale (i cosiddetti materiali poveri come carta, spago, …), a quelli più tecnologici (come il software di geometria dinamica GeoGebra) (Figura 2).

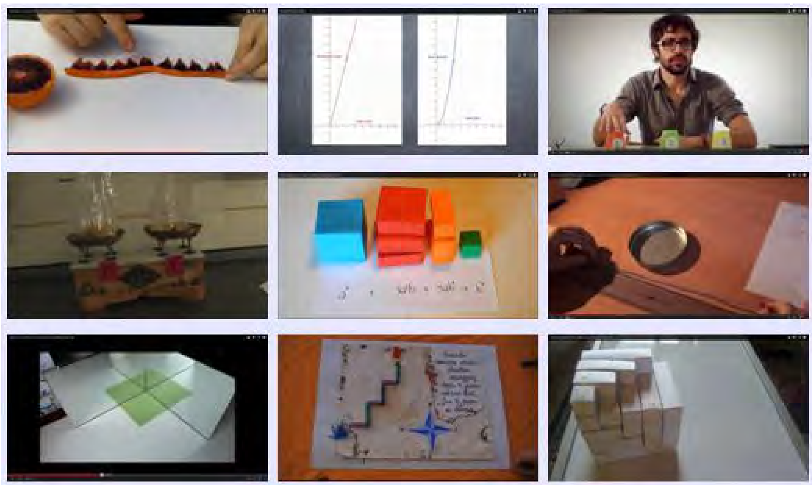


Figura 2

Prima di essere pubblicati in rete, tutti i filmati sono stati revisionati collettivamente e corretti quando necessario, cercando di valutarne l'efficacia.

Nello specifico i nodi concettuali presentati nei video sono stati: risultati di teoremi della geometria, simmetrie, probabilità, questioni di aritmetica, numeri irrazionali, piano cartesiano, coniche, prodotti notevoli, proporzionalità diretta, derivate di funzioni, equazioni, condizioni di esistenza, vettori, matematica vedica.

"Pitagora e l'ornitorinco" o Storia di "Un racconto matematico ..."
(http://www.youtube.com/watch?v=sMVGvCb_9eQ)

Figura 3

I risultati a supporto dell'efficacia della tecnica adottata in questo video, cioè quella dello *story telling*, affondano le loro radici nella storia della letteratura e del pensiero occidentale.

Durante i secoli XII–VIII a.C. il patrimonio letterario delle genti di lingua greca veniva trasmesso oralmente per opera di anonimi cantori. Anche quando i testi non erano improvvisati ma composti per iscritto precedentemente, essi erano comunque affidati non alla mediazione della lettura ma alla pubblica recitazione. Erano gli aedi i depositari della conoscenza e la trasmettevano attraverso la tecnica dello *story telling*, il raccontare una storia. In assenza di altri strumenti di conservazione del patrimonio culturale, alla poesia spettava dunque la funzione di trasmettere alle nuove generazioni il sistema fondamentale di valori della civiltà. Le grandi saghe epiche si configuravano allora come affascinanti lezioni, in cui un'insegnante trasmetteva ai suoi allievi le regole morali e comportamentali attraverso la figura di personaggi didascalici.

Proprio in virtù della sua natura "diretta", il sistema comunicativo dell'epica classica si configura dunque come un carattere identificativo di una *face to face society*, simile (in un certo senso) a quella che si sta sviluppando oggigiorno attraverso i social networks (Wellman, Quan Haase, Witte, Hampton, 2001). La caratteristica principale è che il testo poetico viene prodotto dalla compresenza di autore e pubblico: quest'ultimo non fruisce nell'isolamento della lettura di un testo dato una volta per tutte, ma assiste al formarsi di esso attraverso la viva voce del cantore. E l'interazione che viene conseguentemente a formarsi crea una forma di identificazione tra il pubblico e l'oggetto della comunicazione.

Tale modello di trasmissione del sapere, però, fu costretto a cedere il passo, intorno al V secolo a.C., alla comunicazione scritta e il libro entrò così nella sua fase di principale depositario del sapere. Si perse, con ciò, la spontaneità e l'immediatezza della trasmissione tipica del racconto e della comunicazione diretta. La natura della parola scritta, infatti, è profondamente diversa da quella della parola "parlata": il contenuto del messaggio che si desidera trasmettere viene codificato in modo che il ricevente possa ricostruire, con un adeguato grado di precisione, l'esatto significato dell'espressione scritta. Questo prevede inevitabilmente una sorta di filtro aggiuntivo tra il fruitore e il contenuto.

Tuttavia, anche moderni ricercatori nel campo della didattica stanno rivalutando le potenzialità di "didattiche alternative" come lo *story telling* (Dreon, Kerper, Landis, 2011) o la pratica del "*tutti intorno al fuoco*" (Thornburg, 2007). La generazione dei nativi digitali sembra pronta per un "ritorno alle origini".

L'ipotesi che si vuole mettere alla prova in questo video è che il contesto dello *story telling* permetta di calare lo studente in una situazione prettamente a-didattica (Brousseau), in cui sia possibile presentare contenuti e porre e risolvere problemi in un contesto informale, che stimoli fantasia, creatività, intraprendenza.

Applicare tale metodologia ad ambiti diversi dal semplice *ethos* può dare i natali a una sorta di "mostro di Frankenstein", di ornitorinco della didattica, ma è bene tener presente che:

- l'effetto straniante che l'approccio epico-narrativo può avere sull'immaginazione dei ragazzi può favorire la devoluzione dei problemi, l'immedesimarsi degli studenti e l'uso dell'immaginazione (più proprio del racconto, che dello studio);
- la contaminazione delle idee derivante dall'unire spunti e riflessioni provenienti da diverse branche del sapere può favorire uno sviluppo di competenze interdisciplinari, di una logica più aperta, di un pensiero laterale;
- il contesto maggiormente familiare può vincere la ritrosia di certi studenti verso gli eccessivi tecnicismi o gli ostacoli presentati dalla lezione tradizionale, esso infatti riduce la distanza fra il livello astratto della materia e quello più familiare dell'ascoltatore.

(Per avere un'idea di che cosa si intenda, si pensi all'effetto provocato dalla digressione storico-narrativa presente nella prima parte di questa sezione, o a quello scatenato dall'immagine apparentemente decontestualizzata dell'ornitorinco in frac).

Questo filmato, il cui titolo originale è "Un racconto matematico...", è stato prodotto in quest'ottica. Lo scopo è quello di "scoprire" il Teorema di Pitagora davanti agli occhi dei ragazzi, seguendo le orme di Pitagora stesso. Si tratta di un tentativo sperimentale di unire storia e geometria con un pizzico di moderne tecnologie.

L'idea di adottare questo approccio e di affrontare l'argomento è nata osservando un gruppo di giovani studenti (di una classe terza della scuola secondaria di primo grado) mentre asseriva a maggioranza che Pitagora fosse contemporaneo di Galileo e non di Leonardo. Pareva che per loro la matematica fosse qualcosa di a-temporale, sorto già nella sua forma definitiva una volta per tutte. Per questo lo sviluppo del video si poggia sull'idea che non si debba presentare solo il risultato fatto e finito, ma anche il travaglio che l'ha preceduto.

Cartesio a scacchi: un approccio ludico (http://www.youtube.com/watch?v=EontOo2baMc)

Le difficoltà in matematica degli studenti nascono il più delle volte da una sorta di rifiuto e quindi da un totale disinteressamento alla materia. Si perde di vista il legame con il quotidiano e con quelle che possono essere le passioni e gli interessi trasversali dei ragazzi. Seguendo le Indicazioni Nazionali 2012 è consigliato, a partire dalla scuola del primo ciclo, l'uso dell'elemento giocoso nell'ambiente classe; esso ha infatti un ruolo cruciale nella comunicazione, nell'educazione al rispetto di regole condivise, nell'elaborazione di strategie adatte anche a contesti diversi.

Per i motivi sopracitati, nel video "Cartesio a scacchi" si è proposto un approccio ludico-costruttivista al concetto di piano cartesiano.

Il piano cartesiano rientra nei nodi concettuali del nucleo *Spazio e figure*. Al termine della scuola primaria gli studenti dovranno saperlo utilizzare per localizzare punti, al termine di quella secondaria di primo grado dovranno saper rappresentare punti, segmenti, figure sul piano e utilizzare le principali trasformazioni geometriche con i loro invarianti. A livello di scuola secondaria di secondo grado, un corretto utilizzo del piano cartesiano costituirà uno strumento utile per la risoluzione di problemi più complessi di geometria piana, geometria analitica e geometria delle trasformazioni.

Prerequisiti per una miglior fruizione del filmato didattico sono: conoscere i principi di base di algebra e geometria oltre alla conoscenza del gioco degli scacchi con le sue regole costituenti.

"Cartesio a scacchi" presenta un contesto stimolante e accattivante che avvicina il quotidiano del ragazzo, le sue attitudini di giocatore e in particolare di scacchista alle esigenze didattiche dell'insegnante di matematica. Sono state date quindi due chiavi di lettura di uno stesso oggetto sotto i medesimi significati di fondo. Ecco il parallelismo tra il mondo di Cartesio e il mondo della scacchiera: i punti individuati con coppie di coordinate numeriche e i pezzi sulla scacchiera collocati su una casella contraddistinta da lettera e numero. È immediata l'analogia. Donde l'idea di mostrare il piano cartesiano come un oggetto matematico dinamico, dove i punti si muovono si trasformano, come i pezzi degli scacchi.

All'interno del video viene matematizzato il movimento dell'alfiere, ridefinito in seguito come l'invariante dell'alfiere. Il passaggio dal linguaggio quotidiano a quello più propriamente matematico è reso accessibile attraverso l'esempio del pezzo degli scacchi in movimento sulla scacchiera come un punto in movimento sul piano. La concretezza dell'oggetto di riferimento "scacchiera" conduce a una progressiva formalizzazione di base.

In maniera divertente vengono perseguiti alcuni importanti obiettivi delle indicazioni nazionali: imparare a muoversi nel piano cartesiano e saperlo usare in modo familiare, matematizzare problemi, individuare costanti, invarianti. Nel frattempo il docente può accostare un'attività extrascolastica di gioco a scacchi per stimolare la fantasia e il ragionamento molto simile al ragionare matematico.

Figura 4

Superfici di solidi: un ragionamento senza tante formule
(http://www.youtube.com/watch?v=FB-wDQd9FxI)

Le formule geometriche relative alla superficie di solidi sono utili per risolvere svariati problemi di matematica del quotidiano. Basti pensare alla quantità di vernice necessaria per pitturare una stanza, al numero di piastrelle che servono per ricoprire l'interno di una piscina, ecc. Spesso però gli studenti si limitano a studiare mnemonicamente le formule, rischiando così di confondere quelle simili o tralasciando il profondo legame tra la notazione algebrica e l'ente geometrico che essa rappresenta. Per evitare questo tipo di problemi e per garantire un ricordo più stabile e duraturo, è importante comprendere l'origine delle formule, e che espressioni all'apparenza diverse possono avere in realtà lo stesso significato. È allora fondamentale avere dimestichezza non solo con risultati, ma soprattutto con il metodo necessario per ricavarli (che riflette il ragionamento matematico alla base).

Nel video "Superfici di solidi: un ragionamento senza tante formule", con l'obiettivo di risolvere un quesito di una prova INVALSI (in cui si chiede di calcolare l'area da dipingere di un solido formato da cubi), si è illustrato un procedimento semplice ed efficace per ricavare la superficie di alcuni solidi formati da prismi. I prerequisiti necessari sono la conoscenza del calcolo algebrico di base e delle formule relative all'area delle figure piane.

L'idea chiave del filmato è "sbucciare" i solidi o, in termini matematici, farne lo sviluppo piano. Il termine "sbucciare", familiare e volutamente poco rigoroso, è stato scelto per dare un'idea concreta e intuitiva del modo in cui si può pensare la superficie: una sottilissima buccia che ricopre gli oggetti. Gli strumenti utilizzati sono solidi di cartoncino, che facilitano la comprensione delle formule anche a chi ha difficoltà con l'astrazione.

Il ragionamento è illustrato partendo da un caso semplice, il calcolo della superficie di una piramide, per poi rendere più complessa la situazione. Le facce della piramide sono "sbucciate", affisse una vicino all'altra e mantenute sempre visibili, in modo da ricordare la globalità del solido da cui si è partiti (Figura 5). Particolare attenzione è stata data alla definizione di apotema, mostrando concretamente la sua relazione con l'altezza della piramide (il misconcetto che identifica l'apotema con l'altezza della piramide è molto frequente).

Il legame tra algebra e geometria è reso evidente e indissolubile: ogni passaggio algebrico deriva dai ragionamenti sulle figure piane trovate "sbucciando" il solido. Obiettivo del video è dunque mostrare concretamente la traduzione in linguaggio simbolico di caratteristiche tipiche dei solidi.

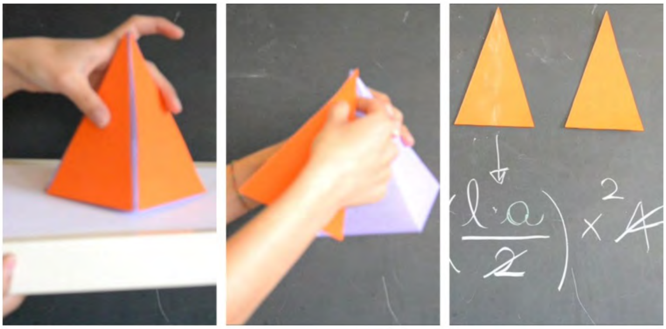


Figura 5

La proporzionalità diretta: togliamo ogni dubbio! (http://www.youtube.com/watch?v=KoJi6NuAVfM)

"Regola di Winfield sulle informazioni stradali. La probabilità di perdersi è direttamente proporzionale al numero di volte che ti dicono: "non puoi sbagliare"."

Il termine "proporzionalità diretta", a differenza di molti altri termini matematici, è usato spesso sia in maniera colloquiale sia in contesti formali, come l'informazione giornalistica: capita sovente di incontrare notizie di politica, di economia o ambientali in cui la proporzionalità diretta viene utilizzata per descrivere la crescita di un oggetto in funzione di un altro.

Tuttavia questo uso può risultare fuorviante per gli studenti: non avendo dei chiarimenti, essi vengono indotti a pensare che questo termine indichi in maniera generale che al crescere di una grandezza cresca anche l'altra, dimenticandosi della linearità, e cadendo così in errori sistematici nel momento in cui si passa dal registro colloquiale a quello più propriamente matematico.

All'interno di questo video si è voluto quindi fin dai primi secondi cercare di eliminare, se possibile del tutto, la falsa credenza, misconcetto, che si nasconde dietro questo non facile nodo concettuale. Nei primi istanti del video si mettono quindi in relazione tre grafici di funzioni distinte, tutte accomunate dalla proprietà di essere crescenti, mettendo in luce il fatto che in un solo caso si ha a che fare con grandezze direttamente proporzionali.

Eliminata quest'idea erronea, propria di molti ragazzi, si porta lo studente, passo a passo, a determinare tutte le proprietà e le caratteristiche della proporzionalità diretta tramite la creazione di un esempio con l'ausilio del software GeoGebra; in un secondo momento, passando dall'esempio concreto al linguaggio algebrico con l'ausilio di lettere e simboli, si arriva alla sua generalizzazione. Una volta dedotta la regola generale, si presenta un esempio che spesso viene trovato dagli studenti nelle lezioni di fisica, cioè quello del moto rettilineo uniformemente accelerato.

Per la presentazione di questo concetto si è prestata particolare attenzione alla grafica, utilizzando immagini e animazioni simpatiche, e facendo un uso molto importante del software di geometria dinamica GeoGebra.

Inoltre la scelta di non partire dalle proprietà della proporzionalità diretta, ma di arrivarci tramite un esempio guidato, è stata voluta per cercare di evitare che il ragazzo che si trova a visualizzare il video si fermi a un'occhiata superficiale di questo argomento, con invece lo scopo di farlo comprendere in maniera consapevole e profonda.

Conclusioni

Il canale "Didattica della Matematica" e il progetto "Matematica in 5 minuti" sono soltanto all'inizio, e l'eredità che lasciano va portata avanti con impegno.

Il prossimo passo, che auspichiamo si possa realizzare a breve termine, sarà sperimentare la reale efficacia di questo canale in un contesto scolastico controllato: per il proseguimento del progetto è necessario che il materiale si riveli effettivamente utile come supporto alla didattica.

Provata l'efficacia di questo progetto, un obiettivo futuro potrebbe essere arricchire il canale YouTube con nuovi filmati più omogenei e mirati sia nel contenuto sia nell'aspetto; i 27 video prodotti durante questa prima fase sperimentale sono infatti caratterizzati da una certa eterogeneità, essendo stata concessa agli studenti la massima libertà d'azione.

Infine, cruciale per lo sviluppo del progetto è la diffusione. Un buon prodotto non è nulla, se coloro a cui è rivolto non ne conoscono l'esistenza. È necessario allora allargare la rete sia dei fruitori che dei collaboratori, al fine di sviluppare una comunità digitale di cooperazione e apprendimento, che includa curiosi, studenti e insegnanti alla ricerca di nuovi spunti.

Bibliografia

Clark-Wilson, A., Robutti, O. & Sinclair, N. (2013). Introduction. In: *The Mathematics Teacher in the Digital Era. An International Perspective on Technology Focused Professional Development*, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 1-10.

Dreon, O., Kerper, R. M. & Landis, J. (2011). *Digital Storytelling: A Tool for Teaching and Learning in the YouTube Generation*, from *Middle School Journal*, Maggio 2011, vol. 42, n. 5, pp. 4 - 9.

Duffy, P. (2008). *Engaging the YouTube Google-Eyed Generation: Strategies for Using Web 2.0 in Teaching and Learning*, from *The Electronic Journal of e-Learning*, Volume 6 Issue 2, 2008, pp.119-130 (www.ejel.org).

Guidorizzi, G. (2007). *Letteratura e civiltà della Grecia Antica*, Einaudi scuola.

Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (2009). *Mathematics Education and Technology: Rethinking the Terrain*. The 17th ICMI Study. The Netherlands: Springer.

Mariotti, M. A. (2002). Influences of technologies advances in students' math learning. In L. D. English (ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 695-723. Lawrence Erlbaum Associates publishers, Mahwah, New Jersey.

Robutti, O. (2010). Graphic calculators and connectivity software to be a community of mathematics practitioners, *ZDM – The International Journal On Mathematics Education*, 77- 89. Vol. 42(1).

Shaffer, D.W.; Squire, K.R.; Halverson, R.; Gee, J.P. (2008). *Video games and the future of learning*. Madison, WI: University of Wisconsin-Madison and Academic Advanced Distributed Learning Co-Laboratory.

Thornburg, D. (2007). *Campfires in Cyberspace: Primordial Metaphors for Learning in the 21st Century*, Retrieved, April 2010: http://www.tcpd.org/thornburg/handouts/campfires.pdf

Trentin, G. (2008). *La sostenibilità didattico-formativa dell'e-learning*. Milano: Franco Angeli.

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G. & Sacristàn, A.I. (2013). *Technology-Driven Developments and Policy Implication for Mathematics Education*. In A.J. Bishop, C. Keitel & J. Kilpatrick (eds). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Springer.

Wellman, B., Quan Haase, A., Witte, M. & Hampton, K. (2001). *Does the Internet Increase, Decrease, or Supplement Social Capital?*, from *American Behavioral Scientist*, November 2001, vol. 45 no. 3, pp. 436-455.

Young, J. R. (2010). *College 2.0: A self-appointed teacher runs a one-man 'Academy' on YouTube*, from "The Cronicle of Higher Education", October 31, 2013.

MATEMATICA SULLA SCACCHIERA: UN ESEMPIO DI APPROCCIO LUDICO-COSTRUTTIVISTICO AI CONTENUTI CURRICOLARI.

***Annarosa Rongoni*[1]*, Gianni Zannoni*[2]**

[1]*S.S.I.Grado "Galileo Ferraris" di Livorno Ferraris (VC),* [2]*Istruttore di scacchi FSI*

"La vita è un gioco estremamente complesso, le cui regole sono le leggi naturali e sociali, e le cui mosse sono i possibili comportamenti legali individuali e collettivi. Un gioco sufficientemente complicato può dunque diventare una metafora della vita: questo è appunto il caso degli scacchi, la cui struttura è abbastanza elaborata da permettere alla metafora di non essere banale, e di rispecchiare aspetti significativi della vita stessa."

Piergiorgio Odifreddi, Scacco alla regina (delle scienze)

Premessa

Nell'anno scolastico 2012-2013 alle classi prime della Scuola Secondaria di primo grado "*Galileo Ferraris*" di Livorno Ferraris è stato proposto, come approfondimento curricolare, il corso "*Matematica sulla scacchiera*", con l'obiettivo di insegnare a giocare a scacchi, stimolando, al contempo, gli allievi a riflettere sull'origine e sul significato delle regole. Il gioco degli scacchi è servito come approccio concreto per trattare alcuni temi matematici e per sviluppare le capacità argomentative e di ragionamento di tutti gli allievi.

Le lezioni sono state svolte da un istruttore specializzato della Federazione Scacchistica Italiana in affiancamento all'insegnante disciplinare.

Le due classi prime, oggetto del presente lavoro, risultavano costituite da 19 (IA) e 20 (IB) allievi: classi eterogene al loro interno, caratterizzate dalla presenza di numerosi alunni con bisogni educativi speciali.

I ragazzi, attivi, interessati e facilmente coinvolgibili nelle attività didattiche, si sono mostrati entusiasti e coinvolti fin dalla prima lezione del corso. Alcuni sapevano già giocare a scacchi perché lo avevano imparato nell'ambiente familiare oppure in corsi di scacchi seguiti a scuola negli anni precedenti (Scuola Primaria).

Il compito dell'istruttore di scacchi in questo progetto è stato quello di far credere ai ragazzi di fare scacchi e non matematica. In realtà in ogni lezione c'è sempre stato un qualche legame con la matematica, ma gli alunni percepivano, di preferenza, l'aspetto legato al gioco. I concetti matematici sono stati sfruttati per ottenere un vantaggio nella partita contro il compagno/a (come ottenere un vantaggio materiale, come catturare un pedone avversario, come dare matto).

Il gioco degli scacchi e i riferimenti alla normativa

Numerosi i riferimenti alla normativa che si possono individuare:

- dalla Dichiarazione del Parlamento Europeo del 15 marzo 2012

  "B. considerando che il gioco degli scacchi è accessibile ai ragazzi di ogni gruppo sociale, può contribuire alla coesione sociale e a conseguire obiettivi strategici quali l'integrazione sociale, la lotta contro la discriminazione, la riduzione del tasso di criminalità e persino la lotta contro diverse dipendenze;"

"C. considerando che, indipendentemente dall'età dei ragazzi, il gioco degli scacchi può migliorarne la concentrazione, la pazienza e la perseveranza e può svilupparne il senso di creatività, l'intuito e la memoria oltre alle capacità analitiche e decisionali; considerando che gli scacchi insegnano inoltre determinazione, motivazione e spirito sportivo;"

- dalle Indicazioni Nazionali per il Curricolo

"Valorizzare l'esperienza e le conoscenze degli alunni; attuare interventi adeguati nei riguardi delle diversità; favorire l'esplorazione e la scoperta, incoraggiare l'apprendimento collaborativo; promuovere la consapevolezza del proprio modo di apprendere, realizzare attività didattiche in forma di laboratorio."

"In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive …"

"Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola."

- dai Quadri di riferimento INVALSI di matematica;

"Si vuole in primo luogo valutare la conoscenza della disciplina matematica e dei suoi strumenti, intendendo tale disciplina come conoscenza concettuale, frutto cioè di interiorizzazione dell'esperienza e di riflessione critica, non di addestramento "meccanico" o di apprendimento mnemonico".

"Una conoscenza concettuale quindi, che affondi le sue radici in contesti critici di razionalizzazione della realtà, senza richiedere eccessi di astrazione e di formalismo. La formalizzazione matematica dovrebbe infatti essere acquisita a partire dalla sua necessità ed efficacia nell'esprimere ed usare il pensiero matematico".

Obiettivi, strumenti e metodologie

Obiettivi prioritari del progetto sono stati:

- proporre temi logico-matematici adeguati all'età degli allievi attraverso situazioni concrete proposte sulla scacchiera;
- sviluppare capacità critiche, argomentative e strategie risolutive;
- insegnare il gioco degli scacchi;
- scoprire che la matematica serve a migliorare la comprensione del gioco degli scacchi e di conseguenza le prestazioni di gioco;
- favorire l'inclusione, la socializzazione, la collaborazione;
- insegnare l'importanza del rispetto delle regole.

Le lezioni, della durata di un'ora ciascuna, hanno avuto cadenza settimanale per una durata complessiva di 20 settimane.

Durante le lezioni sono stati utilizzati la Lavagna Interattiva Multimediale (LIM) e alcuni softwares come *ActivInspire* e *ChessBase 9.0*, quest'ultimo specifico per simulazione di partite. La LIM si è rivelata molto utile per presentare gli argomenti e per testare la loro comprensione attraverso l'uso di diagrammi e di esercizi interattivi creati appositamente. I diagrammi, in particolare, richiedevano un notevole ricorso alla capacità di astrazione: per risolvere le situazioni problematiche proposte, gli alunni dovevano riuscire a visualizzare sul diagramma una o più mosse senza la possibilità di poterle effettuare materialmente sulla scacchiera.

Ci si è avvalsi anche della piattaforma *Moodle*, un ambiente di apprendimento *e-learning* destinato alle classi prime. Sono stati inseriti gli argomenti delle lezioni svolte in classe ed è stato attivato un "*forum relazionale*" in cui venivano presentati problemi di scacchi. Gli allievi anche a casa, collegandosi, avevano a disposizione i materiali delle lezioni e potevano confrontarsi discutendo nei *forum* le possibili soluzioni.

I pezzi e le scacchiere per il gioco consentivano di concretizzare quanto visto sulla LIM.

Per rafforzare quanto appreso in classe venivano inoltre assegnati esercizi da svolgere sul quaderno, come consegna domestica.

Esempi di attività

Scacchiera e piano cartesiano

All'inizio del corso la scacchiera viene presentata agli alunni solo come un quadrato diviso in 64 caselle bianche e nere (Figura 1a). Ben presto ci si rende conto che per poter migliorare la comunicazione istruttore-allievi è necessario abbandonare termini quali alto, basso, destra, sinistra e utilizzare un linguaggio più rigoroso (Figura 1b).

Le colonne sono indicate con una lettera (Figura 2a), le traverse con un numero (Figura 2b), le diagonali con le coordinate delle due case finali (Figura 2c) e le case con una coppia lettera/numero (Figura 2d).

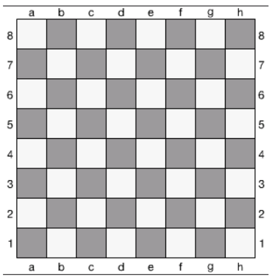


Figura 1a

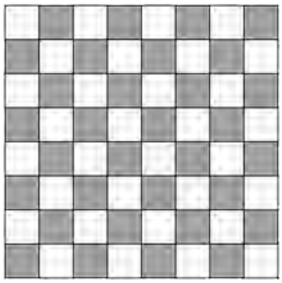


Figura 1b

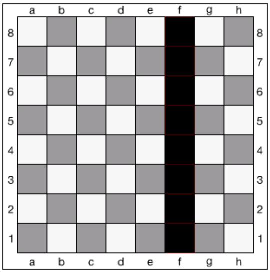


Figura 2a

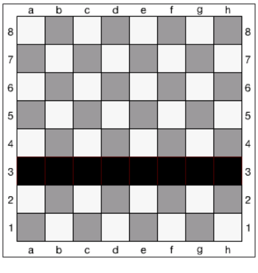


Figura 2b

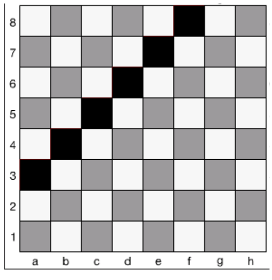


Figura 2c

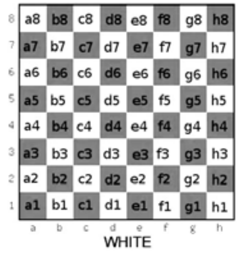


Figura 2d

Dopo aver proposto una serie di esercizi alla LIM, sono state affidate consegne sul quaderno: gli alunni dovevano colorare alcune parti della scacchiera e posizionare correttamente uno o più pezzi degli scacchi (ad es. per riprodurre un problema di scacchi o la posizione finale di una partita).

Il movimento dei pezzi e le direzioni sulla scacchiera

Nel gioco degli scacchi ogni pezzo muove seguendo regole diverse dagli altri. Per gli alunni è stato subito chiaro che per poter giocare sarebbe stato necessario imparare “tutte” le regole sul movimento dei vari pezzi.

Per ogni pezzo sono state presentate le regole sul movimento utilizzando la terminologia precedentemente appresa. Ad esempio, i movimenti di Alfiere e Torre sono stati proposti nel seguente modo: l’Alfiere si muove lungo le diagonali (Figura 3a), la Torre si muove lungo colonne e traverse (Figura 3b), entrambi non possono superare eventuali ostacoli (altri pezzi) presenti sul loro cammino.

E’ seguita una verifica della comprensione delle regole esposte mediante esercizi alla LIM: i ragazzi dovevano indicare, su una scacchiera in cui erano presenti un pezzo ed alcuni ostacoli, le case in cui Torre ed Alfiere potevano andare (Figure 3c e 3d).

Già da queste prime lezioni l’utilizzo delle coordinate si è dimostrato indispensabile per potersi comprendere.

La lezione è continuata con l’applicazione sulla scacchiera: agli alunni sono state fornite indicazioni (utilizzando le coordinate) su dove collocare i pezzi per poi giocare.

Fin dalle prime lezioni è stato possibile “giocare a scacchi”, anche se in realtà le partite si sono svolte utilizzando solo parte delle regole e del materiale del gioco.

Gli allievi, il cui obiettivo era quello di “vincere”, giocando non accettavano eventuali mosse avversarie che non rispettassero le regole, correggendosi così a vicenda.

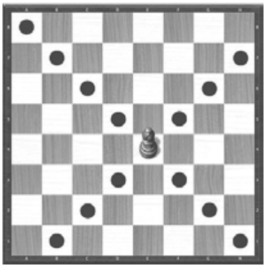


Figura 3a

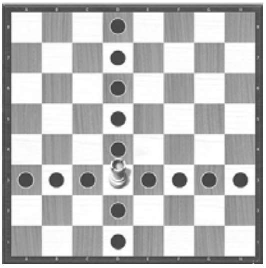


Figura 3b

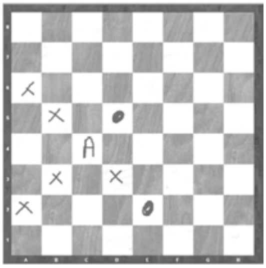


Figura 3c

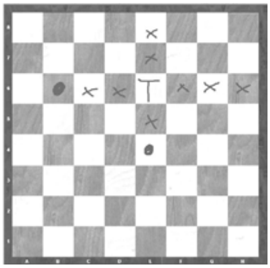


Figura 3d

Al termine delle lezioni sul movimento dei pezzi agli alunni è stato chiaro che le direzioni possibili sulla scacchiera non sono infinite, ma sono solo 8 (Figura 4).

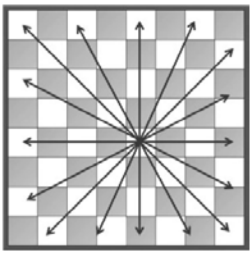


Figura 4

Regola del quadrato: le distanze sulla scacchiera

L’unità di misura delle distanze, sulla scacchiera, è il “*passo del Re*”, che può muoversi di una casa in ogni direzione. Il passo del Re è più o meno lungo a seconda che il pezzo si muova in diagonale piuttosto che in orizzontale o in verticale, ma l’unità di misura rimane sempre “*il passo del Re*” indipendentemente dalla sua lunghezza. Questo fa sì che sulla scacchiera lato e diagonale di un quadrato abbiano la stessa misura (Figura 5a).

Sono stati proposti numerosi esercizi su possibili percorsi del Re per andare da una casa ad un'altra: l'obiettivo era quello di catturare pedoni avversari nel minor tempo possibile (si ricorda che sulla scacchiera l'unità di misura del tempo è "*una mossa*").

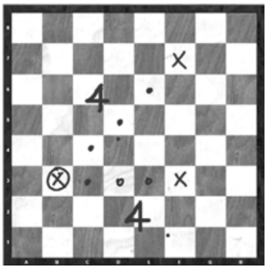


Figura 5a

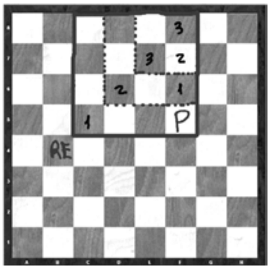


Figura 5b

Un'applicazione pratica è la "*regola del quadrato*". Per sapere se in partita è possibile catturare un pedone avversario, è necessario immaginare un quadrato che ha come lato la distanza tra il Pedone e il bordo superiore della scacchiera. Il Re riuscirà a catturare il Pedone solo se potrà entrare in questo quadrato (Figura 5b). Questa regola è stata particolarmente apprezzata dagli alunni perché è risultato subito chiaro che quando si troveranno a giocare con qualcuno che non la conosce potranno godere di un certo vantaggio.

Trascrivere una partita: la notazione algebrica

La notazione algebrica permette, grazie all'uso delle coordinate, di scrivere le mosse di una partita. E' stato spiegato agli alunni che è possibile scrivere le mosse di una partita utilizzando alcune semplici regole: si scrive l'iniziale del pezzo che si muove, A per Alfiere, T per Torre …, seguita dalle coordinate (ancora le coordinate!) della casa di arrivo.

Questo modo di indicare le mosse rende la trascrizione della partita estremamente semplice.

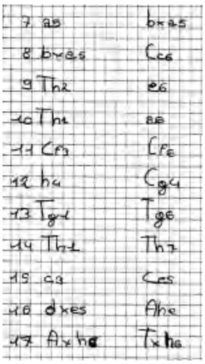


Figura 6

Per migliorare il livello di gioco (quello che importa ai ragazzi) è necessario poter rivedere la partita giocata per poter analizzare errori, tatticismi, strategia. Scrivere la partita è condizione necessaria per poterla poi rigiocare.

In Figura 6 è riportato un frammento della trascrizione di una partita giocata in classe tra due alunni. Come si può notare in alcuni casi manca l'iniziale del pezzo, ma non è un errore: quando a muovere è un Pedone si indica solo la casa di arrivo. La presenza del segno "X" non è una distrazione, ma indica una cattura.

Dopo alcune indecisioni iniziali, si è assistito ad un notevole miglioramento nella trascrizione delle mosse da parte degli allievi.

Essere disordinati o superficiali nella trascrizione delle mosse non consente ai ragazzi di rigiocare la partita e questo li stimola ad essere puntuali e precisi.

Il problema di scacchi: problem solving

Classici problemi di scacchi (di solito trovare il modo di dare scacco matto) sono stati proposti in un "*forum relazionale*" della piattaforma *Moodle*. Gli alunni, accedendo da scuola o da casa all'ambiente di apprendimento, potevano discutere l'argomento proponendo soluzioni. Questo approccio ha favorito lo sviluppo della capacità di confronto anche a distanza. L'istruttore poteva intervenire nella discussione se e quando lo riteneva necessario.

- ***Problemi di matto in una mossa***

Il requisito necessario per risolvere questi problemi è la conoscenza delle regole del gioco.

Presentato un diagramma e spiegato il compito "*il Bianco muove e dà matto in una mossa*" (Figura 7), gli alunni dovevano osservare la posizione dei pezzi e trovare, tra tutte le mosse possibili (di solito alcune decine), quella che dava "*scacco matto*".

La discussione, a questo punto, si riduceva a controllare se, dopo la mossa proposta, il Re avversario aveva realmente subito lo "*scacco matto*".

Le condizioni che devono essere soddisfatte per avere "*scacco matto*" sono le seguenti:

- il Re Nero non può fuggire
- il Nero non può catturare il pezzo che dà scacco
- il Nero non può bloccare l'azione del pezzo che dà scacco.
- Nel caso proposto in Figura 7, sono cinque gli scacchi possibili: Dh8+, Dxg7+, Df6+, Df4+, Dd6+, ma solo l'ultimo soddisfa tutte e tre le condizioni, quindi la soluzione è Dd6#.

Figura 7

- ***Problemi di "matto in due mosse"***

E' stato presentato un problema in cui il Bianco deve dare "*scacco matto*" in due mosse: "*il Bianco muove e dà matto in due mosse"* (Figura 8).

In questo caso il procedimento risolutivo è decisamente più complesso: occorre trovare una mossa del Bianco (che esiste, è unica ed è detta '*mossa chiave*') tale che, per qualsiasi risposta del Nero, esista una mossa del Bianco che dia "*scacco matto*".

Per individuare la soluzione si è rivelato utile il seguente schema:

1. Quali sono le possibili mosse del Bianco?
2. Devo trovare la mossa chiave
3. Dopo la mossa del Bianco, quante sono le possibili risposte del Nero?

Per ognuna di esse è necessario trovare la mossa che dà matto.

Mossa chiave: 1.

se 1.... allora 2...

se 1... allora 2...

se 1... allora 2...

La soluzione del problema proposto in Figura 8 è la seguente:

Dh6+ (mossa chiave)

se 1…gxh6 allora 2. Th7#

se 1…Rg8 allora 2. Dh7#

Figura 8

Il solutore si deve accertare di aver preso in considerazione tutte le possibilità. Se esiste anche una sola mossa del Nero dopo la quale il Bianco non ha la possibilità di dare matto, il problema non è risolto.

I pezzi pacifici: il fattoriale

Sono stati proposti anche problemi "artificiali": essi utilizzano le regole del gioco per creare situazioni che nulla hanno a che fare con una partita di scacchi.

Un esempio è il problema delle "*Torri pacifiche*": gli alunni sono stati chiamati a disporre sulla scacchiera otto torri in modo che non si potessero minacciare a vicenda (Figura 9).

Questo è possibile quando non ci sono due torri sulla stessa colonna né due sulla stessa traversa.

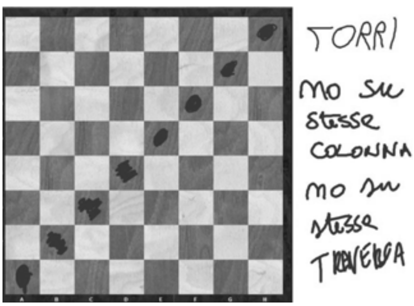


Figura 9

Prima utilizzando la LIM poi sulle scacchiere sono state proposte soluzioni diverse e continuamente venivano trovate nuove possibilità.

Questo particolare problema ha permesso di introdurre il concetto di “fattoriale”, in quanto le possibili soluzioni del problema dato corrispondono a 8! (8×7×6×5×4×3×2×1).

Allo stesso modo sono stati proposti :

- il problema delle “*Donne pacifiche*”: disporre sulla scacchiera il maggior numero di Donne senza che si possano minacciare a vicenda
- il problema dei “*Cavalli pacifici*” (disporre sulla scacchiera il maggior numero di Cavalli senza che si possano minacciare a vicenda).

In ogni problema le soluzioni sono state prima discusse con il supporto della LIM e poi verificate sulla scacchiera.

Il valore dei pezzi e la media ponderata

Nel gioco non tutti i pezzi sono uguali. A ogni pezzo viene attribuito convenzionalmente un valore numerico (il pedone è l’unità di misura).

Il compito assegnato ai ragazzi è stato quello di stabilire, in una particolare posizione, chi è in vantaggio materiale, sommando il valore dell’insieme dei pezzi del Bianco e del Nero e poi confrontando tali risultati. Possedere questa informazione durante una partita è cosa importante. Nel caso presentato in Figura 9a la situazione è la seguente*:*

valore dell’insieme dei pezzi bianchi: $9 + 5 + 3 \times 3 + 6 \times 1 = 29$

valore dell’insieme dei pezzi neri: $9 + 2 \times 5 + 2 \times 3 + 5 \times 1 = 30$

I ragazzi sono stati stimolati a trovare un modo per “calcolare” il valore di ogni pezzo, senza dover accettare in modo passivo il valore convenzionale.

E’ stato deciso di contare il numero di case che un pezzo può controllare da una casella della scacchiera e questo valore è stato definito “*grado*”.

Il “*grado*” di una casa cambia secondo la posizione. Ad esempio per l’Alfiere il valore trovato va da 7 (case laterali) a 13 (case centrali): questo ha spinto i ragazzi a cercare un valore medio (viene calcolata la media aritmetica) (Figura 9b - c).

Figura 9a

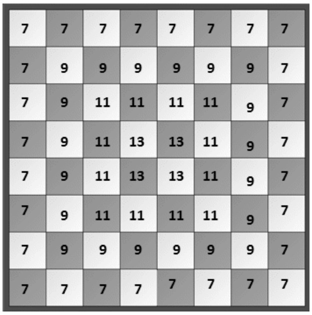


Figura 9b

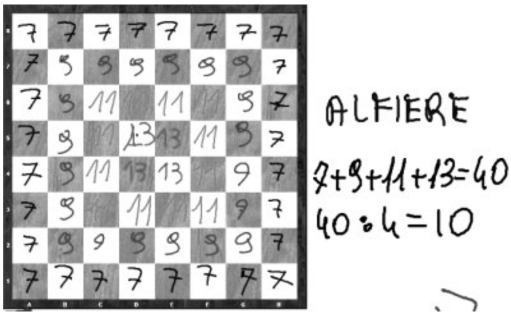


Figura 9c

Si è osservata però una netta discrepanza tra il valore tradizionale e quello calcolato con la media aritmetica. Qualche allievo ha allora proposto un calcolo più accurato, tenendo conto di quante case hanno un particolare “*grado*”: si è così arrivati alla media ponderata che è stata calcolata avvalendosi di espressioni aritmetiche (Figura 10a).

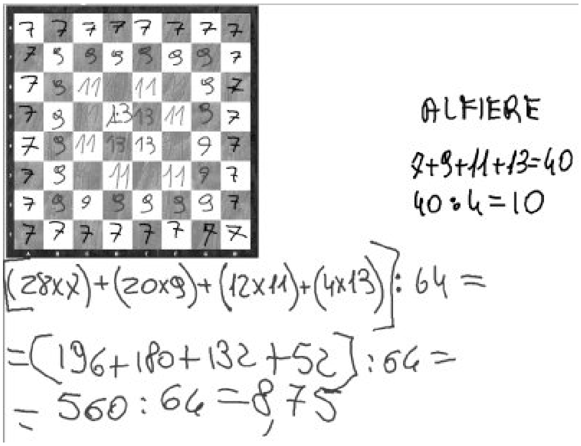


Figura 10a

Lo stesso lavoro è stato fatto con ogni altro pezzo, arrivando alla costruzione di una tabella comparativa tra i valori convenzionali e quelli calcolati (Figura 10b).

PEZZO	VALORE CLASSICO	VALORE CALCOLATO
CAVALLO	3	5,25
ALFIERE	3	8,75
TORRE	5	14
DONNA	9	22,75
PEDONE	1	1,75

Figura 10b

Confrontando i nuovi valori calcolati con quelli tradizionali, si è notato che alcuni pezzi sono sovrastimati (o sottostimati) rispetto al valore convenzionale.

E' stato spiegato ai ragazzi che il motivo di tale discrepanza è da cercare nella particolarità delle regole che disciplinano i loro movimenti. Il calcolo fatto da loro ha tenuto conto solo del "*grado*" di ogni casa rispetto ai vari pezzi, non della complessità del gioco (una combinazione di tattica, tecnica e strategia). Ad esempio, i valori calcolati per il Pedone e per il Cavallo, se confrontati con quelli degli altri pezzi, sono inferiori rispetto al loro reale valore nel gioco degli scacchi, questo perché il modo con cui sono stati calcolati non tiene conto, per quanto riguarda il Cavallo, della sua capacità di saltare gli ostacoli (unico tra i pezzi del gioco) e, per quanto riguarda il Pedone, della possibilità di andare a promozione, che ne aumenta il valore quanto più si avvicina questa possibilità.

Verifica

La verifica del progetto si è basata sull'osservazione costante degli studenti nel corso delle attività laboratoriali. Si sono presi in considerazione: il grado di coinvolgimento e la partecipazione alle attività proposte in presenza e a distanza in piattaforma; la capacità di intervenire nelle discussioni in modo ordinato, rispettoso e pertinente; l'interazione reciproca con particolare riferimento all'inclusione delle diversità. Gli allievi migliori hanno inoltre avuto la possibilità di partecipare alla fase provinciale dei Campionati Giovanili Studenteschi a squadre organizzati dalla F.S.I. (Federazione Scacchistica Italiana).

Conclusioni

Attraverso il corso "*Matematica sulla scacchiera*" è stato possibile affrontare, mediante situazioni concrete applicate al gioco degli scacchi, temi matematici importanti come il piano cartesiano, la direzione, la media aritmetica, la media ponderata e il *problem solving*.

L'esperienza effettuata si è rivelata, inoltre, decisamente positiva per numerosi aspetti, tra cui:

- la partecipazione attiva e il coinvolgimento entusiastico. Alcuni allievi che manifestavano nel corso delle ore curricolari poco interesse per la disciplina, si sono invece rivelati protagonisti durante lezioni di scacchi, evidenziando capacità di comprensione e discussione più che buone;
- la consapevolezza del miglioramento dei risultati sulla scacchiera grazie alle acquisizioni matematiche, in particolare da parte degli allievi che già conoscevano il gioco;
- l'acquisizione di capacità argomentative e della capacità di «mettersi in gioco» da parte di tutti gli allievi;
- il miglioramento della cooperazione e dell'inclusione. I ragazzi amavano confrontarsi e discutere fra loro, mostrandosi sempre disponibili ad aiutarsi reciprocamente;
- il rispetto delle regole durante il gioco, di ampio valore educativo;
- l'attenzione, nello svolgimento di una partita, motivata dalla necessità di non commettere errori;
- il dialogo e la ricerca di un confronto con l'avversario nell'analisi della partita giocata.

Bibliografia

AA.VV. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Annali della Pubblica Istruzione. Le Monnier.

Odifreddi, P. (1998). *Scacco alla regina (delle scienze)*. Scienza Nuova n. 9 Dicembre 1998.

Sitografia

Dichiarazione del Parlamento europeo del 15 marzo 2012 sull'introduzione del programma «Scacchi a scuola» nei sistemi d'istruzione dell'Unione europea

http://www.europarl.europa.eu/sides/getDoc.do?pubRef=-//EP//TEXT+TA+P7-TA-2012-0097+0+DOC+XML+V0//IT

INVALSI: quadro di riferimento primo ciclo di istruzione prova di matematica

http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/QDR/QdR_Mat_I_ciclo.pdf

IL TEOREMA DI PITAGORA CON LE MACCHINE MATEMATICHE

***Francesca Scorcioni*[1]*, Michela Maschietto*[2]**

[1]MMLab & IC "Marconi" – Castelfranco Emilia (MO), [2]MMLab & Dipartimento di Educazione e Scienze Umane – Università di Modena e Reggio Emilia

Premessa

Questo contributo presenta una sperimentazione didattica sul Teorema di Pitagora nell'ambito del laboratorio di matematica con artefatti fisici, quali le macchine matematiche (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), nella scuola secondaria di I grado. Il Teorema di Pitagora è un argomento classico che di solito viene introdotto durante il secondo quadrimestre della classe seconda, dopo aver presentato agli alunni le radici quadrate in aritmetica e l'area delle figure piane in geometria. La scelta di proporre il percorso che sarà qui descritto è nata da un lato dalla constatazione che, anche nei risultati delle prove di valutazione nazionali, la geometria rappresenta lo scoglio maggiore per gli alunni, dall'altro dall'interesse dell'insegnante di proporre un diverso modo di affrontarla.

Nelle *Indicazioni Nazionali per il Curricolo del I ciclo d'istruzione* del 2012, tra gli obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di I grado, è presente quello di "conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica in situazioni concrete" (p. 64). Presentare agli alunni il Teorema di Pitagora come un insieme di formule utili solo per trovare un lato di un triangolo rettangolo conoscendo gli altri due, riducendolo quindi solo a un'insieme di regole da memorizzare e applicare, senza far cogliere il collegamento con l'interpretazione geometrica del Teorema stesso, non contribuisce a sviluppare un'adeguata visione della matematica come contesto per porsi e risolvere problemi significativi. A livello metodologico, nelle stesse *Indicazioni* viene specificato che in matematica è "elemento fondamentale il laboratorio di matematica, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte" (p. 60).

Si è deciso quindi di costruire un percorso che prevedesse l'utilizzo delle macchine matematiche per far costruire agli alunni di due classi seconde il significato del Teorema di Pitagora e arrivare alla sua formulazione simbolica. Le macchine matematiche che sono state utilizzate per il progetto sono due: la prima si basa sulla classica dimostrazione del Teorema di Pitagora che si avvale di un quadrato e quattro triangoli rettangoli, la seconda propone una dimostrazione del Teorema attribuita a Leonardo da Vinci.

Questo articolo si compone di quattro sezioni: nella prima viene delineato il quadro di riferimento entro il quale si colloca la sperimentazione, la seconda presenta gli elementi della progettazione del percorso nella parte relativa alle macchine matematiche, nella terza vengono ripercorse le fasi del lavoro svolto in classe con gli alunni, mentre nell'ultima viene analizzata l'attività degli allievi con le due macchine matematiche.

Il laboratorio di matematica con le macchine matematiche

La metodologia dell'esperienza presentata in questo articolo fa riferimento al laboratorio di matematica, così come descritto in *Matematica2003 - Matematica per il cittadino* della Commissione UMI-CIIM (AA.VV., 2004). Il laboratorio di matematica si può pensare come uno spazio fenomenologico in cui sono presenti strumenti quali le macchine matematiche (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), ma anche materiale povero (ad esempio, fogli di cartoncino) e strumenti classici per il disegno (riga e squadre). L'idea fondamentale di laboratorio con le macchine matematiche è che una macchina matematica evoca (se ci si mette nella prospettiva del soggetto riguardo alle relazioni tra artefatto e conoscenze) o incorpora (se ci si mette in una prospettiva storico-epistemologica di analisi dell'artefatto) un certo sapere matematico, proprio perché è stata costruita in un certo modo. Un esempio di macchina matematica è dato dal compasso (Barbieri & Maschietto, 2012), ma vi sono anche pantografi per le trasformazioni geometriche (Bettini *et al.*, 2012).

Da un punto di visto teorico, la metodologia del laboratorio ha un suo fondamento nella Teoria della Mediazione Semiotica di impronta vygotskiana, sviluppata da Bartolini Bussi e Mariotti (2009). Quando agli allievi è dato un compito che prevede l'uso di una tecnologia (sia classica come una macchina matematica, che digitale come un software di geometria dinamica) si può osservare un'intensa attività di produzione di segni (che viene definita attività semiotica), quali sguardi, gesti, parole, schizzi su carta, disegni o testi (anche contenenti simboli). I segni che vengono prodotti dagli allievi svolgono la duplice funzione di rappresentare il problema posto all'allievo stesso e di comunicare con gli altri studenti e/o con l'insegnante. I termini utilizzati nella comunicazione sono contestualizzati e strettamente legati alla situazione in cui gli studenti si trovano. Gli studenti che usano una certa tecnologia per svolgere un compito preciso non sempre sono consapevoli dei significati matematici che stanno trattando. È quindi compito dell'insegnante sostenerli nel processo di esplicitazione di tali significati. In tal senso, l'insegnante deve accompagnare l'evoluzione di segni, da quelli relativi all'oggetto e al suo uso a quelli matematici. Quando un insegnante usa un artefatto per mediare significati matematici, egli usa l'artefatto come strumento di mediazione semiotica. La struttura didattica di tale Teoria è costituita dal ciclo didattico in cui si trovano tre tipi di attività (Bartolini Bussi, 2010): attività con l'artefatto a piccolo gruppo, attività individuale e discussioni collettive (nello specifico, discussioni matematiche).

Nell'utilizzo di artefatti, un riferimento importante risulta essere anche l'approccio strumentale (Rabardel, 1995), basato sulla distinzione tra artefatto (oggetto materiale) e strumento (costruzione psicologica data dall'artefatto e dagli schemi di utilizzo corrispondenti a come il soggetto utilizza l'artefatto per compiere un compito specifico). Rabardel definisce "genesi strumentale" il processo di costruzione individuale di uno strumento (o strumenti) a partire da un artefatto. Da un punto di vista didattico, risulta importante, da parte dell'insegnante, sostenere il processo di genesi strumentale con opportune consegne volte a individuare le caratteristiche dell'oggetto fisico, il suo funzionamento e i modi d'utilizzarlo (in altri termini, gli schemi d'utilizzo) in compiti precisi, legati ai significati matematici che sono tra gli obiettivi del lavoro. Per questo, le prime consegne nel laboratorio con le macchine matematiche sono "come è fatta la macchina" e "che cosa fa" (Bartolini Bussi, 2010).

Elementi di progettazione del percorso

Come è stato anticipato, in questa sperimentazione didattica sono state utilizzate due macchine matematiche, con due diverse funzionalità didattiche (Cerulli *et al.* 2007): la prima macchina matematica è stata scelta per introdurre il Teorema di Pitagora, la seconda per verificare il lavoro svolto e gli apprendimenti a fine percorso.

Questa sezione contiene le analisi *a priori* delle due macchine matematiche in relazione all'uso didattico che ne è stato fatto nella sperimentazione, in accordo con i riferimenti teorici per il laboratorio di matematica (questo tipo di analisi contribuisce all'analisi del potenziale semiotico dell'artefatto in oggetto).

Analisi a priori della prima macchina matematica

Questa macchina matematica[1] è costituita da una cornice quadrata di legno fissata a un piano di legno (Figura 1) e da quattro prismi uguali a base triangolare retta (che saranno chiamati nel

1 http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=162&Itemid=243&limitstart=1

seguito semplicemente 'triangoli'). Sono disponibili sia triangoli rettangoli non isosceli (scelti per il lavoro degli allievi) che triangoli rettangoli isosceli. Una caratteristica importante, che lega cornice e triangoli, è che la somma dei cateti di un triangolo rettangolo è pari al lato del quadrato interno (come si vede nella Figura 1, al centro e a destra).

Figura 1. La macchina matematica e le due configurazioni (caso di triangoli rettangoli non isosceli)

I triangoli rettangoli possono essere sistemati all'interno della cornice nelle due configurazioni presenti nella Figura 1 (al centro e a destra). Dato che tali rettangoli non ricoprono la superficie interna alla cornice, si può passare da una configurazione all'altra facendoli scorrere all'interno della cornice. A seconda della configurazione, la superficie non coperta dai triangoli all'interno della cornice ha forma diversa: in un caso vi sono due "buchi" che corrispondono ai quadrati costruiti sui cateti, nell'altro caso vi è un solo "buco" di forma quadrata corrispondente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

In accordo con i riferimenti teorici, l'analisi *a priori* della macchina ha portato l'attenzione su:

- le possibili manipolazioni della macchina, in relazione ai significati matematici che tali manipolazioni possono evocare; questo ha messo in evidenza il ruolo fondamentale dell'azione di scivolamento dei triangoli all'interno della cornice al fine della conservazione della superficie totale, e quindi dell'area del "buco" nelle due configurazioni;
- la relazione tra componenti visibili e tangibili e quelle visibili ma non tangibili della macchina; questo ha suggerito un elemento di criticità nell'esplorazione della macchina. In effetti, essendo la macchina fatta tutta di legno, vi è poco contrasto tra oggetti e sfondo. Si è allora deciso di ricoprire il piano interno con un cartoncino rosso in modo da far risaltare i "buchi" quadrati rispetto al resto della macchina. In tal modo, anche il quadrato interno diventa un elemento visibile e tangibile;
- l'eventuale criticità nel legare la manipolazione dei triangoli con l'invarianza delle aree (o la loro somma) dei "buchi".

Le consegne e i relativi compiti assegnati su questa macchina matematica sono:

- esplorazione collettiva della macchina ("come è fatta");
- riproduzione, fedele rispetto alle misure, della macchina con il cartoncino a piccolo gruppo, in modo che ogni gruppo possa lavorare su un proprio modello ma con le caratteristiche metriche dell'originale.

Il secondo tipo di consegna forza il passaggio a un altro artefatto, o meglio alla realizzazione di un nuovo artefatto con materiale povero. Questo nuovo artefatto presenta alcuni vincoli diversi rispetto alla macchina matematica, che possono portare a una diversa manipolazione. Peresempio, non essendoci la cornice al quadrato di base, lo scivolamento della macchina matematica deve essere maggiormente controllato dagli allievi, così come le sovrapposizioni delle figure.

Rispetto alla struttura del ciclo didattico della Teoria della Mediazione Semiotica, il lavoro di gruppo con la macchina matematica (in legno o in cartoncino) si è articolato con un lavoro individuale di riproduzione della macchina sul quaderno. La riproduzione della macchina è chiesta in due momenti diversi del percorso. Il primo compito, dato subito dopo la presentazione collettiva della macchina, ne richiede la riproduzione esatta su cartoncino: questo richiede agli allievi di riconoscere le figure da riprodurre e di misurarne le dimensioni. L'obiettivo è quello di avere la stessa riproduzione in ogni gruppo. Il secondo compito è dato individualmente e richiede la rappresentazione sul quaderno della macchina e delle relazioni tra i quadrati presenti. Una differenza rilevante tra questi compiti dipende dalla necessità di scegliere le dimensioni delle figure nel secondo compito, in quanto il supporto per la rappresentazione (cioè il quaderno) non permette una riproduzione in scala 1:1. In tal senso, non si tratta solo della riproduzione della macchina, ma degli elementi caratteristici che devono essere presi in considerazione. Nello specifico, si tratta di rappresentare la relazione, fortemente implicita nella macchina, tra la lunghezza del lato del quadrato interno e somma delle lunghezze dei due cateti.

Analisi a priori della seconda macchina

La seconda macchina matematica[2] (Figura 2) propone una dimostrazione del Teorema di Pitagora dovuta, sembra, a Leonardo da Vinci (Il Giardino di Archimede, 2001). È costituita da un pannello di legno in parte mobile nel quale è stato ricavato un foro esagonale; il foro è diviso in tre parti da due elastici, due triangoli rettangoli congruenti e un quadrato; è presente una manovella girevole ancorata al pannello mobile: ruotando la manovella (a sinistra della macchina) si gira il pannello mobile, gli elastici si incrociano e il foro cambia forma e viene suddiviso in due triangoli rettangoli e due quadrati. Essa presenta due configurazioni: nella prima (Figura 2, a sinistra) sono presenti due triangoli rettangoli congruenti e un quadrato costruito sulla loro ipotenusa; nella seconda (Figura 2, a destra) sono presenti due triangoli rettangoli congruenti a quelli della prima configurazione e due quadrati di dimensioni diverse costruiti sui cateti. Girando la manovella, si passa da una configurazione all'altra.

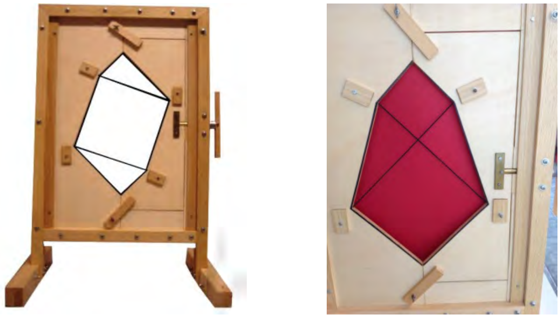


Figura 2. La macchina matematica nelle due configurazioni

Questa macchina è portata in classe nell'ultima fase del percorso. L'obiettivo è quello di verificare se gli allievi vi riconoscono gli elementi del Teorema di Pitagora. Non si chiede la dimostrazione su cui si basa il funzionamento della macchina, ma sono maggiormente sollecitati processi di produzione di congetture e argomentazioni sulla matematica mostrata dalla macchina. In tal senso, i triangoli rettangoli e i quadrati possono essere individuati con le squadre, così come le uguaglianze tra i segmenti presenti nelle configurazioni. Come per la prima macchina, per sostenere l'analisi della forma del foro, lo si è "riempito" con cartoncino rosso (Figura 2, a destra).

Oltre al lavoro collettivo, viene chiesta una descrizione individuale della macchina a ogni allievo con l'obiettivo di costruire un cartellone da appendere in aula.

2 http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=162&Itemid=243

Le diverse fasi del percorso didattico

Il percorso si è svolto nell'arco di circa tre mesi, da inizio marzo a fine maggio dell'anno scolastico 2012-2013, in due classi seconde dell'Istituto Comprensivo "Marconi" di Castelfranco Emilia (MO). Esso è costituito da nove fasi,riassunte qui di seguito, che costituiscono più cicli didattici.

Fase 1. Dopo aver trattato le radici quadrate in aritmetica, l'area delle figure piane e l'equiscomponibilità in geometria, è stata portata in classe la prima macchina matematica; gli alunni l'hanno prima esplorata collettivamente e poi riprodotta su cartoncino lavorando a gruppi di quattro; durante questa fase hanno anche dovuto completare una scheda fornita dall'insegnante.

Fase 2. Gli alunni, guidati dall'insegnante, hanno manipolato la macchina per arrivare alla formalizzazione del Teorema di Pitagora, passando dal linguaggio naturale a quello formale dell'enunciato per poi giungere a quello simbolico.

Fase 3. Questa fase ha portato alla generalizzazione del Teorema di Pitagora a tutti i triangoli rettangoli tramite l'analisi del caso particolare dei triangoli rettangoli isosceli e tramite rappresentazione della macchina su carta quadrettata.

Fase 4. Individualmente come compito a casa, gli alunni hanno prodotto una descrizione della macchina e inviata all'insegnante sulla classe virtuale Edmodo. Per concludere l'analisi della prima macchina è stato realizzato dagli alunni un poster, per il quale hanno utilizzato le riproduzioni di cartoncino precedentemente costruite.

Fase 5. Si sono presentate la controversa e leggendaria figura di Pitagora, la scuola dei pitagorici, si è parlato di Euclide e degli *Elementi* e sono state introdotte le terne pitagoriche, sottolineando come fossero già conosciute dai popoli antichi.

Fase 6. Ci si è dedicati alla risoluzione di problemi legati alla vita quotidiana, per far crescere negli alunni la percezione della matematica come una disciplina per risolvere situazioni autentiche e significative (Indicazioni Nazionali per il curricolo, 2012).

Fase 7. Per arrivare all'estensione del Teorema ad altre figure geometriche, oltre che ai quadrati, nella settima fase è stata proposta agli alunni una sfida che prevedeva la composizione di puzzles, ispirata da un'attività presentata sul sito del Giardino di Archimede[3] (2001).

Fase 8. Con lo scopo di verificare gli apprendimenti si è presentata agli alunni la seconda macchina matematica, che è stata prima esplorata collettivamente, poi riprodotta su cartoncino.

Fase 9. Si è chiesto di descrivere individualmente la macchina agli alunni in classe. Le descrizioni dei singoli alunni sono poi state condivise e quella più puntuale e accurata è stata utilizzata per produrre un poster.

Analisi della sperimentazione

In questa sezione, saranno analizzate solo le fasi del percorso che caratterizzano il lavoro con le macchine matematiche.

Fase 1. Esplorazione della prima macchina

La classe è stata divisa in sei gruppi da quattro alunni ciascuno ed è stato assegnato a ogni componente di ciascun gruppo un numero da 1 a 4. Si è deciso di formare gruppi che non fossero troppo eterogenei tra di loro, per evitare che ci fosse eccessiva distanza cognitiva tra i componenti; i rischi sarebbero stati sia che il "più bravo" prevalesse sugli altri sia che il "meno bravo" si sentisse inadeguato. Sono stati poi assegnati diversi ruoli all'interno di ogni gruppo per far sì che tutti si sentissero coinvolti e collaborassero. A questo punto è iniziata l'esplorazione collettiva della macchina.

3 http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora/primapagina.php

Prima di tutto l'insegnante ha mostrato i vari pezzi, la base e i quattro triangoli rettangoli (Figura 1, a sinistra), poi ha chiesto agli allievi di riprodurre la macchina con cartoncino: la base quadrata con cartoncino rosso e i quattro triangoli rettangoli con cartoncino bianco.

Mentre i numeri 1 di ogni gruppo, a turno, misuravano con la riga o la squadra le componenti della macchina, i numeri 2 dovevano assisterli e trascrivere le misure; i numeri 3 e 4 dovevano nel frattempo compilare una scheda riassuntiva sulle proprietà dei quadrati e dei triangoli rettangoli. La compilazione della scheda aveva la duplice funzione di tenere occupati tutti i componenti del gruppo e di "rinfrescare" proprietà geometriche utili per le fasi successive. Terminata questa prima parte, i gruppi hanno iniziato a riprodurre la macchina con il cartoncino. Anche in questo caso l'insegnante ha suddiviso i compiti in modo preciso: i numeri 1 e 2 dovevano disegnare e ritagliare la base quadrata rossa, mentre i numeri 3 e 4 i quattro triangoli rettangoli congruenti. In questa parte apparentemente banale, gli alunni hanno dovuto mettere in atto abilità e strategie di diverso tipo, come costruire un quadrato senza il foglio quadrettato e riuscire a ricavare i quattro triangoli rettangoli con un pezzo di cartoncino di dimensioni limitate.

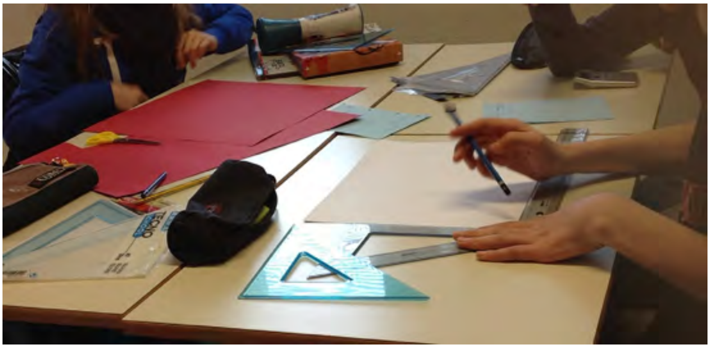



Figura 3. La riproduzione della macchina e il nuovo artefatto

Una volta terminata la riproduzione della macchina (costruzione di un nuovo artefatto, Figura 3), l'insegnante ha chiesto agli alunni di trovare tutte le possibili configurazioni nelle quali, disponendo i quattro triangoli rettangoli sulla base senza sovrapporli, si formassero dei quadrati rossi. La scelta del cartoncino colorato come sfondo ha permesso di formulare la consegna in tali termini.

Dopo qualche tentativo, tutti i gruppi sono giunti alle due configurazioni. Nella condivisione del risultato dell'esplorazione, sono state introdotte le espressioni linguistiche che hanno poi caratterizzato la formulazione del Teorema. Infatti, nella prima configurazione si forma un unico quadrato, che è stato chiamato quadrato grande (Q_G), mentre nella seconda si formano due quadrati, uno medio e uno piccolo, che sono stati chiamati rispettivamente quadrato medio (Q_M) e quadrato piccolo (Q_P). Una parte importante della discussione è dedicata all'argomentare che i "quadrati rossi" fossero veramente dei quadrati. Gli allievi sono stati così stimolati a mettere in gioco le conoscenze sulle proprietà dei quadrati e dei triangoli rettangoli che avevano ripassato compilando le schede fornite all'inizio. Inizialmente, hanno utilizzato la riga per misurare i lati con il fine di verificarne la congruenza, poi, sempre stimolati dall'insegnante, hanno argomentato che tutti i lati sono congruenti all'ipotenusa dei triangoli rettangoli . L'insegnante ha poi portato l'attenzione sugli angoli interni. Anche in questo caso gli alunni hanno iniziato con una dimostrazione empirica per confronto con l'angolo retto della squadra; solo alcuni alunni sono riusciti a dimostrare che gli angoli dei quadrati sono retti per differenza tra un angolo di 180° e angoli complementari ("*l'angolo di Q_G è retto perché si ottiene togliendo dall'angolo piatto i due angoli acuti del triangolo rettangolo, che sono complementari*").

Fase 2. Formalizzazione del Teorema di Pitagora

Una volta appurato che i quadrati che si formano fossero veramente dei quadrati, l'insegnante ha chiesto ai ragazzi di provare a passare dalla prima configurazione alla seconda e viceversa. L'obiettivo era che si evidenziasse l'equivalenza tra il quadrato grande e la somma dei quadrati medio e piccolo. Gli alunni hanno giocato un po' con la macchina, e esposto liberamente le loro riflessioni, ma non è emersa alcuna relazione tra la manipolazione fisica della macchina e l'invarianza delle aree rosse. Durante l'analisi *a priori* della macchina era stato previsto che questa potesse rappresentare un momento di stallo, quindi si era deciso di provare a guidare i ragazzi in questo delicato passaggio tramite la scrittura alla lavagna (Figura 4) di tutti gli elementi che comparivano nelle due configurazioni, per fissare ciò che inevitabilmente scompariva passando da una configurazione all'altra e ciò che invece si conservava. Questa strategia didattica si è rivelata molto efficace in quanto gli alunni, vedendo fissati alla lavagna tutti gli elementi di entrambe le configurazioni, hanno capito che il quadrato grande è uguale alla somma dei quadrati medio e piccolo.

CONFIGURAZIONE 1: 4 triangoli e Q_G
CONFIGURAZIONE 2: 4 triangoli, Q_M e Q_P
Allora:
BASE = 4 triangoli + Q_G
BASE = 4 triangoli + Q_M + Q_P

Figura 4. Relazioni scritte alla lavagna

Èa questo punto che gli alunni hanno osservato "*allora il quadrato grande è uguale alla somma di quelli medio e piccolo*": $Q_G = Q_M + Q_P$. Si è lasciato che passassero da una configurazione all'altra affinché tutti si convincessero della nuova scoperta, poi l'insegnante ha chiesto di definire il valore dell'area del quadrato grande, di quella del quadrato medio e di quella del quadrato piccolo in relazione ai lati dei triangoli rettangoli. Si è quindi arrivati alla formulazione classica del Teorema e alla scrittura simbolica.

C'è stato quindi un graduale evolversi della formalizzazione che inizialmente è stata fatta con un linguaggio naturale (il quadrato grande è uguale alla somma dei quadrati medio e piccolo), poi si è passati a un linguaggio geometrico (il quadrato che ha per lato l'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati che hanno per lati i cateti) per poi passare infine a un linguaggio simbolico ($i^2 = C^2 + c^2$)

Fase 3. Riproduzione su carta a quadretti

A questo punto del percorso è stato chiesto agli alunni di rappresentare individualmente la macchina nelle due configurazioni su carta quadrettata, con dimensioni a piacere (figura 5). Questa fase si è rivelata interessante in quanto ha fatto emergere una caratteristica implicita della macchina che sarebbe probabilmente rimasta oscura per molti alunni, in accordo con l'analisi *a priori*. È infatti emerso che per alcuni non era chiara l'invarianza tra somma dei cateti del triangolo rettangolo e lato della base quadrata: hanno dovuto fare diversi tentativi prima di riuscire a rappresentare la macchina in modo corretto. Questo lavoro ha inoltre confermato che, qualunque sia la base, il quadrato grande è equivalente alla somma dei quadrati medio e piccolo.

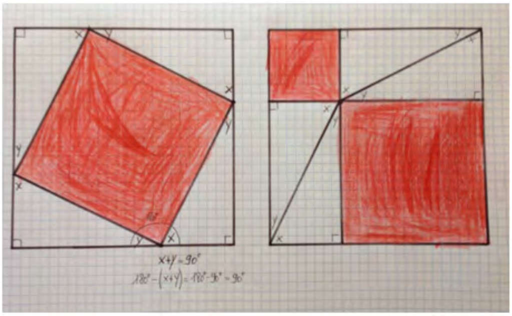


Figura 5. La macchina rappresentata sul quaderno

Fase 8. Esplorazione della seconda macchina

Questa macchina è stata portata in classe senza dare alcuna informazione sul suo significato e il suo funzionamento. È stato chiesto agli alunni di esplorarla collettivamente e poi di riprodurla, a gruppi, mantenendo le dimensioni su cartoncino rosso (i quadrati) e bianco (i triangoli rettangoli). Gli alunni hanno misurato con riga e squadra i lati delle figure e hanno confrontato l'angolo retto della squadra con quello dei triangoli e dei quadrati.

Figura 6. Esplorazione della seconda macchina matematica

In accordo con l'analisi *a priori*, non è stata chiesta alcuna giustificazione/dimostrazione riguardo alla congruenza dei lati e angoli nei quadrati, sia perché sarebbe stato un obiettivo troppo alto con una macchina dove ci sono anche oggetti (gli elastici) che cambiano lunghezza nelle due configurazioni, sia perché il significato di questa attività era volutamente diverso rispetto a quella precedente. Come già anticipato, lo scopo era infatti quello di verificare gli apprendimenti, cioè se gli alunni fossero in grado di riconoscere nella macchina gli elementi del Teorema di Pitagora. Per raggiungere questo obiettivo, gli alunni dovevano essere in grado di riconoscere forme (triangoli rettangoli e quadrati) e relazioni (il quadrato della prima configurazione ha per lato l'ipotenusa dei triangoli rettangoli e i due quadrati della seconda configurazione hanno per lati rispettivamente il cateto maggiore e quello minore del triangolo rettangolo, l'invarianza del foro esagonale, la congruenza tra i triangoli rettangoli della prima configurazione e quelli della seconda). In entrambe le classi gli alunni hanno riconosciuto le forme e le relazioni e, non appena hanno girato la manovella per passare dalla prima alla seconda configurazione, hanno capito che la funzione della macchina era quella di mostrare il Teorema di Pitagora.

Fase 9. La descrizione della seconda macchina

Nell'ultima fase del percorso l'insegnante ha chiesto agli alunni di costruire un poster che presentasse la macchina nelle due configurazioni, utilizzando le riproduzioni fatte in gruppo con il cartoncino. Per consolidare quanto appreso, si è chiesto ai ragazzi di descrivere individualmente, in classe, la seconda macchina, motivandoli con la prospettiva di pubblicare sul poster la descrizione più completa e puntuale. Dopo aver condiviso e commentato collettivamente tutte le descrizioni, si è deciso di utilizzare le parti meglio fatte di alcune di esse. La prospettiva di vedere la propria descrizione sul poster ha rappresentato una forte motivazione che ha spinto gli alunni a impegnarsi maggiormente rispetto a quello che avevano fatto nella descrizione della prima macchina.

Completiamo l'analisi del lavoro con le macchine matematiche riportando alcuni elaborati degli allievi relativi ai compiti di descrizione delle macchine (compito a casa il primo, svolgimento in classe il secondo).

Fase 4. Produzioni individuali sulla macchina

Sono qui riportati alcuni esempi di produzioni individuali degli alunni sulla prima macchina.

S. (2^A): *"La macchina matematica è una base di legno con quattro triangoli rettangoli e quattro isosceli. Noi dovevamo formare dei quadrati con quei triangoli appoggiandoli sulla base quadrata,la prima figura l'abbiamo trovato spostando i cateti maggiori dei triangoli nei angoli del quadrato trovando un quadrato. Per dimostrare che è un quadrato bisogna fare: la somma degli angoli interni quindi 360-180=180 meno l'angolo retto che fa 90 e visto che sono quattro è equiangolo. Nella seconda figura abbiamo trovato due quadrati uno che l'abbiamo chiamato quadrato medio e l'altro quadrato piccolo, poi abbiamo capito che l'area del quadrato piccolo e di quello medio è uguale a quella del quadrato grande trovando il teorema di Pitagora che era cateto maggiore alla seconda più cateto minore alla seconda che è uguale a ipotenusa alla seconda. Pitagora era un filosofo greco."*

M.C. (2^E): *"Come prima cosa la prof. ci ha mostrato la macchina matematica con la quale dovevamo lavorare ricostruendola. Il secondo passaggio consisteva nel dividerci in gruppi e prendendo le misure dovevamo riprodurre la macchina matematica mostrataci in precedenza; abbiamo quindi creato un quadrato rosso che sarebbe stata la nostra base e quattro triangoli bianchi.*

Dopo la prof. poi ci ha spiegato l'attività successiva:

1. *dovevamo disporre i triangoli rettangoli in modo da ricavare dei quadrati rossi;*
2. *provare a fare più configurazioni possibili;*
3. *dimostrare che fossero quadrati e spiegare il ragionamento fatto alla classe.*

Alla fine siamo riusciti a trovare due configurazioni, formando un quadrato grande nella prima e due quadrati, uno medio(m) e uno piccolo(p), nella seconda.

Trovati i tre quadrati, la prof. ci ha spiegato il motivo di questo laboratorio: farci ragionare sul teorema di Pitagora. E siamo arrivati a queste formule:

Abase=A4 triangoli+Ag

Abase=A4 triangoli+Ap+Am

Ag=Ap+Am

$i^2=C^2+c^2$ $\quad$ $\boldsymbol{C^2= i^2-c^2}$ $\quad$ $c^2=i^2-C^2$

Con queste formule si può trovare il terzo lato quando ne conosciamo già due."

Queste due presentazioni mettono in evidenza elementi del lavoro svolto con la macchina matematica ed espressioni diverse del Teorema di Pitagora. Peresempio, nel primo protocollo non compaiono le formule associate al Teorema, che risulta enunciato nel registro linguistico. Mentre lo stesso protocollo presenta l'argomentazione sui quadrati rossi, a indicare come tale processo sia stato rilevante nella prima fase.

Fase 9. Produzioni individuali sulla macchina

Sono qui riportati alcuni esempi di produzioni individuali degli alunni sulla seconda macchina.

R.F. (2^E): *"La macchina matematica, nata per dimostrare il teorema di Pitagora, è stata costruita seguendo fedelmente i progetti del grande genio rinascimentale Leonardo da Vinci. E' costituita da un pannello di legno composto da una parte fissa e una parte mobile, una manovella e un foro di forma esagonale, diviso in due triangoli rettangoli e un quadrato da due elastici. Il quadrato è costruito sulle ipotenuse dei triangoli e rappresenta quello che noi abbiamo chiamato quadrato grande. Girando una manovella abbiamo ottenuto una seconda configurazione e al posto del quadrato costruito sulle ipotenuse, si sono formati due quadrati più piccoli che rappresentano quelli che noi abbiamo chiamato quadrato medio e quadrato piccolo. Questa macchina matematica dimostra che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa (quadrato grande) è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti (quadrato medio e quadrato piccolo)".*

S.M. (2^E): *"Questa macchina matematica in legno e ferro presenta al centro un buco esagonale, diviso in due triangoli rettangoli agli estremi e un quadrato al centro, grazie a due elastici. Il quadrato è costruito sulle ipotenuse dei triangoli e rappresenta quello che noi abbiamo chiamato* quadrato grande. *A lato c'è una manovella che una volta girata, spostando solo la parte sinistra, fa incrociare i due elastici formando una figura diversa ma con la stessa area. La nuova figura, formata dagli stessi triangoli rettangoli e da due quadrati di diverse misure, mostra i due quadrati costruiti sui cateti, uno sui cateti minori dei due triangoli e uno sui cateti maggiori, che abbiamo chiamato* quadrato medio *e* quadrato piccolo. *In definitiva questa macchina mostra che il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti."*

Questi due protocolli, proveniente da allievi di due classi diverse, presentano una struttura che riprende il lavoro svolto con la seconda macchina matematica: descrizione dell'artefatto ("come è fatta"), come funziona e cosa produce l'azione su di essa, e poi che cosa mostra. Gli studenti sono precisi in questa loro descrizione, anche se il Teorema di Pitagora non è esplicitamente nominato.

Conclusioni

In questo articolo è stata analizzata una sperimentazione didattica di laboratorio sul Teorema di Pitagora svolta in due classi seconde di scuola secondaria di I grado, nella quale sono state utilizzate due macchine matematiche. La prima macchina è servita per introdurre il Teorema e condurre gli alunni alla sua formalizzazione prima con linguaggio naturale, poi con linguaggio più specificatamente geometrico e infine con linguaggio simbolico. La seconda macchina ha permesso invece di verificare gli apprendimenti e quindi se gli alunni vi riconoscevano gli elementi del Teorema e le analogie con la prima macchina. Prima di presentare le macchine agli alunni si è resa necessaria un'analisi a priori delle macchine, che ha permesso di prevedere eventuali punti critici e programmare strategie didattiche che si sono rivelate fondamentali per superare criticità come il passaggio dalla fase manipolativa, dove ci sono oggetti che compaiono e scompaiono passando da una configurazione all'altra, alla fase di formalizzazione. L'utilizzo di cartoncino rosso ha permesso di far emergere i quadrati rossi e di utilizzare un registro linguistico facilmente comprensibile La rappresentazione della prima macchina su carta quadrettata ha permesso di evidenziare una caratteristica implicita della macchina che non era stata colta da molti alunni.

Il laboratorio di matematica con le macchine è un'attività che richiede un'accurata fase di progettazione e un'attenta analisi a priori delle macchine, ma sicuramente il percorso fatto con le manipolazioni, le riproduzioni, le rappresentazioni, le congetture e le argomentazioni, il riconoscimento delle analogie tra le due macchine, ha contribuito a far sì che gli alunni costruissero in modo significativo alcuni concetti matematici importanti.

Ringraziamenti

Si ringrazia l'Associazione Macchine Matematiche per il materiale fornito.

Bibliografia

AA.VV. UMI (2004). In G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, & O. Robutti (Eds.). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni stampatore.

Barbieri, S. & Maschietto, M. (2012). Attività nel laboratorio di matematica: costruzioni con riga e compasso. In O. Robutti e M. Mosca (a cura di) *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DI.FI.MA.2011,* (pp. 181-191). Torino: Kim Williams Books.

Bartolini Bussi, M.G. (2010). Quadro di riferimento. In USR E-R, ANSAS e IRRE E-R, Regione Emilia-Romagna, F. Martignone (ed.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna, vol. 2*, 40-55. Napoli: Tecnodid Editrice.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M.A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, Vol. 32 A-B, N.3, 269-294.

Bartolini Bussi, M. G. & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana UMI Convergenze, Milano: Springer.

Bettini, G., Facchetti, C. & Maschietto, M. (2012). *Costruzione di significati nel laboratorio di matematica: attività con la macchina matematica per la simmetria assiale.* In O. Robutti e M. Mosca (a cura di) *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DI.FI.MA. 2011,* (pp. 193-204). Torino: Kim Williams Books.

Cerulli, M., Pedemonte, B. & Robotti, E. (2007). Funzionalità Didattiche: uno strumento operativo per progettare ed analizzare esperienze di laboratorio. In R. Garuti, A. Orlandoni e R. Ricci (eds.), *Il laboratorio scientifico-matematico: suggerimenti ed esperienze, Innovazione Educativa*, Anno 2, Inserto allegato al n. 8 - Ottobre 2007, 32-37.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Il Giardino di Archimede (2001). *Pitagora e il suo teorema*. Firenze: Edizioni Polistampa.

PERCORSO DI TIROCINIO TFA SU ONDE E OTTICA FISICA: ASPETTI FISICI E MATEMATICI SI INTRECCIANO

Elisa Gentile
CIFIS Piemonte – TFA Ordinario 2012 A049

Premessa

L'articolo descrive un'esperienza didattica realizzata nel corso del Tirocinio Formativo Attivo in una classe IV del Liceo Scientifico P.N.I dell'I.I.S. "Majorana" di Moncalieri, su un percorso di modellizzazione di fenomeni fisici a partire da esperienze di laboratorio.

Finalità del percorso è stata la costruzione di significati e di leggi fisiche relative alle onde e all'ottica fisica a partire da attività di laboratorio in cui gli allievi sono protagonisti nell'esplorazione e nella congettura, attraverso la modellizzazione dei fenomeni osservati sia mediante strumenti matematici, sia con l'aiuto della tecnologia.

Quadro teorico di riferimento

Negli ultimi decenni, gli studi nell'ambito della Didattica Generale non considerano più l'apprendimento come diretta conseguenza dell'insegnamento, ma spostano l'indagine dai processi di apprendimento e dai risultati (prodotti) degli allievi ai processi di insegnamento, parlando dunque di insegnamento-apprendimento. Si sottolinea inoltre l'importanza di ciò che Shulman (1987) chiama Teacher's Thinking, cioè tutto l'insieme di valori, convinzioni, idee relative alla disciplina e all'insegnamento stesso che incidono su ciò che accade in classe. Le recenti scoperte nel campo delle neuroscienze aprono interessanti scenari di ricerca in cui l'embodiment ha una posizione privilegiata (Rivoltella & Rossi, 2012; Arzarello & Paola, 2007).

Si sottolinea, inoltre, che alla scienza dell'insegnamento non si richiedono tanto modelli precostruiti e statici da replicare in classe, quanto indicazioni per progettare e gestire l'azione didattica (Rivoltella & Rossi, 2012). L'insegnante assume così un nuovo ruolo, quello del professionista riflessivo (Schön, 1993). La progettazione ricopre dunque un ruolo fondamentale, sia nell'accezione più tradizionale, quella curricolare, sia in quella a cui occorrerebbe tendere, cioè quella per competenze. La didattica per competenze, infatti, risolve alcuni problemi relativi alla parcellizzazione degli apprendimenti tipica di una progettazione curricolare e coinvolge l'allievo in situazioni la cui funzionalità è evidente (Maccario, 2012).

Nell'ambito delle didattiche disciplinari si riflette in particolar modo sulla situazione attuale dei nostri studenti rilevata dalle indagini internazionali, in relazione agli standard attesi e sul mandato che la scuola ha rispetto alla formazione degli individui come cittadini del mondo (Nigris, 2012; Michelini, 2007, Fierli, 2007).

Le discipline scientifiche sono chiamate dunque a creare una base culturale solida, per porre rimedio a ciò che Michelini (2007) definisce "analfabetismo scientifico". Spesso la Fisica viene vista dagli studenti come una fortezza inespugnabile (Euler, 2004), neppure meritevole dello sforzo che richiederebbe il tentativo di conquistarla. Agli occhi degli studenti la Fisica dunque appare astratta, noiosa, difficile, non attraente, non particolarmente utile e scollegata dalla realtà (Euler, 2004), che parla di cose che non esistono (punti materiali, gas perfetti, …) mediante leggi difficili che gli allievi non padroneggiano (Michelini, 2007). Solo pochi riescono a ottenere la chiave per accedere a tale fortezza. Per comprendere queste considerazioni occorre quindi tenere conto, non solamente dei vissuti degli insegnanti, ma anche di quelli degli studenti.

Secondo Euler (2004) uno dei principali problemi dell'insegnamento della Fisica è l'approccio che viene utilizzato. Molti insegnanti si preoccupano di trasmettere conoscenza fattuale ("sapere cosa"), mentre l'approccio del "sapere come" e "sapere perché" viene trascurato, facendo fallire l'applicazione delle conoscenza in nuovi contesti e lo svilupparsi di competenza. Michelini (2007) riconosce nel mancato collegamento con l'esperienza quotidiana una delle principali cause delle difficoltà di apprendimento in questo campo.

L'insegnamento della fisica non si deve quindi ridurre alla presentazione ed elencazione di risultati e leggi, come risposte a domande non poste (Michelini, 2007). Rappresentano punti essenziali per la costruzione di conoscenza scientifica l'esplorazione sperimentale e il coinvolgimento personale nell'interpretazione dei fenomeni e nella loro modellizzazione, al fine di impostare una didattica che sia in grado di "educare l'intelligenza" (Michelini, 2004).

Dalle indagini effettuate sulle scuole italiane emerge come la lavagna e le modalità didattiche tradizionali come la lezione frontale siano ancora largamente utilizzate (Fierli, 2007), accompagnate da una scarsa presenza di attività sperimentali. La ricerca in didattica della Fisica si è dunque concentrata molto sulle attività pratiche, l'operatività e il laboratorio (Michelini, 2007). Laboratorio che non necessariamente significa un luogo separato, un'aula attrezzata in cui svolgere attività diverse da quelle che si propongono nell'aula tradizionale: è un laboratorio che pervade tutta la scuola e coinvolge anche discipline differenti.

Con un approccio di questo tipo la conoscenza viene dunque costruita in modo attivo dal singolo allievo attraverso l'esperienza e la personale interpretazione del mondo (Michelini, 2007), ma anche dalla "comunità di pratica" cioè il gruppo di persone che apprendono insieme e insieme costruiscono conoscenza condivisa (Wenger, 1998).

L'uso del laboratorio e delle attività laboratoriali costituisce un punto di partenza per aiutare i futuri cittadini ad acquisire competenze essenziali per la vita. Il termine laboratorio fa pensare a un coinvolgimento del corpo e della mente, mentre la lezione richiama una partecipazione unicamente mentale (Paola, 2007). In laboratorio gli studenti osservano, fanno esperienza, producono e validano ipotesi e teorie, attivano processi risolutivi e comunicativi. Al laboratorio segue poi la lezione, cioè la fase di istituzionalizzazione e sistemazione, sotto la guida di un esperto, delle conoscenze e competenze utilizzate nelle attività precedenti (Paola, 2007).

La modalità di apprendimento mediante attività pratiche è ciò che Antinucci (2001) ha descritto come Apprendimento Percettivo-Motorio, che risulta più duraturo nel tempo e più radicato negli studenti rispetto a un apprendimento solamente di tipo Simbolico-Ricostruttivo.

Rispondere alle domande "perché", "cosa accadrà se" (Arons, 1992) rappresenta quindi l'attività che coinvolge in prima persona gli studenti come "ricercatori" e offre una visione della disciplina più aderente alla realtà.

Il laboratorio fa da protagonista in una nuova impostazione della didattica della Fisica che postula varie modalità di apprendimento, che siano motivanti, attive, costruttiviste, contestualizzate, attuate anche mediante lavori di gruppo. Occorre trovare un equilibrio tra le due modalità: quella "instruction-oriented" caratterizzata dall'idea di materia di studio, trasmissione di contenuti e lavoro individuale e quella "construction-oriented" i cui concetti cardine sono quelli di processo, contestualizzazione degli apprendimenti, costruzione del sapere, apprendimento collaborativo (Euler, 2004).

La nuova impostazione vede modificarsi sia il ruolo dell'insegnante, sia quello dell'allievo che si assume le responsabilità del processo di apprendimento (Euler, 2004). Il ruolo del docente passa da trasmettitore di conoscenze a mediatore e allestitore di situazioni di apprendimento, che coinvolgono gli studenti cognitivamente e personalmente (Euler, 2004; Maccario, 2012). L'insegnante influenza il tipo di apprendimento che propone, attraverso le scelte didattiche effettuate, i commenti e gli atteggiamenti che usa in classe, ciò che decide di richiedere agli studenti nelle prove di valutazione (Arons, 1992).

Affinché il processo di insegnamento-apprendimento sia efficace occorre partire dalle conoscenze che gli studenti hanno e impostare su di esse il ragionamento scientifico (Fiorentini, 2004), l'esperienza concreta diventa fattore essenziale per la comprensione dei fenomeni fisici e la padronanza dei termini. Occorre coinvolgere gli allievi in modo che manifestino le loro idee intuitive e siano stimolati a spiegare il perché dei fenomeni, anche guidati da opportune domande dell'insegnante (Arons, 1992; Michelini, 2007). Imparare ad argomentare in modo scientifico sviluppa e allena lo spirito critico degli allievi (Pugliese, 2001) e costituisce uno degli obiettivi da perseguire nel processo di insegnamento-apprendimento.

Attraverso la didattica occorre far percepire agli allievi che Matematica e Fisica sono strettamente legate, in quanto il mondo fisico è organizzato in forme che sono strutture matematiche e possiamo farne una descrizione e rappresentazione attraverso la modellizzazione fisica e matematica (Balzano, 2007).

Idee chiave del tirocinio

Le attività proposte durante il mio Tirocinio Attivo erano volte a scardinare la logica di laboratorio di fisica "passivo" e portare nuovi stimoli, rendendo gli studenti coinvolti in prima persona nelle attività di scoperta e congettura. Invece di introdurre i contenuti teorici in classe e poi verificarne l'esattezza in laboratorio, si è partiti al contrario, seguendo ciò che accade normalmente quando si fa ricerca: prima la sperimentazione, le congettura e poi la formulazione della legge fisica e del modello matematico.

Gli obiettivi iniziali sono stati fissati in termini di obiettivi specifici di apprendimento, nell'ottica di una progettazione curricolare, e in termini di competenze (competenza attesa, situazione-problema, apprendimenti-risorsa) nell'ottica di una progettazione per competenze. Sulla base delle recenti ricerche in didattica, ho ritenuto opportuno inserire nella programmazione del mio intervento di tirocinio una parte per competenze (seppur piccola nel complesso), che ha interessato maggiormente la seconda attività di laboratorio, mentre il resto della progettazione è stato di tipo curricolare.

Il filo conduttore che ho cercato di avere durante le lezioni e le attività è rappresentato dall'idea, per me fondamentale, che gli allievi non siano meri ricevitori di conoscenze trasmesse "dall'alto" dal docente, ma che sia importante costruire insieme tali conoscenze. Per questo motivo le lezioni sono state impostate con largo uso del laboratorio, sia quello reale, fuori dalla classe, sia quello costruito mediante un approccio laboratoriale alla didattica. Le lezioni sono state condotte, per quanto possibile, attraverso il dialogo insegnante-allievi, cercando di far emergere da loro le idee chiave da utilizzare o le osservazioni utili per la comprensione. La parte teorica ha seguito le attività di esplorazione (sia in laboratorio, sia in classe) ed è stata sistematizzata nel corso di discussioni collettive con gli allievi per estrapolare le leggi e fornire spiegazioni ai fenomeni. Ritengo infatti che sia importante comprendere il significato di ciò che si utilizza, sentire l'esigenza di trovare una legge che spieghi una certa regolarità evidenziata in un esperimento, piuttosto che imparare a memoria formule "piovute dal cielo", che ben presto sono destinate ad essere dimenticate.

Fase preliminare: la costruzione della comunità di pratica

Per fare in modo che gli allievi parlassero un linguaggio comune, riconoscendosi come membri attivi del processo di apprendimento e costituissero ciò che Wenger (1999) chiama comunità di pratica, ho iniziato l'attività con la co-costruzione di una mappa concettuale che richiamasse le idee comuni in merito alle onde, fondando quindi i nuovi apprendimenti sulle risorse già in possesso degli allievi. Gli allievi hanno utilizzato dei foglietti post-it per elencare parole chiave e concetti, che abbiamo raccolto sulla lavagna.

Per aiutare il pensiero critico e la sistematizzazione delle basi comuni, è stato poi chiesto agli allievi di ordinare i foglietti, contenenti le parole emerse dai compagni, secondo criteri scelti mediante la discussione a gruppi (Figura 1).

Figura 1

Questo ha consentito di costruire una base di conoscenze e linguaggio comuni, prerequisito essenziale alla costruzione di sapere come comunità di pratica.

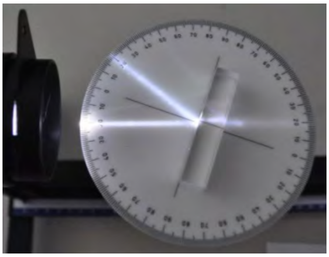
Laboratorio "tradizionale"

La prima attività di laboratorio proposta, di impostazione più tradizionale, ha riguardato i fenomeni della riflessione su specchi piani, concavi e convessi, e della rifrazione.

Gli allievi, suddivisi in gruppi eterogenei, hanno potuto eseguire esperimenti facendo uso di piccoli banchi ottici. Il lavoro di esplorazione, esecuzione dell'esperimento e raccolta dei dati è stato supportato da schede di laboratorio semi-strutturate, con cui gli allievi sono stati stimolati all'argomentazione e alla formulazione di congetture attraverso domande aperte.

Si è infatti deciso di non fornire rigidi protocolli da seguire, ma di lasciare agli allievi "il bello della scoperta e dell'esplorazione", coinvolgendoli in prima persona anche nell'allestimento dell'esperimento. Per tale ragione i contenuti teorici, relativi alle esperienze di laboratorio effettuate, sono stati introdotti solo successivamente, nella fase di discussione dei risultati in classe, in cui è stato possibile istituzionalizzare e costruire collettivamente il sapere.

Utilizzando gli esempi concreti sperimentati in laboratorio abbiamo ricavato la legge della riflessione (Figura 2) e la legge di Snell per la rifrazione, misurando con la carta millimetrata e ricavando il rapporto tra gli indici di rifrazione dei due mezzi (Figura 3).



Angolo Incidenza α_{Inc}	Angolo Riflessione α_{Rifles}
30°	30°
45°	45°
90°	90°

Figura 2

Lunghezza AB (cm)	Lunghezza CD (cm)	Rapporto AB/CD
0	0,3	0
2,6	1,7	1,53
5	3,2	1,56
3,8	2,3	1,65
1,8	1,2	1,[illegible]5

Figura 3

Abbiamo inoltre effettuato esperimenti per comprendere il significato di "angolo limite", cioè l'angolo oltre il quale non si osserva più il raggio rifratto, ma solo il raggio riflesso e si osserva allora il fenomeno della riflessione totale (Figura 4).

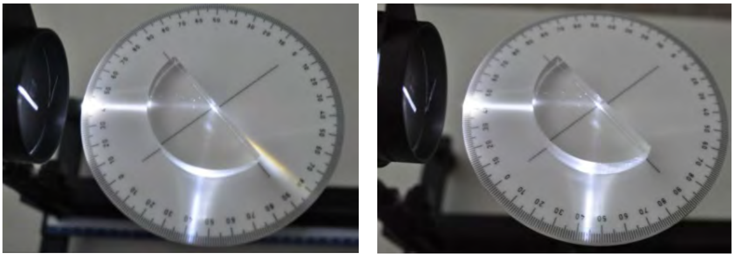


Figura 4

Abbiamo osservato la riflessione totale anche con un prisma retto, come illustrato in Figura 5: un raggio luminoso viene fatto incidere a 90° sull'ipotenusa del prisma, penetra senza essere deviato e incide a 45° sul cateto posteriore. Dato l'alto indice di rifrazione del prisma, questo angolo di incidenza è superiore all'angolo limite per cui si osserva solo il raggio riflesso e la stessa situazione si verifica all'incidenza sull'altro cateto. Gli allievi in una fase precedente a quanto mostrato in Figura 5 hanno indagato il comportamento del raggio riflesso e rifratto facendo incidere il raggio su un cateto e individuando così il valore dell'angolo limite (Figura 6)

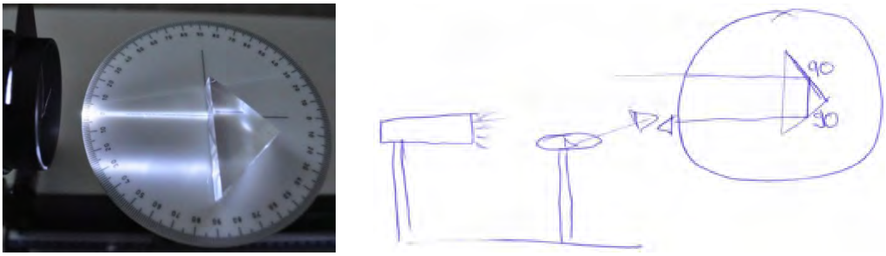


Figura 5

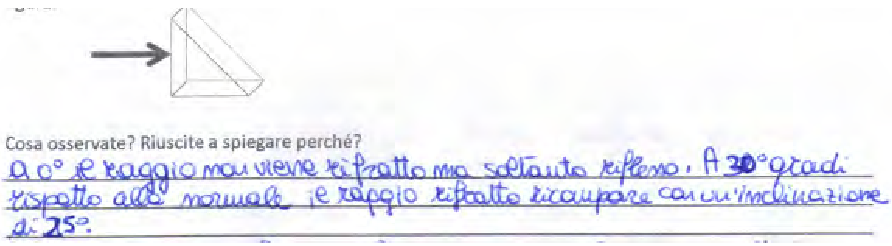


Figura 6

Alla sperimentazione in laboratorio di fisica è poi seguita una fase di esplorazione e modellizzazione dei fenomeni della riflessione attraverso il software GeoGebra, che gli allievi hanno utilizzato lavorando a gruppi nel laboratorio di informatica (Figura 7).

Partendo dalla lettura di un articolo apparso su l'Espresso il 3 luglio 2007, che narra la leggenda dell'assedio di Siracusa e l'esperimento realizzato per ricreare gli specchi ustori, è stato così possibile richiamare alcune proprietà focali delle coniche e rivederle sotto una differente luce.

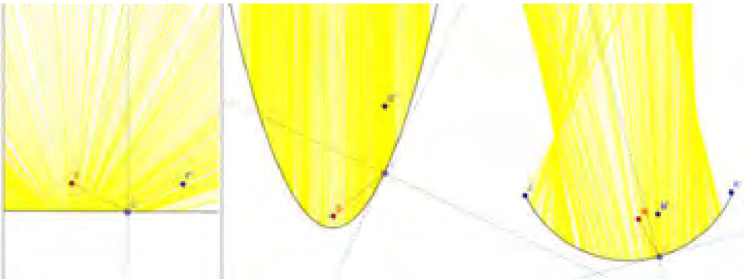


Figura 7

Laboratorio "per competenze": le situazioni-problema

La piccola parte di progettazione per competenze ha riguardato in particolare due attività svolte in laboratorio di fisica: l'esplorazione sulla dispersione della luce e sul fenomeno della birifrazione.

Agli allievi, suddivisi a gruppi, è stato fatto osservare un fenomeno ed è stato chiesto loro di argomentare e congetturare, sulla base delle conoscenze sino ad allora costruite (rifrazione, riflessione e rispettive leggi). Sono state dunque richieste la spiegazione del fenomeno osservato e la progettazione di uno o più esperimenti che avvalorassero le congetture fatte. Gli allievi avevano a disposizione i materiali e gli strumenti utilizzati nelle precedenti attività con il banco ottico e ogni altro materiale presente nel laboratorio, da richiedere al tecnico.

I due fenomeni da osservare sono stati la dispersione della luce attraverso un prisma e il comportamento di un cristallo di calcite spato d'Islanda quando viene sovrapposto a un foglio scritto (Figura 8).

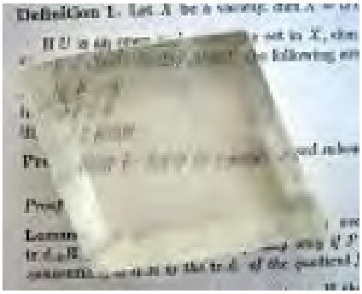


Figura 8

La seconda situazione-problema ha coinvolto maggiormente gli studenti in quanto gli ha permesso di utilizzare gli apprendimenti sino ad allora costruiti collettivamente (gli apprendimenti risorsa) per fare delle ipotesi sul fenomeno osservato, progettare un esperimento (Figura 9) che confermi o confuti le ipotesi fatte e concludere con la spiegazione del fenomeno e quindi una nuova costruzione di significato.

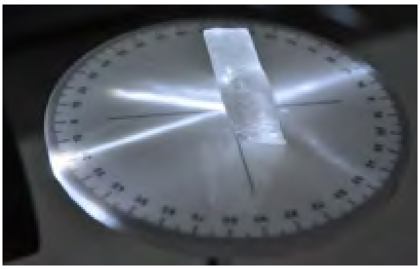


Figura 9

La risposta degli allievi a questo tipo di esperienza è stata molto varia, molti hanno riscontrato una differenza rispetto all'impostazione del laboratorio a cui erano abituati, alcuni hanno evidenziato il pregio di essere protagonisti nella ricerca, altri hanno sottolineato come il non essere particolarmente guidati nelle attività li abbia fatti sentire un po' troppo autonomi. Le sensazioni degli allievi in merito alle situazioni-problema possono portarci a concludere che sia questa una delle direzioni in cui lavorare maggiormente per far sì che i nostri allievi diventino veramente consapevoli della disciplina, così come essa si presenta e viene vissuta nella realtà e non solamente come appare attraverso il "filtro" dei libri di testo.

La tecnologia in classe

Dal momento che la dotazione tecnologica della scuola in cui ho svolto il tirocinio è molto buona (LIM, laboratori attrezzati, ...) è stato possibile fare largo uso delle tecnologie in classe, sia nella fase di esplorazione di fenomeni non facilmente ricostruibili in laboratorio, sia nella fase di costruzione collettiva dei significati, sia nella modellizzazione dei fenomeni.

La presenza della LIM nella classe ha consentito l'uso di applet interattive (afferenti al progetto PhET della University of Colorado at Boulder) per l'esplorazione di fenomeni quali l'interferenza (Figura 10), la diffrazione e l'identificazione delle caratteristiche principali dei fenomeni ondulatori (Figura 13).

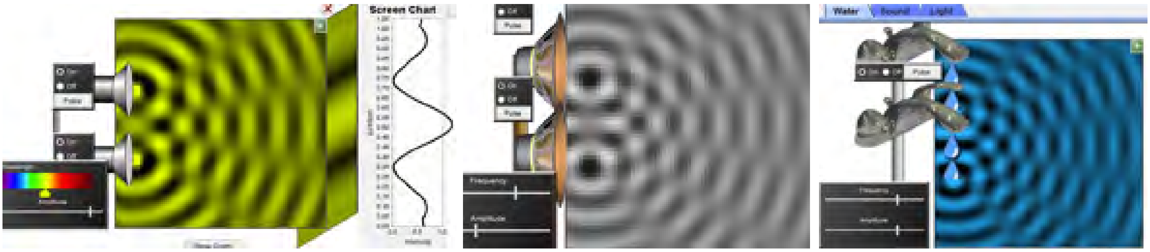


Figura 10

Utilizzando le applet interattive e modellizzando i fenomeni attraverso il software GeoGebra è stato possibile riscontrare delle similarità nelle caratteristiche che descrivono i fenomeni ondulatori, e capire come ad esempio l'interferenza o il principio di sovrapposizione (Figura 11) si verifichino per ogni perturbazione ondulatoria, indipendentemente dalla sua natura.

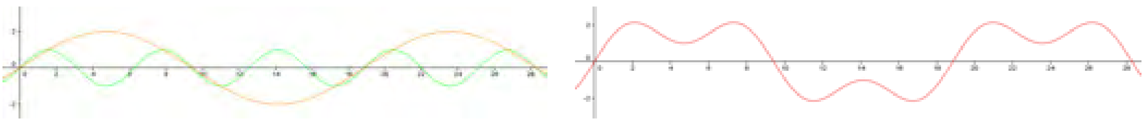


Figura 11

Il software GeoGebra è stato inoltre largamente utilizzato per spiegare il fenomeno dei battimenti (Figura 12) e per introdurre alcuni cenni sulla fisica della chitarra, sulle armoniche e sull'analisi di Fourier.

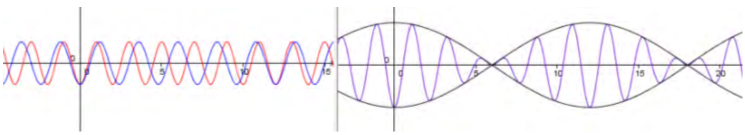


Figura 12

Fotografare le onde

L'uso delle applet interattive è stato fondamentale per l'attività di analisi delle caratteristiche principali per la descrizione di un fenomeno ondulatorio. Utilizzando l'applet "waves on a string" (Figura 13) è stato possibile costruire i significati di ampiezza, frequenza e periodo legandoli alle configurazioni concrete assunte dalla corda, facendo variare dinamicamente i differenti parametri.

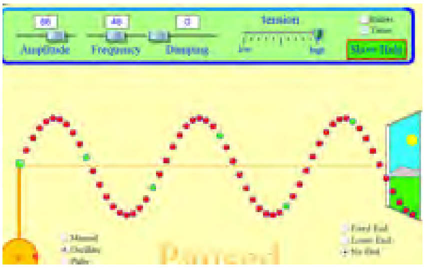


Figura 13

Attraverso la discussione collettiva e con il supporto dell'applet è stato possibile prendere coscienza della dipendenza della funzione d'onda da due variabili: lo spazio e il tempo. Evidenziando come la loro variazione influenzi l'onda osservata.

Concentrando l'attenzione sulla variabile tempo, si è costruito il significato di "fotografia a tempo fissato" (cioè il consueto significato di fotografia) che mostra la disposizione nello spazio della perturbazione ondulatoria in un fissato istante di tempo. Analogamente, concentrando l'attenzione su uno degli elementi verdi della corda dell'applet in Figura 13, è stato possibile costruire il significato di "fotografia a spazio fissato", che mostra l'evoluzione temporale del dato elemento di spazio fissato (Arons, 1992). In tal modo si è reso chiaro agli allievi come la funzione che descrive un'onda dipenda in realtà da due variabili: lo spazio e il tempo.

Attraverso la partecipazione degli allievi alla discussione, è stato possibile ricavare l'espressione della funzione d'onda come funzione in due variabili e mostrare come fissare una delle due significhi esattamente "fare le fotografie" di cui si era parlato prima.

$$\varphi(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

Si è dunque compresa la duplice rappresentazione possibile (spazio-temporale) e si è introdotta l'idea di superficie come grafico di una funzione in due variabili.

Si è inoltre discusso, mostrando agli allievi una rappresentazione della funzione d'onda con Sage (un software simile a Maple), del significato dell'azione "fare una fotografia" a spazio o a tempo fissato e del suo legame con le sezioni della superficie con opportuni piani, su cui ritrovare esattamente la "fotografia" che si aspetta (Figura 14).

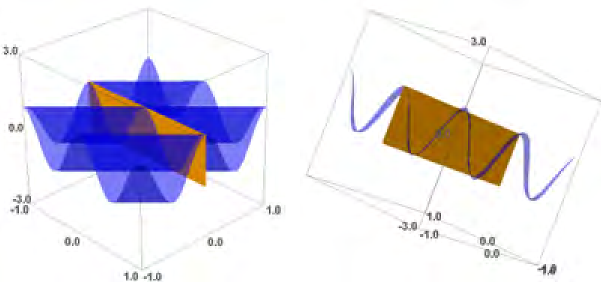


Figura 14

Conclusioni

L'idea di modello matematico ha accompagnato tutta la trattazione, rappresentando la meta a cui tendere per organizzare in modo coerente e completo le evidenze empiriche osservate e le leggi ipotizzate. Grande importanza è stata data alla Istituzionalizzazione delle conoscenze e competenze costruite attraverso le attività di laboratorio.

Gli argomenti trattati ben si prestano a una visione interdisciplinare fisico-matematica. Sono state dunque evidenziate le potenzialità degli strumenti matematici nella rappresentazione dei fenomeni fisici, anche attraverso l'attività svolta in laboratorio informatico con l'uso del software GeoGebra per modellizzare i fenomeni della riflessione su specchi piani e non, e ritrovare alcune proprietà focali delle coniche.

L'attività di laboratorio è risultata particolarmente utile per stimolare e coinvolgere i più deboli. Essendo stata organizzata come attività di esplorazione, prima di aver affrontato la teoria, ha concesso a tutti gli allievi di partire da una base pressoché simile, senza l'evidenziarsi delle consuete discrepanze tra i "più studiosi" e i "meno studiosi".

Il coinvolgimento in prima persona degli allievi nel processo di apprendimento ha dato l'opportunità ai ragazzi solitamente meno coinvolti o più deboli di emergere e assumere, in alcuni casi, ruoli di leadership all'interno del gruppo di lavoro.

La costruzione del sapere attraverso la discussione e il lavoro a gruppi ha permesso la creazione di una vera e propria comunità di pratica, caratterizzata da un set di esperienze e linguaggi comuni, e da un sapere costruito in maniera collettiva, in cui ogni allievo ha potuto offrire il suo contributo.

L'uso del laboratorio di fisica, unitamente ad attività di tipo laboratoriale e percettivo-motorio svolte in classe (con le molle slinky, con i diapason, …) e all'uso delle tecnologie (LIM, applet interattive, GeoGebra, Sage…) ha concesso un apprendimento interdisciplinare e maggiormente radicato negli allievi, lavorando sia sul piano del "sapere" sia su quello del "saper fare".

Bibliografia

AA.VV. (1995). *Fisica a cura del Physical Science Study Committee (PSSC)*. Bologna: Zanichelli

Antinucci, F. (2001). *La scuola si è rotta : perché cambiano i modi di apprendere*. Roma: Editori Laterza.

Arons, A. B. (1992). *Guida all'insegnamento della fisica*, Bologna: Zanichelli

Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 17-24, Seoul

Balzano, E. (2007). Concetti e competenze matematiche nella modellizzazione di fenomeni fisici. La multi-rappresentazione nello studio del moto. *Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica*

Euler, M. (2004). The role of experiments in the teaching and learning of physics. In E. F. Redish & M. Vicentini (ed.) *Research on Physics Education*. Amsterdam: IOS, 175-221

Fierli, M. (2007) Mettere indagine e progetto al centro della didattica delle scienze. In *Innovazione Educativa*, Numero 8, ottobre 2007

Fiorentini, C. (2004). Il ruolo del laboratorio nell'insegnamento scientifico. Aspetti epistemologici, psicopedagogici e didattici, in *Scuola e Didattica*, n. 6, 2004, 35-38.

Maccario, D. (2012). *A scuola di competenze : verso un nuovo modello didattico*. Torino: SEI.

Michelini, M. (2004). La didattica della fisica nelle esperienze internazionali, *Convegno Regionale Educazione Scientifica e Ricerca Didattica*, Matera 7 ottobre 2004

Michelini, M. (2007). Educazione scientifica ed approcci di ricerca in didattica della fisica*, Seminario di studi "Cultura Scientifica e Ricerca Didattica"*, Reggio Emilia 9-10 Febbraio 2007

Nigris, E. (2012) Didattica e saperi disciplinari: un dialogo da costruire. In P. C Rivoltella & P. G Rossi (ed.). *L'agire didattico: manuale per l'insegnante*. Brescia: La scuola.

Paola, D. (2007). Dal laboratorio alla lezione: descrizione di un esempio, in *Innovazione Educativa*, Numero 8, ottobre 2007

Pugliese, J.S. (2001). Argomentare su temi scientifici nella scuola, in *La Fisica nella Scuola*, XXXIV, 2, 2001

Rivoltella, P. C. & Rossi, P. G. (2012). *L'agire didattico: manuale per l'insegnante*. Brescia: La scuola.

Robutti, O. (2003). Il senso del grafico con la mediazione delle tecnologie: metafore attivate e significati costruiti. *La Matematica e la sua Didattica*. vol. 2, 173-195 ISSN: 1120-9968.

Schön, D. A. (1993). *Il professionista riflessivo*, Edizioni Dedalo, Bari. Trad. it. di Angela Barbanente, The reflexive Practitioner, Basic Book, New York, 1987.

Shulman, S. L. (1987). *Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform*, Harvard Educational Review, vol. 57, n°1, 1-21.

Violino, P. & Robutti, O. (1995). *La fisica e i suoi modelli Volume 3*. Bologna: Zanichelli.

Walker, J. (2010). *Corso di fisica Volume 2: Termologia. Onde. Relatività*. Linx Edizioni, Pearson.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, Meaning and Identity*. Trad. it. Comunità di pratica. Apprendimento, significato e identità. Milano: Cortina, 2006

Sitografia

http://phet.colorado.edu/
http://espresso.repubblica.it/dettaglio/eureka-archimede-ha-ragione/1672232

L'INTERESSE COME 'MOLLA' VERSO LA SCOPERTA DELLA FISICA

Daniela Marocchi[1], Marta Rinaudo, Enrica Ruffino[2]
[1]Dipartimento di Fisica - Università di Torino,
[2]Istituto d'Istruzione Superiore Baldessano Roccati, Carmagnola (TO)

Premessa

Presentiamo il percorso didattico sviluppato, durante l'anno scolastico 2012-13, nella classe II A della sezione agraria dell'Istituto Baldessano Roccati di Carmagnola. Il progetto si è posto l'obiettivo di introdurre concetti fisici partendo da un nucleo di interesse, centrato su problematiche reali al fine di suscitare curiosità nello studente. L'idea portante è che interesse e curiosità, ben incanalati dall'azione didattica dell'insegnante, possono permettere di introdurre concetti di fisica anche complessi, recepiti a questo punto dallo studente non come formule a se stanti, ma come strumento per comprendere meglio la realtà che lo circonda.

L'argomento scelto per suscitare l'interesse è stato, in questo caso, il funzionamento e l'utilizzo del pannello fotovoltaico: esso ha richiesto l'approfondimento di tematiche tecniche (a partire dalla definizione di corrente, tensione e montaggio di un circuito), di tematiche prettamente fisiche (conversione dell'energia e concetti base dell'elettricità) e di tematiche economiche (costi, vantaggi e svantaggi, sviluppi futuri).

Il progetto

Il progetto presentato consiste di una parte sperimentale e di una parte teorica, ambedue elaborate a partire dal tema centrale dell'effetto fotovoltaico.

Si è scelto di partire dalle attività di laboratorio: si sono introdotti così i concetti fisici di base e gli studenti hanno compreso ed utilizzato, senza imparare a memoria le formule, le relazioni che legano le grandezze fisiche in gioco. Particolare attenzione è stata posta al corretto utilizzo delle unità di misura delle grandezze utilizzate, punto che risulta di norma particolarmente critico.

Il percorso didattico è proseguito proponendo una serie di lezioni frontali per approfondire i concetti introdotti nei laboratori ed ampliarli toccando argomenti ad essi correlati. In particolare alcune lezioni hanno trattato tematiche puramente fisiche con collegamenti ad ambiti diversi (ad esempio il Sole e la sua struttura, la trasmissione dell'energia..); altre lezioni sono state incentrate su tematiche più prettamente tecniche, come gli aspetti pratici di montaggio e i relativi costi di un pannello fotovoltaico.

La partecipazione al progetto non è stata imposta dall'insegnante, ma è stata da lei presentata ai ragazzi che hanno deciso di partecipare, sentendosi coinvolti così fin dal primo momento.

Gli obiettivi

Il percorso è stato proposto nella sezione agraria dell'Istituto Baldessano Roccati di Carmagnola (To), dove le tematiche energetiche sono rilevanti e percepite degli studenti come importanti e concrete. Di contro, non è di norma sviluppato un particolare interesse verso la fisica.

La scelta di questo tipo di scuola voleva permettere di testare quanto l'interesse suscitato dall'argomento potesse motivare studenti non particolarmente sensibili alla materia che è, in questo caso, 'Scienze Integrate-Fisica' per la quale sono previste 1+1 ore nel solo biennio; in particolare la mancanza di laboratori nella scuola e il poco dialogo con le altre scienze integrate ha sempre reso complesso sviluppare con soddisfazione l'insegnamento della materia.

La scelta dell'effetto fotovoltaico come argomento ha permesso di:

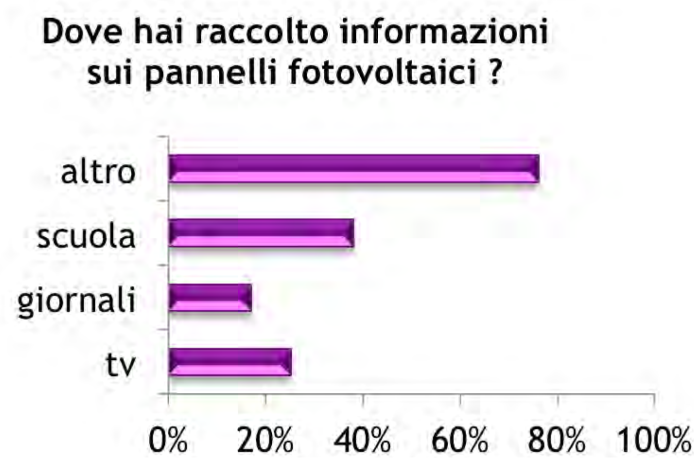
- suscitare interesse e curiosità verso la materia;
- affrontare le tematiche con approccio sperimentale.

Il percorso

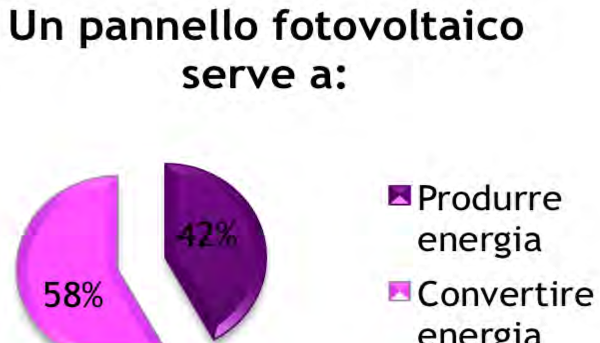
Test preliminare

Per testare l'adeguatezza delle scelte relativamente agli argomenti e verificarne il successivo apprendimento si è proposto un test preliminare con cui si intendeva sondare le conoscenze pregresse e testare l'interesse verso l'argomento proposto. Il test è stato sottoposto agli studenti prima di iniziare il percorso didattico.

Riportiamo di seguito le risposte ad alcune domande del test:



Dal grafico si rileva una percentuale elevata alla risposta "altro"; essa può essere giustificata sia dal fatto che gli studenti abbiano sentito parlare dei pannelli fotovoltaici in famiglia (la loro installazione è in crescita nelle aziende agricole, realtà da cui provengono parecchi degli iscritti all'Istituto Professionale Agrario); sia perché di sicuro è largamente utilizzata la fonte di internet, vista l'età degli intervistati. Ambedue le opzioni però non erano previste in modo esplicito nel test. Rilevante è anche la risposta "scuola", dovuta certamente anche al tipo di istituto in cui si è svolta la sperimentazione.



Questa domanda mirava a verificare la capacità di riconoscere il concetto fisico di 'conservazione dell'energia', sicuramente studiato nella teoria, all'interno di un effetto reale. Successivamente, soprattutto attraverso le attività di laboratorio, si intenderà evidenziare il fenomeno e verificare come l'energia si trasformi, conservandosi.

In questo caso si voleva soprattutto evidenziare l'esistenza di problematiche 'tecniche' legate all'utilizzo di questa 'fonte' alternativa di energia. In particolare con questa domanda ci si riferiva alla diversa quantità di energia solare che può raggiungere il suolo nelle varie giornate/stagioni. Durante la sperimentazione si sono poi evidenziate altre problematiche di cui bisogna tener conto durante l'installazione di un pannello, legate vuoi al materiale usato, vuoi al corretto posizionamento del pannello stesso. In base alle risposte ricevute nel pre-test ci si è resi conto della necessità di sottolineare, durante le lezioni, la presenza di variazioni climatiche e stagionali, argomento che si pensava fosse maggiormente conosciuto dagli studenti.

Formazione dei 'tutor'

Come momento iniziale del percorso, la classe è stata invitata a partecipare al progetto "Tre mattine all'Università" presso il Dipartimento di Fisica di Torino. La partecipazione effettiva era ridotta a quattro studenti che avrebbero svolto contemporaneamente il ruolo di 'cavie' del percorso ideato e, successivamente, di tutor nei confronti dei compagni di classe.

In effetti la possibilità di partecipare ad una iniziativa che vedeva coinvolti, nella sede del Dipartimento di Fisica, studenti provenienti da altre scuole (spesso Licei) di Torino e Provincia ha reso i quattro partecipanti molto fieri e motivati, sia per quanto riguardava il lavoro da svolgere in Università, sia relativamente al compito di tutori al rientro a scuola.

I laboratori

La parte sperimentale è partita con l'introduzione dei concetti di tensione e corrente elettrica, basilari per la comprensione del funzionamento del pannello fotovoltaico; i ragazzi hanno quindi lavorato con dei semplici circuiti, imparando a misurare correnti e tensioni ed a collegarle attraverso la legge di Ohm, introdotta così per via sperimentale. In precedenza un esame dei pannelli posti sul terrazzo del Dipartimento di Fisica e l'osservazione di quali dati venissero raccolti dalle strumentazioni collegate aveva permesso di evidenziare come le grandezze 'tensione' e 'corrente' ed il loro legame fossero basilari per valutare il comportamento dei pannelli stessi.

Sempre sperimentalmente si è ragionato sulla conversione da un tipo di energia ad un altro osservando il comportamento di una lampadina, alimentata con il circuito costruito in laboratorio, che a sua volta agiva su un piccolo pannello fotovoltaico; in figura 1 è mostrato il set-up sperimentale.

E' stato modellizzato il fenomeno reale utilizzando una lampadina come sorgente (Sole) e variando la distanza e l'orientamento del pannello rispetto ad essa. In questo modo è stato compreso pienamente l'effetto di questi due parametri nella situazione reale.

Sempre a partire da quanto veniva osservato, si sono offerti alcuni stimoli relativi ai fenomeni di trasporto dell'energia ed alle caratteristiche fisiche del Sole, che sono successivamente stati sviluppati, sia pure in modo non troppo approfondito, in alcune lezioni proposte dopo i laboratori.

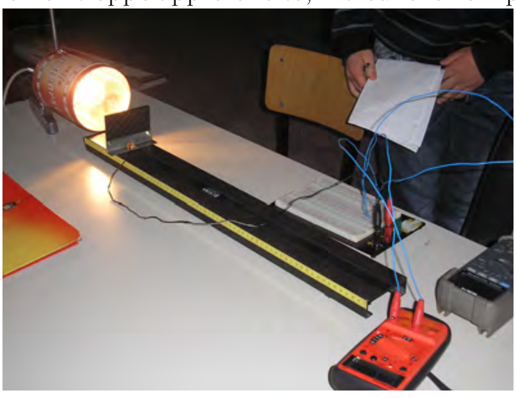


Figura 1: setup sperimentale

Le lezioni

Come già anticipato, nella parte teorica alcune lezioni miravano a sottolineare alcuni concetti fisici/tecnologici strettamente collegati all'effetto fotovoltaico quali: parametri ambientali di cui tener conto nel montaggio di un pannello e bilancio energetico, tipi di pannelli in commercio con relativi costi… Gli studenti presenti a 'Tre mattine' erano stati incuriositi anche dal vedere in Dipartimento pannelli di diverso tipo e posizionamento ed erano stati invitati quindi a riflettere su questi problemi. Anche gli studenti che hanno partecipato solo all'attività in classe erano sensibilizzati poiché parecchi di loro avevano avuto occasione di sentir discutere sull'utilizzo di diverse tipologie di pannelli nelle aziende di famiglia.

Altre lezioni invece hanno avuto un carattere di approfondimento generale, non tecnologico ma scientifico, trattando argomenti di più ampio respiro come ad esempio la lezione introduttiva di fisica solare in cui sono stati esaminati i processi di produzione e di trasporto dell'energia solare.

L'uscita didattica presso il Planetario InfiniTo

Al termine del percorso in laboratorio ed in aula l'intera classe ha partecipato ad una uscita didattica presso il Planetario InfiniTo, dove ha potuto utilizzare un laboratorio da poco inserito nella proposta didattica e riguardante proprio il Sole e la sua relazione energetica con la Terra. Il contenuto del laboratorio non conteneva particolari nozioni extra rispetto a quanto già visto in aula, ma in ogni caso la modalità interattiva e la possibilità di conoscere la ricca realtà del Planetario sono state un valore aggiunto all'esperienza.

La valutazione

Il percorso non voleva essere solo un diversivo o un modo per suscitare interesse, ma aveva anche l'obiettivo di portare alla comprensione di argomenti di fisica inseriti nel programma della classe. E' quindi stato fondamentale sviluppare la metodologia di valutazione che meglio si adattasse al percorso svolto.

La scelta di valutare ogni tappa del percorso, comprese quelle di laboratorio, è stata soddisfatta attraverso la somministrazione di test rapidi, della durata di qualche minuto, al termine di ogni attività sperimentale.

I test rapidi miravano a valutare:

- la comprensione dell'esperimento
- la capacità di risoluzione di un semplice calcolo in cui applicare le formule introdotte
- l'utilizzo delle grandezze fisiche e delle unità di misura
- l'utilizzo della notazione scientifica

Uno dei punti, fondamentale ma spesso misconosciuto dagli studenti, su cui si è deciso di verificare l'apprendimento è il corretto utilizzo delle unità di misura delle grandezze fisiche in gioco; di conseguenza questo aspetto è stato riproposto e valutato anche durante il test di verifica finale con un quesito che chiedeva di collegare alcune grandezze fisiche alla relativa unità di misura.

Dall'analisi delle risposte risulta che l' 80 % degli studenti ha collegato correttamente tensione, corrente e resistenza alla corrispondente unità di misura. Questo risultato è soddisfacente e sottolinea ancora una volta quanto sia utile per l'apprendimento introdurre un concetto, ripreso poi nelle lezioni, attraverso le attività di laboratorio.

Per quanto riguarda le lezioni, sono anch'esse state testate con test rapidi che però sono stati somministrati all'inizio della lezione successiva per permettere agli studenti di assimilare i concetti introdotti e vedere quanto fosse stato da loro compreso e memorizzato.

Valutazione dell'esperienza

Per valutare l'esperienza proponiamo quanto verificato dall'insegnante, quanto è emerso dal comportamento degli studenti e come l'esperienza è stata assunta dalla scuola come momento da valorizzare verso il territorio.

Il riscontro dell'insegnante

Il progetto è stato presentato alla classe dall'insegnante che ha spiegato le tappe di cui si sarebbe composto il percorso, facendo poi decidere agli studenti se volessero partecipare o meno. Questa scelta è stata fatta per permettere agli studenti un'assunzione di responsabilità nei confronti di quella che avrebbe potuto sembrare un'attività avulsa dal resto del percorso scolastico. L'insegnante da parte sua era favorevole ad aderire alla proposta perché conscia, attraverso la sua stessa esperienza didattica, dell'importanza che può avere nello sviluppo del percorso didattico la "cattura degli allievi", ovvero il trovare la strategia migliore per attirare la loro attenzione e suscitare interesse verso la materia insegnata.

La scelta è caduta su una seconda che nell'anno precedente aveva avuto un altro docente di Fisica. L'insegnante attuale quindi non aveva una conoscenza approfondita della classe ed ha ritenuto utile chiedere ai ragazzi di motivare il loro desiderio di partecipare al momento presso il Dipartimento di Fisica. La scelta non è quindi caduta sui 'migliori' dal punto di vista dello stretto rendimento scolastico, ma su coloro che avevano saputo motivare il loro interesse.

La partecipazione anche dell'insegnante all'esperienza presso il Dipartimento di Fisica è servita anche come stimolo per il suo lavoro, in quanto le ha permesso di lavorare con un gruppo ristretto di ragazzi instaurando un rapporto costruttivo attraverso cui elaborare nuove strategie per migliorare l'apprendimento di tutti gli studenti. In particolare sono state elaborate similitudini ed esempi concreti per spiegare le grandezze fisiche in gioco ed esse sono risultate molto utili anche al rientro in classe.

La risposta degli studenti

Il coinvolgimento nella decisione di partecipare ha sicuramente motivato gli studenti, rendendoli interpreti in prima persona e responsabilizzandoli. Anche l'uscita didattica presso il Planetario è stata un momento di crescita che li ha coinvolti nell'organizzazione del tragitto che li ha portati a Torino, dove poi hanno partecipato all'attività assieme a studenti di IV Liceo Scientifico.

La partecipazione alle "Tre mattine all'Università" ha portato ad una crescita per i ragazzi che sono poi diventati i tutors per le attività di laboratorio in classe, in quanto si è sviluppata in loro autonomia nel lavoro di laboratorio ed è aumentata l'autostima personale nel momento in cui è stato loro affidato il compito di aiutare i compagni in classe: questi due aspetti hanno creato un terreno fertile per il loro apprendimento.

Inoltre la fase di lavoro in classe ha visto svilupparsi un lavoro di collaborazione fra pari che è risultato decisamente produttivo.

La presenza di una laureanda in Fisica presso la loro classe li ha resi molto fieri, perché si sono sentiti 'guardati' da una realtà spesso sentita come lontana ed irraggiungibile per la maggior parte di loro.

Il metodo di valutazione ha suscitato interesse anche negli studenti; alla fine dell'anno hanno dichiarato di aver compreso perfettamente il metodo utilizzato dall'insegnante e di non avere quindi recriminazione relativamente alle votazioni ottenute.

Infine, la metodologia adottata si è rivelata adatta anche per uno studente HC ipercinetico; egli in molte ore di lezione non partecipa all'attività di classe ed invece in questo caso ha partecipato in modo attivo ad ogni momento ed è stato anche in grado di utilizzare gli stessi test di valutazione dei compagni.

L'impatto sulla scuola

Riguardo all'impatto che ha avuto il progetto sulla scuola, gli studenti sono rimasti così coinvolti da voler presentare il loro lavoro sia nei momenti di presentazione della realtà scolastica a possibili nuovi alunni, sia al mondo esterno. In particolare la classe:

- ha presentato uno stand sull'energia alla manifestazione "Ambientiamoci" realizzata a scuola il 10-11 maggio 2013
- ha curato la presentazione del lavoro alla manifestazione "Ortoflora", Carmagnola, 6-7 aprile 2013

Conclusioni

Dal punto di vista dell'apprendimento didattico, l'insegnante si è detta contenta di quanto raggiunto dagli studenti come conoscenza e comprensione non solo mnemonica degli argomenti presentati. Il coinvolgimento è stato buono ed il processo di responsabilizzazione ha avuto un output positivo.

La decisione della classe di presentare quanto fatto anche al di fuori dei momenti strettamente scolastici dimostra che ha sentito l'attività come interessante e valida.

Il contatto con la realtà universitaria ha permesso di sentirla più vicina ed interessata a loro, anche se è poco probabile che qualcuno di loro in futuro frequenti corsi universitari.

Quanto all'obiettivo di rendere la fisica una materia viva e di interesse pratico, riportiamo i risultati di un questionario proposto dall'insegnante a fine anno:

- Ti piacciono le materie scientifiche? 65 % Sì
- Ti incuriosisce lo studio della fisica? 88 % Sì

Riteniamo che queste affermazioni, nel contesto scolastico in cui sono nate, siano la migliore risposta alla nostra domanda sull'utilità di percorsi di questo tipo.

Bibliografia

Agliolo Gallitto, A., Fiordilino, E. (2011). *PNLS- Fisica: un percorso di laboratorio sulle tematiche energetiche*. Giornale di Fisica. LII, 4.

Neumann, K., Viering, T., Boone, W.J., Fischer, H.E. (2013). *Towards a Learning Progression of Energy*. Journal of research in science teaching, 50, 2.

Rinaudo, M. (2013). *L'effetto fotovoltaico: un diverso approccio alla didattica della fisica a partire dal 'nucleo di interesse*. Tesi di laurea magistrale in Fisica, Torino.

Sassi, E., Vicentini, M. (2009). Il laboratorio nella didattica della Fisica. Giornale di Fisica. L, 4.

Shih-Yin, L.,Chandralekha, S. (2011). *Challenges in Using Analogies*. American Association of Physics Teachers. 49, 512-513

Solomon, J. (1985). *Teaching the conservation of energy*. Physics education. 20, 165-170

Sito web: http://phet.colorado.edu/it/simulation/photoelectric

IL CONCETTO DI ENERGIA AL LICEO CLASSICO BOTTA DI IVREA

Antonio Prevignano

TFA 2011-2012, Università degli Studi di Torino

Premessa

La comunicazione ha come oggetto la nostra esperienza di tirocinante presso il Liceo Classico "Carlo Botta" di Ivrea, svoltasi nel contesto del Tirocinio Formativo Attivo per l'Anno Accademico 2011-2012 frequentato presso l'Università degli Studi di Torino. Le attività di progettazione e di attuazione del tirocinio a scuola ci hanno impegnato dal 18 marzo al 10 giugno 2013. Intorno a queste attività abbiamo potuto costruire e realizzare un progetto didattico, che abbiamo chiamato «Progetto Energia».

L'esperienza del tirocinio a scuola ha rappresentato per noi un esperienza osservativa, progettuale e attiva, rivolta alle "quattro sfide-chiave della scuola delle competenze:

- mettere in grado gli studenti di utilizzare i saperi appresi, promuovendo lo sviluppo di un pensiero in azione;
- stabilire sinergie tra curricoli scolastici e universo mediale dei ragazzi;
- valorizzare i saperi non formali e informali dei ragazzi;
- raccordare la formazione scolastica a un'idea di futuro." (Trinchero, 2012:10)

Il profilo di competenze che ha costituito il nostro traguardo di apprendimento durante il tirocinio può essere articolato nei seguenti punti:

- Individuare e organizzare contenuti di livello scolastico adeguati al livello scolastico degli studenti.
- Gestire la progressione degli apprendimenti con la progettazione e la realizzazione di sequenze didattiche adeguate ai tempi e al potenziale di risposta degli studenti.
- Gestire la classe e la relazione educativa, aiutando la crescita il più possibile in una condizione di benessere.
- Definire e realizzare percorsi educativi di integrazione fra i soggetti disabili, o con disturbi specifici dell'apprendimento, e i soggetti normodotati.
- Valutare l'apprendimento degli studenti e auto-valutare l'efficacia dei propri interventi didattici.
- Lavorare, anche in gruppo, assumendo responsabilità organizzative, di formazione e auto-formazione.

Progetto didattico

Quadro generale

Così come non è possibile definire un concetto univoco di insegnamento, non è questione, a nostro giudizio, di scegliere una volta per tutte una prospettiva e una logica. Il docente competente deve saper agire in situazioni complesse, scegliendo di volta in volta la prospettiva più adatta alla situazione di insegnamento specifica e operando secondo le logiche vincenti per quella prospettiva.

Lavorare su noi stessi, insegnanti tirocinanti, e sulle nostre competenze ha richiesto non solo azione, ma messa a fuoco della natura della Didattica (Ontologia della Didattica) e del processo di conoscenza che su di essa viene attivato (Epistemologia della Didattica), in modo da riuscire poi a comprendere, interpretare e applicare quanto ci risultasse utile.

Individuata un'ontologia naturale, secondo la quale per Baldacci la Didattica è "volta a cogliere le costanti naturali del processo d'insegnamento-apprendimento, che riposano sulla costituzione biologica dell'uomo" (Rivoltella, Rossi, 2012: 26) e individuata un'ontologia storica dove è "il divenire storico-sociale a determinare le forme concrete e storico-relative assunte dai processi d'insegnamento-apprendimento" (Rivoltella, Rossi, 2012: 27) , d'accordo con Baldacci riconosciamo per la Didattica un'ontologia di carattere complesso, sociale e naturale al tempo stesso.

Dal riconoscimento di un'ontologia complessa discende un vincolo sull'adeguatezza del processo conoscitivo, ovvero dell'epistemologia della Didattica, e la consapevolezza di non poterci restringere a una pura Epistemologia formale, ovvero a una "ricostruzione razionale dell'assetto del sapere e dell'attività scientifica (Giorello, 1994)" (Rivoltella, Rossi, 2012: 30) , né a una pura Epistemologia naturalizzata, chiusa su un'analisi empirica della pratiche d'insegnamento. Viene quindi riconosciuta la necessità di una Epistemologia critica che, "pur serbando un carattere formale, prevede un ruolo anche per le indagini naturalizzate" (Rivoltella, Rossi, 2012: 31) .

La scelta del modello didattico

Avendo noi definito una ontologia e una epistemologia della Didattica, quest'ultima assume il carattere di scienza, il cui oggetto d'indagine è l'insegnamento. Si tratta di un passaggio fondamentale per noi che arriviamo, dopo esperienze di insegnamento tutto sommato istintive, a riflettere sulla natura del nostro agire e ad attingere al sapere scientifico che intorno all'insegnamento si è sviluppato. Dovendo definire la struttura polisemica del concetto di insegnamento, potremmo individuare i seguenti punti:

- il contenuto da insegnare, ovvero le discipline del curricolo formativo;
- l'azione di insegnare, ovvero le condotte con cui l'insegnante cerca di favorire l'apprendimento dei discenti;
- la relazione diretta dell'insegnante con i discenti, ovvero la comunicazione di saperi ai discenti;
- la relazione indiretta dell'insegnante con i discenti, ovvero la comunicazione attraverso la "manner" dell'insegnante, secondo l'espressione di Fenstermacher (Oser, Dick, Patry, 1992:85-108), vale a dire il suo comportamento, i suoi atteggiamenti nei confronti dei discenti.

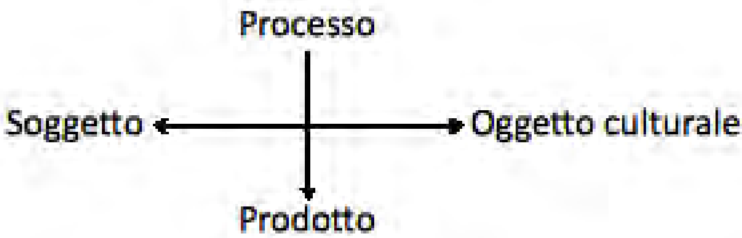
Per non sfrondare, e quindi impoverire, la struttura polisemica del concetto di insegnamento e per una effettiva conoscenza scientifica, ovvero validata da referenze empiriche, Baldacci con Cassirer (Rivoltella, Rossi, 2012: 36) abbandona il tentativo di definire un concetto sostanziale, univoco, di insegnamento, e passa al concetto funzionale. Il concetto-funzione di insegnamento viene rappresentato nella seguente forma:

- *Insegnamento (insegnante, discente, contenuto, medium, azione, contesto…x,y.z)*
- In questo modo il concetto rimane aperto fino a che non sono saturate almeno alcune delle variabili. In altri termini, non esiste l'insegnamento in generale; l'insegnamento è sempre:
- di qualcosa (il contenuto)
- da parte di qualcuno (l'insegnante)
- a qualcun altro (il discente)
- in una data situazione sociale (il contesto)
- attraverso certi modi (l'azione dell'insegnante)
- entro e attraverso certi media (ambiti della comunicazione)

Saturando le variabili si ottiene una specifica forma d'insegnamento. Ad esempio, nel nostro caso: l'insegnamento della fisica da parte del tirocinante a discenti di una classe del quarto anno del liceo classico, attraverso la proposta di un'esperienza di laboratorio. La struttura del concetto funzione si presta anche a realizzare un sistema di relazioni rappresentabili graficamente. Ad esempio dal concetto-funzione:

Insegnamento (soggetto, oggetto culturale, processo interattivo, prodotto)

si ottiene la struttura di rappresentazione crociata, "usata nel campo della Didattica generale (Baldacci, 2004)" (Rivoltella, Rossi, 2012: 40).



Dalle combinazioni delle dominanze tra le coppie polari, Baldacci individua quattro modelli didattici ideali, considerabili anche come possibili forme di curricoli, ovvero di percorsi didattici:

- il modello soggetto/processo, centrato sullo sviluppo dei processi cognitivi superiori degli alunni;
- il modello soggetto/prodotto, focalizzato sulla coltivazione dei talenti personali degli alunni;
- il modello oggetto/processo, la cui finalità è l'arricchimento culturale dei soggetti in formazione;
- il modello oggetto/prodotto, legato alla maturazione delle competenze di base da parte degli alunni.

La nostra scelta per il tirocinio è andata al modello oggetto/processo, la cui finalità è l'arricchimento culturale dei soggetti in formazione, cercando di fornire qualche stimolo di apprendimento che andasse un po' oltre la trasmissione delle sole conoscenze di base.

La progettazione del percorso didattico

Abbiamo quindi impostato il percorso didattico rispondendo alle quattro questioni che il "Modello di Tyler" (Rivoltella, Rossi, 2012: 206) ci propone per la costruzione di un percorso didattico:

1. Quali finalità educative si vogliono perseguire?
    - Saper osservare il mondo che ci circonda cercando di interpretare i fenomeni naturali sulla base delle conoscenze acquisite.
    - Comprendere i procedimenti caratteristici dell'indagine scientifica, che si articolano in un continuo rapporto tra costruzione teorica e realizzazione degli esperimenti, e comprendere le potenzialità e i limiti delle conoscenze scientifiche.
    - Analizzare fenomeni semplici, formulare ipotesi, raccogliere, rappresentare e interpretare i dati ricavati.
    - Formalizzare un problema, individuare gli elementi significativi e le loro relazioni e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione.

2. Quali esperienze di apprendimento possono favorirne il raggiungimento?
    - Elaborazione teorica che, a partire dalla formulazione di alcune ipotesi o principi, gradualmente porta l'allievo a comprendere come si possa interpretare e unificare un'ampia classe di fatti empirici e avanzare possibili previsioni.
    - Indagine sperimentale, sia qualitativa, sia quantitativa, da parte degli allievi a gruppi, elaborazione dei dati e riflessione sull'attività svolta in laboratorio.
    - Applicazione dei contenuti acquisiti attraverso esercizi e problemi, intesi come un'analisi critica del particolare fenomeno studiato e come uno strumento idoneo ad educare gli allievi a giustificare logicamente le varie fasi del processo di risoluzione.
3. In che modo tali esperienze di apprendimento possono essere organizzate?
    - Date le categorie esperienziali viste sopra, ci faremo aiutare dal metodo dei sette passi di Hilda Taba per individuare le esperienze in modo più specifico e organizzarle in uno o più percorsi didattici.
4. Come si può valutare la loro efficacia?
    - Per i percorsi didattici di più ampio respiro utilizzeremo prove sommative semi-strutturate con criteri di valutazione a profilo, costruendo l'identikit dell'allievo che ha appreso con successo.
    - Per i percorsi didattici più semplici utilizzeremo prove sommative strutturate con criteri di valutazione a domain, con una diretta determinazione della valutazione a partire dal punteggio ottenuto (numero di risposte esatte o errate).
    - Durante il percorso il procedere degli apprendimenti sarà monitorato qualitativamente mediante esercitazioni, lezioni interattive, correzione dei compiti a casa.

Seguendo con Sarracino "La progettazione lineare" (Rivoltella, Rossi, 2012: 207) di Hilda Taba abbiamo quindi articolato uno schema operativo in sette passi:

1. Diagnosi dei bisogni
    - Completamento del piano di lavoro della classe (moduli "Il lavoro e l'energia", "Temperatura e calore").
2. Formulazione degli obiettivi
    - Saper risolvere semplici problemi sul lavoro, la potenza, l'energia cinetica e l'energia potenziale.
    - Applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica.
    - Riconoscere e utilizzare le diverse scale di temperatura.
    - Calcolare le dilatazioni lineari e volumiche di solidi e liquidi sottoposti a riscaldamento.
    - Distinguere i diversi meccanismi di trasmissione del calore.
3. Selezione dei contenuti
    - Per questa fase sono stati fondamentali i materiali proposti dal corso TFA "Energia" del professor M. Maggiora e dai testi disciplinari.
4. Organizzazione dei contenuti
    - Per questa fase è stata fondamentale l'organizzazione proposta dal corso TFA "Energia" del professor M. Maggiora.
5. Selezione delle esperienze di apprendimento
6. Organizzazione delle esperienze di apprendimento

- Per queste due fasi sono stati fondamentali i materiali proposti dal corso TFA "Laboratorio di Modellizzazione in Fisica" della professoressa G. Rinaudo e dal volume primo del libro *La Fisica e i suoi Modelli*.

7. Determinazione di ciò che si deve valutare, di come e con quali strumenti è possibile farlo.
   - Per questa fase si è realizzata una "Carta di Studio" redatta secondo le indicazioni dal corso TFA "Docimologia" del professor R. Trinchero.

La valutazione degli apprendimenti scolastici

La valutazione degli apprendimenti gioca un ruolo fondamentale in tutto il ciclo di progettazione, e non soltanto in fase esecutiva o, peggio, di consuntivazione del modulo didattico.

Il progetto di una prova di valutazione, sia che si lavori per obiettivi di apprendimento, sia che si lavori per competenze, si costruisce già nelle fasi iniziali della progettazione didattica e rappresenta un elemento di validazione della bontà del percorso didattico che si sta progettando.

I passi della progettazione di una prova di valutazione sono i seguenti:

1. Definizione degli obiettivi di apprendimento di cui la prova intende rilevare il raggiungimento (o delle competenze di cui la prova intende rilevare gli indicatori).
2. Dichiarazione degli indicatori di avvenuto raggiungimento e degli item corrispondenti sulla prova per ciascun obiettivo di apprendimento (o per ciascuna competenza la situazione problema volta a rilevarne gli indicatori e i relativi profili di competenza che raggruppano gli indicatori della competenza stessa).
3. Esplicitazione dei destinatari della prova, dei prerequisiti e del percorso di apprendimento al quale la prova si riferisce.
4. Esplicitazione della tipologia e della struttura della prova, motivando la scelta.
5. Esplicitazione degli accorgimenti per la somministrazione della prova.
6. Esplicitazione dei criteri di valutazione e delle regole di assegnazione dei punteggi.
7. Rendiconto dell'avvenuta somministrazione della prova.
8. Analisi dei dati emersi dalla somministrazione della prova.
9. Attivazione degli interventi di recupero per gli allievi che non hanno raggiunto gli obiettivi e attuazione delle modifiche alla prova stessa per programmazioni successive.
10. Riflessione sull'esperienza compiuta.

Attuazione

Obiettivi iniziali

Sulla base dei criteri esposti nella parte teorica, abbiamo creato una versione zero del progetto che abbiamo quindi revisionato con l'aiuto del relatore, per la cura degli aspetti di trasposizione didattica, del tutor accogliente, per la cura degli aspetti più legati alla situazione classe, e del tutor coordinatore, per la cura degli aspetti di collimazione con gli obiettivi del tirocinio a scuola nell'economia generale del TFA.

La versione uno del «Progetto Energia» definisce quindi gli obiettivi e i contenuti iniziali del progetto didattico.

Programma dell'unità di apprendimento in tirocinio attivo (8 lezioni di 60 minuti)	
Lezione	Nodi concettuali
1	Lavoro come prodotto scalare **Fxs** (il prodotto scalare definisce il segno del lavoro). Il grafico forza-spostamento. Lavoro come area sul grafico forza-spostamento. Lavoro di una forza costante (esempio forza peso). Lavoro di una forza variabile (esempio forza elastica). Lavoro di una forza variabile generica (metodo degli incrementi finiti)
2	Il significato del segno nel lavoro: lavoro positivo delle forze esterne -> il corpo "assorbe" lavoro lavoro negativo delle forze esterne -> il corpo "cede" lavoro Il lavoro della forza elastica come esempio di lavoro positivo (forza nel verso dello spostamento), negativo (forza opposta al verso dello spostamento) e somma algebrica di lavoro positivo e negativo (quando lo spostamento attraversa la posizione di equilibrio) . La potenza come lavoro nell'unità di tempo. Caso di forza costante: potenza= **Fxv**
3	Il teorema dell'energia cinetica: il lavoro assorbito(ceduto) aumenta(diminuisce) l'energia cinetica del corpo puntiforme. Energia cinetica come caratteristica dei corpi interamente descrivibili da (x,v,a). Dominio di applicabilità (corpi puntiformi, forze anche variabili)
4	Forze conservative: il lavoro di una forza conservativa su un corpo non dipende dal cammino ma solo da posizione iniziale e posizione finale. Energia potenziale: l'energia potenziale è l'energia legata alla posizione del corpo rispetto a una posizione di riferimento. La variazione di energia potenziale fra due punti è pari al lavoro, cambiato di segno, che la forza conservativa fa quando il corpo si sposta da un punto all'altro. Esempio della forza peso (sottolineare la successione di stati di equilibrio con forza risultante **R=0**). Esempio della forza elastica.
5	La legge di conservazione dell'energia meccanica. Il concetto di portafoglio di energia. Il "problem solving" con la legge di conservazione dell'energia meccanica: nel caso del toboga in assenza di attriti, la legge del moto, ovvero lo svolgimento temporale del moto di discesa, dipende dal profilo del toboga. L'energia meccanica invece si conserva e non dipende dallo svolgimento temporale del moto. In un sistema isolato all'interno del quale agiscono solo forze conservative l'energia meccanica è conservata. L'energia meccanica di un sistema isolato dipende dalle posizioni e dalle velocità dei corpi che costituiscono il sistema.
6	Forze non conservative: forze di attrito, muscoli, carburante. Oltre l'energia meccanica: le altre forme di energia: energia termica, energia biochimica,… La legge generale di conservazione dell'energia. Il concetto di energia e la storia umana dell'energia.
7	Prova di laboratorio
8	Prova scritta in classe: esercizi sugli obiettivi minimi, problema sugli obiettivi standard, domande sulle attività di problem solving e di laboratorio svolte durante il corso

Programma dell'unità di apprendimento in tirocinio attivo (8 lezioni di 60 minuti)	
Lezione	Nodi concettuali
1	Il concetto di equilibrio termico e la definizione di temperatura. La misura della temperatura presuppone l'equilibrio termico e al tempo stesso ne costituisce la verifica operativa. Le scale termometriche (scale relative e significato dello zero assoluto).
2	La dilatazione termica di solidi e liquidi (leggi e fenomeni).
3	Calore: misconcetto. Sostituire con scambio di calore. Lo scambio di calore richiede la definizione di temperatura, in quanto è trasferimento di energia causato dalla differenza di temperatura. Energia interna e scambio di calore. Il calore, ovvero lo scambio di calore, è lo scambio di energia che ha come causa una differenza di temperatura. Lo scambio di calore tende al raggiungimento dell'equilibrio termico. Per ogni altra cosa si deve parlare di trasferimento o conversione di energia, ma non di calore. Energia interna ed energia meccanica.
4	Calore specifico (o meglio capacità termica specifica), capacità termica. Questa grandezza interviene non solo nei fenomeni causati da disequilibrio termico (es. cubo di ghiaccio preso a martellate).
5	Transizioni di fase (bidirezionali) Calore latente. Gli stati e i cambiamenti di stato e l'anomalia dell'acqua.
6	Trasmissione del calore per conduzione. Trasmissione del calore per convezione. Trasferimento di energia per irraggiamento. L'esempio dell'irraggiamento solare sulla Terra.
7	Prova di laboratorio.
8	Prova in classe: esercizi sugli obiettivi minimi, problema sugli obiettivi standard, domande sulle attività di problem solving e di laboratorio svolte durante il corso

Metodologia e strumenti

In questo capitolo elenchiamo in forma schematica gli elementi metodologici e gli strumenti progettati:

Lezione	Metodologia	Strumenti
0	Situazione problema iniziale	LIM, Software di navigazione in rete
1-6	Lezione e situazioni problema	Lavagna Interattiva Multimediale (LIM), Lucidi Powerpoint in aula e per lo studio a casa, Excel, Software di navigazione in rete.
7	Prova di laboratorio	Laboratorio di fisica.
8	Prova di valutazione	Carta di Studio, Testo della prova, Foglio protocollo, Calcolatrice

Applicazione di argomenti acquisiti durante i corsi TFA

Situazioni problema: abbiamo progettato quattro situazioni problema ispirandoci ai metodi e agli argomenti visti durante il “Laboratorio di modellizzazione in fisica”. Le situazioni problema 1, 2 e 3 sono adattamenti semplificati dell’esempio “Modellizzare il treno RV Torino-Milano”. La situazione problema 4 è la riproposizione fedele di quanto visto nel “Laboratorio”.

1. Un’auto in viaggio da Torino a Milano sulla A4 resta senza carburante in prossimità del casello di Novara Est. Riesce comunque a imboccare l’uscita e a raggiungere il casello. Qual è la velocita minima per la riuscita della manovra?
2. Lo studente getta il libro di fisica dalla finestra del terzo piano. Con che velocità tocca terra? Traccia il grafico di Energia Potenziale, Energia Cinetica, Energia Meccanica e verifica la conservazione dell’Energia Meccanica.
3. Determina le dimensioni di un termometro a mercurio per la misura della temperatura corporea sapendo che γHg=0,18x10-3 °C-1 e che, sulla scala dello strumento, l’aumento di un grado deve corrispondere a un allungamento di 8mm.
4. Un semplice esperimento: raffreddare dell’acqua calda immergendola in un bagno di acqua fredda. Modellizzare con Excel.

Prova di laboratorio: per ragioni di tempo, abbiamo progettato una singola prova di laboratorio sulla conservazione dell’energia meccanica. La prova utilizza materiale didattico disponibile a scuola ed è preceduta da esercitazioni applicative di familiarizzazione con la situazione che gli alunni si troveranno di fronte in laboratorio.

Analisi a posteriori

Metodologie utilizzate

Le metodologie utilizzate sono state sostanzialmente quelle previste in sede di progettazione. In corso d’opera ci siamo resi conto che limiti di disponibilità di risorse informatiche in capo agli studenti e limiti di tempo per uno sviluppo di tali risorse nel contesto del tirocinio non ci avrebbero permesso di proporre tutte le situazioni problema in forma di apprendimento attivo. Abbiamo, quindi, scelto di modificare la metodologia per le ultime tre situazioni problema, proponendole in forma di lezione interattiva alla LIM con contributi e osservazioni dal posto da parte degli studenti.

Uso delle risorse

Le maggiori risorse indicate nella fase di progettazione sono state effettivamente attivate, con alcune esclusioni dovute a vincoli di tempo.

Per le prove di valutazione abbiamo creato una risorsa inizialmente non prevista, che riteniamo tuttavia utile nell’ottica della attendibilità della valutazione. Si tratta di una griglia di correzione delle prove, che fornisce la descrizione degli errori prevedibili per ogni item e ne indica il livello di gravità, fornendo così un criterio oggettivo per l’assegnazione del punteggio.

Analisi dei processi cognitivi

Il gruppo classe ha mostrato un buon livello di partecipazione e interesse alle attività didattiche del tirocinio.

Incrociando i descrittori dell’apprendimento progettati per la prova di valutazione su Energia e Lavoro con gli indici di difficoltà registrati sugli esiti della prova stessa, abbiamo creato una tabella con le risposte ai diversi stimoli cognitivi.

Obiettivi di apprendimento	Classificazione di Anderson & Krathwohl	Descrittori	item della prova
Comprende le definizioni di lavoro, potenza, energia cinetica, energia potenziale, energia meccanica.	Ricordare/rievocare Comprendere/ confrontare	Rievoca le unità di misura delle diverse grandezze e le mette a confronto	Item 1 e 2
Ricorda ed esprime in modo corretto il teorema dell'energia cinetica	Ricordare/rievocare Valutare/criticare	Critica la correttezza di una definizione confrontandola con il ricordo dell'enunciato del teorema dell'energia cinetica	Item 3
Enuncia il teorema di conservazione dell'energia meccanica	Ricordare/rievocare	Rievoca la formula del teorema di conservazione dell'energia meccanica	Item 4
Comprende il significato di "corpo puntiforme"	Ricordare/rievocare Comprendere/ confrontare	Confronta diverse descrizioni di corpo puntiforme e sceglie quella che corrisponde al significato rievocato	Item 7
Comprende il significato di "forza conservativa" e di "energia posizionale"	Ricordare/rievocare Comprendere/ confrontare	Confronta diverse descrizioni di forza conservativa e sceglie quella che corrisponde al significato rievocato. Rievoca la formula che esprime la relazione fra l'energia posizionale e il lavoro della forza conservativa	Item 8 Item 5
Risolve semplici problemi su lavoro, potenza, energia cinetica e potenziale	Ricordare/rievocare Applicare/eseguire	Risolve un problema che richiede la conoscenza del teorema dell'energia cinetica.	Item 6 e 9
Risolve semplici problemi sul lavoro, la potenza, l'energia cinetica e l'energia potenziale	Creare/generare Ricordare/rievocare Applicare/eseguire	Genera la procedura per determinare la costante elastica della molla dai dati del grafico rievocando la legge di Hooke. Rievoca il significato di lavoro come area sul grafico forza-spostamento ed esegue i calcoli matematici.	Item 10
Formalizza un problema sulla conservazione dell'energia meccanica, individuando gli elementi significativi e le loro relazioni e applicando gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la risoluzione	Comprendere/ interpretare Creare/generare Analizzare/ differenziare Applicare/eseguire Valutare/controllare Valutare/criticare	Interpreta il testo del problema generando un modello fisico mediante il teorema di conservazione dell'energia meccanica (modello fisico energetico). Differenzia le informazioni rilevanti da quelli secondarie. Esegue i calcoli previsti dal modello. Coglie le relazioni fra le diverse parti del sistema, controllando la coerenza interna dei dati ottenuti. Genera autonomamente una strategia alternativa per ottenere un criterio esterno di critica del risultato ottenuto (modello fisico dinamico).	Item 11

Item	, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1	1, 2, 5, 7, 8	3, 11	6, 9, 10, 11	10, 11	11	11	11
Processi cognitivi	Rievocare	Confrontare	Criticare	Eseguire	Generare	Interpretare	Differenziare	Controllare
Ptot	116,5	59,5	14	32,5	8,5	1,5	1,5	1,5
PMAX	165	75	30	60	30	15	15	15
Indice difficoltà	71%	79%	47%	54%	28%	10%	10%	10%

Risulta evidente da questa tabella come i processi cognitivi che hanno risposto meglio sono quelli del ricordare, del comprendere e dell'applicare; i processi che hanno dato una risposta più scarsa sono quelli dell'analizzare, del valutare e del creare.

Considerazioni conclusive

Riflettendo sull'analisi dei processi cognitivi degli alunni riportata al paragrafo precedente e, di conseguenza, sulle caratteristiche della nostra azione didattica, troviamo elementi positivi ed elementi da migliorare. Fra gli elementi positivi individuiamo l'uso degli strumenti informatici e del laboratorio, la condivisione con gli alunni dei materiali didattici e il tentativo di affrontare situazioni problema di tipo insolito.

Fra gli elementi da migliorare individuiamo uno scarso livello di interattività, di spazio e di tempi per la iniziativa autonoma degli alunni. Questa carenza non ha permesso agli alunni di impadronirsi a fondo dei concetti e quindi di affrontare al meglio situazioni di stimolo dei processi cognitivi meno allenati.

In generale l'esperienza del TFA ha rappresentato per noi un passaggio positivo di qualificazione dopo molteplici esperienze di insegnamento, sia pur appassionate, ancora basate su un livello professionale individualizzato, istintivo, e caratterizzato da un processo di acquisizione di risorse e di strutture di interpretazione, azione e autoregolazione faticoso e farraginoso. Il corretto esercizio della responsabilità e dell'autonomia proprie della professione di insegnante e la capacità di sostenere in quel ruolo la rapidità dei cambiamenti sociali, culturali, metodologici e disciplinari richiedono, invece, elevato insieme di competenze, linguaggio e pratiche condivise per comunicare efficacemente con gli alunni, i colleghi, con le risorse esterne e con le strutture di formazione continua.

Bibliografia

Testi disciplinari

Amaldi U. (2007). *La fisica di Amaldi. Idee ed esperimenti, «Meccanica»*. Bologna: Zanichelli.
Amaldi U. (2007). *La fisica di Amaldi. Idee ed esperimenti, «Termologia»*. Bologna: Zanichelli.
Atkins. P. (2010). *Le regole del gioco: Come la termodinamica fa funzionare l'universo*. Bologna: Zanichelli.
Parodi G.P., Ostili M. Mochi Onori G. (2007). *L'evoluzione della fisica. Corso di Fisica per il Liceo Classico*, voll. 1-2. Milano: Paravia.
Resnik R., Halliday D., Krane K. (2003), *Fisica 1*. Rozzano: Casa Editrice Ambrosiana.
Violino P., Robutti O. (1995) *La fisica e i suoi modelli, vol. 1*. Bologna: Zanichelli.

Testi di didattica

Maccario D. (2012). *A scuola di competenze. Verso un nuovo modello didattico*. Torino: SEI.
Marocco Muttini C. (2006). *Educazione e benessere in adolescenza*. Novara: UTET Università.
Oser, F., Dick, A., Patry, J.L. (a cura di) (1992). *Effective and Responsible Teaching*. Fenstermacher G. *The Concepts of Method and Manner in Teaching*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
Rivoltella, P.C., Rossi, P.G. (a cura di) (2012). *L'agire didattico. Manuale per l'insegnante*. Brescia: La Scuola.
Trinchero, R. (2012). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*. Milano: Franco Angeli.

SULLE TRACCE DEL CALCOLO SUBLIME

Roberta Carminati, Graziano Gheno
Liceo Scientifico Statale "Jacopo Da Ponte" – Bassano del Grappa (VI)[1]

Premessa

"Un percorso nella costruzione del "Calcolo Sublime" per assaporare l'affascinante processo che sottende la conoscenza."

Viene proposto un percorso per autori alla ricerca delle origini del Calcolo Sublime, ossia del Calcolo Differenziale e Integrale, per acquisire consapevolezza critica tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico e scientifico in cui è maturato.

In particolare, si cerca di proporre una comparazione fra due dei principali cammini che hanno concorso alla costruzione del Calcolo Sublime : la matematica nel pensiero greco che ha il suo apice nella produzione di Archimede e la matematica della rivoluzione scientifica del Seicento che porta alla formalizzazione del Calcolo in Newton-Leibniz.

È un percorso che intende evidenziare come le strade di questi Titani del pensiero matematico siano state spianate dal lavoro oscuro di molti umili Giganti:

- per Archimede, nel mondo greco, essi sono: Pitagora e la sua scuola, Parmenide, Zenone, Democrito, Platone, Aristotele, Eudosso.
- per Newton e Leibniz, nel Seicento, essi sono: Keplero, Galileo, Cavalieri, Torricelli, Cartesio, Fermat, Pascal, Barrow.

La matematica nel pensiero greco

In questa prima parte proponiamo un percorso attraverso la matematica degli antichi greci, andando a cogliere i momenti significativi del percorso che, partendo dall'acquisizione del concetto di infinito e infinitesimo, hanno condotto alla risoluzione di problemi quali il Calcolo di lunghezze di linee, di estensioni di superfici e di volumi: tutte problematiche che rientrano nell'odierno Calcolo Integrale.

Pitagora e la sua scuola: l'infinito fa "capolino" nella storia della matematica.

La base fondante della filosofia pitagorica può essere riassunta nella formula: ***"le cose sono numeri"***. Per i Pitagorici il numero è una cosa reale e viene rappresentato come un insieme di sassolini o disegnato come insieme di punti. Quindi, come i numeri risultano costituiti di più unità, cioè i punti, così le grandezze geometriche devono risultare composte di grandezze elementari indivisibili: i punti-monade. Pertanto il rapporto tra due segmenti sarà sempre esprimibile come rapporto tra due numeri interi, ossia dal rapporto tra il numero di punti di cui sono costituiti. Le grandezze sono necessariamente fra loro commensurabili. Questa idea basilare del punto-monade crollò con la scoperta di grandezze tra loro incommensurabili, per esempio lato e diagonale di un quadrato, avvenuta all'interno della stessa scuola. Venne così a crollare la concezione secondo cui i segmenti sarebbero stati costituiti da un numero finito di punti. Se ne ricavarono due importanti conseguenze:

- oltre ai numeri esprimibili con simboli aritmetici e geometrici ce ne sono altri esprimibili solo per via geometrica;

1 Il presente lavoro è disponibile al sito www.liceodaponte.com

- se i segmenti sono costituiti da punti, questi sono in numero infinito.

La seconda conseguenza apre la via a considerazioni infinitesimali.

Parmenide: la razionalità soppianta il mito.

Parmenide promuove un pensiero basato su un metodo razionale servendosi in particolare della logica formale di non contraddizione: il suo rigore logico, la sua fiducia in un sapere dedotto dalla ragione fanno di lui un filosofo profondamente razionale. Secondo Parmenide di fronte all'uomo si aprono due vie: la via della verità (*alétheia*), basata sulla ragione, che ci porta alla conoscenza dell'Essere vero che è ingenerato e imperituro, eterno, immutabile, unico, omogeneo, immobile, finito e indivisibile e la via dell'opinione (*dòxa*), basata sui sensi, che dovrà essere respinta poiché errata, dal momento che porta alla conoscenza dell'Essere apparente. Pertanto il lavoro di Parmenide è inteso a criticare la teoria monadica dei Pitagorici: continuità e unità sono i punti cardine della sua filosofia e, d'altra parte, le contraddizioni del pensiero pitagorico mostravano che la realtà non è divisa in parti ma è continua, non è una somma di realtà minori bensì è unitaria. In particolare, in contrapposizione alla concezione empirica degli enti matematici e geometrici dei Pitagorici, Parmenide afferma per primo i concetti razionali di punto, linea, superficie, volume e di numero.

Anassagora: l'infinito chiede l'infinitesimo.

Anassagora pur conservando uno dei presupposti degli eleatici, l'immutabilità dell'essere, si allontanò dalla concezione tipicamente eleatica: immutabile non è l'essere nel suo insieme, ma i principi ultimi, i semi, che lo costituiscono, i quali sono un'infinita pluralità. La prima caratteristica dei semi od omeomerie, come successivamente li definì Aristotele, è la loro infinita divisibilità, la seconda è la loro infinita aggregabilità. L'importanza matematica di questo concetto è evidente, tant'è che Anassagora può essere considerato il primo lontano progenitore dell'analisi infinitesimale: la nozione che si possa raggiungere sempre, per divisione, una quantità più piccola di ogni quantità data è il concetto fondamentale del calcolo infinitesimale, inoltre che ogni grandezza possa essere detta grande o piccola a seconda del processo di divisione o di composizione in cui viene coinvolta è un'affermazione che implica la relatività dei concetti di grande e piccolo.

Zenone: l'infinito produce paradossi.

Zenone utilizza un ragionamento paradossale per sostenere due delle tesi della dottrina di Parmenide: l'essere è, ed è uno negando dunque la molteplicità delle cose, l'essere è immutabile confutando quindi il movimento e la realtà del divenire. Nelle sue argomentazioni si possono evidenziare alcuni principi di importanza fondamentale per gli i sviluppi della scienza matematica, in particolare dell'analisi infinitesimale:

- un segmento si può decomporre in un numero infinito di parti, dividendolo successivamente in due, quattro, otto, ... parti uguali; queste parti diminuiscono continuamente fino a diventare più piccole di un qualsiasi altro segmento, piccolo a piacere;
- la possibilità di poter suddividere un segmento in un numero infinito di parti può essere colta come la nascita formale del concetto di infinitesimo e la formalizzazione di un algoritmo per un processo infinitesimale;
- implicita la considerazione che non si possono concepire come "raggiunte" le unità ultime e indivisibili; questo riconferma la relatività dei concetti di "grande" e "piccolo".

Democrito: apre agli 'indivisibili'.

Il nome di Democrito è solitamente legato alla sua teoria atomista. Scarse sono le notizie relative ai suoi studi geometrici, tuttavia a detta di Plutarco, relativamente a coni e cilindri, egli fa queste considerazioni: "*se si taglia un cono con un piano parallelo alla base e infinitamente vicino alla base che cosa si deve pensare delle superfici delle sezioni, che esse sono uguali o disuguali? Giacché se fossero uguali farebbero il cono irregolare, quasi avesse molti ripiani, come una scalinata e molte scabrosità; se invece fossero uguali le sezioni stesse sarebbero uguali e potrebbe sembrare che il cono avesse le stesse proprietà del cilindro, cioè di essere formato di circoli uguali e non disuguali il che è oltremodo assurdo.*" L'essersi posto una tale questione convalida l'opinione che Democrito concepisse un solido come somma di un numero infinito di piani paralleli o anche di strati indefinitamente sottili e indefinitamente vicini tra loro, anticipando in tal caso l'idea che è alla base, come vedremo, dei lavori di Archimede.

Aristotele: l'infinito? Solo in potenza.

Le considerazioni relative ai concetti di infinito e infinitesimo nella cultura greca sono stati momenti di profonda perplessità. È Aristotele colui che traccia le linee guida entro cui anche la ricerca matematica può scorrere nel momento in cui si rapporta a tali problematiche. Distingue tra due tipi di infinito, concepito come una "proprietà" delle cose: l'infinito in potenza, ossia un'infinità distribuita nel tempo simile a un processo che non ha mai fine, e l'infinito in atto intesa come una infinità compiuta. Egli nega la possibilità di concepire l'infinito in atto. Questa contrapposizione di infiniti sarà destinata a condizionare profondamente la cultura scientifica per molti secoli, certamente fino a Keplero. Infatti, in base all'"ipse dixit" nessun geometra avrebbe osato riconoscere come logicamente rigorosa una dimostrazione imperniata sull'infinito in atto.

Eudosso: l'infinito in potenza è "servito".

È Eudosso di Cnido, il più grande tra i matematici preeuclidei, colui che contribuisce a stabilire i metodi rigorosi nelle questioni infinitesimali. A lui vengono attribuiti due lavori:

1. la "teoria delle proporzioni", esposta nel Libro V di Euclide, che permette di superare in modo logicamente corretto la difficoltà derivata dalla scoperta pitagorica di grandezze tra loro incommensurabili;
2. il "*metodo di esaustione*" che è un rigoroso metodo di dimostrazione in cui entra in gioco l'infinito e che trovò immediata applicazione nel calcolo di aree e volumi delle più complesse figure geometriche. Partendo dalla Prop. [X, 1] di Euclide, il metodo si basa sulla possibilità di costruire, con un metodo iterativo, una grandezza b_n che differisce da una data grandezza a per un valore ε piccolo a piacere. Con linguaggio moderno $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$. È grazie al metodo di "esaustione" che la matematica dei Greci è in grado di iniziare e sviluppare le ricerche infinitesimali e mettere in condizioni Archimede di anticipare di duemila anni il Calcolo Integrale. Ha una unica controindicazione: non è un metodo fecondo. Infatti, la dimostrazione di un risultato con questo metodo deve essere preceduta dalla ricerca della tesi, condotta mediante tecniche di tipo euristico, basate sull'intuizione o su tecniche pure sconosciute ma comunque non considerate sufficienti per garantire la verità del risultato ottenuto.

Archimede: l'Integrale in un Momento.

"*La matematica venne interpretata da Archimede nel senso più largo: non solo come analisi di problemi astratti, lontani dalle applicazioni, ma come studio di problemi concreti, ricchi di svariati riferimenti alla meccanica, alla fisica, all'astronomia. Egli seppe fondere in una magnifica sintesi lo spirito pratico dell'ingegnere con il rigore logico dello scienziato.*" [Geymonat]

Egli affronta e risolve, utilizzando in modo continuo e sicuro il "metodo di esaustione" a tal punto che le sue dimostrazioni saranno portate come esempio di quello che deve essere il rigore logico-matematico, problemi di misura della circonferenza, area-volume-superficie della sfera, aree e volumi di segmenti di conoidi e sferoidi, centri di gravità, momenti statici e molto altro: tutte problematiche che rientrano nell'odierno Calcolo Integrale. Ma in tutti i suoi lavori mai Archimede lascia trasparire quale fosse stato il percorso seguito per giungere alle sue scoperte; in realtà lascia un manoscritto "*il metodo meccanico*" in cui illustra il suo geniale processo di ricerca, che sta a monte del suo percorso logico formale.

È una combinazione di ragionamenti geometrici e meccanici inseriti in un contesto infinitesimale: l'idea che una linea sia costituita da infiniti punti, una superficie da infinite corde (pesanti), un solido da infiniti fogli (pesanti) unita alla *"legge della bilancia"* permette di ricavare il valore della grandezza oggetto di studio. Egli, utilizzando un criterio già visto in Democrito, si limita a dire che ogni figura è composta o riempita da tutti i suoi elementi: implicitamente equivale a dire che ogni figura è composta di un numero infinito (infinito in atto!) di elementi infinitesimali. È questo il metodo che a partire dal 1600 sarà chiamato degli "*indivisibili"*. Archimede stesso tuttavia afferma che queste tecniche di scoperta non sono "*vere dimostrazioni"* (ricordiamo le limitazioni imposte da Aristotele circa l'uso di infinito!) e pertanto si avvale per le "*vere dimostrazioni"* del metodo di esaustione. A conferma, però, dell'efficacia del suo metodo di ricerca aggiunge: *"ho voluto pubblicare questo metodo perché sono convinto che porterà non piccola utilità alla matematica: confido infatti che alcuni dei matematici attuali e dei futuri … troveranno con questo metodo altri teoremi da noi ancora non escogitati*". Sfortunatamente de "*il metodo meccanico*" a partire già dall'antichità si perse ogni traccia e in nessun altro lavoro Archimede lascia trasparire quale sia il percorso seguito per giungere alle sue scoperte: *"in questo consiste il mistero di Archimede: come giunse egli a riconoscere già il risultato delle grandezze prima ancora di iniziare il complesso procedimento dimostrativo"* [Frajese].

La matematica della rivoluzione scientifica del '600.

Con Archimede (212 a. C.) termina l'età d'oro della Matematica dei Greci e inizia un lungo periodo di stagnazione che si protrarrà fino a tutto il 1400. È a partire dal 1500 che, grazie all'invenzione della stampa, si ha una ripresa degli studi classici e in ambito matematico delle opere di Archimede (Archimede, ricordiamolo, senza 'il metodo meccanico').

È il 1500-1600, un periodo di profonde contraddizioni e contrapposizioni: Riforma e Controriforma, Inquisizione e Rivoluzione Copernicana, Occultismo e Ricerca scientifica, Università contrapposte a laboratori artigianali. La scienza finora teoretica, contemplativa e astratta si apre alla verifica sperimentale superando la distinzione tra arti liberali e arti meccaniche. In un secolo di fervente ricerca come il XVII, dove interessava più la scoperta di nuove relazioni che l'aspetto formale, era naturale si cercassero metodi più rapidi e facili, anche se meno rigorosi di quelli archimedei, per risolvere i nuovi problemi che si presentavano. Pertanto agli inizi del '600 il metodo di esaustione, ingombrante da usare e pure infecondo per fare nuove scoperte, viene sostituito dal " *metodo degli indivisibili* ", ricco di spunti innovativi, anche se non adeguatamente giustificato da un punto di vista logico-formale.

Luca Valerio: il nuovo Archimede dell'età nostra.

"Il problema di divinare il metodo che aveva consentito ad Archimede di ottenere le sue scoperte fu invano affrontato dai geometri del Cinquecento e Seicento. Servendosi di un proprio metodo L. Valerio riuscì ad andare oltre Archimede" [Bottazzini]. L. Valerio, pur restando uno dei più insigni seguaci del metodo classico e definito da Galileo "*il nuovo Archimede dell'età nostra*", è un punto di riferimento nella storia della matematica infinitesimale per un modo nuovo di concepire le curve, per le considerazioni nella determinazione di aree e volumi e per il primo abbozzo del concetto di limite. In un suo lavoro considera *"Data una curva piana degradante intorno ad un diametro da una parte di una sua corda – cioè tale che le corde parallele alla corda considerata decrescano allontanandosi da essa – si possono inscrivere e circoscrivere ad essa dei parallelogrammi in modo che la somma dei parallelogrammi circoscritti superi quella di quelli inscritti di una qualsiasi quantità prefissata."*

Keplero: il calcolo sublime riparte da una botte.

Keplero fu il primo matematico del '600 che abbandonò senza compromessi il metodo classico di esaustione e le sue difficili dimostrazioni per assurdo e lo sostituì con molta disinvoltura per mezzo di ragionamenti sugli infiniti e gli infinitesimi non sempre rigorosi da un punto di vista logico-formale. Nel suo lavoro *'Nova stereometria doliorum vinariorum'* studiò un centinaio di solidi particolari, alcuni dei quali del tutto nuovi, trovati con procedimenti che rompono in modo categorico con la tradizione classica: l'aspetto innovativo del suo metodo consiste nella tecnica che comunque sottende a tutte le sue scoperte, ossia nel considerare figure composte da un numero infinito di elementi (infinito in atto), elementi che, pur essendo infinitesimi, non sono mai privi di spessore. Keplero, ad esempio, relativamente all'area del cerchio considera una infinità di 'triangoli' di altezza uguale al raggio e base … un punto della circonferenza; relativamente al volume della sfera considera una infinità di 'coni' di altezza uguale al raggio e base … un punto della sfera.

Galilei e i suoi indivisibili cinematici.

Nel percorso che stiamo descrivendo Galileo occupa un posto di rilievo in quanto, oltre ai problemi classici di quadrature e cubature (Calcolo Integrale), apre un nuovo fronte di ricerca introducendo gli indivisibili cinematici. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche attorno a due nuove scienze"* affronta il problema della determinazione dello spazio percorso da un mobile in moto naturalmente accelerato, risolvendolo anche con l'uso degli indivisibili.

"Riprendiamo il triangolo ABC, che sulle parallele alla base BC ci rappresenta i gradi di velocità continuamente aumentati secondo il crescere del tempo, le quali [parallele], essendo infinite, siccome infiniti sono i punti nella linea AC e gli istanti in un tempo qualsiasi, daranno origine alla superficie stessa del triangolo.

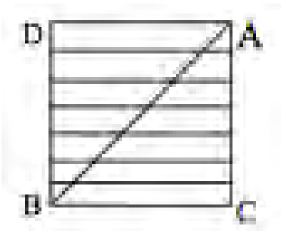


Figura 1

Se intendiamo che il moto continui per altrettanto tempo, ma non più accelerato, bensì equabile, secondo il massimo grado della velocità acquistata, il quale grado è rappresentato dalla linea BC; tali gradi di velocità formeranno un aggregato simile al parallelogramma ADBC, che è doppio del triangolo ABC: perciò lo spazio percorso nel medesimo tempo con gradi di velocità consimili [tutti eguali a BC], sarà doppio dello spazio percorso coi gradi di velocità rappresentati dal triangolo ABC". Galileo giunge a questa conclusione osservando che ogni linea parallela a BC rappresenta sia la velocità posseduta da un corpo in un certo istante, sia lo spazio infinitesimo percorso in un intervallo di tempo infinitesimo.

Cavalieri: il 'padre' degli indivisibili.

Parlando di indivisibili il pensiero corre a Cavalieri: è lui che ha teorizzato il *"metodo degli indivisibili"*. In questo ambito a lui si devono due fondamentali teoremi di geometria che si fondano su questa idea di tipo geometrico: una generica superficie piana è costituta dalla totalità delle corde, "*omnes lineae figurae*", intercettate entro la superficie stessa da un fascio di rette tra loro parallele, un solido è costituito dalla totalità delle sezioni, "*omnia plana solidi*", del solido medesimo con un fascio di piani tra loro paralleli. È da precisare che Cavalieri in nessuna delle sue opere dà la definizione del termine indivisibile né delle frasi "*omnes lineae figurae*" (totalità delle corde) o delle "*omnia plana solidi*" (totalità delle sezioni). I suoi indivisibili devono considerarsi enti puramente geometrici e quindi '*privi di spessore*'. Inoltre egli non si preoccupa di dire cosa siano o quanti siano i suoi indivisibili: dice solo che sono "indefiniti di numero"; quando si trova a confrontare gli elementi di due insiemi, egli non si chiede "quot sint", ma si limita a verificare il "tot … quot".

Cartesio apre a due nuove problematiche tipiche del Calcolo Differenziale

Cartesio, grazie all'introduzione degli assi coordinati, apre alla possibilità di costruire una varietà di nuove curve che preludono a due problematiche del tutto nuove: la costruzione della retta tangente a una curva in un suo punto e la determinazione del punto di massimo o di minimo di una curva, problemi questi che sono caratteristici del Calcolo Differenziale. In particolare l'interesse in quel periodo per la costruzione della retta era di duplice natura: sia di carattere squisitamente geometrico sia tecnico per le applicazioni in ambito ottico e cinematico. Pure Cartesio si cimenta con successo nella sfida di trovare la retta tangente a una curva espressa in forma razionale tramite un criterio di tipo algebrico-geometrico.

Fermat "apre" alla derivata con i suoi incrementi!

Fermat, di professione magistrato, fu un cultore della teoria dei numeri e in particolare uno studioso di Diofanto. Per primo riconduce la determinazione del massimo o del minimo di una curva e la determinazione della retta tangente a una curva in un punto a un'unica operazione: lo studio degli incrementi. La sua determinazione del massimo o del minimo di una curva in un punto si basa sul fatto che una funzione $y = f(x)$, in un intorno di un valore x_0 in cui ammette massimo o minimo, diventa stazionaria, cioè, con le parole di Keplero, "*le variazioni della funzione sono insensibili*". L'algoritmo di tipo prettamente aritmetico proposto da Fermat, che evita pertanto il nostro passaggio al limite, ricalca l'odierno calcolo della derivata di una funzione.

Torricelli "vede" il legame tra derivazione e integrazione.

Nella tormentata storia sugli indivisibili Torricelli occupa un posto di prima grandezza: fu tra i più convinti assertori del metodo degli indivisibili, indivisibili con spessore, metodo che contribuì a sviluppare presentandolo in forma chiara e attraente. Convinto pure della legittimità del metodo dal punto di vista del rigore, scrive *"… che poi la geometria degli indivisibili sia un'invenzione tutta nuova non oserei certo dire. Crederei piuttosto che gli antichi geometri si siano valsi di questo metodo per scoprire i teoremi più difficili e che poi nella dimostrazione abbiano preferito un altro metodo, sia per nascondere i segreti dell'arte, sia per non offrire a invidiosi detrattori alcuna occasione di critica".* Torricelli estese il metodo introducendo gli indivisibili curvi che*"nelle figure piane sono le periferie dei circoli, e nelle figure solide, sono superfici sferiche, cilindriche e coniche, le quali hanno il pregio di adattarsi perfettamente alle figure e di avere, per così dire, uno spessore sempre uguale e uniforme".*

Un contributo significativo al problema della relazione tra Calcolo Differenziale e Calcolo Integrale (problema dell'inversione) viene portato da Torricelli.

Inizialmente riprendendo il lavoro di Galileo relativo alla determinazione dello spazio in funzione della velocità, con un ragionamento appena abbozzato, Torricelli dimostra che lo spazio percorso dal punto fra gli istanti t_1 e t_2 è rappresentato dall'area compresa tra la curva velocità, l'asse t e le rette $t = t_1$, $t = t_2$. Successivamente egli si pose il problema di determinare la velocità con la quale un grave in moto parabolico proseguirebbe il moto nel caso in cui a un certo istante venisse a mancare la forza di gravità. Supponendo che ciò avvenga quando il grave si trova in P, il corpo continuerà il moto lungo la tangente TU con velocità costante posseduta in P, velocità che è la risultante della sua componente orizzontale v_x costante (che possiamo porre = 1) e di quella verticale v_y incognita.

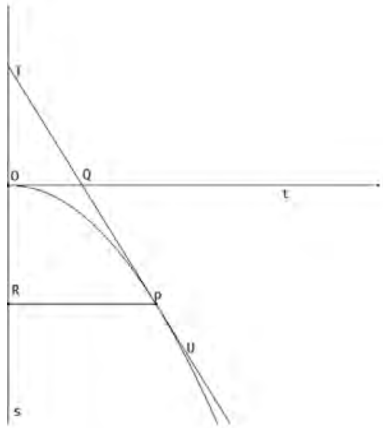


Figura 2

Torricelli suppose che il grave nel punto P inverta il moto muovendosi con la stessa velocità raggiunta in P; quindi "*esso descriverà il segmento PT nel tempo t_1 che il mobile aveva impiegato per portarsi inizialmente da O a P.*" Pertanto, la velocità in P è

$\mathbf{v} = \dfrac{PT}{RP}$ con $\mathbf{v}_y = \dfrac{RT}{RP}$ con RP = t_1 . Si ricava quindi che $\mathbf{v}_y = \dfrac{RT}{RP} = tgR\hat{P}T$.

"*Torricelli riesce, quindi, a cogliere gli stretti rapporti tra problema delle tangenti e problema delle velocità. E poiché i due problemi di ricavare lo spazio dalla velocità e di ricavare la velocità dallo spazio sono inversi l'uno dall'altro, Torricelli si trova naturalmente condotto a comprendere il carattere inverso delle due operazioni di trovare le tangenti (derivazione) e calcolare le aree fra limiti variabili (integrazione indefinita).*" [Geymonat]

Torricelli non ha il tempo di completare queste sue considerazioni perché a soli 39 anni muore.

Pascal: gli infinitesimi aprono al differenziale leibniziano

"*Dotato di una eccezionale intelligenza … egli più che tra i puri scienziati va annoverato tra i pensatori nel vero senso della parola, e vi occupa un posto altissimo. Ancora oggi certe sue intuizioni rivelano aspetti di estrema modernità*". [Geymonat]

Pure Pascal è un fervente sostenitore degli indivisibili: "*tutto ciò che è dimostrato mediante la regola degli indivisibili sarà dimostrato pure con il rigore degli antichi: questi due metodi differiscono solamente per le diverse modalità di esprimerli*".

Fondamentali sono i suoi contributi al nostro percorso. Nel piano, (vedi Figura 3), i suoi indivisibili sono, per esempio, i rettangoli di ordinata DI e base infinitesima EE: rettangoli che in Leibniz diventeranno i differenziali "$r \cdot sen\varphi \cdot dx$".

Con essi opera con estrema semplicità dimostrando una fase estremamente avanzata del concetto di limite che sarà formalizzata solo nel XVIII secolo con Chauchy: "… *io non avrò nessuna difficoltà ad usare l'espressione* (vedi sempre Figura 3)*: somma di ordinate, intendendo solamente che la somma di un numero indefinito di rettangoli costituiti ognuno di questa ordinata (come altezza) e di una piccola porzione tutte uguali di base, la cui somma è certamente un piano che differisce dal quarto di cerchio di una quantità che può essere resa piccola a piacere*".

Ultimo contributo, ma non meno importante, è il suo " il triangolo caratteristico EKE " di cui parla nel "*traité des sinus*": è ricordando questo triangolo che Leibniz trae lo spunto per introdurre la sua derivata di una funzione in un punto.

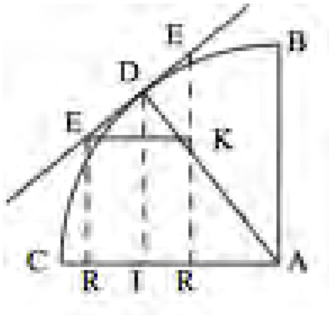


Figura 3

Barrow: pure lui "vede" il teorema dell'inversione.

Isaac Barrow, docente alla cattedra "lucasiana" di matematica di Cambridge che nel 1669 cede volontariamente al suo discepolo Newton, arriva a cogliere il problema dell'inversione. Riportiamo in linguaggio attuale il ragionamento di Barrow (Vedi Figura 4). Sia $y = f(x)$ una funzione che, per semplicità, supporremmo strettamente crescente e positiva. Si consideri la funzione area $Y = F(x)$ tale che, se P è un suo punto di ordinata Y = NP, allora NP è uguale all'area delimitata dal grafico della funzione f(x), dall'asse delle ascisse, dall'asse delle ordinate e dalla retta NM.

Si consideri, inoltre, il punto T in modo tale che TN = Y/y con Y = PN e y = NM. Barrow dimostra che la PT è la retta tangente a F(x) in P ossia che y = Y/TN = $tgN\hat{T}P$.

Barrow, determinata la retta tangente, si trova quindi a un passo dall'individuare la relazione esistente tra il problema della tangente e quello della quadratura, ma l'atteggiamento che lo manteneva legato ai metodi classici gli impedì di fare uso efficace del risultato trovato.

Tuttavia il teorema dell'inversione è detto di Torricelli–Barrow in onore ai contributi significativi dei due matematici.

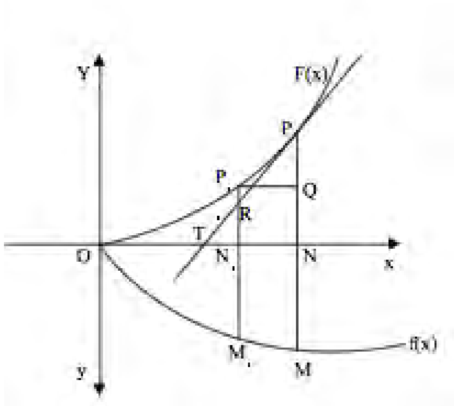


Figura 4

Newton: un Gigante sulle spalle di giganti.

Arrivati a questo punto i problemi che vanno a costituire il Calcolo Sublime sono oltre i classici problemi di quadratura e cubatura, esaurientemente affrontati e risolti da Archimede, i nuovi relativi al calcolo del massimo e minimo e la ricerca della retta tangente a una curva in un punto. Due sono gli indirizzi di ricerca attorno ai quali si sono sviluppati gli ultimi studi: uno cinematico con Galileo, Torricelli e Barrow, l'altro, che trae le sue origini nella geometria analitica, legato alla scuola francese con Cartesio, Fermat e Pascal. È tuttavia mancata a tutti la consapevolezza profonda del legame indissolubile tra tutte queste problematiche … vecchie e nuove. È grazie ai contributi di Newton e Leibniz che le conoscenze sconnesse fino ad ora prodotte andranno a costituire un tutto organico, che permetterà di dimostrare quale potenza abbia il nuovo strumento di analisi nella risoluzione di problemi posti dalla matematica e dalla fisica. In particolare il loro contributo è stato principalmente quello di dare:

- una visione unitaria delle problematiche;
- un'impostazione teorica che fosse in grado di parare gli attacchi mossi da più parti contro i procedimenti infinitesimali;
- un'uniformità di simboli a fronte di concetti più o meno uniformati.

Tre sono i lavori in cui Newton elabora il suo Calcolo Sublime:

- *De analysis per aequationes numero terminorum infinitas* del 1669 pubblicato nel 1711
- *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* del 1671 pubblicata nel 1742
- *De quadratura curvarum* del 1676 pubblicata nel 1704.

In "*De analysis*" viene affrontato lo studio delle equazioni di serie infinite. In "methodus fluxionum" Newton, attento alle questioni di dinamica, considera grandezze variabili nel tempo, le "fluenti" (funzioni implicite), che a ogni istante hanno una determinata "flussione" (velocità di variazione): *"Le linee vengono descritte non mediante addizioni di parti, ma per moto continuo di punti; le superfici per moto di linee; i solidi per moto di superficie; gli angoli per rotazione dei loro lati; i tempi per flusso continuo e così in altri casi analoghi. Considerando dunque che quantità generate, crescendo in tempi uguali riescono maggiori o minori secondo la velocità maggiore o minore con cui crescono, ho cercato un metodo per determinare le grandezze dalle velocità dei moti o degli incrementi con cui si generano, chiamando flussioni queste velocità di accrescimento, e fluenti le quantità generate"*. Il metodo di Newton di determinare le flussioni è sostanzialmente quello di Fermat con la differenza che mentre in Fermat c'è una fase statica in un processo aritmetico, in Newton c'è una concezione dinamica con una fase cosciente del concetto di limite anche se non ancora espressamente esplicitato.

Una volta trovate le flussioni di una fluente, in "*De quadratura*" osserva che si possono poi considerare le flussioni delle flussioni e cioè le flussioni seconde e poi le flussioni terze, quarte, e così via che indica con $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ldots$ Il problema si può pure invertire, e cioè le fluenti x, y, z, … si potranno a loro volta considerare come flussioni di altre fluenti, che indica con $\overset{\scriptscriptstyle |}{x}, \overset{\scriptscriptstyle |}{y}\ \overset{\scriptscriptstyle |}{z}\ \ldots$, e queste a loro volta si potranno considerare come flussioni e così via. Considerata pertanto la successione relativa alla variabile x

$\ldots, \overset{\scriptscriptstyle |||}{x}, \overset{\scriptscriptstyle ||}{x}, \overset{\scriptscriptstyle |}{x}, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ldots$ in cui un termine qualsiasi può essere visto come la flussione del termine che lo precede, Newton osserva che: "*una quantità qualsiasi di queste successioni si può considerare come area di una figura curvilinea di cui la quantità seguente a quella considerata è l'ordinata in un sistema di assi ortogonali*". Infatti Newton dimostra che, se si parte da un'area delimitata da una curva data, dall'asse delle ascisse, da due ordinate, di cui una variabile, la flussione dell'area rispetto all'ascissa è l'ordinata fissa del punto C appartenente alla curva. Si consideri, infatti, la figura dovuta a Newton stesso:

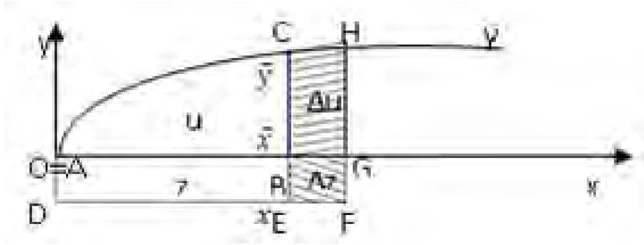


Figura 5

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali OXY, si consideri una curva γ ; a un certo istante t siano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ i valori che assumono le variabili x e y. Sia u l'area del triangolo mistilineo ABC delimitato dai segmenti AB, BC, e dall'arco di funzione γ . Si costruisca sotto l'asse delle x il rettangolo ABED, come in figura, di lato AD unitario e sia *z* la sua area. Si consideri ora un incremento di tempo Δ t; in corrispondenza l'area *u* sarà aumentata di Δ *u* e l'area *z* di Δ *z*. Dal momento che Δ u e Δ z si possono con *"approssimazione arbitrariamente grande"* considerare uguali a $\dot{u}$ e a $\dot{z}$ allora, approssimativamente, risulta che $\Delta u/\Delta z = \dot{u}/\dot{z}$. Questa uguaglianza tra i due rapporti è approssimata per qualsiasi Δ *u* e Δ *z*, piccoli a piacere; ma allora nel momento in cui Δ t diventa sempre più piccolo si ha che il punto G tende sul punto B e il rapporto $\Delta u/\Delta z$ tende al rapporto BC/BE che è "l'*ultimo dei rapporti*" ovvero $\dot{u}/\dot{z}$ = BC/BE Ma essendo BE = 1 risulta $\dot{u}/\dot{z}$ = BC = $\bar{y}$.

Di qua egli deduce che la ricerca dell'area della superficie data equivale alla ricerca di una funzione la cui derivata è già nota. Con linguaggio attuale, la "funzione primitiva".

Leibniz: quando la forma diventa feconda.

Quando Newton, nel biennium mirabilis 1665-1667 sta costruendo il suo Calcolo Sublime, Leibniz è, per sua stessa ammissione, ignorante in matematica. Solo nel 1672 in missione diplomatica a Parigi incontra C. Huygens, eminente matematico e fisico olandese, che lo mette al corrente dei progressi della matematica in quegli anni grazie ai contributi di Cavalieri, Torricelli, Descart, Fermat, Pascal. Spirito universale, a cui nessun ramo dello scibile era estraneo, si butta a capofitto in questo nuovo orizzonte culturale: obiettivo dichiarato è quello di trovare un semplice algoritmo che compendi questa nuova frontiera della matematica: "*... se fosse possibile risolvere tutti i processi complessi in elementi più semplici ed esprimere questi concetti con pochi e caratteristici simboli.*" La sua avventura alla costruzione del 'suo' Calcolo Sublime parte dal discreto analizzando particolari successioni numeriche: in particolare studia i numeri triangolari, il triangolo aritmetico di Pascal e il triangolo armonico notando strane situazioni che si venivano a determinare analizzando somme e differenze. Questo 'gioco di somme e differenze' è alla base del calcolo differenziale di Leibniz. Il passaggio poi dal discreto al continuo per Leibniz è stato del tutto naturale: continuò a indicare con dx un generico incremento di ascissa e con dy il corrispondente incremento di ordinata. Considerando una generica funzione f(x), il ricordo del triangolo caratteristico di Pascal gli permise di formulare la sua definizione di derivata di una funzione in un punto: è l'incremento che subisce la funzione nel punto in corrispondenza dell'incremento unitario della variabile indipendente. Riportiamo un suo grafico:

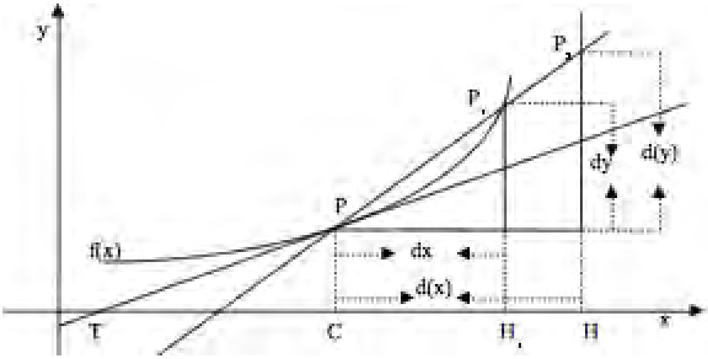


Figura 6.

Siano f(x) una funzione e P il punto in cui determinare la derivata, si consideri il punto P_1 con dx un incremento arbitrario e dy il corrispondente incremento di funzione, T il punto di intersezione della retta tangente con l'asse delle ascisse e C la proiezione di P sull'asse delle ascisse. Si consideri un incremento unitario (d)x e sia (d)y il corrispondente incremento letto sulla retta secante PP_2. Nel momento in cui dx assume valori sempre più piccoli, i vari triangoli del tipo PP_2H e PP_1H_1, che si ottengono sono simili e quindi per essi vale sempre la relazione dy / dx = (d)y / (d)x . Nel momento in cui P_1 tende a P allora il triangolo PP_1H_1 tende a 'svanire' in un punto. In questo caso la retta PP_2 diventa la retta tangente. Il punto T è allora il punto di intersezione della retta tangente con l'asse delle ascisse e se **s** è la misura del segmento TC continua a valere (d)y / (d)x= y / s, ossia dy / dx = y / s. Detto quindi α l'angolo PTC si ha: PC / TC = tang α = f '(x), cioè $dy / dx = f'(x)$.

Osserviamo che con ciò non si è determinato univocamente dx e dy, ma soltanto il rapporto dy/dx, che Leibniz chiama *rapporto differenziale* (rapporto di differenze), senza bisogno di determinare gli infinitesimi dx e dy, che esprimono la derivata della funzione.

Con la stessa semplicità Leibniz arriva al teorema dell'inversione. Parte sempre dal discreto e considerando varie successioni nota che "… *le differenze e le somme sono tra loro reciproche, vale a dire che la somma delle differenze della successione è il termine della successione , mentre la differenza delle somme della successione è lo stesso termine della successione. La prima affermazione la enuncio così:* $\int dx = x$ *la seconda così* $d\int x = x$".

Vediamo dunque come Leibniz risolve il problema dell'inversione. Come abbiamo visto Leibniz usa il differenziale con una certa disinvoltura: il suo dx è "*id est differentia inter duas x proximas":* talvolta viene usato per indicare un incremento arbitrario, talvolta per indicare un incremento infinitesimo (ma pur sempre finito). È in quest'ultima accezione che concepisce $\int f(x)dx$ come somma di tutte le aree del tipo f(x)dx . In questo caso f(x)dx è un'area infinitesima. Esisterà quindi una funzione F(x) tale che il suo differenziale dF sia tale che dF = f(x)dx, dove f(x) non è da intendersi uguale alla sua derivata bensì rapporto di due differenziali (Leibniz non sa derivare!) Pertanto data una f(x)dx egli determina una F(x) tale che dF = f(x)dx. Ma dF è una "differenza leibniziana", per cui la somma delle f(x)dx diventa la somma delle differenze dF. Dividendo un intervallo [a,b] in *n* intervalli indicati con a= x_0, x_1, x_2, x_3, … , x_{n-1}, x_n =b si avrà che i successivi valori di dF saranno: $F(x_1) - F(a)$, $F(x_2) - F(x_1)$, $F(x_3) - F(x_2)$,… $F(b) - F(x_{n-1})$. La somma di questi dF è F(b) – F(a) . Ma allora $\int f(x)dx$ = F(b) – F(a) dove dF = f(x)dx.

Dal 1685 al 1700 sulla rivista 'acta eruditorum' pubblicò i suoi lavori in cui andò precisando le potenzialità e gli ambiti di applicazione del suo nuovo calcolo. A proposito scrisse:" *questi invero sono soltanto gli inizi di una geometria molto più sublime che si estende a qualunque dei problemi più difficili e più belli della matematica, che senza il nostro calcolo differenziale* *nessuno tratterebbe con pari facilità".* Seguendo quindi due percorsi completamente diversi Newton e Leibniz arrivano alla sorgente del Calcolo Sublime. " *da questo momento la storia del Calcolo Infinitesimale si divide in due grandi filoni di ricerca: da un lato si cercarono le molteplici applicazioni di uno dei più versatili strumenti che mai la matematica abbia avuto a disposizione, dall'altro si operò per consolidarne i principi su cui si fondava"* [Bourbaki].

Relativamente alla disputa sulla paternità del Nuovo Calcolo che contrappose per anni non solo gli autori Newton e Leibniz, ma addirittura le scuole di riferimento, quella britannica da una parte e quella continentale dall'altra, *"il giudizio sereno della critica moderna consiste nel riconoscere il contributo preziosissimo sia di Newton che di Leibniz, escludendo il plagio in ciascuno di essi"* [Geymonat].

MATEMATICA: INSEGNAMENTO QUOTIDIANO IN CLASSE AD ALLIEVI IN DIFFICOLTÀ O CON BISOGNI EDUCATIVI SPECIALI

***Paola Damiani*[1]*, Anna Paola Longo*[2]**

[1]*Pedagogia speciale, Università di Torino*

[2]*Politecnico di Torino, Gruppi di ricerca Grimed e Ma.P.Es*

Primo punto

A partire da Lisbona 2000, il principio del *successo formativo* costituisce il fondamento e la finalità della scuola. Si tratta di un principio strategico, poiché nella *società della conoscenza* tutti gli studenti devono essere messi in condizione di avere accesso a forme di apprendimento continuo, necessarie per diventare cittadini attivi e responsabili. Ogni allievo, secondo il *framework* europeo, deve poter sviluppare la propria competenza e la propria possibilità di apprendere continuamente all'interno di diversi e mutevoli contesti e processi formativi. Il processo di sviluppo e apprendimento del singolo, di cambiamento continuo, deve avvenire in sintonia con il cambiamento di tutte le persone e dei contesti; la scuola deve costituire perciò un pilastro per lo sviluppo, l'inclusione e la cittadinanza di tutti i suoi studenti. Tale *mission* non risulta di semplice realizzazione; la scuola attuale è infatti chiamata ad affrontare positivamente quello che viene considerato il "dilemma del pluralismo educativo": coniugare i differenti bisogni educativi – individuali, sociali, culturali, religiosi, etnici – degli allievi e delle loro famiglie, con il dovere di elaborare un progetto formativo comune, coerente con il contesto territoriale (Pavone, 2012) e, soprattutto, in grado di garantire il successo formativo.

Occorre costruire pensieri e azioni intenzionali, mirati e condivisi che si traducano sostanzialmente in un nuovo modo di pensare e fare la scuola e, innanzitutto, in una "nuova" didattica.

I recenti documenti ministeriali sui Bisogni Educativi Speciali – BES (Direttiva Ministeriale del 27/12/2012 e Circolare applicativa n. 8 del 6 Marzo 2013) – richiedono agli insegnanti di attrezzarsi per fare fronte alla situazione reale della classe nella sua totalità: non solo gli studenti sono per natura uno diverso dall'altro, ma vanno anche aumentando molteplici situazioni di disagio che possono variare nel tempo, oppure differenti livelli di formazione per la provenienza da ambienti diversi o per la diversità del livello di preparazione dovuto alle scuole precedentemente frequentate.

In particolare, i documenti sopracitati riprendono la tripartizione dell'UNESCO in fasce di bisogni, distinguendo all'interno della macro-categoria dei BES l'area della disabilità, l'area dei disturbi evolutivi specifici e l'area dello svantaggio, e si fondano sulla Legge n. 53 del 2003 con la centratura sui principi di personalizzazione e flessibilità didattica e organizzativa, pur con i dovuti distinguo. L'estensione della categoria dei BES oltre gli allievi con disabilità e certificazioni consente in sintesi di affermare che, a scuola, lo studente con BES è uno studente che non risponde nella maniera attesa al curricolo o non riesce a fronteggiare il normale ambiente di classe senza aiuto aggiuntivo (Cowne, 2003, p. 14). Il concetto di "aiuto", pur essendo da tempo presente nella letteratura pedagogica, rappresenta il concetto-chiave di una didattica in grado di rispondere alle sfide della contemporaneità. Lo spostamento dai Programmi ministeriali alle Indicazioni nazionali ha evidenziato il ruolo fondamentale dell'autonomia scolastica e della didattica e il compito della scuola nel rendersi garante del conseguimento di obiettivi/traguardi vincolanti. Il nuovo sistema indica i saperi essenziali (conoscenze e abilità) per il loro conseguimento, lasciando alle singole istituzioni scolastiche la libertà di scegliere le soluzioni migliori e più favorevoli allo scopo. "*La scuola realizza appieno la propria funzione pubblica impegnandosi, in questa prospettiva, per il successo scolastico di tutti gli studenti, con una* *particolare attenzione al sostegno delle varie forme di diversità, di disabilità o di svantaggio. La definizione e la realizzazione delle strategie educative e didattiche devono sempre tener conto della singolarità e complessità di ogni persona, della sua articolata identità, delle sue aspirazioni, capacità e delle sue fragilità, nelle varie fasi di sviluppo e di formazione" (Nuove Indicazioni per il primo ciclo, 2012).*

Secondo punto

La ricerca psicopedagogica mette in luce l'importanza della progettazione e della costruzione di ambienti di apprendimento adeguati; si tratta di ambienti scomponibili e riorganizzabili in base alle esigenze didattiche degli studenti, funzionali alla costruzione di percorsi individuali attraverso la disposizione di strumenti e materiali adatti al livello, agli stili cognitivi e di apprendimento e ai contesti.

Nella scuola che cambia, gli insegnanti possono/devono decidere cosa è utile, fattibile, importante ovvero devono «farsi carico di scegliere» (Chiesa, 2013); l'insegnante diventa il regista e il garante del processo di insegnamento-apprendimento efficace e della partecipazione di tutti gli allievi, nessuno escluso. Risulta evidente la necessità di una forte professionalità, in termini di consapevolezza e formazione, da parte di tutti i docenti, ma risulta altrettanto evidente che tale processo di professionalizzazione è molto complesso e presenta ancora molte zone d'ombra.

Ad esempio, per quanto riguarda la richiesta di una nuova didattica per le classi complesse, la risposta teorica di pedagogisti, psicologi, specialisti di vario genere contiene utili suggerimenti, **ma non esemplificazioni didattiche che rendano possibile intraprendere in ogni disciplina una strada idonea ad affrontare la molteplicità e diversità delle singole situazioni.**

Si sente parlare di esperienza come via aurea per l'apprendimento, si sente proporre la personalizzazione e individualizzazione dell'insegnamento, si sente proporre la valutazione come via per la formazione.

Come è possibile attuare tutto questo, per un insegnante di matematica, dalla prima classe della scuola primaria all'ultima della scuola superiore? E' consono alla natura (astratta) della disciplina o c'è un contrasto insanabile?

Terzo punto: insegnare matematica

Per rispondere a queste domande, chiediamoci come intende (o potrebbe intendere) un insegnante di matematica le affermazioni del pedagogista. Chi insegna matematica, deve combattere non solo con le situazioni di svantaggio, ma anche con le difficoltà insite nella disciplina, per la sua forma astratta e simbolizzata, che pone problemi a molti, tanto che accanto all'errore, la ricerca in didattica della matematica riconosce ora l'esistenza di ostacoli, dovuti alla natura della disciplina o all'organizzazione della didattica. Sul tema della difficoltà riporto uno stralcio da una intervista fatta a G. Vergnaud:

D-Gli studenti presentano generalmente timore o resistenza a confrontarsi con la matematica. Perché succede questo?

R-La risposta è ovvia perché realmente la matematica non è facile; inoltre in questo campo o si sa o non si sa e questo è molto più chiaro in questa materia che nelle altre. La matematica tende ad essere difficile perché lo studente deve accumulare una serie di conoscenze, alle quali deve appoggiarsi per costruire nuove conoscenze, in modo da percorrere una scala dove non si può passare al secondo gradino senza aver compreso il primo e generalmente questi processi si insegnano in forma rapida per cui gli studenti restano frequentemente indietro.

Un altro motivo è che molte volte la matematica non è ben insegnata perché gli insegnanti non possono contare su una buona formazione per insegnarla (Vergnaud, 1998).

Aiuto

Come può un insegnante mettere in pratica in matematica il suggerimento della facilitazione, frequentemente proposto dal pedagogista? Naturalmente occorre farlo senza intaccare il senso e il valore formativo di questa disciplina, e quindi sono da respingere i tentativi che la riducono ad applicazione meccanica di regole, di cui si ignora il significato e l'utilità (sempre successiva! il presente viene svuotato). Inoltre, l'aiuto può essere significativo ed efficace per la formazione, solo se l'adulto (insegnante o genitore) non si sostituisce all'allievo. L'aiuto più efficace è quello che viene dato prevedendo le difficoltà e gli ostacoli e assicurandosi che il discente stia facendo il cammino più conveniente per la sua personale riscoperta del sapere.

Su questo tema prosegue l'intervista appena citata a G.Vergnaud:

D-Quale è la sua raccomandazione per gli insegnanti di matematica?

R-Raccomando di cercare e ricevere informazioni migliori circa la concettualizzazione, cercare la forma in cui i bambini assimilano la conoscenza; molti insegnanti si illudono che se insegnano bene i concetti, i bambini li devono apprendere bene. Tuttavia, il processo di apprendimento richiede un certo tempo che di solito è lungo e non sempre, anche se si spiega bene, si apprende bene (Vergnaud 1998).

Didattica inclusiva

La didattica della matematica si è sviluppata recentemente come una disciplina autonoma. A questa mi rivolgo, ricercando elementi specifici su cui fondare un metodo adeguato alla presenza di una pluralità di necessità educative. Il riferimento alla ricerca permette di individuare elementi per una didattica inclusiva della matematica, di cui cerco di individuare le linee generali. Mi sono già occupata di questo problema in una ricerca presentata a un recente convegno del Grimed (Longo, Sorgato, 2009). Per avvalorarne la possibilità, presenterò, alla fine di questo testo, una esperienza attuata in scuola primaria.

Successo formativo

Il successo formativo (di cui si parla nel primo punto) in matematica non indica un punto di arrivo riferibile a tutta la classe, ma è personale, perché deve tenere conto delle condizioni di ciascuno, cercando di valutare il suo particolare processo di maturazione. Alcune delle condizioni di tale successo vengono fondate fin dall'inizio del processo scolastico, come l'abitudine a usare creatività e spirito di iniziativa e a non aver paura dell'errore. Non sempre sono strettamente individuali, non riguardano solo lo sviluppo dell'intelligenza e la capacità degli insegnanti di "spiegare bene", come dice G. Vergnaud nell'intervista citata al punto precedente. Il successo è legato anche all'affettività (interesse, motivazione, adesione al compito, tenacia) e al confronto tra pari. Da subito si fondano le condizioni di un lavoro che produce apprendimento, aprendo la via alle buone abitudini in cui consisterà il metodo di studio. La falsa convinzione degli insegnanti che il metodo di studio sia una capacità spontanea produce altre difficoltà agli allievi, tanto più che "la matematica è diversa" (espressione di H. Freudenthal, 1994) e si studia in modo diverso dalle altre discipline.

Attività dell'allievo

Non si può sottovalutare il fatto che l'apprendimento della matematica non dipende solo dall'insegnante, ma è soprattutto il risultato dell'attività personale di ciascun allievo:

Se la conoscenza si elabora lentamente, con leggi di sviluppo che psicologi e pedagogisti devono studiare, è proprio perché essa riflette ***l'attività*** *del soggetto nel mondo materiale e non soltanto il mondo materiale di per se stesso. Il simbolo non è che la parte direttamente visibile dell'iceberg concettuale; la sintassi di un sistema simbolico non è che la parte direttamente comunicabile del campo di conoscenza che esso rappresenta. Questa sintassi non avrebbe nessun valore senza* *la semantica che l'ha prodotta, cioè senza l'attività pratica e concettuale del soggetto nel mondo reale" (Vergnaud 1994, pag.25).*

Dunque un apprendimento significativo ha le sue radici nell'esperienza. Può un matematico riconoscere il legame della matematica con l'esperienza? Certamente no, se per lui la matematica è solo l'ultima descrizione del sapere, formalizzata al massimo e completamente ripulita dai legami iniziali con il fare, con l'esperire. Ma la traccia rimane, occorre saperla riconoscere, far nascere un lavoro su queste tracce. Per esempio la parola "vertice" è legata alla direzione verticale, che è un fatto di esperienza, ormai espulso dalla geometria. L'analisi della parola "frazione" offre un ottimo aggancio allo sviluppo dell'aritmetica. E poi, in definitiva, la domanda essenziale per un insegnante non è sulla storia ma sulle caratteristiche dell'apprendimento, della formazione del pensiero personale.

La classe, contesto di apprendimento

Ricordiamo che ogni allievo è integrato in un contesto di apprendimento, la classe, fonte di rapporti costruttivi. Ogni bambino, lavorando prima personalmente e confrontandosi poi con i compagni, compie un cammino di elaborazione delle esperienze fatte, partendo dal suo livello personale, utilizzando le sue doti e impiegando tutto il tempo a lui necessario.

La discussione in classe non progredisce per via di opinioni, ma per il confronto di esperienze pratiche o concettuali di ciascuno. Quando molti sono i percorsi personali e i tempi di realizzazione, la classe non può essere un insieme caotico e casuale, perché deve permettere un'effettiva rete di scambi personali, sotto l'abile guida dell'insegnante, indispensabile motore dell'attività complessiva, fatta di esperienze e di successiva estrapolazione della conoscenza.

Reinvenzione guidata del "fare" matematica

Il processo di "reinvenzione guidata" è ampiamente illustrato dal matematico H. Freudenthal:

"*Quale sia l'importanza dei contenuti e delle abilità, essa è molto minore nella matematica che nelle altre materie. Poiché ho presentato insistentemente la matematica come un'attività, la risposta alla domanda: "Qual è la meta?" sarà: "Un' attività". In altre parole, il discente deve reinventare il fare matematica piuttosto che la matematica; l'azione di astrarre piuttosto che le astrazioni; il formalizzare piuttosto che costruire delle formule; il costruire algoritmi piuttosto che gli algoritmi; il parlare piuttosto che il linguaggio. Se il discente viene guidato a reinventare tutte queste cose, allora le conoscenze e le abilità verranno apprese più facilmente, e più facilmente saranno trattenute e applicate"* (Freudenthal, 1994, pag.76).

Questa ipotesi di metodo valorizza al massimo il rapporto didattico e quindi sia la funzione dell'allievo che quella dell'insegnante, motore dell'attività di ciascuno e della classe. Nella scuola primaria e nella secondaria di primo grado una didattica inclusiva della matematica parte dalla proposta di un lavoro a cui ciascuno possa partecipare secondo il suo livello, esige che l'alunno sia stimato per il passo compiuto nel lavoro personale e non per il risultato ottenuto nei tempi prefissati dall'insegnante e dall'Istituzione. Questo esige "pensieri e azioni intenzionali" (come detto nel primo punto) per la proposta di lavoro e per la determinazione a lasciare che ciascun allievo utilizzi gli strumenti di cui è già in possesso. Quanti bambini risolvendo problemi contano gli oggetti su un disegno invece di scrivere un'addizione, oppure sostituiscono alla moltiplicazione una somma ripetuta o alla divisione una sottrazione ripetuta! Hanno compreso il significato dell'operazione, ma non dominano ancora l'algoritmo.

Valutare per provocare

La valutazione sarà anzitutto formativa, finalizzata alla ripresa, alla correzione, alla valorizzazione, una compagnia autorevole nell'attività di ciascuno, una compagnia che mai si sostituisce, ma pone domande che provocano il pensiero. Da parte dell'insegnante, è una questione di convinzioni sulla natura della matematica, dell'apprendimento, dell'insegnamento (Longo 2008).

Lavoro personale e comune

Il lavoro individuale è condizione indispensabile perché ciascun bambino possa mettersi alla prova per interpretare il compito e attuare tentativi di soluzione, mettendo in opera la sua razionalità personale, sempre esistente. Èquesta che deve crescere, prima dei meccanismi: la matematica forma la persona se non è solo ricercare il bottone giusto da premere per avere il risultato, ma se è anzitutto un pensiero creativo. Il lavoro personale favorisce il successivo lavoro comune, lo rende possibile preparando materia e clima di confronto.

Problema come metodo didattico

All'applicazione di questi criteri didattici risponde bene l'uso di situazioni problematiche e di problemi (Longo, Barbieri, 2008), il cui nucleo fondante non è il testo e lo schema classico di soluzione predisposto dall'insegnante, ma una domanda pregnante che provochi ciascuno a elaborare liberamente una risposta, con l'unico vincolo di giustificare le proprie scelte. Non c'è bambino così sperduto che non possa tentare, inizialmente riproducendo la situazione con oggetti o disegni, contando con le dita o inventando vie personali. Imparare matematica non è un momento di improvvisa illuminazione, ma è una storia, una costruzione personale e sociale.

Permettere a ciascuno un suo percorso, favorendo il lavoro per tentativi, arricchisce la classe perché offre la possibilità di scambi costruttivi.

Oggetti mentali e linguaggio comune

Una parte fondamentale nel percorso dell'insegnamento/apprendimento della matematica spetta al linguaggio comune (Ferrari 2004). Gli oggetti matematici sono ideali (Maier, 1998): prima di introdurre il linguaggio proprio della disciplina, occorrono esperienze e riflessioni (espresse nel linguaggio comune) che generino questi oggetti della mente. Per esempio l'altezza di un triangolo (o più in generale l'altezza in geometria) non coincide con l'altezza di una persona o di una costruzione secondo l'esperienza comune. Tant'è che un triangolo ha 3 altezze mentre ognuno di noi ha una sola altezza. Le prime esperienze, esaminate nel linguaggio comune, sono successivamente rappresentate graficamente (Visconti, 2009), primo passo verso procedimenti risolutivi e astrazione. L'ultima fase sarà quella dell'introduzione del linguaggio specifico come "traduzione" del linguaggio comune e della rappresentazione.

Rappresentare liberamente

La rappresentazione libera nei problemi è essenziale per provocare adeguate rappresentazioni mentali di ciascuno e per favorire l'accettazione finale di rappresentazioni convenzionali.

Quale competenza professionale è necessaria all'insegnante? Senz'altro una competenza che metta in grado di scegliere (come detto nel secondo punto). Una competenza che preveda non solo la conoscenza di "fatti" matematici, ma anche il significato che va riconosciuto, il legame con altri fatti, la strada mentale possibile per ricostruirli nella propria mente. Matematica sì, ma soprattutto epistemologia della conoscenza matematica.

Esemplificazione didattica

(esperienza di Danila Miserotti, anno 2009, classe quarta primaria)

L'insegnante vuole introdurre l'equivalenza di frazioni, che sarà definita a parole solo dopo un avvicinamento (conoscenza intuitiva) attraverso problemi. Avendo già sperimentato l'efficacia dell'insegnamento attraverso problemi, inizia con questa proposta di lavoro, ripresa dalla programmazione didattica (Davoli, 2009) proposta dal gruppo di ricerca Ma.P.Es:

"Maria compie gli anni, perciò invita i suoi amici per una festa. Quando apparecchia, deve sistemare 6 torte su 4 tavoli, in modo che su ciascun tavolo ce ne sia la stessa quantità.

Come può fare?

Come possiamo rappresentare in simboli la quantità di torte e parti di torta che Maria metterà su ciascun tavolo?"

Modalità di lavoro

Il primo approccio avviene attraverso azioni concrete, fase che è opportuno riprendere, nonostante si sia in quarta, perché i bambini affrontano una situazione nuova. La classe viene divisa in gruppi, a ciascun gruppo è consegnata una confezione di 6 crostatine, con un coltello per tagliarle. E' chiesto di *operare* proprio come se si trovassero nella situazione di Maria.

I gruppi hanno provato e hanno trovato soluzioni diverse, eccone alcune:

- Alcuni bimbi hanno lasciato 4 torte intere e diviso le restanti 2 a metà, disponendo 1 torta e mezza su ciascuno dei 4 tavoli.
- Altri bimbi hanno diviso tutte e 6 le torte in 4 parti e hanno distribuito le 24 fette sui 4 tavoli
- Altri ancora hanno diviso le 6 torte a metà e hanno distribuite le 12 metà sui 4 tavoli.

Il passo successivo è quello della rappresentazione (libera) attraverso il disegno:

1°MODO

1 torta intera e mezza torta su ognuno dei 4 tavoli

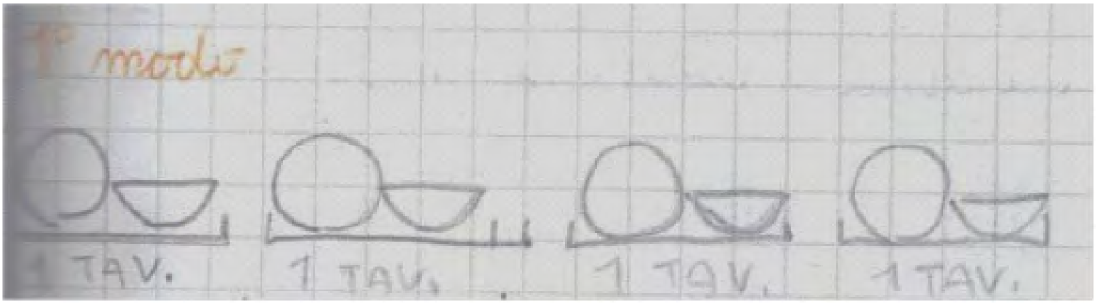


Figura 1

2° MODO

Dividere tutte e 6 le torte in 4 parti e distribuire le 24 fette sui 4 tavoli

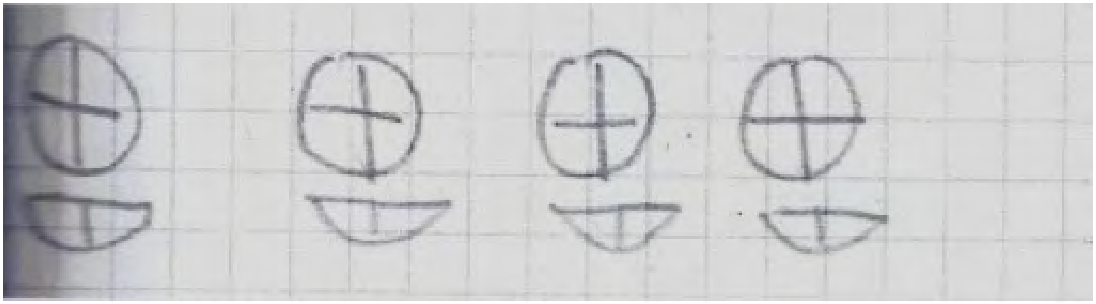


Figura 2

3° MODO

Dividere le 6 torte a metà e distribuire le 12 metà sui 4 tavoli.

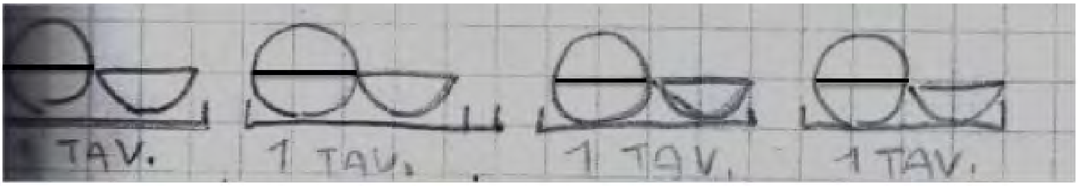


Figura 3

Attraverso il linguaggio simbolico per le frazioni, che in questa fase dell'anno è già noto, gli alunni si sono espressi così:

- Maria sistema 1 torta e ½ su ogni tavolo
- Maria sistema 1 torta divisa in 4 (parti uguali) e 2/4, qualcuno ha detto 6/4 di torta su ogni tavolo
- Maria sistema 1 torta divisa in 2 (parti uguali) e ½, qualcuno ha detto 3/2 di torta su ogni tavolo.

Nella discussione, guidata dall'insegnante, avviene il confronto delle soluzioni e delle rappresentazioni. Tutti sono stati ascoltati e valorizzati.

E' seguita la sintesi comune sul quaderno, in vista di una ripresa personale. Quest'ultimo punto è un avvio allo studio, che viene regolarmente accentuato nella classe, per evitare un fenomeno molto comune, che tutti seguono e capiscono, ma poi non imparano.

Nuove scoperte emergono durante il confronto e vengono messe in comune:

- Osservando le frazioni 3/2 e 6/4, qualche bambino ha notato come il numeratore e il denominatore della seconda frazione sono il doppio di numeratore e denominatore della prima.
- Altri hanno notato che, pur essendo scritte in modo diverso, le frazioni rappresentano la stessa quantità.

Si è creata così la situazione in cui la maestra può intervenire, segnalando che due frazioni con questa caratteristica si dicono "frazioni equivalenti". Aggiunge il nome ufficiale ma la relazione che le caratterizza è stata ormai scoperta dai bambini.

Ripresa

Per fissare le idee, l'insegnante propone un problema analogo nella struttura, ma con dati differenti, su cui chiede di lavorare in modo diverso.

Lucia compie gli anni, perciò invita i suoi amici per una festa. Quando apparecchia, deve sistemare 12 torte su 8 tavoli, in modo che su ciascun tavolo ce ne sia la stessa quantità.

Come può fare?

Come possiamo rappresentare in simboli la quantità di torte e parti di torta che Lucia metterà su ciascun tavolo?

Modalità di lavoro

Questa volta si chiede di lavorare in modo autonomo e inoltre:

Non vengono più fornite le crostatine, l'immaginazione deve entrare in azione.

I ragazzi hanno a disposizione un foglio su cui fare i loro schizzi per arrivare alla soluzione.

Le rappresentazioni dei bambini sono analoghe alle precedenti. Questo modo di procedere si è rivelato adeguato a **tutti** i bambini compresi quelli con difficoltà di apprendimento. Fa parte della classe un alunno con discalculia, ma ciò non gli impedisce di pensare e di apportare il suo contributo al lavoro della classe.

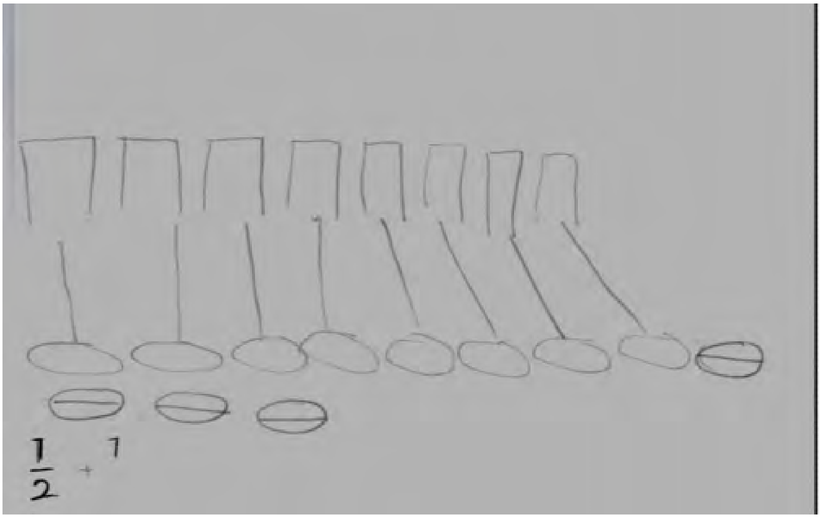


Figura 4

Anche questo alunno ha avuto la possibilità di accedere alla conoscenza del rapporto che lega alcune frazioni, dette equivalenti, conoscenza fondamentale per comprendere successivamente cosa sia un numero razionale. Solo a questo punto avrà significato proporre l'uso del computer o di altri strumenti compensativi, che potranno aiutarlo solo nel calcolo, ma non nell'individuare il suo uso, il suo significato.

Attraverso quest'attività l'insegnante ha nuovamente verificato che:

- la matematica non è solo "fare calcoli";
- la persona, in qualunque condizione si trovi, è capace di pensiero;
- ogni alunno può portare il proprio contributo unico e originale al lavoro della classe;
- la classe può essere luogo di esperienza, compagnia guidata all'apprendimento e allo sviluppo della ragione.

Bibliografia

Cowe, E. (2008). *The* SENCO *Handbook. Working within a whole school approach*. Routledge.

Cresson, E. (1995). *Verso la società della conoscenza*. Libro bianco della Commissione europea. Bruxelles.

Davoli, A. et al. (2009). *Il curricolo per competenze. Dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria: un'esperienza realizzata*. Roma: Armando.

Ferrari, P.L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Freudenthal, H. (1994). *Ripensando l'educazione matematica*. Brescia: La Scuola.

Longo, P. (2008). *La valutazione in matematica: un processo educativo*. In *Difficoltà di apprendimento*. Trento: Erickson.

Longo, P.& Barbieri, S. (a cura di) (2008). *Insegnare matematica. Esempi di buone prassi in Lombardia*. Milano: Guerini e Associati.

Longo, P.& Sorgato, S. (2009). *Matematica nella scuola primaria: una didattica inclusiva*. In *Le competenze matematiche per l'identità, l'autonomia, la cittadinanza,* Convegno "Matematica e difficoltà" Grimed. Bologna: Pitagora.

Maier, H. (1998). *Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi*. Bologna: Pitagora.

Pavone, M. (2010). *Dall'esclusione all'inclusione*. Milano: Mondadori.

Vergnaud, G. (1994). *Il bambino, la matematica, la realtà*. Roma: Armando.

Vergnaud, G. (1998). *Horror a las matematicas*. (testo reperibile all'indirizzo: http://aupec.univalle.edu.co/informes/febrero98/matematicas.html)

Visconti, G. (2009). *Un'esperienza con un alunno discalculico*. In *Le competenze matematiche per l'identità, l'autonomia, la cittadinanza*. Convegno "Matematica e difficoltà" Grimed. Bologna: Pitagora.

RAPPRESENTARE E RAPPRESENTARSI: LA MATEMATICA IN SCENA FRA SCUOLA DELL'INFANZIA E PRIMA CLASSE DELLA SCUOLA PRIMARIA

Carmela Fiore[2], Antonella Montone[1], Maria Pagone[3], Michele Pertichino[1]
[1]Dip. di Matematica Univ. di Bari, [2]I.C. "De Amicis" Bari, [3]I. C. "Sylos" Bitonto(BA)

Premessa

La ricerca sperimentale è stata realizzata in collaborazione con il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Bari ed è stata pianificata all'interno di un progetto organizzato parallelamente fra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria. Classificare, confrontare, porre in relazione, individuare strategie per affrontare situazioni problematiche, così come le Indicazioni Nazionali propongono, hanno portato ad affrontare il problema della rappresentazione "tra tre livelli di oggetti: il referente, il significato, il significante" (Bartolini Bussi, 2008).

Dal punto di vista metodologico si è seguito un itinerario che, partendo dall' esperienza, ha portato a livelli di conoscenza attraverso scelte consapevoli di strategie, affinando e sviluppando coerenza linguistica (Arcà *et al*., 1982).

Il materiale didattico prodotto è stato presentato dagli stessi alunni alla mostra di fine anno illustrando a insegnanti e genitori il percorso e la metodologia seguita.

Riferimenti teorici

L'obiettivo principale della nostra ricerca sperimentale è stato quello di dare sistematicità alle idee matematiche e non, possedute dai bambini a livello intuitivo, attraverso l'immaginazione, intesa come modo di operare della mente umana. A tal riguardo abbiamo fatto riferimento alle note teorie vygotskiane sulla creatività e l'immaginazione. "L'immaginazione costruisce sempre con materiali forniti dalla realtà. È vero che l'immaginazione può raggiungere via via, nel suo processo combinatorio, sempre nuovi livelli, partendo dalla combinazione di elementi primari della realtà, e proseguendo con quella di immagini della fantasia, e così all'infinito. Ma gli elementi ultimi, di cui verrà a comporsi anche la più fantastica delle rappresentazioni, la più remota dalla realtà, saranno sempre e nient'altro che impressioni del mondo reale." (Vygotskij, 2010).

"L'attività creatrice dell'immaginazione è in diretta dipendenza dalla ricchezza e varietà della precedente esperienza dell'individuo, per il fatto che questa esperienza è quella che fornisce il materiale di cui si compongono le costruzioni della fantasia. Quanto più ricca sarà l'esperienza dell'individuo, tanto più abbondante sarà il materiale di cui la sua immaginazione potrà disporre. Ecco perché, nel bambino, l'immaginazione è più povera che nell'adulto: la cosa si spiega con la maggiore povertà della sua esperienza." (Vygotskij, 2010).

Inoltre l'immaginazione creativa si manifesta nei giochi. "Il gioco", inteso non come, "semplice ricordo delle impressioni vissute, ma una rielaborazione creatrice di quelle, un processo attraverso il quale il bambino combina tra loro i dati dell'esperienza per costruire una nuova realtà, rispondente alle sue curiosità e ai suoi bisogni. Ma appunto perché l'immaginazione costruisce solo con materiali presi dalla realtà bisogna che il bambino, per nutrire la sua la sua immaginazione e applicarla a compiti adeguati, che ne rafforzino le strutture e ne allarghino gli orizzonti, possa crescere in un ambiente ricco di impulsi e di stimoli, in ogni direzione." (Rodari, 1973).

La metodologia

La metodologia utilizzata è stata quella dell' «Inquiry approach», un modello derivato dalla critica del metodo tradizionale di trasmissione di conoscenza-apprendimento.

Attraverso l'«inquiry approach» è possibile:

- Incoraggiare l'esplorazione;
- verbalizzare idee matematiche;
- scoprire che i problemi matematici possono avere più di una risposta;
- favorire la fiducia in se stessi nelle attività matematiche.

In altre parole, è possibile attraverso tale metodologia condurre gli studenti a sviluppare capacità matematiche necessarie a porre e a risolvere problemi. Il problem solving e il problem posing hanno pertanto avuto centralità metodologica in questa ricerca, in quanto hanno permesso di intuire e comunicare concetti matematici e di apprezzarne la validità e le potenzialità applicative. In altri termini per essere "buoni" studenti, i bambini devono essere degli "inquirers". "Pertanto soltanto il dubbio e l'incertezza può motivare la ricerca di nuova conoscenza". (Skagestad, 1991).

La ricerca sperimentale

La ricerca è stata realizzata nella Scuola dell'Infanzia "C. Del Prete" di Bari, in una sezione di 20 bambini di 4 e 5 anni, a fine anno scolastico, impiegando circa 20 ore.

Contemporaneamente è stata realizzata nella classe prima della Scuola Primaria "D. L. Milani", con 16 alunni provenienti da un ambiente sociale medio-basso, in alcuni casi deprivato, condizione sociale che tuttavia ha favorito alcune osservazioni che hanno permesso di fare il salto da una concretezza marginale a una razionalità raffinata in coerenza con quanto affermato da Vygotskij e Rodari.

Determinante, per la realizzazione del progetto e per meglio cogliere le differenze che si sono rilevate fra i due ordini di scuola, è stata la scelta del periodo in cui la ricerca è stata attuata: a fine anno scolastico. Pertanto la maggior parte degli alunni di classe prima aveva già acquisito le abilità di letto-scrittura e l'idea delle "regole" faceva già parte del loro aspetto cognitivo.

Attraverso i travestimenti e con la forte motivazione della successiva sceneggiatura sono stati costruiti gli strumenti necessari per raggiungere la conquista di alcuni concetti della matematica, quali: la classificazione, il confronto, le relazioni, le corrispondenze. Gli alunni hanno usato algoritmi e procedure, dovendo individuare regole per alcune scelte operative, per ascoltare e farsi ascoltare, evidenziando seppur a livello non totalmente cosciente quanto la Matematica sia un forte strumento per la comunicazione e per comunicare in maniera corretta: infatti i bambini durante tutto questo lavoro hanno condiviso decisioni.

Le fasi

L'impalcatura

La prima parte di questa attività l'abbiamo chiamata "Impalcatura" e come tutte le impalcature, indispensabili per le costruzioni, alla fine del lavoro scompaiono.

Nella scuola Primaria gli alunni sono stati stimolati attraverso osservazioni e confronti a soffermarsi sulle loro caratteristiche fisiche, mettendo in rilievo somiglianze e differenze nell'aspetto fisico ma anche quelle relative al carattere, ai desideri e ai gusti.

Il lavoro è stato avviato con una prima rappresentazione spaziale del bambino:

- Gli alunni hanno disegnato su un grande foglio da pacco la sagoma del corpo di un bambino; i bambini in pieno accordo tra loro, dopo averne discusso, hanno individuato una bambina considerando l'altezza come dimensione di confronto "*perché deve entrare nel foglio*" (Figura 1).

- Successivamente sono state riconosciute alcune parti del corpo; ogni bambino ha scelto un cartellino su cui era scritta una parte del corpo e l'ha posizionato sulla sagoma. Man mano che l'attività è proseguita i bambini si sono resi conto che stavano completando solo un lato della sagoma, intuendo la simmetria del nostro corpo (prima intuizione di un concetto matematico spaziale) e deducendo che ogni parte si ripete identica dall'altra. Pertanto hanno voluto tracciare una linea (asse di simmetria) per delineare le due parti (Figura 2).
- Nell'intento di familiarizzare con una prima descrizione di se stessi, è stato proposto un testo che descriveva una bambina con relativo disegno sia del suo corpo che dei suoi indumenti.

Figura 1

Figura 2

A questo punto è stato possibile proporre ai bambini un primo tentativo di descrizione di se stessi davanti allo specchio. La maggior parte di loro si è mostrata intimorita, solo alcuni sono sembrati compiaciuti e disinvolti non solo davanti allo specchio ma anche nel parlare di sé.

Considerando che per una descrizione più completa di una persona o di un personaggio non sono sufficienti gli aspetti fisici, è stato opportuno parlare anche degli aspetti caratteriali ed emozionali.

Sono stati preparati dei cartellini che riportavano sensazioni fisiche o emotive e per i bambini è stato semplice distinguerle pensando a "ciò che sento con il corpo o con il cuore": (senti caldo -sei contento -ti vergogni –hai sete –ti senti triste –sei arrabbiato –hai mal di pancia –ti fanno il solletico –ti senti allegro –sei offeso –sei meravigliato –hai mal di testa …).

Molte sensazioni che a noi adulti sembrano scontate non lo sono altrettanto per i nostri bambini, infatti per i più piccoli non è semplice riconoscere il proprio stato d'animo. Proprio in questo momento qualcuno ha voluto spiegare alcune sensazioni provate durante attività precedenti, come quella allo specchio; Domenico per esempio ha detto "*Quando mi sono descritto allo specchio mi sono vergognato*".

Nella Scuola dell'Infanzia l'attività è stata avviata con l'osservazione e la descrizione di sé allo specchio, rispondendo a domande quali: chi sono? Chi vorrei essere?

Alla domanda "chi sono?", hanno risposto descrivendosi fisicamente, soffermandosi sulle varie espressioni del volto, si sono rappresentati graficamente e successivamente hanno utilizzato la lavagna magnetica per ricostruire il puzzle della figura umana e le varie espressioni.

Alla domanda "chi vorrei essere?" hanno fatto riferimento a figure della quotidianità, le hanno rappresentate graficamente e anch'esse sono state ricostruite sulla lavagna magnetica.

Alle stesse domande, nella Scuola Primaria, ogni bambino si è riconosciuto in un personaggio che, a differenza della Scuola dell'Infanzia, prende la strada della fantasia, uscendo dalla realtà.

Rispondendo ai suddetti quesiti (quali, "Io sono? Chi vorrei essere?"), i bambini si sono alternati, ascoltando e ascoltandosi e rispettando il proprio turno. Successivamente ciascuno di loro ha avuto la possibilità di descrivere un altro compagno e, infine, soprattutto, si è riconosciuto in un personaggio: Annamayra "*vorrei essere un astronauta così vado sulla luna e trovo oggetti sconosciuti su altri pianeti, li porto a scuola e li possiamo studiare*". È evidente la creatività fantastica ancorata alla realtà dichiarata da Vygotskij.

Gaetano "*vorrei essere un alieno per viaggiare in una navicella, andare nello spazio e vedere tutti i pianeti*". In questa espressione è chiara la sequenza logico- temporale.

Gli alunni hanno disegnato se stessi, rappresentando graficamente anche l'ambiente nel quale si trova il loro personaggio e gli oggetti che gli appartengono.

L'idea di questo percorso, apparentemente o evidentemente estraneo ai concetti matematici precedentemente citati, ha permesso, attraverso un'attività che consentiva l'analisi con la propria fisicità e il confronto con la fisicità altrui, di aprire una finestra sulle dimensioni spaziali con cui il bambino si trova a confrontarsi e le rappresentazioni di sé e degli altri. Un'attività legata al corpo, ma che ci è parsa utile a favorire l'emergere del concretizzarsi di idee già presenti nel bambino. Questo ha consentito la verifica di un aspetto delle teorie di Vygotskij.

La scenografia

Siamo entrati nel vivo della scenografia e come in ogni ambiente teatrale interviene il "trovarobe" che stimola i bambini a cambiarsi rispetto a quello che sono e vorrebbero essere: attraverso alcuni oggetti posso rappresentarmi in maniera diversa e far conoscere di me alcuni pensieri che sono nella mia mente.

È arrivato infatti a scuola un grande pacco contenente diversi oggetti per il travestimento (Figura 3).

I bambini hanno cominciato a familiarizzare con gli oggetti contenuti nella scatola, ognuno a turno ha scelto un oggetto spiegando quale fosse il suo uso e a cosa gli facesse pensare.

I bambini non hanno preso gli oggetti in modo casuale, ma li hanno scelti immaginando un loro possibile personaggio da creare.

A turno hanno creato il proprio personaggio e guardandosi allo specchio hanno scelto il nome da dare al personaggio, considerando una o più caratteristiche riferite agli oggetti indossati.

La maggior parte dei personaggi creati, a differenza del "gioco" precedente (chi vorrei essere), sono stati prodotto della fantasia, non avendo tutti a disposizione oggetti che potessero riprodurre ciò che realmente avrebbero voluto essere.

Figura 3

La sceneggiatura

I bambini si sono resi conto che il disordine degli oggetti nello scatolone rendeva difficile, quasi impossibile la ricerca degli oggetti destinati alla costruzione dei personaggi pensati. Nasce così il problema della sceneggiatura: cosa si può fare per facilitare la scelta degli oggetti per il travestimento?

Attraverso l'ascolto delle varie proposte e osservazioni si è giunti a una soluzione da tutti condivisa:

- Rossella ha proposto "Separiamo nello scatolone le cose piccole dalle grandi e se sono molto grandi le pieghiamo"
- Annamayra, rendendosi conto della possibilità di procurarci altre scatole, ha suggerito di fare una scatola per i cappelli, un'altra con le bacchette, in un'altra con i foulard, insomma una scatola per ogni tipo di oggetti.

Tutti hanno accolto la sua proposta preferendola a quella di Rossella, e questo riteniamo sia un fatto importante in quanto ovviamente la classificazione "cose piccole, cose grandi" non è una classificazione accettabile in quanto non da tutti condivisibile.

Questo va proprio nella direzione di individuare in maniera unica un insieme.

Cominciano a emergere i criteri basilari della classificazione: nelle scatole vengono messi gli oggetti secondo alcuni criteri di classificazione che permettono di costruire a partire da un insieme più grande insiemi disgiunti: un oggetto sta in una sola scatola e in due scatole distinte non troviamo uno stesso oggetto. Un concetto matematico molto raffinato, che si intuisce soltanto ma non viene definito, è quello della partizione secondo una relazione di equivalenza.

Questa relazione con cui classifichiamo gli oggetti sarà ripresa per presentare concetti successivi.

Procurate parecchie scatole di dimensioni differenti, i bambini si sono alternati nel prendere un oggetto alla volta per collocarlo nel gruppo di appartenenza che man mano hanno individuato e nominato.

Pertanto hanno formato il gruppo dei copricapo, quello degli attrezzi, un altro delle cinture, hanno messo insieme tutti gli oggetti per gli occhi e da un'altra parte tutti quelli per il collo e poi per il busto, hanno raccolto da una parte tutti i gioielli e da un'altra i guanti.

In alcuni casi si sono trovati a dover decider in quale gruppo inserire un oggetto che per il suo uso poteva stare contemporaneamente in due gruppi diversi; per esempio le collane potevano stare sia con gli oggetti per il collo sia con i gioielli, lo stesso problema si è posto per le bacchette che sono poi rientrate nel gruppo degli attrezzi - così come il dottore ha la sua valigetta o il meccanico i suoi arnesi, le bacchette servono ai maghi o alle fate per fare magie -; ognuno ha fatto delle osservazioni fino a giungere a una scelta da tutti condivisa.

A questo punto in base alla voluminosità degli oggetti appartenenti a uno stesso gruppo hanno scelto la scatola che meglio potesse contenerli. Sono state riempite otto scatole (Figura 4).

Anche nella scuola dell'infanzia è arrivato lo scatolone con tutto il materiale occorrente per i travestimenti, e, come è accaduto nella scuola primaria, i bambini si sono imbattuti nel problema di poter scegliere gli oggetti più facilmente riorganizzando efficacemente gli oggetti mischiati nello scatolone.

La soluzione proposta da Alessio, "di mettere tutto sul tavolo" viene scartata preferendo la proposta di Nicolò che raccoglie tutti i cappelli e li sistema in una scatola vuota, pertanto anche altri oggetti vengono raggruppati dai bambini in base al loro utilizzo. Per facilitare il riconoscimento delle scatole Stefano propone di etichettarle utilizzando sia il disegno degli oggetti secondo la loro funzione sia il disegno della parte del corpo interessata.

In questa fase, sostanziale è stata la differenza fra i due ordini di scuola se si fa riferimento alla teoria sullo sviluppo cognitivo del bambino secondo Piaget: nella Scuola dell'Infanzia emerge l'uso esclusivo del simbolo che è legato all'esperienza sociale e culturale del bambino; nella Scuola Primaria si accompagna ad altre forme di rappresentazione, con l'avvento della letto-scrittura si individuano simboli di carattere universale.

Figura 4

Le "regole"

Nella scuola dell'infanzia le regole per travestirsi sono suggerite dal "Mago Trasformino", che ha spedito a scuola il pacco contenente gli oggetti per travestirsi. Nella scuola primaria è stato durante lo svolgimento del gioco dei travestimenti che sono state individuate delle regole per arrivare a scelte condivise.

L'idea delle regole è già presente nella scuola dell'infanzia per cui c'è un'accettazione comune.

Nella scuola primaria invece, si ha voglia di intervenire sulle regole, costruirle e fare in modo che vengano accettate da tutti.

Le regole sono una prima modalità per esprimere algoritmi, altro argomento basilare per quasi tutta la matematica; la regola in sostanza parte da una domanda e porta a risposte. Questa è la base di tutta la matematica e il rispetto delle regole fa parte del vivere civile e qui la Matematica diventa strumento per la costruzione del "cittadino responsabile" presente nelle Indicazioni Nazionali nella parte riferita alla matematica "… la matematica dà strumenti per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri." Le regole vengono discusse e accettate da tutti, la costruzione delle regole favorisce naturalmente la capacità di essere in grado di ascoltare gli altri.

Se da un lato la matematica è uno strumento per l'argomentare e per l'ascoltare gli altri, dall'altro la comunicazione matematica è l'aspetto più complesso della disciplina (comunicare una definizione, un teorema, comprenderne il significato, argomentare un procedimento …).

Si va in scena

Nella classe di Primaria bambini hanno giocato più volte ai travestimenti ma le loro scelte ricadevano sempre sugli stessi oggetti, pertanto ognuno si è riconosciuto in un personaggio con un nome noto a tutti gli altri bambini della classe e così è stato possibile mettere in scena delle storie. I personaggi creati si sono incontrati per costruire storie secondo una sequenza temporale. Sono state avviate le sceneggiature ogni volta da due bambini-personaggio diversi; per andare avanti e coinvolgere gli altri personaggi è stato necessario improvvisare i copioni. Le rappresentazioni estemporanee sono proseguite fino al coinvolgimento di ognuno dei bambini con il proprio ruolo, anche con qualche forzatura, pur di permettere a tutti di entrare in scena.

Questa è stata la sintesi di tutto il lavoro e di tutti i concetti matematici conquistati, le storie e i personaggi sono infatti la sintesi di: classificazioni, algoritmi, regole, uso di strategie per risolvere problemi.

Figura 5

Conclusioni

Nella proposta metodologica della Scuola dell'Infanzia sono entrati in gioco contemporaneamente tutti quanti i campi di esperienza, pertanto la matematica emerge all'interno di una visione globale dei campi di esperienza.

Nella Scuola Primaria i concetti matematici emergono da un'esperienza apparentemente non matematica, ma che permette di affrontare e meglio padroneggiare concetti successivi quali ad esempio numeri, operazioni, algoritmi.

In definitiva riteniamo che "creatività", evidente in questa ricerca, sia sinonimo di "pensiero divergente", cioè capace di rompere continuamente gli schemi dell'esperienza., G. Rodari, riferendosi anche a un rapporto epistolare col matematico V. Checcucci, ricorda che è "creativa una mente sempre al lavoro, sempre a far domande, a scoprire problemi dove gli altri trovano risposte soddisfacenti, a suo agio nelle situazioni fluide nelle quali gli altri fiutano solo pericoli, capace di giudizi autonomi e indipendenti (anche dal padre, dal professore, dalla società), che rifiuta il codificato, che rimanipola oggetti e concetti senza lasciarsi inibire dai conformismi". Tutte queste qualità si manifestano nel processo creativo. E questo processo ha un carattere giocoso: sempre, anche se sono in ballo le "matematiche severe" (Rodari, 1973; Checcucci).

Bibliografia

Arcà, M., Guidoni, P. & Mazzoli, P. (1982). *Insegnare scienze*. Milano: Franco Angeli.
Bartolini Bussi, M. G. (2008). *Matematica i numeri e lo spazio*. Edizioni Junior
Rodari, G. (1973). *La grammatica della fantasia*. Trieste: Einaudi Ragazzi.
Skagestad, L.P. (1991). *The road of inquiry*. New York: Columbia University Press.
Vygotskij, L. (2010). *Immaginazione e creatività nell'età infantile*. Roma: Editori Riuniti.

SORGENTI FUNZIONALI

Graziano Gheno, Roberta Carminati
Liceo Scientifico Statale "Jacopo Da Ponte" – Bassano del Grappa (VI)[1]

Premessa

"L*e funzioni chiarite come sorgenti di percorsi intessuti di matematica*".

Questo progetto P.L.S. è stato elaborato nell'a.s. 2011/12 dal Polo di Bassano del Grappa composto da:

- Prof. Paolo Malesani, docente di matematica dell'Università di Padova
- Proff. Roberta Carminati e Graziano Gheno docenti del L.S. " J. Da Ponte"
- Prof.ssa Antonietta Curci e geom. Giuseppe Liviero del Consorzio di Bonifica del Brenta di Cittadella (PD).

Il progetto si è articolato nelle seguenti quattro fasi:

1. Modellizzazione matematica di problemi di ottimizzazione di percorsi in ambito della teoria dei grafi illustrata dal Prof. P. Malesani
2. Sviluppo di particolari funzioni da parte dei Proff. Carminati e Gheno
3. Illustrazione delle finalità del Consorzio di Bonifica del Brenta e delle problematiche relative alla progettazione di un impianto di riconversione di irrigazione, da scorrimento a pioggia, tenute da personale del Consorzio di Bonifica;
4. Elaborazione da parte degli alunni di tecniche di analisi e formalizzazione di problematiche di ottimizzazione di processi in ambito di teoria dei grafi.

Il progetto si riferisce allo studio di funzioni, analizzate in ambiti diversi, che concorrono allo studio di tecniche di programmazione relative all'ottimizzazione di percorsi in teoria dei grafi. Le funzioni sono pertanto l'elemento che genera e sostiene le problematiche affrontate.

Figura 1

1 Il presente lavoro è disponibile al sito www.liceodaponte.com

Le funzioni in ambito operatorio

Nel nostro subconscio matematico c'è l'idea che "calcolare" voglia dire eseguire operazioni su numeri con le "usuali" operazioni matematiche. In questa unità si dovrà uscire da questi schemi e lavorare in generale anche su operazioni in cui sono previsti calcoli senza numeri.

Viene proposto un percorso "dall'astratto assiomatico all'astratto determinato". Finalità del percorso è rinvigorire la pianta dell'astrazione matematica la quale ha la funzione "unificante formale di diversi", in modo che sia evidente che un concetto astratto non è ente vuoto (come normalmente si intende quando si parla di astrazione), ma al contrario un ente che "unifica" una moltitudine di concreti che "si assomigliano" tutti per una particolare caratteristica.

L'astrazione consente quindi di non precisare la natura degli oggetti su cui si sta lavorando, ma solo le loro caratteristiche "strutturali" e pertanto questi elementi vanno visti come categorie che godono di determinate proprietà. In definitiva l'astrazione non è la negazione del concreto ma è la sua moltiplicazione.

In sequenza il percorso propone lo studio delle proprietà di:

1.1 Operazione in un insieme

1.1.1 Operazione binaria interna

Sia A un insieme non vuoto qualsiasi. Un'operazione *binaria interna* è una funzione:

$*:\ A \times A \to A$

$(a, b) \to a * b$ con $a, b, a * b \in A$

1.1.2 Operazione binaria esterna

Siano A, B, C tre insieme non vuoti qualsiasi. Un'operazione *binaria esterna* è una funzione:

$*:\ A \times B \to C$

$(a, b) \to a * b$ con $a \in A, b \in B$, $a * b \in C$

1.1.3 Operazioni non binarie

Una operazione non binaria può essere:

unaria: $\blacklozenge\ A \to A$

$a \to \blacklozenge a$ con $\blacklozenge a \in A$

n-aria: §: (A × A × A × A) → A

$(a_1, a_2, a_3, a_4) \to a$ con $a = a_1 \S a_2 \S a_3 \S a_4 \in$ A.

1.2. Strutture

Una struttura, a seconda delle proprietà di cui godono le sue operazioni, può costituire: gruppo – anello – corpo – campo.

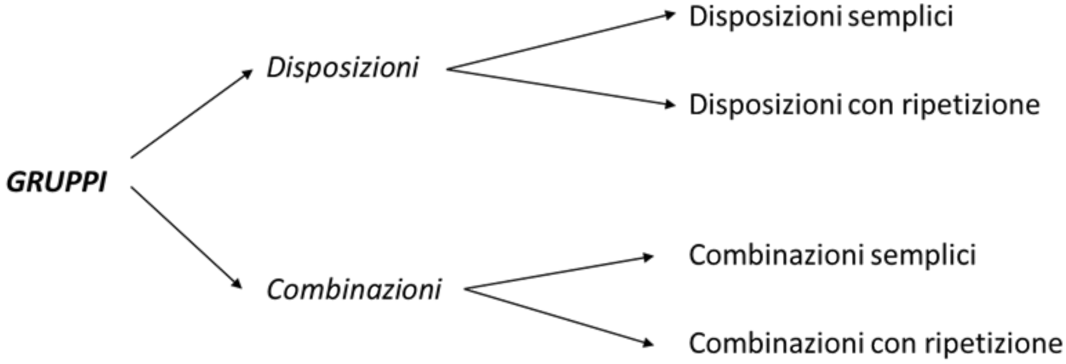
1.2.1 Isomorfismo tra gruppi

Def.: Due gruppi G(*) e H(°) aventi la stessa cardinalità si dicono *isomorfi* se si può stabilire una corrispondenza biunivoca

f : G → H tale che: $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ con $a, b \in$ G e $f(a), f(b) \in$ H.

Le funzioni in ambito combinatorio

Sono considerate *problematiche di calcolo combinatorio* tutte le situazioni nelle quali, essendo assegnati *n* elementi a due a due distinti $a_1,, a_2, a_3, \ldots,, a_n$, viene richiesto di determinare il numero dei gruppi formati da *uno, due*, in generale *k* degli elementi assegnati, dovendo rispettare alcune regole che caratterizzano i gruppi stessi.



Tipologia dei gruppi

2.1 Disposizioni semplici

Siano dati due insiemi finiti A, B non vuoti tali che: A = {1,…, k}N, con $0 < k \leq n$

B = {b_1, b_2, … ,b_n} (insieme qualsiasi).

Una funzione *iniettiva* f: A→ B

i → b_{vi}, con b_{vi} un qualsiasi elementoB individua un gruppo ordinato formato da *k* elementi distinti di B .

In calcolo combinatorio tale gruppo costituisce una *disposizione semplice*.

Con $D_{n,k}$ si indica il numero delle applicazioni iniettive di A→B, ossia il numero di tutti possibili gruppi ordinati composti da k elementi distinti dell'I.I di f.

In particolare si dimostra che vale: $D_{n,k} = n(n\text{-}1)\ldots(n\text{-}k+1)$.

2.2 Permutazioni semplici.

Nel caso particolare in cui i due insiemi A e B abbiano la stessa cardinalità *n* una funzione iniettiva f:A→ B prende il nome di *permutazione semplice*.

Il numero delle applicazioni biiettive di A→B, coincide con il numero di disposizioni semplici di classe *n* fra *n* elementi dati. Perciò $D_{n,n} = n\cdot(n\text{-}1)\ldots3\cdot 2\cdot 1 = P_n = n!$

2.3 Disposizioni con ripetizione.

Siano dati due insiemi A, B non vuoti tali che: A = {1,…,⊂ *k*}N, B = {$b_1, b_2, \ldots, b_n$}.

Una funzione f: A→ B

i → b_{vi} individua un gruppo ordinato formato da *k* elementi di B, elementi questa volta non necessariamente distinti.

In calcolo combinatorio tale gruppo costituisce una *disposizione con ripetizione*.

Con $D^r_{n,k}$ si indica il numero delle applicazioni di A→B, ossia il numero di gruppi ordinati formati da k elementi non necessariamente distinti dell'I.I. (insieme immagine) di f.

In particolare si dimostra che vale: $D^r_{n,k} = n^k$.

2.4 Permutazioni con ripetizione.

Dati due insiemi A, B non vuoti tali che: A = {1,…, $\subset$ n}N, B = $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ con $r < n$,una applicazione suriettiva f: A→ B

$i \rightarrow b_{vi}$ avente la condizione che:

- v_1 elementi abbiano immagine b_1 ,
- v_2 elementi abbiano immagine b_2 ,
- … ……………………………..
- v_r elementi abbiano immagine b_r con n = (v_1 + v_2 +…+ v_r)

individua una *permutazione con ripetizione* degli n elementi di B.

Il numero delle applicazioni suriettive aventi le proprietà precedenti è dato da:

$$P^r_n = \frac{(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)!}{v_1!*v_2!*v_3!*..*v_n!} = \frac{n!}{v_1!*v_2!*v_3!*..*v_n!}$$

2.5 Combinazioni semplici

Sia dato un insieme A= $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e l'insieme $\wp(A)$ (insieme delle parti di A).

Si consideri la funzione iniettiva f**:** A → $\wp(A)$

$a_k \rightarrow \wp_k(A)$ dove $\wp_k(A)$ è un elemento di $\wp(A)$ che contiene k-elementi. Fissato un indice k, il numero di funzioni che all'elemento $a_k \rightarrow \wp_k(A)$ prende il nome di *combinazioni semplici di classe k fra n elementi dati***,** e viene indicato con il simbolo $C_{n,k.}$

Vale la relazione: $C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n*(n-1)*..(n-k+1)}{k!}$ con k $\in$ N_0 et $k \leq n$

Funzioni in ambito analitico

Data una funzione f: $\Re \rightarrow \Re$

x → y = f(x) vengono in sequenza definiti:

- *Insieme di definizione (I.D.):* è l'insieme A $\subseteq \Re$/ f è funzione, quindi

$$\forall x \in A \ \exists!\, y \in \Re \quad /f(x) = y$$

- *Insieme immagine (I.I.):* è l'insieme f(A) = $\{y \in \Re \,/\, y = f(x)\}$
- *Funzione iniettiva-suriettiva-invertibile:*
  - iniettiva: se $\forall\, x_1, x_2 \in A$, con $x_1 \neq x_2, \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
  - suriettiva: se il secondo insieme è f(A)
  - biiettiva: se è sia suriettiva sia iniettiva
- *Segno di f:*
  - f è positiva se $\forall x \in A \Rightarrow$ f(x) > 0

  - f è negativa se $\forall x \in A \Rightarrow$ f(x) < 0
  - f è non negativa se $\forall x \in A \Rightarrow$ f(x) ≥ 0
  - f è non positiva se $\forall x \in A \Rightarrow$ f(x) ≤ 0
  - Zero o radice di f è un $x \in A \Rightarrow f(x) = 0$
- *Funzione pari / dispari (P/D):*
  - f è pari se $\forall x \in A \Rightarrow$ f(x) = f(-x)
  - f è dispari se $\forall x \in A \Rightarrow$ f(x) = -f(-x)
- *Funzione crescente / decrescente(C / D):*
  - f è costante se $\forall x1 \neq x2 \in A \Rightarrow$ f(x1) = f(x2)
  - f è crescente se $\forall x1 < x2 \in A \Rightarrow$ f(x1) < f(x2)
  - f è decrescente se $\forall x1 < x2 \in A \Rightarrow$ f(x1) > f(x2)
- *Punti notevoli:*
  - (0, f(0)) ; (x ,0)
  - punti estremi di intervalli in cui la funzione è definita
  - punti particolari.
- *Asintoto*:

retta tale che per "rami" della funzione che "vanno all'infinito" la distanza curva-retta " tende" a zero.

- *Punti di tendenza:*

con questo termine non intenderemo l'applicazione formale del concetto di limite, ma la possibilità di costruire, mediante proprietà algebrico-analitiche, un algoritmo che supporti un determinato "comportamento" per la funzione in prossimità di punti particolari.

Di base vengono considerati punti di "tendenza" :

  - I punti impropri (+∞; - ∞)
  - I punti estremi di intervalli che non appartengono all'insieme di definizione.
- *Funzione inversa*

Data f: A → f(A)

x → f(x) = y biiettiva, la funzione

f^{-1}: f(A) → A

y → $f^{-1}(y)$ = x è detta funzione inversa di f(x).

Il suo grafico è il simmetrico di quello di f(x) rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Sue proprietà. Se f(x) è:

  - crescente/decrescente $f^{-1}(x)$ è crescente/ decrescente
  - dispari $f^{-1}(x)$ è dispari.

3.1 Studio di funzioni elementari

Vengono in sequenza analizzate, secondo la modalità sopra definita, le seguenti funzioni elementari:

3.1.1 Funzione modulo

3.1.2 Funzione lineare

3.1.3 Funzione potenza ad esponente pari e dispari

3.1.4 Funzione estrazione di radice ad esponente pari e dispari

3.1.5 Funzione proporzionalità inversa

3.1.6 Funzione esponenziale

3.1.7 Funzione logaritmo

3.1.8 Funzioni goniometriche dirette e inverse

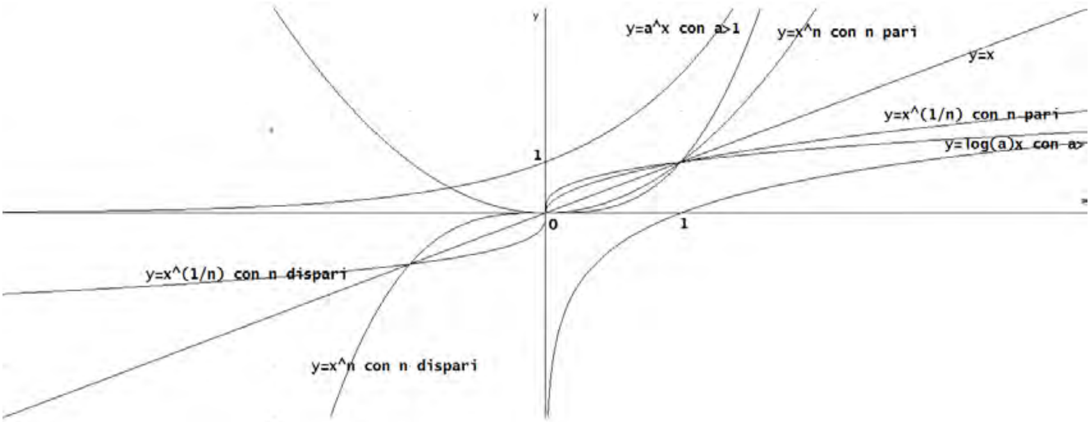


Figura 2

3.2 Funzione composta: generalità

Definizione: date due funzioni elementari

$$g: A \to \Re \qquad f: B \to \Re$$
$$x \to g(x) \quad \wedge \quad x \to f(x)$$

se si riesce a mettere in evidenza un insieme $\overline{A} \subseteq A \,/\, g(\overline{A}) \subseteq B$

→ si può definire la funzione composta h(x) = $f \circ g$ (x)

$$\begin{tikzcd}
\overline{A} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "h(x) = f \circ g"] & g(\overline{A}) \arrow[r] & R \\
x \arrow[r] & g(x)=t \arrow[r] & f(t) = f \circ g\,(x) = h(x)
\end{tikzcd}$$

Segue che:

- La definizione di funzione composta si estende in modo automatico a un numero qualsiasi di funzioni elementari componenti.
- La composizione di funzione non gode della proprietà commutativa.

- È fondamentale quindi cogliere i tempi di applicazione delle varie funzioni componenti la funzione composta.
- Di norma l'ordine di applicazione delle funzioni componenti è esattamente il contrario dell'ordine di scrittura.
- Vengono pertanto studiati i vari modelli di funzioni composte che si possono ottenere e si vedrà come dall'esame delle proprietà delle funzioni elementari componenti si possano ricavare le proprietà delle funzioni composte e quindi tracciarne un grafico approssimato.

Nota 1.

Lo studio successivo è limitato alle sole funzioni elementari sopra analizzate. Si è visto che, da come abbiamo impostato lo studio delle funzioni elementari, le proprietà analitiche di una funzione hanno un particolare riscontro in una loro rappresentazione grafica.

Attenzione!. Con questo non si vuole assolutamente affermare che il grafico può essere portato a dimostrazione di determinate proprietà di una funzione, ma solo ribadire che queste proprietà si possono evidenziare in una rappresentazione grafica. In questa accezione deve essere interpretata la rappresentazione grafica di una qualsiasi funzione.

Nota 2.

Date due funzioni una inversa dell'altra:

$$f: A \to f(A) \qquad f^{-1}: f(A) \to A$$

$$x \to f(x) = y \quad \wedge \quad x \to f^{-1}(x) = y$$

Componendo:

$f \circ f^{-1}: f(A) \to f(A)$ si ottiene la funzione identica $y = x$ con $x \in f(A)$

$f^{-1} \circ f: \quad A \to A$ si ottiene la funzione identica $y = x$ con $x \in A$.

Quindi anche in questo caso la composizione di funzioni continua a non essere commutativa.

3.2.1 Studio di una funzione composta

Si limita l'analisi di una funzione composta al caso di due sole funzioni componenti. Per lo studio delle proprietà della funzione composta si deve:

- innanzitutto "destrutturare" la funzione proposta nelle singole funzioni elementari componenti, evidenziando l'ordine di applicazione delle medesime.
- analizzare le proprietà delle singole funzioni elementari componenti
- ricavare da queste le proprietà della funzione composta
- proporre un grafico della funzione, naturalmente approssimato, come lo era d'altronde quello delle funzioni elementari analizzate nell'unità precedente.

Data dunque la funzione composta: $h(x) = f \circ g(x)$ le cui funzioni elementari sono:

$$g: A \to \Re \quad f: B \to \Re$$

$$x \to g(x) \wedge x \to f(x)$$

si rappresentino nell'ordine i grafici di $g(x)$ e $f(t)$, il primo in un sistema di assi cartesiani ortogonali xOt e il secondo nel sistema tOy.

Proprietà:

- I.D: $\{x / x \in A \wedge g(x) \in B\} = \overline{A}$

Operativamente, si considera l'I.D. di g(x) e si evidenzia il suo I.I. Se:

  - questo è sottoinsieme dell' I.D. della f , allora l'I.D. di h(x) coincide con l'I.D. di g(x).
  - altrimenti si escludono dall' I.D. di g(x) quei valori le cui immagini non appartengono all'I.D. della funzione f.

- I.I.: $\{y / y \in f(B) \wedge f^{-1}(y) \in g(\overline{A})\} = f \circ g(\overline{A})$
- Segno.
  - $f \circ g(x) < 0$ se $f(t) < 0$
  - $f \circ g(x) = 0$ se $f(t) = 0$
  - $f \circ g(x) > 0$ se $f(t) > 0$
- C/D.

Si dimostrano le seguenti proposizioni:

  - g e f crescenti allora h(x) è crescente
  - g e f decrescenti allora h(x) è crescente;
  - una della due crescente e l'altra decrescente allora h(x) è decrescente.

- P/D.

Se:

  - g pari e f qualsiasi $\Rightarrow$ h(x) è pari.
  - g dispari e f pari $\Rightarrow$ h(x) è pari.
  - entrambe dispari $\Rightarrow$ h(x) è dispari.

- Simmetria: se g è simmetrica rispetto x = h $\Rightarrow$ h(x) è simmetrica rispetto x = h.
- Periodicità: se g è periodica di periodo T $\Rightarrow$ h è periodica di periodo T
- Punti notevoli: tutti gli estremi degli intervalli dell'I.D. in cui la h è definita; i punti di intersezione con gli assi cartesiani.
- Tendenze: tutti gli estremi degli intervalli dell'I.D. in cui la h non è definita, più eventuali punti impropri.

3.2.2.1 Composizione tra funzione modulo e funzione elementare

Indicata con *f(x)* una qualunque funzione e con *m(x)* l'operatore modulo, si possono considerare le seguenti tre funzioni composte mediante l'operatore modulo:

- $h_1(x) = f \circ m(x)$: $x \rightarrow |x| = t$

  $t \rightarrow f(t) = f(|x|)$

  - la funzione $h_1(x)$ è pari.
  - se $x \geq 0 \Rightarrow f(|x|) = f(x)$

- $h_2(x) = m \circ f(x)$: $x \rightarrow f(x) = t$

  $t \rightarrow |t| = |f(x)|$. Se

- $f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x)$
- $f(x) < 0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ (simmetria di asse y = 0)

• $h_3(x) = m \circ f \circ m(x)$: $x \to |x| = t$

$$t \to f(t) = u$$

$$u \to |u| = |f(t)| = |f(|x|)|$$

- La funzione $h_3(x)$ è pari.
- Per $x \geq 0$ se :
  - ◊ $f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x)$
  - ◊ $f(x) < 0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x)$ (simmetria y = 0).

3.2.2.2 Composizione tra funzione lineare e funzione elementare

Ricordiamo che una funzione lineare del tipo $y = mx + q$ trasforma la retta reale $\Re$ in una retta reale $\Re$ avente:

• verso:
  - stesso se $m > 0$
  - opposto se $m < 0$

• un cambio di scala secondo il fattore $1/|m|$

• nuova origine in $x = -q/m$

Indicata con *f(x)* una qualunque funzione elementare e con *l(x)* la funzione lineare si possono considerare le seguenti tre funzioni composte:

A. $h_1(x) = f \circ l(x)$: $x \to mx + q = t$

$$t \to f(t) = f(mx + q)$$

La funzione $h_1(x)$ rispetto alla f(x) presenta sull'asse delle ascisse:

- un cambio di orientamento solo se $m < 0$
- un cambio di scala secondo il fattore $1/|m|$
- una traslazione di vettore $\vec{t}(-\frac{q}{m},0)$

B. $h_2(x) = l \circ f(x)$: $x \to f(x) = t$

$$t \to mt + q = mf(x) + q$$

La funzione $h_2(x)$ = rispetto alla f(x) presenta sull'asse delle ordinate:

- un cambio di orientamento solo se $m < 0$
- un cambio di scala secondo il fattore $|m|$
- una traslazione di vettore $\vec{t}(0,q)$

C. $h_3(x) = l_2 \circ f \circ l_1(x)$: $x \to m_1x + q_1 = t$

$$t \to f(t) = u$$

$$u \to m_2u + q_2 = m_2f(m_1x + q_1) + q_2 .$$

La funzione $h_3(x)$ rispetto alla $f(x)$ presenta:

- sull'asse delle ascisse:
  - un cambio di orientamento solo se $m_1 < 0$
  - un cambio di scala secondo il fattore $1/\ |m_1\ |$
  - una traslazione di vettore $\vec{t}(-\frac{q_1}{m_1},0)$
- sull'asse delle ordinate:
  - un cambio di orientamento solo se $m_2 < 0$
  - un cambio di scala secondo il fattore $|m_2\ |$
  - una traslazione di vettore $\vec{t}(0,q_2)$

Si ricordano due esempi di particolari composizioni che riguardano la lineare:

1. Equazione d'onda armonica: $y(x, t) = a \text{ sen}[\ \omega t - kx\ ] + b$
2. La funzione quadratica: $y = ax^2 + bx + c$

3.2.2.3 *Composizione tra funzione proporzionalità inversa e funzione elementare*

Composizione tra funzione elementare e la proporzionalità inversa.

Indicata con $f(x)$ una qualunque funzione elementare e con $i(x)$ la funzione proporzionalità inversa, si possono considerare le seguenti tre funzioni composte:

A. $h_1(x) = i \circ f\ (x)$: $x \rightarrow f(x) = t$

$$t \rightarrow 1/t = 1/f(x).$$

Si trovano le proprietà in base alle quali si può operativamente rappresentare il grafico di $1/f(x)$:

B. $h_2(x) = f \circ i\ (x)$: $x \rightarrow 1/x = t$

$$t \rightarrow f(t) = f\ (1/x).$$

Idem come sopra.

C. $h_3(x) = i \circ f \circ i\ (x)$: $x \rightarrow 1/x = t$

$$t \rightarrow f(t) = u$$

$$u \rightarrow 1/u = 1/\ f(u) = 1/f(1/x)$$

Idem come sopra..

Funzioni in ambito teoria dei grafi

Dati

- X un insieme finito non vuoto
- $\wp(X)$ l'insieme delle parti di X

e una funzione Ω: $X \rightarrow \wp(X)$

$$x \rightarrow \Omega_x \qquad \text{con } \Omega_x \in \wp(X)$$

si chiama *digrafo* (o grafo orientato) la coppia ordinata (X , Ω) e, se G è il nome del digrafo, si scrive G = (X, Ω).

Si dicono:

- *nodi* o *vertici* di G gli elementi di X.
- *arco* di G ogni coppia ordinata (x, y) tale che $y \in \Omega_x$.

- se (x, y) è un arco di G allora x se ne dice *origine* e y *termine*.

Pertanto dato l'insieme X dei nodi, la funzione Ω individua l'insieme U degli archi.

Si può perciò scrivere: G = (X, Ω) = (X, U) e pensare al digrafo come coppia ordinata di un insieme di nodi e di archi.

Matrice di adiacenza di G.

Sia G = (X, Ω) un digrafo finito di ordine n. Posto $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots , x_n\}$ allora i vertici di G risultano ordinati e si potrà parlare di primo, secondo, terzo, n-esimo elemento.

La matrice di *adiacenza* del digrafo G, con riferimento al precedente ordinamento dei vertici, è matrice quadrata

$M = [m_{i,j}]$ di ordine n il cui elemento $m_{i,j}$ è definito nel modo seguente:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 \; se \; (x_i ; x_j) \in U \\ 0 \; se \; (x_i ; x_j) \notin U \end{cases}$$

Matrice di incidenza di G.

Siano: G = (X , U) un digrafo di ordine n,
$X = \{ x_1, x_2, x_3, \dots , x_n \}$ e $U = \{ u_1, u_2, u_3, \dots , u_m \}$ gli insiemi ordinati costituiti

rispettivamente n nodi e m archi.

La *matrice di incidenza* del digrafo G è la matrice (n, m)

$K = [k_{i,j}]$ con

$$k_{i,j} = \begin{cases} +1 \;\; se \;\; x_i \; è \; origine \;\; di \; u_j \\ \;\;0 \;\; se \;\; x_i \;\; non \; è \; estremo \;\; di \; u_j \\ -1 \;\; se \;\; x_i \;\; è \;\; termin \; e \; di \; u_j \end{cases}$$

Cammini

Un cammino di un digrafo G= (X, U) è ogni successione finita o infinita di suoi nodi $x_1, x_2, x_3, \dots , x_n \dots$ tale che (x_i, x_{i+1}) U e si scrive $C = [x_1, x_2, x_3, \dots , x_n \dots]$ oppure $C = [u_1, u_2, u_3, \dots , u_n \dots]$ pensando al cammino di C come a una successione di archi tali che il termine di ciascuno coincide con l'origine del successivo, avendo posto $u_i = (x_i, x_{i+1})$.

Circuiti

Si chiama *circuito* ogni cammino finito in cui coincidono origine e termine.

Un circuito si dice *elementare* se gli unici nodi coincidenti sono l'origine e il termine.

Isomorfismo tra grafi.

Due digrafi G = (X, U) e G' = (X', U') si dicono *isomorfi* se esiste un' applicazione biunivoca f : X → X' tale che se $(a; b) \in U \rightarrow (f(a), f(b)) \in U'$

Dati due G = (X,U) e G' = (X',U') spesso è difficile stabilire se sono isomorfi.

Infatti vi sono $n!$ applicazioni biunivoche f : X → X'

Grafi valutati.

Il digrafo G =(X, U) si dice X-valutato quando è assegnata una funzione

$\delta: \quad X \rightarrow R^+$

$x \rightarrow \delta x$ numero reale non negativo.

Se G è finito, con riferimento all'ordine $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$dei suoi vertici, il vettore *n*-dimensionale $\delta(x) = [\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n]$ si chiama vettore della valutazione δ.

Se il digrafo G è X-valutato dalla funzione δ , si chiama δ-misura del cammino finito

$C = [x_1, x_2, \ldots x_r]$ il numero $\delta(C) = \sum_{i=1}^{r} \delta x_i$

Il digrafo G =(X, U) si dice U-valutato quando è assegnata una funzione

$\lambda: \; : U \rightarrow R^+$

$u \rightarrow \lambda u$ numero reale non negativo.

In questo caso a ogni arco resta associato un numero reale non negativo.

Se il digrafo G è U-valutato dalla funzione λ, si chiama λ -misura del cammino finito

$C = [x_1, x_2, \ldots x_r]$ il numero $\lambda(C) = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda(x_i, x_{i+1})$

Sia G = (X, U) un digrafo finito per il quale è assegnata la X-valutazione δ. Ci si può chiedere allora quale fra i cammini di M(x, y) sia minimale rispetto alla δ-misura.

O meglio: ci si chiede di individuare un algoritmo capace di individuare questi cammini minimali e le loro δ-misure. E' questo il problema del minimo percorso da trovare di cui viene allegato l'algoritmo.

```
const
 n=9 ;
 max=40000;
 arrivo=2;
var
 input,output:text;
 x,y,esc:integer;
 tab:array[1..n,1..n] of integer;
 mal:array[1..n,1..nodo di arrivo] of longint;
 min:array[1..n] of integer;
begin
 assign(input,'input.txt');
 reset(input);
 for y:=1 to n do
  for x:=1 to n do
   read(input,tab[x,y]);
 close(input);
 for x:=1 to n do
  mal[x,1]:=max;
 for x:=1 to n do
  mal[x,2]:=0;
```

```
 mal[1,1]:=0;
 repeat
  esc:=0;
  for y:=1 to n do
   for x:=1 to n do
    if(tab[x,y]<>0) then
     if (mal[y,1]<>max) then
      if (mal[x,1]=max) then
       begin
        mal[x,1]:=mal[y,1]+tab[x,y];
        esc:=1;
        mal[x,2]:=y;
       end
      else
       if (mal[x,1]>mal[y,1]+tab[x,y]) then
        begin
         mal[x,1]:=mal[y,1]+tab[x,y];
         esc:=1;
         mal[x,2]:=y;
        end;
 until (esc=0);
 min[1]:=arrivo;
 y:=arrivo;
 x:=1;
 repeat
  x:=x+1;
  min[x]:=mal[y,2];
  y:=min[x];
 until (y=1);
 assign(output,'output.txt');
 rewrite(output);
 writeln(output,'PERCORSO MINIMO');
 write(output,'Sequenza nodi per andare dal nodo 1 al nodo ',arrivo,': ');
 for y:=x downto 2 do write(output,min[y],' --> ');
 writeln(output,min[1]);
 writeln(output,'Percorso minimo per arrivare al nodo ',arrivo,': ',mal[arrivo,1]);
 close(output);
end.
```

Nota.

installare il programma dev-pascal (avviare l'eseguibile devpas192.exe); aprire il file percorso. pas; modificare il valore n=9 (questo valore rappresenta il numero totale di nodi che vengono inseriti); modificare il valore arrivo=2 (questo valore rappresenta il nodo al quale si vuole arrivare); a partire dal nodo 1 (IMPORTANTE: il nodo di partenza è SEMPRE il nodo 1)

modificate queste due costanti, si può compilare il programma: andare su execute/compile (ctrl+F9), poi premere su continue ;

nel file input.txt si inserisce una tabella nxn:

-1^ riga --> valore1 (spazio) valore2 (spazio) valore3 ... (spazio) valoreN

-2^ riga --> valore1 (spazio) valore2 (spazio) valore3 ... (spazio) valoreN

-...

-n^ riga --> valore1 (spazio) valore2 (spazio) valore3 ... (spazio) valoreN;

eseguire l'applicazione percorso.exe (creata in seguito alla precedente compilazione).

L'esecuzione è istantanea.

IL SOFTWARE DI ALGEBRA DINAMICA EPSILONWRITER: POTENZIALITA' E IMPLICAZIONI DIDATTICHE

***Laura Maffei*[1], *Jean-François Nicaud*[2]**

[1]Dipartimento di Matematica Università di Pisa, [2]Aristod Company

Premessa

L'obiettivo di questo contributo[1] consiste nel descrivere le potenzialità del software Epsilonwriter[2] (Nicaud & Viudez, 2009; Nicaud & Mercat, 2012) nel facilitare gli studenti a manipolare correttamente espressioni algebriche. Lo sviluppo del software ruota attorno all'idea di Dynamic Algebra (DA). Questo concetto si riferisce a fare trasformazioni algebriche muovendo direttamente parti di esse attraverso il mouse o tasti del computer.

Le potenzialità pedagogiche della 'dinamicità' in software educativi è stata ampiamente analizzata per quanto riguarda i cosiddetti Dynamic Geometry Environments (Lopez-Real & Leung, 2006). Anche se l'idea di Dynamic Algebra (DA) è stata usata negli ultimi venti anni, studi specifici su possibili benefici a livello pedagogico sono ancora scarsi.

Per sviluppare un sistema di DA nel software è stata sviluppata la Teoria dei Movimenti nelle Formule (TMF) in modo da definire corrispondenze fra proprietà degli oggetti matematici rappresentati attraverso l'interfaccia e i gesti che sono possibili per manipolarli. In questo contributo, dopo una breve descrizione di TMF, viene analizzato il funzionamento del gesto 'drag&drop' (seleziona e trascina) per risolvere un'equazione. Infine, vengono sottolineate alcune potenzialità derivanti dal sistema DA così come implementato in Epsilonwriter.

La Teoria dei Movimenti nelle Formule

La Teoria dei Movimenti nelle Formule (Nicaud, 2013) è basata sulla possibilità di muovere sotto-espressioni nelle formule rispettando l'equivalenza fra la formula iniziale e quella trasformata (in TMF le parole 'formula' ed 'espressione' sono usate come sinonimi). TMF risponde a questa prima domanda interna:

Quando è possibile spostare una sotto-espressione da un punto all'altro dell'espressione, ottenendo una espressione equivalente?

Una sotto-espressione è una parte dell'espressione che è legata al resto per mezzo di un operatore (+, –, ×, /). Questo le conferisce uno *status* rispetto alla sotto-espressione 'più vicina' alla quale appartiene (la sua sotto-espressione madre). Per esempio, nell'espressione $2x+3 = \frac{a}{5}$, 2 ha lo status di *moltiplicatore* in $2x$ (moltiplica x), 3 ha uno status di *addendo* in $2x+3$ (si somma a $2x$), 5 ha lo status di *divisore* in $\frac{a}{5}$ (divide a).
TMF identifica tre differenti stati: *addendo*, *moltiplicatore* e *divisore* (nessuno status è attribuito alla sottrazione $a-b$, è considerate come la somma di a e $-b$); TMF considera i movimenti di una sotto-espressione *u* attraverso gli operatori (+ – × / e le relazioni) che mantengono l'equivalenza.

La seconda domanda interna a cui risponde TMF è la seguente:

1 Questo contributo è una versione sintetica e in italiano dell'articolo dei medesimi autori 'Dynamic Algebra in Epsilonwriter: a pedagogical perspective' in Proceedings of ICTMT 11, Bari (2013).

2 http://www.epsilonwriter.com

E' possibile spostare la sotto-espressione u *da un punto all'altro di una espressione, rimanendo u non modificato o modificato in* $-u$ *, restando invariato il resto della formula eccetto il possibile cambio di orientazione di una disuguaglianza?*

Ad esempio, nell'equazione $4 = 3x$, la sotto-espressione 4 può essere considerata come un *addendo* nel membro di sinistra (ossia considerata come $4 + 0$); può essere spostata nel membro di destra, mantenendo lo status di *addendo* ed essendo cambiata in -4, ottenendo dunque $0 = 3x - 4$. Inoltre, la sotto-espressione 4 può essere considerata come un *moltiplicatore* (ossia considerata come 4×1) ed essere spostata nel membro di destra rimanendo invariata e acquisendo lo status di *divisore,* ottenendo dunque $1 = \frac{3x}{4}$.

TMF è basata su tre classi di movimenti che possono essere descritti nel modo seguente: (1) *Movimenti allo stesso livello:* consistono nell'applicazione della proprietà commutativa e nei movimenti nelle relazioni;

(2) *Entrate in una espressione:* e.g., 2 in $2\frac{x}{3}$ può entrare a numeratore della frazione come *moltiplicatore,* ottenendo $\frac{2x}{3}$;

(3) *Uscite da una espressione:* e.g., 2 in $\frac{2x}{3}$ può uscire dal numeratore come *moltiplicatore,* ottenendo $2\frac{x}{3}$.

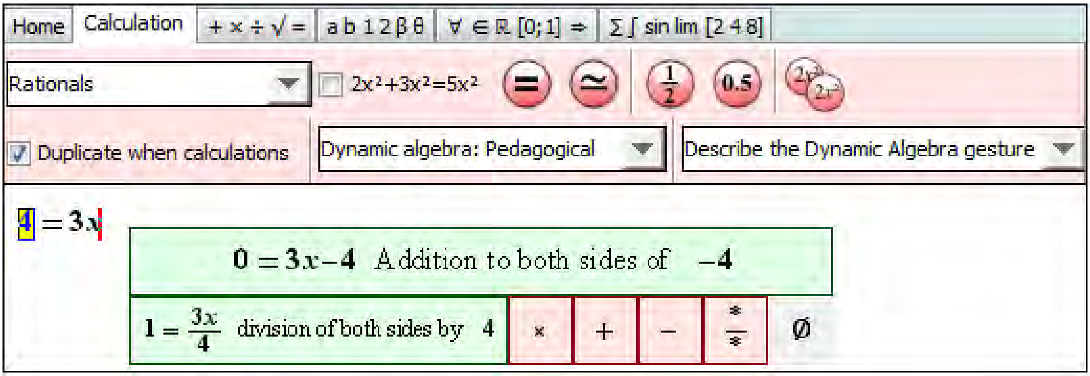
I movimenti elementari descritti sopra possono essere combinati, e.g., 2 in $2x = \frac{5}{3}$ può essere spostato ottenendo $x = \frac{5}{2\times 3}$. Questo spostamento risulta da una combinazione: (1) 2 esce da $2x$ come *moltiplicatore,* (2) *2* si sposta a destra come *divisore* di $\frac{5}{3}$; (3) 2 entra a denominatore di $\frac{5}{3}$ come *moltiplicatore* di 3.

Per gli operatori fondamentali + $-$ × / e le relazioni, con i relative status e classi di movimenti, TMF identifica 74 casi e fra questi 56 producono trasformazioni corrette, che corriponde al 76% (Nicaud, 2013).

Questa percentuale fa considerare il concetto di movimenti di sotto-espressioni nelle formule come un concetto significativo per la manipolazione algebrica.

L'Algebra Dinamica in Epsilonwriter

Attraverso TFM il sistema di Algebra Dinamica implementato, Epsilonwriter è un sistema composito che ha vari modi di uso. Per ragioni di brevità, in questo contributo ci limiteremo al modo chiamato Algebra Dinamica Pedagogica. Tale modalità è limitata ai movimenti in una formula (anche chiamati *drag&drop di equivalenza* poiché si tratta di drag&drop che mantengono l'equivalenza). Tale gesto può essere compiuto come segue: l'utente seleziona una sotto-espressione e poi la sposta. Durante lo spostamento, appaiono proposte di come si modifica l'espressione in un menu pop-up (Figura 1). Epsilonwriter contiene un parametro per scegliere ciò che sarà mostrato. Può essere semplicemente il risultato, una spiegazione matematica sulla linea del risultato, una tabella con una spiegazione matematica e la descrizione del gesto (Figura 3). L'Algebra Dinamica Pedagogica segnala inoltre all'utente i movimenti errati (Figura 4).



$$4 = 3x$$
$$1 = \frac{3x}{4} \quad \text{division of both sides by } 4$$

Figura 2. Il risultato del drag&drop mostrato in Figura 1.

$$4 = 3x \rightsquigarrow 1 = \frac{3x}{4}$$

Gesture: Multiplicative move to the other side, the factor becomes divisor

Explanation: division of both sides by

Figura 3. Il risultato dello stesso gesto mostrato in Figura 2 con la scelta del parametro 'Descrivi il gesto di Algebra Dinamica'.

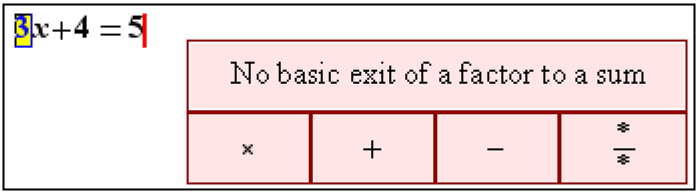


Figura 4. Un tentativo errato di movimento.

Conclusioni

Le potenzialità dell'Algebra Dinamica così come implementata in Epsilonwriter possono essere utilizzate per scopi educativi diversi; i più evidenti sono quelli dell'introduzione o del recupero della manipolazione algebrica. Come evidenziato, l'idea centrale attorno a cui ruota TMF è la manipolazione di formule attraverso *gesti*. Fare un gesto produce un cambiamento fisico nell'oggetto su cui si sta agendo, come sottolineato da Lakoff and Núñez (2000), i quali sostengono che l'esperienza del corpo è necessaria per sviluppare comprensione matematica. Inoltre, nel dominio della manipolazione algebrica, il significato di un gesto va oltre la trasformazione di una espressione, racchiudendo il significato matematico che giustifica tale movimento.

La componente *drag and drop* può essere analizzata nella prospettiva delle rappresentazioni dinamiche (Goldin & Kaput, 1996). Selezionare una sotto-espressione, muoverla e posizionarla in un'altra parte della formula, fornisce la possibilità di fare esperienza diretta con la 'trasformazione di una formula'. Questo non accade con carta e penna, dove per modificare una espressione è necessario riscriverla completamente. L'oggetto matematico 'espressione algebrica' è rappresentato dunque in Epsilonwriter dall'unione dell'oggetto e dei movimenti possibili su questo, aggiungendo dunque la dinamicità alla rappresentazione statica dell'oggetto possibile su carta. In generale, il sistema di Algebra Dinamica implementato in Epsilonwriter può aiutare l'utente a concepire l'espressione algebrica non solo come una 'procedura' di calcolo ma anche come una 'struttura'. Questo è particolarmente importante per quanto riguarda l'insegnamento/apprendimento dell'algebra nel quale molte difficoltà sono interpretate come una mancanza di una visione strutturale della formula (Kieran, 2006).

Epsilonwriter non è soltanto un'applicazione di Algebra Dinamica, è anche un editore di testo e di formule capace di importare file Latex, di esportare pagine web e di copiare formule in Word. Inoltre due o più utenti possono lavorare in modo sincrono su uno stesso documento, avvalendosi di una chat per comunicare.

Bibliografia

Goldin, G. A. & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397–431). Philadelphia: LEA.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-50). Rotterdam: Sense.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lopez-Real, F. & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37(6), 665–679

Nicaud, J.F. & Viudez, C. (2009). Epsilonwriter: implementing new ideas for typing text and math. *In Proceedings of The MathUI workshop 2009*. Grand Bend, Ontario, Canada.

Nicaud, J.F. & Mercat, C. (2012). Algèbre dynamique, glisser-déposer par équivalence. *Actes des Journées mathématiques de l'Institut Français de l'Éducation* (ENS de Lyon).

Nicaud, J.F. (2013). La théorie des mouvements dans les formules. http://epsilonwriter.com/TMF

UN DECENNIO DI OLIMPIADI DI MATEMATICA (GARA PUBBLICO – TORINO LINGOTTO): EURISTICHE, STRATEGIE, STATISTICHE NELLA RISOLUZIONE DEI QUESITI

Simone Ballari[1], Pietro Agostino Cornacchia[2], Paolo Gallina[3], Viviana Mainelli[4] , Lorenzo Orio[5]

[1]Liceo "Maria Immacolata" di Pinerolo, [2]ITIS "Pininfarina" di Moncalieri, [3]Liceo Scientifico S. Anna di Torino, [4]L. S. Alessandro Volta di Torino, L. S. Collegio San Giuseppe di Torino, [5]Ex docente di Liceo Scientifico, già Supervisore SIS Piemonte e Collaboratore MAEF presso Facoltà di Economia (Università di Torino)

Premessa

Le gare relative alle annuali Olimpiadi di Matematica a Squadre (realizzate in Piemonte nella sede di Torino-Lingotto), nell'ambito della "**Festa della Matematica**" , sono giunte ormai alla loro decima edizione. Vengono qui presentati alcuni quesiti, relativi alla Gara riservata al Pubblico, la loro risoluzione e relativo commento.

Vengono evidenziate le difficoltà che gli studenti (e non solo loro: le gare sono aperte a tutti!) possono incontrare nel confrontarsi con i quesiti proposti. Viene fornita una statistica dei risultati ottenuti nell'ultima edizione.

Si presentano alcune tipologie di quesiti: soprattutto nelle ultime edizioni si è puntato a costruire problemi inerenti l'anno solare della manifestazione (o nel testo o nel risultato).

Si conclude con riflessioni sull'aspetto didattico, sulle dinamiche di gruppo e sull'importanza di lavorare in team.

Ecco un brano della presentazione sul sito della Associazione Subalpina Mathesis, ente organizzatore per il Piemonte:

"È una attività che si inserisce nell'ambito delle Olimpiadi Nazionali della Matematica e ha come protagoniste le scuole che aderiscono al progetto, ma è aperta a tutti i cittadini. Da alcuni anni, alla **competizione individuale delle olimpiadi della matematica** è stata affiancata una **gara a squadre tra istituti**, organizzata dal **Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova**, che prevede una competizione provinciale in primavera seguita dalla gara nazionale nel mese di maggio, in concomitanza con la gara individuale.

L'organizzazione centrale, però, si occupa solamente della fase nazionale della gara a squadre, affidando l'organizzazione e la gestione della competizione provinciale agli organismi locali.

Dal 2007 la nostra associazione, in collaborazione con il comitato provinciale delle olimpiadi della matematica, si è resa disponibile per organizzare la gara a squadre, riconoscendo in essa un'iniziativa del tutto coerente con gli obiettivi della nostra associazione e capace di offrire agli studenti della nostra provincia una ulteriore opportunità di cimentarsi con gli aspetti più creativi della disciplina.

Nell'ottica di diffondere e promuovere l'interesse per la matematica, si è pensato, come nel passato, di far partecipare all'evento tutte le persone che lo desiderano (studenti e cittadini) affiancando alla gara olimpica, destinata ad una delegazione ufficiale di ogni istituto, una competizione a squadre aperta a tutti (**gara del pubblico**). Con questi obiettivi la gara è stata inserita in una giornata interamente dedicata alla matematica, che si è svolta nell'area del Lingotto e ha visto, oltre alle competizioni, anche un momento iniziale di presentazione dell'intero progetto, una conferenza, uno spettacolo e la visita ad una mostra."

Un esempio emblematico (da Martin Gardner, "Enigmi e giochi matematici", saggi Superbur, 1999). Il testo è stato variato e adattato per la gara.

Ecco il testo assegnato (nel 2008) e relativo punteggio.

Problema 14 - Le coccinelle *45 punti*

Ci sono due coccinelle maschio (A e C) e due coccinelle femmina (B e D) poste ai vertici di un quadrato. Le coccinelle maschio si muovono verso le coccinelle femmina e le coccinelle femmina cercano di raggiungere i maschi: cioè la coccinella A va verso la coccinella B, B va verso C, C va verso D e D vuole prendere A.

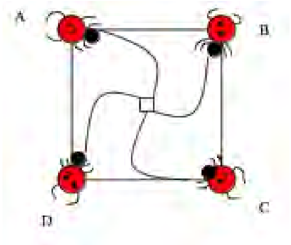


Figura 1

Così muovendosi percorrono una curva che li porterà ad incontrarsi al centro del quadrato.

Quanta strada farà ogni coccinella (in *cm*) tenendo conto che il lato del quadrato è 125 cm?

Soluzione 1 (sintetica e intuitiva).

In qualsiasi istante dato le coccinelle individuano i vertici di un quadrato che ruota e si restringe attorno al centro man mano che le coccinelle si avvicinano fra loro (essendo sottointeso che gli animaletti viaggiano tutti alla stessa velocità scalare).

Il percorso della coccinella inseguitrice sarà quindi in ogni istante perpendicolare a quello dell'inseguita. Ciò significa che mentre A si avvicina a B, non c'è nessuna componente nel moto di B che la faccia avvicinare o allontanare da A. Quindi A raggiunge B nello stesso tempo che impiegherebbe se B non si muovesse affatto. Perciò la lunghezza di ogni braccio di spirale è uguale a quella del lato del quadrato iniziale, cioè 125 cm.

Soluzione 2 (efficace, seppur laboriosa, con l'utilizzo dell'analisi matematica)[1].

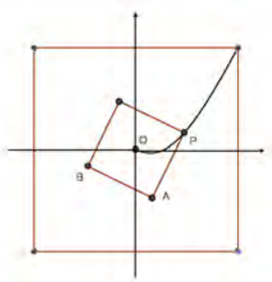


Figura 2

Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro del quadrato (vedi figura 2).

Sia $L = 125\ cm$ il lato del quadrato.

Consideriamo la traiettoria della coccinella nel primo quadrante e cerchiamo di trovarne l'equazione.

Preso un punto P $(x, f(x))$ sulla traiettoria suddetta, la pendenza della tangente in P (lato PA)

1 *Vedi L. ORIO: "FACILE" e "DIFFICILE" in matematica, Progetto Alice 2010 III vol. XI n° 33, pagg. 513-514.*

rappresenta la direzione, in un preciso istante, della traiettoria della coccinella considerata.
Si trova che $A(f(x),-x)$.

Avremo (pendenza di AP): $m(AP) = \frac{f(x)+x}{x-f(x)}$. Cioè: $f'(x) = \frac{x+y}{x-y}$ $(x \neq y)$,
la quale equazione differenziale omogenea ha come integrale generale:

$|c|\sqrt{x^2+y^2} = e^{arctg\frac{y}{x}}$ Passando a coordinate polari, possiamo scrivere:
$\rho = ke^{\vartheta}$, con k positivo.

Cerchiamo ora k tenendo conto che la curva deve passare per il punto $\left(\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L\right)$ che, in coordinate polari corrisponde al punto $\left(L\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Si ottiene: $L\frac{\sqrt{2}}{2} = ke^{\frac{\pi}{4}}$, da cui: $k = L\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

Abbiamo in definitiva l'equazione polare della curva $\rho = L\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\vartheta-\frac{\pi}{4}}$, la quale è una spirale logaritmica ed in quanto tale ha un punto asintotico nell'origine (qui $\vartheta \to -\infty$).

Sappiamo che la lunghezza di un arco di curva in coordinate polari si trova risolvendo un integrale del tipo $s = \int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2}$. Qui abbiamo $d\rho = L\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\vartheta-\frac{\pi}{4}}d\vartheta$, quindi

$$s = \lim_{H\to-\infty}\int_H^{\frac{\pi}{4}} L\sqrt{\frac{1}{2}e^{2\vartheta-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{2\vartheta-\frac{\pi}{2}}}\,d\vartheta = \lim_{H\to-\infty}\int_H^{\frac{\pi}{4}} L\sqrt{e^{2\vartheta-\frac{\pi}{2}}}\,d\vartheta = \lim_{H\to-\infty} L\int_H^{\frac{\pi}{4}} e^{\vartheta-\frac{\pi}{4}}\,d\vartheta$$, cioè

$$s = L\lim_{H\to-\infty}\left|e^{\vartheta-\frac{\pi}{4}}\right|_H^{\frac{\pi}{4}} = L\lim_{H\to-\infty}\left(e^0 - e^{H-\frac{\pi}{4}}\right) = L(1-0) = L = 125$$

Risposta (data, come da regolamento, dalle prime 4 cifre, da destra, della parte intera): 0125.

Variazione sul tema.

Se 3 insetti partono dai vertici di un triangolo equilatero, il moto di ognuno avrà una componente di 1/2 (coseno di p/3) della velocità che lo porterà verso il suo inseguitore (vedi figura 3). Due coccinelle perciò si avvicineranno con una velocità di 3/2.

Le coccinelle si incontreranno al centro del triangolo dopo un intervallo di tempo uguale e due volte il lato del triangolo diviso per tre volte la velocità, percorrendo ciascuna un tratto pari a 2/3 della lunghezza del lato del triangolo.

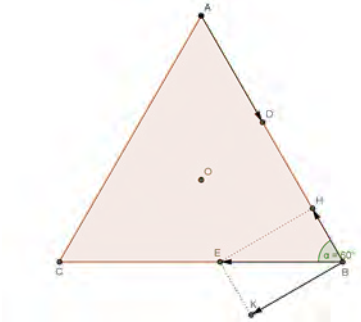


Figura 3

Generalizzazione.

In generale

n lati: $s = \dfrac{L}{1+\cos\left(\pi\dfrac{n-2}{n}\right)}$. Infatti un angolo interno di un poligono regolare di n lati vale $\pi\dfrac{n-2}{n}$. Ecco alcuni esempi grafici (Figure 4 e 5).

$n = 5.$ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = L$. $n = 6.$ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = L$.

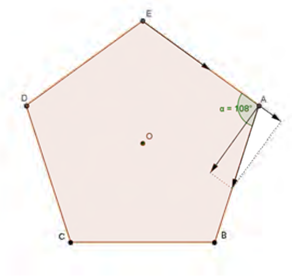


Figura 4

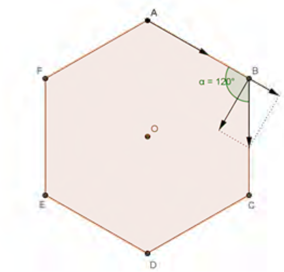


Figura 5

N.B. Se $n \to \infty$, abbiamo $s = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{L}{1+\cos\left(\pi\dfrac{n-2}{n}\right)} = +\infty$, come è ovvio.

Infatti, in quest'ultimo caso, essendo $L > 0$ la lunghezza (fissa) del lato, l'iperpoligono avrebbe infiniti lati, la velocità di avvicinamento, ad es. da A su B, sarebbe nulla, quindi ogni coccinella continuerebbe a camminare all'infinito percorrendo un lunghezza pure infinita (con tutte le ipotesi teoriche del caso!).

Osservazioni.

1. Con $n \le 3$ la velocità di avvicinamento di due coccinelle è maggiore della velocità di ciascuna, con $n = 4$ le velocità sono uguali, mentre per $n > 4$ la velocità relativa è minore della velocità del singolo insetto. Infatti il coseno di un angolo maggiore dell'angolo retto (e minore dell'angolo piatto: caso di $n \to \infty$) è negativo.
2. Per $n = 2$ la velocità di avvicinamento di due coccinelle è il doppio delle velocità propria degli insetti: la formula è valida, infatti si ottiene $s = \dfrac{L}{1+\cos 0} = \dfrac{L}{2}$.
3. La velocità di avvicinamento è sempre positiva (al limite nulla per $n \to \infty$), quindi le coccinelle si dovranno incontrare prima o poi (tranne il suddetto caso limite). Lo faranno nel centro del poligono per ragioni di simmetria.
4. Correndo per il tempo $T = L/v$ alla velocità costante v, ciascuna coccinella percorre un traiettoria lunga $L = vT$. Nel caso del "quadrato" ($n = 4$), nel moto della coccinella inseguita relativo alla inseguitrice, la prima (avendo, nel moto assoluto, velocità ortogonale a quella dell'inseguitrice) è vista dalla seconda avvicinarsi alla velocità costante v. Dopo il tempo $T = L/v$ arriverà addosso all'inseguitrice annullando la distanza iniziale L che è dunque pari alla lunghezza della traiettoria.
5. Risolviamo anche il caso delle 3 coccinelle in modo più "tecnico", come sopra. Se 3 insetti partono dai vertici di un triangolo equilatero di lato L, il moto di ognuno avrà una componente di $\frac{1}{2}v$, della velocità assoluta v, che lo porterà verso il suo inseguitore (vedi ancora figura 3).

Due coccinelle perciò si avvicineranno con una velocità di $\frac{3}{2}v$. Essendo a distanza *L,* il tempo per l'incontro sarà $T_i = \frac{2L}{3v}$. Viaggiando a velocità assoluta *v*, ogni coccinella percorrerà quindi un cammino $s = v\frac{2L}{3v} = \frac{2}{3}L$, come visto già.

6. La generalizzazione è immediata ricorrendo a formule trigonometriche.
7. L'angolo con cui ciascuna coccinella devia dalla direzione iniziale è infinito (vedi ad es. la soluzione "laboriosa" nel caso $n = 4$, in cui si dimostrava che la traiettoria delle coccinelle era una spirale logaritmica). Durante la traiettoria, infatti, la velocità angolare w cresce tendendo all'infinito al tendere a zero della distanza *r* dal centro del poligono.

Volendo complicarci la vita…

Proviamo a trattare il caso $n = 3$ come nella soluzione 2 del primo testo ($n = 4$).

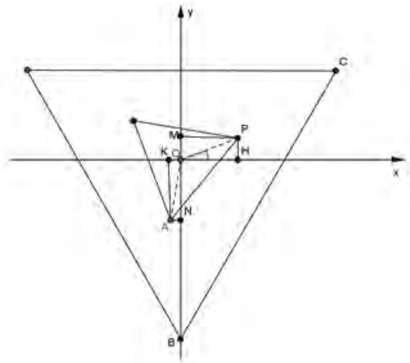


Figura 6

Come nel caso $n = 4$ scegliamo un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro del triangolo (vedi figura 6). Sia L la lunghezza del lato del triangolo stesso.

Consideriamo la traiettoria della coccinella nel primo quadrante e cerchiamo di trovarne l'equazione. Preso un punto P(*x, f*(*x*)) sulla traiettoria suddetta, la pendenza della tangente in P (lato PA) rappresenta, come già dichiarato, la direzione, in un preciso istante, della traiettoria della coccinella considerata. Chiamiamo α la misura dell'angolo $P\hat{O}H$ ed *r* la misura del segmento OP in figura 5. Per evidenti considerazioni geometriche possiamo scrivere ($r \neq 0$):

$$P(r\cos\alpha, r\sin\alpha),\ A\left(-r\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right), -r\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right).$$

Avremo (pendenza di AP): $m(\mathrm{AP}) = \dfrac{r\sin\alpha + r\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{r\cos\alpha + r\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}$, da cui

$$m(\mathrm{AP}) = \frac{\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}{\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha} = \frac{3\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}{3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha} \quad \text{quindi}$$

$$f'(x) = \frac{x + \sqrt{3}y}{\sqrt{3}x - y},\ \left(y \neq \sqrt{3}x\right),$$

la quale equazione differenziale omogenea ha come integrale generale:

$$|c|\sqrt{x^2+y^2}=e^{\sqrt{3}arctg\frac{y}{x}}.$$

Passando a coordinate polari, possiamo scrivere: $\rho = ke^{\sqrt{3}\vartheta}$, con k positivo.

Cerchiamo ora k tenendo conto che la curva deve passare per il punto $C\left(\frac{1}{2}L,\frac{\sqrt{3}}{6}L\right)$[2] che, in coordinate polari corrisponde al punto $\left(L\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{6}\right)$. Vedasi ancora la figura 5.

Si ottiene: $L\frac{\sqrt{3}}{3}=ke^{\sqrt{3}\frac{\pi}{6}}$, da cui: $k=L\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\sqrt{3}\frac{\pi}{6}}$. Abbiamo in definitiva l'equazione polare della curva

$$\rho = L\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\sqrt{3}\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right)},$$

Analogamente al caso n = 4, otteniamo $d\rho = Le^{\sqrt{3}\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right)}d\vartheta$, quindi

$$s=\lim_{H\to-\infty}\int_H^{\frac{\pi}{6}}L\sqrt{e^{2\sqrt{3}\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{1}{3}e^{2\sqrt{3}\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right)}}\,d\vartheta=\lim_{H\to-\infty}\frac{2}{3}L\int_H^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}e^{\sqrt{3}\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right)}d\vartheta,\ \text{cioè}$$

$$s=\frac{2}{3}L\lim_{H\to-\infty}\left|e^{\sqrt{3}\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right)}\right|_H^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3}L\lim_{H\to-\infty}\left(e^0-e^{\sqrt{3}\left(H-\frac{\pi}{6}\right)}\right)=\frac{2}{3}L(1-0)=\frac{2}{3}L,$$

risultato riconfermato!

N.B. Tutto ciò che si è detto vale solo se le coccinelle si immaginano PUNTIFORMI !!!

Conclusione.

Dal composito esempio proposto si nota che modelli "equivalenti", cioè che portano alle stesse conclusioni, sono talvolta estremamente diversi riguardo la loro difficoltà. Gli studenti (e i colleghi!) che si sono adoperati nella soluzione dei vari quesiti hanno sperimentato questo fatto. Come giudicare l'abilità di ciascuno dal procedimento utilizzato a questo fine? Per quanto riguarda la gara quel che conta è di aver "azzeccato" il risultato esatto!

Un problema di teoria dei numeri

Vediamo ora un problema di teoria dei numeri proposto nell'edizione 2005. Si tratta di un problema ispirato a un aneddoto del grande matematico *Ramanujan* e che, come tradizione nelle gare di matematica, nel proprio testo include l'anno solare della manifestazione.

Quesito 19 – Marco e le gare di matematica *80 punti*

Dopo aver letto la biografia del grande matematico *Ramanujan,* Marco ha scoperto che 65 è il più piccolo numero intero che si può scrivere in esattamente due modi diversi come somma dei quadrati di due numeri interi positivi e differenti tra loro, infatti $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$. Per prepararsi alla gara di quest'anno ha studiato le proprietà aritmetiche del numero 2005, ed

2 La scelta di orientare il triangolo con il vertice verso il basso è stata pensata proprio per la necessità di poter disporre di un punto le cui coordinate fossero adatte alla determinazione della costante k. Non sarebbe stato proficuo riferirsi ad un punto (iniziale) la cui prima coordinata fosse nulla: non avremmo potuto calcolare l'arcotangente di y/x.

ha scoperto che anche questo numero può essere espresso come somma dei quadrati di due numeri interi e positivi in esattamente due modi diversi, quindi si ha 2005 = $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ *con* a, b, c , d interi positivi e tutti diversi tra di loro. Quanto vale $a + b + c + d$?

La richiesta viene formulata in questo modo perché la gara prevede che venga fornita come risposta un numero di 4 cifre, in modo da poter essere inserito nel sistema informatico che proietta in tempo reale la classifica delle varie squadre. Il problema vuole anche creare nel lettore che non conoscesse *Ramanujan*, la curiosità sulla figura del grande matematico. Presentiamo due possibili soluzioni.

<u>Soluzione 1 (basata sui numeri complessi):</u> Si ha $2005 = 5*401 = (2^2 + 1)(20^2 + 1) = |z|^2\ |w|^2$, dove $z = 2 + i$, e $w = 20 + i$. Avremo quindi $|zw|^2 = 2005$, ed anche $\left|z\overline{w}\right| = 2005$. Ma $zw = 39 + 22\,i$; $z\overline{w} = 41 + 18\,i$. Allora $2005 = 39^2 + 22^2 = 41^2 + 18^2$. Il testo del problema ci dice che non vi sono altre soluzioni dell'equazione. Quindi la soluzione del problema è 39 + 22 + 41 + 18 = 120.

<u>Soluzione 2 (forza bruta):</u> Se $a^2 + b^2 = 2005$, e se $a < b$, allora $a^2 < 1003$, quindi $a < 32$. Provando tutti i numeri $2005 - a^2$ dove a è intero e varia tra 1 e 31, si ottengono dei quadrati perfetti solamente in corrispondenza dei valori 18 e 22; da qui le due possibilità trovate nella soluzione 1.

Il quesito veniva valutato 80 punti, il punteggio più alto tra tutti i quesiti proposti.

La prima soluzione è quella più elegante ed è ispirata agli *interi di Gauss* $\mathbf{Z}[i]$, ossia i numeri della forma $a + i\,b$ con a e b in $\mathbf{Z}$. Poiché in $\mathbf{Z}[i]$ si ha che $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$, ogni somma di quadrati $a^2 + b^2\,(a,b\ \ \mathbf{Z})$ fornisce una fattorizzazione nel prodotto di due interi di *Gauss* coniugati. Gli *interi di Gauss* sono un anello a fattorizzazione unica e in esso la fattorizzazione di 2005 in fattori irriducibili è $2005 = zw\overline{z}\overline{w}$ con z e w come nella soluzione 1. Pertanto l'unico modo di scrivere 2005 come prodotto di *interi di Gauss* coniugati e non reali (a parte le unità che sono ±1 e ±i) è $(zw)(\overline{z}\overline{w})$, oppure $(z\overline{w})(\overline{z}w)$, che corrispondono alle due possibilità cercate.

A differenza della valutazione in ambiente scolastico dove si tiene conto anche della situazione, dell'impegno e dell'evoluzione di ogni singolo studente, nella gara (come accade in genere anche nel mondo del lavoro) quello che conta è solo il risultato e non il metodo o la fatica con cui uno ci arriva. E' pertanto percorribile la seconda soluzione (forse più adatta ad una esercitazione di informatica in cui si chiede di scrivere un programma che risolva il problema) che però potrebbe venire scoraggiata dal divieto di usare una calcolatrice come previsto dal regolamento delle prime edizioni della gara, ma che negli ultimi anni è stata consentita. I numeri da provare infatti non sono piccolissimi, quindi i tentativi da fare sono molti. Il prezzo da pagare per l'utilizzo di tale metodo è un insieme di calcoli lungo e noioso.

Una gara di matematica, per lo più a squadre, e a squadre un po' "sui generis" come quella aperta al pubblico della Festa della Matematica non può non suggerire ai docenti alcuni interrogativi e spunti di riflessione:

1) Qual è l'importanza dell'aspetto competitivo e finanche "agonistico" nella didattica della matematica?

- la "gara di matematica" spesso costituisce solo un potenziamento per le eccellenze, un di più cui invitare gli studenti più brillanti anche per selezionarli ulteriormente a livello di istituto prima, poi provinciale e nazionale;
- l'aspetto competitivo crea motivazione ma anche, in taluni studenti anche di buon livello, delusione in seguito a eventuali cattivi risultati e paura di mettersi in gioco successivamente. A questo proposito la formula "a squadre" può essere d'aiuto nell'ottica di una condivisione della responsabilità all'interno del gruppo;
- si possono proporre momenti di competizione, individuale o a piccoli gruppi, anche all'interno dell'ordinaria prassi didattica?

- in fondo ogni prova di verifica non porta con sé, almeno in parte, elementi “agonistici”?

2) La matematica è davvero un’attività prettamente solitaria come le biografie di molti eminenti matematici del passato e del presente lasciano supporre? Oppure in quali termini essa può contribuire, insieme alle altre discipline, al raggiungimento della quarta fra le competenze chiave di cittadinanza (cioè “collaborare e partecipare”) individuate dal D.M. n.139/2007?

- in che modo una squadra di studenti collabora per risolvere un problema di matematica, anche di notevole difficoltà? Si può dire che non sia sufficiente dividersi il lavoro come in una comune attività cooperativa di ricerca ed esposizione (sempre più frequenti nella prassi della cosiddetta didattica per competenze). In genere occorre una prima riflessione cooperativa sul problema che consenta di svolgerne un’analisi preliminare e susseguentemente di scomporlo nelle singole parti da affidare ai vari componenti del gruppo;
- risulta inoltre interessante il modo in cui, spontaneamente, gli studenti si suddividono i vari ruoli all’interno delle squadre: il “consegnatore”, il coordinatore, colui che “attacca” in modo un po’ sfrontato i problemi più difficili e coloro che invece cercano di risolvere velocemente quelli più alla portata delle loro capacità.



Girando tra i tavoli …

Le squadre partecipanti sono di diverse tipologie: studenti universitari appassionati di matematica, studenti di uno stesso istituto superiore (anche di classi diverse) accompagnati dai docenti.

Dall’osservazione dei gruppi si può notare che, solitamente, vi è una suddivisione dei compiti.

Gli studenti più intuitivi solitamente si occupano del problema considerato difficile, mentre gli altri si occupano dei problemi più “semplici”.

Il valore educativo di questa esperienza è unico. Infatti i componenti della squadra collaborano vicendevolmente, scambiano idee e ragionamenti o costruiscono insieme la soluzione. Inoltre la presenza di uno o più insegnanti arricchisce positivamente l’avventura. La figura del Docente in questa gara non ha il ruolo di suggerire le risposte giuste, ma di guidare gli allievi e spesso anche di adattarsi alle loro strategie di soluzione

Ecco il testo del 2013

Problema 1 - Gioco di carte *20 punti*

Renato prende un mazzo di carte, estrae i 4 assi e i 4 re formando con essi quattro mucchietti di due carte ciascuno. Davanti ad ogni pila di carte scrive su di un cartellino il numero di assi presenti nella pila; poiché è dispettoso, il numero che ha scritto è falso. Sappiamo che vi sono più re nell'ultimo mazzetto a destra che nell'ultimo mazzetto a sinistra.

2	0	1	1

Dite quanti assi ha messo in ogni mazzetto. Scrivere un numero di quattro cifre, ognuna delle quali rappresenta la quantità di assi in ogni singolo mazzetto a partire da sinistra.

Problema 2 - Una gita al mare! *25 punti*

In una calda mattina di luglio, un gruppo di amici si scambia qualche sms per decidere se andare o no al mare nel pomeriggio. Ecco i messaggi:

1. "Giulia è innamorata di Andrea, quindi se Andrea va al mare, ci va anche Giulia"

2. "Giulia o Federico vanno al mare, ma dopo la discussione dell'altra sera, se va uno non va l'altro"

3. "Erica ha detto che oggi sta con Federico"

4. "Qualcuno al mare ci sarà senz'altro, Erica o Sara ci vanno"

5. "Se Sara va al mare, ci vanno anche Andrea e Federico" .... Insomma! Chi va al mare e chi no? Per dare la risposta regolarsi come segue: associare ad ogni nome i seguenti numeri: Andrea = 300, Giulia = 400, Federico = 500, Erica = 2000, Sara = 1000. La risposta deve essere la somma dei numeri corrispondenti ai nomi di coloro che andranno al mare.

Problema 3 - Recipienti di casa *25 punti*

Come mostra la figura, un bicchiere pesa quanto una bottiglia più una tazzina, mentre tre bottiglie pesano quanto due bicchieri. Quante tazzine pesano quanto una bottiglia?

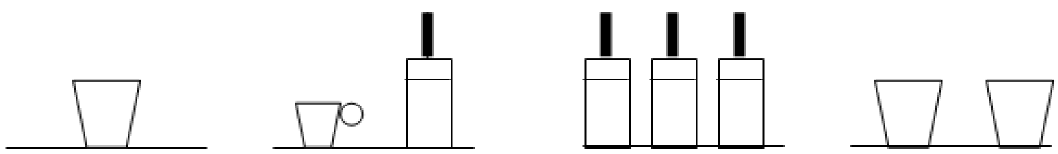


Figura 7

Problema 4 - Monete in pila *35 punti*

Francesco ha appena rotto il suo salvadanaio e vuole mettere in ordine le sue monete. Forma allora delle pile di nove monete e nota con stupore che il numero delle monete rimanenti è uguale al numero delle pile formate. Decide poi di suddividere le sue monete in pile di undici monete: scopre di nuovo che il numero delle monete che gli restano è uguale al numero di pile formate. Qual è il numero minimo di monete che aveva Francesco nel suo salvadanaio?

Problema 5 - Quanti sottoinsiemi?? *35 punti*

Si consideri l'insieme A = $\{1, 2, 3...2013\}$. Quanti sono i suoi sottoinsiemi i cui elementi, numerici, hanno somma 2027085?

Problema 6 - Giallo matematico *40 punti*

Il commissario di polizia Javert assume un matematico per aiutarlo a risolvere un delitto. Sulla scena del crimine sono presenti tra i 100 e i 200 bicchieri di vino ed esattamente in un bicchiere è stato versato del veleno. Il laboratorio di polizia potrebbe testare singolarmente il contenuto di tutti i bicchieri, oppure di un gruppo di bicchieri mescolando un campione per ogni bicchiere. Il commissario vuole ridurre al minimo il numero di test necessari per determinare in quale bicchiere c'è veleno. Il matematico suggerisce al detective di scegliere un bicchiere a caso e di testarlo; nel caso il risultato sia negativo di continuare i test mescolando tra loro in modo opportuno i campioni degli altri bicchieri, predicendo la risoluzione dell'enigma effettuando al massimo 8 test. Quanti bicchieri sono presenti sulla scena del crimine?

Problema 7 - Pagine e pagine… *40 punti*

Un tipografo sa che per numerare le pagine di un'enciclopedia, la cifra "1" è stata utilizzata 2013 volte. Il direttore della casa editrice gli chiede se è in grado di dire quante sono complessivamente le pagine numerate contenute nell'enciclopedia. Riuscite ad aiutarlo nell'impresa?

Problema 8 - Questo è il mio posto! *40 punti*

Un gruppo di amici decide di festeggiare la ricorrenza dell' ***8 Marzo***: si ritrovano quindi tutti a cena in uno spazioso locale. Ogni invitato prende posto in un'unica grande tavolata e tutti i posti a disposizione sono occupati da un commensale. La disposizione degli invitati è la seguente: esattamente 7 signore hanno un'altra signora alla loro destra; esattamente 12 signore hanno un uomo alla loro destra; esattamente il 75% degli uomini presenti ha una signora alla sua destra. Quanti sono gli invitati?

Problema 9 - Rettangolo antimagico *45 punti*

1	**1**	**1**	**2**
1	**2**	**4**	

Riempite tutte le caselle vuote di questo rettangolo antimagico. Le somme dei numeri di ogni riga o colonna sono sempre diverse fra loro e sempre minori o uguali a 9. Inoltre il rettangolo contiene soltanto i numeri 1, 2, e 4. Come risposta scrivere in sequenza i numeri dell'ultima riga.

Problema 10 - Cammino di Santiago *45 punti*

Un gruppo di appassionati escursionisti si sta allenando per il Cammino di Santiago di Compostela, formando una lunga fila di 50 metri. La strada è rettilinea ma dopo pochi chilometri incontreranno un bivio in cui occorre svoltare a sinistra; l'escursionista in fondo al gruppo non è sicuro che l'amico che sta in testa alla fila si ricordi della svolta. Decide quindi di raggiungerlo, gli ricorda di svoltare a sinistra e ritorna in coda. Sapendo che in questo "andata e ritorno" la velocità dell'escursionista premuroso è rimasta costante e che la colonna ha percorso 50 *m*, qual è la distanza (in *m*) percorsa dall'escursionista premuroso?

Problema 11 - Il gioiello *45 punti*

Un gioielliere ha una perla sferica di raggio 1 *cm*. Poiché desidera fare un regalo speciale alla moglie in occasione della *Festa della Donna*, pensa di utilizzarla come parte centrale di una spilla che abbia un aspetto floreale: un nucleo centrale con 8 sferette - in oro - tangenti (alla perla centrale ed alle sferette adiacenti, come in figura). Qual è il raggio (in *cm*) delle sferette? Dare la risposta scrivendo le prime 4 cifre decimali del risultato.

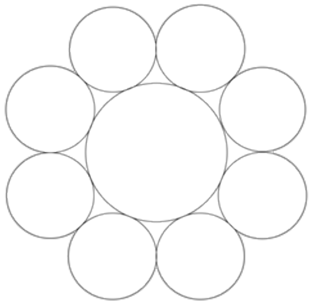


Figura 8

Problema 12 – La cassaforte *50 punti*

Giuseppe e Dario sono due soci di una piccola agenzia di viaggi. Dario è un appassionato di giochi matematici. Giuseppe decide di mettere alla prova le abilità di Dario e, a sua insaputa, cambia la combinazione di 5 cifre della cassaforte dell'ufficio; scrive quindi 10 combinazioni diverse su un foglio, tutte sbagliate ma in ognuna di esse una ed una sola cifra è collocata nel posto giusto. I 10 numeri sono : 07344 – 14098 – 27356 – 36429 – 45374 – 52207 – 63822 – 70558 – 85237 – 97665.

Inutile dire che Dario riesce a individuare la combinazione giusta dopo pochi minuti. Dare come risposta il numero formato dalle prime 4 cifre, da sinistra, relative alla combinazione giusta.

Problema 13 – I numeri di Sophie Germain *50 punti*

Sophie Germain (1776-1831) fu una donna che si innamorò della matematica dopo aver letto le opere di Archimede. Utilizzò per diversi anni uno pseudonimo maschile perché ai suoi tempi le donne erano escluse dagli ambienti accademici. Un numero primo p si dice di Sophie Germain se anche $2p+1$ è primo (ad esempio 2, 3, 5, 11). Sia S la somma dei primi 2013 numeri primi (perdonate il gioco di parole!) di Sophie Germain. Quanto vale il resto della divisione di S per 6?

Problema 14 - Una coppia moderna *55 punti*

In una coppia moderna Anna va a lavorare tutti i giorni in treno mentre Marco rimane a casa a badare alle faccende domestiche. Anna arriva alla stazione tutte le sere alle ore 18:00.

Marco parte in auto da casa per andare a prenderla alla stazione tutti i giorni alla stessa ora in modo da arrivare in stazione al momento esatto dell'arrivo di Anna, dopodiché tornano in auto a casa. Oggi Anna ha terminato prima di lavorare ed è riuscita a prendere il treno precedente. Arrivata in stazione si dirige a piedi verso casa mentre Marco ignaro di tutto parte alla solita ora in auto. Si incontrano lungo la strada e ritornano a casa in auto arrivando 8 minuti prima del solito. Supponendo che l'auto viaggi sempre alla stessa velocità, che Anna cammini a velocità costante pari ad 1/10 della velocità dell'auto e che quando si incontrano ripartano immediatamente in auto, a che ora è arrivato oggi il treno su cui viaggiava Anna? Fornire la risposta indicando le ore e i minuti, ad esempio se il treno arrivasse alle 17:48 il risultato da riportare sarebbe 1748.

Problema 15 - Spidercam *55 punti*

Un campo da tennis di dimensioni 24 *m* × 11 *m* è ripreso da una telecamera appesa a 4 fili tesi che vanno dalla telecamera alla cima di 4 pali alti 10 *m* e posti ai 4 angoli del campo. Un operatore può spostare la telecamera in un punto qualsiasi del campo e a una altezza qualsiasi (compresa tra 0 *m e* 10 *m*) agendo su un joystick che controlla la lunghezza dei fili. Qual è la massima somma delle lunghezze dei 4 fili in metri (qui intendiamo per lunghezza di un filo il tratto di filo dalla telecamera alla cima del palo)?

Problema 16 - Numero astronomico *55 punti*

Quali sono rispettivamente la prima, la duemilaquattordicesima, la duemilaventesima e la seimilatrentesima cifra a partire da destra del numero:

$\left(10^{2013}-2\right)^3$?

Naturalmente in scrittura decimale.

Problema 17 - L'ascensore *55 punti*

L'ascensore di un palazzo ferma ad 11 piani (il piano terra più i piani da 1 a 10). Al piano terra salgono 10 persone, ognuna delle quali va, indipendentemente dalle altre, a un piano compreso tra 1 e 10 con ugual probabilità. Se non vi sono passeggeri che attendono l'ascensore ai piani superiori, quale è il numero medio di fermate dell'ascensore? Detto F questo valore, fornire come risposta la parte intera di 1000 F.

Problema 18 - Calcolo enigmatico *60 punti*

$$\begin{array}{ccccc}
\pi o o & - & \omega & = & \pi \varpi (\\
+ & & \times & & - \\
\pi \varpi \theta & - & o \upsilon & = & \upsilon \omega \tau \\
\hline
\theta o \omega & : & o o \rho & = & \rho
\end{array}$$

A segno uguale corrisponde cifra uguale (e a segno diverso cifra diversa).

Quale numero corrisponde alla stringa $\theta \rho \omega \pi$?

Problema 19 - Il poligono di Archimede *80 punti*

Sia l la lunghezza del lato di un poligono regolare di 96 lati inscritto in una circonferenza di raggio 1. Il numero $2(((l^2-2)^2-2)^2-2)$ può essere scritto come la somma di due radicali quadratici $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ con a < b ed entrambi numeri naturali. Fornire il risultato come un numero di 4 cifre in cui le prime due sono le cifre di a e le ultime due le cifre di b (ad esempio per $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ scrivere 0305, per $\sqrt{2}+\sqrt{41}$ scrivere 0241, per $\sqrt{11}+\sqrt{13}$ scrivere 1113).

Problema 20 - Il gagà *90 punti*

Per Carlo essere alla moda è indispensabile tanto che, per seguire le nuove tendenze, si è comprato addirittura tre vestiti. Non ha badato a spese e ha pagato complessivamente 1991

Euro. Qual era il prezzo del secondo vestito, sapendo che quello del terzo era il doppio di quello del primo e che per scrivere i tre prezzi in questione (tutti numeri interi di Euro) si usano nove cifre diverse tra loro? Poiché il problema ammette più di una soluzione, dare come risposta la somma dei prezzi del secondo vestito.

Risultati Olimpiadi Gara Pubblico ultima edizione (2013)

	Problema	"Argomento"	Risposte			Punteggio	Indicazioni
			Errate	Assenti	Esatte	assegnato	per valutaz.
1	Gioco di biglie	logica	9	6	92	20	
2	Una gita al mare!	logica	1	7	99	25	
3	Recipienti di casa	logica-algebra	1	6	100	25	
4	Monete in pila	logica-algebra	6	9	92	35	
5	Quanti sottoinsiemi??	euristica-logica	7	54	46	35	
6	Giallo matematico	euristica-logica	13	66	28	40	
7	Pagine e pagine…	euristica	69	17	21	40	
8	Questo è il mio posto!	logica	13	30	64	40	Aumentare
9	Rettangolo antimagico	logica-euristica	2	7	98	45	Diminuire
10	Cammino di Santiago	fisica-algebra	68	32	7	45	Aumentare
11	Il gioiello	geometria (trigonometria)	26	43	38	45	Diminuire
12	La cassaforte	logica-euristica	12	50	45	50	
13	I numeri di Sophie Germain	teoria dei numeri	8	84	15	50	
14	Una coppia moderna	fisica-euristica-logica	20	75	12	55	
15	Spidercam	geometria	33	51	23	55	
16	Numero astronomico	teoria dei numeri-algebra	29	57	21	55	
17	L'ascensore	calcolo delle probabilità	24	83	0	55	Aumentare
18	Calcolo enigmatico	euristica-aritmetica-t. numeri	3	34	70	60	Diminuire
19	Il poligono di Archimede	geometria-algebra	5	90	12	80	
20	Il gagà	euristica-teoria dei numeri	14	90	3	90	
		Somme	363	891	886		

La statistica di cui sopra ci permette di "tarare" meglio (cioè in modo più oggettivo) la difficoltà dei vari problemi: nell'ultima colonna ci sono i commenti relativi al "peso" (punteggio) da considerare per le prossime edizioni della Festa della Matematica.

Sitografia

Per ulteriori informazioni sulla Festa della matematica (testi delle gare, ecc.) consultare il sito: http://www.mathesistorino.it/?page_id=98.

IL CONCETTO DI DERIVATA IN UN CONTESTO DI VOLO

Antonella Rossi
TFA Piemonte classe A047

> "Perché bisogna passare tante ore della propria vita su formule, punti e virgole e sulla nostra pazzesca ortografia inglese? Sono convinto che Dio non ha creato l'uomo perché scarabocchi sulla carta con la matita. Gli ha dato la terra e l'aria da godere. E ora anche le ali per volare."
>
> Charles Lindbergh

Premessa

Il presente lavoro si basa sull'esperienza di tirocinio attivo svolto nella classe quarta dell'Istituto Tecnico Aeronautico C. Lindbergh Academy di Rivoli per il conseguimento dell'abilitazione all'insegnamento.

L'attività didattica relativa al concetto di derivata, che andrò a esporre, è stata progettata grazie alla lettura di articoli di ricerca in didattica, all'osservazione del docente della classe durante le ore di lezione e alla partecipazione ai corsi del TFA.

Progettazione dell'attività didattica e descrizione delle attività svolte in classe

Nel progettare le lezioni ho cercato di preparare attività che rendessero il percorso di apprendimento il più possibile interessante e stimolante per gli allievi. Prima di cominciare ho dovuto esplicitare i prerequisiti, i nodi concettuali e gli obiettivi relativi all'argomento da trattare:

- Prerequisiti: Geometria analitica di base, retta, limiti, funzioni, dominio, concetto di continuità.
- Nodi concettuali: Derivata, pendenza di una retta, monotonia di una funzione, punti stazionari, concavità, derivabilità.
- Obiettivi:
  - Riconoscere il legame tra pendenza della retta tangente e la monotonia di una funzione.
  - Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto.
  - Calcolare la derivata mediante la definizione.
  - Calcolare la derivata mediante le regole di calcolo.
  - Trovare i punti critici.
  - Risolvere problemi della vita reale con l'utilizzo della matematica.

1ª Attività

La prima attività che ho proposto serviva per introdurre il concetto di pendenza in relazione a concetti già noti agli allievi. In particolare ho chiesto agli allievi di descrivere la procedura da svolgere per pilotare un aereo lungo un percorso prestabilito. Li ho poi invitati a ragionare sull'analogia tra la direzione da prendere e la pendenza della linea retta che percorrerebbe l'aereo se il pilota non virasse.

Ho trovato molto interessante la reazione degli allievi davanti alla scheda proposta, infatti all'inizio erano molto disorientati ed è stato necessario rassicurarli e dir loro che potevano rispondere nel modo che ritenevano più opportuno. Dopo averli lasciati lavorare, prima da soli e poi in piccoli gruppi, siamo passati a una discussione di classe durante la quale li ho osservati in modo da cogliere la loro gestualità e i termini utilizzati, che poi ho utilizzato per aiutarli ad arrivare a una terminologia corretta. Ad esempio, parlando della direzione per andare da un punto all'altro spesso li ho visti posizionare il braccio in modo da seguire la linea immaginaria che li collegava e allora abbiamo lavorato per arrivare al concetto di retta per due punti.

Un altro aspetto significativo dell'attività proposta deriva dal fatto che in navigazione aerea il sistema di riferimento è lievemente diverso da quello utilizzato in matematica. In particolare gli angoli vengono determinati dalla rotazione in senso orario di una semiretta a partire dal semiasse positivo verticale (il nostro semiasse positivo delle ordinate). Avendo appreso questo particolare prima di assegnare l'attività, ho deciso di dare la seguente consegna:

Considera il percorso disegnato sulla cartina scegli un suo punto e disegna il sistema di assi utilizzato in navigazione comprensivo di orientamento degli angoli. Riporta su un foglio di carta lucida il percorso, gli assi e l'orientamento dell'angolo. Cosa succede se guardi il foglio da dietro e poi lo ruoti di 90° in senso orario?

In figura 1 l'esercizio svolto da un allievo e l'affermazione fatta dallo stesso nel momento in cui ha osservato il foglio di carta lucida.

Figura 1

2ª Attività

Il secondo lavoro è servito per introdurre e far capire il significato di limite del rapporto incrementale. In particolare ho chiesto di utilizzare GeoGebra per eseguire le seguenti operazioni:

- disegnare il grafico di una funzione data e poi fissare un punto A su di essa;
- disegnare la retta tangente e trovarne la pendenza con il relativo comando;
- prendere un punto B sul grafico e calcolare, sia manualmente che con il comando di GeoGebra, la pendenza della retta AB;
- avvicinare sempre più il punto B e riportare in una tabella i valori delle pendenze affiancate dalle relative distanze tra l'ascissa di B e quella di A.

Ho poi chiesto di osservare i dati riportati in tabella e di cercare le informazioni ricavabili da essi. Dopo un momento di confronto tra compagni, siamo passati a una discussione di classe per arrivare alla definizione di derivata. In particolare, non è stato facile farli giungere alla definizione di limite ed è stato necessario utilizzare alcuni gesti tra i quali l'avvicinamento di pollice e indice per indicare il fatto che la distanza diventava sempre più piccola.

3ª Attività

Questo lavoro mi è stato consigliato dalla professoressa Robutti ed è servito a far comprendere il legame tra pendenza della curva e monotonia della funzione. La scheda assegnata conteneva una funzione e un intervallo [a,b] da suddividere in n parti uguali, con n abbastanza grande. Veniva poi richiesto di completare la tabella seguente, dove i=0,...,n; x_0=a; x_n=b e $x_{i+1}=x_i+(b-a)/n$, con l'utilizzo di Excel e di eseguire dei confronti tra le varie colonne.

x_i	$f(x_i)$	$x_{i+1} - x_i$	$f(x_{i+1}) - f(x_i)$	$[f(x_{i+1}) - f(x_i)]/(x_{i+1} - x_i)$

Osservando gli allievi durante il lavoro mi sono accorta che è stato facile, per la maggior parte di loro, trovare il legame tra il segno della pendenza e il crescere o decrescere della funzione. Più difficile invece è stato trovare il legame tra il modulo della pendenza e la rapidità di crescita o decrescita della funzione; infatti è stato necessario il mio intervento mediatore per portarli verso la strada giusta. In particolare li ho invitati a osservare meglio la tabella creata e a confrontare i valori numerici relativi alla pendenza con la differenza tra i valori di due ordinate consecutive.

Dalle risposte degli allievi, riportate nell'immagine seguente (Figura 2), ho notato che hanno avuto difficoltà a effettuare il confronto tra due colonne prediligendo invece un analisi limitata a una colonna per volta e per questo non molto efficace. Inoltre la frase "aumenta e diminuisce in maniera non omogenea" mi ha fornito uno spunto per farli riflettere sull'importanza di una terminologia corretta e per farli giungere da "non omogenea" a "non costante".

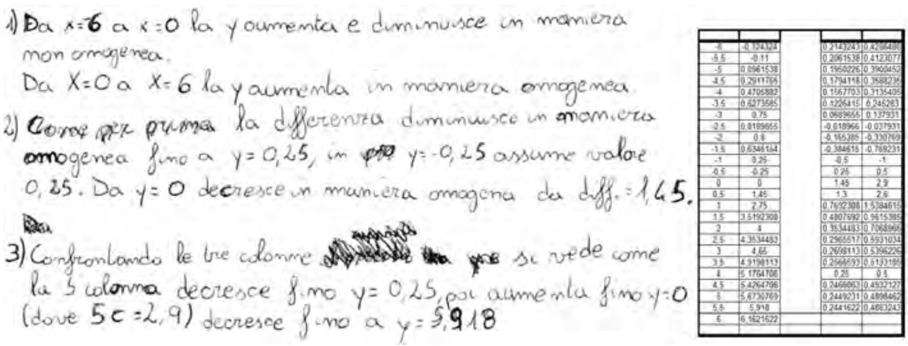


Figura 2

4ª Attività

Dovendo introdurre il concetto di punto critico, ho deciso di assegnare un lavoro da svolgere con l'utilizzo di GeoGebra in modo da far capire l'idea di concavità e il legame tra essa e la posizione della retta tangente in ogni punto al grafico della funzione. Il raggiungimento di tale scopo è stato possibile grazie all'utilizzo dello slider e del comando pendenza della retta, infatti l'esercizio richiedeva di far spostare un punto sul grafico della funzione e di osservare la posizione della retta tangente e la sua pendenza.

Questa volta ho notato che gli allievi hanno risposto con interesse e in modo corretto, l'unico mio intervento è stato quello di precisare il significato matematico del termine concavità a partire da quello che gli allievi gli associavano nel linguaggio corrente.

Da questa attività è stato possibile guidare gli allievi nella determinazione del grafico della derivata a partire da quello della funzione e viceversa. Mi ha stupito la rapidità con la quale sono riusciti a capire e a svolgere l'esercizio, a differenza degli allievi di una classe nella quale l'argomento era stato trattato nel modo tradizionale.

5ª Attività

Come ultima attività ho deciso di assegnare la seguente situazione problema:

"Devi andare da Parma a Ravenna ma non puoi andarci direttamente perché devi passare a prendere un tuo amico che si trova a 50 km da Parma. Come varia il numero di km che dovrai fare in base a dove abita il tuo amico? (Utilizza la cartina seguente)"

Figura 3

Di fronte a questo problema gli allievi sono sembrati inizialmente molto disorientati ed è stato necessario dir loro che potevano affrontare la situazione nel modo che ritenevano più opportuno. Successivamente hanno cominciato a lavorare esprimendo idee interessanti anche se non complete. In particolare quasi tutti hanno trovato subito le posizioni relative alla distanza massima e minima da percorrere senza però arrivare alla formulazione di una funzione che permettesse di descrivere il variare della distanza in funzione della posizione dell'amico.

Alcuni ragazzi hanno pensato di disegnare la circonferenza di raggio 50 km e centro Parma per evidenziare la posizione dell'amico e quindi ho deciso avviare la discussione di classe proprio a partire da questo fatto. Ne è uscito il dialogo seguente:

Professoressa: *Perché hai disegnato una circonferenza?*

Allievo: *Perché l'amico si trova a 50 km ma non so in quale direzione.*

Professoressa: *Ottimo! Quindi cosa sta variando?*

Allievo: *La posizione dell'amico.*

Professoressa: *E come puoi fare a determinare tale posizione?*

Allievo: *Non saprei bene …*

Professoressa: *Prova a disegnare il segmento che collega Parma a Ravenna. Ora sai dirmi in modo più preciso cosa varia al variare della posizione dell'amico?*

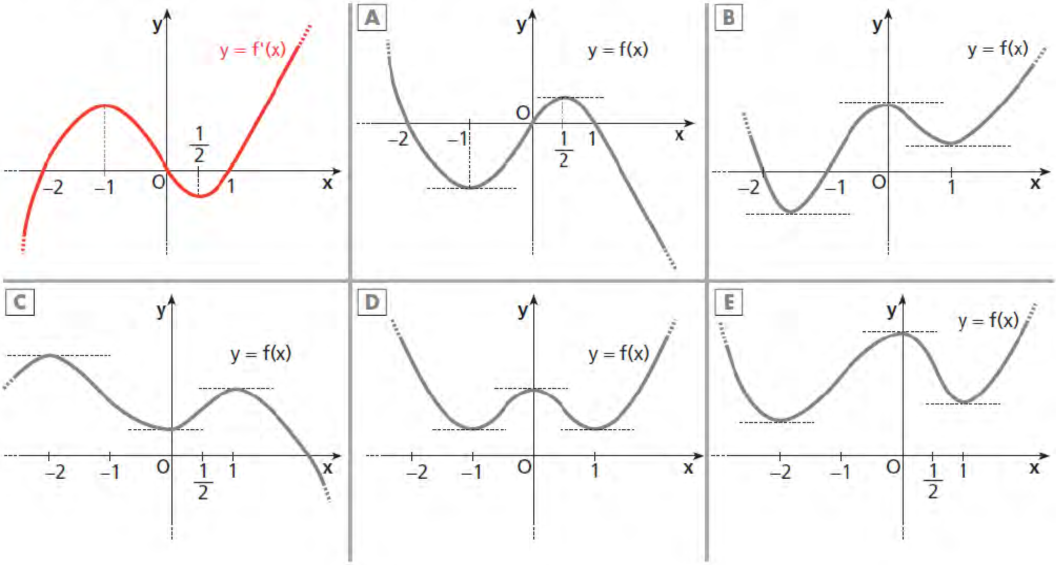
Allievo: *Sì, l'angolo!*

Grazie a questa riflessione sono poi riusciti ad arrivare a scrivere la funzione voluta senza che dovessi dirgliela io.

PROVA DI VERIFICA

VERIFICA 30-04-13

1. Dato il grafico di $y = f'(x)$ individua un possibile andamento del grafico della funzione $y = f(x)$. Spiega il motivo della tua scelta.



2. Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

$$y = \sin\sqrt{x} + \cos(x^2 + x - 5) \qquad y = cos(3x + 1) \qquad y = \sqrt[6]{(x^2 - 3)^5}$$

3. Studia dove le seguenti funzioni sono crescenti e decrescenti e trova i punti critici:

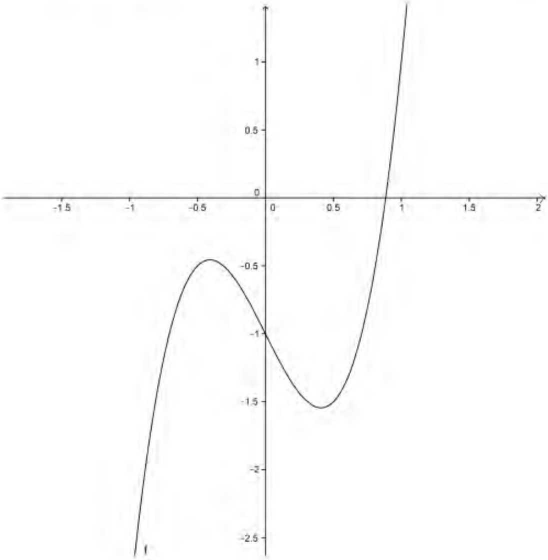
$$y = 4\cos x \sin x \qquad y = \frac{x^2 - 2x}{4x^2 + x}$$

4. Calcola la derivata della funzione $y = 3x^3 - x + 5$ con la definizione. Sapresti spiegare perchè si fa in questo modo?

5. Su un listello di legno, lungo $10m$, si appendono due cartelloni: uno ha la forma di un quadrato e viene appeso per un lato, l'altro ha la forma di un triangolo rettangolo e viene appeso per il cateto maggiore (il secondo cateto misura la metà di quello appeso). Sapendo che lato e cateto coprono esattamente il listello, trova le loro misure in modo che la somma delle superfici dei due cartelloni risultati minima.

6. Trovare la pendenza della retta tangente al grafico della funzione $y = 5x^4 - 2x^3 + 1$ nel suo punto di coordinate $(1, 4)$.

7. Dire in quali punti del grafico seguente c'è un cambio di concavità? Spiega cosa vuole dire concavità verso l'alto e verso il basso.



Ogni esercizio della prova di valutazione è stato pensato per verificare se gli allievi avevano raggiunto gli obiettivi richiesti.

Dall'analisi delle prove degli allievi è emerso che hanno avuto poca difficoltà con il primo, il sesto e il settimo esercizio anche se non sono stati in grado di fornire una buona motivazione alle proprie risposte. Gli esercizi di calcolo sono stati svolti abbastanza bene, forse perché abituati a lavorare molto su questo aspetto, mentre il quinto esercizio non è stato svolto da alcuno studente.

In generale speravo che la verifica andasse meglio perché gli allievi avevano lavorato bene durante le ore di lezione, però penso che sia necessario lavorare ancora molto sul linguaggio specifico e sulla comprensione degli aspetti fondamentali di ciascun concetto. Probabilmente impostando tutta la didattica in modo più interattivo si potranno raggiungere risultati migliori.

Conclusioni

L'esperienza di tirocinio è stata molto costruttiva, infatti fino ad ora ero stata catapultata nella scuola senza conoscerne tutti i vari aspetti, mentre in questo modo ho potuto capire come sia importante una buona programmazione dell'attività didattica, in modo da proporre attività significative che portino gli allievi ad apprendere a partire da loro esperienze e non solo da lezioni frontali svolte dall'insegnante.

Ho sempre pensato che fosse importante che gli allievi acquisissero la capacità di ragionare senza imparare nozioni a memoria e questa esperienza mi ha aiutato a capire come portarli verso un apprendimento più consapevole e duraturo.

Un altro aspetto importante evidenziato dal mio percorso di formazione è quello legato all'utilizzo delle tecnologie informatiche. Ho potuto infatti osservare come gli allievi siano maggiormente stimolati dall'utilizzo del computer e dei software specifici. A questo proposito è importante fornire loro il maggior numero possibile di strumenti informatici insegnando a utilizzarli al meglio leggendo i risultati in maniera critica, senza farsi ingannare da possibili errori legati a un loro utilizzo non corretto.

Bibliografia

Arzarello, F., Ascari, M. & Sabena, C. (2011). *A model for developing students' example space: the key role of the teacher*. ZDM Mathematics Education.

Avon, A. (2009). *La legislazione scolastica: un sistema per il servizio di istruzione*. Milano: Franco Angeli.

Giacardi, L. (2011). *The emergence of the idea of the mathematics laboratory at the turn of the twentieth century*. Dig where you stand 2, Proceedings of the Second Conference on the History of Mathematics Education.

Giraldo, V. , Carvalho, L.M. & Tall, D. (2002). *Theoretical-computational conflictf and the concept image of derivative*. Proceedings of the BSRLM Conference.

Maccario, D. (2012). *A scuola di competenze. Verso un modello didattico*. Torino: SEI.

Pegg, J. and Tall, D. (2002) *Fundamental cycles of cognitive growth*. Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Rivoltella, P.G. & Rossi, P.C. (2012). *L'agire didattico*. Brescia: La Scuola.

Robutti, O. (2009). *Theacher's semiotic games in mathematics laboratory.* JIEEM.

Trinchero, R. (2005). *Valutare l'apprendimento nell'e-learning*. I quaderni di formare. Erickson.

Trinchero, R. (2012). *Costruire, valutare, certificare competenze*. Milano: Franco Angeli.

Sitografia

Istituto nazionale di documentazione, innovazione e ricerca educativa: http://www.indire.it/.

Sito dell'Unione Matematica Italiana: http://umi.dm.unibo.it/.

Sito di didattica della fisica e della matematica in rete: http://www.difima.unito.it/.

UN LABORATORIO INTERDISCIPLINARE TRA MATEMATICA, INFORMATICA E DISEGNO: LA VOLUTA IONICA DEL VIGNOLA

Annarosa Serpe[1], Maria Giovanna Frassia[2]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università della Calabria [2]Specializzata TFA - Classe di Concorso A049 - Università della Calabria

Se la forma scompare la sua radice è eterna.

Mario Merz (1925-2003)

Introduzione

Le recenti Indicazioni Nazionali rimarcano la rilevanza culturale della Matematica e la sua importanza come strumento universale d'indagine e di formazione mentale; menzionano espressamente che l'educazione scientifica e professionale deve aver luogo mediante un apprendimento critico e consapevole dei concetti e dei metodi fondamentali della matematica, non disgiunto dal costante riferimento alla realtà sensibile e alla dimensione storica. Di conseguenza, è fondamentale nel processo d'insegnamento mettere l'accento su un numero maggiore di registri di linguaggio: funzionale, algebrico, geometrico, culturale, tecnico-informatico, al fine di generare nello studente riflessioni autonome atte a determinare una efficace interiorizzazione dei contenuti. In tal modo, il discente diventa protagonista del suo apprendimento e, impegnandosi in attività che investono più campi, costruisce il pensiero scientifico in modo più vivo e interessante. La necessità didattica risiede, quindi, nel far cogliere la pervasività della Matematica e i segni della sua presenza ubiqua in tutti i campi del sapere mettendone in rilievo "il carattere sapienzale", secondo la felice espressione coniata da Ennio De Giorgi (De Giorgi, 1996).

In questa ottica si colloca il presente lavoro che propone un laboratorio didattico per l'eccellenza, a valenza interdisciplinare, messo in atto in condizioni di *problem-solving*, teso a evidenziare il rapporto matematica-arte con un duplice scopo: avvicinare gli studenti a quella matematica che ha profondamente interagito con l'espressione artistica e, dall'altro introdurre, in virtù delle nuove istanze poste dalle tecnologie, nuove prospettive didattiche nell'insegnamento della matematica. Nello specifico, il laboratorio propone lo studio della curva spirale, tra teoria e pratica, attraverso il disegno della voluta ionica progettato dall'architetto Jacopo Barozzi detto il Vignola (1507-1573). La costruzione del senso della rappresentazione grafica prevede la realizzazione di semplici algoritmi implementati nell'ambiente di programmazione MatCos che simulano in maniera virtuale il capitello ionico. La peculiarità del laboratorio risiede nel taglio metodologico che privilegia l'essenza stessa della geometria (al contempo razionale e oggettiva nella sua formulazione matematica, e libera e soggettiva nelle sue infinite combinazioni) come strumento naturale di sintesi tra gli aspetti tecnici ed estetici, tra la sfera artistica e quella scientifica. Il laboratorio, rivolto alle V classi del liceo scientifico-tecnologico, è strutturato nel modo seguente: dopo avere delineato la metodologia didattica e l'ambiente di programmazione MatCos, utilizzato nella codifica degli algoritmi, si presentano le fasi di svolgimento imperniate sul disegno strumentale della voluta ionica del Vignola, fra tradizione e modernità. Brevi considerazioni conclusive chiudono il lavoro.

Metodologia didattica

L'esemplificazione didattica è finalizzata alla comprensione del rapporto concreto-astratto senza confinare i concetti matematici in un ambito puramente teorico. Infatti, l'attività laboratoriale prende l'avvio dalla problematica storica in modo da restituire alle idee il loro carattere originario di scoperta e di novità e contribuire, in modo essenziale, a costruire intorno ai concetti significati, applicazioni e aperture che spesso rimangono nascoste nella successiva sistemazione formale. Le fasi successive prevedono lo studio del metodo geometrico sviluppato dal Vignola per il tracciamento della voluta ionica utilizzando il disegno come strumento di analisi formale tra passato e presente: il disegno con riga, squadra e compasso e, successivamente, con il computer come strumento da programmare. La rilettura informatica consente di passare alla costruzione del senso della rappresentazione (colmare le lacune tra l'esperienza e la realizzazione) attraverso il modello (la curva *spirale*) che evidenzia e comunica la sintesi geometrica. Il modello matematico contiene in sé un potenziale espressivo ed evocativo dal punto di vista metrico e formale; simulare il disegno della curva mediante semplici algoritmi costituisce un valore aggiunto: «*The interaction between a learner and a computer is based on a symbolic interpretation and computation of the learner input, and the feedback of the environment is provided in the proper register allowing its reading as a mathematical phenomenon*». (Balacheff & Kaput, 1996, p.470).

La metodologia didattica prescelta esce dagli schemi tradizionali e contribuisce a dare alla matematica un'immagine diversa, ovvero più interdisciplinare e quindi più formativa non solo sul piano prettamente cognitivo ma anche informativo. In questo modo i discenti hanno realmente la possibilità di allargare gli orizzonti culturali e sviluppare sia capacità in merito all'utilizzo di metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse, sia attitudini a riesaminare le conoscenze via via acquisite.

L'ambiente di programmazione MatCos

L'ambiente MatCos ideato e costruito nel Centro Interdipartimentale di Ricerca Didattica (CIRD) dell'Università della Calabria, sperimentato dal 1999 nelle scuole medie inferiori e superiori calabresi e, dall'anno 2003, anche di altre regioni, nasce con il duplice scopo:

- avviare lo studente alla programmazione utilizzando i concetti matematici adeguati alla sua età;
- far apprendere e interiorizzare metodi e concetti matematici sfruttando le potenzialità del computer.

Dispone di un linguaggio di programmazione, fortemente orientato alla matematica, che utilizza comandi specifici relativi a precisi concetti matematici, in lingua italiana, con una sintassi semplice e con istruzioni molto vicine al linguaggio naturale e al linguaggio matematico. Inoltre, è intermedio tra un linguaggio generale e un CAS, ovvero con qualche comando specifico di calcolo simbolico da utilizzare per lo più come momento di verifica. MatCos è composto dai seguenti blocchi d'istruzioni:

- classiche di ingresso/uscita; assegnazione, ciclo, condizionale, operatori booleani;
- specifiche di natura geometrica (nel piano e nello spazio euclideo e cartesiano);
- di natura aritmetico-analitica per lavorare con frazioni, funzioni, derivate, integrali, etc.;
- di natura statistico-probabilistica per lavorare con diagrammi, istogrammi, etc.

Ogni comando ha i parametri relativi al concetto matematico che si vuole rappresentare. Il linguaggio è modulare, con ogni modulo riferito a una precisa fascia d'età scolare; è privo di fase dichiarativa, il che contribuisce a snellire il fardello delle regole sintattiche di un linguaggio di programmazione usuale. La caratteristica precipua del linguaggio si esplica nell'istruzione *passo-passo* che consente di eseguire il programma mediante un comando alla volta, visualizzando così i risultati intermedi. Questa peculiarità è molto importante perché consente allo studente di controllare ogni passo dell'algoritmo e correggere, più facilmente, eventuali errori. MatCos consente rappresentazioni di diverse tipologie di dati e molti tipi di procedimenti risolutivi riducibili al calcolo, nonché di risultati con una grafica opportuna e di facile comprensione. Per ulteriori approfondimenti si veda la bibliografia (Costabile, 2010).

Fase 1: Il capitello ionico e sua rappresentazione geometrica: approccio storico

Il laboratorio prende l'avvio con la disamina del capitello della colonna ionica (Figura 1), già incontrato nel curricolo di studi negli anni precedenti. In questa prima fase l'insegnante invita gli studenti a rivisitare con attenzione questo elemento architettonico: osservare la forma e, quindi, desumere una prima caratterizzazione. Mediante una conversazione "provocata" e guidata farà risaltare come il disegno è una figurazione realizzata sulla base di un tracciato più o meno complesso per trasmettere informazioni relative a oggetti esistenti o immaginari, concetti ed emozioni; pertanto costituisce uno strumento d'indagine, di studio e di progettazione non solo nel mondo dell'arte ma anche in quello della scienza e della tecnica.

Figura 1

Gli studenti messi di fronte a questa situazione empirica constateranno che il capitello della colonna ionica, a differenza degli altri due ordini architettonici (dorico e corinzio), presenta ai propri lati due arricciature, denominate volute*1*, che ricordano la forma di spirale. Di seguito, sempre nella logica di una presentazione prima di tutto storica, l'insegnante inviterà gli studenti a effettuare opportune ricerche al fine di poter delineare un quadro conoscitivo più completo dell'elemento architettonico in esame (Figura 2).

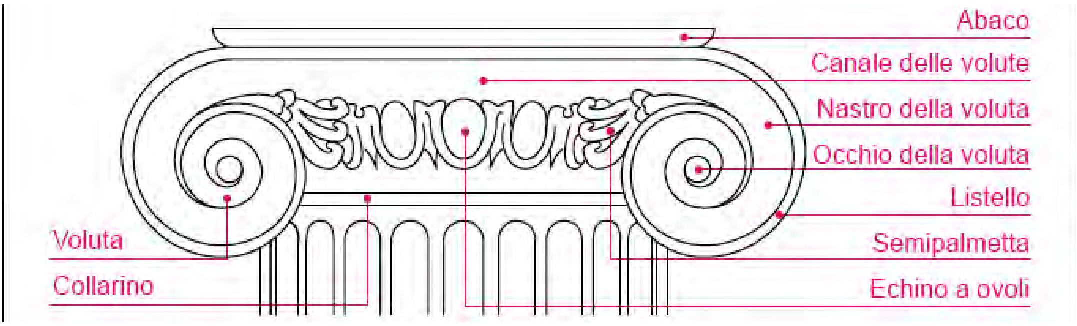


Figura 2

1 dal latino *volvere*, che significa girare, avvolgersi.

Dalla ricerca emergerà:

- come sin dalla comparsa dell'ordine ionico (VII secolo a.C.) la forma di spirale si riconosceva nettamente nelle due volute che caratterizzavano il capitello;
- la questione storica attorno alla forma di questo elemento architettonico a partire dal momento in cui il disegno diviene uno strumento per la rappresentazione fedele delle forme, e si diffonde la pratica dell'uso della proiezione ortogonale (Recht, 2001).

Mediante opportuni approfondimenti gli studenti avranno modo di scoprire che il dibattito ebbe inizio tra Quattrocento e Cinquecento, e trasse origine dalle difficoltà di interpretazione di un breve passo del III libro del trattato *De Architectura* di Vitruvio[2],finalizzato allo sviluppo di un metodo per il tracciamento della voluta che fosse poi applicabile nella pratica edile del Cinquecento, e permettesse, così, un utilizzo generalizzato dell'ordine ionico. In sostanza, disegnare la voluta ionica significa individuare un metodo grafico per tracciare la curva (la forma geometrica in questione) che da un cerchio minore con dimensione data si svolga in un numero determinato di giri verso un cerchio più grande, concentrico al primo, anch'esso di dimensioni date. Il che rappresenta la definizione matematica di un tratto di *spirale* (Lockwood, 1967).

La problematica emersa desta negli studenti il gusto dell'indagine nei due sensi opposti: verso l'avvenire da cui, come è naturale, si sentono attratti e verso il passato di cui indubbiamente sentono il fascino. Su queste basi, l'insegnante predispone, quindi, una ricostruzione semplificata dello sviluppo storico della questione partendo proprio dagli scritti di Vitruvio che forniscono la descrizione di alcune regole base molto chiare, ma sono di difficile interpretazione per ciò che concerne il tracciamento vero e proprio della voluta, soprattutto oltre il primo giro. Infatti, nello schema rappresentativo, Vitruvio non fornisce misure concrete, ma solo rapporti proporzionali, indicando che la voluta si traccia per mezzo di quarti di cerchio, utilizzando il compasso a partire dal punto più esterno, fino ad arrivare a congiungersi con l'occhio (Vitruvio, III, 256). Il testo vitruviano, dunque, non precisa quanti quarti di cerchio occorrono per completare la voluta, né indica la posizione dei loro centri, né precisa quanti giri la voluta debba compiere in totale; la spirale che ne risulta matematicamente è inesatta e, adottata come voluta, appare sgraziata.

La radice della voluta ionica: la spirale

La radice della forma è eterna, solo l'arte la rende visibile, *«chi la guarda trasporta nella propria esistenza ciò che vede, man mano la radice creatrice partecipa all'eterna vicenda».* (Pasini, 2004). La spirale di Archimede[3] è la radice della voluta ionica.

Gli studenti, a questo punto, si trovano decisamente di fronte a un problema matematico: la rappresentazione del modello geometrico di spirale. Il modo più naturale per descrivere una spirale è quello di partire dalla definizione fisica per giungere alla descrizione matematica, attraverso la dimensione storica. Il termine *spira* (dal greco έλικα) è una linea flessuosa che gira intorno a un punto, o polo, senza mai tornare su se stessa. Ad esempio la linea tracciata da una puntina che striscia radialmente verso l'esterno su un disco fonografico rotante definisce la spirale: curva asimmetrica aperta generata da un punto che si arrotola intorno a un'origine fissa, detta *polo*, aumentando (o diminuendo, secondo il verso) in modo continuo la distanza da essa; i tratti curvilinei sono detti *spire* (Figura 3).

2 Il *De Architectura* di M. Vitruvio Pollio è l'unica opera di architettura pervenutaci dall'antichità, redatta probabilmente tra il 30 e il 20 a.C. L'opera, divisa in dieci libri, costituisce un riferimento teorico ideale, un canone incontrastato del classicismo architettonico.

3 Archimede di Siracusa, nato nel 287 a.C. e morto durante l'assedio di Siracusa per mano dei Romani tra il 214 e il 212 a. C.

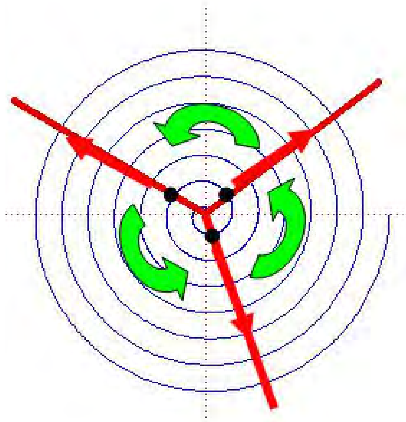


Figura 3

La spirale bidimensionale più comune è quella uniforme, detta di Archimede (Archimede, Spirali, 345):

I. *Se si traccia nel piano una linea retta, ed essa, fermo restando uno dei suoi estremi, vien fatta rotare con velocità costante (*ἰσοταχέως*) quante volte si vuole, fino a tornare nella posizione dalla quale è partita, e se al tempo stesso sulla linea rotante si trasporta un punto con moto uniforme (*ἰσοταχέως*) cominciando dall'estremo che resta fermo, il punto descriverà nel piano una spirale* (ἕλικα).

II. *Si chiami principio della spirale (*αρχά τᾶς ἕλικος*) l'estremo della retta che resta fermo mentre la retta ruota*.

Queste due proposizioni, formulate nel *De Spiralibus*[4], definiscono la spirale in modo cinematico (costituiscono un primo tentativo di costruire un modello matematico per la descrizione del movimento): *la traiettoria che descrive un punto movendosi di moto rettilineo uniforme su una semiretta che ruota a velocità costante intorno all'origine*. Indicato con P il punto mobile che si muove con velocità uniforme su una semiretta *OA* che a sua volta ruota con velocità angolare uniforme intorno al polo *O*, a ogni istante del moto, la distanza del punto *P* da *O* è detta *raggio vettore* (indicato con *r*) e l'ampiezza dell'angolo percorso (angolo che *OP* forma con la posizione iniziale della semiretta) è detta *anomalia,* indicata con θ (Figura 4). Dalla definizione è evidente che la curva gode della proprietà di avere in ogni punto il raggio vettore *r* proporzionale all'anomalia θ (il raggio *r* è funzione continua e monotòna dell'angolo θ*)*.

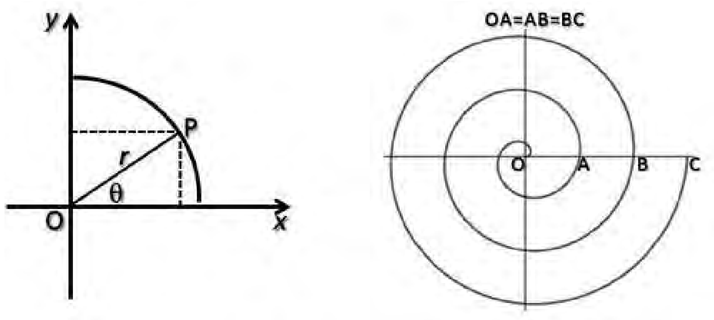


Figura 4

4 Archimede studiò la curva nel suo trattato *De Spiralibus*, opera assai singolare nonché di straordinaria eleganza. Il procedimento dimostrativo procede lungo due filoni assai significativi che consistono nell'uso della spirale per la rettificazione della circonferenza e nella quadratura di aree comprese entro la spirale stessa e determinate rette.

Questa proporzionalità diretta esistente tra r e θ viene appunto a tradursi nell'equazione polare

$r = a \cdot \theta$ con a>0 (1)

Per $r=0$ si ha $\theta=0$ si ottiene il polo O della spirale. La lunghezza del raggio vettore *OP* con *P* punto della spirale di coordinate polari (r,θ) è $r = a \cdot \theta$ mentre la lunghezza del raggio vettore OP' con P' punto della spirale che si ottiene dopo un giro completo sulla spirale partendo da P (facendo aumentare θ) è uguale a $r' = a(\theta + 2\pi) = a\theta + 2\pi a$; ancora, la lunghezza del raggio vettore OP" con P" punto della spirale che si ottiene dopo un giro completo sulla spirale partendo da P' (sempre facendo aumentare θ) è uguale a $r'' = a(\theta + 4\pi) = (a\theta + 2\pi a) + 2\pi a$. Da questi risultati si nota che la distanza tra le singole spire (due punti successivi allineati su una stessa retta passante per il polo), denominata *passo* è costante e pari a 2πa (Figura 5).

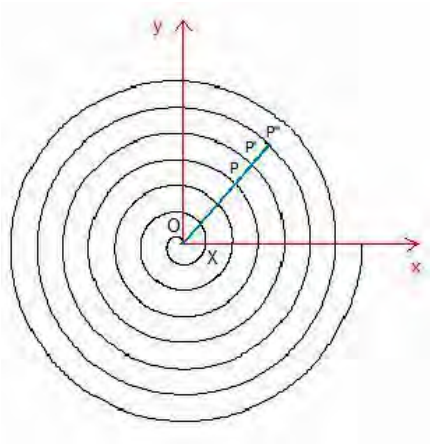


Figura 5

Se *a=1* il passo della spirale è *d=2π*, la spirale interseca l'asse *x* nei punti *0, 2π, …, 2kπ,* con *k=1,2, 3, …..* Conoscendo il passo, si può determinare *a=d/2π.* La spirale di Archimede può essere espressa anche attraverso il sistema di coordinate parametriche:

$$x = a \cdot r\cos(\theta)$$
$$y = a \cdot r\sin(\theta)$$

Fase 2: Il tracciamento della voluta ionica: il metodo geometrico del Vignola

Nell'ottica della ricostruzione dello sviluppo storico, in questa seconda fase gli studenti saranno chiamati a proseguire l'indagine in merito alla codifica di un modello della voluta ionica, alla luce dell'interpretazione o reinvenzione rinascimentale testimoniata dai trattatisti. Infatti, nei trattati d'architettura, redatti a partire dal Rinascimento, si trovano molte soluzioni, diverse tra loro, relative al tracciamento della spirale, si tratta di metodi geometrici[5] che hanno nel compasso lo strumento fondamentale, e l'arco di circonferenza è la base del disegno della voluta ionica. A differenza delle proporzioni generali del capitello, per il tracciamento della voluta, i trattatisti si discostano sempre più dalle indicazioni date da Vitruvio, per giungere con Jacobo Barozzi[6] (detto il Vignola), a invenzioni interamente originali: nel suo trattato *Regola delli cinque ordini d'architettura* (1562), propone due metodi geometrici molto diversi che conducono, però, a risultati assai simili. In particolare, il secondo metodo muove da un'idea del tutto nuova, che è quella di discretizzare la curva (la spirale), determinando prima i punti

5 Si citano, ad esempio, quello di Serlio (1537), di Philandrier (1544) e di Salviati (1552).
6 Jacopo Barozzi da Vignola (1507-1573), architetto, teorico dell'architettura e trattatista italiano.

per i quali si vuole che passi, per poi individuare i necessari centri di curvatura; a questo scopo divide lo spazio occupato dalla voluta in otto parti (Figura 6), tracciando le bisettrici degli assi dell'occhio. La costruzione del metodo geometrico è impostata nell'occhio della spirale.

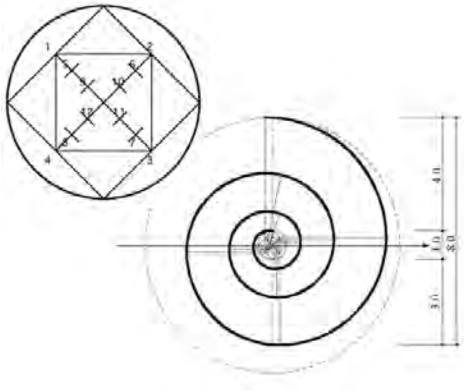


Figura 6

Si tratta ora di andare a studiare il metodo proposto da questo trattatista; l'insegnante propone ai discenti di disegnare con strumenti classici (riga, squadra e compasso) la voluta ionica a partire dalle indicazioni contenute nel testo originale[7] (Figura 7) estrapolate, mediante una ricerca specifica, da Internet.

«*Tirato il cateto[8] di questa prima voluta et un'altra linea in squadro[9] che passi per il centro dell'occhio si divide il detto occhio nel modo segnato di sopra nella figura A, et si comincia poi al primo punto segnato 1, et si gira col compasso una quarta di circolo dipoi al punto segnato 2, si gira l'altra quarta et così procedendo si fa i tre giri compitamente. Per far poi la grossezza del listello[10] sì come egli è la quarta parte della larghezza che lascia di sopra il primo giro così si ha da partire ciascuna di quelle parti c'hanno servito per centri in 4 et girando poi oltre, 12 quarte di circolo con quelli centri sarà fornita.*» (Barozzi, J. da Vignola (1562). *Regola delli cinque ordini d'architettura* Tavola XX).

Questa modalità consentirà l'analisi dal punto di vista matematico della costruzione. Le istruzioni per costruire la voluta ionica del Vignola sono le seguenti: tracciare due segmenti uguali perpendicolari che si intersecano nel loro punto medio O, in cui si centra il compasso per disegnare una circonferenza di raggio uguale alla metà dei segmenti tracciati; sia P un punto sulla circonferenza, estremo di uno dei diametri, da cui partirà la spirale; i due diametri della circonferenza corrispondono alle diagonali del quadrato inscritto; dividere le sue mediane in sei parti uguali, numerandole in senso orario o antiorario, secondo lo sviluppo desiderato della spirale (Figura 7a). Dai punti di divisione tracciare quattro serie di parallele ai diametri della circonferenza, prolungandole all'esterno (Figura 7b). Con centro nel punto 1 e raggio uguale alla distanza P1 descrivere l'arco PA, che sarà raccordato con il successivo di centro 2 e raggio uguale alla distanza A2 fino al punto B.

7 *Regola delli cinque ordini d'architettura*, Tavola XX, libro I, Cap.XVI.

8 *Cateto*: dal greco κάθετος linea perpendicolare.

9 *In squadro:* ad angolo retto rispetto al cateto.

10 *Listello:* bordo, piatto e rilevato, della voluta.

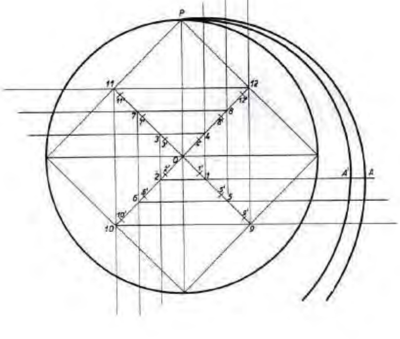


Figura 7a

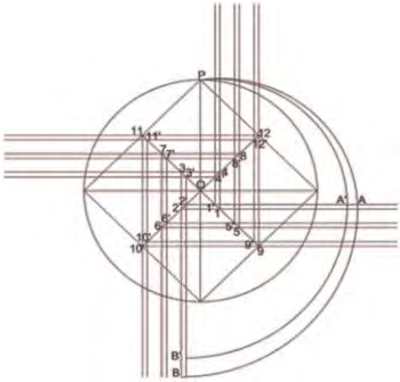


Figura 7b

Proseguire centrando in 3 con raggio B3 fino al punto C e ripetere il procedimento fino al punto N, centrando in tutti i punti fino al dodicesimo. Il profilo interno della voluta si ottiene in maniera analoga, basandosi però sui centri 1', 2', 3'... 12', che si trovano a un quarto della distanza che intercorre fra i precedenti punti, verso l'interno (Figura 8).

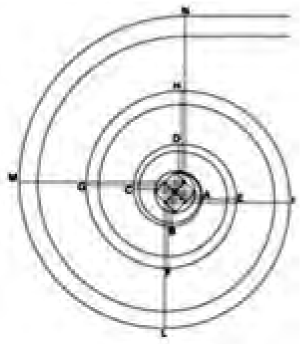


Figura 8

Il metodo, di notevole eleganza formale, fa esplicito riferimento agli Elementi di Euclide servendosi, in particolare, delle proposizioni XI[11] e XIII[12] del III libro e della V[13] del IV libro (Euclide, 2007); è costituito da tre tronconi di spirale archimedea, pertanto la sua natura geometrica lo rende di facile intuizione e applicabilità immediata.

Fase 3: Modellizzazione al computer della voluta ionica del Vignola

Il processo di rappresentazione del Vignola, ereditato dal Rinascimento, presenta una serie di operazioni tanto più laboriose quanto migliore si vuole che sia il grado di percezione delle caratteristiche della voluta ionica. Il lavoro può essere semplificato ricorrendo all'informatica che consente di costruire il modello geometrico rendendo possibile ogni sorta di modifica: il modello virtuale diventa un correttore attivo nella fase di progettazione. Facendo uso del computer come strumento da programmare, occorre, preventivamente, formalizzare l'algoritmo

11 Prop.XI: *Qualora due cerchi siano tangenti tra loro all'interno, e siano presi i loro centri, la retta congiunta ai loro centri e prolungata cadrà sul contatto comune dei cerchi.*

12 Prop.XIII: *Un cerchio non è tangente a un cerchio secondo più punti che uno solo, sia qualora sia tangente all'interno sia qualora lo sia all'esterno.*

13 Prop.V: *Intorno al triangolo dato circoscrivere il cerchio*. La proposizione è equivalente a determinare il centro di una circonferenza di cui sono noti tre punti, ovvero il teorema che stabilisce come per tre punti distinti passi una sola circonferenza.

risolvente. La creazione dell'algoritmo costituisce un momento importante e delicato in quanto gli studenti devono progettare quella "successione finita di passi" che permettono al computer di simulare e disegnare la curva, o di evidenziare la necessità di ulteriori approfondimenti. Non è un'operazione semplice perché presenta ostacoli inerenti la procedura nella quale bisogna manipolare oggetti astratti e formalizzabili.

Algoritmo per la costruzione della voluta ionica secondo il Vignola

1. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *xOy*, tracciare due segmenti congruenti di lunghezza *l* e perpendicolari, che si incontrano in *O*, punto medio dei segmenti tracciati;
2. Disegnare la circonferenza di centro *O* e raggio $r = l/2$;
3. Costruire le mediane del quadrato e dividere le mediane del quadrato in sei parti congruenti;
4. Dai punti determinati tracciare quattro serie di rette parallele ai diametri della circonferenza, prolungandole verso l'esterno.
5. Ciclo per la costruzione della voluta interna ed esterna:
   A. Costruzione degli archi con centro i punti costruiti sulle diagonali del quadrato per la voluta interna;
   B. Costruzione degli archi con centro i punti ottenuti dai punti sulle diagonali del quadrato a distanza di ¼ del raggio della circonferenza verso l'interno.

Codice di programma MCS1: Voluta ionica del Vignola

/*Costruzione dello schema iniziale per la voluta ionica*/

```
rifcart; O=punto(0,0); x=legginum("ascissa"); y=legginum("ordinata");
A=punto(x,y); B=punto(-x,-y); s1=Segmento(A,B);
s2=Ruota(s1,O,90,ORARIO); C=s2.Estremo(1); D=s2.Estremo(2);
r=radiceq(x^2+y^2); G=Circ(O,r); P=Punto(0,r); PP=P; s3=segmento(A,C); s4=segmen-
to(C,B); s5=segmento(B,D); s6=segmento(D,A); l=radiceq(2)*r; M1=Punto_medio(s3);
M2=Punto_medio(s4); M3=Punto_medio(s5); M4=Punto_medio(s6);
s7=segmento(M1,M3); s8=segmento(M2,M4); alfa=Ampiezza(angolo(A,O,M4));
```

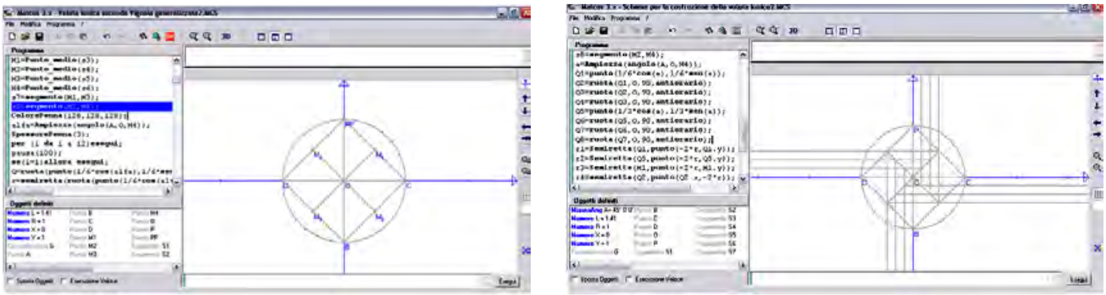


Figura 9

/*Ciclo per la costruzione simultanea dei 12 archi, che compongono i profili interno ed esterno della voluta ionica secondo il Vignola. Di seguito i comandi che restituiscono il primo arco*/

```
Q=ruota(punto(1/6*cos(alfa),1/6*sen(alfa)),O,270,antiorario);
r=semiretta(ruota(punto(1/6*cos(alfa),1/6*sen(alfa)),O,180,antiorario),ruota(pun-
to(1/6*cos(alfa),1/6*sen(alfa)),O,270,antiorario));
QQ=punto(Q.x-radiceq(x^2+y^2)/12,Q.y); d=distanza(P,Q); Cir=circ(Q,d);
N=intersezione(Cir,r,1); arco(Q,P,N,orario); dd=distanza(PP,QQ); CCir=circ(QQ,dd);
NN=intersezione(CCir,r,1);arco(QQ,PP,NN,orario);
```

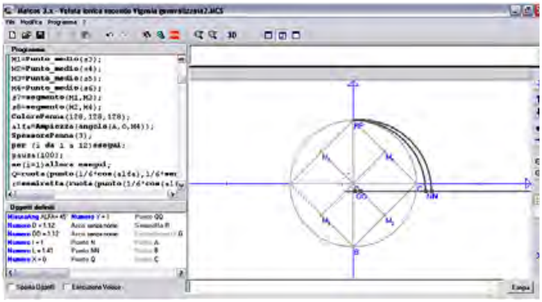


Figura 10

In modo analogo costruiamo i successivi archi raccordati.

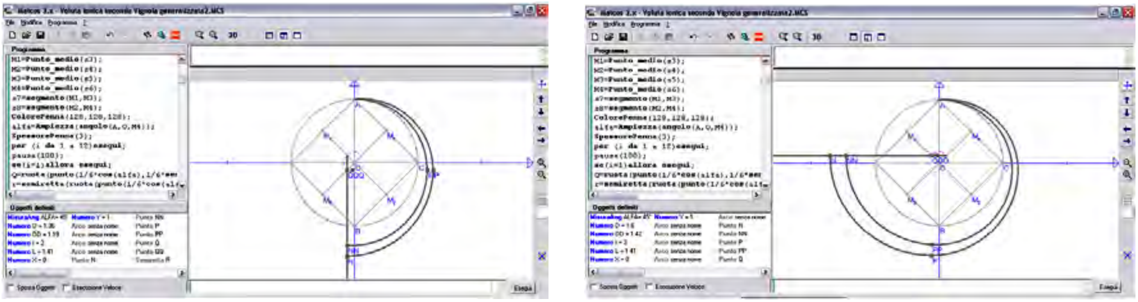


Figura 11

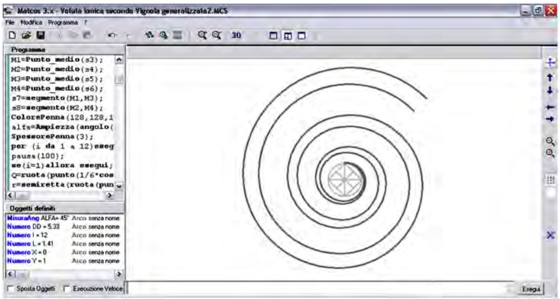


Figura 12

Per la costruzione dei profili delle volute che compongono il capitello ionico, si inserisce all'interno del ciclo il comando della simmetria assiale.

```
rt=Retta(punto(k,0),punto(k,1));
Q1=Simmetria_ass(Q,rt);P1=Simmetria_ass(P,rt); N1=Simmetria_ass(N,rt);
arco(Q1,P1,N1,antiorario); Q2=Simmetria_ass(QQ,rt); P2=Simmetria_ass(PP,rt);.N2=Sim-
metria_ass(NN,rt); arco(Q2,P2,N2,antiorario);
```

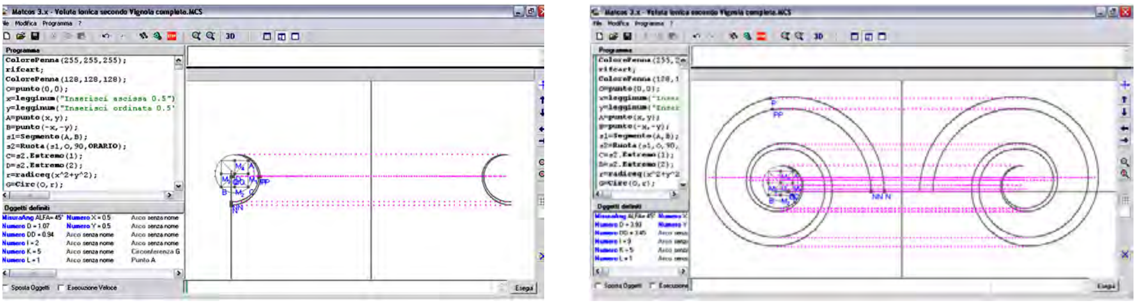


Figura 13

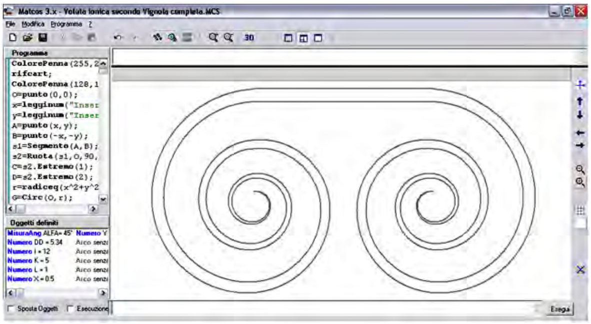


Figura 14

Conclusioni

Il laboratorio fornisce la reale possibilità di vedere come la matematica interviene nell'arte ad almeno tre livelli: come linguaggio, come rappresentazione e come struttura; in particolare, sottolinea come tra le ragioni dell'architettura quelle geometriche e numeriche forniscono gli elementi che articolano la logica delle forme permettendone il controllo. Lo studio della curva da costruire conduce lo studente a immergersi in una dimensione storica, la progettazione del disegno prima in maniera tradizionale e poi al computer lo costringe a pensare, a ragionare su alcuni concetti non solo matematici e quindi a interrogarsi sui rapporti tra matematica, disegno, e informatica. Di fatto, lo studente dopo aver osservato, intuito, argomentato e congetturato, deve progettare, formalizzare e visualizzare; pertanto, con essenziali e semplici istruzioni simula l'ornamento architettonico (voluta ionica) indagando sulle relazioni e i rapporti tra gli elementi in causa, controllando, dunque, l'esattezza della/e linea/e tracciata/e. Tutto ciò ha una grande valenza formativa, perché consente una formalizzazione più meditata dove si verificano le stesse dimostrazioni, proprietà della geometria già affrontate, sfruttandone le potenzialità investigative e di supporto all'intuizione (Costabile e Serpe, 2006; Serpe, 2009). Pertanto, la programmazione risulta un'attività creativa volta a potenziare la concettualizzazione e le capacità di astrazione. La costruzione degli algoritmi evidenzia come i concetti geometrici possono essere formulati algebricamente e gli scopi geometrici possono essere raggiunti attraverso l'algebra; e viceversa, interpretando geometricamente gli enunciati algebrici, si può conseguire una comprensione intuitiva dei loro significati e anche attingere suggerimenti per dedurre nuove conclusioni. E' importante sottolineare, agli studenti, come questo costituisca una sorta di "ponte a doppia carreggiata" tra due rami della Matematica (algebra e geometria), che prima del 1600 erano separati. A tal proposito, sarebbe opportuno approfondire anche dal punto di vista storico: «*Finché l'algebra e la geometria procedettero su terreni separati, il loro progresso fu lento e le loro applicazioni limitate. Ma quando queste scienze si unirono trassero l'una dall'altra nuova vitalità e da allora procedettero con rapido passo verso la perfezione*». (Lagrange, 1797, p.271).

Bibliografia

AA.VV. (1995). *Dizionario Collins della Matematica*. Roma: Gremese.

Archimede (1974). *Opere*, a cura di A. Frajese. Torino: UTET, p.345..

Barozzi, J. da Vignola (1562). *Regola delli cinque ordini d'architettura*. Roma.

Balacheff, N., Kaput, J.J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In A. J. Bishop. et *al., International Handbook of mathematics education*. Dordrecht, Netherlands: Kluver Accademic Pubblishers, 469-501.

Catastini, L. & Ghione, F. (eds) (2011). *Matematica e arte. Forme del pensiero artistico*. Milano: Springer.

Costabile, F.A. (2010). *MatCos3X. Software per l'insegnamento-apprendimento della matematica*. Cosenza: Caliò Informatica.

Costabile, F.A. & Serpe, A. (2006). Modellizzazione matematica ed insegnamento della geometria: un esempio. *Didattica delle scienze e Informatica nella Scuola*, n°241, 18-23.
Euclide (2007). *Euclide Tutte le opere*, a cura di F. Acerbi. Milano: Bompiani, 895-898, 949-951.
De Giorgi, E. (1996). *Riflessioni su Matematica e Sapienza*, a cura di A. Marino e C. Sbordone. Napoli: Accademia Pontaniana.
Gattuso, C. & Serpe, A. (2012). Ornamenti architettonici e modelli matematici. In L. Campanella *et al*. (eds). Proceedings of 3rd *International Conference Diagnosis for the Conservation and Valorization of Cultural Heritage*, 169-177, Ethos Edizioni.
Lagrange, J.L. (1797). Leçons élémentaires sur les mathématiques donnée à l'École Normale en 1795, in *Journal de l'École Polytechnique*, Parigi, VII, 183-287.
Kline, M. (1991). *Storia del pensiero matematico I*, Torino: Einaudi Editore
Lockwood, E.H. (1967). *A Book of Curves*. Cambridge University Press, 173-164.
Recht, R. (2001). *Il disegno d'architettura:origini e funzioni*. Milano: Jaka Book, p.135.
Serpe, A. (2009). Un laboratorio didattico in ambiente MatCos: generazione nel piano della curva strofoide. *Didattica e Didattiche Disciplinari*, Vol.8, 97-120.
Vitruvio (1997). *De Architectura,* a cura di P. Gros, Torino: Einaudi, p.256.
Zevi, B. (1948). *Saper vedere l'architettura*. Torino: Einaudi Editore.

Sitografia e feed RSS di riferimento

Pasini, F. http://www.linus.net/hdoc/arte/arte.asphtm
Indicazioni Nazionali per i Nuovi Licei, Istituti Tecnici e Professionali
http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/index.html
Barozzi, J. da Vignola (1562). *Regola delli cinque ordini d'architettura*.
http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Auteur/Vignole.asp?param=
http://www.faredecorazione.it/?p=2022 - sdfootnote14sym

ENERGIA, POTENZA, RENDIMENTO: PAROLE CHIAVE PER LA COMPRENSIONE DI FENOMENI FISICI

Paolo Grosso, Daniela Marocchi
Dipartimento di Fisica – Università di Torino

Premessa

Troppe volte si sente dire dagli studenti che la matematica e la fisica sono “materie inutili” e troppo “astratte”; talvolta questo giudizio nasce come conseguenza del fatto che esse vengano sentite come un insieme di regole, formule e leggi povere di applicabilità diretta e di legami con la realtà. (figura 1, Risultati del sondaggio svolto da Studenti.it, a cui hanno partecipato più di 1500 studenti)

Un esame svolto sui libri di testo dal 1950 a oggi dimostra come nell’insegnamento della fisica la sequenza dei capitoli e l’insieme degli argomenti che ricevono maggior attenzione non sono cambiati di molto, nonostante in questi cinquant’anni la scuola e la società abbiano subito profondi cambiamenti. È possibile che tutti questi cambiamenti, ed il procedere stesso della ricerca, non abbiano avuto effetto significativo sull’insegnamento delle discipline scientifiche? Per presentare la fisica si ritiene ancora un percorso obbligato partire da quell’ astrazione che è il punto materiale?

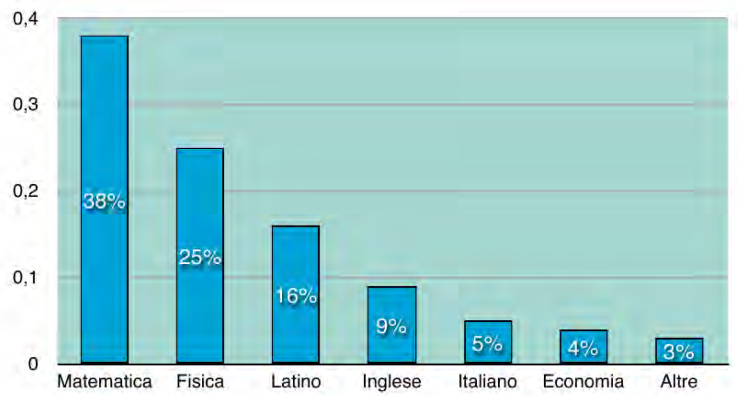


Figura 1

Quest’impostazione rischia di non coinvolgere lo studente in un approfondimento di come i concetti che gli vengono presentati siano in realtà strettamente connessi con i fenomeni del mondo che lo circonda, con la conseguenza di non invogliarlo a sforzarsi di conoscerne e comprenderne i meccanismi più profondi. Spesso così egli si accontenta di uno studio troppo mnemonico della fisica e della matematica, con il conseguente giudizio negativo su di esse.

Sorge quindi spontanea la domanda: ‘Una maggiore concretezza potrebbe essere d’aiuto per prevenire le difficoltà degli studenti ed il rifiuto verso queste materie? ’

La nostra proposta si inserisce in questo filone di ricerca, con lo scopo di testare un metodo didattico basato prevalentemente sulla sperimentazione di laboratorio; in particolare proponiamo le linee guida di un percorso, sperimentato nell’anno scolastico 2011-12, che si proponeva di portare gli studenti a una maggiore e più chiara comprensione del concetto di energia e delle quantità fisiche ad essa legate.

Il Progetto

L'attività è stata strutturata in un percorso che si è sviluppato in tre momenti principali:

- Esperienza di laboratorio
- Prova pratica
- Problemi teorici

Esperienza di laboratorio

In questa parte di progetto l'obiettivo proposto agli studenti è stato la misura del rendimento di un motore di Stirling.

Una volta presentata la strumentazione in dotazione abbiamo volutamente consegnato loro una scheda di laboratorio 'povera', in cui erano riportate solamente delle "domande-guida", cioè quesiti e indizi che potessero aiutare ed indirizzare i ragazzi ad individuare la via sperimentale più corretta per raggiungere l'obiettivo dell'esperienza, ma non la sequenza delle operazioni da svolgere. Il nostro obiettivo è stato proprio che fossero gli studenti a cercare di "districarsi", senza paura di eventuali errori, tra tutte le problematiche che l'esperienza di laboratorio può presentare.

Figura 2

La scelta di utilizzare questa tipologia di scheda è stata dettata anche dalla volontà di evitare che gli studenti eseguissero in modo meccanico i passaggi riportati, perché così facendo non avrebbero avuto lo stimolo a confrontarsi direttamente ed in modo concreto con le grandezze fisiche in gioco. Sperimentando in modo più libero, senza troppe costrizioni dettate dalla scheda di laboratorio, e venendo incentivati, attraverso il lavoro di gruppo, a proporre idee e modi per arrivare a calcolare l'efficienza del motore, hanno potuto comprendere anche dai loro sbagli.

Inoltre spesso gli studenti si abituano alla presentazione dei concetti fisici mediante i libri di testo e raramente da un punto di vista sperimentale. Conseguenza di questo approccio è che concetti strettamente concreti come energia, potenza e rendimento vengono percepiti come elementi essenzialmente teorici, che non trovano immediato riscontro pratico. Partire da una azione di laboratorio ha voluto invertire questa tendenza ed evidenziare la concretezza delle grandezze fisiche in gioco.

Il risultato finale è stato sicuramente anche un più profondo apprendimento del significato fisico delle grandezze in questione.

Prova pratica

"A che cosa corrisponde 1 Joule?"; "Secondo te 1 Watt è una quantità grande o piccola?", "Fai degli esempi di potenza di oggetti che conosci".

Figura 3

Tutti riusciamo facilmente a visualizzare il significato di un metro o di un chilo, ma quando si parla di grandezze quali il Joule o il Watt la questione diventa più oscura. Così è anche per buona parte degli studenti che, in generale, trovano difficoltoso riuscire a quantificare queste grandezze fisiche. Alcuni poi, anche fuorviati dei comuni modi di dire, confondono i concetti di energia e potenza utilizzandoli come sinonimo l'uno dell'altro. La via didattica che abbiamo scelto di utilizzare per cercare di migliorare questi due aspetti è consistita in una sorta di "prova pratica": ogni studente aveva il compito di portare su per due rampe di scale due fusti di acqua di peso noto (vedi Figura 3). Misurando il dislivello totale e il tempo impiegato per svolgere questa prova gli allievi hanno potuto calcolare la potenza da loro sviluppata nel compiere questo esercizio. Ragionando su questa semplice prova sono quindi riusciti a comprendere che ciò che lega la potenza all'energia è un legame di tipo temporale.

Ciò che ha permesso loro di individuare questa relazione è stata la corrispondenza, che loro stessi hanno evidenziato, tra la potenza sviluppata e la fatica spesa. Una maggiore fatica fatta si associa, infatti, ad un tempo minore impiegato per eseguire l'esercizio, ma il tempo minore corrisponde anche ad aver sviluppato una maggiore efficienza (→ potenza) nel compiere il compito assegnato: nel caso pratico si è trattato di una potenza muscolare, registrata mentalmente come fatica, collegabile anche al concetto di potenza come definita in fisica.

Infine calcolare le potenze da loro sviluppate e confrontarle con quelle standard indicate sugli elettrodomestici più utilizzati ha aiutato gli studenti ad avere un'idea più chiara dell'entità delle grandezze che comunemente usiamo e di cui abbiamo esperienza nell'uso quotidiano.

Questa è stata la parte del progetto che ha maggiormente interessato gli alunni, essendo molto legata all'esperienza. Grazie ai confronti con le grandezze tipiche che caratterizzano il mondo che ci circonda, siamo riusciti a rendere concreti i concetti ed a legare, con un percorso esperienziale, le grandezze fisiche utilizzate alle loro unità di misura.

Problemi teorici

Si è deciso infine di proporre ai ragazzi alcuni problemi da risolvere; pur essendo semplici, essi contenevano degli stimoli adatti ad incuriosire ed a mostrare come la soluzione, non immediata, richiedesse la necessità di porsi degli interrogativi.

I temi trattati all'interno di questi quesiti hanno spaziato da argomenti di attualità (come per esempio questione legate all'utilizzo delle fonti di energia rinnovabili) ad indovinelli più scherzosi e intriganti nei quali si è richiesto di individuare quale fosse la grandezza fisica mancante (per esempio l'efficienza di un motore) senza la quale tentare di risolvere il problema non avrebbe potuto portare a risultati corretti. In ogni caso anche questa seconda tipologia di problemi era caratterizzata dal fatto che i concetti erano da applicare a problemi reali, a differenza di molti testi utilizzati nei libri essenzialmente per permettere l'acquisizione di una maggiore familiarità nell'applicazione delle formule appena presentate.

Obiettivo specifico di questa ultima parte di progetto è stato quello di portare gli allievi ad una maggiore consapevolezza del fatto che la fisica è, prima di tutto, uno strumento reale che permette di raggiungere una maggiore consapevolezza nell'affrontare anche le tematiche del mondo contemporaneo.

Utilizzare questa tipologia di esercizi è servito anche per verificare come sia possibile, già con le nozioni di fisica che si imparano a scuola, studiare e dare stime anche quantitative su argomenti legati alla realtà quotidiana e di cui spesso si sente parlare attraverso i mass-media.

Questi problemi hanno permesso di applicare i concetti di energia, potenza e rendimento, appresi nelle prime due fasi del progetto, a questioni di interesse comune con l'obiettivo anche di ampliare le conoscenze relativamente ad alcuni "miti" (come per esempio ad alcune problematiche legate al tema delle macchine alimentate ad idrogeno) che, sovente, vengono presentati in modo non propriamente scientifico dai mezzi di comunicazione. Si può infatti notare come, specialmente nel settore energetico, esista una confusione nella presentazione dei diversi temi, non di rado anche sfruttata per fini ideologici da un'informazione non sempre fornita correttamente. Un'educazione dei giovani studenti fondata su analisi critiche e interpretazioni scientifiche diventa quindi sempre più necessaria ai fini di una più corretta e consapevole cultura.

Risultati della sperimentazione

L'energia è una delle grandezze fisiche più complesse e difficili da comprendere a fondo nei suoi diversi aspetti. Nei libri di Fisica essa viene di norma introdotta all'interno del programma di Meccanica (quindi nella fase iniziale del corso di Fisica) come la capacità di un sistema o di un corpo di svolgere lavoro: questa è la definizione che maggiormente rimane impressa nella mente degli studenti, anche se l'argomento "energia" in realtà presenta un alto livello di complessità e molte implicazioni e connessioni con diversi rami della fisica. Una comprensione solamente legata all'effetto meccanico di capacità di produrre lavoro costituisce una riduzione che, di certo, non aiuta gli studenti a concepirne al meglio l'ampio significato fisico.

ENERGIA	%
Cinetica	82,5
Potenziale	78,3
Termica	75,8
Meccanica	70,8
Elettrica	60,0
Elastica	40,8
Chimica	39,2
Nucleare	30,8
Eolica	30,0

ENERGIA	%
Solare	24,2
Luminosa	20,8
Idroelettrica	20,0
Elettromagnetica	17,5
Geotermica	11,7
Interna	8,3
Calore	7,5
Sonora	6,7
Lavoro	3,3

Figura 4

Un test iniziale che abbiamo proposto agli studenti analizzava proprio la conoscenza relativa alle varie forme sotto cui l'energia si presenta ed ha evidenziato come la comprensione fosse soprattutto mnemonica e legata a quel particolare aspetto presentato a scuola che si stava studiando al momento. Nella Figura 4 viene presentato il risultato del primo test proposto agli studenti, in cui dovevano rispondere alla domanda:" Quali differenti tipologie di energia conosci?". Nella seconda colonna è riportata la percentuale di studenti che hanno citato quella particolare forma di energia: era prevista la possibilità di risposte multiple.

Questo aspetto è stato solo parzialmente superato con la sperimentazione, forse anche perché la presentazione di altre forme di energia è avvenuta in un tempo troppo breve e con una metodologia essenzialmente di lezione frontale.

Per quanto riguarda invece una maggiore comprensione della differenza e del legame fra energia e potenza, sicuramente il lavoro sperimentale ha migliorato la percezione degli studenti, che hanno anche imparato ad utilizzare con maggior sicurezza le corrette unità di misura.

L'attività di laboratorio e l'esperienza pratica hanno reso molto più concreto quanto presentato, soprattutto per la possibilità di sperimentare, almeno in parte, liberamente e verificare sul campo quanto affermato dal docente durante le lezioni. Minore apprezzamento hanno avuto le necessarie procedure sperimentali (ripetizione delle misure, registrazione dei dati, calcolo degli errori, scrittura della relazione…) viste non come una stretta necessità, ma come un di più solo parzialmente comprensibile.

Conclusioni

Per poter valutare in modo più corretto quali risultati si siano raggiunti con questo progetto, alcune settimane prima e dopo l'esperienza abbiamo sottoposto agli studenti un test a risposta multipla con domande relative agli argomenti trattati.

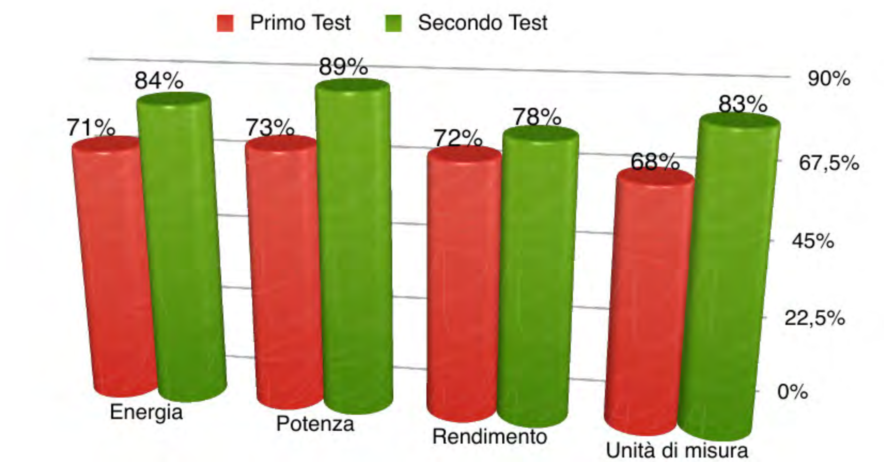


Figura 5

Dall'analisi dei dati raccolti è stato possibile osservare una maggiore comprensione dei concetti studiati sia a livello teorico sia nella loro applicazione a problemi. Inoltre i ragazzi si sono dimostrati maggiormente interessati e coinvolti grazie alla quantità di attività, anche pratiche, presenti nell'attività proposta.

Al termine di questo lavoro si può quindi confermare che quando gli argomenti di fisica vengano affrontati mediante un approccio più sperimentale si ottengono risultati migliori, anche dal punto di vista della conoscenza 'disciplinare' della materia, rispetto a quelli che si otterrebbero con un insegnamento basato sulle sole lezioni frontali. Inoltre questo tipo di approccio si configura come uno strumento adatto per interessare ed avvicinare i ragazzi allo studio della fisica; la formalizzazione teorica che può poi seguire si avvantaggia così del supporto di interesse suscitato a cui dare una risposta in modo anche formalmente rigoroso.

Bibliografia

Besson U., De Ambrosis A. (2011) *L'effetto serra e l'insegnamento di concetti e fenomeni fisici legati all'energia* Giornale di Fisica LII,3.

Gallitto, A., Fiordilino, E. (2011 *)Fisica: un percorso di laboratorio sulle tematiche energetiche* Giornale di Fisica LII, 4.

Goldring H., Osborne J. (1944) *Students' difficulties with energy ad related concepts* Physics Education, 29, 26-31.

Grosso P. (2013) *Energia, potenza e rendimento: proposta di un percorso didattico e di avvicinamento alle tematiche energetiche* Tesi Magistrale, Università degli Studi di Torino.

LE GRANDEZZE FISICHE CON SMS E TELEFONI CELLULARI

Andrea Piccione
IPSSEOA G. Colombatto, Torino

Premessa

La mancanza di dotazioni tecnologiche nelle scuole diventa ancora più significativa quando è alta la componente di allievi che già soffrono dei limiti legati alla provenienza da situazioni economicamente disagiate e culturalmente deprivate. Per fare fronte a tali limiti, ho messo a punto nelle classi prime di un istituto professionale alcune attività volte a utilizzare risorse senza costi aggiuntivi per la scuola e per gli studenti. L'approccio seguito prevede l'uso dei telefoni cellulari come strumenti didattici, che si rivelano anche una utile interfaccia per accedere con gli SMS ad applicazioni gratuite disponibili in rete.

Nella prima parte di questo contributo viene delineato il contesto di riferimento, con particolare attenzione alla normativa che definisce il curricolo di fisica, alla specificità e problematicità dell'utenza, allo stato dell'arte relativo all'introduzione delle nuove tecnologie nella scuola; sono poi presentate le tecnologie utilizzate, con riferimento ad applicazioni disponibili in letteratura e sono descritte le attività didattiche proposte per l'introduzione delle grandezze fisiche con l'analisi dei risultati conseguiti per ognuna. Nelle conclusioni vengono riassunti i punti di forza e i punti critici comuni a tutte le proposte, così come gli sviluppi futuri.

Il contesto

La normativa

La recente riforma degli istituti professionali (D.P.R. 87/2010 e Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento, 2010) ha profondamente modificato l'insegnamento della fisica nel primo biennio dei percorsi offerti da questo tipo di scuole. Prendiamo come esempi l'indirizzo "Manutenzione e assistenza tecnica" e quello "Servizi per l'enogastronomia e l'ospitalità alberghiera". Nel primo caso si è passati da tre ore a settimana per tre anni a due ore a settimana per due anni; le ore di laboratorio sono diventate da due alla settimana per tre anni a 66 su due anni. Considerando anche il cambiamento delle unità orarie di lezione da 50 a 60 minuti (L. 133/2008), si è passati complessivamente da 248 a 132 ore di lezione totali e da 165 a 66 ore di laboratorio. Nel secondo tipo di indirizzo l'insegnamento della fisica non era presente ed è stato introdotto dalla riforma, ma solo per il primo anno per due ore a settimana, per un totale di 66 ore e senza laboratorio. In entrambi gli indirizzi le ore dei laboratori professionali nel primo biennio sono state ridotte, per dare più spazio alle materie teoriche (nelle classi prime dei servizi enogastronomici, ad esempio, ci sono tante ore di laboratorio di cucina quante di fisica). In relazione a questi elementi di criticità, le attività descritte in questo contributo si propongono di:

- permettere un adeguato trattamento dei contenuti proposti e consentire agli allievi il raggiungimento dei livelli richiesti, pur avendo a disposizione un minor numero di ore di lezione;
- svolgere esperienze di misura in assenza del laboratorio di fisica o con un minor numero di ore a disposizione per questo tipo di attività.

L'utenza

Gli allievi degli istituti professionali sono principalmente persone alla ricerca di un percorso di studi che permetta loro di trovare facilmente uno sbocco lavorativo. La scelta di questo tipo di percorsi è spesso anche legata alle difficoltà incontrate nel precedente ciclo di istruzione e alla necessità di svolgere buona parte del percorso didattico attraverso attività pratiche. Questa prospettiva era già stata ridimensionata dal D. M. 24 Aprile 1992 (Progetto '92), che riduceva le ore dei laboratori per aumentare le ore delle discipline dell'area comune, come, ad esempio, italiano, matematica, inglese; l'ulteriore riduzione di queste ore a seguito della riforma del 2010 ha generato un sempre maggiore disaccoppiamento tra le aspettative degli allievi e l'offerta del percorso scolastico. Questa frustrazione diventa ancora più significativa se si tiene conto del fatto che gli allievi del biennio sono ancora in obbligo scolastico (L. 9/1999) e che spesso provengono da realtà disagiate. Il risultato è una scarsa motivazione per il percorso di istruzione, in particolare per tutte le discipline che non prevedono attività pratiche, e un significativo tasso di dispersione. Un'ulteriore caratteristica degli istituti professionali è un significativo numero di allievi con cittadinanza non italiana e di allievi con disabilita (Tabella 1), che richiedono lo sviluppo di strategie per attuare una didattica inclusiva.

A. S. 2006-2007 (MIUR, 2008)	Licei	Tecnici	Professionali
numero abbandoni scolastici	1.974	19.223	20.168
numero abbandoni scolastici in prima	508	6.088	8.185
percorso regolare in prima (per 100 iscritti)	86,5	72,9	55,1
A. S. 2009-2010 (MIUR, 2011)			
numero alunni con disabilià	5.245	9.993	26.190
A. S. 2011-2012 (MIUR, 2012)			
a rischio abbandono	0,44%	1,56%	2,36%
cittadinanza non italiana	2,8%	7,1%	12,1%

Tabella 1. Alcune caratteristiche dell'utenza per diverso percorso di istruzione e anno scolastico.

Le principali necessità alle quali si è cercato di dare risposta per questo tipo di utenza sono quindi:

- proporre attività coinvolgenti per stimolare la motivazione, in modo particolare durante le lezioni teoriche;
- rinforzare la conoscenza dell'italiano come linguaggio di apprendimento;
- utilizzare tecnologie facilmente accessibili dal punto di vista economico.

Le nuove tecnologie disponibili

I dati relativi all'indagine OCSE PISA 2009 (OECD, 2011) mettono in evidenza come le dotazioni tecnologiche in possesso degli studenti siano superiori a quelle delle scuole. Questi dati peggiorano se si prendono in considerazione gli alunni di provenienza più svantaggiata e quelli che frequentano gli istituti professionali (Tabella 2). Una dettagliata analisi di questi dati proposta da Almalaurea (Gasperoni e Cammelli, 2012) mette anche in evidenza che le attività di studio a casa attraverso dispositivi tecnologici vedono penalizzati gli iscritti all'istruzione professionale, mentre le attività di supporto allo studio svolte a scuola contribuiscono a compensare questa situazione; l'uso di computer e Internet a casa, a prescindere dallo scopo specifico, risente delle condizioni materiali e culturali dei genitori, mentre il loro uso a scuola sembra riuscire a contrastare questa influenza. Inoltre, sebbene gli allievi siano nativi digitali, raramente hanno le abilità necessarie per un utilizzo critico ed efficiente delle risorse online e degli strumenti digitali in genere (Calvani, 2011), per cui si rivela sempre più importante una educazione all'uso consapevole di tali risorse. In relazione a questi problemi, gli obiettivi delle attività proposte sono:

- aumentare l'utilizzo delle tecnologie nella didattica durante le lezioni;
- stimolare gli studenti a un maggiore utilizzo delle dotazioni tecnologiche in loro possesso per lo studio a casa;
- proporre attività che non comportino costi aggiuntivi per gli istituti scolastici e per gli allievi.

OCSE PISA 2009	Licei	Tecnici	Professionali
connessione da casa	93,0	88,4	79,1
connessione da scuola	75,8	74,0	71,8

Tabella 2. Percentuale di allievi che hanno a disposizione una connessione per diverso percorso di istruzione secondo i dati dell'indagine OCSE PISA 2009.

Gli strumenti utilizzati

I dispositivi portatili

Telefoni cellulari, lettori mp3, console portatili, smartphone, tablet e lettori ebook sono dispositivi sempre più diffusi presso gli allievi delle scuole superiori, e per questo sempre più utilizzati nella pratica didattica (Traxler, 2009). Tali dispositivi sono interessanti perché hanno potenzialità sempre più elevate, sono a basso costo sia per gli allievi (che possono usare una tecnologia già in loro possesso senza comprarne altre) sia per le scuole (in quanto tutti gli allievi possiedono un dispositivo mobile di qualche tipo), sono fruibili dentro e fuori l'edificio scolastico, tutti gli allievi conoscono come farli funzionare. Le attività presentate in questo contributo sono state progettate in modo da risultare facilmente accessibili anche in contesti con scarse risorse di tipo economico, per cui l'attenzione è stata focalizzata sui telefoni cellulari (Kolb, 2011), essendo questi i dispositivi più diffusi tra gli allievi. Inoltre, l'attività di lettura, scrittura e invio di SMS non richiede alcun tipo di indicazione per essere svolta ed è spesso a costo zero con gli attuali contratti di telefonia. Per questi motivi gli SMS si prestano a essere efficacemente utilizzati come interfaccia per accedere ai servizi disponibili su Internet in assenza di una connessione di rete. Nelle attività proposte ho scelto di utilizzare i servizi di microblogging, che sono veri e propri blog dove i contributi degli utenti sono caratterizzati da messaggi con un limitato numero di caratteri contenenti brevi frasi, singole immagini o collegamenti ipertestuali. L'utilizzo di questi strumenti all'interno delle attività scolastiche è in crescita (Reinhardt *et al.*, 2010), sia per la loro grande diffusione, sia perché si prestano naturalmente a un'interfaccia con gli SMS. Per la didattica della fisica questo vincolo può costituire una risorsa per far sperimentare l'utilità e la potenza di un linguaggio formale, e permette di introdurre o rafforzare la conoscenza della sintassi delle operazioni matematiche utilizzata comunemente nei linguaggi di programmazione o nei fogli di calcolo.

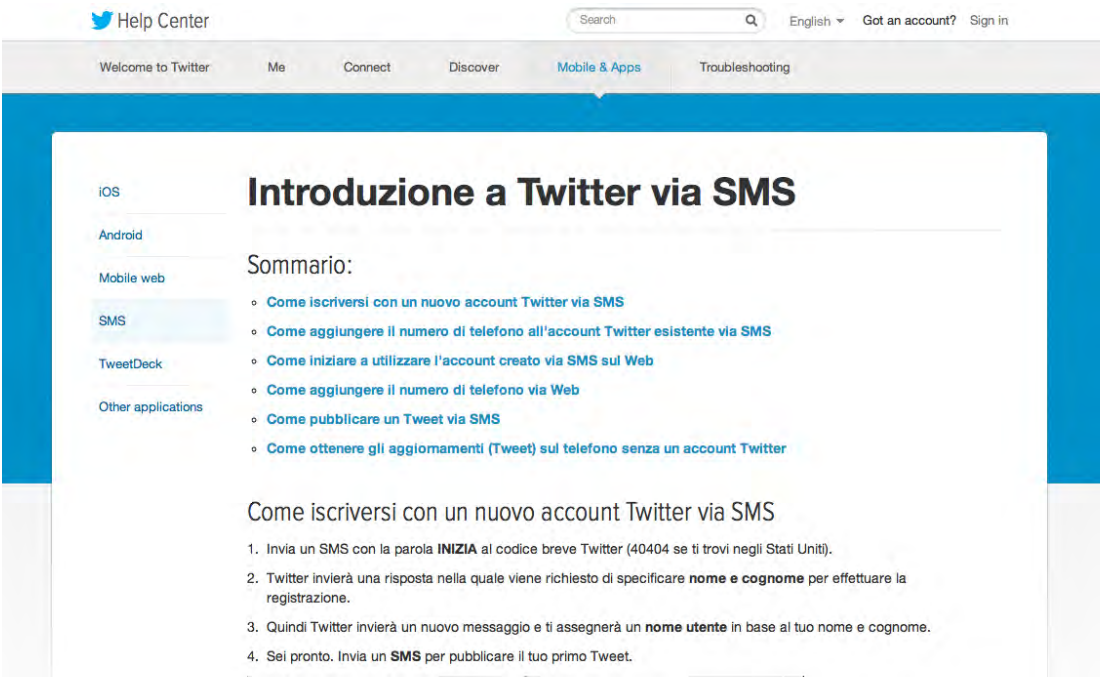


Figura 1. Istruzioni per usare Twitter via SMS[1].

Il microblogging con Twitter.com

Twitter offre un servizio di social networking e microblogging, in cui la pagina personale di ogni utente è aggiornata attraverso messaggi di testo della lunghezza massima di 140 caratteri. Il servizio è gratuito per tutti gli utenti registrati e le pagine personali possono essere lette anche da chi non possiede una registrazione. Twitter è stato il primo social network a fare uso delle hashtag per etichettare i messaggi pubblicati dagli utenti sulle proprie pagine. In pratica le hashtag sono parole precedute dal simbolo cancelletto (#), che permettono di raggruppare i tutti i messaggi che le contengono; in questo modo è possibile creare vere e proprie chat tematiche (ad esempio, #edchat dedicata alle tematiche dell'insegnamento in genere, #scichat dedicata all'insegnamento delle materie scientifiche) o tracciare l'uso di parole in diversi contesti; ad esempio, cercando la hashtag #Higgs con il motore di ricerca interno vengono selezionati messaggi come "*New results indicate that particle discovered at CERN is a #Higgs boson*", "*Intervista a #FabiolaGianotti: la coordinatrice dell'esperimento che ha dimostrato l'esistenza del bosone di #Higgs*", "*Gianotti "Ho sentito #Higgs prima del Nobel, ha detto che gli 'sperimentali' sono i veri eroi di questa vicenda". #NobelPrize*". Tale monitoraggio dei messaggi è una caratteristica utile per sviluppare attività didattiche di diverso tipo (Ivanova, 2011). Dal punto di vista dell'accessibilità, Twitter permette di inviare e ricevere gli aggiornamenti non solo tramite browser web o applicazioni dedicate disponibili per la maggior parte dei dispositivi mobili, ma, grazie a semplici istruzioni (Figura 1), anche tramite SMS. In Italia sono convenzionati solo gli operatori TIM, Vodafone e Wind, che però coprono quasi il 90% degli utenti. Data la sua grande diffusione, molti servizi web, che solitamente richiedono una registrazione, sono fruibili semplicemente fornendo username e password dell'account di Twitter o attraverso l'invio di messaggi tramite Twitter (vedi seguito). In questo modo Twitter diventa uno strumento per utilizzare con gli SMS risorse altrimenti accessibili solo con una connessione Internet.

1 https://support.twitter.com/groups/54-mobile-apps/topics/225-sms/articles/405554-introduzione-a-twitter-via-sms (ver. 31.10.2013)

I sondaggi con PollEverywhere.com

PollEverywhere offre un servizio di sondaggi online. Il servizio è gratuito (in questo caso sono permesse al massimo 40 risposte per ogni sondaggio) e non richiede una registrazione. Sono disponibili domande a risposta multipla (caratteristica comune ad altri servizi analoghi, come ad esempio, Polldaddy.com) e domande a risposta aperta (caratteristica meno comune nei servizi di questo tipo). Ogni sondaggio è identificato con un codice che permette l'associazione alle risposte, che possono essere inviate attraverso browser web, Twitter o SMS; quest'ultima opzione prevede, tuttavia, l'invio di un messaggio internazionale a un numero del Regno Unito, per cui può essere soggetto a un costo diverso a seconda del contratto di ogni votante. Quando si propone un sondaggio con domande a risposta multipla i risultati vengono visualizzati in tempo reale attraverso istogrammi, che possono essere facilmente inseriti in presentazioni o all'interno di altri siti, blog, ecc. Nel caso di domande a risposta aperta, i risultati vengono mostrati con diverse modalità: testo a rotazione, cluster, word cloud (vedi seguito) o testo a scorrimento. In Figura 2 viene mostrato il modulo da compilare per creare un sondaggio in pochi passaggi selezionando l'opzione "Create your first poll" dalla homepage.

Figura 2. PollEverywhere.com: modulo per la creazione di un sondaggio.

I tag cloud con Wordle.net

I tag cloud (o word cloud) sono rappresentazioni visive di testi costruite con le parole che in tali testi sono contenute; le parole sono distribuite nell'immagine in modo casuale, e la loro dimensione è tanto maggiore quanto maggiore è la loro ricorrenza all'interno del testo di partenza. Solitamente questi strumenti vengono utilizzati per evidenziare i temi più importanti all'interno di un blog o di un sito web. Per realizzare questo tipo di visualizzazioni sono disponibili diverse risorse di rete; tra queste Wordle.net è un servizio gratuito, che richiede pochi passaggi e non necessita di una registrazione. Utilizzando l'opzione "Create" è possibile creare un tag cloud usando come sorgente un testo o una URL forniti dall'utente. L'immagine prodotta può essere personalizzata cambiando i font, il layout e i colori attraverso una serie di opzioni base; in questo modo è possibile visualizzare il tag cloud delle risposte a un sondaggio con una grafica più gradevole di quella offerta dall'opzione di PollEverywhere. Inoltre, Wordle è uno strumento che può essere utilizzato anche in contesti più generali come, ad esempio, l'analisi di un articolo di giornale. Per il corretto funzionamento Wordle richiede che il browser possa eseguire applet Java e leggere file jar[2].

2 http://www.wordle.net/faq#gray (ver. 31.10.2013)

Nel seguito vengono presentate alcune attività proposte nelle classi prime di un Istituto Professionale per i Servizi Enogastronomici e per l'Ospitalità Alberghiera, con l'intento di sviluppare nuovi approcci didattici utilizzando gli strumenti sopra descritti. I primi due esempi sono peculiari della fisica, l'ultimo può facilmente essere adattato ad altre materie. Per ogni attività vengono presentati una breve descrizione e i risultati emersi nella pratica di classe.

Le attività proposte

La definizione delle grandezze

Obiettivi: coinvolgere all'interno del gruppo classe, utilizzare un linguaggio appropriato per la descrizione dei fenomeni, rinforzare la conoscenza dell'italiano per gli stranieri.

Attività con il telefono: scrivere SMS.

Risorse web: Twitter.com, PollEverywhere.com, Wordle.net

Descrizione dell'attività. Prima di introdurre grandezze fisiche che hanno un nome usato anche nel linguaggio quotidiano, o che possono essere già note agli allievi (spesso in maniera ambigua o confusa), è opportuno cercare di capire quali sono i significati che gli allievi attribuiscono a tali nomi. Questa attività può essere svolta facendo un brainstorming alla lavagna: si raccolgono tutte le parole che vengono in mente associate al termine in questione, si individuano le parole che sono in qualche modo in relazione tra di loro, si cerca di costruire una definizione che tenga conto della discussione svolta, si confronta questa definizione collettiva con quella propria della disciplina (ad esempio, una definizione operativa o una formula). Le nuove tecnologie permettono non solo di mettere in atto questa tecnica didattica, ma soprattutto di potenziarla: infatti utilizzando il brainstorming tradizionale gli allievi si fanno influenzare dalle parole dette da altri compagni e si corre così il rischio di perdere possibili spunti interessanti. Si può procedere invece proponendo una domanda chiave ("Quale parola associ alla parola PRESSIONE?") e realizzare un sondaggio online con domanda aperta, a cui ogni allievo risponde in maniera autonoma attraverso il proprio cellulare; in Figura 3 è mostrato il sondaggio sulla pressione, al quale è stato associato da Polleverywhere il codice identificativo 206690. In questo esempio un allievo che aveva un vecchio cellulare, dopo aver creato un account su Twitter con le istruzioni mostrate in Figura 1, ha risposto al sondaggio inviando un SMS con scritto "*@poll 206690 schiacciare*" al numero 3424486444, che è il numero dell'operatore dell'allievo associato a Twitter. I dati vengono poi raccolti dal docente e visualizzati attraverso un tag cloud (Figura 4) che diventa il punto di partenza della discussione per la definizione della nuova grandezza: durante questa attività la definizione della classe "*la pressione indica quanto bisogna comprimere, ad esempio, un gas quando si gonfia qualcosa*", è stata messa a confronto con la defínzione operativa "*la pressione si misura con il manometro e la sua unità di misura è il pascal*".

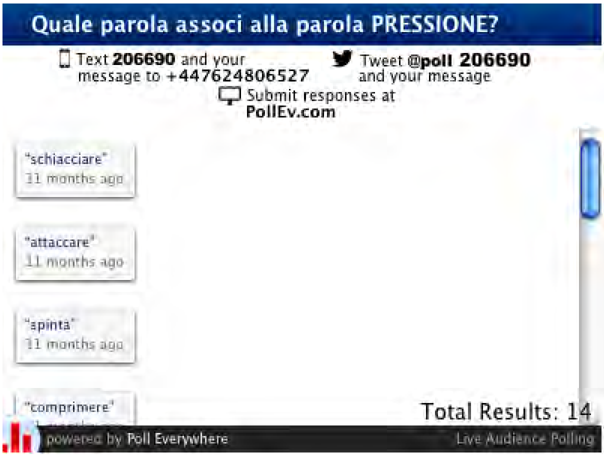


Figura 3. Risposte a rotazione per un sondaggio di definizione della pressione.

Risultati. Quando ho svolto questo tipo di attività nelle mie classi ho riscontrato interesse e partecipazione da parte di tutti gli allievi i quali, una volta mostrati i risultati, si preoccupavano immediatamente di controllare che il loro contributo fosse stato registrato. Tuttavia, molto spesso è stato necessario ripetere più volte istruzioni anche banali, come, ad esempio, le indicazioni per inviare la propria risposta. La definizione delle grandezze successive alle prime è stata invece più agevole in quanto gli allievi erano già a conoscenza della modalità di svolgimento dell'attività, ed è stato possibile dedicare più tempo all'analisi del significato delle parole considerate e a far cogliere il carattere rigoroso delle definizioni scientifiche. Inoltre, questa procedura riveste particolare interesse in presenza di studenti di origine straniera, per i quali è più difficile associare diversi significati ai termini di una nuova lingua, e li aiuta a rinforzare l'italiano come lingua di apprendimento. Indubbiamente, questa attività è ottimizzata se si ha a disposizione in aula un dispositivo collegato a Internet e a un video proiettore, ma sono riuscito a realizzarla anche senza.

Figura 4. Tag cloud per una definizione della pressone.

La misura del tempo di reazione della classe

Obiettivi: coinvolgere all'interno del gruppo classe, svolgere attività di laboratorio in aula.

Attività con il telefono: accendere e spegnere il cronometro, scrivere SMS

Risorse web: Twitter.com, PollEverywhere.com, Wordle.net

Descrizione dell'attività. I dispositivi portatili possono essere sfruttati anche per sopperire all'assenza di un laboratorio dove eseguire un'analisi sperimentale dei fenomeni o di dispositivi per la visualizzazione di simulazioni. Esistono applicazioni per gli smartphone e tablet che permettono di misurare diverse grandezze fisiche, dalla semplice temperatura della batteria alle caratteristiche di un oscillatore armonico (Castro-Palacio *et al*, 2012). In questo esempio, presento la misura del tempo impiegato da ogni allievo per accendere e spegnere il suo cronometro, ma l'attività può essere facilmente ripetuta con misure di altre grandezze, qualora le dotazioni tecnologiche degli allievi lo permettano; il risultato di ogni allievo viene inviato come risposta a un sondaggio e visualizzato con un tag cloud (Figura 5).

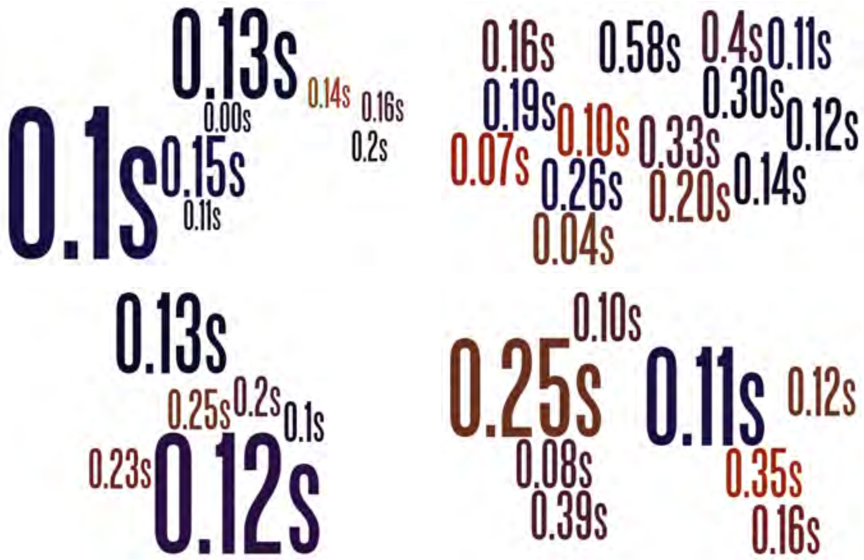


Figura 5. Tag cloud della misura del tempo di reazione in diverse classi.

Risultati. Sebbene l'attività sia molto semplice è stato sempre necessario concedere diversi minuti agli allievi in modo che potessero trovare l'applicazione sul proprio telefono ed esercitarsi ad accendere e spegnere il cronometro. Durante le lezioni è emerso che, se il cronometro era sempre disponibile nei vecchi cellulari, questo non accade per alcuni degli ultimi modelli; tuttavia, questa funzionalità può essere facilmente e gratuitamente installata. Tutti gli allievi hanno comunque cercato di dare il loro contributo e, se per qualche ragione alcuni non avevano il cellulare o sul loro non riuscivano a trovare il cronometro, spesso chiedevano il telefono a un compagno per poter fare comunque la misura. L'aver proposto l'attività in termini volutamente ambigui (ogni persona misura un tempo diverso, i cronometri sono diversi, ecc.) ha stimolato la discussione su alcuni aspetti relativi alla misura che generalmente risultano astratti, come i possibili errori sistematici e la loro stima; inoltre, l'analisi dei risultati ottenuti ha permesso di mostrare la differenza di risoluzione di alcuni cronometri, le difficoltà che insorgono se si usano diverse notazioni, come, ad esempio, i decimali indicati con virgola o punto, e la differenza tra la moda (il valore più ricorrente viene facilmente visualizzato con il tag cloud) e la media (che può essere un valore non presente tra quelli di partenza o uno rappresentato da un font piccolo).

I compiti a casa

Obiettivi: coinvolgere al di fuori dell'orario di lezione, aumentare il tempo di interazione con il docente, rinforzare la conoscenza dell'italiano per gli stranieri.

Attività con il telefono: leggere e scrivere SMS

Risorse web: Twitter.com

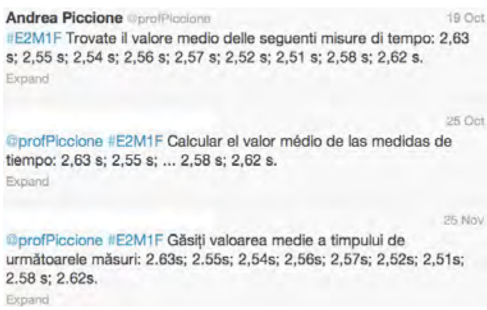


Figura 6. Uso di Twitter per la traduzione dei compiti a casa.

Descrizione dell'attività. Inviare esercizi di compito attraverso Twitter è una attività semplice e richiede unicamente un'accurata preparazione del testo degli esercizi per usare solo i 140 caratteri consentiti. É poi importante scegliere una hastag adeguata, in modo che si possa seguire l'esercizio con domande di chiarimento, suggerimenti e in generale qualunque interazione tra allievi o tra allievi e docente, senza selezionare messaggi di altro tipo. Durante le mie lezioni ho scelto hashtag tipo #E2M1F (Esercizio 2 del Modulo 1 di Fisica), perché richiedono un limitato numero di caratteri e perché si possono facilmente ricordare o ricostruire. Questa attività mi ha poi permesso di proporre in modo semplice la traduzione dei testi degli esercizi nelle diverse lingue degli studenti di origine straniera (Figura 6).

Risultati. La prima ragione che mi ha spinto a usare Twitter per inviare gli esercizi di compito era fare in modo che il compito assegnato rimanesse sul cellulare degli allievi aumentando così la probabilità che tali compiti venissero svolti. Se da questo punto di vista l'attività ha funzionato solo in parte, essa ha fornito tuttavia un'occasione agli allievi di usare i tweet durante lo svolgimento del compito a casa per porre domande di chiarimento al docente; inoltre, l'avere il testo di un esercizio su un social network è stato uno stimolo per la risoluzione collettiva del quesito proposto, favorendo esperienze spontanee di apprendimento collaborativo online. L'attenzione alle diverse realtà linguistiche presenti nelle classi si è rivelata non solo uno strumento per aumentare la comprensione di chi ha ancora difficoltà con l'italiano, ma anche un'opportunità per coinvolgere gli alunni nelle attività di traduzione, valorizzare la conoscenza di altre lingue e promuovere un approccio multiculturale.

Conclusioni

Punti di forza

L'uso di attività come quelle presentate ha permesso agli allievi di percepirmi vicino alla loro realtà quotidiana, aiutando la costruzione di una rapporto di fiducia e aumentando così il loro coinvolgimento durante le ore di lezione, con conseguenti risultati positivi alla fine dell'anno. Inoltre, se è vero che tutti gli allievi sono in possesso di un dispositivo mobile, esistono ancora molte differenze tra le caratteristiche e le prestazioni di tali dispositivi: in questo senso le attività svolte hanno permesso di superare tali disparità, anche in assenza di dotazioni tecnologiche della scuola.

Punti critici

Sebbene gli allievi siano nativi digitali, raramente hanno le abilità necessarie per un utilizzo critico ed efficiente delle risorse online e degli strumenti digitali in genere: circa metà degli studenti conosce solo le funzioni di base del proprio telefono (la sola ricerca del cronometro crea difficoltà per alcuni, mentre per altri è naturale accedere alla rete attraverso il proprio telefono), diversi studenti sbagliano a digitare una URL e non sanno come aggirare il mancato raggiungimento della pagina richiesta (ad esempio, provando a digitare nuovamente la URL, cambiandone una parte o facendo una ricerca di rete), diversi studenti faticano a usare risorse di rete che non siano Facebook. In questo contesto le attività proposte hanno fornito un'occasione per consolidare le competenze necessarie per l'utilizzo delle nuove tecnologie; tuttavia, per consentire un'ottimizzazione dei tempi potrebbe essere utile non dare per scontata alcuna conoscenza dei dispositivi mobili e di Internet da parte degli allievi e prevedere una o due lezioni introduttive all'inizio del corso, eventualmente in collaborazione con docenti di altri insegnamenti.

Sviluppi futuri

Le proposte presentate per la loro semplicità e accessibilità possono essere facilmente applicate in ogni contesto, indipendentemente dalle dotazioni tecnologiche di istituti e allievi; in ogni caso, considerata l'impostazione didattica che vi è sottesa, queste attività potranno essere altrettanto efficacemente utilizzate, ed eventualmente implementate, anche quando tutte le scuole forniranno una connessione wifi nelle aule di lezione e tutti gli studenti saranno dotati, ad esempio, di tablet.

Bibliografia

Calvani A., Fini A. e Ranieri M. (2011), *Valutare la competenza digitale*, Trento, Erickson

Castro-Palacio J. C., Luisberis Velazquez-Abad, Marcos H. Gimenez e Juan A. Monsoriu (2012). *Using the mobile phone acceleration sensor in Physics experiments: free and damped harmonic oscillations*, http://arxiv.org/abs/1212.4403v1 (ver. 31.10.2013).

Gasperoni G. e Cammelli A. (2012). *Tecnologie dell'informazione e della comunicazione e studenti italiani secondo il Programme for International Student Assessment (PISA2009)*, http://www.almalaurea.it/universita/altro/tecnologie_e_studenti_italiani/rapporto_fol_gasperoni-cammelli.pdf (ver. 31.10.2013).

Ivanova M. (2011), L'uso dell'hashtag nel microblogging per migliorare l'apprendimento, *Form@re*, 75 (11), 13-19

Kolb L. (2011). *Cell Phones in the Classroom: A Practical Guide for Educators*. Londra: ISTE & Eurospan.

MIUR (2008), *La dispersione scolastica. Indicatori di base. Anno scolastico 2006/07,* http://archivio.pubblica.istruzione.it/mpi/pubblicazioni/2008/allegati/dispersione_2007.pdf

MIUR (2011), *L'intergrazione scolastica degli alunni con disabilità nel sistema nazionale di istruzione. A. S. 2009/2010*, http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/disabilita

MIUR (2012), *Gli alunni stranieri nel sistema scolastico italiano. A. S. 2011/2012*, http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/intercultura

OECD (2011), PISA 2009, *Results: Students on Line: Digital Technologies and Performance*, Paris, OECD.

Reinhardt W., Wheeler S. e Ebner M. (2010), All I need to know about Twitter in Education I learnt in Kindergartnen, *Proceedings of the WCC 2010 conference*.

Traxler J. (2009). Learning in a Mobile Age, *International Journal of Mobile and Blended Learning*, 1, (1), 1-12

LA SCIENZA DELLA MISURA NELL'INSEGNAMENTO SCIENTIFICO

***Anita Calcatelli*[1], *Riccardo Urigu*[2]**
[1]*INRiM, Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica -Torino,*
[2]*Liceo Scientifico «N. Copernico» -Torino*

πάντων χρημάτων μέτρον ἐστὶν ἄνθρωπος

Di tutte le cose misura è l'uomo

Protagora di Abdera

Qualche considerazione introduttiva sui bisogni della società attuale

Benjamin Franklin definì l'essere umano come un toolmaking animal che imparò fin dai primordi della sua storia a costruire gli utensili necessari nella vita quotidiana, ma il vero e proprio sviluppo di strumenti scientifici è legato alla nascita e allo sviluppo della scienza moderna ed è legato, in gran parte, alla necessità di approfondire ipotesi teoriche. Gli strumenti possono essere di osservazione o di misura o entrambi insieme. Si pensi alla colonna barometrica torricelliana che servì per confermare sia l'esistenza della pressione atmosferica sia la possibilità di generare condizioni di vuoto, ma anche di eseguire delle misurazioni del valore della pressione atmosferica e del suo comportamento, per esempio, con l'altitudine (esperienze di Pascal al Puy-de-Dôme).

Nell'attuale vita quotidiana c'è un intreccio continuo con la scienza e la tecnologia e se ne parla in continuazione come se fossero argomenti separatati; invece c'è tra loro un'interconnessione fortissima. Nell'accezione più comune, con tecnologia si intende un processo complesso che porta alla progettazione/realizzazione di oggetti/sistemi e alla verifica del loro funzionamento.

La scienza è insieme madre e figlia della tecnologia, perché le scoperte scientifiche rendono possibili applicazioni tecnologiche, e le applicazioni tecnologiche consentono di costruire gli strumenti necessari per la ricerca scientifica. Tra questi si situano gli strumenti per le misurazioni di cui il nostro vivere odierno così come le ricerche più avanzate non possono più fare a meno.

Per sviluppare ipotesi di lavoro, per la loro verifica sia nel campo della ricerca scientifica sia nelle decisioni da prendere nella vita quotidiana non si può più fare a meno di risultati di processi più o meno complessi di misurazione. La nostra società ha, infatti, ormai una misura per ogni cosa: altezza, massa, PIL, tasso alcolemico, livelli di radioattività …. Si è calcolato che ogni individuo nella nostra società compia almeno 50 misurazioni al giorno e quindi, se consideriamo la popolazione adulta italiana, avremo alcuni miliardi di misurazioni al giorno. Stranamente però tutto ciò che concerne le misure viene messo in secondo ordine nell'insegnamento scientifico.

Le reti intricate e per lo più invisibili di servizi, fornitori e comunicazioni dalle quali tutti noi dipendiamo fanno affidamento sulla metrologia per il loro funzionamento efficiente. Il successo economico delle nazioni dipende dalla nostra abilità di produrre e commerciare prodotti e servizi verificati e misurati in modo preciso. La metrologia è centrale per produttori, fornitori e clienti di merci e servizi. Ciascuna categoria deve avere fiducia nell'accuratezza e affidabilità delle misure fatte ad ogni livello di precisione.

Le collaborazioni industriali e commerciali internazionali e la garanzia della qualità dei prodotti sarebbero impossibili senza misurazioni accurate e validate dai vari laboratori e istituti metrologici nazionali degli stati coinvolti.

A parte le aree dell'ingegneria, la scienza della misura ha profonde implicazioni in molte aree della scienza e della tecnologia. Si pensi ad esempio alla misure dell'intervallo di tempo; i sistemi di navigazione satellitare e la coordinazione internazionale del tempo rendono possibili individuazioni accurate – permettendo l'esistenza a livello mondiale di una rete di sistemi di calcolatori e agli aerei di atterrare in condizioni di scarsa visibilità. Per esempio il nuovo consorzio Galileo sta lavorando per assicurare che il "tempo Galileo" sia consistente con il Tempo Universale Coordinato (UTC) prodotto dal BIPM sulla base di più di 300 orologi atomici in 41 stati .

Le motivazione ad incrementare l'importanza della metrologia risiedono anche nella turbolenza associata alla globalizzazione e al commercio globale. Affinché un'economia prosperi nel mercato globale, essa deve migliorare la competitività internazionale della sua industria manifatturiera. Questo richiede più della semplice produzione dei migliori prodotti ai prezzi più bassi; il cliente potenziale ha anche bisogno di essere persuaso della qualità e della conformità del prodotto che devono essere documentate da rapporti di prova e dichiarazioni di conformità.

Per raggiungere tutto questo è necessario un miglioramento continuo della tecnologia e delle conoscenze. Tipicamente l'accuratezza richiesta sui campioni di misura nazionali raddoppia ogni 10 anni. Questa domanda di aumento della precisione e dell'uniformità si applica non solo ai campioni nazionali ma anche all'attuazione di Sistemi di Qualità basati su campioni internazionali. Per esempio le norme sulla qualità ISO/IEC 17025 richiedono che tutti gli strumenti di misura usati per la produzione o per i servizi siano tarati; dove taratura significa il confronto delle misurazioni di uno strumento con campioni di riferimento o materiali di riferimento di valore noto .

Chiediamoci dunque quali sono le aree importanti per la metrologia nel futuro? Certamente continueranno ad esserci sfide dalle aree tradizionali della fisica e dell'ingegneria. Comunque la domanda più pressante e più grande attualmente proviene dalla chimica e dalle scienze basate sulla chimica, non solo per la produzione ma, e soprattutto, per l'ambiente e la salute. Qui c'è un bisogno urgente di misure riferibili e precise e lo scopo della metrologia e di chi in essa opera è, appunto, di continuare nella missione di tendere verso l'uniformità nella misurazione a livello mondiale.

Il lavoro internazionale del BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) dimostra che la Convenzione del Metro è ancora uno strumento vitale, sensibile alle esigenze correnti della globalizzazione. Questo è testimonianza della sagacità di coloro che si incontrarono a Parigi nel maggio del 1875. L'avventura della metrologia è un'impresa che è stata il propellente per l'evoluzione del mondo moderno e che continua ad eccitare l'immaginazione e ad aiutare la società.

I metrologi lavorano in svariate aree specializzate in differenti tipi di misurazioni. Al livello scientifico più alto, i metrologi assicurano la consistenza del Sistema Internazionale delle unità di misura (SI) che fu costituito sulle prime unità del Sistema Metrico e che fu formalmente creato nel 1960. Il loro lavoro di solito coinvolge la ricerca riguardante le definizioni delle unità e i modi di realizzarle con sufficiente accuratezza per incontrare le necessità della società e il mondo della ricerca scientifica. I metrologi legali, a loro volta, sono coinvolti negli aspetti della metrologia nel settore normato che riguarda direttamente i consumatori. Questi due aspetti della metrologia sono essenziali nell'assicurare sistemi nazionali di misura consistenti e riferibili a campioni internazionali facendo quindi in modo che misure e prove eseguite in stati diversi possano essere considerate equivalenti, entro i valori di incertezza dichiarati.

Il mantenimento del sistema mondiale di unità assume molteplici forme, dalla disseminazione diretta delle unità alla coordinazione attraverso confronti internazionali di campioni di misura nazionali (tali confronti sono coordinati dal Comitato Internazionale per i Pesi e le Misure, il CIPM). La creazione nel 1999 dell'Accordo di Mutuo Riconoscimento (MRA) del CIPM segnò un ulteriore avanzamento nell'internazionalizzazione della metrologia. Tale accordo è un mezzo per aumentare la fiducia nelle abilità tecniche dei partecipanti da parte dei laboratori di ogni parte del mondo per rendere le misure equivalenti e permettere l'emissione di certificati di taratura che siano validati, verificati e accettati da tutti i firmatari; esso rappresenta un contributo significativo alla riduzione delle barriere tecniche al commercio[1].

Conoscere, misurare

E' convinzione diffusa, almeno in paesi più avanzati del nostro, che i progressi della scienza, quando tradotti nella pratica, possono significare un incremento del livello di vita di una società. Quindi ciò si tradurrebbe in più posti di lavoro, salari più alti, raccolti più abbondanti, tempo libero per il divertimento, per lo studio, per imparare a vivere senza la grande fatica che l'uomo comune ha dovuto affrontare nei secoli passati .... Ma per raggiungere questi obiettivi, il flusso di nuove conoscenze scientifiche deve essere continuo e significativo. La scienza, di per sé, non fornisce una panacea per i mali singoli, sociali ed economici, ma, senza progresso scientifico non si può pensare di garantire salute, prosperità e sicurezza nel mondo moderno. Va aggiunto, inoltre, che la cultura scientifica non è avulsa da tutto il contesto e dovrebbe essere parte integrante del complesso bagaglio culturale offerto dal sistema dell'istruzione, così da fornire all'individuo-cittadino la capacità critica e gli strumenti necessari per un'autentica e piena possibilità di partecipazione al dibattito pubblico e alle scelte democratiche.

In tutto ciò emerge l'esigenza di tenere insieme "le culture", soprattutto nel nostro Paese in cui si assiste ancora oggi, a distanza di cinquant'anni, ad accese discussioni intorno alla preminenza o meno di una delle famigerate 'due culture'. In tal senso la didattica della metrologia può fornire un contributo ad un livello fondamentale, può costituire un punto di forza, se opportunamente intesa. Il celebre aforisma attribuito a Democrito di Abdera lo sintetizza in modo molto efficace, rappresentando una bella sintesi di scienza e umanesimo, una linea programmatica, una metodologia.

A William Thomson, lord Kelvin, è attribuita la seguente frase:

«When you can measure what you are speaking about, and express it in numbers, you know something about it; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meager and unsatisfactory kind: it may be the beginning of knowledge, but you have scarcely, in your thoughts, advanced to the stage of science».

Si eseguono e producono misure per prendere delle decisioni sulla base del risultato ottenuto, come per esempio se bloccare il traffico in funzione di misure di livello di inquinamento; si decide se immettere in commercio un prodotto secondo il risultato delle misure di alcune sue caratteristiche, garantite dal produttore. La necessità di decidere pone nuovi problemi alle misure: quale ruolo gioca nella decisione l'incertezza che sempre è associata ad ogni misura sperimentale?

Quando il risultato della misura deve essere confrontato con limiti definiti a monte (il livello di inquinamento massimo ammesso, la tolleranza garantita sulle caratteristiche di un prodotto), l'esistenza dell'incertezza genera fasce di risultati che rendono ambigua la decisione.

La nostra cultura fa fatica ad accettare la coesistenza dell'incertezza con la necessità di decidere senza possibilità di dubbi, senza esitazioni. Nasce così una nuova branca della metrologia: quella che si occupa delle regole decisionali, ossia di come decidere minimizzando i rischi d'errore. Quindi non sorprende che nella discussione internazionale venga riconosciuto un ruolo fondamentale alla formazione scientifica e in modo esplicito, nel suo ambito, alla

1 Il testo del MRA è disponibile nel sito web del Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) alla voce MRA. Nel testo sono inseriti l'elenco dei firmatari dell'accordo (Appendix A) assieme ai risultati dei confronti chiave e supplementari (Appendix B) e alle capacità di taratura e misura (Calibration and Measurement Capabilities, CMCs, Appendix C), reciprocamente riconosciute, degli Istituti Metrologici Primari italiani ed esteri.

metrologia, alla natura dei processi di misura, in particolare all'incertezza che, pur connotando ogni misurazione, non di meno costituisce la base per effettuare previsioni e scelte razionali di fronte a situazioni nelle quali l'informazione disponibile è incompleta.

A proposito di 'Scientific Literacy', per esempio, il punto di vista della 'American Association for the Advancement of Science' è che:

«[…] understanding effective measurement technique is an element of scientific literacy. The Benchmarks for Science Literacy, by American Association for the Advancement of Science, "are statements of what all students should know or be able to do in science, mathematics, and technology by the end of grades 2, 5, 8, and 12." Chapter 9 describes, in part, what students should know about measurement and uncertainty, including the ideas that all measurements are subject to uncertainty, and how to express the uncertainty of calculated results (2001 AAAS benchmarks, Ch 9)».

Why Teach Measurement and Uncertainty?

http://serc.carleton.edu/sp/library/uncertainty/why.html

Oppure, nell'ambito dell'indagine OCSE PISA 2006, ci si è domandati:

"Che cosa è importante che un cittadino conosca, a che cosa è importante che dia valore e che cosa è importante che sia in grado di fare, in situazioni che richiedono il ricorso alla scienza e alla tecnologia o che sono in qualche modo da esse determinate?"

La risposta è che, tra le 'Categorie della Conoscenza sulla scienza' [la conoscenza dei mezzi (indagine scientifica) e dei fini (spiegazioni di carattere scientifico) della scienza] sarebbero da includere in particolare le seguenti, caratterizzanti l'indagine scientifica:

- Origine (curiosità, domande scientifiche)
- Scopo (produrre dati, idee correnti/modelli/teorie che guidino le indagini)
- Esperimenti (le domande orientano le indagini, progettazione di una ricerca)
- Tipi di dati (quantitativi e qualitativi)
- **Misure (incertezza, riproducibilità, precisione degli strumenti)**
- Caratteristiche dei risultati (provvisori, verificabili, falsificabili, ..)

Stefania Pozio, L'indagine OCSE PISA La competenza scientifica

http://www.icao.it/download/Scienze_Orvieto.pdf

La scienza della misura a scuola

Quanto precede dovrebbe aver portato argomenti a favore della necessità di introdurre le nozioni fondamentali della scienza della misura nell'insegnamento scolastico: se un collega, fin qui paziente lettore, non fosse persuaso di questi argomenti, potrebbe fermarsi qui.

Tuttavia sta di fatto che, di regola, i libri di testo di fisica del primo (o del terzo) anno della scuola secondaria di secondo grado presentano invariabilmente un primo ed ultimo capitolo sulle misure e la cosiddetta "teoria degli errori": quindi, il paziente e perplesso collega, a meno che non inviti i suoi studenti a strappare dal testo in adozione le pagine del succitato primo capitolo - ricordate l'eccentrico prof. Keating dell' "*Attimo fuggente*"? - , dovrà fare, in qualche misura, i conti con la sua esistenza inequivocabile.

Ebbene, questo primo e ultimo capitolo ci pare sintomatico di una concezione della metrologia come disciplina in gran parte avulsa dal contesto della fisica, senza troppe relazioni con i suoi aspetti concettuali.

Pare così che il processo di misurazione venga concepito come un qualcosa di fine a se stesso, non contestualizzato, una sorta di a-priori metodologico-sperimentale fatto di ricette, regole catechistiche e piccoli dogmi da acquisire una volta per tutte in funzione di un lavoro da svolgere in laboratorio (almeno si spera). Sarebbe invece opportuno che le questioni relative alla misurazione delle grandezze fisiche emergessero a posteriori nell'ambito del laboratorio, a partire dalla fisica, dai concetti fisici. Non si misura tanto per misurare.

Il solo esame di alcuni dati sperimentali, senza che ci sia a monte una base teorica, sia pure rozza, ingenua, congetturale, non è di aiuto nel formare una mentalità scientifica.

Le "Indicazioni Nazionali", pur nella loro estrema vaghezza, paiono invece orientare in senso contrario: « … gli esperimenti di laboratorio consentiranno … di insegnare allo studente come esplorare fenomeni (sviluppare abilità relative alla misura) …». Sembra quasi di vederlo, l'intrepido studente-misuratore, nella giungla dei fenomeni del laboratorio.

Una pratica diffusa nella scuola dove insegna uno di noi (R. U.) è la seguente.

Prima lezione di fisica, primo capitolo del libro di fisica. «Buongiorno ragazzi! Adesso misuriamo! Misuriamo … quanto è alto il prof! Oppure, che so, … la lunghezza della cattedra!», in ossequio alla 'centralità' pedagogica dello studente che si sarà chiesto: «Ma perché mai misurare …? E il prof, per giunta?».

Degli sviluppi storici della scienza della misura si fa raramente cenno, se non episodicamente: un approccio storico invece sarebbe utile a livello interdisciplinare per rendere gli allievi consapevoli del carattere unitario della cultura ed anche per demistificare la tendenza a interpretare il succitato capitolo primo come imprescindibile elemento propedeutico a qualunque discorso sulla Fisica.

Infatti è il caso di ricordare che "Fino all'inizio del XIX secolo, la variabilità delle misure era considerata un fatto secondario, e comunque le misure venivano espresse indicando semplicemente un valore per il misurando (si ricordi che ancora in quel periodo la produzione industriale adottava pratiche di tipo artigianale, senza cercare la standardizzazione dei prodotti). Intorno al 1810, Gauss creò una "teoria degli errori" «… e gli astronomi ne fecero uso. (…). [D'altra parte] se si eccettua l'astronomia, la fisica cominciò a riportare stime degli errori di misura solo dopo il 1890» (I. Hacking)." (Mari, 2010).

La citazione è per dire che si può fare della fisica interessante senza necessariamente somministrare, di primo acchito, come si trattasse di una vaccinazione, improbabili nozioni sulla "teoria degli errori", piuttosto che diluire e richiamare, procedendo nello studio della fisica, a livelli via via più appropriati, le nozioni fondamentali della metrologia.

Bisognerebbe anche che agli allievi fosse fatta toccare con mano la fatica secolare per arrivare all'attuale linguaggio comune delle misure, non solo al linguaggio ma anche a metodiche condivise a livello internazionale, insomma tutto il complesso della metrologia così come è venuta configurandosi nei secoli.

Un testo d'appoggio molto utile per un approccio storico alla metrologia è il delizioso libercolo di Sigfrido Leschiutta (2008).

Libri di testo su misura (?)

E cosa si trova in quel primo capitolo del libro di testo X? Lo indicheremo così, con un simbolo di incognita, per senso di indeterminatezza, in quanto non si riscontrano sostanziali differenze tra i libri di testo scolastici in uso.

In primo luogo ci sono problemi di nomenclatura.

«La necessità di premettere un minimo di nomenclatura ad un esame dei problemi di qualificazione dei risultati sperimentali nasce dall'esistenza di un gran numero di termini gravemente compromessi perché usati in quel contesto con significati anche in contrasto aperto tra loro. Si pensi alle parole errore (accidentale, fortuito, sistematico), precisione, accuratezza, incertezza, ripetibilità, valore vero, valore di riferimento, correzione, scostamento, scarto, misura, misurazione, e molte altre ancora.» (Sartori, 2010).

La con-fusione diffusa tra i termini «errore» e «incertezza» forse trova origine in testi accademici ancora di riferimento ma ormai datati per certi aspetti: «Per il momento, comunque, useremo la parola errore esclusivamente nel senso di incertezza e considereremo le due parole intercambiabili» (Taylor, 1982).

Nel nostro libro di testo X si legge:

> «Ogni volta che si effettua una misura si introducono diversi tipi di errori; il valore della misura è caratterizzato da una incertezza (o errore).»
>
> «Nei casi più semplici, si può assumere come errore l'incertezza dello strumento, cioè il valore più piccolo che lo strumento permette di leggere.»

Come osserva G. D'Agostini, «[Questa 'incertezza dello strumento'] a volte [la] si sente chiamare errore di sensibilità o addirittura semplicemente 'sensibilità'», confondendo ulteriormente tra 'sensibilità' e 'risoluzione'.

Inoltre «Il fatto che a qualcuno la frase 'le incertezze sono dovute ad errori di misura' possa suonare come una tautologia è un indizio della forte disomogeneità di linguaggio e di metodologia riscontrabile nel campo degli errori e delle incertezze di misura. Questo è in effetti il caso.» (D'Agostini, 1999)

Pare che gli estensori dei libri di testo non prendano in considerazione il fatto che i termini fondamentali della metrologia sono ormai codificati da anni in un 'Vocabolario Internazionale di Metrologia' (VIM), sviluppato a livello internazionale dalle più importanti organizzazioni normative, di metrologia e di accreditamento di Laboratori e giunto ormai alla sua terza edizione (anche in versione trilingue: francese, inglese e italiano).

Nel Vocabolario Internazionale di Metrologia i termini 'incertezza di misura' e 'errore di misura' sono infatti ben distinti:

> **incertezza di misura 2.26**
>
> parametro non negativo che caratterizza la dispersione dei valori che sono attribuiti a un misurando, sulla base delle informazioni utilizzate
>
> **errore di misura 2.16**
>
> valore misurato di una grandezza meno un valore di riferimento di una grandezza
>
> NOTA 1 Il concetto di errore di misura può essere impiegato:
>
> - quando esiste un singolo valore di riferimento a cui riferirsi, il che avviene quando si effettua una taratura impiegando un campione di misura con un valore misurato avente un'incertezza di misura trascurabile, oppure quando è dato un valore convenzionale: in questo caso l'errore di misura è noto;
>
> - qualora si supponga che il misurando possa essere rappresentato mediante un singolo valor vero o un intervallo di valori veri aventi un'ampiezza trascurabile; in questo caso l'errore di misura non è noto
>
> NOTA 2 L'errore di misura non dovrebbe essere confuso con l'errore di produzione o con l'errore grossolano
>
> Tornando al testo X, in termini di stima dell'incertezza di misura si assiste in genere a tutta una serie di «precetti» catechistici basati su alcuni piccoli «dogmi » ed entità metafisiche.

Sopra tutto forse sta il dogma dell'«immacolata osservazione» (G. D'Agostini, 1999, p.26) e il presupposto dell'esistenza di un 'valore vero'. Entità metafisiche che non si faticherebbe a riscontrare nella quotidiana pratica del laboratorio scolastico:

> … è così perché l'ho misurato!
>
> … perché l'incertezza nelle misure? Misurazione imperfetta!
>
> … e quindi … nei limiti dei - colpevoli - errori di misura - sempre umani! - la legge risulta verificata!

«The term "error" misleads students by suggesting the existence of true and false experimental results, possibly endorsing the naive view that an experiment has one predetermined "correct" result known by the instructor, while students' measurements are often "in error."

Readers will be all too familiar with the phrase "due to human error" often used by students in order to explain unexpected results!» (Allie, 2003)

Ora è da tenere presente che:

> «[…] la critica più radicale, almeno da un punto di vista concettuale, alla teoria degli errori di Gauss è venuta, a partire dal 1970 circa, dall'analisi del concetto di "valore vero".
>
> Alternativamente alle ipotesi alla base della teoria di Gauss, è progressivamente emerso il punto di vista secondo cui i "valori veri" non esistono proprio (e non solo sono inconoscibili, come anche tradizionalmente si riconosce) o, al più, sono dati solo in casi particolari come il conteggio oppure quando si manifestano come "valori di riferimento".»

Nel 1993 è stata pubblicata da ISO e vari altri organismi di standardizzazione internazionali la Guide to the expression of uncertainty in measurement ("GUM")

Il punto di vista della GUM (terminologicamente caratterizzato dal cambiamento da "errore" a "incertezza") ha un rilevante orientamento pragmatico:

- distingue primariamente non le cause di errore, ma le modalità di trattamento dell'incertezza;
- caratterizza le modalità di trattamento dell'incertezza in termini non concettuali, ma solo operativi (modalità statistiche e non), adottando al proposito una terminologia chiaramente convenzionale ("categoria A" e "categoria B", o anche "tipo A" e "tipo B");
- propone una strategia formale per risolvere il problema della combinazione di incertezze valutate con modalità diverse, senza imporre uno specifico modello concettuale al proposito (adottando un atteggiamento pluralistico, che ammette interpretazioni sia oggettivistiche sia soggettivistiche).»

(Mari, 2010)

Il Vocabolario Internazionale di Metrologia riporta :

> **valor vero di una grandezza 2.11**
>
> valore di una grandezza coerente con la definizione della grandezza
>
> NOTA 1 In accordo al punto di vista della misurazione basato sull'errore, il valor vero di una grandezza e considerato unico e, nella pratica, inconoscibile. Il punto di vista basato sull'incertezza consiste invece nel riconoscere che, a causa della quantità intrinsecamente incompleta di dettagli nella definizione di qualsiasi grandezza, non esiste un unico valor vero, bensì un insieme di valori veri, tutti coerenti con la definizione della grandezza. Tuttavia, tale insieme di valori risulta inconoscibile tanto in teoria quanto nella pratica. Altri punti di vista prescindono dal concetto di valor vero e si basano sul concetto di compatibilità metrologica per

valutare la validità dei risultati di misura.

NOTA 2 Nel caso particolare delle costanti fondamentali, si considera che la grandezza abbia un unico valor vero.

NOTA 3 Qualora l'incertezza di definizione associata al misurando sia considerata trascurabile rispetto alle altre componenti dell'incertezza di misura, si può ammettere che il misurando abbia un valor vero unico ai fini pratici. Quest'ultimo è il punto di vista adottato nella GUM e nei documenti correlati, nei quali l'aggettivo vero è considerato ridondante.

E' il caso di spendere qualche parola anche sui termini 'precisione' e 'accuratezza' che, sebbene molto usate in generale, possono creare equivoco. Un conto è usare questi due termini in modo generico per qualificare la bontà del risultato di una misurazione e un conto è usare questi due termini in senso metrologico (cfr VIM: **accuratezza di misura 2.13, precisione di misura 2.15**). Oggi con l'introduzione del concetto unificante di incertezza di misura non si sente più il bisogno di usare questi due termini, perché la bontà di una misurazione è unicamente rappresentata dall'incertezza in cui confluiscono anche termini come ripetibilità e riproducibilità. Il calcolo dell'incertezza così come codifcato nella GUM diventa così onnicomprensivo.

Il Tao della GUM

L'incertezza nelle misure è oggi ben più di un concetto: la stima del suo valore si basa su una procedura di calcolo codificata in una norma internazionale (GUM, 2008).

Il calcolo dell'incertezza di misura nel testo X si basa di norma sul 'dogma della mezza divisione' (D'Agostini, 1999) :

«Se la grandezza è stata misurata poche volte, si assume come errore assoluto la semi-differenza fra il valore massimo e il valore minimo ottenuti :

errore assoluto = (valore massimo – valore minimo)/2»

Il principale difetto di questo precetto è, quanto meno, quello di tendere a sovrastimare le incertezze. Si dirà: «stime 'prudenti', 'conservative' … che male c'è?».

Il motivo principale per cui andrebbero evitate le sovrastime delle incertezze è che in questo caso è più facile arrivare a risultati in accordo (artificiosamente) con valori noti o con quelli di altri esperimenti. Questo impedisce inoltre di identificare i possibili effetti sistematici che possono distorcere il risultato.

Nel libro di testo X, una trattazione di tipo statistico del processo di misurazione sembra affiorare dal seguente suggerimento:

«Quando i dati sono molti, conviene calcolare l'errore assoluto con il metodo degli scarti.»

Di solito a scuola il calcolo dell'incertezza di misura in termini statistici (scarto tipo sperimentale, varianza sperimentale della media, scarto tipo sperimentale della media, distribuzioni di probabilità) non viene trattato.

Un approccio di questo tipo parrebbe a prima vista scontrarsi con una carenza nell'insegnamento del filone scientifico in fatto di nozioni fondamentali di calcolo delle probabilità e di analisi statistica.

Eppure, andando a vedere, per esempio, quanto prescritto dalle Indicazioni nazionali riguardanti la Matematica per il Liceo Scientifico, relativamente al nucleo 'Dati e Previsioni', si riscontrano i seguenti Obiettivi specifici di apprendimento niente affatto banali:

> Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica [tra i quali:]
>
> […]
>
> 4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;
>
> (Indicazioni Nazionali riguardanti gli Obiettivi specifici di apprendimento per il Liceo Scientifico, MATEMATICA - LINEE GENERALI E COMPETENZE)

> *Dati e previsioni*
>
> Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.
>
> Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici.
>
> Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.
>
> Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.
>
> (MATEMATICA - OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO PRIMO BIENNIO)

> Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.
>
> Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio.
>
> In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.
>
> (MATEMATICA - OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO SECONDO BIENNIO)
>
> Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson).
>
> In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.
>
> (MATEMATICA - OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO QUINTO ANNO)

Perciò il problema di un approccio alle misure conforme alla GUM, non sembra consistere in una carenza di contenuti e nozioni in tema di calcolo delle probabilità e analisi statistica, quanto piuttosto in una carenza di coordinamento e integrazione dell'insegnamento della matematica con quello della fisica. A volte gli studenti vengono 'sovra-esposti' a concetti e metodi metmatici piuttosto astratti che poi non vengono utilizzati o esemplificati in situazioni concrete. L'organizzazione scolstica non facilita di certo la comunicazione fruttuosa tra il vaso della matematica e quello della fisica.

Naturalmente si pone il problema di una trasposizione didattica dell'approccio all'analisi statistica dei dati come previsto dalla GUM ma in rete possono trovarsi proposte di esperienze didattiche in tal senso. Cfr. per esempio (Buffler, 2003, 2007, 2008), (Pillay, 2008).

In quest'ultime esperienze didattiche può essere interessante anche l'impostazione soggettivistica (*à la* de Finetti, piuttosto che quella 'frequentista') nell'affronatre il concetto di probabilità; particolarmente interessante perchè questa impostazione consente di trattare in modo corretto situazioni - usuali nel laboratorio scolastico - nelle quali si ha a che fare con dati di misura singoli e non con misure ripetute (Buffler, 2008).

In-formazione e pratica educativa della metroogia

Naturalmente la formazione in metrologia andrebbe affrontata a livello scolastico, oltre che, per quanto sommariamente indicato nelle precedenti sezioni, pensando ad una revisione ed un aggiornamento dei libri di testo, in primo luogo intervenendo sulla formazione degli insegnanti di materie scientifiche, per una più ampia ricaduta anche attraverso progetti a livello di scuole.

Nonostante gli sforzi di quanti operano nella "scienza della misura" si riscontra ancora, a più di 130 anni dalla firma della Convenzione del Metro e a più di 50 anni dalla adozione del SI, una grande carenza di formazione generalizzata affinchè la cultura dell'uso del SI, e, soprattutto, della riferibilità di tutti i risultati di misurazione sia un sottofondo comune, unitamente alla comprensione del ruolo della buona valutazione dei valori dell'incertezza di misura ed il suo uso pratico.

Va notato che, oltre all'attività di divulgazione e formazione da parte degli istituti metrologici e di singoli ricercatori metrologi, in Italia sono stati messi in atto anche altri strumenti, come la rivista "Tutto Misure", il congresso Nazionale Metrologia e Qualità, l'attività della struttura del GMEE e di enti che si occupano specificamente della formazione. Sono anche state stampate da parte del GMEE monografie specifiche.

Nell'aprile 2010, nell'ambito della manifestazione "Affidabilità e Tecnologia", si svolse una tavola rotondadal titolo "Formazione in Metrologia" per riflettere sull'organizzazione della formazione metrologica a livello nazionale.

Nel frattempo si costituì un gruppo di lavoro molto allargato che ha riflettuto sul da farsi ed ha consentito di verificare chi è disponibile, dal mondo della ricerca metrologica e da quello della scuola, a collaborare ad impostare un piano di intervento formativo. Ne è emerso il bisogno di stabilire delle da linee seguire per un intervento radicale e cioè fin dai primi livelli scolastici.

Ci si è si è ritrovati al Congresso di "Metrologia e Qualità" dell'aprile 2011 con una sessione dedicata appunto alla Formazione in Metrologia e si è dato l'avvio ad un progetto di formazione/informazione/interazione con gli insegnanti, attraverso la stipula di un protocollo d'intesa tra INRIM, GNMEE (Associazione "Gruppo Nazionale Misure Elettriche ed elettroniche") e l'Ufficio Scolastico regionale del Piemonte.

A Torino, dove la Metrologia italiana è nata e si è sviluppata, è stato quindi avviato ed è giunto alla sua terza edizione un corso di 'In-formazione e pratica educativa della metrologia' rivolto a docenti delle scuole primarie e secondarie di primo e secondo grado.

Il corso, così come quelli già svolti negli a.s. 2010-2011 e 2011-2012, prevede che gli insegnanti acquisiscano le competenze necessarie all'insegnamento e all'utilizzo di metodologie di misurazione all'interno delle proprie ore curricolari secondo le seguenti linee fondamentali:

- la comprensione di cosa significa e produce una misurazione;
- il concetto di dato scientifico;
- il concetto di incertezza metodologica e strumentale;
- il significato della quantità e della qualità dell'informazione in termini di numeri, unità di misura, incertezza;
- la pregnanza della scienza della misura come scienza interdisciplinare.

Bibliografia

Buffler, A., Allie, S., Lubben, F., Campbell B., Evangelinos, D., Psillos, D., Valassiades, O. (Oct. 2003). *Teaching measurement in the introductory physics laboratory*. Phys. Teach. 41, 394–401

Buffler, A., Allie, S., Lubben, F., Campbell B. (2007). *Introduction to Measurement in the Physics Laboratory. A Probabilistic Approach*, Ed. 3.4 (Department of Physics, University of Cape Town, 2007). http://www.phy.uct.ac.za/people/buffler/labmanual.html.

Buffler, A., Allie, S., Lubben, F. (2008). *Teaching Measurement and Uncertainty the GUM Way*. The Physics Teacher 46, 539-543

Calcatelli, A. (1995). *Il Sistema Internazionale di unità di misura*, monografia a cura dell'IMGC-CNR

CD Multimediale: *Il Linguaggio delle Misure* (aggiornamento aprile 2010) http://www.inrim.it/ldm/

D'Agostini, G. (1999). Errori e incertezze di misura. Rassegna critica e proposte per l'insegnamento, Nota Interna N. 1094 Dipt. Di Fisica dell'Università di Roma 'La Sapienza' http://www.roma1.infn.it/~dagos/perfezionamento.pdf http://www.roma1.infn.it/~dagos/teaching.html

Guedj, D. (2001). *Il meridiano*, Longanesi

Guedj, D. (2004). *Il metro del mondo*, Longanesi

GUM: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement; JCGM 100:2008; GUM 1995 with minor corrections http://www.bipm.org/en/publications/guides/

Norma italiana (luglio 2000): "Guida all'espressione dell'incertezza di misura", UNI CEI ENV 13005

Integrating Measurement and Uncertainty into Science Instruction http://serc.carleton.edu/sp/library/uncertainty/index.html

Proposta didattica nell'ambito di *Pedagogy in Action* (http://serc.carleton.edu/sp/index.html): progetto didattico della National Science Digital Library (http://nsdl.org/)

Mannucci, R., Cordara, F. (1997). *Misurare il tempo e la frequenza*, editrice Il Rostro

Musée national des techniques-CNAM (1989). *L'aventure du mètre*, ed. Musée national des techniques testo, Parigi, pubblicato in occasione dell'esposizione al Conservatoire des art set metiers (4 avril-30 octobre 1989)

Leschiutta, S. (2008). *L'arte della misura del tempo presso le cortigiane e altre curiose storie sulle misure, le istituzioni e i personaggi che hanno edificato la moderna metrologia*. Torino: edizioni A&T Affidabilità & Tecnologia, collana "I Quaderni del GMEE" - *N° 4*

Mari, L. (2010). *Progetto e misura della qualità Incertezze di misura*, Nota interna Università Cattaneo – LIUC. http://www.liuc.it/persone/lmari/pmq/2_3_Incertezze_di_misura.pdf

Pillay, S., Buffler, A., Lubben, F., Allie, S. (2008). *Effectiveness of a GUM-compliant course for teaching measurement in the introductory physics laboratory.* Eur. J. Phys. 29, 647–659

Rebaglia, A. (1984). *La metrologia nei secoli: panorama storico dalle origini all'introduzione*

del sistema metrico, monografia n.1, pubblicata in occasione di ‘Mostra sulla metrologia: scienza e tecnica della misura’, a cura di IMGC-CNR, Torino
Sartori, S. (2010). *La misurazione come procedimento conoscitivo evoluto* http://www.inrim.it/ldm/cd_ldm/allegati/conoscitivo/conoscitivo_evolutivo.pdf
Taylor, J. R. (1986). *Introduzione all’analisi degli errori*, Zanichelli ed.
VIM - *Vocabolario Internazionale di Metrologia. Concetti fondamentali e generali e termini correlati*
http://www.ceiweb.it/it/lavori-normativi-it/vim.html
Pubblicato come Norma Italiana CEI-UNI 70099 nell’aprile 2010
VIM3: *International Vocabulary of Metrology*
http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html

GEOGEBRA DAY: TAVOLA ROTONDA DEGLI ISTITUTI ITALIANI

RICERCA, FORMAZIONE, SPERIMENTAZIONE CON GEOGEBRA

IL GEOGEBRA INSTITUTE DI BARI TRA RICERCA, FORMAZIONE E SPERIMENTAZIONE

Eleonora Faggiano
GI Bari – Dipartimento di Matematica – Università di Bari Aldo Moro

Premessa

Il GeoGebra Institute di Bari nasce nel 2010 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Bari Aldo Moro, secondo in Italia dopo il neonato Istituto di Torino e con esso subito in stretta collaborazione. Le ragioni della collaborazione con l'Istituto di Torino sono da cercarsi non solo nella sentita necessità di equità nel rilascio delle certificazioni, ma soprattutto nel background di ricerca ed esperienze sull'uso delle tecnologie nella didattica della matematica nonché nell'interesse comune per gli sviluppi nel settore di ricerca e nelle pratiche didattiche.

L'idea dell'uso di software nel curriculum di matematica secondo le indicazioni generali della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM) è sicuramente tra i punti di partenza condivisi: l'uso di software a supporto dei processi di insegnamento-apprendimento in campo matematico è visto come strettamente connesso all'approccio metodologico laboratoriale secondo il quale, come è noto, il laboratorio di matematica non è da intendersi come un luogo fisico in cui svolgere le attività ma come "*un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici*".

L'attenzione, dunque, piuttosto che alla tecnologia o al software GeoGebra, è rivolta all'apprendimento "*inteso come costruzione di un bagaglio personale di conoscenze, competenze e attitudini matematiche, che devono essere significative, stabili e trasferibili ovvero adeguate per essere utilizzate in situazioni problematiche*" (Pellerey, 1999). Le tecnologie, infatti, possono favorire il miglioramento dell'esperienza dell'apprendimento, possono prescrivere e controllare le interazioni tra le persone che apprendono, possono essere strumenti di costruzione e comunicazione di significato, ma perché ciò accada non è assolutamente sufficiente che esse siano utilizzate semplicemente per distribuire informazioni. In tal senso, l'uso delle tecnologie di per sé non può costituire innovazione, pertanto non abbiamo bisogno di nuova tecnologia ma di un nuovo modo di pensare e agire (Marconato, 2009).

Prima di presentare le esperienze svolte nel GeoGebra Institute di Bari, e i riferimenti scientifici e culturali sulle quali esse si fondano, non è superfluo ricordare quali sono gli obiettivi generali dei GeoGebra Institute (GI) all'interno dei quali si vanno a delineare e inserire le attività:

- Formazione e supporto: per coordinare e fornire opportunità di sviluppo professionale sia nella formazione iniziale che in quella in servizio dei docenti. Il GeoGebra Institute può rilasciare certificazioni sulle competenze in GeoGebra. L'accertamento delle competenze riguarda non solo conoscenze e abilità nell'uso del software, ma anche la capacità di utilizzare lo stesso in modo integrato nella didattica della disciplina.
- Sviluppo e condivisione: per sviluppare e condividere le risorse di seminari e materiali didattici, e per incrementare ed estendere continuamente il software matematico dinamico GeoGebra.
- Ricerca e collaborazione: per condurre e sostenere ricerche relative a GeoGebra con l'attenzione all'insegnamento e all'apprendimento della matematica, per informare e incrementare le attività di formazione e sviluppo, e per promuovere la collaborazione tra l'IGI (la rete internazionale di tutti i GeoGebra Institute nel mondo) e gli Istituti locali di GeoGebra, e infine tra colleghi dei vari paesi.

Le ricerche sull'uso delle tecnologie e la formazione degli insegnanti

La nascita del GeoGebra Institute di Bari, e i progetti che in esso sono stati e saranno sviluppati, si fonda sulle esperienze e sulla ricerca nell'ambito della formazione degli insegnanti (sia in servizio che in formazione) il cui ruolo è ritenuto fondamentale perché le nuove tecnologie possano entrare nel cuore dei processi di insegnamento apprendimento della matematica a vero beneficio di tutti gli studenti.

Formazione degli insegnanti che, in accordo con Trouche (2003), deve tener conto della complessità dell'integrazione a tre livelli: uno matematico (nuovi ambienti e situazioni d'apprendimento richiedono nuovi problemi matematici); uno tecnologico (comprendere i limiti e le potenzialità degli artefatti); uno psicologico (comprendere e gestire il processo "di instrumentazione" nei suoi molteplici aspetti).

È inoltre importante sottolineare quanto, accanto alle capacità tecniche necessarie per un pieno utilizzo delle caratteristiche delle tecnologie, agli insegnanti siano oggi richieste non solo una buona dose di creatività ma anche una adeguata consapevolezza di quanto l'integrazione delle tecnologie richieda spesso, come si diceva prima, un nuovo modo di pensare e agire. Se, quindi, le nuove tecnologie, accompagnate da una buona dose di creatività e soprattutto da un "sensato" uso (per dirla come Paola, 2005), possono offrire una nuova opportunità, ciò che è importante perché ci sia crescita, sia dal punto di vista dell'apprendimento che da quello dell'insegnamento, è la riflessione sugli effetti dell'approccio utilizzato e sull'impatto delle scelte fatte sugli allievi, sul loro apprendimento e sul clima della classe in generale.

Per quanto riguarda l'utilizzo del GeoGebra, per esempio, all'insegnante spetta il compito di sfruttare al meglio il software per creare ambienti di apprendimento significativi in cui gli studenti si possano scontrare con problemi aperti e intriganti e, agendo come matematici, costruire il loro bagaglio personale di conoscenze, competenze e attitudini matematiche significative, stabili e trasferibili. Ma perché l'insegnante possa creare tali ambienti di apprendimento significativi ed efficaci è necessario che sia consapevole dell'utilità del GeoGebra come strumento metodologico e che comprenda l'importanza di una "adeguata" e aggiornata preparazione per districarsi in situazioni didattiche "tecnologicamente ricche" (Faggiano, 2009).

Le esperienze e i progetti del GeoGebra Institute di Bari

Le esperienze fin qui svolte e i progetti in corso sono frutto della stretta e consolidata collaborazione tra il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Bari e gli insegnanti delle scuole di ogni ordine e grado della Provincia di Bari, e non solo.

Tale collaborazione, che si nutre dei risultati della ricerca nazionale e internazionale in tema di teorie e modelli d'insegnamento/apprendimento ma anche di pratiche didattiche, si è sviluppata ed è cresciuta negli anni grazie al contatto diretto tra i componenti del gruppo di ricerca e le scuole, alle esperienze degli insegnanti del Nucleo (si veda per esempio Faggiano, 2012), nonché alle opportunità offerte dalle varie modalità di formazione iniziale (nei corsi di Scienze della Formazione Primaria, nelle "vecchie" SSIS e nei "nuovi" TFA) e in servizio degli insegnanti.

In particolare i contatti con le scuole sono avvenuti attraverso sperimentazioni, corsi di aggiornamento e più recentemente i corsi PON (finanziati dai Fondi Strutturali Europei 2007-2013, finalizzati ad arricchire e recuperare capacità, conoscenze, abilità per rafforzare la motivazione ad apprendere e favorire una partecipazione attiva degli alunni nella costruzione dei propri processi di apprendimento) e l'esperienza del Tirocinio Formativo Attivo (si veda per esempio l'articolo di Lovino *et al.* in questo volume).

Degno di nota riteniamo sia l'aver riscontrato un frequente ricorso all'uso di GeoGebra nelle attività del TFA: nei corsi e nei laboratori seguiti dai tirocinanti, nelle attività svolte durante il tirocinio diretto e indiretto, nelle presentazioni di possibili percorsi didattici durante le prove finali. In particolare, a partire dall'analisi delle relazioni di tirocinio e dei colloqui, si ritiene di poter affermare che l'approfondimento svolto durante i Laboratori Pedagogico Didattici di Matematica ha spesso condotto i "futuri" insegnanti a prediligere utilizzi sensati di GeoGebra nell'ottica del laboratorio di matematica.

Ultima, ma non per ultima, l'esperienza in corso nell'ambito del progetto dell'Accademia dei Lincei "Lincei per una nuova didattica nella scuola" sta vedendo impegnato il GI di Bari nella formazione degli insegnati in servizio. L'obiettivo, anche in questo progetto di formazione ad ampio respiro, è ancora una volta quello non solo di far conoscere potenzialità e limiti del software quanto quello di far riflettere sulle opportunità didattiche che tale strumento offre per la costruzione di significati matematici. Nell'ambito di tale progetto il Polo Pugliese sta sperimentando l'utilizzo di una piattaforma online che contribuisca alla messa in atto e alla "tenuta" di una comunità consentendo ai partecipanti di far propri i ferri del mestiere come i "repository" in cui inserire i materiali (possibilmente commentati) delle proprie esperienze, i "forum" di discussione e gli "help desk", nonché di condividere e analizzare in maniera partecipata materiali di studio, racconti di esperienze e pratiche didattiche.

Per concludere, riteniamo che il ruolo dei GeoGebra Institute non sia solo quello di offrire corsi di formazione e rilasciare certificazioni di competenze nell'uso del software quanto, piuttosto, quello di far tesoro della lunga collaborazione tra gli insegnanti delle scuole e l'Università per offrire opportunità concrete che consentano agli insegnanti di "integrare" consapevolmente GeoGebra nella pratica didattica e di sfruttarne al meglio le potenzialità. Questo può essere fatto, ed è quanto il GI di Bari ha fatto e continuerà a fare, fornendo supporto di esperti e della comunità alla progettazione, alla sperimentazione, alla riflessione e alla condivisione di esperienze grazie al ruolo fondamentale degli insegnanti (in particolare quelli che da anni fanno parte del nostro Nucleo di Ricerca) nei GeoGebra Institute.

Bibliografia

Faggiano, E. (2009). *Leading teachers to perceive and use technologies as resources for the construction of mathematical meanings*, Proceedings of CERME 6, WG7 - Technologies and resources in mathematical education, 1310-1319.

Faggiano, E. (2012). *La collaborazione scuole – università*. Atti del V Convegno Nazionale DI.FI.MA., (a cura di O. Robutti e M. Mosca). Kim Williams Books, Torino, 2012, pp. 451-460.

Marconato, G. (2009). La breve storia delle tecnologie nella didattica. In G. Marconato (a cura di). *Le tecnologie nella didattica*. Trento: Erikson.

Paola, D. (2005). Un approccio ecologico agli strumenti di calcolo automatico nell'insegnamento - apprendimento della matematica. In *Didattica della matematica e processi di apprendimento*, (a cura di B. D'Amore e S. Sbaragli). Bologna: Pitagora Editrice, 35-42.

Pellerey, M. (1999). *Educare. Manuale di pedagogia come scienza pratica progettuale*. Roma: LAS.

Trouche, L. (2003). *From artifact to instrument: mathematics teaching mediated by symbolic calculators*. Interacting with computers, 15(6) 783-800.

GEOGEBRA A MILANO

Ottavio G. Rizzo[1]
Dip. di matematica «Federigo Enriques», Università degli Studi di Milano
GeoGebra Institute di Milano

La nascita dell'istituto

Il gruppo nasce a margine del GeoGebra Day torinese del 2011, dall'incontro di insegnanti di scuola secondaria che da anni, ciascuno per proprio conto, utilizzavano il programma in classe e ne diffondevano la conoscenza presso i colleghi. A seguito della presentazione di GeoGebra fatta al Linux Day 2011 ospitato dalla scuola «Ludovico Radice Fossati per il software open source» presso la SIAM 1838 – Società d'Incoraggiamento Arti e Mestieri –, si decide di formalizzare la costituzione di un istituto GeoGebra a Milano, processo che giunge a compimento nell'aprile 2012.

Le attività dell'istituto

Sin dalla sua nascita, l'istituto si è occupato prevalentemente di formazione all'uso di GeoGebra: dopo una serie di incontri *di rodaggio* nella prima parte del 2012, parzialmente rivolti ai membri stessi dell'istituto, si decise di investire per il 2012/2013 nella formazione esterna.

2012/2013

Sono stati tenuti quattro incontri, più uno di alfabetizzazione richiesto *a furor di popolo* dopo il primo appuntamento. Si è scelto di concentrare ogni incontro su un tema specifico: coniche, funzioni, fisica, geometria sintetica; gli incontri sono stati tutti svolti in una sala informatica di SIAM 1838, in centro Milano.

Il risultato è stato ambivalente: se da una parte l'impostazione disciplinare ha permesso di offrire una coerenza didattica a ogni singolo incontro, dall'altra parte ha allontanato alcuni possibili partecipanti perché non attratti dal tema (l'incontro sulla fisica in particolare) senza d'altronde impedire reazioni del tipo: «Però io queste cose in classe non le faccio».

In particolare, si è registrata una presenza media del 21% di insegnanti di secondaria di primo grado — a fronte di argomenti tutti incentrati sul programma delle secondarie di secondo grado — che hanno espresso l'esigenza di incontri mirati sulle loro necessità.

2013/2014

Forti dell'esperienza passata - sia sulla necessità di incontri di alfabetizzazione che di percorsi mirati sul singolo ordine scolastico - per l'anno corrente è stato deciso di offrire ben due incontri di alfabetizzazione (in autunno), seguiti da quattro interventi distribuiti fra inverno e primavera: due sulle secondarie di primo grado, due su quelle di secondo grado.

È stato anche deciso di tenere i corsi in una scuola della periferia milanese (ma molto ben collegata sia coi mezzi pubblici che con la maglia viaria): i risultati del primo incontro e le prenotazioni del secondo sono stati particolarmente incoraggianti, con una presenza media

---

1 Con la collaborazione dei membri dell'Istituto GeoGebra Milanese, in particolare Maria Pia Bianchi Janetti per la ricostruzione storica della genesi dell'istituto e Barbara Foti per la raccolta dei dati di partecipazione.

di 20 insegnanti contro i 13 dell'anno precedente. Da segnalare la maggiore partecipazione di insegnanti provenienti da scuole non del capoluogo: dal 21% al 44%.

Il dibattito sulla libertà

Nell'aprile 2013 GeoGebra ha cambiato la sua licenza (IGI, 2013a) introducendo una netta distinzione fra utilizzo commerciale e non-commerciale. Malgrado la responsabile legale dell'International GeoGebra Institute abbia più volte ribadito che la modifica sia stata una semplice «chiarificazione» (Hinterberger, 2013), è evidente che il passaggio da una licenza GPLv3 e contemporaneamente CC-BY-SA 3.0 a CC-BY-NC-SA 3.0 sia sostanziale, rendendo non più libero il programma.

A causa del vivo interesse di alcuni componenti del gruppo milanese nel software libero, il problema della libertà di GeoGebra ha causato un vivo dibattito sfociato nella segnalazione al responsabile del pacchetto Debian di GeoGebra. La segnalazione ha dato luogo a un'attenta analisi legale delle implicazioni del cambio di licenza (Prescott, 2013). In particolare, o la clausola NC è invalidata dalla licenza del codice sorgente, oppure GeoGebra è incompatibile con la GPL e quindi in violazione della licenza di alcune delle librerie incluse con la conseguenza che l'intero programma sarebbe in violazione delle norme sul diritto d'autore.

Purtroppo la risposta dell'IGI non è stata soddisfacente, essendosi limitata alla rimozione di qualsiasi menzione di GeoGebra come software libero e all'aggiunta di una chiarificazione alla «licenza chiarificatrice» (IGI, 2013b).

Conseguenze

Oltre all'incertezza legale in cui si trova GeoGebra in questo momento, le definizioni esplicitamente definite commerciali rendono soggetto a licenza commerciale (che può beninteso essere gratuita, con concessione dell'IGI) includono l'uso di GeoGebra o di materiali prodotti con GeoGebra all'interno di un libro di testo o di un giornale scientifico, che sia o meno distribuito a pagamento; così come l'utilizzo di GeoGebra all'interno di una conferenza per cui sia prevista una tassa d'iscrizione, fosse anche solo a copertura dei pasti.

L'Istituto Milanese ha deciso di proseguire, non ostante queste difficoltà, la programmazione delle attività per il 2013/14, nella speranza che i problemi legali — uniti all'esclusione forzata del programma da gran parte delle distribuzioni Linux — portino a una reale chiarificazione della faccenda.

Conclusioni

Il concetto di «open source» (Perens, 1999) è stato molto spesso criticato dai sostenitori del software libero (Stallman, 2012) perché tralascia l'obiettivo di *libertà* insito nella definizione di quest'ultimo per concentrarsi sui vantaggi tecnici dell'avere un codice sorgente liberamente disponibile. Gli inconvenienti e i rischi legati al passaggio di GeoGebra da software libero e open source a software non libero ma open source — uniti al rischio che la promessa, contrattualmente non vincolante, che «GeoGebra will always continue to be available free of charge for students and teachers for all major operating systems» (IGI, 2013b) sia un semplice auspicio, dannoso a parere dell'autore — non sono trascurabili e occorre dare pienamente ragione ai critici.

Bibliografia

Hinterberger, M. (2013). Comunicazione personale

International GeoGebra Institute (2013a). *GeoGebra License*.http://www.geogebra.org/cms/license

International GeoGebra Institute (2013b). *GeoGebra License FAQ*.http://www.geogebra.org/cms/license#FAQ

Perens, B. (1999). *Open Sources: Voices from the Open Source Revolution*. Sebastopol (Calif.): O'Reilly.

Prescott, S. (2013). *GeoGebra licence and GPL violation*. Bug#69728, debian-bugs-dist. http://debian.2.n7.nabble.com/Bug-692728-GeoGebra-licence-and-GPL-violation-td3028480.html

Stallman, R. (2012). *Perché l'«Open Source» manca l'obiettivo del Software Libero*.http://www.gnu.org/philosophy/open-source-misses-the-point.html

GEOGEBRA DAY: COMUNICAZIONI

ESPLORARE I QUESITI INVALSI CON GEOGEBRA NELLA DIDATTICA QUOTIDIANA

***Pierangela Accomazzo*[1,2], *Silvia Beltramino*[1,3]**
[1]*m@t.abel*, [2]*La Casa degli Insegnanti*, [3] *Liceo Scientifico "M. Curie" di Pinerolo*

Premessa

I quesiti INVALSI in questi anni sono entrati a pieno titolo nelle nostre aule, ma per noi docenti sono un problema oppure una risorsa? Senza entrare nelle polemiche che via via sono nate intorno alle prove INVALSI, riteniamo che nel lavoro quotidiano del docente sia importante il tema della valutazione. La valutazione, infatti, accompagna l'intero percorso didattico e i suoi continui feedback sono uno stimolo per migliorare, o anche solo "calibrare" il processo di apprendimento/insegnamento; in quest'ottica le valutazioni esterne si affiancano a quelle interne, entrambe necessarie.

Le prove INVALSI, per esempio, forniscono al docente utili spunti di riflessione sugli ostacoli concettuali insiti nei diversi argomenti, oltre che sui processi di pensiero che portano alle risposte corrette. Inoltre la comparazione dei risultati delle proprie classi o della propria istituzione scolastica con gli esiti complessivi delle prove, interpretati alla luce della conoscenza del contesto specifico in cui la propria scuola opera, può servire per individuare i punti di forza e di debolezza del percorso effettivamente realizzato in classe e delle scelte didattiche effettuate.

L'intento di questo intervento è duplice: da una parte si individuano alcuni ostacoli concettuali messi in risalto anche dalle prove INVALSI e si propone un esempio di approccio in aula con l'ausilio del software GeoGebra, dall'altra si trasformano specifici quesiti INVALSI in situazioni problematiche con cui guidare i ragazzi alla scoperta di nuove conoscenze matematiche, sempre con il supporto del software.

Vogliamo ancora sottolineare che l'uso di GeoGebra è pensato principalmente come mediatore didattico: lo scopo dei file proposti è quello di aiutare i ragazzi a comprendere concetti matematici e non quello di stupirli con "effetti speciali" caratteristici del software.

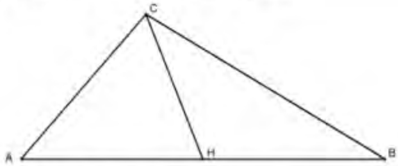
INVALSI e gli ostacoli concettuali.

Uno dei nodi concettuali, particolarmente evidente in geometria, è il saper riconoscere, comprendere e applicare definizioni e proprietà in vari contesti. Per esempio, il concetto di altezza di un triangolo, su cui gli studenti si scontrano già dai primi anni di scuola, è ricco di misconcetti e miscredenze: spesso gli allievi confondono l'altezza con un segmento verticale, possibilmente interno al triangolo, oppure hanno un'idea intuitiva di altezza come segmento che congiunge il vertice di un triangolo con il piede della perpendicolare condotta al lato opposto, e questo segmento non ha una propria identità se non si conosce la sua lunghezza.

Abbiamo selezionato due quesiti delle prove INVALSI destinate alla classe II della Scuola Secondaria di II grado che richiamano l'attenzione sul concetto di altezza in un triangolo:

Quesito D5 dell'anno scolastico 2012/13:

D5. **H è il punto medio del lato AB del triangolo ABC.**



I triangoli AHC e BHC hanno la stessa area perché

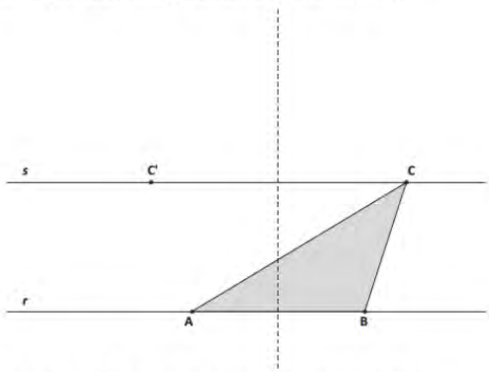
A. ☐ la distanza di C da AB è la stessa nei due triangoli e AH = HB
B. ☐ la mediana CH divide il triangolo in due triangoli congruenti
C. ☐ hanno come altezza comune CH e le relative basi sono della stessa lunghezza
D. ☐ i triangoli CHA e CHB sono tutti e due triangoli isosceli

Con le seguenti percentuali di risposta:

	Non risposta	A	B	C	D
Generale, complessiva di tutte le tipologie	4,0	22,7	18,8	46,4	8,1
Licei	4,0	29,2	16,3	44,8	5,7
Istituti tecnici	3,7	18,3	20,7	49,3	8,0
Istituti professionali	7,5	11,8	10,4	33,8	36,5

Quesito D3 dell'anno scolastico 2011/12:

D3. **ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta r e il terzo vertice in un punto qualunque della retta s parallela ad r passante per C.**



Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC?

A. ☐ Soltanto il triangolo ABC', simmetrico di ABC rispetto all'asse di AB
B. ☐ Soltanto il triangolo isoscele di base AB
C. ☐ Soltanto il triangolo rettangolo in A e il triangolo rettangolo in B
D. ☐ Tutti gli infiniti triangoli di base AB

Con le seguenti percentuali di risposta[1]:

	Non risposta	A	B	C	D
Generale, complessiva di tutte le tipologie	4,3	53,3	7,8	7,2	28,1

Da questi due quesiti si può facilmente osservare come il concetto di altezza sia ancora poco familiare agli studenti italiani, soprattutto se proposto in situazioni non usuali.

Anche nelle Indicazioni nazionali troviamo esplicito riferimento alla conoscenza di tali concetti: "il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. [...] La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria".

Ma che fare? Per un possibile intervento in aula facciamo riferimento all'attività di m@t.abel "Esplorazione di figure piane: dalla congettura alla dimostrazione".

Gli studenti lavorano su un file di GeoGebra con la seguente consegna: "Disegna un triangolo ABC, traccia l'altezza dal vertice C al lato opposto. Prova ora a muovere i vertici del triangolo, che cosa succede? In quali casi l'altezza sparisce? Come è possibile visualizzare l'altezza anche se il triangolo è ottusangolo?"

Figura 1

È probabile che gli studenti rispondano con un triangolo "standard", come quello riportato in figura 1, rappresentando l'altezza con il segmento CD.

È evidente che il triangolo di GeoGebra, con la sua variabilità intrinseca, ha delle caratteristiche di generalità rispetto a un qualsiasi altro triangolo realizzato su carta che, per sua natura, mantiene le caratteristiche del caso particolare, come ad esempio l'essere acutangolo. In buona approssimazione il triangolo rappresentato in GeoGebra si può pensare come un "triangolo generico" e ciò è intuitivo per gli studenti. Proprio per questo definire l'altezza come un segmento non crea problemi se il triangolo continua a restare acutangolo (Figura 2.a), ma spostando un po' i vertici è facile arrivare a una situazione in cui il segmento-altezza sparisce (Figura 2.b).

Figura 2.a

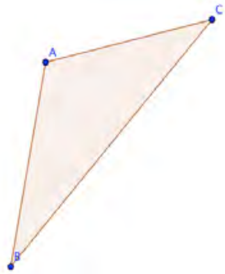


Figura 2.b

Durante l'attività gli studenti potrebbero stupirsi del fatto che in alcuni casi l'altezza sparisca,

1 Solo dall'anno scolastico 2012/13 l'INVALSI ha fornito le percentuali di risposta anche suddivise per tipologie di scuola.

è compito del docente con una discussione matematica portare gli allievi a ridefinire l'altezza relativa a un lato di un triangolo attraverso la retta passante per un vertice e perpendicolare alla retta del lato opposto.

L'attività potrebbe poi proseguire proponendo ulteriori costruzioni che conducono, con una discussione matematica, alla scoperta di alcune proprietà dei triangoli.

- Apri GeoGebra, visualizza la Vista Grafica e disegna un triangolo ABC. Traccia la bisettrice di uno dei suoi angoli. Può accadere che, modificando opportunamente il triangolo, tale bisettrice risulti perpendicolare rispetto al lato opposto all'angolo considerato? Scrivi le tue osservazioni.
- Apri GeoGebra, visualizza la Vista Grafica e disegna un triangolo ABC. Traccia le bisettrici degli angoli acuti B e C. Sia P il loro punto di incontro. Descrivi le posizioni di P, al variare dei vertici B e C su due rette perpendicolari in A. Scrivi le tue osservazioni.
- Apri GeoGebra, visualizza la Vista Grafica e disegna un triangolo ABC. Traccia le bisettrici degli angoli A e B. Chiama O il loro punto di incontro. È possibile, modificando opportunamente i lati del triangolo ABC, fare in modo che le due bisettrici siano tra loro perpendicolari? Scrivi le tue osservazioni.
- Apri GeoGebra e visualizza la Vista Grafica. Costruisci un triangolo, note le misure di due lati e della mediana relativa al terzo lato.

Oppure si potrebbe ancora proporre un'attività di scoperta, con l'utilizzo dei luoghi di punti.

Apri GeoGebra e disegna un triangolo ABC con la lunghezza dell'altezza doppia della base AB.

- Quanti triangoli riesci a disegnare?
- Qual è il luogo di punti descritto da C? Rendi attiva la traccia di C e verifica le tue supposizioni.
- Sapresti valutare la distanza tra C e la retta passante per AB?

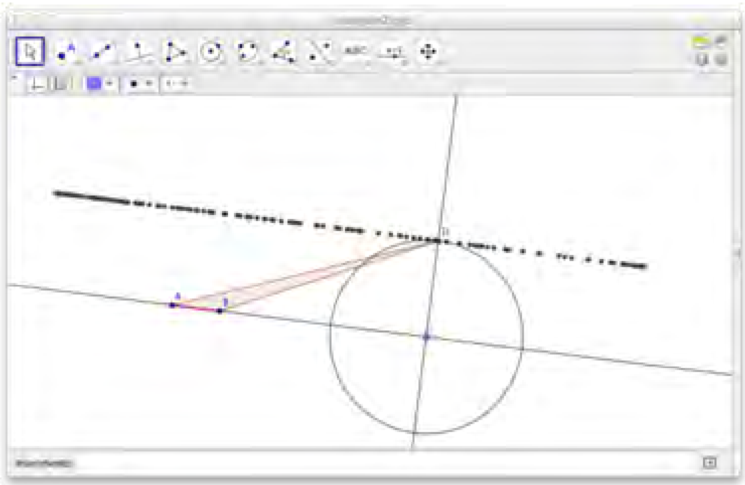


Figura 3

Attività di questo tipo potrebbero aiutare i nostri studenti a costruirsi un pezzo di sapere nell'ottica del laboratorio di matematica proposto dall'UMI e visto come un insieme strutturato di attività la cui finalità è la costruzione di significati degli oggetti matematici[2].

2 Da "Matematica 2003" – UMI: "Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche,

Prove INVALSI e laboratorio di matematica

Come detto in premessa, alcuni quesiti INVALSI offrono ottimi spunti per costruire situazioni-problema adatte al laboratorio di matematica. Sono quei quesiti che, oltre a porre attenzione al contesto, sono articolati su più domande, ciascuna delle quali ha lo scopo di verificare la capacità degli studenti di mettere in atto processi e strumenti diversi. Per l'insegnante si tratta di utilizzare un oggetto pensato e testato scientificamente per rilevare conoscenze come strumento per *indurre* tali conoscenze, costruire o rinforzare concetti importanti.

Prendiamo come esempio due quesiti somministrati nel 2011/2012 alle classi II della Scuola Secondaria di II grado che trattano di funzioni lineari e quadratiche. Sottolineiamo come il concetto di funzione abbia assunto notevole importanza nella definizione dei curricoli di questi ultimi anni; le Indicazioni nazionali per la scuola di secondo grado sono esplicite sull'importanza dell'argomento.

Nei riferimenti alle Indicazioni nazionali per i Licei si legge: "Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni. [...] Lo studente studierà le funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = |x|$, $f(x) = a/x$, $f(x) = x^2$ sia in termini strettamente matematici sia in funzione della descrizione e soluzione di problemi applicativi. [...] Sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati."

Mentre nelle Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali: "Lo studente apprenderà a analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche".

Anche le indagini OCSE PISA sottolineano l'importanza del concetto di funzione, strumento fondamentale per modellizzare situazioni reali e interpretare variabilità. Il tutto è sintetizzato nella definizione di *Literacy matematica* contenuta nel Framework PISA 2012: "La literacy matematica è la capacità di un individuo di *formulare, utilizzare e interpretare* la matematica in una varietà di contesti. Include ragionare matematicamente e usare i concetti, le procedure, i fatti e gli strumenti matematici per descrivere, spiegare e predire fenomeni. Essa aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo e a produrre giudizi ben fondati e decisioni necessarie a cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi."

Sulla base di queste indicazioni riteniamo importante che gli allievi lavorino in modo approfondito sulle funzioni e sulle loro rappresentazioni attraverso attività di esplorazione di problemi aperti in modo da acquisire una padronanza operativa sulle principali categorie di funzioni, con particolare riferimento, per il primo biennio, alle funzioni lineari e quadratiche.

A proposito di funzioni lineari vogliamo segnalare un interessante quesito INVALSI che è stato proposto nel 2011/2012:

---

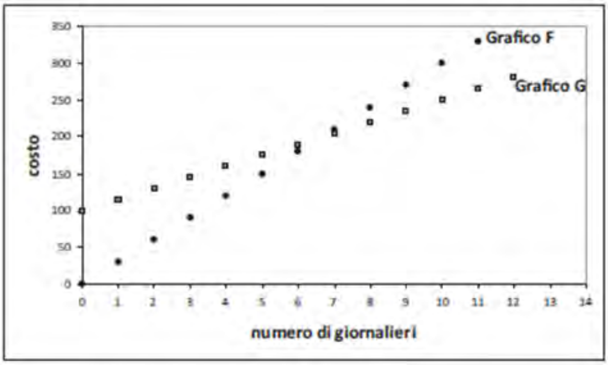
sperimentazioni). L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività."

D2 **Mario va in vacanza in una località turistica per usufruire degli impianti di risalita (seggiovia, funivia, …), può scegliere tra due offerte, A e B, entrambe valide per tutta la stagione invernale.**

Offerta A: costo iniziale fisso di 100 euro più 15 euro per ogni giornaliero (ossia per ogni giorno in cui si usano gli impianti di risalita).

Offerta B: 30 euro per ogni giornaliero, senza costo iniziale.

Osserva la figura.



a. **Quale, fra i grafici F e G, rappresenta l'offerta A?**

☐ Il grafico **F**.

☐ Il grafico **G**.

b. **Completa la seguente tabella, relativa all'offerta B.**

Numero di giorni in cui Mario usufruisce degli impianti di risalita	Costo in euro
1	30
2	……
3	…….

c. **Se Mario usa gli impianti di risalita solo per 5 giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere?**

Risposta: ………………..

d. **Scrivi due formule, una per l'offerta A e una per l'offerta B, che esprimano il costo *c* al variare del numero di giornalieri *g*.**

Offerta A: $c =$ ………………..

Offerta B: $c =$ ………………..

e. **Qual è il numero dei giornalieri per cui il costo dell'offerta B è una volta e mezza il costo dell'offerta A?**

Risposta: ………………..

I *Processi prevalenti*[3] alla base di questo quesito sono:

- Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra.

3 I Processi prevalenti dei singoli quesiti sono descritti nella Guida alla lettura delle singole prove prodotte da INVALSI.

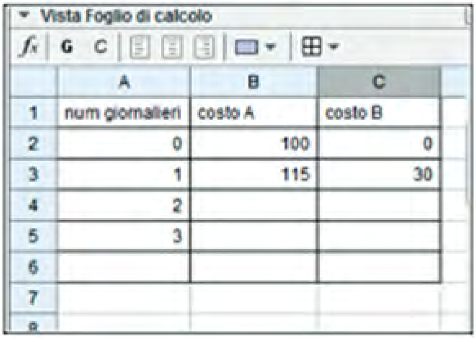
- Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure.
- Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale.

Osserviamo che il quesito consta di ben cinque domande: al problema, espresso in linguaggio naturale, seguono, nell'ordine:

- la richiesta di *lettura* della rappresentazione grafica delle variabilità
- l'interpretazione numerica della variabilità, con la costruzione di una tabella
- una domanda che richiede la lettura delle rappresentazioni precedenti e l'elaborazione di informazioni ricavate da esse
- il passaggio alla rappresentazione algebrica, richiesto solo dopo considerazioni numeriche e grafiche
- una domanda che può essere formalizzata algebricamente con un'equazione, ma a cui si può rispondere facendo riferimento alle rappresentazioni grafica e numerica, oltre che con gli usuali strumenti algebrici.

Coerentemente con gli intenti per i quali è stato costruito, il quesito mette in gioco abilità rappresentative e interpretative diverse, guida lo studente nel passaggio dal linguaggio naturale a quello dei grafici, delle tabelle numeriche sino al linguaggio algebrico, incrociando la lettura dei dati nelle varie forme rappresentative. È quindi un buon esempio di attività da proporre in laboratorio di matematica.

Con la formulazione del problema iniziale si può chiedere agli studenti di costruire in GeoGebra una tabella numerica dell'offerta A e dell'offerta B, considerando da zero a trenta giornalieri (Figura 4).



	A	B	C
1	num giornalieri	costo A	costo B
2	0	100	0
3	1	115	30
4	2		
5	3		
6			
7			

Figura 4

Si lasceranno liberi gli allievi di completare le colonne B e C nei modi che essi riterranno più opportuni: coloro che individueranno la dipendenza dei costi delle offerte A dal numero di giornalieri acquistati (scrivendo le due formule B2=100+15*A2 e C2=30*A2) avranno già compiuto un passo importante verso una rappresentazione algebrica delle funzioni nella forma y=f(x).

Tuttavia gli studenti potrebbero non individuare subito tali relazioni funzionali, e completare la tabella in altri modi, ad esempio in modo ricorsivo (B2=100, C2=0; B3=B2+15, C3=C2+30, ...); sarà la discussione successiva a portarli a considerare le formule funzionali richieste dalla domanda **d** del quesito INVALSI.

Sui dati della tabella numerica si possono già fare alcune osservazioni, che l'insegnante stimolerà con domande adeguate. Con GeoGebra è molto semplice, viene quasi naturale, affiancare alle tabelle delle due funzioni i grafici relativi, che danno una visione di insieme dell'andamento delle due funzioni (Figura 5).

L'immissione delle formule delle due funzioni lineari completerà la rappresentazione della situazione, evidenziando che non esiste un numero di giornalieri tale che il costo dell'offerta A sia uguale al costo dell'offerta B: i grafici delle due funzioni lineari si intersecano in un punto che ha ascissa non appartenente al dominio delle due funzioni, costituito dai soli numeri naturali.

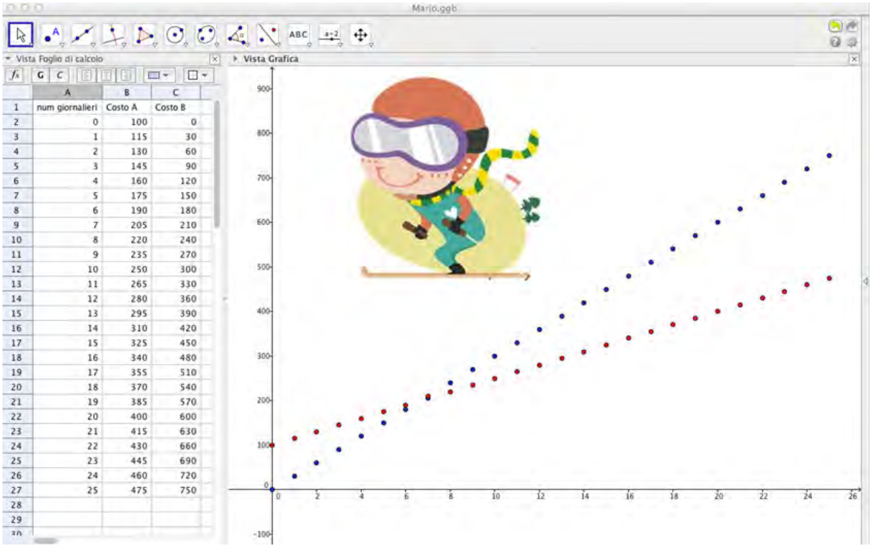


Figura 5

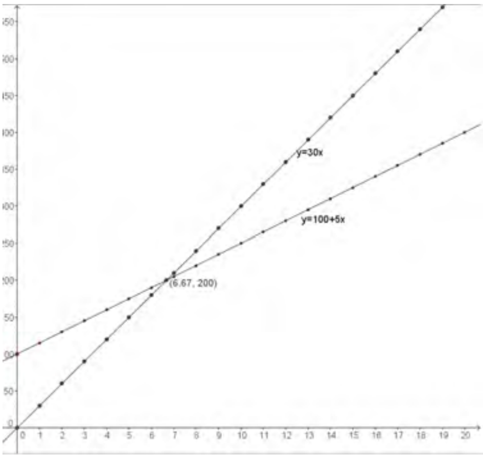


Figura 6

Un secondo quesito interessante da proporre come attività di laboratorio è il D10 del 2011/2012, rivolto, come il precedente, agli alunni della classe II della Scuola Secondaria di secondo grado. Attraverso tale quesito si può proporre agli allievi un'indagine su come cresce una funzione quadratica.

D10 **Con "spazio di frenata" intendiamo lo spazio che un'auto percorre dall'inizio della frenata fino a quando non si ferma.**

Una regola pratica per stimare lo spazio di frenata (in metri), nel caso in cui l'auto viaggi su una strada asfaltata, in buone condizioni e non bagnata, è la seguente:

"Eleva al quadrato il valore della velocità (in km/h) dell'auto all'inizio della frenata e dividi il risultato per 200"

a. **Completa la seguente tabella che fornisce lo spazio di frenata *s* (approssimato per eccesso al metro) per alcuni valori della velocità *v* quando la strada si trova nelle condizioni descritte sopra.**

v (km/h)	*s* (approssimato per eccesso al metro)
40	8
50	13
60	....
70	25
80	....
90	....
100	50

b. **Quale tra i seguenti grafici può rappresentare lo spazio di frenata *s* al variare della velocità *v*?**

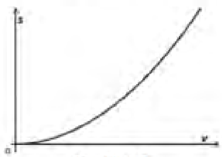


Grafico 1

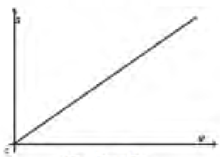


Grafico 2

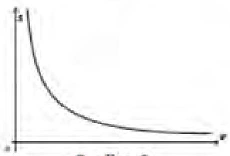


Grafico 3

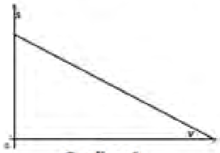


Grafico 4

A. ☐ Il grafico **1**.
B. ☐ Il grafico **2**.
C. ☐ Il grafico **3**.
D. ☐ Il grafico **4**.

Anche qui il *Processo prevalente* che INVALSI vuole testare attraverso questo quesito riguarda la padronanza delle diverse forme di rappresentazione di una funzione.

In un'attività di laboratorio si può partire dalla formalizzazione algebrica della funzione espressa in linguaggio verbale, chiedendo agli allievi di rappresentare graficamente con GeoGebra la funzione velocità/spazio di frenata. Si segnala agli studenti l'opportunità di restringere il Dominio della funzione ai soli numeri positivi, tramite il comando Se: y=Se[x>0, x^2/200]

Alla costruzione del grafico seguirà la sua lettura, stimolata dall'insegnante attraverso domande del tipo:

- Quale spazio di frenata corrisponde a una velocità di 50 km/h? E di 100 km/h?
- A quale velocità ha iniziato a frenare un'auto il cui spazio di frenata è di 25 m?

A questo punto si chiede agli allievi di riflettere sulla rapidità di crescita della funzione, costruendo una tabella numerica che riporti l'incremento dello spazio di frenata al crescere della velocità con un incremento costante di 10 km/h.

Grazie alle potenzialità di GeoGebra è facile costruire la tabella: fissati sul grafico due punti P e Q tali che x(Q)=10+x(P) , si *catturano* le coordinate dei due punti con lo strumento Registra su foglio di calcolo.

Dopo alcune considerazioni sui dati – osservando ad esempio che al raddoppiare della velocità lo spazio di frenata subisce un aumento che è più del doppio – si analizza come cresce la funzione: con il foglio di calcolo si costruiscono le differenze prime delle coordinate dei punti.

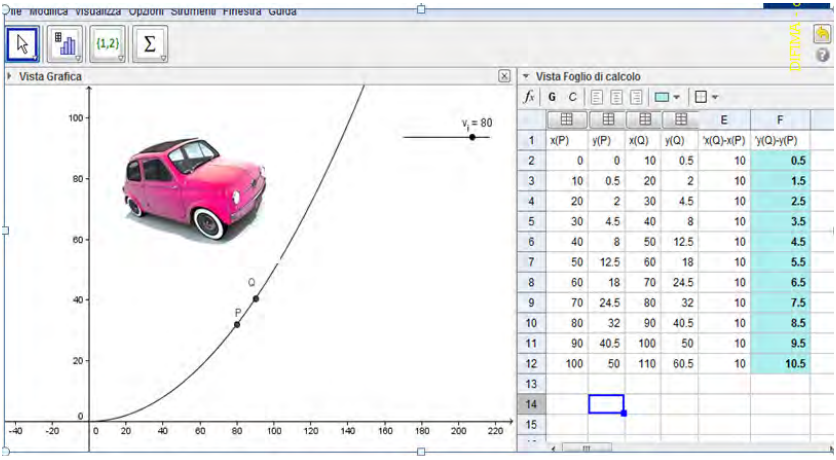


Figura 7

Si osserva che tali differenze prime non sono costanti, ma crescono in modo lineare, evidenziando in tal modo un'importante proprietà delle funzioni quadratiche.

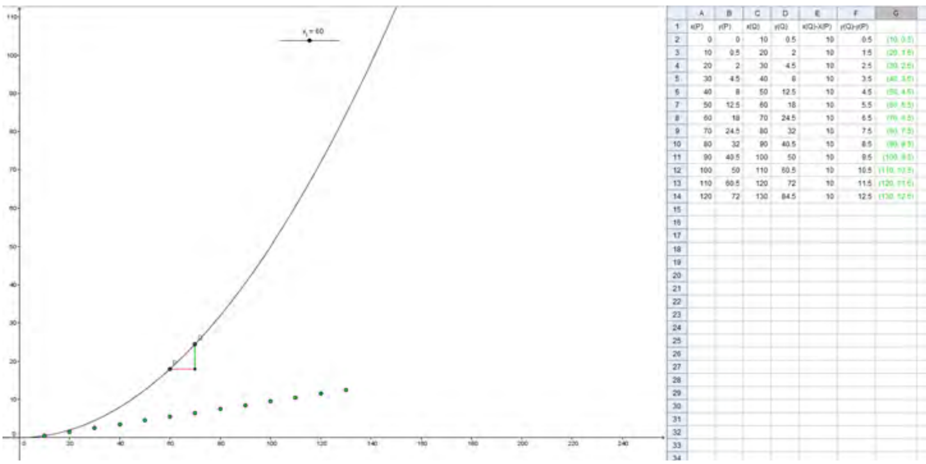


Figura 8

Bibliografia e sitografia

http://www.invalsi.it
- Guida alla lettura Prova di Matematica classe II scuola secondaria di secondo grado
- Prova di Matematica classe II secondaria di II grado, anno scolastico 2011/2012 e 2012/2013.

http://risorsedocentipon.indire.it - Attività di m@t.abel *Esplorazione delle figure piane: dalla congettura alla dimostrazione,* autori P. Nardini, S. Ruganti, L. Tomasi

Indicazioni nazionali e Linee guida: http://nuovilicei.indire.it/, http://nuovitecnici.indire.it/, http://nuoviprofessionali.indire.it/

Accomazzo, P., Beltramino, S.& Sargenti, A.; curatore O. Robutti (2013). *Esplorazioni matematiche con GeoGebra*. Milano: Ledizioni.

AA.VV., (2003). *Matematica 2003*. UMI, http://www.umi-ciim.it/in_italia--28.html

Bartolini Bussi, M. G.; Boni, M. & Ferri, M., (1995). *Costruzione sociale del sapere matematico: discussione matematica e rappresentazione dello spazio*. Modena: Centro Documentazione Educativa.

Scheerens, J., Mosca, S. & Bolletta, R.,(a cura di) (2011). *Valutare per gestire la scuola. Governance, leadership e qualità educativa*. Milano: Bruno Mondadori.

Villani, V. (2006). *Cominciamo dal punto*. Bologna: Pitagora Editrice.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica*. Milano: Springer.

.

MACCHINE MATEMATICHE, GEOGEBRA E ORIGAMI: UN LAVORO SULLE CONICHE

Valeria Andriano
Liceo Scientifico Galileo Ferraris – Torino; vandriano@alice.it

Premessa

Viene presentato un lavoro più volte sperimentato nelle classi terze di un liceo scientifico.

A partire dalla definizione delle coniche come luoghi geometrici si lavora con alcune machine matematiche che vengono utilizzate come tramite per la modellizzazione con GeoGebra. Si conclude ritornando dal software alla manipolazione collegandosi alla piegatura del foglio e alle proprietà ottiche delle coniche.

In questo lavoro illustro un'attività che svolgo abitualmente nelle classi terze liceo scientifico.

A partire dalla definizione delle coniche come luoghi geometrici si lavora con alcune machine matematiche che vengono utilizzate come tramite per la modellizzazione con GeoGebra.

Si conclude ritornando dal software alla manipolazione con gli origami.

Ritengo questo lavoro interessante dal punto di vista didattico per diverse ragioni. In primo luogo l'utilizzo contemporaneo di materiali concreti (macchine matematiche e origami) e nuove tecnologie (GeoGebra). Questi materiali vengono usati sia come strumenti di *scoperta* che come tramite per l'analisi e la *dimostrazione*. Inoltre si pone l'attenzione sullo studio delle coniche come luoghi geometrici nel piano indipendentemente dal riferimento cartesiano e si usa quindi il linguaggio della geometria sintetica. Si tratta pertanto di un argomento che si presta a fungere da raccordo tra biennio e triennio.

Per realizzare l'attività vengono utilizzate macchine matematiche che permettono di tracciare coniche. Si possono acquistare, oppure si possono costruire utilizzando squadre, righe, cordini, nastro adesivo. Per gli origami è meglio utilizzare carta da lucido, ma si può anche lavorare con normali fogli di carta. Infine è indispensabile avere a disposizione GeoGebra, possibilmente con un computer ogni due studenti. Per la discussione in classe è utile avere a disposizione una LIM.

I prerequisiti per affrontare il lavoro sono di due tipi. Da un lato è necessaria una certa capacità della classe di eseguire costruzioni con GeoGebra e di utilizzare il comando "Traccia attiva". Dal punto di vista delle conoscenze matematiche si utilizzano le conoscenze di geometria del biennio, il concetto di luogo geometrico in generale e la definizione della conica come luogo geometrico.

Svolgo questa attività per tre tipi di coniche: parabola, ellisse e iperbole, con la stessa sequenza. Nell'esempio che segue, mi riferisco alla parabola.

Il lavoro si articola in quattro fasi: congettura, dimostrazione, costruzione, giustificazione.

Di solito svolgo la prima attività direttamente in laboratorio di informatica, avendo già introdotto in classe la definizione della conica come luogo geometrico. L'attività è rivolta all'intero gruppo classe.

In laboratorio mostro la macchina matematica e traccio una parte della conica. Poi domando: "Che curva disegna questa macchina?". Gli studenti *congetturano* che la curva è una parabola. Allora domando: "Perché? Come faccio a essere sicura che è proprio una parabola e non un'altra curva?"

Questa seconda domanda dovrebbe far nascere negli studenti l'esigenza di *dimostrare* che la curva è proprio una parabola. A questo punto lascio agli studenti qualche minuto per analizzare la macchina (ne abbiamo due per ogni tipo). Èdi solito necessario stimolarli con alcune domande, del tipo: ”Osservate la macchina: cosa rimane fermo, cosa si muove? Staccate il cordino, cosa osservate?” Gli studenti, eventualmente a gruppi, dimostrano che la curva che la macchina disegna è necessariamente una parabola.

A questo punto si invitano gli studenti a *costruire* con GeoGebra, utilizzando il comando traccia attiva, una parabola dati un punto (il fuoco) e una retta (la direttrice). Questo lavoro viene svolto a gruppi di due e gli studenti risolvono il problema continuando a osservare e usare la macchina. Viene poi richiesto agli studenti di *giustificare* sul quaderno la costruzione effettuata. Per svolgere questa parte occorrono di solito due ore per la prima conica che si affronta, per le successive dovrebbe essere sufficiente un'ora. La dimostrazione finale viene lasciata per esercizio a casa.

La seconda attività viene proposta in classe e riguarda gli origami. Ogni studente ha a disposizione un foglio e si insegna a tutti a piegarlo in modo da ottenere una parabola. Poi si chiede: “Che curva si ottiene? Perché?”. Di nuovo si invitano gli studenti a *congetturare* e poi *dimostrare* che la curva che si ottiene è proprio una parabola. Si confronta poi questo metodo con la macchina. Per concludere la lezione si riprende la costruzione fatta con GeoGebra e si osserva che il principio alla base delle tre attività è il medesimo. In quest'ultima fase è utile avere a disposizione una LIM.

Ripeto lo stesso schema di lavoro anche per ellisse e iperbole in altri periodi dell'anno.

Il lavoro offre diversi spunti di approfondimento:

- La tangente. Usando il comando Traccia attiva, la retta che permette di disegnare il punto è la tangente alla conica. Si chiede agli studenti di dimostrare che è proprio la tangente. Riferendosi a un opportuno sistema di assi cartesiani si può chiedere di trovare l'equazione della tangente alla conica (è interessante per la parabola perché i calcoli sono semplici, per le altre coniche sono complessi). Questa parte offre la possibilità di introdurre il problema della tangente già in terza, e fornisce un metodo per la determinazione dell'equazione alternativo a quello di uso del discriminante.
- Proprietà ottiche delle coniche. È un interessante collegamento con la fisica. Una volta dimostrato che la retta è la tangente, si possono dimostrare facilmente le proprietà ottiche delle coniche.

Bibliografia

Lakatos, I. (1979). *Dimostrazioni e confutazioni*. Milano: Feltrinelli.
Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
www.macchinematematiche.org
www.mmlab.unimore.it

L'ESPERIENZA DELLA QUALITY CLASS COME PERCORSO DI SVILUPPO PROFESSIONALE NELLA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

Viviana Belletti, Elisa Gentile, Monica Mattei, Renzo Sciascia
CIFIS Piemonte - TFA ordinario 2012

"Il pensare a un problema, il porsi delle questioni e dei perché è ancor più difficile che saperli risolvere, ed è più bello. È in questo che consiste la matematica."

Emma Castelnuovo, *La via della matematica*

Premessa

L'articolo descrive il workshop presentato nel corso della Quality Class 2013 organizzata in occasione della CIEAEM 65, i contenuti e le modalità di presentazione ai colleghi insegnanti in formazione, le attività svolte, sia dal punto di vista dello studente sia da quello dell'insegnante, alcune riflessioni di tipo curricolare, metodologico, metacognitivo e relazionale.

Finalità del workshop è stata la costruzione di significati matematici legati alla modellizzazione di problemi di massimo e di minimo mediante le rappresentazioni multiple che le tecnologie consentono di affiancare alla manipolazione dei materiali, attraverso un percorso di esplorazione e congetture ispirato ai lavori di Emma Castelnuovo, per promuovere l'insegnamento della geometria attraverso la realtà e con problemi concreti.

La struttura del workshop si ispira alle modalità didattiche della professoressa Emma Castelnuovo la quale, com'è ben noto, ha dato importanti e fondamentali contributi alla didattica della matematica. Castelnuovo, inoltre, è stata membro della CIEAEM, la Commissione per lo studio e il miglioramento dell'insegnamento delle Matematiche che indaga sulle effettive condizioni e le possibilità di sviluppo per la didattica delle Matematiche, al fine di perfezionare la qualità dell'insegnamento della disciplina.

La Quality Class è un programma di scambio per futuri insegnanti provenienti da nazioni diverse, organizzato dal professor Lambrecht Spijkerboer (Paesi Bassi), la cui durata è stata di dieci giorni:

- i primi cinque sono stati dedicati all'esposizione a gruppi di un workshop, della durata di tre ore, con tema metodologie e materiali a scelta; al termine di ogni sessione vi è stato un momento di riflessione e feedback su vari aspetti didattici, quali il linguaggio non verbale, le modalità di lavoro e la progettazione delle attività;
- gli ultimi cinque hanno visto la partecipazione a conferenze, working-groups, workshops, tavole rotonde con ricercatori e professori universitari provenienti da differenti Paesi, nell'ambito della CIEAEM 65.

L'esperienza della Quality Class si è rivelata un ottimo strumento di miglioramento professionale sotto differenti aspetti: la preparazione e la collaborazione durante il workshop, l'interazione con insegnanti in formazione provenienti da Paesi diversi, lo scambio e il confronto rispetto alle pratiche didattiche in uso in altri Paesi, il feedback ottenuto in merito alla realizzazione del workshop stesso, il ponte tra ricerca e insegnamento in classe.

Il progetto

L'argomento del workshop che abbiamo progettato riguarda i problemi degli isoperimetri e più in generale i problemi di massimo e minimo. La scelta è stata dettata, da un lato, dalla ricerca di problemi che ben si prestassero alla risoluzione attraverso la manipolazione di strumenti, con metodi numerici, grafici e analitici, e dall'altro dal fatto che tali competenze compaiono in molte prove di rilevamento delle competenze e abilità (si pensi al problema del Carpentiere di PISA 2003).

Il workshop è stato strutturato con un andamento a spirale, offrendo la possibilità di approfondire gli argomenti a seconda degli ordini scolastici, aumentando sempre più la complessità e i contenuti matematici coinvolti, in un percorso dalla manipolazione all'astrazione.

Siamo partiti da una collocazione nella scuola secondaria di primo grado, per arrivare al primo biennio della secondaria di secondo grado, offrendo spunti per la trattazione anche nel triennio (relativamente alla parte sul calcolo differenziale). La metodologia delle *level-raising questions* consente infatti di riproporre situazioni simili in contesti via via di livello crescente, adattando la complessità delle richieste al gruppo classe con cui si sta lavorando.

La scelta di utilizzare materiali poveri per favorire l'aspetto di esplorazione del problema attraverso la manipolazione è stata dettata anche dall'esigenza di creare un percorso che si potesse sviluppare in maniera verticale lungo tutto il curricolo scolastico e potesse essere soggetto all'adattamento sulla base delle necessità dei docenti. Si segnala infatti che la prima parte dell'attività può essere presentata anche in una scuola primaria, soffermandosi sugli aspetti più percettivi e accennando solamente la parte di astrazione.

In quest'ottica abbiamo scelto di utilizzare il software di geometria dinamica GeoGebra per rappresentare attraverso il mezzo tecnologico la manipolazione concreta degli artefatti, come supporto alla fase di concettualizzazione e astrazione.

Il percorso seguito afferisce ai nuclei tematici di spazio e figure, relazioni e funzioni, dati e previsioni, come dettagliati nelle Indicazioni Nazionali e nei documenti UMI, ed è stato pensato per essere svolto mediante il lavoro a gruppi seguendo schede di lavoro semi-strutturate, oppure attraverso la risoluzione a coppie nella fase di utilizzo di GeoGebra; al termine è prevista la discussione matematica collettiva per l'istituzionalizzazione delle conoscenze.

Siccome l'attività è stata progettata per essere presentata a un gruppo di colleghi futuri insegnanti, abbiamo declinato gli obiettivi sotto differenti punti di vista: da un lato quelli di apprendimento degli studenti, dall'altro le finalità per gli insegnanti e per i ricercatori.

Tra gli obiettivi didattici possiamo ritrovare: modellizzare una situazione mediante una funzione, comprendere il significato di massimo e minimo di una funzione e saperli ricercare con metodi grafici, analitici e numerici, comprendere l'opportunità di utilizzare differenti registri e valutare criticamente quando sia necessario impiegare i "potenti metodi" del calcolo differenziale (in particolare interrogarsi sull'uso critico della derivata), comprendere le relazioni tra le variazioni di aree e perimetri, utilizzare l'esplorazione mediante le tecnologie come "ponte" tra la manipolazione concreta di oggetti e la fase di concettualizzazione.

Per gli insegnanti-ricercatori, gli obiettivi sottesi sono: l'uso delle tecnologie come supporto alla fase di concettualizzazione e come trasposizione della manipolazione concreta di artefatti, la ricchezza delle rappresentazioni possibili con le tecnologie e in particolare la molteplicità di registri utilizzabili con GeoGebra, la presa di consapevolezza delle misconcezioni riguardanti la variazione di aree e perimetri e le loro relazioni, l'analisi dell'opportunità di utilizzare i metodi del calcolo differenziale nella risoluzione dei problemi, identificando lo strumento derivata come mezzo per la risoluzione di problemi non risolubili con altre metodologie (grafico, numerico, analitico), stimolando l'uso critico degli strumenti a disposizione dello studente.

Parte prima: il problema dei rettangoli isoperimetrici

La prima attività ideata si riferisce a un problema "classico", quello dei rettangoli isoperimetrici.

L'approccio che abbiamo voluto utilizzare si ispira, come già detto, alla didattica di Emma Castelnuovo e parte proprio dalla manipolazione di un pezzetto di cordino legato alle estremità, che costituisce il rettangolo di cui si fa variare l'area muovendo le mani (Figura 1).

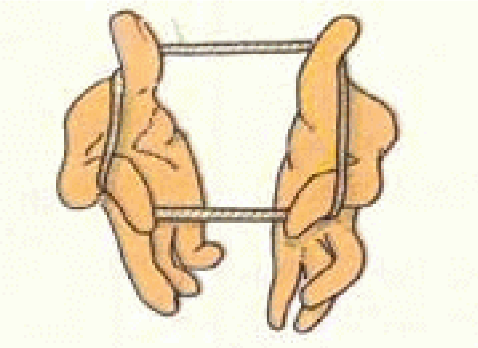


Figura 1

Attraverso il lavoro a gruppi si porta lo studente a comprendere che la grandezza che si mantiene costante è il perimetro (la lunghezza fissata del cordino), mentre a variare è l'area. Si stimola poi la produzione di congetture sulla costanza o meno dell'area e si riflette sui casi limite, quelli in cui una delle dimensioni del rettangolo tende a zero, evidenziando come anche l'area in quel caso tenda a zero. Si chiede poi agli allievi di congetturare quale sia il rettangolo con area massima. Attraverso l'uso di GeoGebra gli allievi costruiscono un modello dinamico di rettangolo con perimetro fissato e studiano la variazione della sua area.

Utilizzando lo strumento *traccia attiva* di GeoGebra lo studente costruisce la parabola come curva che esprime il legame tra la lunghezza di un lato del rettangolo di perimetro fissato e la sua area.

La modellizzazione con il software consente l'accostamento di differenti registri: grafico, numerico e algebrico (Figura 2). La dinamicità del modello costruito permette allo studente di collegare tra loro i vari approcci: si costruisce il significato di massimo della funzione sia da un punto di vista grafico sia da quello numerico, associandolo alla corrispondente situazione tra i rettangoli (il rettangolo con area massima è il quadrato).

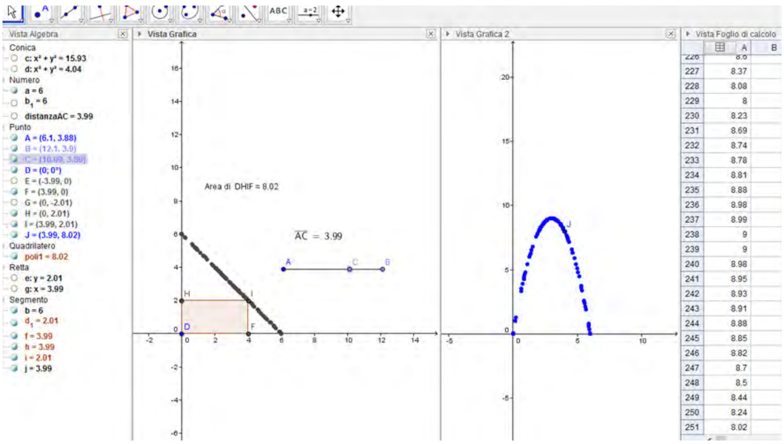


Figura 2

GeoGebra consente allo studente di legare la conformazione concreta del rettangolo con il corrispondente punto sulla parabola (legame lato-area) e il relativo valore numerico che si ricava dalla vista “foglio di calcolo”. Il passaggio all’astrazione inizia così gradualmente con la richiesta di riconoscere la curva disegnata con la traccia di GeoGebra, successivamente si chiede all’allievo di esprimere mediante una relazione algebrica tale legame.

La costruzione della parabola attraverso le due modalità (algebrica e grafica) consente allo studente di identificare il massimo di tale curva, fornendo un supporto di tipo analitico-simbolico alla congettura precedentemente fatta basandosi unicamente sulla manipolazione del cordino.

I successivi passaggi verso la modellizzazione possono riguardare la ricerca del massimo utilizzando metodologie algebriche, evidenziando come. il massimo della funzione corrisponda all’ordinata del vertice della parabola se la concavità è verso il basso.

Tale attività a nostro avviso può essere utilizzata sia per introdurre la parabola (principalmente nelle scuole secondarie di primo grado) sia come attività di consolidamento per ritrovare applicazioni delle coniche alla modellizzazione di problemi.

La dipendenza lineare tra i lati dei rettangoli isoperimetrici

Il problema dei rettangoli isoperimetrici può inoltre essere utilizzato per introdurre la dipendenza lineare tra i lati del rettangolo.

Viene chiesto agli studenti di costruire, con il cartoncino, alcuni rettangoli aventi tutti lo stesso perimetro: essi andranno disposti “a libretto” sugli assi cartesiani che vengono forniti. Si chiede poi di segnare sul piano cartesiano i punti corrispondenti al vertice libero dei rettangoli e di riflettere sul significato di tali punti. Attraverso questa operazione lo studente vede sul piano la traccia di un punto le cui coordinate rappresentano le due dimensioni del rettangolo, di cui si conosce il perimetro costante.

Risulta allora immediato scrivere dalla formula del perimetro l’equazione della retta $x + y = p$ dove p è costante. Si riscontra dunque una dipendenza lineare tra i lati del rettangolo.

Questa attività può essere utilizzata inoltre per riflettere sulla pendenza di tale retta e successivamente introdurre il concetto di proporzionalità diretta. Ciò offre un ulteriore spunto a proposito della modellizzazione di problemi mediante curve e coniche.

Figura 3

Parte seconda: il problema dei rettangoli equivalenti

La seconda parte dell’attività proposta è focalizzata sull’esplorazione dei rettangoli equivalenti.

Anche in questo caso il punto di partenza è stato un approccio di tipo esperienziale, in accordo con le Indicazioni Nazionali, per poi arrivare a una generalizzazione e formalizzazione delle scoperte fatte con l’uso di GeoGebra.

Con l'aiuto di una scheda, si è partiti riflettendo sui seguenti tre rettangoli (Figura 4). Con facilità si può osservare che hanno la stessa area; cosa si può dire invece dei loro perimetri?

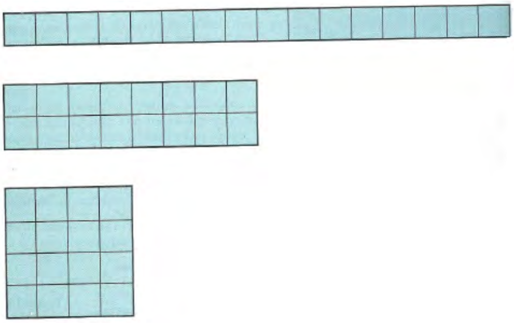


Figura 4

La prima osservazione che si può fare è che dove i quadratini sono più "raggruppati", come nella seconda e terza figura, il perimetro sarà minore, dal momento che i lati di alcuni quadratini, che prima cooperavano a costituire il perimetro, ora sono interni e quindi non fanno più parte del contorno. Il calcolo esplicito del perimetro conferma l'osservazione.

Si sono quindi distribuiti, a ciascun gruppo, 16 quadratini di cartoncino chiedendo di costruire il quadrilatero con perimetro minimo che, come è noto, è il quadrato.

A questa fase in cui si è fatta esperienza con l'utilizzo di materiali poveri, si può pensare di far seguire una prima generalizzazione con l'uso del Foglio di calcolo. È sufficiente costruire una tabella come la seguente (Figura 5) dove, fissata l'area del rettangolo, si fa variare con un passo discreto la misura della base (e quindi, di conseguenza, quella dell'altezza) per ricavare il corrispondente perimetro (area in cm^2 e lunghezze in cm).

area	36,00	
base	altezza	perimetro
0,1	360,0	720,2
0,2	180,0	360,4
...	...	...
6,0	6,0	24,0
…	…	…
12,0	3,0	30,0

Figura 5

In questo modo, fissando arbitrariamente l'area, si può constatare che si ha il perimetro minimo quando base e altezza sono uguali.

L'attività proposta può essere implementata e utilizzata come spunto per introdurre, nella scuola secondaria di primo grado, il concetto di proporzionalità inversa arrivando all'equazione dell'iperbole, curva che rappresenta tale proporzionalità. Viene infatti chiesto di ritagliare dei rettangoli equivalenti e di disporli a libro su un piano cartesiano. Congiungendo con un pennarello i vertici liberi di ciascun rettangolo si ottiene la curva in Figura 6a.

L'utilizzo di un software di Geometria dinamica, quale GeoGebra, permette di riprodurre, generalizzando, la situazione costruita con i cartoncini. In particolare, la dinamicità di tale software consente, attraverso l'utilizzo del comando *traccia attiva*, il passaggio dalla modellizzazione discreta a quella continua, permettendo l'introduzione della funzione che rappresenta la proporzionalità inversa (Figura 6 b).

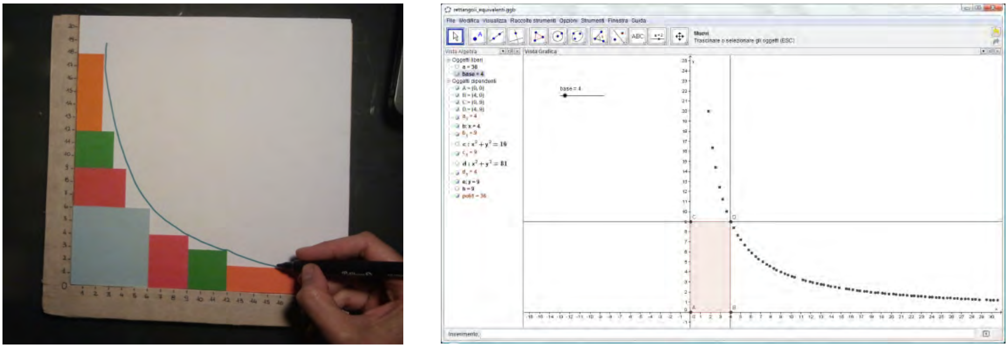


Figura 6

Parte terza: problemi di massimo e minimo

La terza sezione del workshop è dedicata all'esplorazione delle variazioni di aree e perimetri dei triangoli in varie configurazioni. Le attività di seguito descritte possono essere proposte in una classe seconda del primo biennio, sia nel Liceo Scientifico sia in un Istituto Tecnico, poiché sono richieste conoscenze approfondite di geometria e algebra.

Attività 1

Il problema riguarda la variazione del perimetro per i triangoli con area fissata. Mentre nelle attività precedenti le esplorazioni erano guidate, in quest'occasione lo studente è maggiormente libero nella fase di congettura e si trova di fronte a un problema aperto.

Considera i triangoli aventi area A: è possibile limitare il loro perimetro tra due valori reali?

[Per esempio puoi trovare due numeri α *e* β *appartenenti a R e tali che* $\alpha < P < \beta$*?]*

Fai congetture e motiva le tue risposte usando carta e penna oppure mediante GeoGebra.

Rispetto agli esercizi precedenti la risoluzione può avvenire solo attraverso metodi euristici e basati sulla geometria: il suggerimento focalizza l'attenzione dello studente nella ricerca di eventuali perimetri, uno minimo e l'altro massimo, confrontando tutte le situazioni possibili. Le configurazioni si possono ottenere in una visione olistica considerando basi e altezze fissate, immaginando un vertice libero di muoversi su una retta parallela alla base, come in Figura 7.

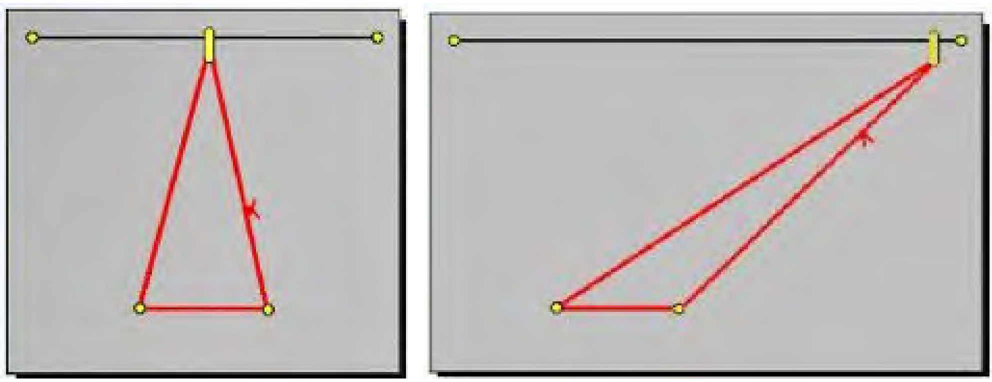


Figura 7

L'analisi di tutte le casistiche può essere svolta sia mediante materiali poveri, per esempio uno spago oppure plurimi disegni su un foglio, sia attraverso le figure dinamiche di GeoGebra e la visualizzazione della misurazione di perimetri e aree.

Attività 2

La seconda attività consente di precisare quanto esplorato nell'esercizio precedente ponendo l'attenzione sui casi speciali individuati attraverso le congetture.

Cosa possiamo concludere sui valori dei perimetri trovati nei casi dell'esercizio 1?

Hai trovato un triangolo specifico per un caso particolare?

Le domande consentono di avviare una discussione matematica che porterà alla sistematizzazione dei concetti: il triangolo isoscele è quello avente perimetro minimo.

Attività 3

Per il terzo compito si è dapprima introdotta la formula di Erone in più varianti. La domanda per iniziare la nuova esplorazione è anche questa volta posta in modo aperto:

Tra tutti i triangoli aventi il perimetro fissato, quale ha l'area massima?

Fai congetture e motiva le tue risposte usando carta e penna oppure mediante GeoGebra.

La soluzione si ha con il triangolo equilatero: la dimostrazione fa uso della formula precedentemente richiamata e della disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica.

Attività 4

Sulla falsariga dell'attività precedente si vuole analizzare cosa accade se, oltre al perimetro del triangolo, è fissata anche la sua base, in altre parole si richiede:

Tra tutti i triangoli isoperimetrici e aventi la stessa base, quale ha l'area massima? Fai congetture e motiva le tue risposte usando carta e penna oppure mediante GeoGebra.

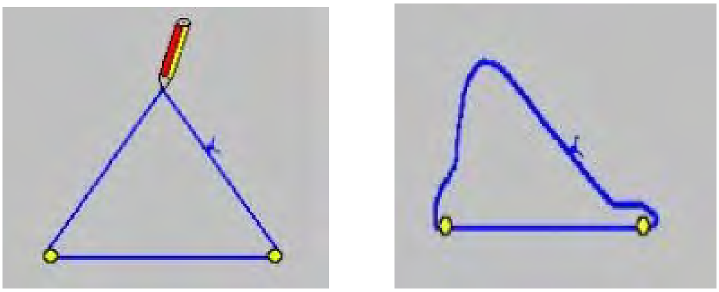


Figura 8

Anche senza la conoscenza della formula dell'ellisse o della sua definizione come luogo geometrico, uno studente può trovare come l'area del triangolo isoscele sia quella di valore massimo. Il problema si presta a un approfondimento attraverso la geometria analitica.

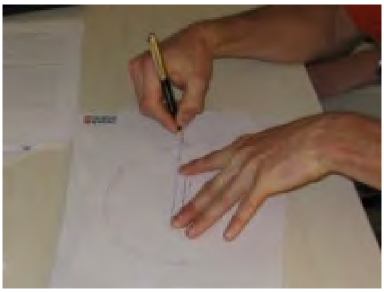


Figura 9

Attività 5

La domanda conclusiva sui triangoli isoperimetrici oppure quelli aventi la stessa area è stata:

Qual è in generale il legame tra il perimetro e l'area di un triangolo?

Gli allievi possono dunque giustificare come un triangolo avente perimetro costante possa raggiungere sì un valore minimo per l'area, ma quest'ultima non possa crescere a piacere; infine, per i triangoli equivalenti il perimetro può assumere valori sempre più grandi, ma non viceversa.

Parte quarta: approfondimenti sul tema massimi e minimi

L'ultima sezione del workshop prevede la risoluzione di due problemi di massimo e minimo, il primo strettamente collegato all'utilizzo dello strumento derivata, il secondo di più ampio spettro di modelli risolutivi. Dal momento che si richiede la conoscenza dei metodi di calcolo delle derivate di funzioni, quest'ultima sezione dell'attività è prevista per una quinta classe del Liceo Scientifico o per una quarta in un Istituto Tecnico.

Attività 1

Il testo del primo esercizio è stato tratto, e opportunamente adattato, da un problema della maturità scientifica dell'anno 2002. Tale problema è stato scelto con criterio come esercizio conclusivo del percorso di formazione sull'argomento massimi e minimi: nelle attività precedenti gli studenti hanno avuto modo di risolvere differenti problemi con l'utilizzo di materiali poveri, di grafici e di software di geometria dinamica; ora si presenta loro un ennesimo metodo di risoluzione, invitandoli a riflettere su come alcuni problemi non siano risolvibili, o non lo siano in maniera efficiente, attraverso un approccio soltanto numerico o con modelli di tipo algebrico-geometrico. Ecco dunque che si ha l'opportunità di presentare la derivata come ulteriore potente strumento di risoluzione, laddove il quadro del problema sia sostanzialmente analitico.

Il testo del problema viene riportato di seguito:

Considera le seguenti lunghezze: $a + 2x \quad a - x \quad 2a - x$ *dove* a *è un parametro reale positivo e* x *è una variabile reale positiva.*

Per quali valori di x *tali lunghezze sono quelle di un triangolo non degenere?*

Trova, se possibile, il triangolo di area massima avente tali lunghezze come lati. Trova, se possibile, il triangolo avente area minima che ha tali lunghezze come lati.

La presenza di due termini letterali, di cui uno variabile e l'altro parametrico, presenta, rispetto agli esercizi precedenti, una difficoltà maggiore nella risoluzione attraverso metodi numerici e geometrici: il suggerimento di utilizzare la derivata proverrà sicuramente dagli studenti stessi senza bisogno di interventi da parte dell'insegnante. L'espressione dell'area tramite la formula di Erone permetterà loro di manipolare una funzione nella variabile x nella cui formulazione la difficoltà della rappresentazione del parametro a scompare; un semplice calcolo della derivata permetterà loro di rispondere facilmente e in maniera rapida alle domande proposte. Ecco che lo studio del concetto di derivata assume un significato applicativo, motivando agli studenti la richiesta dell'insegnante di confrontarsi con un nuovo metodo risolutivo di un argomento già trattato e variamente risolto.

Il problema permette inoltre un'analisi approfondita di differenti significati di oggetti e risultati legati al calcolo della derivata: a titolo di esempio, è possibile interpretare con gli studenti entrambi i risultati che si ottengono dal porre la derivata nulla e richiedere per quale motivo solo uno di essi sia accettabile; si può approfondire chiedendo loro se esistano condizioni per cui entrambi i risultati siano accettabili e quali siano. Infine, ci si può soffermare sul significato analitico, grafico e concettuale dell'impossibilità di trovare il triangolo di area minima.

Attività 2

L'ultima attività proposta prevede la presentazione di un problema verosimile dall'ampia gamma di metodi risolutivi, che spaziano da quello geometrico a quello analitico a quello tecnologico–numerico. Le motivazioni alla base della proposta sono due: la prima riguarda la volontà/necessità di presentare agli studenti problemi in cui ciò che hanno appreso in teoria possa avere applicazioni , al fine di giustificare lo studio di determinati concetti e dar loro un significato non solamente a livello astratto. La seconda è quella di sviluppare negli studenti capacità di tipo critico: i problemi di indirizzo matematico non sono catalogabili per metodi risolutivi, non si può cioè affermare che a ogni problema possa essere associato uno e un solo metodo risolutivo. Spetta allo studente stesso essere in grado di analizzare il tema assegnato, decidere se un metodo sia preferibile rispetto a un altro , essendo cosciente delle motivazioni che sono alla base di tale decisione, e applicarlo correttamente; egli deve inoltre essere in grado, se il metodo scelto si rivelasse poco efficiente, di cambiarlo o modificarlo opportunamente.

Il problema seguente mette a confronto tre differenti metodi risolutivi , al fine di mostrare come siano possibili varie scelte; agli studenti verrà in ultimo richiesto di commentare quale, secondo loro, sia la scelta di metodo più appropriata, in quali condizioni e perché. Risulterebbe interessante confrontare a livello di classe, attraverso la discussione matematica, le risposte dei vari studenti.

Il testo del problema viene riportato di seguito:

Un'azienda che produce bibite in lattine sta tentando di ridurre i costi di produzione limitando l'uso di metallo nella produzione delle lattine cilindriche. Naturalmente, la quantità di bibita che esse contengono deve rimanere invariata! Qual è allora il rapporto tra le due dimensioni del cilindro affinché la superficie di metallo sia minima, mantenendo costante il volume?

Le schede guidate che vengono proposte agli studenti prevedono tre tipi di risoluzione: il metodo numerico attraverso l'utilizzo del foglio di calcolo (Figura 10 *a*), il metodo grafico (Figura 10 *b*) e l'utilizzo delle derivate.

Vista Foglio di calcolo

	A	B	C	D	E
1	Volume (dm3)	Raggio (dm)	Altezza (dm)	Superficie (dm2)	Rapporto r/h
2	1	0.1	31.83099	20.06283	0.00314
3		0.12	22.10485	16.75714	0.00543
4		0.14	16.2403	14.40886	0.00862
5		0.16	12.43398	12.66085	0.01287
6		0.18	9.82438	11.31469	0.01832
7		0.2	7.95775	10.25133	0.02513
8		0.22	6.57665	9.39502	0.03345
9		0.24	5.52621	8.69524	0.04343
10		0.26	4.70873	8.11705	0.05522
11		0.28	4.06008	7.63546	0.06896
12		0.3	3.53678	7.23215	0.08482
13		0.32	3.10849	6.8934	0.10294
14		0.34	2.75355	6.60869	0.12348
15		0.36	2.45609	6.36986	0.14657
16		0.38	2.20436	6.17045	0.17239

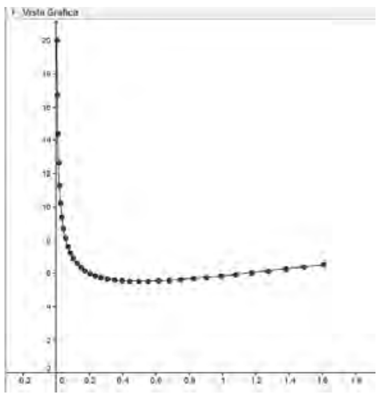


Figura 10

Si richiede agli studenti di confrontare i tre metodi, sottolineandone pregi e/o difetti e di analizzare eventuali differenze riscontrate nei risultati. Tale analisi permetterà agli studenti di realizzare come non esista un metodo unico o "giusto", ma solo metodi più o meno adatti a soddisfare determinati scopi e metodi più o meno efficienti.

Alcune riflessioni conclusive riguardanti il workshop

In conclusione presentiamo alcune riflessioni articolate in cinque punti e le proponiamo ai lettori come suggerimenti per ulteriori approfondimenti e/o attività mirate.

- **Misconcetti**: nel corso dello sviluppo e dell'attuazione del workshop è stato possibile rendersi conto di come troppo frequentemente gli studenti posseggano idee confuse sui concetti di area e perimetro, relativamente alla loro variazione e alle relazioni che possono esistere tra di essi. Spesso infatti gli allievi reputano i termini *isoperimetrico* ed *equivalente* l'uno sostituibile all'altro, oppure ritengono che a un aumento o una diminuzione di perimetro corrisponda sempre, rispettivamente, un incremento o una riduzione dell'area. Pertanto l'attività proposta può aiutare gli studenti a superare questi misconcetti, poiché in più occasioni si mostra come sia possibile variare l'area o il perimetro mantenendo l'altra grandezza costante. Ulteriori approfondimenti si possono svolgere presentando o invogliando gli studenti a trovare personalmente esempi in cui all'aumento di una grandezza corrisponda una diminuzione dell'altra. A tal proposito nel corso del workshop abbiamo presentato brevemente l'articolo di D'Amore & Fandiño Pinilla (2005).
- **Apprendimento percettivo-motorio**: la manipolazione di artefatti nel corso dell'attività stimola negli studenti un apprendimento differente da quello tradizionale fornito dalla lezione frontale; gli allievi possono studiare in maniera personale oggetti concreti, osservandoli da differenti punti di vista e approfondendo caratteristiche che facilmente verrebbero ignorate da un'analisi puramente astratta.
- **Molteplicità della rappresentazione**: l'utilizzo di GeoGebra permette di presentare differenti rappresentazioni del medesimo oggetto o problema (graficamente, analiticamente, algebricamente, …). Gli studenti possono confrontarsi dunque con vari modelli, comprendendone i punti di forza o di debolezza e sviluppando criticamente la capacità di scegliere la migliore rappresentazione di un determinato problema. In questo settore, in particolare, la progettazione da parte dell'insegnante è quanto mai fondamentale affinché il passaggio tra le varie rappresentazioni produca un senso logico e non si limiti a un mero elenco di approcci tra cui lo studente può scegliere in maniera acritica.
- **Molteplicità del metodo risolutivo**: in accordo con le Indicazioni Nazionali, alcuni problemi possono essere risolti seguendo differenti metodi, in modo che gli studenti si abituino a prendere in considerazione uno spettro di metodologie tra cui siano in grado di scegliere autonomamente quella che permette di trovare la soluzione in maniera più efficace ed efficiente.
- **Percorso a spirale**: il workshop si articola in differenti attività, in un crescendo di difficoltà e di prerequisiti necessari. Esso può essere presentato in classi che vanno dal secondo anno della scuola secondaria di primo grado fino alla quinta della scuola secondaria di secondo grado. In tal modo si crea un continuum didattico tra i due differenti gradi scolastici, presentando la disciplina non a compartimenti isolati, ma in continuità di apprendimento nei vari stadi di maturazione scolastica.

Valore aggiunto della Quality Class

L'esperienza della Quality Class è stata una importante tappa della nostra formazione come insegnanti: ci ha permesso di lavorare a stretto contatto con altri giovani insegnanti, o futuri insegnanti, provenienti dalla Cecoslovacchia, dall'Olanda e dalla Polonia. È stato possibile conoscere sistemi scolastici diversi da quello italiano e soprattutto incontrare metodologie diverse di insegnamento le quali hanno arricchito il nostro bagaglio di conoscenze educative.

Al termine del workshop è iniziata una sessione di feedback in cui sono stati analizzati pregi e difetti dello stesso, inoltre abbiamo ricevuto utili consigli per la gestione di futuri laboratori. In particolare gli aspetti sui quali ci si è soffermati sono così riassumibili:

- *Progettazione e organizzazione delle attività*: è fondamentale pensare e modellare il laboratorio contestualizzandolo e adattandolo alla classe in cui verrà proposto.
- *Interazione con i gruppi di lavoro e con la classe intera*: è consigliabile dialogare con i

singoli gruppi mettendosi fisicamente alla loro altezza, in modo da trasmettere l'idea che si è parte del loro lavoro e non osservatori esterni.

- *Linguaggio non verbale*: è importante considerare la gestualità, per esempio, guardando tutta la classe mentre si parla oppure annuendo di fronte a uno studente che espone una osservazione corretta, in modo che dal nostro consenso sia stimolato nella ricerca.
- *Gestione della discussione matematica*: bisogna dare la possibilità agli studenti di esporre le loro congetture, anche se non formulate in maniera rigorosa, astenendosi dalla tentazione di interromperli per correggerli e completare il discorso.
- *Metacognizione sulla pratica didattica*: è essenziale per qualsiasi docente riflettere sul lavoro svolto, perché solo l'autoanalisi sulle pratiche didattiche può portare a migliorare la nostra capacità di insegnamento.

Bibliografia

Castelnuovo, E. (1963). *Didattica della matematica*. Firenze: La Nuova Italia.
Castelnuovo, E. (1972). *Documenti di un'esposizione matematica*. Torino: Boringhieri.
Castelnuovo, E. (1977). *La via della matematica – I numeri*. Firenze: La Nuova Italia.
Castelnuovo, E. (1979). *La matematica – La geometria*. Firenze: La Nuova Italia.
Castelnuovo, E. (2005). *La Matematica – Figure piane*. Milano: La Nuova Italia.
D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, 2, 165-190. Bologna.
OECD, (2004). *Learning for tomorrow's world. First results from PISA 2003*. Paris, OECD.

Sitografia

http://alabis.wordpress.com/2011/04/20/il-problema-isoperimetrico-da-didone-a-emma-castelnuovo/
http://web.math.unifi.it/pls/laboratori/minimo_massimo/soluzioni2.pdf
http://www.dm.unipi.it/~ghimenti/

COSTRUIAMO LA GEOMETRIA INSIEME AI BAMBINI

Maria Cantoni, Donatella Merlo
La Casa degli Insegnanti

> "… l'aritmetica ed anche l'algebra, sono in quelle matematiche antichissime molto sviluppate. La geometria invece è piuttosto arretrata; va osservato che gli enti geometrici restano, per così dire, ancorati, attaccati alla materia. Così, ad esempio, si parlerà di una tavola rettangolare anziché di un rettangolo, di una vasca circolare anziché di un cerchio. … Il compito fondamentale di quelle antiche geometrie sembra sia stato il ritrovamento di regole di misura (spesso approssimate) e l'applicazione di tali regole ad esempi numerici ….."
>
> A. Frajese, *Attraverso la storia della matematica*

Premessa

Durante il nostro intervento abbiamo comunicato le riflessioni fatte in seguito ad alcune esperienze di formazione con insegnanti principalmente di scuola primaria. Queste riflessioni ci sembrano una premessa indispensabile per progettare percorsi didattici che, partendo anche semplicemente dai giochi, portino verso la concettualizzazione, cioè aiutino gli allievi a entrare veramente nella matematica.

Abbiamo inserito i file di GeoGebra in un modello di lavoro che, attraverso l'attualità di quelle tecnologie che le nuove generazioni praticano comunemente, sia esempio di organizzazione, di condivisione, di collaborazione e di memoria di ciò che si è vissuto (abbiamo lasciato in alcune immagini le schermate della presentazione originale). Un metodo, strumenti e contenuti, insomma, per andare verso un possibile cambiamento nell'insegnamento della matematica.

Il discorso si è sviluppato in quattro punti:

- la differenza tra concetti quotidiani e concetti geometrici;
- il passaggio dall'esperienza comune alla concettualizzazione;
- il ruolo della simmetria;
- l'uso precoce di GeoGebra.

La differenza tra concetti quotidiani e concetti geometrici

Cominciamo con un esempio. La parola 'sedia' nel linguaggio comune svolge un ruolo nella comunicazione e il bambino costruisce spontaneamente un insieme di riferimento per essa, basandosi semplicemente sulla sua esperienza. Altro invece è la parola 'quadrato'. Anche questa parola ha indubbiamente un valore d'uso, ma se vogliamo che questa assuma un significato geometrico dobbiamo andare oltre.

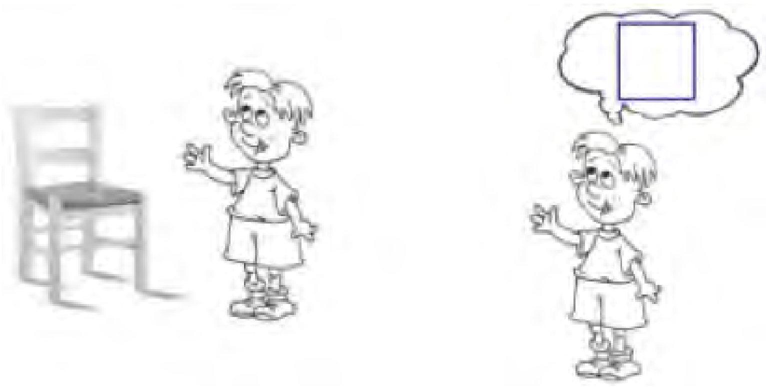


Figura 1

L'immagine del quadrato che ricaviamo dalla realtà deve divenire poco per volta oggetto della mente (*Figura1*), cioè qualche cosa che non ha più nulla a che fare con la realtà sensibile. I ragionamenti, le deduzioni logiche si possono fare solo a partire da questa immagine non più reale di quadrato. Anche i disegni che siamo abituati a utilizzare per comunicare sono modelli e di questo gli allievi devono avere piena coscienza.

Figura 2

Figura 3

L'uomo nel corso dei millenni ha costruito la matematica a partire da esigenze pratiche e da esperienze elementari. Partendo per esempio dalla costruzione di una capanna (*Figura 2*) è arrivato a realizzare anche cose meravigliose, come le piramidi (*Figura 3*), per esempio.

Ma come si è sviluppata da queste esperienze la geometria?

Come si può passare, per esempio, dall'esperienza di una tavola rettangolare al rettangolo o da quello di una vasca circolare al cerchio? (*Figura 4*)

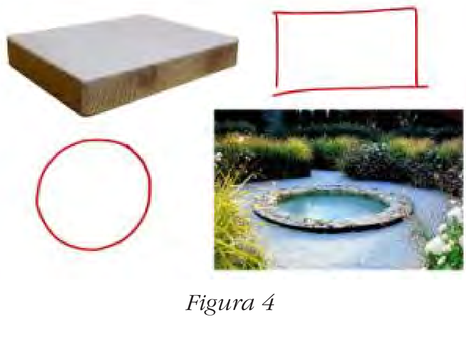


Figura 4

Riflettendo sull'esperienza l'uomo ha costruito gli *oggetti geometrici*.

Riflettendo sugli oggetti geometrici, attraverso la *deduzione logica*, l'uomo ha costruito oggetti che sembravano non avere alcun corrispettivo nella realtà: un passaggio quindi progressivo a livelli sempre maggiori di astrazione che sono però proprio quelli che gli hanno consentito di 'gestire' sempre meglio la realtà.

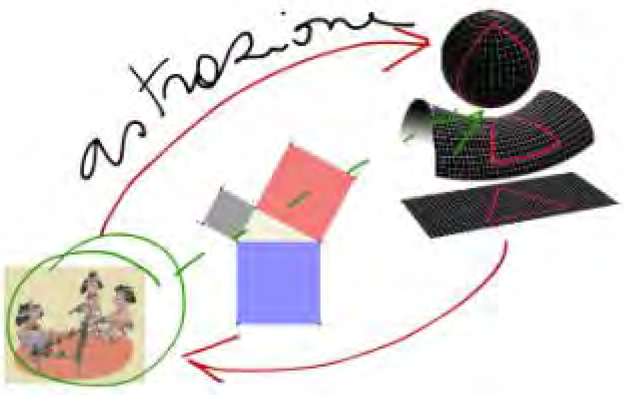


Figura 5

Noi pensiamo che i nostri allievi debbano compiere lo stesso percorso che ha fatto l'umanità, cioè partire dalle esperienze quotidiane che hanno la geometria incorporata e, poco per volta, costruire le astrazioni necessarie per poter poi manipolare concettualmente gli enti geometrici (*Figura 5*), altrimenti, come dicevamo prima, non entreranno mai nella matematica.

Dobbiamo però condividere quest'idea: a qualsiasi età si può concettualizzare, quindi dire 'questo è un quadrato' è possibile in qualsiasi momento della nostra vita (*Figura 6*).

Figura 6

Però a ogni livello la concettualizzazione che possiamo raggiungere sarà differente perché ne avremo una diversa consapevolezza.

Il passaggio dall'esperienza comune alla concettualizzazione

Noi pensiamo che spesso, a scuola, avvenga una sorta di scissione fra un uso avanzato di terminologia geometrica e la costruzione di significati. Ne vediamo un esempio in questa pagina tratta da un libro di testo della scuola elementare. Troviamo concetti molto importanti - *angolo*, *piano*, *semirette*, *origine* … (*Figura 7*) - ma qual è il percorso che ha contribuito a costruire questi concetti, a dare quindi loro un significato?

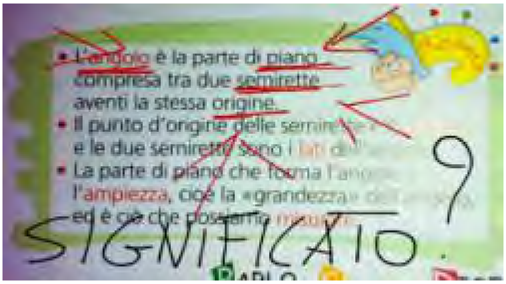


Figura 7

Un percorso possibile comincia per esempio con un gioco.

Figura 8

Come si vede in queste immagini (*Figura 8*), si gioca con una casetta costruita a grandezza di bambino, si passa poi alla manipolazione, cercando di ricostruire la casetta in formato più piccolo, si arriva infine a una forma di rappresentazione. Spesso è questa l'esperienza che in classe gli allievi realizzano, anche "parlando" con le parole della geometria.

Gioco, manipolazione, rappresentazione ... È tutto finito qui? Di solito sì.

Invece è proprio a questo punto che gli allievi dovrebbero avere la possibilità di tornare a "rivivere" le esperienze e guardare ai loro 'prodotti' facendo entrare in azione gli 'occhi della mente' per cercare di astrarre immagini mentali da condividere e costruire così le prime concettualizzazioni.

Il ruolo della simmetria

I bambini giocano con i colori a dita e lasciano sul foglio alcune impronte. Le impronte li portano a riconoscere la simmetria in una situazione comune (*Figura 9*), un gioco, che però alla base ha il 'confronto'. Il confronto è un punto cardine del discorso geometrico perché consente di entrare coscientemente nelle proprietà delle figure.

Figura 9

Allora, se prendiamo la simmetria come ‘assioma’ di partenza, a partire da essa possiamo costruire tutte le isometrie che ci aiutano a concettualizzare le figure geometriche: due simmetrie assiali con assi paralleli conducono alla traslazione (*Figura 10*), con assi incidenti alla rotazione (*Figura 11*).

Figura 10

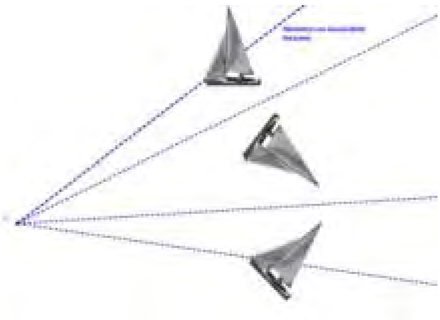


Figura 11

Ma diventa ancor più interessante sottolineare che traslando, del medesimo vettore, tre punti non allineati otteniamo un triangolo congruente a quello di partenza (Figura 12*)*.

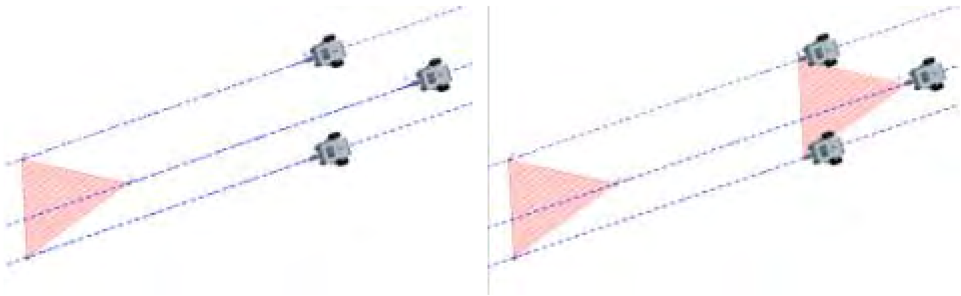


Figura 12

Con le isometrie si possono poi ricostruire tutte le figure geometriche a partire dai loro elementi e ponendo delle condizioni.

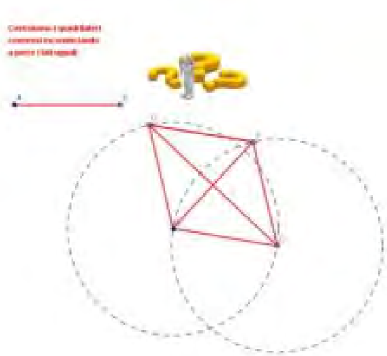


Figura 13

Per esempio, se la figura deve essere formata da 4 lati uguali, si comincia con il costruire un lato e poi, per trasporto rigido (uso del compasso), se ne costruisce un altro consecutivo. Se si uniscono i due segmenti uguali con un terzo lato si forma un triangolo: e poi? Simmetrizzando il triangolo si ottiene un quadrilatero particolare: un rombo o un quadrato. Se la figura è stata costruita con GeoGebra (*Figura 13*) spostando uno dei vertici si ottiene tutta la famiglia di figure che godono di questa caratteristica 'avere i 4 lati uguali' … e l'attenzione si sposta allora sugli angoli …

Come arrivare a questo punto con i bambini? Da dove si può partire?

Figura 14

Torniamo alle casette costruite e sentiamo che cosa dicono i bambini stessi parlando dei loro prodotti (*Figura 14*). Questi hanno cinque anni e dicono:

- la casa di Rudi è quella fatta bene perché lui ha fatto la stessa faccia per quattro volte così erano quattro *uguali*.
- per me, se vuoi fare una casa giusta, devi prendere le misure e fare le facce tutte uguali, della stessa *misura*.

Emergono due parole chiave: uguali e misura. Ma perché parlano di misura? È necessario misurare? E che cosa significa per loro 'misurare'?

Osserviamo questi bambini (*Figure 15 e 16*) e cerchiamo di capire come operano.

Figura 15

Figura 16

Il primo cerca di far combaciare i pezzi che ha ritagliato per poterli incollare e costruire la casetta, i secondi invece sovrappongono il cubo a un pezzo di carta e ne ripassano il contorno.

Nelle operazioni di 'far combaciare' e di 'sovrapporre' c'è, inconsapevole, una relazione geometrica fondamentale, la *congruenza*. Compito dell'insegnante è far acquisire questa consapevolezza soffermandosi con i bambini a riflettere sulle loro stesse azioni.

La congruenza ci porterebbe a sviluppare il concetto relativo di *trasporto rigido*. E qui si potrebbe aprire un discorso sul ruolo che gioca ad esempio la conoscenza del cerchio e del suo uso in situazioni geometriche, cosa che però non abbiamo il tempo in questo momento di sviluppare. Pensiamo però che un'introduzione, anche molto precoce, del cerchio sia molto importante.

Figura 17

Anche per il cerchio valgono i discorsi che abbiamo fatto prima. Si può partire da una situazione di gioco in cui l'esigenza di mettersi in cerchio faccia scaturire l'idea che se si è tutti equidistanti da un centro, si è tutti 'uguali', una funzione sociale che si potrebbe trasformare poi in una concettualizzazione geometrica (*Figura 17*).

L'uso precoce di GeoGebra

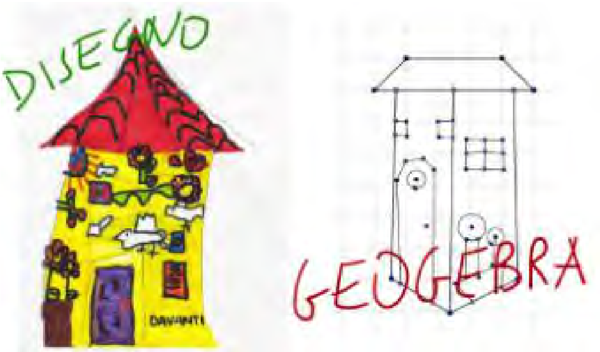


Figura 18

A sinistra abbiamo un disegno, sempre la solita casetta, a destra abbiamo un disegno realizzato però con GeoGebra (*Figura 18*). Qual è il valore aggiunto che dà GeoGebra a questo tipo di operazione? Mentre il disegno è qualcosa di statico, una volta fatto tutto finisce lì, con il file di GeoGebra siamo di fronte a un disegno che può trasformarsi in infiniti disegni, e questo nuovo lavoro di trasformazione e di verifica di invarianti aiuta a generalizzare, quindi porta verso la concettualizzazione.

Quindi non basta fare un'esperienza 'concreta', occorre anche sapere quando può essere significativo introdurre l'uso di un software e quando è necessario il confronto fra gli allievi sulla base dei loro prodotti. Queste azioni, gestite dall'insegnante, favoriscono i processi di costruzione di conoscenza e, gradualmente, consentono agli allievi di utilizzare strumenti di pensiero sempre più potenti. Possono far loro raggiungere, dopo ogni passo, livelli di astrazione maggiori e fanno parte del 'metodo' che consente di gestire le fasi successive all'esperienza.

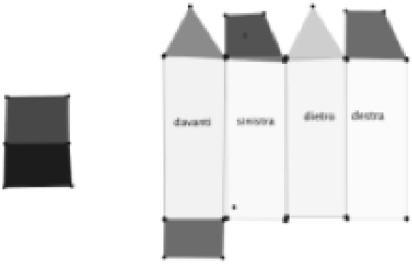


Figura 19

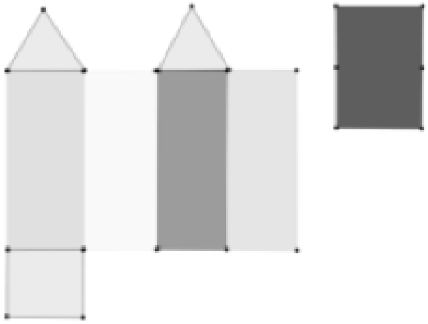


Figura 20

Osserviamo questi due disegni. Come si passa dal primo (*Figura 19*) al secondo disegno (*Figura 20*)? Il primo è un prodotto individuale, il secondo è un prodotto condiviso e la condivisione avviene nel momento in cui bambini si ritrovano a discutere tutti insieme sotto la guida dell'insegnante.

Figura 21

Questa interazione tra pari guidata dall'adulto è indispensabile per collegare esperienza e conoscenza e costruire un nuovo sapere. Nel cerchio di discussione avviene il confronto e si costruiscono tutti insieme le idee (*Figura 21*).

Per concludere presentiamo un esempio di mancata concettualizzazione.

Parliamo di un problema noto, il 'problema del pacco' (cfr. Esempio in *Matematica 2001* Nucleo Argomentare e congetturare). In una scuola media è stato contestualizzato in questo modo: Aldo, che abita nel punto A, deve andare da Bruno che abita nel punto B[1]. Carlo aspetta Aldo su via Bologna. Qual è il percorso più breve per andare dalla casa di Aldo a quella di Bruno passando per via Bologna? La situazione è stata rappresentata in *Figura 22*.

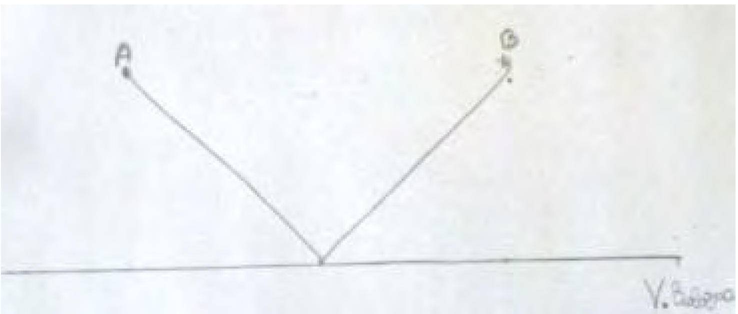


Figura 22

1 i due punti A e B si trovano alla stessa distanza dalla retta che rappresenta Via Bologna

Ecco la risposta scritta dagli autori del disegno: *l'abbiamo trovata con lo spago, misurando la metà di via Bologna. Calcolando la strada che deve fare Aldo per prendere Carlo e per arrivare fino alla casa di Bruno, per fare meno strada, il cammino forma un angolo retto.*

Siamo in prima media. Secondo noi, qui la geometria proprio non c'è! Chiediamoci allora: come si può gestire in classe questa situazione di partenza degli allievi per condurli alla geometria? La discussione è aperta ...

Link ai file realizzati da Maria Cantoni su GeoGebra Tube

- Il cagnetto http://www.geogebratube.org/material/show/id/50301
- La barchetta http://www.geogebratube.org/material/show/id/50480
- Traslazione con robot http://www.geogebratube.org/material/show/id/50360
- Rombo e quadrato http://www.geogebratube.org/material/show/id/50359
- Il pacco http://www.geogebratube.org/material/show/id/50459

I lavori citati e le immagini si riferiscono alle attività svolte nella scuola dell'infanzia Andersen del 1° circolo di Spinea dall'insegnante A. Aiolfi, alle esperienze condotte dagli insegnanti P. Sgaravatto, L. Canavosio e A. Morero del Gruppo cooperativo di Ricerca e Sperimentazione Didattica Interdisciplinare del MCE con sede a Pinerolo, al percorso di formazione del Progetto Cur.Ve. (Curricolo Verticale) della rete di scuole di Torino - Barriera di Milano (scuola capofila DD 'Ilaria Alpi'), all'attività di formazione pluriennale realizzata nell'IC di Pianello Val Tidone (PC) di cui è coordinatrice V. Perotti.

Bibliografia

Arzarello, F., Bazzini, L., Ferrara, F., Sabena, C., Andrà, C., Merlo, D., Savioli K.& Villa, B. (2011). *Matematica: non è solo questione di testa. Strumenti per osservare i processi di apprendimento in classe*, Trento: Erickson.

Bartolini Bussi, M. G. & al. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n. 21, Modena.

Frajese, A. (1971). *Attraverso la storia della matematica*, Firenze: Le Monnier.

Freudenthal, H. (1994). *Ripensando l'educazione matematica*, a cura di Carlo Felice Manara, Brescia: La Scuola.

Gallo, E.& Cantoni, M.(2009). *La geometria nella realtà, la geometria come pensiero*, Podcast in 8 episodi in http://www.lacasadegliinsegnanti.it/podcastgenerator/?p=archive&cat=lezioni_di_matematica

Lakoff, G.& Nùñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books (trad. italiana, Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica. Torino: Bollati Boringhieri, 2005).

Marastoni, G. (1991). *Facciamo Geometria. Un'esperienza condotta con alunni della scuola elementare.* Torino: Emme Edizioni Petrini Junior.

Merlo, D. (2011). Il ragionamento geometrico nello spazio e nel piano. Un percorso di geometria per la scuola primaria. In *Conferenze e Seminari 2010-2011. Associazione Subalpina Mathesis*. Torino: Kim Williams Books.

Pontecorvo, C., Ajello, A. M., & Zucchermaglio, C. (1991*). Discutendo si impara. Interazione sociale e conoscenza a scuola,*. Roma: La Nuova Italia Scientifica.

UMI-SIS-MIUR (2003), *Matematica 2001*: Raccolta di attività di supporto curriculare per la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado – Pubblicazione MIUR, nell'ambito del protocollo d'intesa UMI-SIS-MIUR (a cura di G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, O.

Robutti) (interamente scaricabile da http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2001/matematica2001.html)

Vygotskij, L. S. (1987). *Il processo cognitivo*, Torino: Bollati Boringhieri.

Vygotskij, L. S. (1992). *Pensiero e linguaggio*, a cura di L. Mecacci, Bari: Biblioteca Universale Laterza.

QUADRATURE

Arianna Coviello[1], Alessandro Galasco[2]
[1]Liceo Scientifico Galileo Galilei, Spalto Borgoglio, [2]Università degli Studi di Pavia

Premessa

Il calcolo infinitesimale e integrale è studiato solo nell'ultimo anno di liceo, ma se pensiamo alle sue origini e alle competenze necessarie a quadrare una superficie ci rendiamo conto che il problema del calcolo di un'area qualunque potrebbe essere affrontato molto prima, e non ci si riferisce solo al biennio di scuola secondaria di secondo grado, si pensa anche alla scuola secondaria di primo grado e alla scuola primaria.

L'uso di software digitali di geometria dinamica, come Cabri o GeoGebra, o anche l'uso di software cartacei (origami) permetterebbero di far quadrare o di verificare equivalenze di figure piane o solide a studenti in "tenera età".

Pensiamo, e tenteremo di darne esempio, che sia possibile accompagnare l'allievo al calcolo integrale/infinitesimale senza che esso stesso se ne accorga, così che si possa accostare con animo consapevole e sereno al mondo dell'analisi, allo studio delle funzioni a alle "strane aree" che esse generano.

Un'altra cosa di cui ci si rende conto negli anni di insegnamento è che gli allievi sono interessati alla storia delle idee, più che alle idee, alle persone che hanno fatto la storia della matematica e che hanno ragionato senza dispositivi di qualunque tipo se non la propria mente.

Ed è proprio studiando la storia delle idee che si scopre che i ragionamenti che hanno condotto a esse sono più semplici di quelli che vogliamo far fare ai nostri studenti fornendo loro solo i risultati, o modelli preconfezionati. È un po' come vedere un film o leggere un libro partendo dal mezzo; pensiamo a un insegnamento della matematica per problemi, che è un po' quello che si fa con la fisica nel biennio.

L'idea didattica che segue è:

- Un percorso didattico che sviluppi l'abilità di calcolare aree senza il vincolo dell'abitudine a utilizzare figure notevoli e formule preconfezionate.
- Simulazione del percorso mentale presente storicamente nell'evoluzione delle idee matematiche.
- Uso della storia della matematica e delle tecnologie come veicoli di competenze.

Un lavoro di questo genere fatto a partire almeno dal primo anno di scuola superiore avrebbe le seguenti finalità:

- recuperare la pratica geometrica, ultimamente molto trascurata;
- sviluppare la capacità di congetturare, astrarre e generalizzare partendo dal concreto;
- progettare, manipolare e costruire con materiali diversi;
- fare uso intelligente della tecnologia digitale;
- acquisire un metodo scientifico laboratoriale per risolvere un problema;
- acquisire abitudine a studiare sulle fonti;
- costruire il più presto possibile significati corretti e stabili;

e favorirebbe il raggiungimento delle seguenti competenze:

- Fare delle stime
- Creare modelli concreti finalizzati alla deduzione di formule generali
- Divenire gestori consapevoli di software digitali
- Leggere e interpretare testi storici

Schema operativo

Lo schema operativo si compone di sei laboratori nei quali il ruolo docente allievo si modifica a seconda del contesto

- Laboratorio 1: AREE DI FIGURE PIANE – Euclide 300 a.C.
- Laboratorio 2: VOLUMI
- Laboratorio 3: ARCHIMEDE di SIRACUSA (287 a.C. – 212 a.C.)
- Laboratorio 4: LA SCODELLA DI GALILEO (XVII sec.)
- Laboratorio 5: BONAVENTURA CAVALIERI (XVI sec.)
- Laboratorio 6: LA CICLOIDE (XII sec.)

LABORATORIO 1: Aree di figure piane Euclide 300 a.C.

Torniamo in Grecia (300 a.C.), il metodo di Euclide (esaustione) permetteva di trovare aree o volumi di regioni e solidi a contorno curvilineo mediante approssimazioni successive con l'uso di poligoni inscritti o circoscritti dei quali era semplice calcolare area o volume.

La linea di pensiero è sempre stata la stessa: poiché non si riesce a calcolare l'area racchiusa da una superficie curva si tende ad approssimare tale area con un certo numero di aree che sappiamo calcolare.

Simulazione del metodo di esaustione di Euclide:

- Scuola primaria/Scuola secondaria di primo grado: *allievo osservatore*

La differenza tra la somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti e quella del cerchio è percepibile anche visivamente quindi questo modulo laboratoriale è utilizzabile anche nella scuola primaria. Il software usato sarà quello cartaceo (Figura 1).

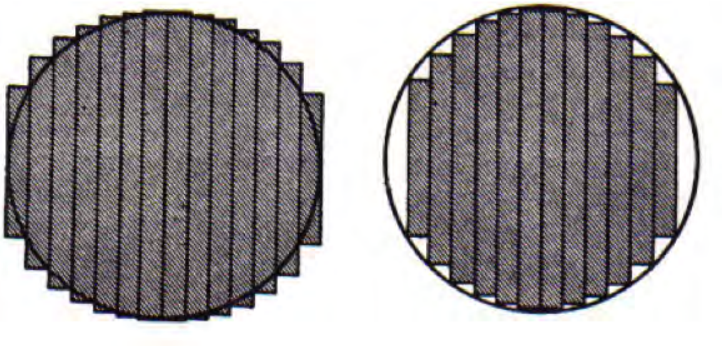


Figura 1

- Scuola secondaria 1° grado/ secondo biennio secondaria 2° grado+ classe quinta: *l'allievo, come utilizzatore di software di geometria, esegue semplici costruzioni e fa deduzioni.*

Usando GeoGebra la quadratura del cerchio può essere visualizzata come limite delle successioni delle aree dei poligoni inscritti e circoscritti a n lati (Figura 2).

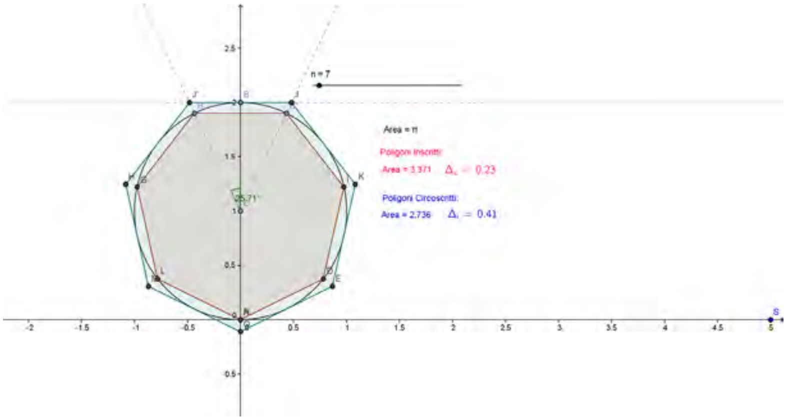


Figura 2

- Classe quinta: *l'allievo gestisce autonomamente il software, esegue costruzioni geometriche, dimostra la convergenza di successioni di infiniti termini a un numero finito.*

<u>Integrazione numerica con il metodo dei rettangoli.</u>

Con un foglio di calcolo (ad esempio Excel o Calc) si può impostare il calcolo dell'area del trapezoide come limite delle aree degli scalodi inscritti e circoscritti (Figura 3).

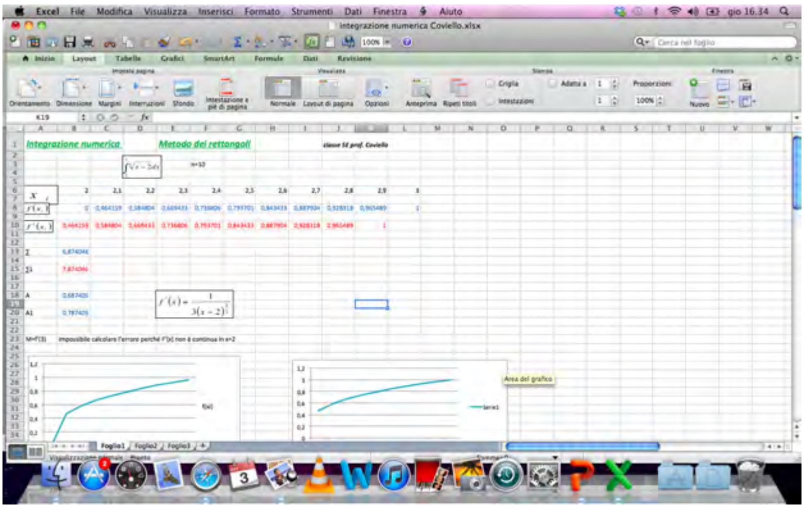


Figura 3

- Classe quinta: *l'allievo gestisce autonomamente il software, esegue costruzioni geometriche, dimostra la convergenza di successioni di infiniti termini a un numero finito.*

Analogamente con GeoGebra si ottiene la quadratura del trapezoide come limite delle successioni delle aree degli scaloidi inscritti e circoscritti. Uno slider può essere usato per aumentare/diminuire il numero dei rettangoli che compongono gli scaloidi e apprezzare la diminuzione dell'errore nella quadratura (figura 4).

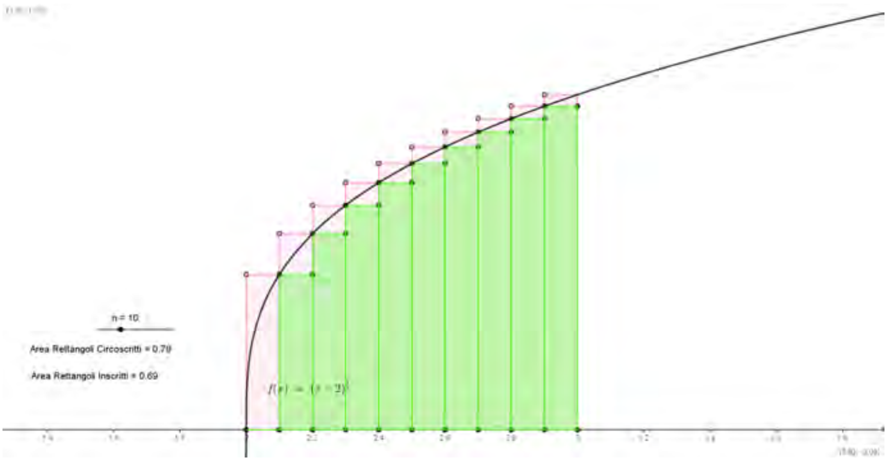


Figura 4

LABORATORIO 2: Volumi

I laboratori seguenti sono dedicati ai volumi: l'uso di software cartaceo e digitale sono finalizzati non tanto al calcolo, quanto a una migliore percezione della terza dimensione.

Anche in questo caso le attività sono declinabili ai diversi livelli di istruzione a seconda del ruolo docente allievo e delle aspettative didattiche.

Riteniamo che l'uso degli origami (figura 5) sia importante per sdrammatizzare la difficoltà di situazioni geometriche solitamente difficili da proporre, l'aspetto ludico di tale pratica lo rende particolarmente adatto agli allievi di livello scolare primario e secondario di primo grado. Da esperienze personali consolidate, però, è scaturito che l'abitudine al "gioco" favorisce l'uso della fantasia che è elemento fondamentale nello studio della matematica, e che negli allievi di secondo biennio di secondaria superiore e classi quinte è spesso "dimenticata".

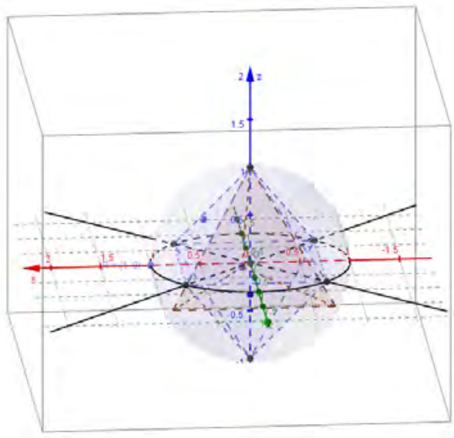
Origami per la costruzione di solidi platonici:

- Scuola primaria/Scuola secondaria di primo e secondo grado

Figura 5

- Scuola secondaria di secondo grado: classi quinte

Si propone l'uso di GeoGebra 3D per visualizzare l'inscrivibilità dei solidi platonici nella sfera (Figura 6).



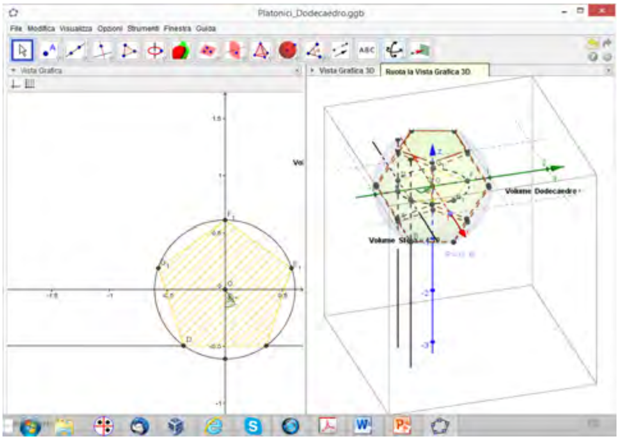


Figura 6

Questa esercitazione è stata effettuata in collaborazione con gli allievi della classe quinta dello scorso anno scolastico a cui è stato proposto un gruppo di lavoro sperimentale "alla pari" docenti-alunni: l'uso di GeoGebra 3D risultava infatti nuovo per tutti, per cui è stato necessario sviluppare strategie di soluzione che non erano note a priori (problem solving). Il software nella versione beta per il 3D risulta infatti molto più complesso della versione tradizionale piana sia per evidenti ragioni intrinseche (rappresentazione e manipolazione di entità spaziali visualizzate nel contesto piano dello schermo) sia per una carenza di strumenti di gestione (essendo ancora in fase di sviluppo sono disponibili solo alcune funzionalità gestibili prevalentemente da riga di comando). Lo scopo nostro era di costruire una sfera di raggio assegnato (gestibile via slider) entro cui inscrivere i diversi solidi: fra le funzionalità del programma vi è sono i comandi specifici per costruire i cinque solidi platonici a partire dallo spigolo di una faccia, tuttavia non è stato banale (prevalentemente per la complessità dello strumento) posizionare lo spigolo generatore all'interno della sfera. La soluzione sviluppata, valida per tetraedro, cubo, dodecaedro, icosaedro, è stata calcolare analiticamente la lunghezza dello spigolo, generare un poligono regolare di tale lato sul piano di riferimento xy (quello tradizionale del 2D) con centro nell'origine; far passare due rette perpendicolari al piano xy (versore 0,0,1) passanti per due estremi dello spigolo; intercettare la sfera e con il segmento ottenuto quindi generare i solidi. L'ottaedro più semplicemente si può realizzare generando due piramidi a base quadrata (il quadrato generatore è posizionato sul piano xy ed è calcolabile per via analitica).

LABORATORIO 3: Archimede (III sec. a.C.)

Archimede di Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) percorse la stessa strada di Euclide ma con superfici più complesse: segmento parabolico ed ellisse.

Relativamente all'area del segmento parabolico, Archimede diede due dimostrazioni: una meccanica e una geometrica.

- Scuola secondaria di primo grado: *laboratorio meccanico per calcolare l'area di strane figure mediante pesate (carta, forbici, bilancia). Obiettivo nascosto: Principio di Cavalieri*
- Scuola secondaria di secondo grado (secondo biennio/classe quinta)

Area di un segmento parabolico: una bellissima dimostrazione

La Dimostrazione meccanica, ritrovata in un libro a Istanbul nel 1906, merita di essere proposta agli allievi di un secondo biennio o di classe quinta. La costruzione della bilancia di Archimede viene fatta fare passo, passo con GeoGebra che aiuta la comprensione della dimostrazione

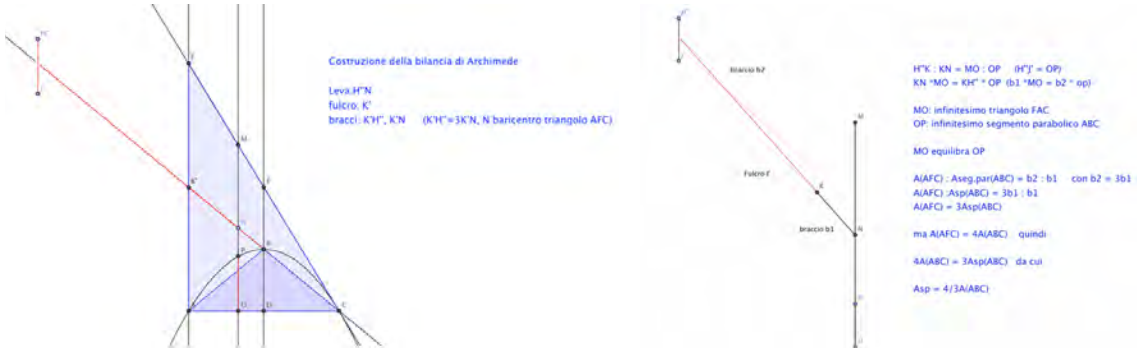


Figura 7

LABORATORIO 4: Bonaventura Cavalieri, la scodella di Galileo

- Scuola secondaria di secondo grado: classi quinte

Bonaventura Cavalieri, allievo di Galilei, fu avviato da quest'ultimo a occuparsi di problemi di calcolo infinitesimale. Egli elaborò un metodo geometrico che ritroviamo nella sua opera "*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*"

Egli considera un'area come costituita da un numero indefinito di segmenti paralleli equidistanti e un volume come composto da un numero indefinito di aree piane parallele (i foglietti); questi elementi sono gli *indivisibili di area e volume*, cioè i moderni infinitesimi.

Cavalieri scrive nella sua Geometria degli indivisibili:

> *aprite, di grazia, gli occhi (…) e scorgete chiaramente che il continuo è divisibile in parti sempre divisibili sol perché consta d'indivisibili; imper*ò che se la divisione e la suddiv*isione si ha da poter continuar sempre, bisogna necessariamente che la moltitudine delle parti sia tale che già mai non si possa superare; e sono dunque le parti infinite, altrimenti la suddivisione si finirebbe; e se sono infinite, bisogna che no siano quante, perché infiniti quanti compongono un quanto infinito, e noi parliamo di quanti terminati; e però gli altissimi ed ultimi, anzi primi componenti del continuo, sono indivisibili infiniti*.

Il principio di Cavalieri enuncia che :

> *"Se due solidi, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su ciascuno di essi coppie di figure aventi uguale area, i due solidi hanno ugual volume, se le aree stanno tra loro in un tale rapporto anche i volumi dei solidi stanno tra loro secondo quel rapporto."*

Si chiama scodella di Galileo il solido ottenuto come differenza tra un cilindro circolare retto equilatero (raggio di base uguale altezza) e la semisfera in esso inscritta. *La scodella di Galileo è equivalente al cono che ha come base e come altezza rispettivamente la base e l'altezza del cilindro*

Si propone GeoGebra 3D con cui è ottenibile la vista in sezione generata da un piano secante parallelo alla base (Figura 8): si può mostrare l'equivalenza tra il cerchio e la corona circolare tramite il comando GeoGebra del programma "misura area". In questo modo si può dimostrare come ogni figura piana possa essere pensata come la totalità di corde/fili/indivisibili aventi una comune direzione.

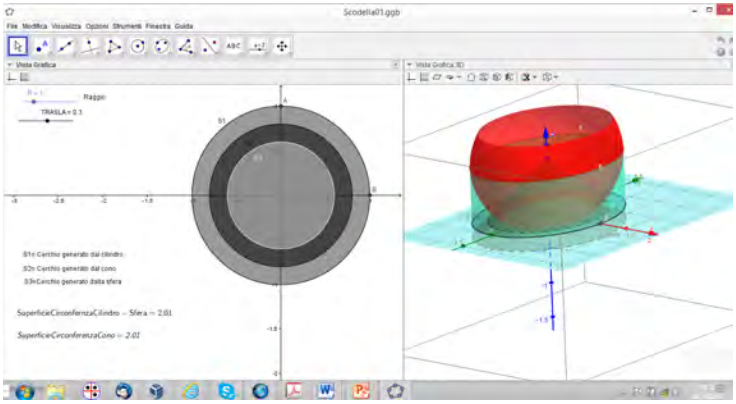


Figura 8

La costruzione della scodella nell'ambiente 3D è decisamente meno complessa rispetto al problema affrontato nel laboratorio 2. Nuovamente si è scelto di utilizzare la vista del piano xy in modo preferenziale costruendo sfera, cono e cilindro in modo tale che il piano di intersezione fosse sempre proprio il piano principale di riferimento.

Uno slider gestiva quindi la traslazione dei solidi che allontanandosi o avvicinandosi al piano xy modificavano la porzione intercettata; alcuni indicatori fornivano i valori delle superfici calcolate mostrando l'uguaglianza alla base del modello.

LABORATORIO 5: Bonaventura Cavalieri

- Scuola primaria/scuola secondaria 1° grado/ scuola secondaria 2° grado

Questa attività è declinabile in tutti gli ordini di scuola: l'interfaccia dello studente con la tecnologia e il docente si modifica nel seguente modo.

- Scuola primaria: l'allievo osserva ciò che ha già provato a creare su carta. GeoGebra con uso di slider per aumentare il numero dei foglietti e verificare che all'aumentare dei foglietti l'area dello scaloide inscritto tende all'area della figura piana. La figura è dinamica e permette di apprezzare la variazione dell'errore via via che il numero delle figure inscritte aumentano.
- Scuola secondaria di secondo grado-classe quinta: l'allievo costruisce autonomamente il foglio GeoGebra per la comprensione del metodo di esaustione che contiene implicitamente l'idea di Cavalieri della suddivisione di una figura in foglietti. Quando il numero delle suddivisioni aumenta i foglietti diventano gli indivisibili.
- Lo slider come strumento che rende espliciti passaggi chiave quali: il concetto di limite all'infinito del numero delle suddivisioni, la convergenza di una somma di infiniti termini a un numero finito, l'idea di indivisibili di Cavalieri (Figura 9).

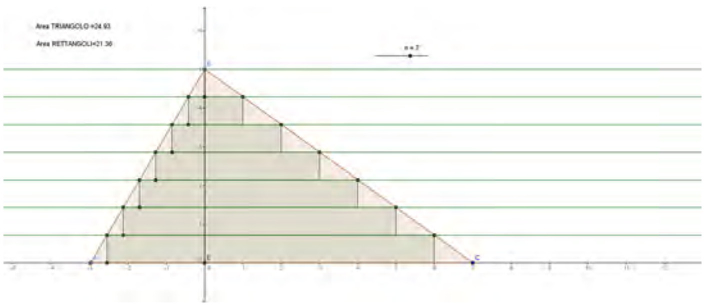


Figura 9

LABORATORIO 6: La Cicloide e la sua compagna: Torricelli–Gilles Personnes de Roberval (XVII sec.)

- Scuola secondaria 2° grado (primo e secondo biennio + classe quinta)

Torricelli quadrò anche l'arco di cicloide, generato da un punto di una circonferenza che ruota senza strisciare lungo una retta e dimostrò che tale area è tre volte quella del cerchio generatore.

Nella Figura 10, i segmenti BB', CC', BA' sono rispettivamente rettificazioni degli archi AB, AC, AB.

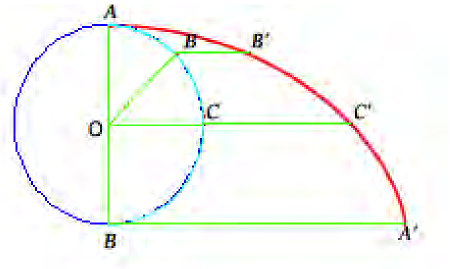


Figura 10

Se BA' = πr, allora CC' e BB', che sono la metà e la quarta parte di AB, misureranno rispettivamente 1/2πr e 1/4πr.

Facendo slittare i segmenti suddetti verso sinistra in modo che i loro estremi sinistri vadano a posizionarsi sul diametro, gli estremi destri descrivono un luogo geometrico chiamato "***compagna della cicloide***" (curva "sotto" la cicloide nella Figura 11.

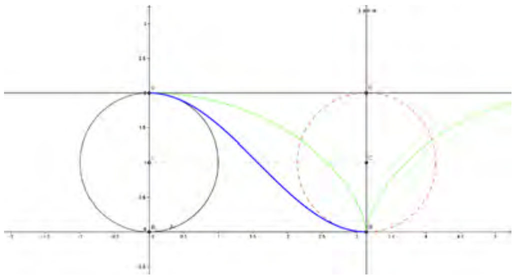


Figura 11

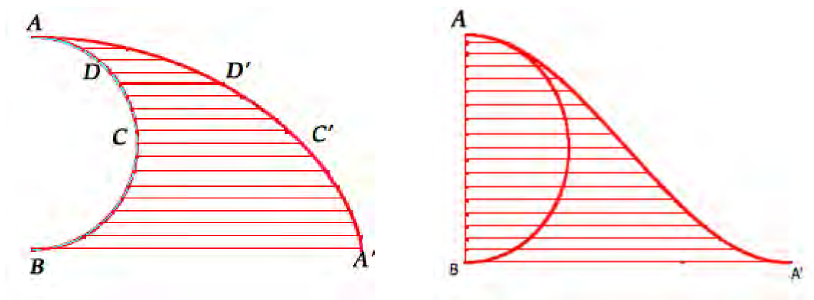


Figura 12

Le due superfici tratteggiate sono equivalenti per il Principio di Cavalieri (Figura 12).

L'Area sottesa a un arco di cicloide è la somma delle aree del cerchio generatore e della parte di piano sottesa alla "compagna" , dunque lavorando su metà figura otterremo che (Figura 13) :

SEMICERCHIO + ½ COMPAGNA = ½ CICLOIDE

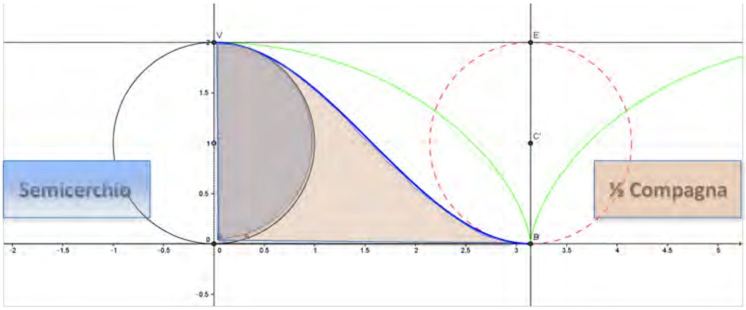


Figura 13

Ora utilizziamo una triangolazione: come si vede in figura 13 la ½ cicloide è equivalente al triangolo che ha come lati il diametro del cerchio generatore, la circonferenza rettificata e la diagonale del rettangolo ottenuto considerando due posizioni successive e omologhe del cerchio durante il rotolamento. La superficie in figura 14, se il raggio è 1, è π.

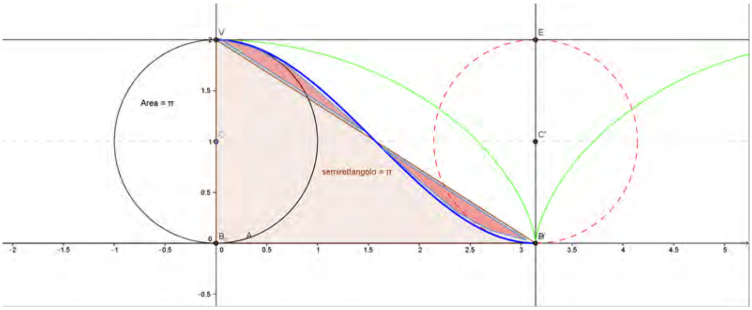


Figura 14

Per finire, l'area delimitata da un arco di cicloide e dalla sua base è $2\left(\frac{1}{2}\pi r^2 + \pi r^2\right) = 3\pi r^2$

L'area delimitata da un arco di cicloide e dalla sua base è il triplo dell'area del cerchio generatore della curva (figura 15).

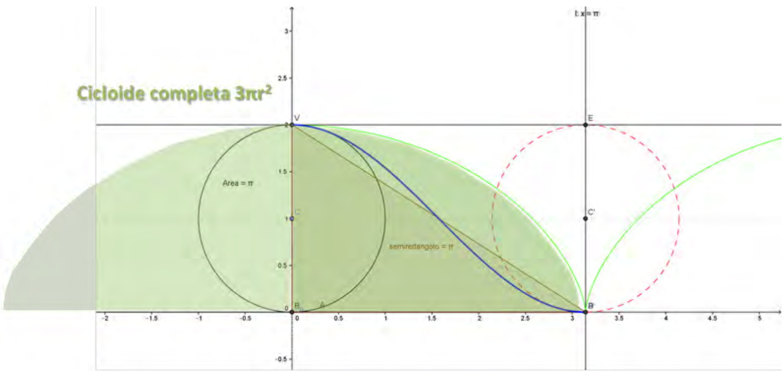


Figura 15

Conclusioni e ringraziamenti

Questo lavoro è il frutto non solo di anni di esperienza, ma di una felice opportunità di collaborazione offerta dai Tirocini Formativi Attivi.

Un particolare ringraziamento ad Alessandro Neirotti, Alessandro Pasino, Francesco Torrielli, Simone Scarsi, Manuele Trombini, della 5G (a.s. 2012/13) del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Alessandria, che ci hanno ispirato e aiutato nel bellissimo ma difficile compito di educare alla matematica.

Bibliografia e Sitografia

Bell, E.T. (1996). *I grandi matematici*. Firenze: Sansoni.
Boyer, C.B.(1990). *Storia della matematica*. Milano: Oscar Mondadori.
Emma Castelnuovo (*1988*). *La matematica nella realtà*. Firenze: La Nuova Italia.
Appunti Convegno Storia della Matematica, Ivrea 2013
http://www.fisicamente.net/FISICA/STORIA_CALCOLO.pdf

L'UTILIZZO DI GEOGEBRA E L'OSSERVAZIONE DELLE SITUAZIONI DI DIFFICOLTÀ

Paola Damiani[1,2], Rosalba De Luca Gaglio[4],
Nazzarena Pescarmona[4], Ada Sargenti[3], Claudia Testa[3]
[1]Dipartimento di Filosofia e Scienze dell'Educazione -Università di Torino, [2]Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte, [3]La Casa degli Insegnanti, [4]ITIS Pininfarina, Moncalieri (TO)

Premessa

Paola Damiani

Sinteticamente, possiamo affermare che poiché cambiano i contesti (sociali, politici, culturali, scolastici, tecnologici, …) anche il modo di "fare scuola" deve cambiare.

Così è sempre stato (gli insegnanti della scuola ottocentesca avevano idee, strategie e finalità differenti da quelli della scuola dell'epoca fascista e degli anni sessanta del secolo scorso e via discorrendo), tuttavia, ultimamente, il ritmo e l'intensità dei cambiamenti sono significativamente aumentati e non sempre le persone e i dispositivi educativi e scolastici riescono a tenere il passo del cambiamento. Basti pensare alla "rincorsa" affannosa dei docenti, nell'ultimo decennio, dietro alle quasi continue circolari e normative ministeriali, alle nuove scoperte delle ricerche scientifiche, tecnologiche, educative e didattiche, alle complessità crescenti della società …

Per capire le direzioni dei cambiamenti richiesti alla scuola attuale, e per provare a orientarle al meglio senza subirne inerti il "peso", il primo passo consiste nell'esame dei contesti entro i quali ci collochiamo come docenti e nella riflessione sulle interazioni/implicazioni con la nostra disciplina d'insegnamento.

A livello di macrocontesto, il principio fondamento e finalità della scuola è costituito dal "successo formativo" di tutti e di ciascuno. Ogni allievo deve poter sviluppare la propria competenza e la propria possibilità di apprendere continuamente all'interno di diversi e mutevoli contesti e processi formativi. Nei quadri di *Lisbona 2000 e 2020*, tale principio rappresenta un principio strategico, non soltanto culturale, poiché nella società della conoscenza tutti gli studenti devono essere messi in condizione di avere accesso a forme di apprendimento continuo, necessarie per diventare cittadini attivi e responsabili, per tutta la vita (*lifelong learning*). In ambito transnazionale, la competenza matematica e le competenze di base in scienza e tecnologia vengono enucleate tra le otto competenze chiave per l'apprendimento permanente (Raccomandazioni UE, 2006) per l'esercizio della cittadinanza attiva o inclusione (Zagrebelski, 2012), mentre in ambito locale, la nostra Costituzione ci ricorda che la scuola è aperta a tutti e, come la società intera, ha il compito di rimuovere gli ostacoli all'apprendimento e alla partecipazione.

A livello di microcontesto, il contesto di lavoro dei docenti, la classe, viene oggi riconosciuto e descritto come un contesto composito e complesso, costituito da allievi con difficoltà, allievi con bisogni educativi speciali (BES), allievi «con percorso regolare» e da qualche allievo eccellente, nonché dalle loro famiglie e dai colleghi con i quali occorre collaborare .

Le dimensioni costitutive della classe complessa sono la pluralità, le *neurodifferenze* (Armstrong, 2011), le *sociodifferenze* e la dinamicità. Modelli educativi e strumenti didattici efficaci fino a qualche tempo fa attualmente non funzionano più o meglio non funzionano per tutti allo stesso modo; la "parola d'ordine" è *personalizzazione*.

Ci rendiamo tutti conto (o quasi tutti …) a questo punto che la didattica deve cambiare, ma come? Quante didattiche sono necessarie per intercettare gli stili cognitivi e di apprendimento personali e il differenziale (quale risorsa e patrimonio) di ciascun allievo? Una, nessuna, centomila didattiche (almeno una per ciascun Bisogno Educativo Speciale)? Non è possibile qui rispondere in modo esaustivo a tale questione cruciale (non sappiamo neanche se esista una risposta definitiva), tuttavia pare possibile offrire alcuni spunti di riflessione in grado di fornire chiavi di lettura ed euristiche per orientare la progettazione didattica in modo nuovo e coerente ai quadri sopra esposti.

Innanzitutto, occorre considerare che le Indicazioni Nazionali del 2007 indicavano le finalità della scuola a partire dalla persona che apprende e non da programmi predefiniti "a prescindere dalle persone". Finalità, strategie e contenuti della scuola devono essere definiti a partire dal singolo allievo, nella contemplazione dell'originalità del suo percorso individuale e con le aperture offerte dalla rete di relazioni che la legano alla famiglia e agli ambiti sociali. Le Nuove Indicazioni del 2012 affermano inoltre la globalità della persona: lo studente deve essere posto al centro dell'azione educativa in tutti i suoi aspetti: cognitivi, affettivi, relazionali, corporei, estetici, etici, spirituali, religiosi. In un simile quadro composito, tra personalizzazione e socializzazione, tra inclusione e partecipazione, tra specificità di funzionamento e uguaglianza di trattamento (nel rispetto dei bisogni del singolo e della comunità), quale idea di didattica emerge?

Come afferma Fiorin (2012), i bisogni educativi speciali richiedono interventi di aiuto speciali, ma la loro caratteristica non è di essere qualcosa di 'altro' e di collocarsi parallelamente alla esperienza 'normale', piuttosto è quella di arricchire di speciale qualità l'esperienza di tutti. Date le caratteristiche dei contesti attuali, pare necessario e vantaggioso che la nuova didattica si caratterizzi come una (la?) didattica inclusiva in grado di accogliere e valorizzare le differenze di ciascuno, entro contesti inclusivi che favoriscono l'apprendimento e la partecipazione di tutti.

Non è facile capire come realizzare una simile didattica; proviamo qui a enucleare alcune caratteristiche che rappresentano un punto di partenza verso una sua concretizzazione.

La didattica inclusiva è una didattica unica, ma non uniforme; è un processo multidimensionale che va oltre le conoscenze, "verso le competenze", e chiama in causa gli aspetti emotivi, corporei, sociali, oltre quelli cognitivi; è un processo integrato e complesso che tiene insieme didattica e valutazione per la formazione; è una didattica che si apre oltre la scuola, al territorio per la valorizzazione di tutte le risorse. La didattica inclusiva e innovativa, inoltre, non costituisce un prodotto predefinito né finito, da imparare e applicare come una tecnica; al contrario, essa può essere ben rappresentata da un processo esperienziale e sapienziale continuo che si realizza nel suo svolgersi quotidiano entro contesti esistenziali autentici (scuola, famiglia, territorio). La didattica innovativa non deve utilizzare necessariamente nuovi strumenti, ma deve realizzare nuovi ambienti e nuovi processi di insegnamento-apprendimento, funzionali al successo formativo di tutti gli allievi.

Non sempre i docenti devono ripartire da zero o inventarsi nuovi strumenti e dispositivi; spesso si tratta di fare le solite "buone cose" con uno sguardo nuovo. In tal senso, ci pare che l'esperienza con GeoGebra, se opportunamente e intenzionalmente progettata e monitorata, possa costituire un approccio coerente con l'idea di didattica qui illustrata.

Didattica della matematica per le classi con allievi con BES

Ada Sargenti, Claudia Testa

Il progetto che si presenta è realizzato in sinergia con l'Ufficio Scolastico Regionale per il Piemonte, il CESEDI (Provincia di Torino) e La Casa degli Insegnanti, e, nella fase formativa, con la collaborazione anche del CTS Levi-Arduino.

La proposta, centrata sull'utilizzo in classe del software GeoGebra, nell'ipotesi iniziale si era configurata come una naturale prosecuzione di alcune delle iniziative della Stanza della Matematica de La Casa degli Insegnanti di Torino che, sostenuta dalla Provincia di Torino e in sinergia con il GeoGebra Institute di Torino, ha attivato per anni progetti in cui erano inseriti corsi di formazione su questo software.

La formazione sul software GeoGebra, che prevedeva la sperimentazione nelle classi, ha coinvolto in questi ultimi quattro anni centinaia di insegnanti della nostra regione in percorsi di base e di approfondimento. La filosofia dei percorsi realizzati è stata quella di affiancare l'introduzione di GeoGebra alla riflessione sulle implicazioni che il suo uso induce nella didattica e al valore aggiunto che tale software porta in essa. A ragione si può dunque pensare che l'uso del software stia entrando a far parte della pratica didattica per molti docenti.

Per questo, sollecitati dalle problematiche che gli insegnanti sempre più frequentemente sono chiamati ad affrontare in tema di studenti con difficoltà di apprendimento, si è pensato di intraprendere un percorso di ricerca-azione proprio in riferimento all'uso in questi casi di GeoGebra, per iniziare a raccogliere evidenze utili a costruire risposte alle istanze espresse dai docenti.

Inizialmente l'obiettivo della ricerca era rivolto all'uso del software per allievi con DSA come strumento compensativo in riferimento alla legge 170/2010. Nella fase di progettazione tuttavia è stato necessario ampliare l'ambito di osservazione e di ricerca in seguito alla normativa più recente emanata sui bisogni educativi speciali (BES): direttiva ministeriale del 27 dicembre 2012, C.M. n.8, 6 marzo 2013 e la successiva nota del MIUR del 21 agosto 2013.

La nostra si presenta dunque come risposta duplice alle problematiche vecchie e nuove che i docenti si trovano ad affrontare: quelle legate alle difficoltà dell'insegnamento della matematica agli studenti con bisogni educativi speciali (BES) a cui la nuova normativa impone di porre particolare attenzione e, più in generale, quelle legate alla didattica della matematica.

Le difficoltà didattiche connesse ai BES sono più acute nella scuola secondaria di II grado. In effetti, se da un lato non esiste un adeguato supporto di esperienze e ricerche in proposito, dall'altro la maggior complessità della disciplina a questo livello, unita alle difficoltà ormai consolidate negli studenti, evidenzia problematiche non sempre superabili con i tradizionali strumenti compensativi e dispensativi, mentre ai docenti pare difficile una personalizzazione dell'insegnamento con classi numerose i cui studenti presentano bisogni educativi e disagi spesso molto diversificati.

Tenendo conto del fatto che l'uso del software GeoGebra, come si è detto, si è ormai inserito nella pratica didattica di molti docenti, ci si pone l'intento di provare a capire se sia possibile ed efficace utilizzare GeoGebra come aiuto e/o potenziamento, ma soprattutto come strumento di inclusione, per gli allievi con difficoltà di apprendimento (di varia natura, così come indicato dalla categoria dei BES), e, in caso affermativo, prevedere proposte didattiche mirate (fondate su evidenze) e monitorate. Il quadro di riferimento assunto si fonda sull'idea che una didattica adeguata agli allievi con difficoltà, consenta di porre attenzione agli apprendimenti essenziali (o prerequisiti) necessari a tutti e favorisca un miglioramento del processo di insegnamento-apprendimento e dei processi inclusivi a livello di classe.

Duplici dunque gli obiettivi (sfida):

- aiutare gli studenti con difficoltà e superare le resistenze all'apprendimento;
- innovare e migliorare la didattica attraverso un approccio didattico-valutativo innovativo e coerente utilizzando la risorsa: rete GeoGebra.

Il progetto si articola nelle seguenti fasi:

Fase iniziale

Individuazione delle esigenze dei partecipanti e messa in comune di esperienze con l'obiettivo di definire da un lato percorsi di formazione per i docenti e dall'altro momenti di progettazione didattica per la sperimentazione da parte degli insegnanti coinvolti in un percorso di ricerca-azione monitorato.

Fase formativa

Riguarda tre campi:

- BES
  - aspetti generali della normativa;
  - problematiche disciplinari (in questo caso matematica) attinenti ai vari ordini di scuola.
- GeoGebra
  - formazione, ove ancora necessaria, sul software;
  - utilizzo dello strumento per il superamento di ostacoli cognitivi;
  - metodologie didattiche che favoriscano l'acquisizione di competenze.
- Valutazione

Progettazione

- raccolta di materiali da condividere sulla piattaforma;
- riferimento al testo *Esplorazioni matematiche con GeoGebra* scaricabile gratuitamente da http://community.geogebra.org/it/2013/10/08/esplorazioni-matematiche-con-geogebra/;
- definizione del quadro di riferimento centrato su:
  - processo sinergico tra azione didattica e valutazione;
  - inquadramento di GeoGebra nell'ottica di una classe inclusiva, ovvero il suo inserimento in una didattica per competenze cercando risposte alla questione: " *in pratica: GeoGebra nella primaria, nella secondaria … cosa favorisce?*"
- individuazione di un tema su cui lavorare nei vari livelli scolari.

Sperimentazione monitorata

- costituzione, con il supporto della piattaforma de "La Casa degli insegnanti", di gruppi di ricerca per livelli di ordine di scuola (primaria, secondaria primo grado, primo biennio secondaria di secondo grado) finalizzati alla condivisione di materiali e alla progettazione e realizzazione di un percorso di ricerca/azione assistita e monitorata.
- Uso della piattaforma Moodle http://lacasasperimenta.wizshelf.org/, indispensabile per una formazione blended, lo scambio di informazioni e materiali, il tutoraggio. Strumenti utilizzati:
  - Forum, Wiki, oltre a materiali informativi messi a disposizione dai tutor;
  - inserimento di materiali con cadenza fissata dal gruppo di lavoro.
- Predisposizione di strumenti di monitoraggio.

Fase conclusiva

- Analisi monitoraggi;
- pubblicazione delle riflessioni sulle esperienze.

Nel momento in cui scriviamo questo articolo si sono già realizzate la Fase iniziale e parte della Fase formativa. Il punto di partenza di tale percorso è stato dunque rappresentato dalla rilevazione di esigenze ed esperienze sul campo e dalle riflessioni dei docenti sull'uso di GeoGebra in classe. L'analisi dei dati quali-quantitativi ricavati ci ha consentito la definizione di alcune teorie per l'elaborazione di micro-percorsi specifici per classi degli ordini scolari: primo ciclo di istruzione e primo biennio del secondo ciclo, fondati su ipotesi che saranno oggetto di verifica.

Nel giugno 2013, infatti, è stato presentato ai docenti che avevano partecipato ad attività de La Casa degli Insegnanti sul tema di GeoGebra o che avevano partecipato al primo incontro su "GeoGebra ed allievi con DSA", un questionario per verificare se e come GeoGebra veniva usato in classe, e in particolare nelle situazioni di difficoltà. Da questo questionario è emerso che il 90% dei docenti che usano GeoGebra lo utilizzano per il consolidamento di conoscenze, l'80% per esemplificare gli argomenti già spiegati o per affiancarlo ad altri strumenti; il 60% lo usa per spiegare o per introdurre un nuovo argomento e infine nessuno abbina all'uso di GeoGebra la valutazione (Figura 1). I docenti potevano scegliere più opzioni, anche se è significativo il fatto che una percentuale minore lo usi per affrontare argomenti nuovi mentre elevatissima è quella di chi lo usa come consolidamento. Una riflessione merita il fatto che la valutazione sia considerata un fatto non collegato all'uso di GeoGebra dalla totalità dei docenti, quasi che l'attività fatta con questo software non entri a pieno titolo nell'attività didattica della classe.

Che uso fai di GeoGebra in classe?

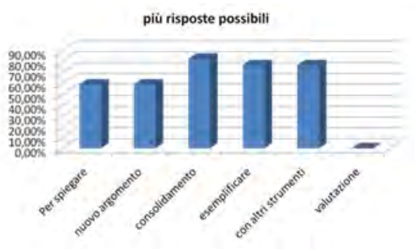


Figura 1

Come usano gli studenti GeoGebra?

Figura 2

I dati trovano conferma nella successiva domanda "Come usano gli studenti GeoGebra?". Circa il 90% risponde che lo fa usare per verificare argomenti già spiegati dal docente. Un po' più del 60% lo usa come scoperta di proprietà, mentre meno del 60% per risolvere problemi (Figura 2).

Nei commenti inseriti alla fine del questionario parecchi docenti segnalano gli ostacoli all'introduzione di GeoGebra nella didattica: mancanza di strutture adeguate o difficoltà di accesso a esse nella scuola (laboratori, computer, LIM) e questo è sicuramente un problema da affrontare; talvolta le risorse esistono, ma sono mal utilizzate e gestite in modo disorganizzato (per esempio esiste la LIM ma è stata installata in sala docenti!). Alcuni poi considerano GeoGebra come particolarmente adatto agli studenti con DSA, ma pensano che ne sia comunque difficile l'utilizzo perché per l'insegnante non è possibile seguire contemporaneamente due attività diverse: una spiegazione "normale" con la classe e il lavoro con GeoGebra di studenti con DSA.

Forse è proprio questo il nodo da sciogliere: il docente deve mettere in atto strategie e metodologie che siano inclusive, ovvero che coinvolgano tutti diversificando non il percorso ma la meta finale. La prima tappa del percorso dovrà essere raggiunta da tutti; poi ci sarà chi si fermerà ma ci saranno anche altre tappe successive e ognuno raggiungerà quella più adatta alle proprie forze. Soprattutto dovranno essere acquisiti da tutti i livelli base di competenze.

Due esperienze in classe

Rosalba De Luca Gaglio, Nazzarena Pescarmona

Vengono riportati qui di seguito due esempi relativi ad attività sviluppate al terzo anno della scuola secondaria di secondo grado (ITI), relativi alla parabola.

Il primo esempio si riferisce alla costruzione della **parabola come luogo geometrico**.

L'attività risponde a quanto indicato nelle linee guida degli Istituti Tecnici per la disciplina Matematica del secondo biennio, che specificano tra le **Conoscenze**: "Le coniche: definizioni come luoghi geometrici e loro rappresentazione nel piano cartesiano".

Si è quindi pensato a un approccio all'argomento che permettesse all'intera classe, compresi i DSA, di acquisire tali conoscenze mediante l'uso di GeoGebra.

Nella classe erano presenti uno studente con disturbo specifico di apprendimento misto di grado medio-lieve e uno con disturbo dell'apprendimento della lettura di grado severo, associata a difficoltà nelle prassi e della scrittura e delle abilità di calcolo. In particolare, in quest'ultimo studente, le difficoltà nello sviluppo delle abilità visuo-spaziali, si riflettevano in quelle della geometria.

Sono state messe in atto le misure dispensative e compensative concordate con la famiglia e per la valutazione sono stati valorizzati i processi di apprendimento e non solo i risultati ottenuti, tenendo conto di eventuali difficoltà espositive.

Il percorso si *è così* articolato:

- Ripresa del significato di luogo geometrico (citando figure note, es. circonferenza).
- Costruzione con GeoGebra di un insieme di punti *isolati* soddisfacenti una determinata proprietà: equidistanti da un punto fisso e da una retta fissa.
- Costruzione con GeoGebra del luogo geometrico soddisfacente la precedente proprietà.
- Passaggio al piano cartesiano.

È stata preparata una scheda per guidare gli studenti nella costruzione, quest'ultima riportata in Figura 3.

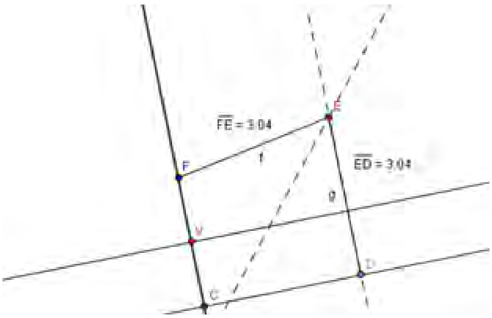


Figura 3

Figura 4

A questo punto sono state proposte alcune domande per avviare gli studenti a riflettere e capire bene il senso di quanto fatto, fino a generare per punti la traccia del luogo (Figura 4).

- I segmenti EF eED sono ____________ perché appartengono a ____________ ________________________
- Muovi il punto D sulla retta iniziale d. Quale altro punto si muove? _________
- In che modo variano le distanze EF ed ED?________________________________

Punta col tasto destro su E e attiva la Traccia. Muovi ora il punto D sulla retta d.

Osservando i punti della figura ottenuta, che cosa puoi dire della loro distanza da F e d ? (nota che F e d nel grafico sono elementi mantenuti per ora fissi).

Verifichiamo, ora, che i punti della traccia appartengono effettivamente a un luogo geometrico.

Attiva il comando  “Luogo” puntando prima su D e poi su E.

Il luogo ottenuto si adatta perfettamente alla traccia precedente! In base a tutte le osservazioni fatte possiamo dire che

la parabola è _________________________ che hanno la _______________ da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta fissa d, detta direttrice.

Infine attiva la vista algebrica. Inserisci nella barra di inserimento Equazioneluogo[E,D]. Nella vista algebrica comparirà l’equazione cartesiana della parabola appena tracciata. Essa varierà muovendo F o d.

Mostrando gli assi, si entra nel piano cartesiano. Prova a posizionare F sull’asse y e la direttrice parallelamente all’asse x. Come cambia l’equazione della parabola?

L’uso di GeoGebra per la costruzione passo passo della parabola ha consentito agli studenti, e in particolare allo studente con DSA, di ricordare gli oggetti e le loro caratteristiche e di memorizzare sequenze e procedure.

Nel secondo esempio *è stato* introdotto l’esame relativo alle posizioni retta e parabola, per affrontare la **risoluzione di un sistema di equazioni di secondo grado**.

La scheda fornita agli studenti prevedeva, a partire dal caso grafico, la determinazione delle posizioni tra retta e parabola. L’attività introduttiva di tipo esplorativo con GeoGebra ha favorito la comprensione attraverso la sequenza dei passi previsti.

In una fase successiva si è passati alla discussione/sistematizzazione dei singoli passaggi, e alla sintesi da parte del docente per il lavoro conclusivo degli allievi.

Nella classe terza ITI, in cui è stata sviluppata l’attività, era presente uno studente certificato DSA, che manifestava alcune difficoltà nel trattare l’aspetto grafico degli esercizi proposti, anche se non una vera e propria disgrafia.

L’allievo presentava inoltre difficoltà, se pur non gravi, di memorizzazione di algoritmi, sequenze e procedure. La caratteristica peculiare dello studente può forse essere sintetizzata come lentezza nel realizzare grafici, per ottenere informazioni utilizzabili nel contesto delle richieste/consegne delle attività proposte, e necessità di servirsi di mappe/schemi per affrontare la sequenza corretta dei passaggi. Lo studente aveva messo a frutto un discreto utilizzo degli strumenti informatici, e nei colloqui pregressi aveva sottolineato come le immagini (visualizzazione) lo avevano sempre aiutato nella comprensione e nella memorizzazione.

L’esperienza effettuata può essere considerata una sinergia di misure compensative in cui l’impiego di GeoGebra ha permesso allo studente di raggiungere gli obiettivi proposti e, nella fase iniziale di sviluppo dell’attività proposta alla classe, un esempio di didattica inclusiva.

Gli obiettivi:

- risolvere graficamente un sistema di secondo grado, modellizzabile come intersezione retta – parabola;
- determinare i punti che appartengono a entrambe le curve;

sono stati raggiunti in modo soddisfacente dallo studente.

Figura 5

Bibliografia

GeoGebra http://www.geogebra.org/cms/it

Armstrong, T. (2011). *The Power of Neurodiversity: Unleashing the Advantages of Your Differently Wired Brain*. Cambridge, MA: Da Capo Lifelong/Perseus Books.

Fiorin, I. (2012). *Scuola accogliente, scuola competente*. Brescia: La Scuola.

Zagrebelski, G. (2012). Cittadinanza e Costituzione. ISTORETO, Provincia di Torino. *Atti del Convegno* , Torino, ,25 settembre 2012.

GEOGEBRA E LE FUNZIONI: IL SENSO DELLA "VELOCITÀ DI VARIAZIONE"

Gaetano Di Caprio
ITIS "Pininfarina", Moncalieri (TO)

"Non basta guardare, occorre guardare con occhi che vogliono vedere, che credono in quello che vedono.

Galileo Galilei

Introduzione

Uno dei nuclei originari del concetto di funzione è quello *cinematico*: la funzione intesa come quantità o grandezza variabile (nel tempo) secondo una legge ben precisa. Tale registro è esplicitamente citato nelle Indicazioni Nazionali per il Liceo Scientifico "*Un tema importante di studio sarà il concetto di* ***velocità di variazione*** *di un processo rappresentato mediante una funzione"*. L'utilizzo di animazioni con GeoGebra può essere particolarmente indicato per rappresentare questo aspetto, come completamento e arricchimento dei registri grafico, simbolico e numerico del concetto di funzione.

In tale ottica, si descrive un percorso costituito da tre attività didattiche basate su GeoGebra, sperimentate con un gruppo di allievi di una classe quinta Liceo Scientifico.

La prima attività richiede agli allievi di "seguire" con il mouse il movimento di un punto sul grafico di una funzione, secondo una approccio "embodied" (Lakoff & Núñez, 2005). La seconda attività visualizza numeri che cambiano con diverse "velocità" e richiede possibili associazioni con espressioni algebriche. La terza e ultima attività, più complessa, si basa su una rappresentazione animata di una funzione e della sua derivata, dalla quale si richiede di dedurre il grafico della funzione stessa.

Per ciascuna delle tre attività ho predisposto per gli allievi un file GeoGebra con animazioni e delle schede di lavoro da compilare.

GeoGebra e il concetto di funzione

Una delle caratteristiche native di GeoGebra è la gestione dinamica con la rappresentazione *simultanea* di tre aspetti fondamentali relativi al concetto di funzione: l'aspetto grafico,l'aspetto simbolico e quello numerico (attraverso le viste grafica, algebrica e foglio di calcolo). Tale caratteristica è in accordo con quanto è espresso in (DeMarois & Tall, 1996), ossia alla tesi secondo cui è nel *collegamento* tra i differenti aspetti che risiede la creazione di significato nel processo di apprendimento. D'altra parte, per ciascuno dei tre aspetti è possibile utilizzare nella didattica anche gli strumenti tradizionali, come carta e penna. Se, invece, siamo interessati a far emergere anche l'aspetto "cinematico" del concetto di funzione, gli strumenti tradizionali si rivelano insufficienti e allora il software può giocare un ruolo determinante. In particolare, le potenzialità di GeoGebra di "animare" le costruzioni risultano particolarmente indicate per rappresentare un quarto registro, ovvero uno dei nuclei "originari" del concetto di funzione reale: la funzione come legge che regola il *cambiamento* di una variabile in dipendenza di un'altra.

In tale ottica il mio obiettivo didattico è stato di *affiancare* al consolidato approccio basato su tabelle e grafici alcune attività basate sull'interazione «percettiva» degli allievi mediante alcuni file GeoGebra con animazioni, che ho appositamente realizzato e predisposto allo scopo.

L’osservazione di fondo da cui sono partito è che una tabella di valori o un grafico possono essere visti come la registrazione successiva (e dunque statica) di un processo di cambiamento che avviene nel tempo. Di conseguenza, attraverso un esercizio di trasposizione, ho realizzato con GeoGebra una versione dinamica di una tabella visualizzando numeri che cambiano, e una versione dinamica di un grafico visualizzando un punto che si sposta. Inoltre, per quanto riguarda più specificamente il concetto di derivata, ho affiancato alla classica percezione statica dell’inclinazione della tangente (*ripidità*) la percezione dinamica della «velocità di variazione» di una grandezza (*rapidità*). Lo schema seguente riassume la trasposizione da visione statica a visione dinamica:

Figura 1

Le attività risultanti da questo approccio sono state sperimentate con allievi selezionati di una classe quinta Liceo Scientifico, in un periodo dell’anno scolastico in cui erano già stati ampiamente trattati (senza GeoGebra) gli aspetti classici relativi alle funzioni, dal dominio alla derivata. Ho, pertanto, dato per scontati una serie di prerequisiti, focalizzando le schede di lavoro sulla creazione di connessioni tra le conoscenze pregresse degli allievi e gli aspetti “percettivi” emersi dalle attività con GeoGebra. Nelle schede di lavoro non ho incluso alcuna istruzione tecnica relativa all’uso di GeoGebra dato che gli allievi conoscevano già ampiamente il software.

Attività 1: senso “motorio” della variazione

Il file GeoGebra relativo a questa prima attività mostra diversi grafici di funzioni, in colori diversi, come nella figura seguente:

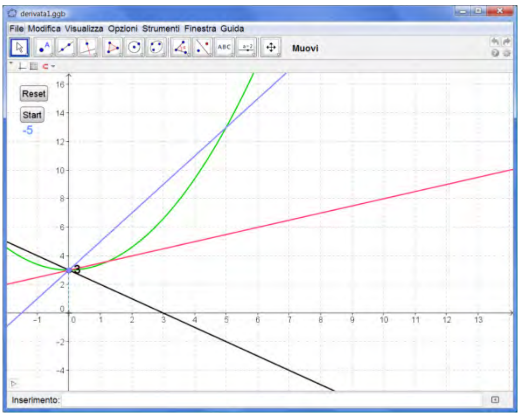


Figura 2

Schiacciando il tasto “Start” un puntino grigio inizia a muoversi orizzontalmente verso destra con velocità costante lasciando la “traccia” della sua traiettoria; un altro punto, invece, di colore blu, vincolato all’asse y e con la stessa ordinata del punto mobile, è inizialmente fisso. Se si trascina il punto blu con movimenti verticali del mouse lungo l’asse y, l’effetto è la variazione della coordinata y del punto mobile. Il punto blu, in sostanza, permette di *guidare* il moto del punto grigio. Come risultato, la traiettoria del punto mobile cambia. Nella scheda di lavoro viene chiesto agli allievi di fare in modo che il punto mobile rimanga quanto più possibile aderente al grafico delle varie funzioni. Da un punto di vista percettivo-motorio, è chiaro che, ad esempio, per seguire la retta "rossa" il mouse dovrà essere spostato verso l'alto "lentamente" e "regolarmente", mentre per seguire la funzione quadratica, il mouse dovrà essere spostato verso l'alto con una velocità via via crescente.

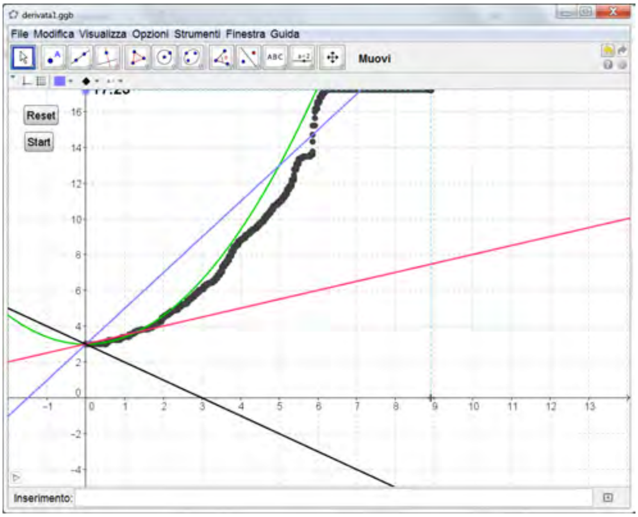


Figura 3. Le tre rette si susseguono con pendenze crescenti nell'ordine nera, rossa, blu

La scheda di lavoro che ho fornito agli studenti è la seguente:

SCHEDA 1.1

1. Dopo aver cliccato "start", muovendo il mouse, cerca di seguire il più possibile la retta **rossa** (puoi fare più prove cliccando su "reset" e "start").
2. Descrivi brevemente:
   a. Il movimento della tua mano

   ____

   b. In che modo variano le ordinate del punto in movimento

   ____
3. Muovendo il mouse, cerca di seguire il più possibile la retta **blu** e descrivi:
   a. Il movimento della tua mano

   ____

   b. In che modo variano le ordinate del punto in movimento

   ____
4. Muovendo il mouse, cerca di seguire il più possibile la retta **nera** e descrivi:
   a. Il movimento della tua mano

   ____

   b. In che modo variano le ordinate del punto in movimento

   ____
5. Muovendo il mouse, cerca di seguire il più possibile la parabola **(verde)** e descrivi:
   a. Il movimento della tua mano

   ____

   b. In che modo variano le ordinate del punto in movimento

   ____

6. Descrivi la differenza (in termini di movimento) tra **retta rossa e retta blu**

7. Descrivi la differenza (in termini di movimento) tra **retta rossa e retta nera**

8. Descrivi la differenza (in termini di movimento) tra **retta rossa e parabola**

9. **CONCLUSIONI** (metti in relazione le tue conoscenze con le attività di questa scheda):

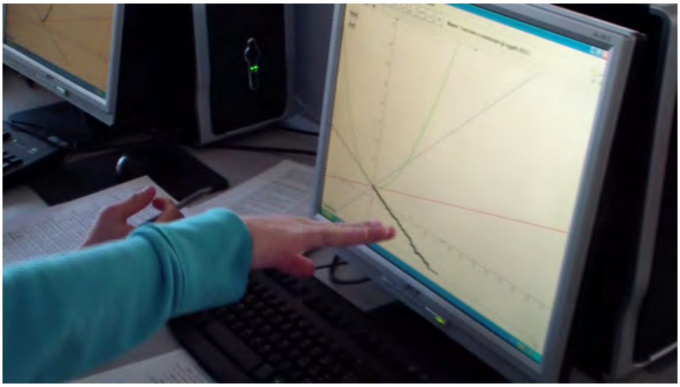


Figura 4

Gli allievi, lavorando in coppia, non hanno avuto particolari difficoltà nel riconoscere le connessioni tra l'andamento/ripidità dei grafici con il tipo di movimento del mouse richiesto per "pilotare" la traiettoria del punto, ossia della velocità di variazione dell'*altezza* del punto. In particolare, è emersa chiaramente la differenza tra la velocità costante associata alle rette e a quella crescente associata alla funzione quadratica.

Attività 2: numeri in movimento

Il file GeoGebra relativo alla seconda attività mostra una *pseudo-tabella* di coppie $(x,f(x))$, in cui, al posto di un certo numero di righe, viene visualizzata un'unica coppia di valori che cambiano nel tempo:

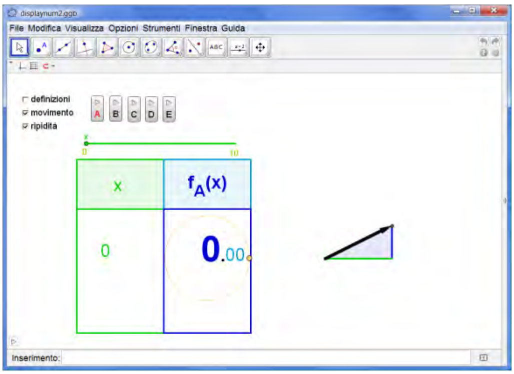


Figura 5

A ciascuno dei cinque tasti in alto corrisponde una funzione diversa (non nota agli allievi). Schiacciando, ad esempio, il tasto A, viene attivata l'animazione relativa alla funzione $f_A(x)$. Il numero nella colonna delle *x* cambia *regolarmente*, assumendo via via i valori successivi da 0 a 10, mentre il numero nella colonna delle *f(x)* cambia con una velocità che (ovviamente) dipende dalla funzione selezionata. Inoltre, per rafforzare le connessioni tra i concetti, ho aggiunto anche la possibilità di visualizzare la derivata della funzione in esame, rappresentata come ripidità, ossia come direzione della retta tangente (il vettore a destra della Figura 5).

Nella scheda di lavoro fornita agli allievi richiedo loro di dedurre quante più informazioni è possibile relativamente alle varie funzioni (grafico, espressione simbolica, ecc.), semplicemente dall'osservazione del modo in cui i numeri variano:

Le cinque funzioni sono state scelte cercando di realizzare un grado crescente di difficoltà e di evidenziare velocità di crescita diverse, da lineare a esponenziale. Nella fattispecie:

$f_A(x) = \frac{1}{2}x$	$f_B(x) = \frac{1}{2}x^2$	$f_C(x) = \sqrt{x}$	$f_D(x) = \frac{1}{10 - x}$	$f_E(x) = e^{x-5}$

Anche in questo caso il lavoro in cooperazione ha dato ottimi frutti. Gli studenti dello stesso gruppo hanno quasi sempre scelto (autonomamente) di visualizzare su due monitor funzioni *diverse* in modo da dedurre più informazioni attraverso il *confronto contemporaneo* tra gli andamenti. I risultati, sono stati estremamente incoraggianti, come si può evincere da una delle schede compilate dagli allievi:

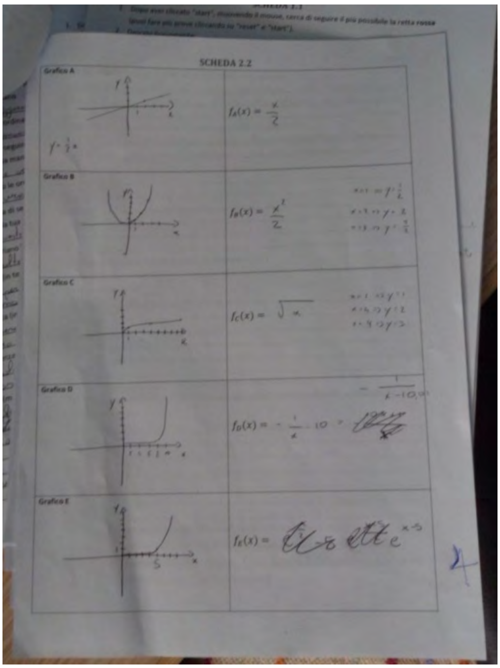


Figura 6

Attività 3: velocità di variazione e pendenza

Il file GeoGebra relativo a quest'ultima attività è decisamente più ricco e complesso, per cui sarà compito più arduo cercare di descriverne il funzionamento. La prima strategia di fondo che ho utilizzato è la rappresentazione del grafico di una funzione non come insieme di punti ma come un *singolo* punto che si muove lungo il grafico (senza mostrare quest'ultimo) in modo che la sua ascissa aumenti con velocità costante. La seconda idea è stata di rappresentare (o evocare) il movimento del punto in maniera *relativa*. Si pensi, ad esempio, ad una gara di Formula 1 seguita in TV: spesso le inquadrature sono tali per cui un'auto è "fissa" al centro dello schermo, e il movimento viene percepito perché è *il contesto a scorrere velocemente* nel verso opposto al movimento. Allo stesso modo, in questa costruzione GeoGebra, di fatto, il punto è fisso al centro dello schermo e a muoversi sono i riferimenti cartesiani, con un grado configurabile di "evidenza".

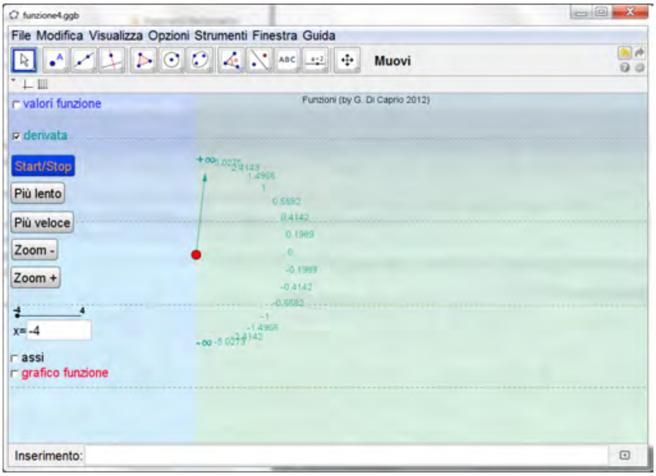


Figura 7

Un altro elemento visivo (che si evince dalla figura 6) è una freccia che rappresenta la direzione della tangente del grafico nel punto considerato. L'inclinazione della freccia è, pertanto, legata alla velocità di variazione *verticale* della posizione del punto, ossia alla derivata della funzione. Nella scala numerica semicircolare, dunque, vengono riportati i vari valori della derivata. In tal senso la freccia tangente appare come una sorta di *lancetta del tachimetro*, che indica appunto la velocità istantanea di variazione della funzione.

Scopo dell'attività è, come nell'attività precedente, dedurre le caratteristiche della funzione, a partire dall'osservazione del movimento del punto e della freccia-lancetta. In questo caso, però, l'attività prevede che il livello di dettaglio della visualizzazione venga progressivamente aumentato, aggiungendo via via ulteriori elementi, fino a raggiungere la vista completa, mostrata nella figura seguente:

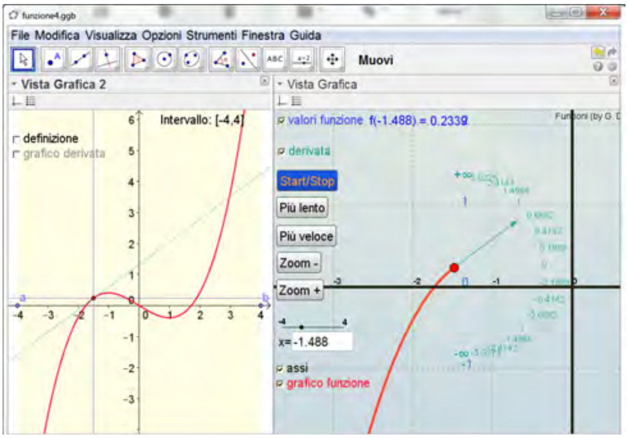


Figura 8

Anche in questo caso la scheda di lavoro fornita agli allievi richiede di ricavare le informazioni relative alla funzione, attraverso l'aggiunta progressiva di elementi:

SCHEDA 3.1

1. Clicca sul pulsante Start e osserva il punto rosso. Cosa osservi:

   ____
   ____
   ____

2. Come cambia il comportamento del punto al variare del valore di x?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

3. Compila la scheda 3.2 relativamente alla funzione $f_A(x)$.
4. Attiva **gli assi** e i **valori funzione.** Cosa puoi aggiungere relativamente alle caratteristiche della funzione osservate?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

5. Riporta/integra o correggi le informazioni riportate nella scheda 3.2
6. Attiva **derivata e grafico funzione.** Cosa puoi aggiungere relativamente alle caratteristiche della funzione osservate?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

7. Disattiva **tutti** gli strumenti **eccetto** "derivata". Osserva il comportamento del punto, relativamente alle funzioni $f_B(x)$ e $f_C(x)$. e, per ciascuna di esse, compila la scheda 3.2
8. Verifica le tue congetture relative alle funzioni , $f_A(x)$, $f_B(x)$ e $f_C(x)$confrontando la scheda 3.2 con i grafici che puoi visualizzare nella vista grafica 2

Durante l'attività gli allievi hanno ampiamente collaborato e, nelle loro discussioni, l'utilizzo della gestualità è stato esteso (figura 9).

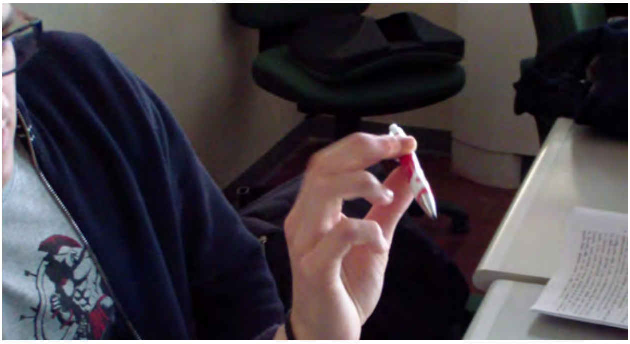
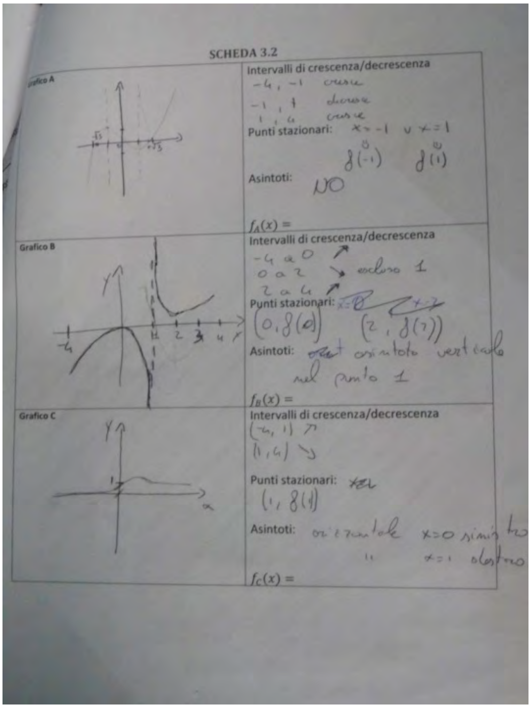


Figura 9

Gli allievi più brillanti sono riusciti a completare quasi interamente la scheda accessoria, in cui si richiedevano esplicitamente tutti quegli elementi (intervalli di crescenza, decrescenza, massimi/minimi, asintoti) che tradizionalmente vengono ricavati in maniera più o meno meccanica dall'espressione simbolica della funzione (*studio di funzione*). In questa attività basata su GeoGebra, invece, l'espressione simbolica rappresentava *l'ultimo passo* (per la verità estremamente arduo) dello studio di funzione (Figura 10).



SCHEDA 3.2

Grafico A
Intervalli di crescenza/decrescenza
Punti stazionari:
Asintoti: NO
$f_A(x) =$

Grafico B
Intervalli di crescenza/decrescenza
Punti stazionari:
Asintoti: asintoto verticale nel punto 1
$f_B(x) =$

Grafico C
Intervalli di crescenza/decrescenza
Punti stazionari:
Asintoti:
$f_C(x) =$

Figura 10

Le funzioni A, B e C scelte per questa attività erano, naturalmente, diverse da quelle relative all'attività precedente, ovvero:

$f_A(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{5}$	$f_B(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$	$f_C(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

Riflessioni conclusive

Le attività presentate confermano l'estrema versatilità di un software come GeoGebra e ne mettono in risalto anche le potenzialità come strumento di *simulazione di processi dinamici* (si veda anche Di Caprio, 2012).

La sperimentazione descritta ha dato risultati decisamente interessanti ma è auspicabile che venga considerata solo come primo (parziale) passo di una sperimentazione più completa. Le attività, infatti, sono state proposte esclusivamente ad allievi particolarmente dotati, nell'ottica di un potenziamento delle eccellenze. Sarei ben lieto se ci fossero insegnanti eventualmente interessati a utilizzare gli stessi file con obiettivi diversi, con allievi con prerequisiti diversi e di livello scolare diverso, adattando opportunamente le schede di lavoro. I file GeoGebra che ho realizzato per la sperimentazione saranno a breve disponibili sul sito www.magicmath.it.

Bibliografia

Arzarello, F., Maschietto, M. & Robutti, O. (2002). *Riflessioni su variabili e funzioni,* Actes des Séminaires SFIDA –13 à SFIDA –16. (vol. 4, 1999-2001, XVI, pp. 17-26).

DeMarois, P.&Tall, D. (1996). Facets and Layers of the Function Concept. In L. Teoksessa, Puig & A. Gutierrez (toim.). *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* PME 20, Valencia, Spain. Vol. 2, 297–304.

Di Caprio, G. (2012). Animazione con GeoGebra: esempi di utilizzo nella didattica della Fisica, in O. Robutti & M. Mosca *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA 2011* (pp. 455-462).

Kleiner,I. (1989). *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey.* The College Mathematics Journal, September 1989, Volume 20, Number 4, pp.282-300.

Lakoff, G.& Núñez, R. (2005). *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied* dà origine alla matematica. Torino: Bollati Boringhieri.

Tall, D. (1991). *Intuition and rigor: the role of visualization in the calculus.* Visualization in Mathematics (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. 19, 105-119.

ELLISSE E IPERBOLE: DAL PROBLEMA ALLA CURVA

Paola Eandi
Liceo scientifico Scienze applicate dell'I.I.S. G. Peano di Torino

Premessa

Il percorso didattico qui presentato è stato svolto nella seconda parte dell'a.s. 2012/13 in una classe terza del Liceo Scientifico-opzione Scienze applicate dell'I.I.S. G. Peano di Torino, durante la fase di sperimentazione nell'ambito del Progetto 'Comunità di pratica sul software GeoGebra', il cui corso avevo frequentato nell'a.s. 2011/12.

L'attività trae spunto da un problema proposto durante le lezioni del corso, che riguardava la ricerca del triangolo di area massima tra i triangoli isoperimetrici con base fissata. Al di là della risoluzione del problema con GeoGebra, i tutor del corso avevano proposto di riflettere su qualche uso didattico di tale questione. Provando a disegnare i vari triangoli con GeoGebra e riflettendo sulla proprietà di definizione di tali triangoli, mi sono resa conto che i vertici si trovano su una ellisse. Ho pensato allora che si potesse partire proprio da un problema del genere per introdurre lo studio dell'ellisse, rendendo così più concreta la proprietà di definizione da cui usualmente si parte. Successivamente ho cercato e trovato un problema concreto che potesse portare analogamente alla costruzione dell'iperbole.

Per ciascuna delle due curve, quindi, gli studenti sono partiti da una proposta di lavoro su un problema, lo hanno cercato di risolvere, usando dapprima riga e compasso e poi il software GeoGebra, arrivando così a scoprire le due curve e le loro proprietà; per giungere alla loro equazione canonica.

Progettazione

Obiettivi

Conoscenze

- Caratteristiche dell'ellisse e dell'iperbole come luoghi geometrici nel piano euclideo
- Equazione canonica dell'ellisse e dell'iperbole nel piano cartesiano, significato dei parametri delle equazioni
- Sapere disegnare ellisse e iperbole a partire dalla definizione come luoghi geometrici, a mano e con GeoGebra

Abilità

- Saper riconoscere l'equazione di una ellisse e di una iperbole
- Saper disegnare ellisse e iperbole a partire dalla loro equazione
- Saper risolvere esercizi con l'utilizzo di GeoGebra

Competenze

- Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni
- Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica

Prerequisiti

Tenuto conto che l'attività è stata svolta nella classe al termine dello studio della geometria analitica e che gli studenti avevano già conosciuto e lavorato con GeoGebra, in qualche caso con buon interesse e risultati, ho potuto contare sul possesso dei seguenti prerequisiti:

Prerequisiti matematici:

- Nozioni di base della geometria euclidea del piano. Trasformazioni geometriche: simmetria. Costruzioni geometriche elementari nel piano.
- Concetto di luogo geometrico nel piano euclideo e sua equazione nel piano cartesiano.
- Retta, circonferenza, parabola nel piano cartesiano e problemi relativi.
- Risoluzione di equazioni e sistemi non lineari.

Prerequisiti GeoGebra

- Saper costruire punti, segmenti, rette, circonferenze nel piano. Sapere usare gli slider.
- Sapere utilizzare i principali strumenti di GeoGebra per l'analisi delle figure (puntatore, aspetto degli oggetti, proprietà, traccia, ...).

Fasi del percorso

Il percorso è strutturato in due fasi, una per ogni curva, della durata di quattro ore ciascuna.

Nel dettaglio, per ogni curva:

1. Attività laboratoriale (2 ore):

Proposta di un problema che conduce alla costruzione della curva (scheda di lavoro), ricerca della soluzione con riga e compasso, risoluzione con GeoGebra e analisi delle caratteristiche della curva.

2. Discussione collettiva-lezione frontale (1 ora):

Sistematizzazione e riepilogo sulle caratteristiche della curva trovata, anche al variare dei dati di partenza. Definizione dei parametri in modo 'classico'.

3. Attività guidata-lezione frontale (1 ora):

Ricerca dell'equazione della curva come luogo di punti. Dall'equazione canonica al suo disegno.

Le attività si sono svolte in laboratorio, con 1 PC per ogni gruppo di due-tre studenti e in aula dotata di LIM; si sono alternate attività di ricerca di gruppo, riflessioni collettive, momenti di sistematizzazione collettiva e di rielaborazione personale.

Alla scoperta dell'ellisse

Fase 1

Viene proposta agli studenti, suddivisi in gruppi da 2-3 ciascuno, la seguente scheda di lavoro:

Nome e cognome................................

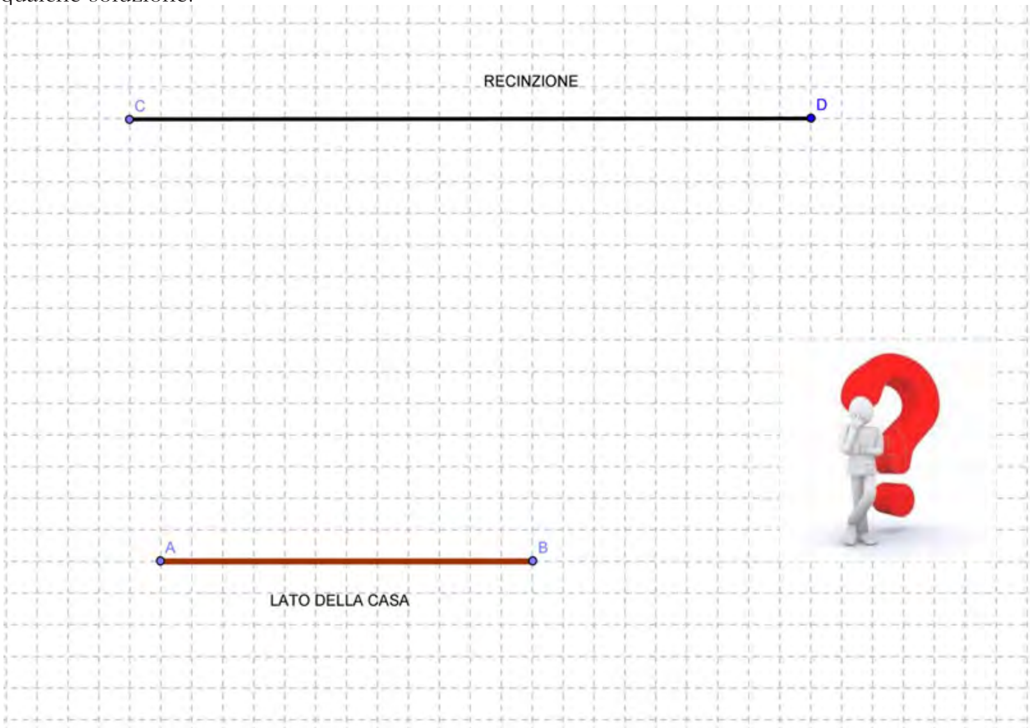
SCHEDA DI LAVORO 1

FASE 1

Problema. Il proprietario di una casa vuole creare un piccolo giardino triangolare, avente come base un lato della casa, e il terzo vertice in una posizione a sua scelta. Il lato della casa misura 12 metri. Egli ha a disposizione 22 metri di recinzione. Dove può fissare il terzo vertice del suo giardino?

Quale posizione gli assicurerà la superficie maggiore?

Note: per risolvere il problema, prova prima con riga e compasso sul disegno qui sotto a trovare qualche soluzione.



Illustra nel dettaglio il procedimento che usi per la costruzione dei punti cercati.
Dove si trovano i punti? Quante possibilità ci sono?
Riesci a esplicitare la proprietà che individua la posizione dei vari punti?
Riesci a vedere posizioni particolari? Riesci a immaginare dove si trovano tutti i punti possibili?

In questa prima fase, come indicato nella scheda, i ragazzi sono invitati a risolvere il problema senza l'uso di software.

Inizialmente è evidente una certa difficoltà a comprendere come si possa procedere: molti iniziano a disegnare il triangolo isoscele, misurando con il righello la metà della lunghezza della recinzione e poi tracciando l'asse del segmento rappresentante il lato della casa. Non è immediato comprendere come usare il compasso. Dopo qualche suggerimento, tutti riescono a procedere e ad arrivare a una prima soluzione.

«Si prende *sulla recinzione una distanza PD o PC. Questa distanza sarà il raggio della circonferenza con il centro in A o in B nel segmento 'lato della casa'. A questo punto si prende la distanza PC o PD rimasta sulla recinzione e quella sarà il raggio di una seconda circonferenza su A o B (a seconda del punto preso nella 1^ circonferenza). Ci saranno due punti di intersezione. Si sceglie un punto di intersezione (o sopra o sotto) e si unisce con i punti A e B. Si ottiene un triangolo APB. Si ripete il procedimento con varie misure fino a ottenere un po' di triangoli.*

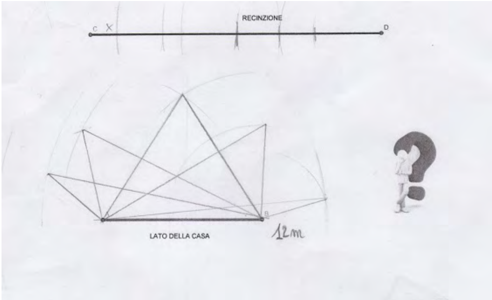


Figura 1

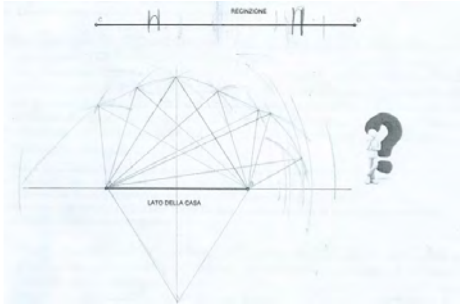


Figura 2

I punti ci sono fino a che la differenza tra le 2 misure prese non diventa maggiore della base. I punti trovati si trovano su un'ellisse. Il punto limite sarà quello in cui la differenza tra le misure prese coinciderà con la lunghezza del lato della casa. Se la differenza tra le misure supera quella della base, non riuscirò più a disegnare i punti.»

«*I punti si trovano su una ellisse e ci sono infinite possibilità. La distanza dei punti dai vertici A e B forma triangoli che hanno la somma dei lati obliqui uguale.*

Una posizione particolare si ha quando il terzo vertice si trova sulla retta passante per A e B»

«*Posizione particolare è anche quella dove i due lati della recinzione sono perfettamente equivalenti, otteniamo quindi una recinzione a forma di triangolo isoscele*»

«*L'area maggiore si verifica quando i lati hanno lo stesso valore, perché si ottiene l'altezza maggiore*»

Già da questi pochi esempi si vede che i ragazzi sono riusciti a capire dove sono situati i vertici dei triangoli e qual è la posizione che porta all'area massima. Sono emerse anche con facilità le posizioni 'limite', o i casi in cui era impossibile disegnare il triangolo e si è riconosciuto in questo il ruolo fondamentale delle disuguaglianze triangolari. In questa prima fase, poi, sono già emerse le simmetrie della curva formata dai vertici e il fatto che tale curva risulta compresa in una parte ben delimitata del piano.

Fase 2

Dopo questo primo approccio si è fornita la seconda parte della scheda di lavoro, insieme al file GeoGebra già predisposto sulla falsariga del disegno fornito nella fase1.

FASE 2

Per verificare le tue supposizioni prova ora ad aprire il file '**disegno giardino.file1.ggb'** di GeoGebra, nel quale è riprodotto il disegno qui sopra . Prova a ripetere la costruzione fatta 'a mano', sul file ; (ricorda l'uso dello strumento 'circonferenza di dati centro e raggio').
Tieni presente che il punto E determina automaticamente la lunghezza dei due 'lati' del triangolo da costruire.
Prova a fare variare la posizione di E e usa la modalità 'traccia' sul punto che individua il vertice del triangolo cercato; studia come varia la sua posizione al variare della lunghezza dei due lati.
Trovi conferma alle tue ipotesi?
Ci sono posizioni del punto E che non permettono di disegnare il triangolo? Come te lo spieghi?
Ci sono posizioni-limite? Quali?
Noti delle simmetrie? In quale parte di piano sono contenuti i punti?
Cosa succede quando E corrisponde al punto medio del segmento CD?
Riconosci, nella traccia di E, una curva già nota?
Prova ora a variare la lunghezza della recinzione nel campo di inserimento.
Cosa noti? Come si modifica la curva su cui si trovano i vertici?
Esistono casi in cui la costruzione non è possibile? Sapresti spiegare perché?
Prova anche a variare la misura del lato della casa, mantenendo fissa la recinzione. Osserva cosa succede.
Annota le tue osservazioni.

La curva generata dai vertici dei triangoli si chiama ELLISSE, e viene definita proprio come il 'luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi'.

I ragazzi, che già conoscono i principali comandi del software, ricostruiscono la figura sul file e, sfruttando la modalità traccia e la dinamicità della figura, confermano le loro supposizioni.

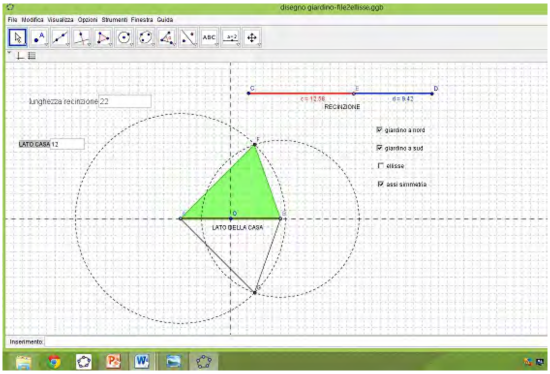


Figura 3. La costruzione dei singoli vertici

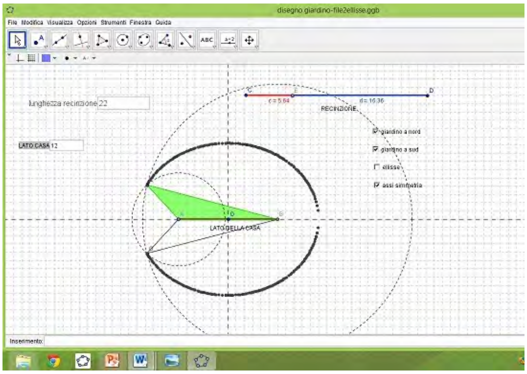


Figura 4. Le posizioni possibili

«*Sì, le ipotesi sono giuste. Non posso disegnare i punti quando la differenza dei lati supera la base, mentre i punti limite si trovano quando la differenza coincide con la base*»

«*Le posizioni-limite sono le seguenti:*

- *quando la differenza dei lati è uguale al lato AB (lato della casa)*
- *quando CE=CD, ("E" punto medio) ossia nel momento in cui si determina un triangolo isoscele con la maggiore altezza e quindi maggiore area.* »

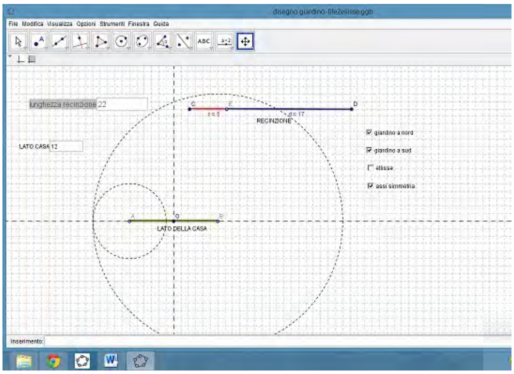


Figura 5. La posizione limite

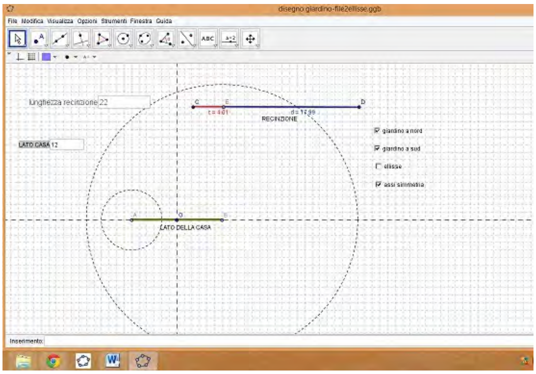


Figura 6. Impossibile trovare il vertice

«*Sì, vi sono delle simmetrie riguardanti l'ellisse:*

- *simmetria assiale individuata da AB*
- *simmetria assiale individuata dalla perpendicolare nel punto medio di AB*
- *simmetria centrale individuata dall'intersezione della perpendicolare con AB stesso.*

L'ellisse è inscrivibile in un rettangolo che ha come punto medio dei suoi lati i "vertici" (punti più estremi dell'ellisse) della curva»

Il file, poi, prevede la possibilità di variare le misure dei dati iniziali, permettendo di scoprire cosa e come varia nella costruzione dell'ellisse.

Gli studenti riescono ad arrivare con una certa facilità a capire le caratteristiche principali della curva, il rapporto tra forma di essa e rapporto tra ' lato della casa e recinzione' (praticamente l'eccentricità) e i casi limite: la circonferenza e il segmento:

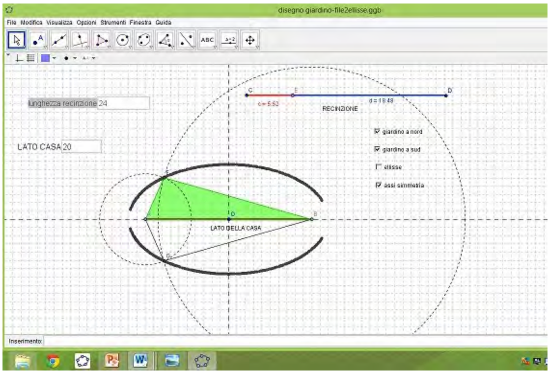


Figura 7. Recinzione poco maggiore del lato casa

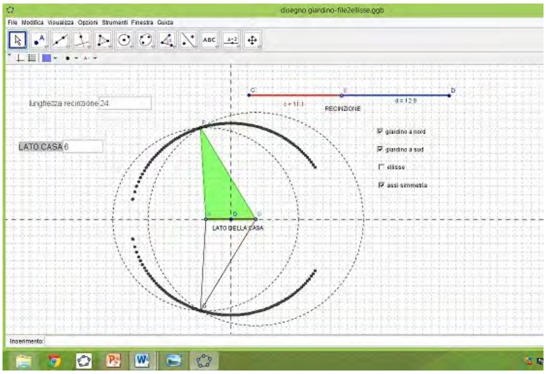


Figura 8. Recinzione molto maggiore del lato casa

«*All'aumentare o al diminuire della recinzione aumenta/diminuisce la grandezza dell'ellisse. Se la lunghezza della recinzione è uguale a quella del lato della casa i punti saranno proprio sul segmento AB, poiché le circonferenze sono sempre tangenti. La costruzione è impossibile se la recinzione è minore di AB, poiché le circonferenze non si toccano. Inoltre più AB è minore (rispetto a CD) più l'ellisse prende la forma di una circonferenza; se AB è zero l'ellisse diventa una circonferenza. Per disegnare l'ellisse occorre che la recinzione sia sempre >AB*».

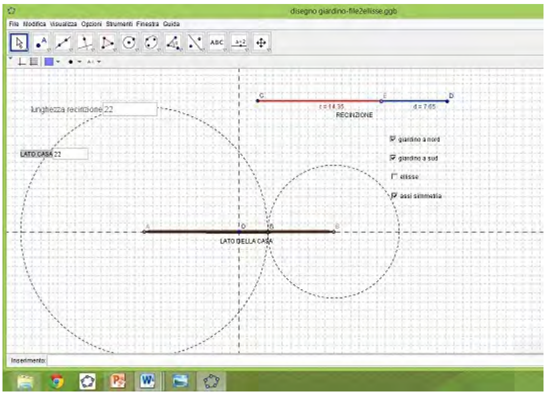


Figura 9. Recinzione uguale al lato casa

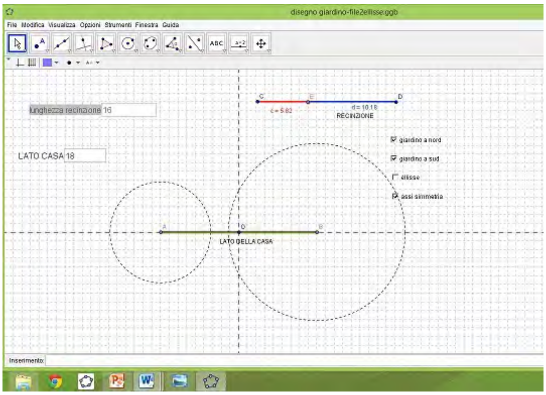


Figura 10. Recinzione minore del lato casa

«Se la lunghezza della recinzione è minore di quella del lato della casa, non si ottengono intersezioni tra le due circonferenze. Invece se la lunghezza della recinzione è di molto superiore al lato della casa, si ottiene quasi una circonferenza».

Sistematizzazione e conclusioni

Terminata questa fase, nella lezione successiva si è passati alla discussione collettiva e alla sistematizzazione. Si è potuto così ritrovare la definizione classica di ellisse, e parlare di semiassi a e b, di fuochi, di distanza focale $2c$, di eccentricità c/a, comprendendone in pieno il significato. In particolare è risultata ovvia la proprietà che $a>c$ e si è scoperta la proprietà che lega a, b e c (Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo corrispondente alla posizione di altezza massima).

Sempre utilizzando il file preparato, visualizzando gli assi cartesiani, si è poi passati alla ricerca dell'equazione nel piano cartesiano, utilizzando, come per le altre curve già studiate, la definizione come luogo geometrico, e procedendo in maniera 'classica'.

E' stato interessante, e per quanto mi riguarda non del tutto previsto a priori, vedere che le condizioni algebriche necessarie per potere arrivare all'equazione e il significato dei parametri presenti in essa erano già stati scoperti nella prima fase del lavoro e l'algebra confermava quanto già si sapeva.

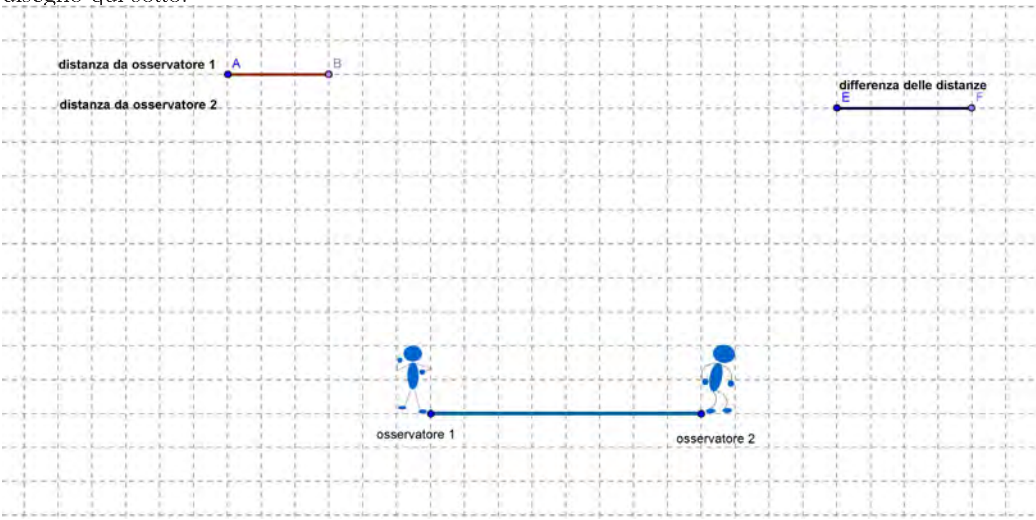
Alla conclusione del percorso gli studenti avevano compreso la natura della curva e il significato dei parametri in gioco ed erano in grado di passare agevolmente dall'equazione canonica al grafico corrispondente. Per questa ultima parte è stato anche utilizzato un file dinamico ggb che rappresenta l'ellisse a partire dalla sua equazione canonica, al variare dei parametri.

Alla scoperta dell'iperbole

Fase 1

Come per l'ellisse, si propone agli studenti divisi in gruppi da 2-3, in laboratorio, la seguente scheda di lavoro:

SCHEDA DI LAVORO2
Studente______________________
FASE 1
Problema
In un punto sconosciuto S di un certo territorio avviene un'esplosione. Due osservatori O_1 e O_2 sono posti l'uno dall'altro a una distanza nota. L'osservatore O_2 sente l'esplosione 1 secondo dopo l'osservatore O_1.
Come saprai il suono viaggia nell'aria alla velocità di circa 342 m/s: quindi il punto S dove avviene l'esplosione si trova 342 metri più vicino all'osservatore 1 rispetto all'osservatore 2. Dove può essere avvenuta l'esplosione? (supponi per semplicità che tutto avvenga a livello del terreno, quindi considera un territorio piano).
Nota: per risolvere il problema prova anzitutto con riga e compasso a trovare qualche soluzione sul disegno qui sotto:



Illustra dettagliatamente il procedimento che usi per trovare le posizioni possibili per l'esplosione
Dove si trovano i punti? Quante possibilità ci sono?
Riesci a esplicitare la proprietà che individua la posizione dei vari punti?
Riesci a vedere posizioni particolari?

Dopo l'esperienza precedente e dopo qualche chiarimento sul problema, in particolare sul significato di 'differenza delle distanze', i ragazzi non hanno avuto difficoltà a iniziare la costruzione dei punti:

«Tracciamo una circonferenza di centro O_1 e un raggio qualunque. Poi si traccia una circonferenza di centro O_2 e raggio uguale alla somma tra il raggio della prima circonferenza e la differenza delle distanze (uguale a quattro in questo caso). Questo procedimento va ripetuto più volte variando il raggio. Le intersezioni tra le coppie di circonferenze sono i punti della curva. Le possibilità sono infinite per r>2, cioè per un raggio abbastanza grande perché le due circonferenze si intersechino.»

«Si apre a caso il compasso e si punta in O_1 disegnando una circonferenza di raggio R, si punta in O_2 con apertura R+ EF e si trova l'intersezione con la prima circonferenza. I punti si trovano su una iperbole. Ci sono infinite possibilità. I punti sono tali che, dato il triangolo O_1O_2C, O_2C-O_1C è costante.»

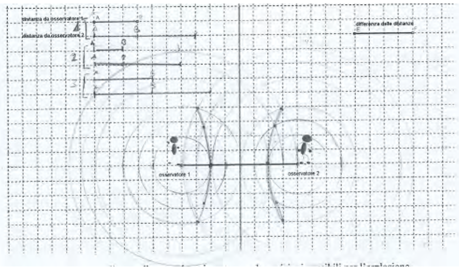


Figura 11

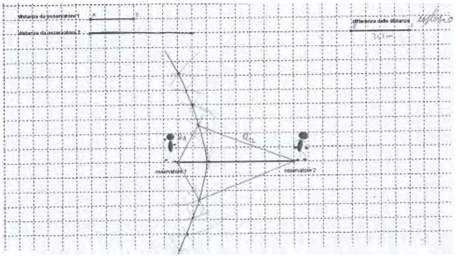


Figura 12

«La posizione limite è quando le due circonferenze sono tangenti esternamente, cioè quando i due punti sono coincidenti e si trovano sul segmento O_1O_2 (in questo caso per r=2)».

«Non è possibile individuare punti quando la somma delle distanze degli osservatori dall'esplosione (i due raggi) è minore della distanza tra gli osservatori».

Come per l'ellisse, già in questa prima fase i ragazzi hanno scoperto dove sono situati i punti della possibile esplosione, e quali sono alcune caratteristiche della curva formata da tali punti. E' risultato evidente anche qui il ruolo delle disuguaglianze triangolari, dal momento che non era possibile formare il triangolo e quindi determinare il punto, se la somma delle distanze dell'esplosione dagli osservatori era minore della distanza tra gli osservatori. Ugualmente si sono scoperte le posizioni limite (i vertici dell'iperbole) e le simmetrie della curva, nel caso in cui si scambiavano i ruoli dei due osservatori.

Fase 2

Dopo questo primo approccio si è fornita la seconda parte della scheda di lavoro, insieme al file GeoGebra già predisposto sulla falsariga del disegno fornito nella fase1:

FASE 2
Per verificare le tue supposizioni prova ora ad aprire il file '**esplosione-file1.ggb**' di GeoGebra, nel quale è riprodotto il disegno qui sopra. Prova a ripetere la costruzione fatta 'a mano'. Nel file trovi già impostata la distanza dall'osservatore 2 come somma della distanza dall'osservatore 1 e della differenza delle distanze. Usa la stessa costruzione di prima per trovare il punto cercato.
Prova a fare variare la distanza dell'esplosione dall'osservatore 1 e usa la modalità traccia per scoprire dove si trovano tutti i punti possibili.
Trovi conferma alle tue ipotesi?
Ci sono casi in cui non riesci a trovare il punto? Come te lo spieghi?
I punti cercati si trovano in una parte di piano limitata? Perché?

Prova ora a scambiare i ruoli dei due osservatori e far sì che sia l'osservatore 1 a trovarsi più distante dell'osservatore 2 dall'esplosione. Dove si trovano i punti? Ci sono delle simmetrie? Riconosci una curva nota?
Prova ora a variare la lunghezza della differenza delle distanze. Come varia la curva su cui si trovano le posizioni dell'esplosione? Esistono casi in cui non è possibile la costruzione? Perché?
Modifica anche la distanza tra gli osservatori, mantenendo fissa la differenza delle distanze. Come varia la curva? Osserva e scrivi le tue considerazioni.
La curva su cui si trovano i punti cercati si chiama IPERBOLE. Essa viene definita come "Luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi".

Facilmente gli studenti ripetono la costruzione sul file, che permette loro anzitutto di verificare le ipotesi fatte nella prima fase e di completare le osservazioni:

«*Trovo conferma alle mie ipotesi, ottengo la stessa costruzione; i punti si trovano su una iperbole, e verificano la proprietà di avere costante la differenza delle distanze dagli osservatori*»

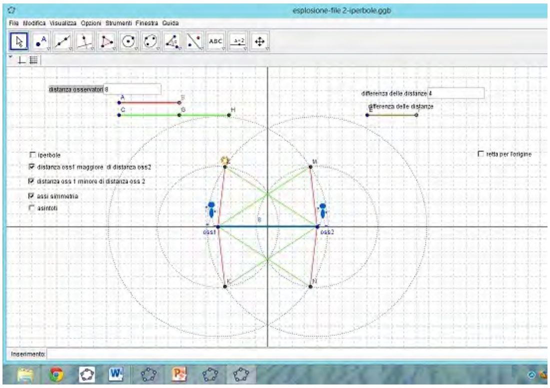


Figura 13.La costruzione dei punti

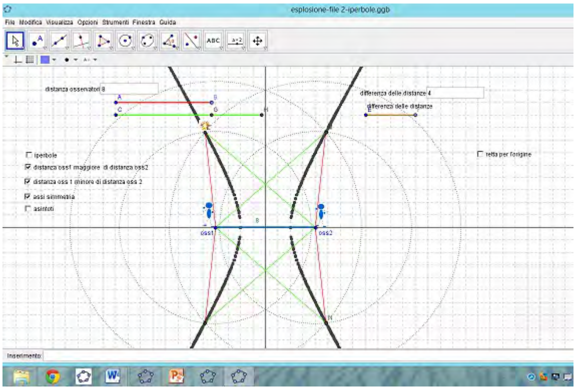


Figura 14. La curva completa

«*L'iperbole ottenuta prosegue all'infinito, più aumenta il raggio, più i punti si allontanano dagli osservatori*» «Scambiando il ruolo dei due osservatori si trova un ramo di iperbole uguale e simmetrico al precedente. Quindi c'è una *simmetria assiale che ha per asse il segmento* O_1O_2»

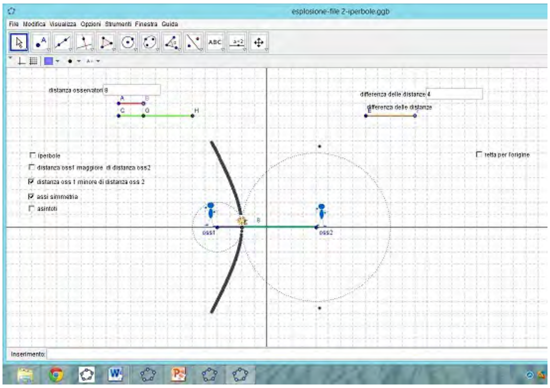


Figura 15. La posizione limite

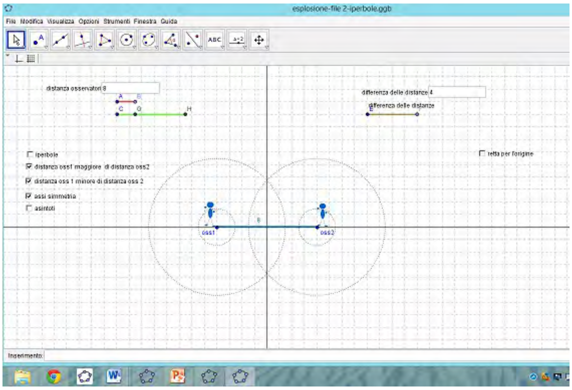


Figura 16. Impossibile costruire i punti

Si confermano facilmente anche le posizioni limite, che portano alla individuazione dei vertici della curva e si ritrova l'impossibilità della costruzione dei punti nel caso in cui la somma delle distanze presunte sia minore della distanza tra gli osservatori.

Il file viene utilizzato poi per far variare i dati iniziali, uno relativamente all'altro, per scoprire come varia conseguentemente la curva.

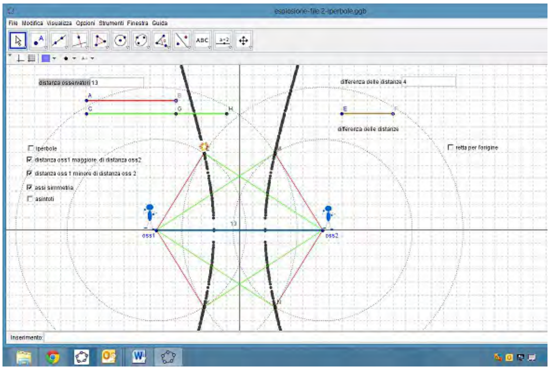


Figura 17. $d^* << O_1O_2$

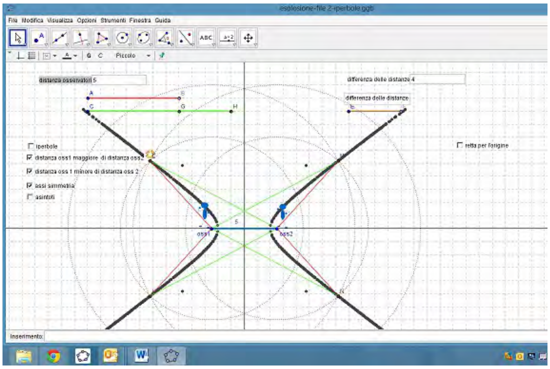


Figura 18. $d^* \approx O_1O_2$

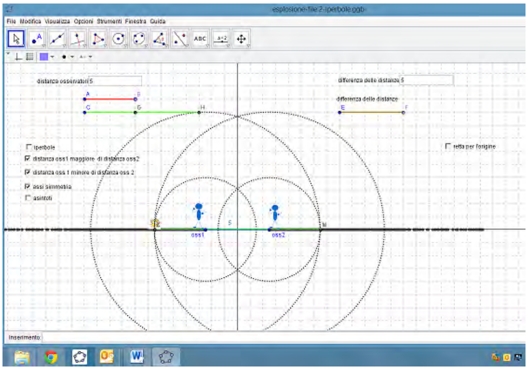


Figura 19. $d^* = O_1O_2$

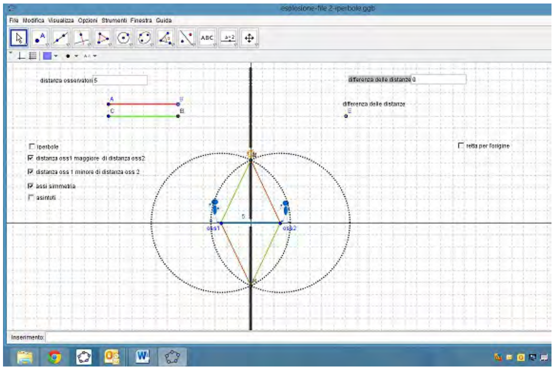


Figura 20. $d^* = 0$

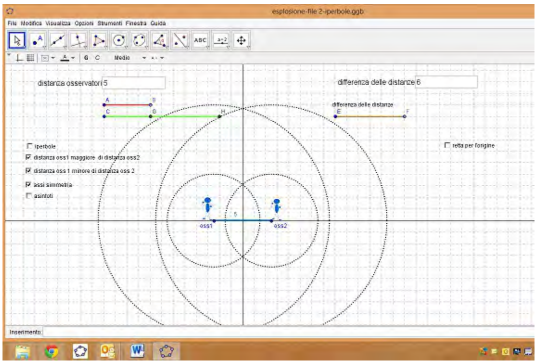


Figura 21. $d^* > O_1O_2$

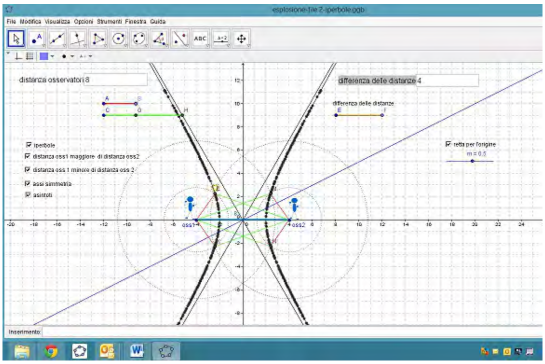


Figura 22. Gli asintoti

**d=differenza tra le distanze dagli osservatori*

«*Aumentando la differenza delle distanze, l'ampiezza dell'iperbole aumenta e i vertici dei due rami si allontanano dal punto medio del segmento* O_1O_2. *Se la differenza supera la distanza degli osservatori l'iperbole non può essere costruita.*»

«*Se si modifica solo il segmento* O_1O_2 *i due rami dell'iperbole mantengono il vertice sempre nella stessa posizione e varia solo l'ampiezza. Se* O_1O_2 *è minore della differenza delle distanze, allora l'iperbole non è costruibile.* <u>*Se la differenza delle distanze è zero si ottiene l'asse del segmento* O_1O_2</u>»

«*Un caso limite si trova quando* O_1O_2 *e la differenza delle distanze sono uguali. Si forma una retta, (in questo caso le circonferenza sono tangenti internamente) passante per* O_1O_2» (in realtà si tratta solo delle due semirette 'esterne' al segmento O_1O_2 n.d.r.)

«Più la lunghezza della differenza delle distanze è vicina a zero, più l'iperbole assomiglia a una retta (le due parti dell'iperbole si avvicinano sempre più all'asse del segmento O_1O_2)».

Sistematizzazione e conclusioni

Terminata questa fase, nella lezione successiva si è passati alla discussione collettiva e alla sistematizzazione con l'uso del file completo (Figura 22).

Come nel caso dell'ellisse, è stato il momento di introdurre la definizione classica e parlare di fuochi, semiassi, eccentricità, cogliendo una certa continuità tra l'ellisse e l'iperbole. Studiando le intersezioni di una generica retta per l'origine con la curva disegnata, in modo empirico si è intuita la presenza di rette particolari, gli asintoti.

Si è poi passati alla ricerca dell'equazione nel piano cartesiano procedendo in maniera 'classica'. Come per l'ellisse, si sono qui ritrovati alcuni risultati che già erano emersi nella costruzione ($c>a$, le coordinate dei vertici, eccentricità). A differenza dell'ellisse, per l'iperbole l'algebra è stata essenziale per trovare alcune caratteristiche della curva: i vertici immaginari, gli asintoti e la loro equazione.

Alla conclusione del percorso gli studenti avevano compreso la natura della curva, il significato dei parametri in gioco ed erano in grado di passare agevolmente dall'equazione canonica al grafico corrispondente. Per questa ultima parte è stato anche utilizzato un file dinamico ggb che rappresenta l'iperbole a partire dalla sua equazione canonica, al variare dei parametri.

Conclusioni

La verifica del lavoro è avvenuta monitorando le attività di laboratorio e valutando le relazioni.

Durante le attività gli studenti hanno mostrato sicuramente curiosità per un modo non usuale di lavoro e un atteggiamento più attivo; anche gli studenti generalmente più deboli, dopo una iniziale riluttanza, si sono lasciati coinvolgere e mettere in gioco. In qualche caso sono emerse capacità di intuizione usualmente poco evidenti, mentre studenti di solito più diligenti sono risultati più bloccati.

La dinamicità del software è risultata fondamentale nello svolgimento delle attività, per comprendere i concetti e 'vedere' le proprietà: ho avuto conferma ancora una volta di quanto tale caratteristica sia didatticamente utile.

Bibliografia

Sasso, L.(2102).Nuova *Matematica a colori*. Ed. Blu-Vol 3. Torino: Petrini.
Dispense e materiali del corso Comunità di Pratica su GeoGebra a..s. 2011/12 e 2012/13.

UNA MACCHINA OGNI TANTO... UN PERCORSO DI INTEGRAZIONE DEL LABORATORIO DI MATEMATICA NEL BIENNIO DEL LICEO SCIENTIFICO

Lucia Galleano[1], Francesca Martignone[2], Marco Bertoli[3]
[1]Liceo scientifico "G. Marconi" di Parma, [2]Università del Piemonte Orientale,
[3]Associazione delle Macchine Matematiche

Premessa

La sperimentazione che sarà analizzata in questo articolo ha coinvolto una classe del primo biennio del liceo Scientifico. Gli autori dell'articolo sono l'insegnante (Lucia Galleano) che ha progettato e sviluppato la sperimentazione nella sua classe, il tutor e la docente formatrice (Marco Bertoli e Francesca Martignone) del programma di formazione per insegnanti in servizio del progetto MMLab-ER per la provincia di Parma. La sperimentazione ha seguito diverse tappe: dalle costruzioni di figure geometriche con riga e compasso, all'esplorazione e analisi di pantografi per le simmetrie, per le omotetie e di curvigrafi, integrate con attività in aula multimediale con il software di geometria dinamica GeoGebra. L'analisi delle attività e, in particolare, di alcuni protocolli significativi, mostrerà come gli studenti, attraverso il lavoro di gruppo e la partecipazione attiva alle discussioni, siano passati da contesti concreti di manipolazione di strumenti a elaborazioni teoriche, muovendosi efficacemente tra registri di rappresentazione diversi.

Il progetto MMLab-ER

Le attività presentate in questo articolo si sono sviluppate all'interno del Progetto MMLab-ER[1]: progetto finanziato nel biennio 2008/10 dalla Regione Emilia Romagna come Azione 1 del progetto "Scienze e Tecnologie per l'Emilia Romagna" e nel 2012 cofinanziato dalle nuove Province dell'Emilia Romagna coinvolte, tra cui la provincia di Parma (provincia in cui si è svolta la sperimentazione che presenteremo). Questo progetto, esempio di buona collaborazione e comunicazione tra Istituzioni regionali e provinciali dell'Emilia Romagna, l'Università di Modena e Reggio Emilia e le Scuole, si propone di rispondere alle raccomandazioni internazionali (Inquiry Based Science Education - Rocard *et al.*, 2007) e alle Indicazioni Nazionali (Curriculi UMI- Matematica per il Cittadino[2], Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione, Indicazioni Nazionali per i Licei e Linee guida per Tecnici e Professionali) sull'introduzione nella didattica della matematica di un approccio laboratoriale. L'idea di laboratorio seguita dal Progetto è ben espressa in questo estratto:

"L'ambiente del Laboratorio di Matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel Laboratorio di Matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività" (Matematica 2003).

La progettazione e lo sviluppo delle attività si sono basati su questa idea di laboratorio di matematica e anche sull'assunto che le attività laboratoriali possano diventare, attraverso specifiche consegne e l'utilizzo di strumenti, un ambiente favorevole per l'insegnamento-apprendimento della matematica (Martignone & Bartolini, 2010). Gli strumenti analizzati, prima dagli insegnanti e poi dagli studenti, sono stati le macchine matematiche (per esempio i pantografi per le trasformazioni geometriche del piano e i curvigrafi[3]) e i software di geometria dinamica (per esempio GeoGebra).

1 Informazioni e materiali sul sito: http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna.html

2 I documenti citati sono scaricabili dal sito: http://umi.dm.unibo.it/area_download--37.html

3 Le macchine matematiche sono ricostruzioni di strumenti appartenenti alla fenomenologia storica

Le attività sviluppate durante il Progetto MMLab-ER si sono basate sui risultati delle ricerche condotte dal gruppo del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena: questo gruppo è formato da ricercatori, insegnanti-ricercatori legati all'Università di Modena e Reggio Emilia e dall'Associazione delle Macchine Matematiche[4]. Queste ricerche si sono sviluppate all'interno delle Ricerche per l'Innovazione (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998) e infatti tengono conto degli aspetti storico-epistemologici, didattici e cognitivi coinvolti. Per questo il quadro di riferimento adottato è costituito da studi legati alla storia della matematica, da studi legati alla mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) e da ricerche di base sui processi cognitivi che si sviluppano durante l'esplorazione delle macchine matematiche (Martignone & Antonini, 2009, Antonini & Martignone, 2011). Per quanto riguarda il focus sugli aspetti culturali, oltre all'approfondimento della genesi e sviluppo storico dei concetti matematici legati alle macchine matematiche utilizzate, si è tenuto conto anche delle riflessioni di Boero e Guala (2008) sul ruolo dell'Analisi Culturale dei Contenuti da insegnare nella formazione degli insegnanti e nelle attività didattiche con gli studenti. Questa analisi tiene insieme e sviluppa le relazioni tra gli elementi provenienti dall'epistemologia della matematica, le conoscenze riguardanti la storia della matematica e la didattica della matematica.

In sintesi si può dire che gli obiettivi principali sia delle attività svolte durante il corso di formazione per insegnanti, sia nelle sperimentazioni nelle classi, siano stati: (i) studiare oggetti provenienti dalla fenomenologia della storia della matematica, le macchine matematiche, per scoprire la matematica in esse incorporata e le loro potenzialità didattiche; (ii) costruire attività i cui focus siano sviluppare aspetti fondamentali del pensiero matematico come il problem posing e solving, i processi legati alla genesi di congetture, alla produzione di argomentazioni e alla costruzione di dimostrazioni; (iii) creare gruppi di insegnanti, esperti nella metodologia laboratoriale e nell'utilizzo didattico delle macchine matematiche, che possano diventare comunità di indagine (Jaworski, 2006). Quest'ultimo risultato è stato un passo importante per lo sviluppo di collaborazioni tra insegnanti e tra insegnanti e ricercatori, collaborazione che si estende oltre la durata del progetto. In questo articolo descriveremo proprio una sperimentazione nata all'interno del progetto MMLab-ER e quindi frutto del dialogo e confronto tra insegnanti e ricercatori che hanno partecipato al progetto.

Sperimentazione

La sperimentazione ha coinvolto una classe del primo biennio del Liceo Scientifico "G. Marconi" di Parma dove ha trovato sede il laboratorio delle Macchine Matematiche per la provincia di Parma: un'aula dedicata, dotata di computer e videoproiettore, attrezzata con undici diversi tipi di macchine matematiche tra conicografi e pantografi per le trasformazioni, ciascuna in cinque esemplari. Il percorso si è sviluppato in due annualità ed è stato articolato in varie tappe, per una durata complessiva di 18 ore, di cui 5 al termine della classe prima e 13 distribuite durante la classe seconda. In sintesi:

ATTIVITÀ NEL LABORATORIO DELLE MACCHINE MATEMATICHE	ATTIVITÀ NEL LABORATORIO INFORMATICO con GeoGebra
1. RIGA E COMPASSO	
2. Pantografi per SIMMETRIA ASSIALE e CENTRALE	
3. Parabolografo del CAVALIERI	4. Simulazione del pantografo per la simmetria assiale
5. Pantografo di SCHEINER	6. Successioni di pentagoni

della matematica. Esse si possono classificare in: macchine per l'aritmetica, come semplici calcolatrici meccaniche e abaci, e macchine per la geometria, come compassi, pantografi per le trasformazioni geometriche del piano, conicografi etc.

4 www.macchinematematiche.org

Gli obiettivi che l'insegnante si era posta erano: introdurre nuovi concetti a partire dalle proprietà incorporate nelle macchine matematiche esplorate; consolidare strutture logiche già utilizzate e ritrovarle in nuovi contesti (condizione necessaria e sufficiente, dimostrazione, protocollo di costruzione); inserire nozioni già note nel contesto teorico della geometria euclidea; proporre diversi registri rappresentativi per i medesimi oggetti.

Il metodo di lavoro

Gli alunni hanno sperimentato e consolidato una metodologia di lavoro laboratoriale: nel laboratorio delle Macchine Matematiche, dapprima hanno lavorato a gruppi con modelli di pantografi e curvigrafi, su schede predisposte dall'insegnante. Da questa *prima fase* di discussione nel piccolo gruppo è scaturita una proposta condivisa di soluzione/risposta a quanto richiesto dalle consegne. L'insegnante ha sorvegliato e facilitato il lavoro nei gruppi, fornendo le indicazioni ritenute opportune, con l'obiettivo di far procedere i ragazzi nell'esplorazione della macchina e nelle successive congetture e dimostrazioni, favorendo la loro autonomia. Le schede sono poi state raccolte e visionate a casa dal docente, che non ha apposto correzioni. La correzione è avvenuta da parte degli studenti stessi, in classe, durante *una seconda fase* di discussione nel gruppo allargato (con riga e compasso da lavagna o un esemplare della macchina utilizzata), finalizzata dal docente a una corretta sintesi e a una sistematizzazione organica dei contenuti oggetto delle schede.

La *valutazione* delle schede è avvenuta differenziando le risposte date correttamente durante la prima fase di lavoro di gruppo autonomo, corrette durante la seconda fase di lavoro in classe col docente o ancora errate, quindi assegnando un peso opportuno al voto. L'indicatore principale per valutare l'intero percorso è stato la capacità di riconoscere e utilizzare in nuovi contesti contenuti e concetti appresi precedentemente e comprendere strategie risolutive diverse: questo tipo di approccio può dare la misura dell'integrazione dell'attività laboratoriale nella didattica usuale. Altri indicatori sono stati l'interesse per l'attività, per esempio la qualità della partecipazione al lavoro di gruppo e il coinvolgimento in attività collegate come l'allestimento del laboratorio delle Macchine, il convegno di inaugurazione del laboratorio, le giornate di scuola aperta, la scrittura dell'articolo per l'annuario dell'Istituto, e la partecipazione all'iniziativa "Paese in gioco" in collaborazione con l'Istituto Comprensivo di Trecasali (PR).

Prima attività: dall'asse del segmento alla circonferenza con riga e compasso, classe prima (5 ore, maggio-giugno 2012)

Il percorso con le macchine è iniziato al termine della classe prima a partire dalla macchina matematica agli studenti più familiare: il compasso. L'intento era sia quello di soffermarsi ad analizzare e riscoprire lo strumento, sia di applicare il metodo dimostrativo della geometria euclidea, già studiato durante l'anno, a una costruzione nota, ma mai giustificata.

Questa attività è stata l'occasione per sperimentare il nuovo metodo di lavoro sulle macchine, prendere consapevolezza che il compasso incorpora proprietà matematiche, valorizzare la necessità del processo dimostrativo e introdurre il tema della circonferenza ricollegandosi a quanto i ragazzi già potevano conoscere anche da altri contesti, come il disegno tecnico.

L'idea è stata quella di chiedere ai ragazzi di ricordare la definizione di asse del segmento e la relativa costruzione. Subito si è chiarita la caratteristica, teorica ma non pratica, dell'altro strumento: la riga, che essendo non graduata non permette di individuare il punto medio con una misura! Le richieste successive sono state quelle di stilare un protocollo della costruzione, osservando che può essere pensato come un algoritmo, e di dimostrare che l'oggetto costruito rispetta la definizione data di asse. La scheda poi proponeva l'approfondimento dello studio dell'asse per arrivare a individuare la proprietà caratteristica dei suoi punti e presentarla come luogo geometrico. L'obiettivo era quello di consolidare l'uso, già noto, della condizione necessaria e sufficiente e introdurre il nuovo concetto di luogo geometrico. Cambiare il contesto, immaginando il segmento come corda di una circonferenza, ha permesso di scoprire e dimostrare la proprietà dell'asse della corda: in questo modo i contenuti sono divenuti quelli del programma di seconda. Successivamente i ragazzi hanno lavorato sulla costruzione della circonferenza per tre punti, con relativa discussione sulla condizione di non allineamento, per arrivare, pensando i tre punti come vertici di un triangolo, alla costruzione del circocentro.

Seconda attività: studio dei pantografi per la simmetria assiale e centrale, classe seconda (6 ore, ottobre-novembre 2012)

All'inizio della seconda abbiamo cominciato a lavorare con i pantografi per le trasformazioni geometriche, in particolare i pantografi per la simmetria assiale (Figura 1) e centrale (Figura 2).

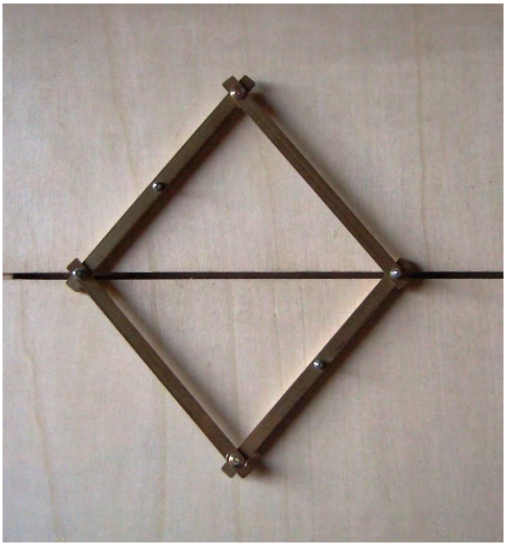


Fig. 1a: Fotografia

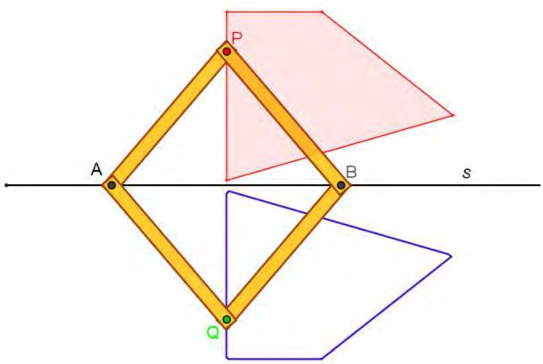


Fig. 1b: Immagine di una animazione virtuale

In questo pantografo un rombo articolato ha due vertici opposti (A e B) vincolati a cursori che scorrono entro una scanalatura rettilinea s. La posizione di P determina univocamente quella di Q (e viceversa). Dalla semplice geometria del sistema meccanico si ricava subito che:

- la retta PQ è perpendicolare a s;
- i punti P e Q sono equidistanti da s. Perciò P e Q si corrispondono nella simmetria assiale ortogonale di asse s.

Figura 1. Pantografo per la simmetria assiale

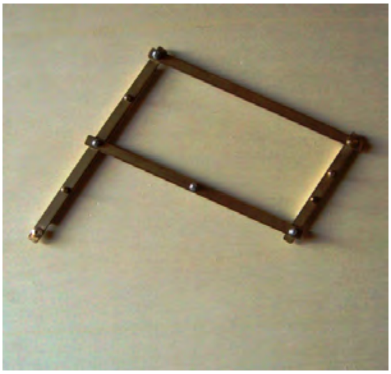


Fig. 2a: Fotografia

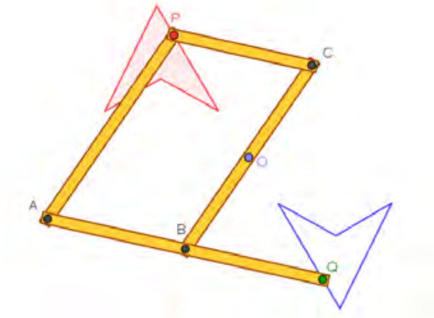


Fig. 2b: Immagine di una animazione virtuale

Il pantografo è costituito da un parallelogramma articolato ABCP con il lato BC imperniato al piano del modello nel suo punto medio O. L'asta AB è prolungata di un tratto BQ=AB.

La macchina realizza una corrispondenza tra due regioni limitate del medesimo piano in cui P e Q sono sempre allineati con O e inoltre PO=OQ (questo si dimostra sfruttando il parallelismo a due a due delle quattro aste che formano il parallelogramma e l'uguaglianza delle diverse porzioni del sistema articolato). La trasformazione generata è quindi la simmetria centrale con centro in O.

Quando P percorre una traiettoria assegnata, Q descrive la traiettoria simmetrica rispetto a O.

Figura 2. Pantografo per la simmetria centrale.

Si è trattato di consolidare la metodologia sperimentata l'anno precedente, utilizzando uno script guidato da tre domande chiave: *Com'è fatta la macchina?*, *Che cosa fa la macchina?*, *Perché lo fa?*.

Nella prima fase i ragazzi hanno osservato, manipolato, descritto, disegnato l'artefatto cercando di individuarne gli elementi fissi, le configurazioni limite e il grado di libertà dei punti.

Nella seconda fase ("*Che cosa fa la macchina?*"), gli studenti hanno esplorato quali siano le zone raggiungibili dai tracciatori, cercando prima di capire che essa realizza una trasformazione nel piano (concetto completamente nuovo) e quindi di riconoscere di quale trasformazione si tratti.

Nella terza fase ("*Perché lo fa?*") attraverso l'esame dei "prodotti della macchina" si è cercato di comprendere e dimostrare quali caratteristiche della macchina incorporino le proprietà matematiche della trasformazione geometrica ipotizzata.

Da ultimo si è proposta la sezione "*Introduciamo il piano cartesiano …*", per scrivere le equazioni almeno delle simmetrie più semplici: rispetto agli assi e all'origine, e per iniziare a riflettere sul concetto di "opportunità" della scelta del sistema di riferimento.

Questo lavoro sulle simmetrie ha costituito l'occasione per introdurre il concetto di trasformazione nel piano, compreso nelle Indicazioni Nazionali per i nuovi Licei, ed è stato molto utile poi nello sviluppo dell'attività didattica come nuovo "registro rappresentativo". Infatti le simmetrie sono state utilizzate non solo per studiare quali siano centri e assi di simmetria dei poligoni, ma anche per comprendere meglio come costruire il grafico della parabola per punti simmetrici, per disegnare il grafico di una funzione in modulo, spiegare per quale motivo i sistemi simmetrici abbiano questo nome (anche con l'ausilio di grafici in GeoGebra) e studiare il grafico dell'inversa di una funzione.

Terza attività: studio del parabolografo del Cavalieri, classe seconda (2 ore, marzo 2013)

Lo studio di parabolografo del Cavalieri (Figura 3) si inserisce alla perfezione nel programma della classe seconda: concretizza il collegamento tra secondo teorema di Euclide e grafico della parabola, consentendo di rappresentare una medesima situazione con diversi registri.

I ragazzi, ormai più sicuri sulla metodologia di osservazione e analisi della macchina, dopo averne individuato gli elementi fissi, non avevano elementi "certi" per dedurre quale curva tracciasse. Inizialmente solo un gruppo ha ipotizzato che fosse un arco di iperbole, mentre gli altri di parabola. Gli studenti hanno detto: "fa una cosa sola!". Ecco colta la differenza con i pantografi: questi infatti permettono di disegnare le trasformate di tante figure mentre i curvigrafi disegnano solo una particolare curva, secondo i parametri impostati. In questo modo è scaturita l'occasione per consolidare il concetto, difficile, di grado di libertà di un punto, infatti non tutti i gruppi hanno riconosciuto che il tracciatore dei curvigrafi ha grado 1 perché si muove nel piano vincolato su una linea. Seguendo la scheda, i ragazzi hanno poi applicato con sicurezza il secondo teorema di Euclide per scrivere (questa volta riconoscendola!) l'equazione di una parabola (Figura 4).

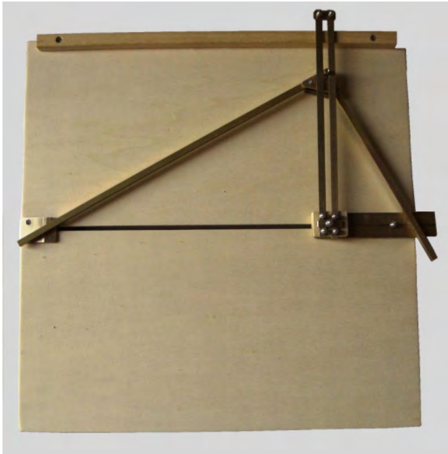


Fig. 3a: Fotografia

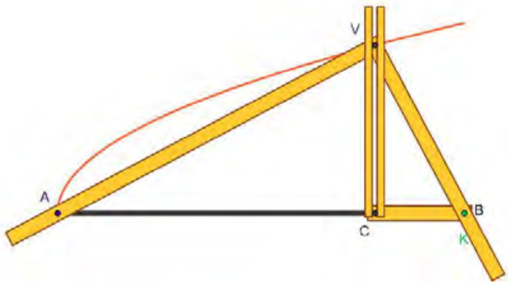


Fig. 3b: Immagine di una animazione virtuale

Lungo la scanalatura rettilinea AB praticata in un piano π scorre un segmento CK di lunghezza k prestabilita. Al suo estremo C è vincolata rigidamente, in direzione perpendicolare a CK, un'asta CV giacente su π.

Quando l'angolo retto KCV si muove, trascina con sé un altro angolo retto AVK, che ha i lati VA e VK costretti a scorrere, rispettivamente, sui perni A (fissato sulla scanalatura) e K (che a sua volta scorre sulla scanalatura). Durante il movimento, in ogni istante AVK è un triangolo rettangolo (variabile) di cui VC rappresenta l'altezza relativa alla ipotenusa e AK l'ipotenusa. Possiamo applicare a esso il teorema di Euclide: si ricava $(VC \cdot VC) = (CK \cdot CA) = (k \cdot CA)$, ossia la relazione tra segmenti che gli antichi greci definivano "sintomo" della curva che noi oggi chiamiamo parabola (ponendo $CA = x$, $VC = y$, si ottiene l'equazione $y^2 = k \cdot x$).

Figura 3. Parabolografo del Cavalieri

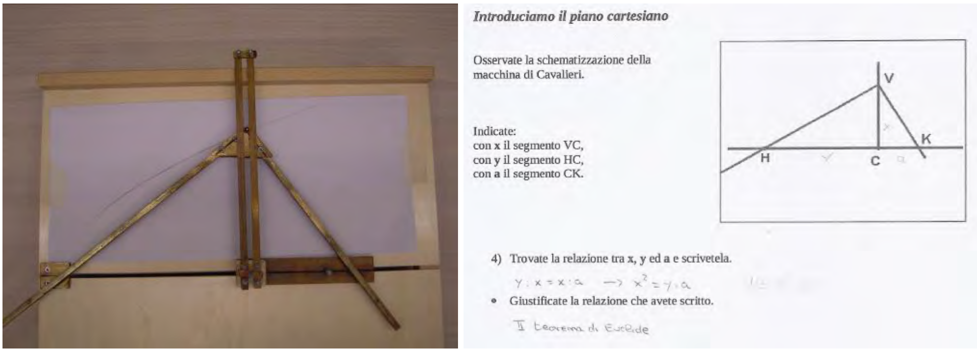


Figura 4. Studio del Parabolografo del Cavalieri

Una difficoltà riscontrata dagli studenti è stata quella di posizionare correttamente il sistema di riferimento in modo da trovare la corrispondenza tra l'arco disegnato dalla macchina (che non contiene neanche il vertice come punto interno) e l'equazione ottenuta. Nella figura 5 compare la correzione elaborata durante la discussione in classe.

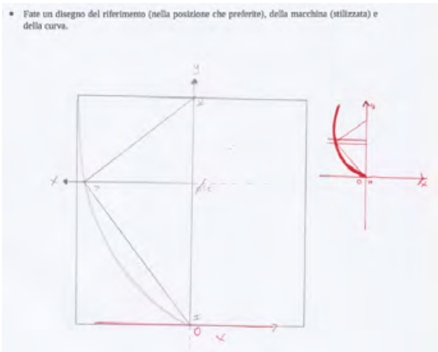


Figura 5. Stralcio di scheda con correzione degli studenti

Siamo così tornati sul concetto di "opportunità" del sistema di riferimento e sull'idea che uno stesso oggetto geometrico possa essere rappresentato algebricamente in modi diversi, variando il sistema di riferimento. Lo strumento ha quindi fornito l'occasione preziosa soprattutto di proporre un'attività di sintesi in cui si è chiarito il collegamento tra concetti noti, passando da un registro rappresentativo a un altro: un ottimo esercizio di flessibilità.

Quarta attività: simulazione del pantografo per la simmetria assiale con GeoGebra, classe seconda (2 ore, aprile 2013)

I ragazzi avevano utilizzato GeoGebra in vari contesti e l'idea di proporre la simulazione del pantografo è nata, a partire dalla lezione di Carla Zanoli dell'Associazione delle Macchine Matematiche, sia per la sua bellezza intrinseca sia perché ben si inseriva nel percorso di approfondimento del software. Quale migliore occasione per studiare il menù "Strumenti" di GeoGebra e intanto riprendere una macchina e una trasformazione già studiate, proporre un'attività nel laboratorio informatico e divertirsi modellizzando uno strumento concreto?

Nel laboratorio informatico del liceo, aula con trenta postazioni pc e LIM, i ragazzi hanno simulato la macchina, tenendone un esemplare sott'occhio, dapprima nei suoi elementi geometrici, iniziando dagli elementi fissi: scanalatura e lunghezza dell'asta che forma il lato del rombo articolato. Interessante la dinamica instauratasi durante l'attività: l'insegnante ha guidato all'uso dello strumento compasso (altro richiamo a una macchina già utilizzata!) per rappresentare il puntatore e i due vertici del rombo che scorrono nella scanalatura (circonferenza tratteggiata in figura 6), riflettendo sulla necessità di utilizzare la lunghezza dell'asta fissata e di dare "rigidità" alle aste stesse. Successivamente l'insegnante avrebbe proposto la costruzione di altre due circonferenze, sempre con raggio la lunghezza dell'asta e centrate nei punti di intersezione con la scanalatura, che intersecandosi avrebbero individuato il tracciatore, cioè il vertice mancante del rombo articolato. Gli studenti però hanno utilizzato un percorso diverso: dovendo costruire un rombo, che è un parallelogramma, hanno individuato il tracciatore come punto di intersezione delle rette parallele alle due aste che si incernierano nel puntatore. Semplice, elegante e soprattutto pensato dai ragazzi! (vedi Figura 6).

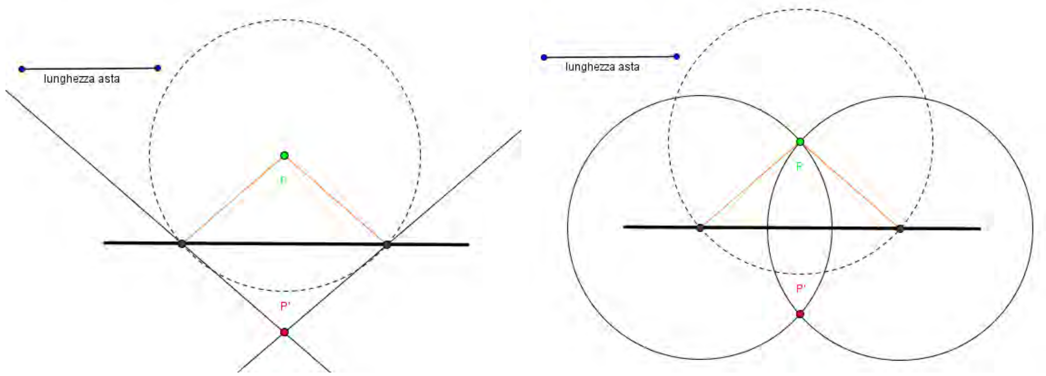


Figura 6. Le due costruzioni per individuare il tracciatore P'

Infine sono state evidenziate le zone accessibili ai tracciatori e con il comando traccia attiva la macchina era pronta per essere utilizzata, a mano libera o con il puntatore vincolato su una figura, anche con una semplice animazione. Qui è nata l'occasione per lo studio del comando di vincolo di un punto su una figura: differenza tra vincolo su una curva o su una figura piana e di nuovo si è presentato il concetto di grado di libertà di un punto. In una seconda fase si è costruito lo strumento che rappresenta l'asta rigida in modo realistico (Figura 7): un miglioramento estetico, lo studio del menù "Strumenti" e un approfondimento logico/metodologico con l'introduzione del concetto di macro.

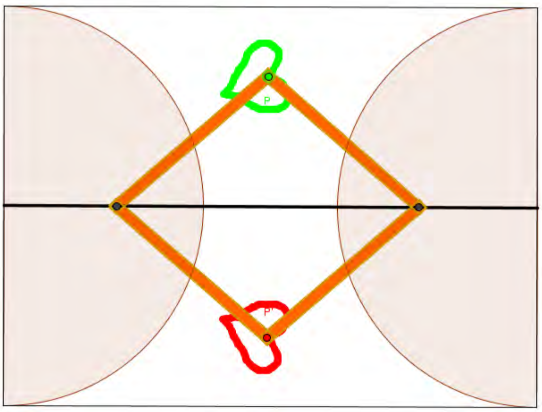


Figura 7. Simulazione del pantografo per la simmetria assiale

Quinta attività: studio del pantografo di Scheiner, classe seconda (2 ore, maggio 2013)

La nozione di figure simili è nota agli studenti fin dalle scuole secondarie di primo grado, quindi alla domanda "Che cosa fa la macchina?" i ragazzi hanno subito risposto formulando l'ipotesi che il pantografo di Scheiner fosse una macchina per la similitudine (inventando anche il buffo neologismo "similtografo"). Questo è stato lo spunto per osservare che la macchina costruisce solo alcune figure simili a una data e poi per arrivare a capire la differenza tra omotetia e similitudine e anche per intuire che le trasformazioni si possono comporre, pur senza approfondire quest'aspetto. L'idea è stata quella di introdurre l'omotetia come esempio di trasformazione non isometrica. Alla già consolidata tecnica di analisi della macchina secondo le tre domande chiave, si è aggiunta una sezione, "*Cosa succederebbe se …*", in cui si richiedeva di immaginare una modifica al sistema articolato in modo da variare il rapporto di omotetia. Dai disegni dei possibili modelli realizzati nei gruppi è emerso chiaramente se fosse stata colta l'essenzialità della condizione di allineamento dei tracciatori con il punto fisso del sistema articolato, comunque messa a fuoco durante l'attività in modo più o meno guidato e condiviso nei gruppi. Di seguito due esempi di schede: la prima corretta durante la discussione in classe e la seconda esatta già nel lavoro di gruppo autonomo.

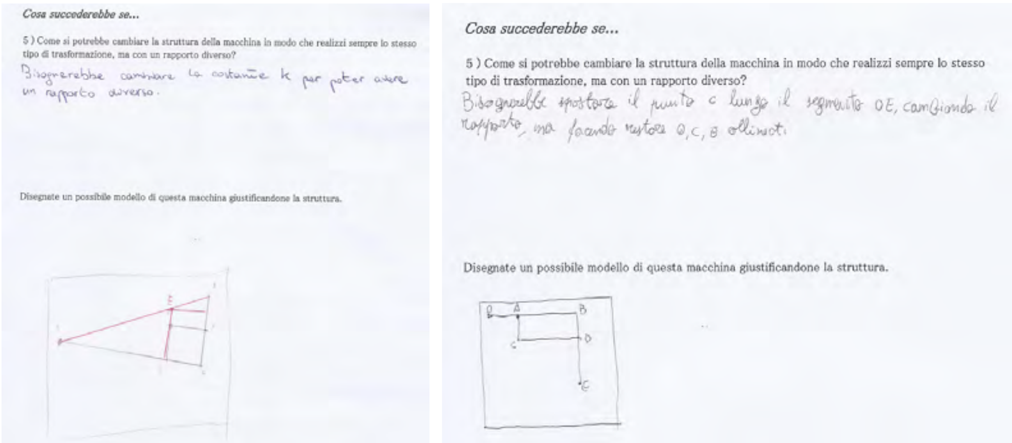


Figura 8. Stralci di schede con e senza correzione degli studenti

Sesta attività: costruzione di successioni di pentagoni con GeoGebra (1 ora, maggio 2013)

L'idea è nata da "Origami, riga e compasso, software geometrico" *in Matematica 2003: attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica - Ciclo secondario – Spazio e figure*. I ragazzi hanno predisposto un nuovo strumento di GeoGebra che costruisse il pentagono regolare avendo come oggetti iniziali il centro e un vertice (mentre quello del software ha come oggetti iniziali due vertici consecutivi). In questo modo hanno consolidato le abilità nell'uso del menù "Strumenti" di GeoGebra e hanno utilizzato il comando "ruota", quindi hanno anche fatto conoscenza con una nuova trasformazione, sia pure solo attraverso il software. Facilmente hanno poi costruito le due successioni di pentagoni della figura 8.

La figura 8 risulta assai ricca di spunti, permettendo osservazioni e approfondimenti a vari livelli, sia di tipo algebrico che geometrico. Per esempio con qualche misura e l'aiuto del foglio di calcolo si può evidenziare il rapporto di omotetia, che risulta il reciproco del quadrato del rapporto aureo. Vale a dire, geometricamente, che il lato dell'n+1-esimo pentagono è la sezione aurea della sezione aurea del lato dell'n-esimo pentagono e risulta anche congruente al lato del pentagono ottenuto congiungendo i punti di intersezione delle diagonali dell'n-esimo pentagono. Si può anche osservare che il centro dell'omotetia è il vertice di un altro pentagono regolare, quello che ha per lato il raggio comune ai pentagoni iniziali e ai cui lati convergenti nel centro appartiene un vertice di ciascun pentagono delle successioni costruite.

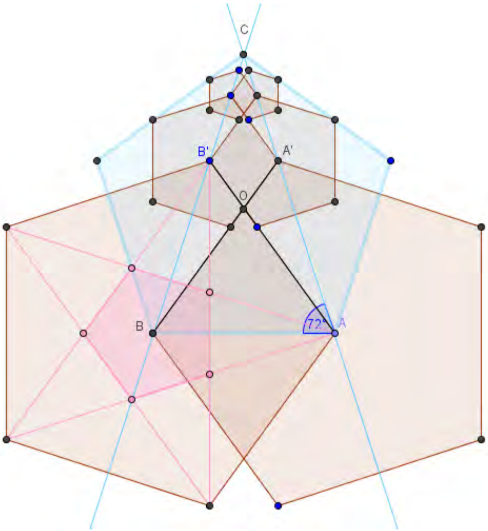


Figura 9. Successioni di pentagoni omotetici

Conclusioni

Le attività presentate in questo articolo mostrano l'importanza nell'insegnamento-apprendimento della matematica di un percorso di lungo termine dove la didattica laboratoriale è parte integrante della didattica svolta in classe. L'obiettivo fondamentale di tutte le attività è stato di utilizzare le macchine matematiche non solo per introdurre o consolidare conoscenze legate alle leggi matematiche in esse incorporate, ma per sviluppare processi legati alla produzione di congetture e argomentazioni.

L'analisi delle attività, in particolare di alcuni protocolli significativi, ha mostrato come gli studenti, attraverso il lavoro di gruppo e la partecipazione attiva alle discussioni, abbiano compreso le proprietà matematiche incorporate nelle macchine astraendo dal contesto concreto e passando a quello teorico, abbiano fatto esercizio di rigore logico ed espressivo nella produzione di congetture e argomentazioni, passando da un registro di rappresentazione a un altro divenendo autonomi nell'utilizzo di diverse metodologie di lavoro. Gli studenti hanno utilizzato conoscenze teoriche nell'argomentare perché la macchina fa quello che fa, per esempio usando il Secondo teorema di Euclide nell'analisi del parabolografo, oppure hanno riconosciuto relazioni e proprietà studiate con le macchine in grafici di relazioni analizzate successivamente, come ad esempio esclamando "è quella che fa la macchina!" dopo aver visto il grafico della radice quadrata di (x-4) o notando che il grafico della funzione inversa di una semplice irrazionale è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Lo sviluppo di questi processi è avvenuto grazie alle relazioni costruite tra la manipolazione e lo studio di "antiche tecnologie" intrecciate all'uso di tecnologie digitali e le riflessioni teoriche condivise con tutta la classe. È importante sottolineare come le attività siano state introdotte coerentemente con gli obiettivi, i contenuti e i tempi della programmazione disciplinare. Dunque non un episodico sconvolgimento dei temi del biennio o l'affiancamento di un "extra" slegato dalla "matematica ordinaria", ma un reale arricchimento metodologico che concretizza le potenzialità tipiche dell'attività laboratoriale. Quindi l'idea di "una macchina ogni tanto", nella sua flessibilità, può entrare in una prassi ripetibile.

Bibliografia

Antonini, S. & Martignone, F. (2011). Argumentation in exploring mathematical machines: a study on pantographs, *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 41-48), Ankara, Turkey.

Arzarello, F. & Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian Trends in Research in Mathematics Education: a National Case Study in the International Perspective. In J. Kilpatrick, & A. Sierpinska, (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: a Search for Identity*, (pp. 197-212). Kluwer Academic Publishers.

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In: L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh, B. Sriraman & D. Tirosh. *Handbook of International research in Mathematics education* (2nd edition). pp. 746-783, New York: Routledge Taylor & Francis Group.

Boero, P.& Guala, E. (2008). Development of mathematical knowledge and beliefs of teachers. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. (Vol. 1, pp. 223-244), Purdue University, USA: Sense Publishers.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 187–211.

Martignone, F. & Antonini, S. (2009). Exploring the mathematical machines for geometrical transformations: a cognitive analysis. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, M. & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings 33th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 4, 105-112). Thessaloniki, Greece: PME.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. & Hemmo, V. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe, European Commission*. http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf

INTRODUZIONE "DINAMICA" ALLA GEOMETRIA EUCLIDEA

Tiziana Garattoni, Paola Roccia
PIANO LAUREE SCIENTIFICHE in collaborazione con MIUR, Con.Scienze, Confindustria; GeoGebra Institute of Torino; DI.FI.MA. in Rete.

> "La manipolazione degli oggetti geometrici ricrea in qualche modo il processo mentale che porta alla dimostrazione e la rende concreta"
>
> Prof. Ferdinando Arzarello

Premessa

Affrontare la geometria euclidea attraverso gli assiomi e le definizioni spesso è un'impresa ardua. Questo contributo propone un'introduzione agli enti e alle relazioni fondamentali della geometria del piano con l'utilizzo dinamico di GeoGebra.

Questo modulo è stato presentato all'interno delle attività del Piano Lauree Scientifiche Matematica 2012-2013. Il modulo prevede 18 ore complessive suddivise in 3 momenti: 6 ore di formazione in presenza per gli insegnanti per la presentazione, lo sviluppo delle attività e l'analisi della sperimentazione svolta in classe; 6 ore di attività di autoformazione tramite la piattaforma Moodle; 6 ore di sperimentazione e valutazione in classe. L'attività può essere introdotta nel primo anno del percorso di scuola secondaria di II grado e prevede un tempo medio di svolgimento in classe di 5 ore.

L'attività si sviluppa partendo da una situazione problematica sulla relazione tra bisettrice e altezza di un triangolo isoscele con l'uso di GeoGebra per arrivare attraverso l'esplorazione e la dimostrazione matematica alla modellizzazione e risoluzione di una situazione reale.

1° e 2° Incontro con gli insegnanti

Il modulo non costituisce un'attività episodica al di fuori della programmazione dei docenti, ma rappresenta un supporto per l'attuazione delle Indicazioni Nazionali. Quindi abbiamo presentato ai docenti l'attività e abbiamo chiesto loro di calarsi nel ruolo di studenti per poter rendersi conto delle difficoltà, dei tempi di realizzazione e dei punti critici o di forza del percorso. Ogni docente ha personalizzato l'attività all'interno della sua progettazione didattica, tenendo conto della tipologia di scuola.

L'aver applicato la stessa metodologia didattica, pensata per gli studenti, anche durante gli incontri per i docenti è, a nostro avviso, il punto di forza della proposta, che non dev'essere vista come qualcosa di statico e preconfezionato, ma che ha avuto una sua evoluzione nello sviluppo stesso.

Obiettivi

- realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando il software di geometria dinamica GeoGebra
- comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive
- analizzare e risolvere problemi del piano utilizzando le proprietà delle figure geometriche

- saper modellizzare geometricamente una situazione reale
- scoprire proprietà invarianti

Prerequisiti:

- nozione di bisettrice di un angolo
- concetto di perpendicolarità tra rette
- definizione di triangolo isoscele
- criteri di congruenza dei triangoli

Indicazioni Metodologiche

Questa attività prevede che studenti e insegnanti siano corresponsabili dell'apprendimento, trasformando completamente il rapporto consueto tra insegnanti e studenti, secondo il quale l'insegnante spiega e lo studente applica quanto spiegato.

L'attività prevede nelle varie fasi un momento di elaborazione personale da parte degli studenti, una successiva discussione collettiva in classe sulle osservazioni da essi effettuate e sulle eventuali proposte di risoluzione per il problema proposto e, con l'aiuto dell'insegnante, una sistemazione formale delle osservazioni con formulazione e dimostrazione di teoremi.

La costruzione di significati è strettamente legata alla comunicazione e condivisione delle conoscenze in classe, sia attraverso i lavori in piccoli gruppi di tipo collaborativo o cooperativo, sia attraverso lo strumento metodologico della discussione matematica, opportunamente gestito dall'insegnante.·

Il ruolo dell'insegnante diventa più simile a quello di un regista che non quello di un dispensatore di conoscenze.

Descrizione attività

Fase 1: triangoli isosceli

<u>Descrizione</u>: si propone di costruire triangoli isosceli a partire da alcuni elementi, utilizzando GeoGebra e di esplorare le situazioni possibili affinché il triangolo esista.

<u>Metodologia</u>: modalità laboratoriale individuale o in piccoli gruppi con richiesta di descrizione per iscritto dell'attività svolta.

<u>Tempo</u>: 1h.

<u>Scheda docente:</u>

In questa attività il docente ha il compito di guidare gli studenti nella costruzione di un triangolo isoscele, in cui sono assegnate le lunghezze della base e del lato obliquo.

La prima parte della costruzione non presenta particolari difficoltà, il docente può decidere se fornire più elementi per lo svolgimento della stessa (parte opzionale della scheda) o lasciare maggiore libertà agli studenti.

Inoltre dovrà facilitare l'individuazione di relazioni all'interno del triangolo e sostenere lo studente nel compito di formulare congetture.

Nella seconda parte della scheda viene proposta una costruzione in cui il triangolo non sia inizialmente isoscele.

Particolare rilievo assume il docente nella discussione collettiva, dalla quale dovrà emergere come gli elementi primari della costruzione influenzino il risultato finale determinandone le caratteristiche. Occorre porre attenzione agli elementi invarianti della costruzione al fine di far individuare la caratteristica che poi sarà evidenziata dal teorema della fase 2.

Gli spunti di riflessione permettono di centrare l'attenzione sugli elementi fondanti la costruzione; si noti che quando si costruisce il triangolo a partire dal segmento AB. una volta individuato il punto che permette al triangolo di essere isoscele. tale caratteristica si mantiene anche al variare della lunghezza di AB e di CD; mentre se si inizia la costruzione dal segmento CD (altezza) la proprietà non si mantiene al variare di AB e CD.

Scheda studenti:

1) Apri un file GG.

2) Disegna un segmento AB e un segmento CD

3) Costruisci un triangolo isoscele a partire dai due segmenti assegnati, sia CD la lunghezza dei lati congruenti.

Suggerimenti per la costruzione (opzionale):

a. Con lo strumento Compasso, riporta il segmento CD tracciando una circonferenza di centro A

b. Ripeti la procedura utilizzando come centro della circonferenza il punto B

c. Individua uno dei punti di intersezione delle due circonferenze e chiamalo E

d.Crea il triangolo ABE. Esso sarà il triangolo cercato, ossia con i lati obliqui congruenti a CD.

4) Prova a variare la lunghezza dei segmenti di partenza AB e CD e verifica che il triangolo rimane isoscele oppure scompare. Perché?____

In quale caso esso scompare? ____

5) Descrivi adesso la condizione su AB e CD affinché la costruzione sia possibile (ossia affinché il triangolo esista).____

6) Adesso apri un nuovo foglio e, partendo sempre da due segmenti AB e CD qualsiasi, costruisci un triangolo di lato congruente ad AB e altezza relativa a esso congruente a CD.

7) Descrivi nei dettagli i passi della tua costruzione___________________________________

____

Fase 2: Esplorazione triangolo isoscele. Relazione tra bisettrice e altezza

<u>Descrizione</u>: si propone di costruire con GeoGebra un triangolo qualsiasi, di tracciare la bisettrice di uno dei suoi angoli, di esplorare le situazioni possibili, utilizzando la modalità trascinamento, andando alla ricerca delle condizioni che devono verificarsi sul triangolo affinché la bisettrice sia perpendicolare al lato e di mettere per iscritto tutto ciò che si osserva.

<u>Metodologia:</u> modalità laboratoriale individuale o in piccoli gruppi ai quali si richiede di discutere e argomentare per iscritto l'attività svolta.

<u>Tempo</u>: 1h

<u>Scheda docente:</u>

La costruzione è finalizzata allo sviluppo della dimostrazione relativa al Teorema del Triangolo isoscele, che ha un duplice enunciato:

"Se la bisettrice di un triangolo cade perpendicolarmente sul lato opposto il triangolo è isoscele."

"In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo compreso tra i due lati uguali cade perpendicolarmente sul lato opposto e lo dimezza."

Il punto di partenza è però un triangolo qualsiasi dati tre segmenti.

Nella costruzione potrebbe presentarsi una difficoltà se gli studenti scelgono di tracciare la bisettrice passante per il vertice opposto al segmento da cui è partita la costruzione. Infatti in questo caso non si riesce a modificare opportunamente il triangolo in modo che tale bisettrice risulti perpendicolare al lato opposto all'angolo considerato.

Valuterà quindi il docente se è il caso di fornire agli studenti indicazioni in merito all'angolo di cui costruire la bisettrice.

L'attività si concluderà con la formalizzazione delle osservazioni effettuate dagli studenti, che saranno la base per la dimostrazione presentata dal docente con l'aiuto dei file GG.

"La discussione collettiva in classe diviene il contesto in cui far evolvere i processi argomentativi degli studenti verso la dimensione della dimostrazione matematica. La verbalizzazione per scritto delle attività svolte rappresenta un espediente didattico per spingere gli studenti ad organizzare logicamente e a controllare i propri pensieri, nonché per abituarli a descrivere e commentare la soluzione dei problemi affrontati in modo da saperla comunicare."

(da m@t.abel *"*Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione*")*

Scheda studenti:

1. Costruisci un triangolo qualsiasi dati 3 segmenti
2. Suggerimento: nascondi gli oggetti della costruzione e lascia solo il triangolo
3. Traccia la bisettrice di uno dei suoi angoli
4. Individua l'intersezione della bisettrice con il lato opposto all'angolo considerato
5. Misura gli angoli che la bisettrice forma con il lato opposto all'angolo considerato
6. Prova a modificare opportunamente il triangolo in modo che la bisettrice risulti perpendicolare rispetto al lato opposto all'angolo considerato
7. Che cosa osservi?____
8. Prova ora a costruire un triangolo isoscele e traccia la bisettrice dell'angolo al vertice

Che cosa osservi?____

Fase 2bis:

Descrizione: si passa quindi a una sistemazione formale delle osservazioni effettuate, alla formulazione del corretto enunciato del teorema del triangolo isoscele e alla sua dimostrazione mediante una lezione dialogata tra docente e classe.

Metodologia: il docente deve aiutare gli studenti a formalizzare le osservazioni da essi effettuate nella fase 2 e guidarli nella dimostrazione.

Tempo: 1h

La dimostrazione completa viene presentata dal "docente" tramite file GG.

Fase 3: Nozione di altezza

Descrizione: costruzione finalizzata alla definizione di altezza di un triangolo partendo da una retta e non da un segmento.

Metodologia: modalità laboratoriale individuale o a piccoli gruppi. Il docente dovrebbe aiutare gli studenti a notare che nella costruzione l'altezza è definita come retta e non come segmento e dovrebbe aiutare a superare le difficoltà legate al ben noto stereotipo dell'altezza come "segmento verticale che sta all'interno di un triangolo".

Tempo: ½ h

Scheda docente:

Il triangolo isoscele è una figura fin troppo nota, della quale gli studenti conoscono bene le proprietà più significative. Questo fatto può in realtà rivelarsi un ostacolo cognitivo per riconoscere le relazioni corrette tra le diverse proprietà. In genere gli studenti non distinguono tra proprietà caratterizzanti (stabilite da una definizione) e proprietà da esse derivate (dimostrabili come conseguenze di una definizione).

La nozione di altezza è nota a tutti gli studenti e molto probabilmente il termine "altezza" verrà adoperato durante la discussione che segue l'attività proposta; il suo uso deve essere allora sistemato in modo rigoroso attraverso una definizione: **l'altezza relativa a un lato di un triangolo diviene così la retta passante per un vertice e perpendicolare alla retta del lato opposto.**

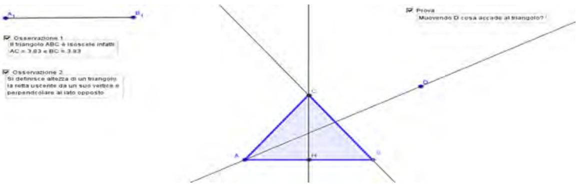


Figura 1. Altezza come retta

Si può notare che in questo modo l'altezza viene definita come retta e non come segmento.

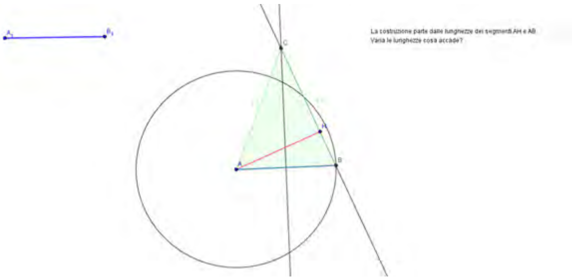


Figura 2. Altezza come segmento

È bene sottolineare questo aspetto, perché l'idea intuitiva di altezza che gli studenti hanno è legata a quella del segmento (da misurare, sempre e comunque!) che congiunge il vertice di un triangolo con il piede della perpendicolare condotta al lato opposto. Inoltre la definizione cui si giunge serve per rimarcare il legame tra il vertice, a partire dal quale si traccia l'altezza, e il lato opposto, rispetto alla retta del quale si considera la perpendicolare.

Scheda studenti:

Sei certo di conoscere la definizione di altezza di un triangolo?

Si definisce altezza di un triangolo____

Ora prova a fare questa costruzione:

Costruisci un triangolo isoscele data la base e l'altezza relativa al lato obliquo.

Quali sono gli elementi da cui dovrai partire? ________________________________

Essi sono gli elementi liberi della costruzione, essa dovrà essere modificabile al variare della lunghezza della base e al variare della posizione dell'altezza, ma dovrà mantenere le proprietà fondamentali che la caratterizzano, ovvero il triangolo costruito dovrà essere __________ .

1) Fissa la base.

2) Traccia l'altezza a partire da un estremo della base.

3) Come potrai procedere per tracciare il lato obliquo? ___________________________

Suggerimento: tieni conto che il punto d'incontro dei lati obliqui (vertice) giace su una retta che è _________ e ________ della base.

4) Ultimata la costruzione verifica che il triangolo sia effettivamente isoscele.

5) Muovi prima la base e poi l'altezza relativa al lato obliquo: la costruzione mantiene le sue proprietà?____

6) Che cosa osservi?____

Cosa puoi dire riguardo la definizione di altezza? Hai delle correzioni da fare a quella data spra?____
____

Fase 4: Angoli alla circonferenza e angoli al centro

Descrizione: Esplorazione con GG della relazione tra gli angoli al centro e gli angoli alla circonferenza.

Sistemazione formale delle osservazioni effettuate e formulazione del corretto enunciato del teorema mediante una lezione dialogata tra docente e classe.

La dimostrazione completa viene presentata dal "docente" tramite file GG.

Metodologia: modalità laboratoriale individuale o in piccoli gruppi per la costruzione e l'esplorazione e successivamente discussione collettiva con formalizzazione del teorema e sua eventuale dimostrazione con l'aiuto del docente.

Tempo: ½ h

Scheda docente:

L'argomento oggetto della scheda potrebbe essere slegato dalla programmazione del primo anno, durante il quale si suppone debba essere proposto il modulo didattico.

Si ritiene però tale attività significativa per gli studenti poiché propedeutica alla risoluzione del problema "Isola Tondatonda".

Per tale motivo il docente dovrà dare maggiori indicazioni e seguire più da vicino la costruzione. La dimostrazione che è proposta è in tal senso del tutto facoltativa, stabilirà il docente se svolgere l'attività in maniera puramente esplorativa o se integrarla con la formalizzazione dei teoremi e la loro dimostrazione.

Scheda studenti:

Alcune definizioni:

*Si chiama **angolo al centro** di una circonferenza ogni angolo avente il vertice nel suo centro.*

*Si chiama **angolo alla circonferenza** un angolo con il vertice su una circonferenza e i lati o entrambi secanti, o uno secante e l'altro tangente alla circonferenza.*

*Un angolo alla circonferenza e un angolo al centro che insistono sullo stesso arco si dicono **corrispondenti**.*

*Si dice **arco** la parte di circonferenza inclusa in un angolo al centro.*

La costruzione che farai con GeoGebra ti consentirà di osservare la relazione esistente tra un angolo al centro e un angolo alla circonferenza.

Costruzione:

1) Apri un file e disegna una circonferenza di dato centro O e passante per un punto.

2) Oltre al punto già segnato sulla circonferenza indicane un secondo, ricorda (!) devi selezionare punto su un oggetto altrimenti rischi che il punto non sia vincolato ad appartenere alla circonferenza.

3) Ora dovrai segnare l'angolo al centro i cui lati passano per A e B, segna anche i segmenti OA e OB, e il settore circolare AOB, questo ti permetterà di visualizzare meglio l'angolo.

4) Fissa un punto C sulla circonferenza e segna l'angolo alla circonferenza di vertice C ed estremi A e B.

Osservazioni:

Al variare di C sulla circonferenza quale proprietà puoi osservare?________________________

Cosa accade se muovi il punto A o il punto B?____

Riassumendo:

1. Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono ___________________

2.Ogni angolo alla circonferenza è la _________ del corrispondente ______________________

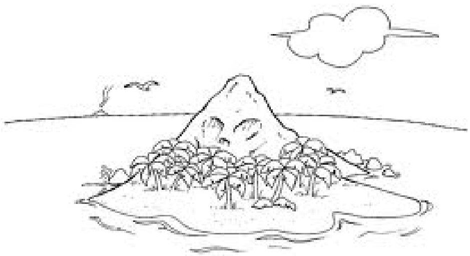
Fase 5: L'isola Tondatonda

Descrizione: L'attività prende spunto da una storia di pirati. Essi sbarcano su un'isola con l'obiettivo di nascondere un tesoro. Agli studenti viene richiesto di individuare la posizione esatta del tesoro mettendo a punto un modello geometrico con il software. Gli studenti dovranno pervenire a una congettura e darne una dimostrazione.

Metodologia: modalità laboratoriale individuale o in piccoli gruppi per la costruzione e l'esplorazione del problema. L'insegnante incoraggerà la condivisione e la discussione in gruppo. Gli studenti dovranno pervenire a una congettura e darne una dimostrazione per iscritto.

Tempo: 1h

Scheda studenti



Due pirati sbarcano su una piccola isola completamente deserta e piatta, in corrispondenza di una torretta. Il nome dell'isola è "Tondatonda" a causa della sua forma pressoche circolare. In lontananza scorgono, in posizione diametralmente opposta, una seconda torretta, identica alla prima.

I due pirati si convincono che Tondatonda è proprio il posto adatto dove nascondere il loro tesoro, un diamante molto prezioso. Essi iniziano a vagare lungo la spiaggia dove a un certo punto incontrano un relitto e si fermano. Uno dei due pirati propone allora questa strategia: "io mi dirigerò in linea retta verso la prima torretta, mentre tu, alla stessa velocità, ti dirigerai verso la seconda. Il primo tra noi che arriverà alla propria torretta darà un segnale e in quel preciso istante ci guarderemo e cominceremo a camminare, sempre in linea retta e alla stessa velocità, l'uno verso l'altro. Quando ci incontreremo svolteremo ad angolo retto e procederemo in versi opposti. Dopo un po' uno di noi si ritroverà proprio qui. L'altro invece raggiungerà la spiaggia in un punto diverso, in cui *seppellirà il tesoro." Dopo aver eseguito minuziosamente il piano, i due pirati soddisfatti lasciano l'isola.*

Qualche tempo dopo i due pirati ritornano su Tondatonda per recuperare il tesoro, ma purtroppo non trovano più il relitto, rimosso dalle frequenti mareggiate. Come possono ritrovare il tesoro

<u>Il problema può essere affrontato con la costruzione di un file GG....</u>

1) prova a rappresentare la situazione iniziale

2) e poi, verifica cosa accade al variare della posizione iniziale.

Riporta le tue osservazioni su un foglio.

3) Prova a formulare una **congettura.**

Attenzione in matematica occorre dimostrare le congetture formulate!!

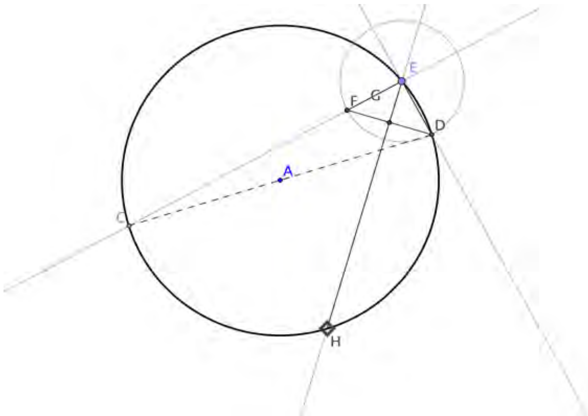
4) Riporta la dimostrazione sul foglio.

Spunti di riflessione:

Come cambia il problema se non si suppone che le torrette siano diametralmente opposte?

<u>Scheda docente:</u>

La modellizzazione del problema è illustrata in figura:



I punti C e D rappresentano le due torrette, mentre il punto E rappresenta il relitto. Il cammino percorso dal primo pirata è la spezzata EDGH, mentre il cammino del secondo pirata è la spezzata (chiusa) EFGE. Dato che i due hanno velocità uguali si ha che EF=ED e FG=GD. Inoltre, l'angolo FED è retto perché insiste sul diametro CD. Ne consegue che EH è bisettrice dell'angolo FED dato che il triangolo FED è isoscele. Il punto H dovrà allora necessariamente dividere l'arco CD in due parti uguali. Infatti, l'arco HD (sul quale insiste l'angolo DEH) è la metà dell'arco CD (sul quale insiste l'angolo FED).

È importante osservare che ciò avviene indipendentemente dalla posizione del punto E (ossia la posizione del relitto), a patto che E sia nella stessa semicirconferenza di F e G. Viceversa nel caso in cui E si sposti dall'altra parte il punto H bisecherà la semicirconferenza opposta.

Per riuscire a recuperare il tesoro basterà dunque scavare nei due punti della spiaggia (opposti) equidistanti dalle due torrette. Gli studenti, esplorando con il software le possibili posizioni del punto E, potranno rendersi conto (ed eventualmente fornirne una dimostrazione) che il punto H non si sposta e che dunque non è necessario conoscere la posizione del relitto per ritrovare il tesoro. *(da un'idea di G. Di Caprio, P.G. Laiolo)*

Questionari

Di seguito si riporta una proposta di quesiti formulati dai docenti, che hanno svolto l'attività nelle loro classi.

1. Quesiti per la valutazione del gradimento o della difficoltà nello svolgimento dell'attività

Nel lavoro svolto hai incontrato concetti già conosciuti? (sì/no quali?)

quali?____

E concetti conosciuti visti in un'ottica nuova? (sì/no quali?)

quali?____

Quali difficoltà hai incontrato nello svolgimento?

(Indica un valore da 1 a 5, 1 = minimo, 5 = massimo)

- Gradimento________
- Chiarezza delle richieste__________
- Utilità per la comprensione della geometria_________
- Cooperazione nel gruppo ____________

2. Quesiti per la valutazione delle competenze nell'utilizzo di GeoGebra

Costruzione 1

- Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB.
- Traccia poi una retta parallela ad AB che interseca i lati AC e BC del triangolo rispettivamente in P e Q.
- Traccia la retta passante per P e parallela a BC e la retta passante per Q e parallela ad AC. Indica quindi con R il loro punto di intersezione.
- Verifica, misurando i suoi lati, che il triangolo PQR è isoscele.
- Verifica, misurando gli angoli da essa formati, che la semiretta CR è la bisettrice dello angolo ACB .

Costruzione 2

E' stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni: vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M, un pino P e una quercia Q. Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P. Qui gira verso la tua destra di 90° e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta in questa posizione un paletto P1. Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta, in questa posizione un paletto P2. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P1P2.

Giunti sull'isola del tesoro si ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M. Si potrà trovare ugualmente il tesoro? **Formula una congettura per rispondere al quesito.**

3. Quesiti per la valutazione delle conoscenze e abilità acquisite

1. Dal vertice A di un triangolo ABC conduci la parallela a BC. Dal punto medio M di AC conduci la parallela ad AB che incontra CB in E. Indica con D il punto d'intersezione delle due rette tracciate. Dimostra la congruenza dei triangoli AMD ed EMC, dopo aver individuato ipotesi e tesi.

2. Considera la bisettrice dell'angolo interno BAC di un triangolo ABC (qualsiasi). Sia M il

punto in cui tale bisettrice interseca il lato BC del triangolo. Sotto quali condizioni il triangolo AMB è isoscele? Sotto quali condizioni sono isosceli sia il triangolo AMB, sia il triangolo AMC? Giustificare le proprie risposte.

3. Descrivi i passi di costruzione da usare con GeoGebra per ottenere - a partire da una circonferenza data –due angoli che siano sicuramente uno il doppio dell'altro. Come puoi esserne certo senza misurarli? (sono VIETATI tutti gli strumenti relativi agli ANGOLI: bisettrici, misure…)

Conclusioni

Nel dialogo con i docenti che hanno svolto l'attività sono emersi alcuni punti di forza.

In particolare i docenti hanno messo in luce come gli studenti si sentano maggiormente motivati dall'aspetto pratico e trovino positivo il fattore "scoperta".

La metodologia utilizzata ha inoltre fornito nuovi spunti per la didattica, i docenti si sono resi conto di poter partire da un problema svincolandosi dal programma, in molti hanno poi notato un incremento significativo del numero di ore svolte nel laboratorio informatico.

Riguardo la specificità della proposta il lavoro con GeoGebra su costruzione vs disegno ha aiutato a porre domande sulla dipendenza degli oggetti geometrici e ha favorito il consolidarsi di alcuni concetti chiave spesso difficilmente assorbiti dagli studenti (es. disuguaglianza triangolare).

Un punto di criticità, oltre all'aspetto pratico relativo alla disponibilità nelle scuole di laboratori attrezzati, è legato alla difficoltà di rielaborazione personale, non è detto che gli studenti riescano a dire ciò che hanno capito, occorre lavorare sulla verbalizzazione.

Complessivamente riteniamo il metodo di lavoro proficuo (numero limitato di incontri in presenza organizzati intorno a compiti reali e lavoro in rete quando si sviluppa l'attività con gli studenti); nel futuro sarà importante rendere ancora più significativo il ruolo della piattaforma che può rivelarsi lo strumento più efficace per il confronto continuo tra i docenti.

Bibliografia

m@t.abel "Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione"

Geometria 0: Corso introduttivo a GeoGebra di Patrizia Laiolo e Gaetano Di Caprio pubblicato all'interno del Piano Lauree Scientifiche 2012-2013.

PERCORSI DI GEOMETRIA CON GEOGEBRA: FIGURE E TRAFORMAZIONI NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO E SECONDO GRADO

Carla Lovino, Mariella Stragapede, Eleonora Faggiano, Michele Pertichino
Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Bari Aldo Moro

Premessa

Nelle Indicazioni Nazionali per il Curricolo per la Scuola Secondaria si legge: "*Poiché i ragazzi sono molto resistenti agli apprendimenti di cui non comprendano motivazione e significato, la Scuola è impegnata a radicare conoscenze e abilità disciplinari e interdisciplinari sulle effettive capacità di ciascuno, utilizzando le modalità più motivanti e ricche di senso, perché possano esercitarle, sia individualmente, sia insieme agli altri, sia dinanzi agli altri. Motivazione e bisogno di significato sono del resto condizioni fondamentali di qualsiasi apprendimento. Senza queste due dimensioni risulta molto difficile coniugare lo sforzo richiesto da qualsiasi apprendimento, tanto più se lontano dagli interessi immediati dell'allievo e di natura secondaria, con la pertinenza e il grado di complessità delle conoscenze e abilità che si intendono insegnare.*"

Crediamo importante sottolineare quanto le parole "motivazione" e "significato" presenti in questo paragrafo siano alla base dell'"apprendimento significativo", che diventa tale quando lo studente riesce a scoprire i nessi tra le varie conoscenze possedute e riesce a usarle in maniera opportuna per portare a compimento compiti complessi.

Riteniamo, infatti, che "*l'apprendimento significativo [sia] attivo, costruttivo, intenzionale, cooperativo, autentico e si verifichi attraverso una serie di azioni, tra cui l'investigazione, l'esplorazione, la scrittura, il modellamento, la comunicazione, la progettazione, la visualizzazione. Per queste sue prerogative, l'apprendimento significativo può essere attivato per mezzo di un appropriato uso delle tecnologie.*" (Limone, 2012).

È importante tener sempre presente che l'uso delle tecnologie non è, in sé, un'innovazione, ma deve rappresentare sia per il docente che per lo studente un diverso modo di pensare e, quindi, di costruire le proprie conoscenze. L'uso delle tecnologie deve, quindi, essere consapevole: i vari software non possono alleviare le "fatiche del calcolo matematico", né possono sostituire uno studio consapevole, ma possono aiutare a far diventare le conoscenze "in atto", cioè attivare una serie di processi che permettano, facendo leva sulla motivazione, di conoscere per fare.

In quest'ottica, ben si inserisce il "laboratorio di matematica", nel quale "*ogni studente è allo stesso tempo apprendista e insegnante ed è sollecitato a condividere le proprie conoscenze valorizzando quindi gli aspetti metacognitivi del processo di apprendimento. L'apprendista osserva il maestro e successivamente lo imita, mentre il compito del docente è di assistere ed agevolare il lavoro, fornendo un sostegno in termini di stimoli e risorse. Con il progredire delle abilità degli allievi, diminuisce progressivamente il supporto fornito ed aumenta l'autonomia di chi apprende.*" (Limone, 2012).

Nel laboratorio di matematica, infatti, l'insegnante è maestro perché deve organizzare situazioni di apprendimento in cui lo studente sia protagonista, fornendo contenuti e metodi e rispondendo alle questioni che possono sorgere durante la discussione. L'allievo, d'altra parte, all'inizio è apprendista: osserva il maestro e cerca di capire come funzionano le cose, iniziando in tal modo a selezionare i fatti significativi, scoprire le proprietà e intuire le relazioni. Successivamente, si rende autonomo dal maestro e inizia a formulare ipotesi da solo, analizzando criticamente le varie situazioni. A questo punto, se motivato e stimolato, può continuare il lavoro a casa, diventando persona competente e risorsa sia per i compagni che per lo stesso insegnante.

A tal proposito, afferma Pellerey (2005) che c'è una "*sempre più marcata esigenza di promuovere nella formazione scolastica vere e proprie competenze e non solo conoscenze e abilità*." Per competenza, in Matematica, si intende, quindi, quella "*capacità di attivare e coordinare le proprie risorse interne e valorizzare quelle esterne disponibili al fine di portare a termine in maniera valida ed efficace un compito, o una classe di compiti, socialmente rilevante*." (Pellerey, 2005).

Un modo per fare acquisire competenze matematiche agli alunni è proporre loro problemi percepiti come "sfide", che favoriscano, cioè, lo sviluppo di atteggiamenti di dubbio, incertezza e che permettano, attraverso un uso appropriato delle tecnologie, una riflessione critica.

Quindi, in questo approccio, rientrano anche aspetti motivazionali e cognitivi molto importanti. Conclude Pellerey: "*le competenze si sviluppano in contesti nei quali lo studente è coinvolto direttamente o indirettamente in un'attività che lo interessa più o meno profondamente, ma che comunque ha per lui un senso. Il coinvolgimento diretto implica la messa in atto di una vera e propria dinamica che parte da uno stato motivazionale per elaborare un'intenzione d'azione e una gestione della sua realizzazione valida ed efficace*." (Pellerey, 2005).

Descrizione delle attività svolte

A partire da queste considerazioni, sono state svolte con l'utilizzo del software GeoGebra due attività con alunni di Scuola Secondaria di primo e di secondo grado.

L'attività nella Scuola Secondaria di primo grado si è inserita nell'ambito di un progetto PON[1], dal titolo "Geometria in movimento", durante l'anno scolastico 2011/12, presso la Scuola Secondaria di primo grado "Giovanni XXIII" di Corato (Bari) e ha coinvolto alunni provenienti dalle diverse classi seconde dell'istituto.

L'attività nella Scuola Secondaria di secondo grado si è inserita all'interno delle ore di tirocinio diretto nell'ambito del Tirocinio Formativo Attivo[2], durante l'anno scolastico 2012/13, presso il Liceo Scientifico e Linguistico "O. Tedone" di Ruvo di Puglia (Bari) e ha coinvolto i ragazzi di una classe terza dell'istituto (Liceo Scientifico, indirizzo Scienze Sperimentali).

Il percorso nella Scuola Secondaria di primo grado ha riguardato essenzialmente la geometria euclidea: la costruzione di figure geometriche e le trasformazioni geometriche isometriche e non, prima con gli strumenti tradizionali (riga, compasso e squadre) e poi con l'utilizzo del sotfware GeoGebra.

Il percorso nella Scuola Secondaria di secondo grado ha riguardato, invece, la geometria analitica: la costruzione delle coniche e la loro classificazione in forma matriciale, eseguita successivamente con GeoGebra.

Nella Scuola Secondaria di Primo Grado

Il primo passo è stato avviare gli studenti all'utilizzo del software, che non avevano mai usato prima. Per fare ciò, sono state fornite delle schede riguardanti la costruzione delle principali figure geometriche piane. È stato, questo, un ottimo spunto per far acquisire familiarità con gli strumenti base di GeoGebra e, d'altra parte, per "vedere", tramite la costruzione, le proprietà delle figure, fino ad allora solo enunciate teoricamente. È stato, inoltre, spiegato ai ragazzi che una costruzione in GeoGebra è corretta solo se le proprietà delle figure rimangono tali anche se qualche vertice della figura viene "trascinato" (Mariotti, 2010).

In Figura 1 sono riportati alcuni stralci delle schede fornite e in Figura 2 la costruzione del quadrato, data la diagonale, effettuata dai ragazzi.

- **Disegno di un triangolo isoscele**

Costruire un segmento AB, trovare il punto medio C e tracciare la perpendicolare ad AB passante per C. Su questa retta prendere un punto D e unire i punti A, B e D con la strumento poligono. Calcolare area e perimetro.

Esercizio 1: Disegna un triangolo isoscele con A(1, 3), B(2, 5) e misura dell'altezza a piacere. Calcolane perimetro e area.

- **Disegno del quadrato data la diagonale**

Disegnare un segmento AB inclinato a piacere e determinare il suo punto medio (Ic2). Tracciare per esso la perpendicolare al lato AB. Disegnare la circonferenza di centro C e raggio AC (Ic5) individuando le intersezioni D ed E della circonferenza con la retta. Con lo strumento Poligono tracciare il quadrato AEBD. Calcolare perimetro e area.

Esercizio 3: Disegna un quadrato avente un vertice in A(3, 3) e diagonale lunga 4. Calcolare perimetro e area.

Figura 1. Esempi di schede fornite ai ragazzi

Successivamente, si è passati ad analizzare le varie trasformazioni geometriche, fornendo agli studenti le varie definizioni e chiedendo loro di realizzarle utilizzando gli strumenti tradizionali della geometria (riga, compasso, squadre). In questa fase, gli alunni, inaspettatamente, hanno trovato notevoli difficoltà nell'utilizzo materiale degli strumenti. L'effetto è stato che le trasformazioni ottenute non rispettavano le definizioni e questo non ha permesso una comprensione chiara ed efficace dell'argomento.

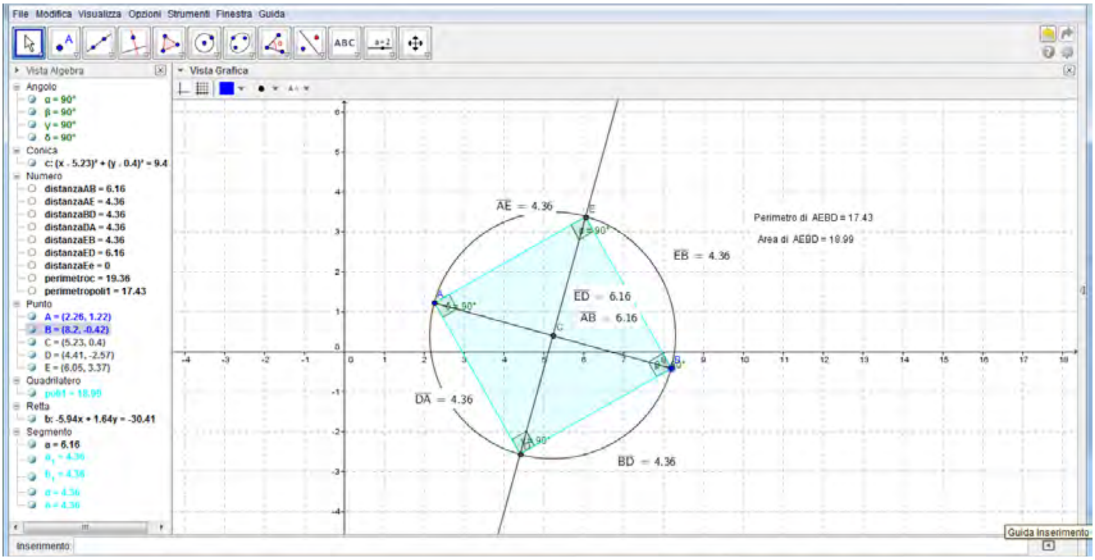
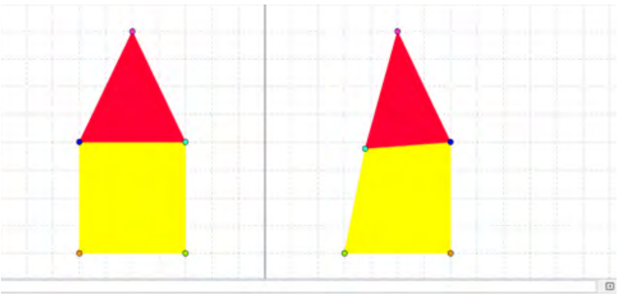
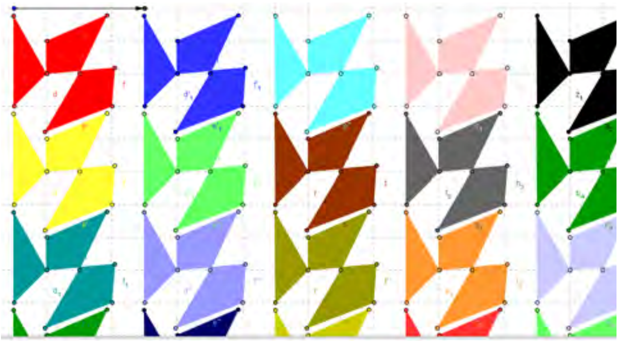
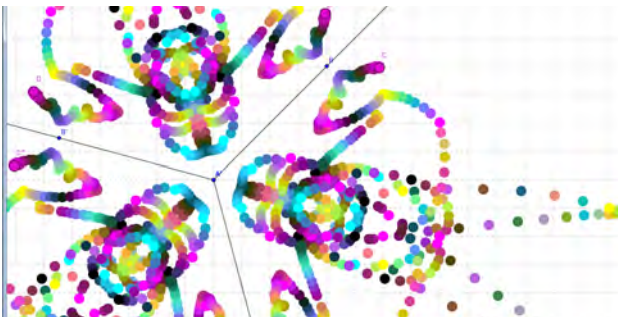


Figura 2. Costruzione del quadrato assegnata la diagonale

A questo punto, le trasformazioni sono state realizzate tramite il software e il suo utilizzo ha permesso di "visualizzare" in maniera chiara gli effetti che queste hanno sulle varie figure. In tal modo, gli studenti hanno compreso fino in fondo l'argomento e si sono cimentati da soli nell'utilizzo delle trasformazioni geometriche, anche sottoforma di gioco, in vista della manifestazione finale del PON, durante la quale hanno mostrato ai loro genitori i lavori prodotti durante il percorso.

Di seguito sono presentati alcuni dei lavori dei ragazzi.

	La “girandola” è stata costruita tramite varie figure geometriche che ruotano intorno a un punto fisso, lasciando la loro traccia. È stato inserito uno slider che modifica l’angolo di rotazione, dando un effetto animato alla figura.
	Questo lavoro riguarda una simmetria assiale. Quando la casetta di destra è simmetrica di quella di sinistra rispetto all’asse indicato (ciò si ottiene muovendo opportunamente i punti), compare la foto dei protagonisti del PON, a significare che il lavoro è stato fatto bene.
	Questo lavoro è stato prodotto traslando secondo due vettori (uno orizzontale e uno verticale) una figura. Cambiando la forma iniziale e trascinando i vertici, cambiano anche le traslazioni e, quindi, la “pavimentazione finale”.
	Il “caleidoscopio” è stato ottenuto dividendo il piano in tre settori uguali (di ampiezza 120°) e poi, fissato un punto, di questo sono stati costruiti i simmetrici rispetto agli assi ottenuti. Muovendo il punto e conservandone la traccia, si ha l’effetto “colorato”.

Nella Scuola Secondaria di Secondo GradoNella classe terza del Liceo Scientifico, si è partiti spiegando le varie funzioni del software GeoGebra e le sue potenzialità nello studio della geometria analitica, argomento affrontato durante l’anno scolastico, giunto quasi al termine.

Successivamente, è stata mostrata loro la costruzione di Figura3.

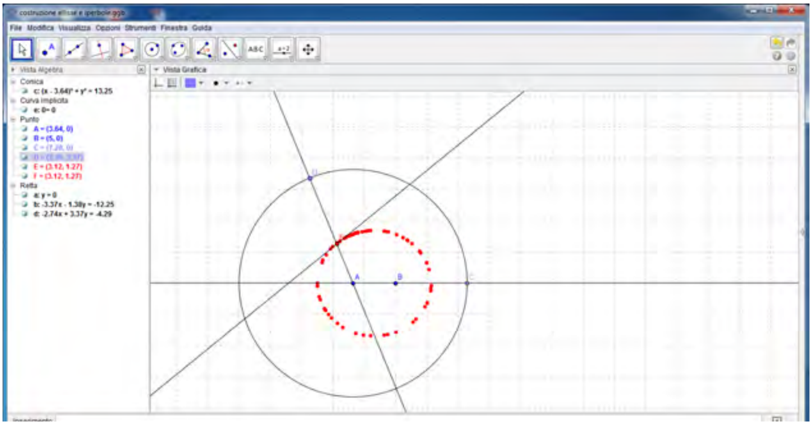


Figura 3. Costruzione utilizzata per riflettere sulla definizione di ellisse

La costruzione è stata prodotta nel seguente modo: si considerino due punti A e B (per comodità sull'asse x) e si disegni la retta passante per A e B. Scelto un ulteriore punto C su tale retta, si costruisca la circonferenza di centro A e passante per C. Considerato un ulteriore punto D sulla circonferenza, la retta passante per A e D interseca l'asse del segmento DB nel punto E. Muovendo il punto D, la traccia del punto E descrive un'ellisse.

È stato chiesto ai ragazzi di riflettere su tale costruzione e di spiegare perché la curva ottenuta è proprio un'ellisse. Questo ha permesso loro di riflettere sulla definizione di ellisse e sul concetto di luogo geometrico che ha trovato, in questo modo, una rappresentazione "visiva".

È stato, questo, un esercizio molto utile perché ha permesso agli studenti di comprendere il concetto di luogo geometrico, già dato durante il primo biennio nell'ambito dello studio della geometria euclidea, come insieme di punti che soddisfano una determinata proprietà, per mezzo di una visualizzazione rapida della "traccia" lasciata dal punto.

Gli alunni, opportunamente guidati, hanno compreso che la conica descritta è un'ellisse perché è costante la somma delle distanze del punto E da A e B che, quindi, ne rappresentano i fuochi.

L'esercizio è proseguito chiedendo ai ragazzi: cosa succede se il punto B è esterno alla circonferenza?

La risposta è stata immediata, avendo i ragazzi compreso la costruzione precedente. La conica ottenuta è, in questo caso, un'iperbole, essendo costante il modulo della differenza tra le distanze del punto E dai fuochi A e B (si veda Figura 4).

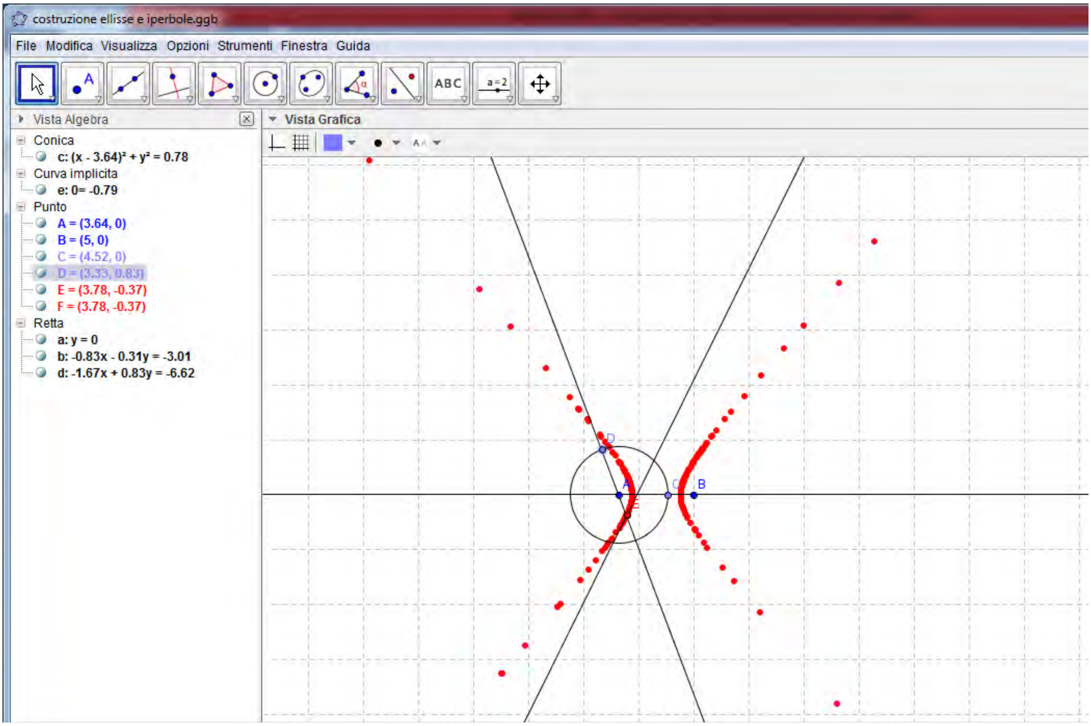


Figura 4. Da l'ellisse all'iperbole

È stato interessante far osservare ai ragazzi che se i fuochi giacciono su una retta non parallela all'asse delle ascisse, nell'equazione della conica fornita da GeoGebra compare il "termine misto" xy. Questo è stato lo spunto per introdurre la classificazione delle coniche in forma matriciale, per far osservare che il termine xy può essere presente anche nell'equazione di una parabola o di un'ellisse.

Per formalizzare la questione, dopo aver fornito i concetti principali riguardanti le matrici e il calcolo dei determinanti, insieme agli studenti, si è provato a costruire un protocollo di lavoro su GeoGebra che permettesse, ricevendo in input la matrice completa associata alla conica, di classificarla come degenere o non, specificandone il tipo (parabolico, iperbolico o ellittico) e di disegnarla, fornendo la sua equazione.

Non ci si è soffermati sul concetto di coniche degeneri, in quanto i ragazzi non possedevano ancora il concetto di rango di una matrice. Il lavoro è stato tuttavia utile perché ha anticipato dei concetti che verranno ripresi in seguito dall'insegnante curriculare, che potrà utilizzarlo come punto di partenza.

Di seguito, nelle Figure 5, 6,7, sono presentati alcuni dei lavori dei ragazzi.

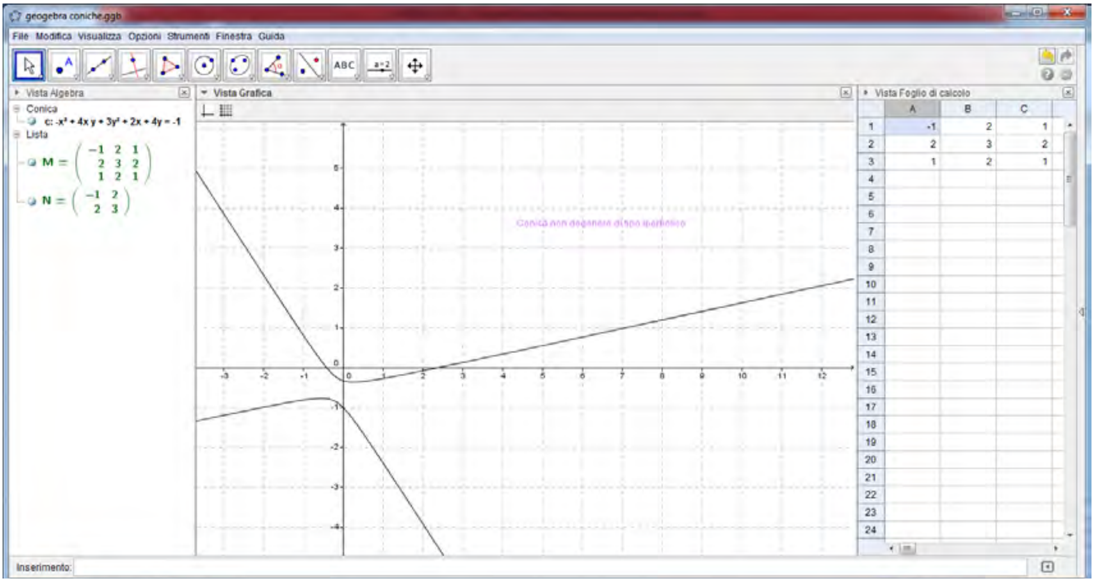


Figura 5. Conica non degenere di tipo iperbolico.

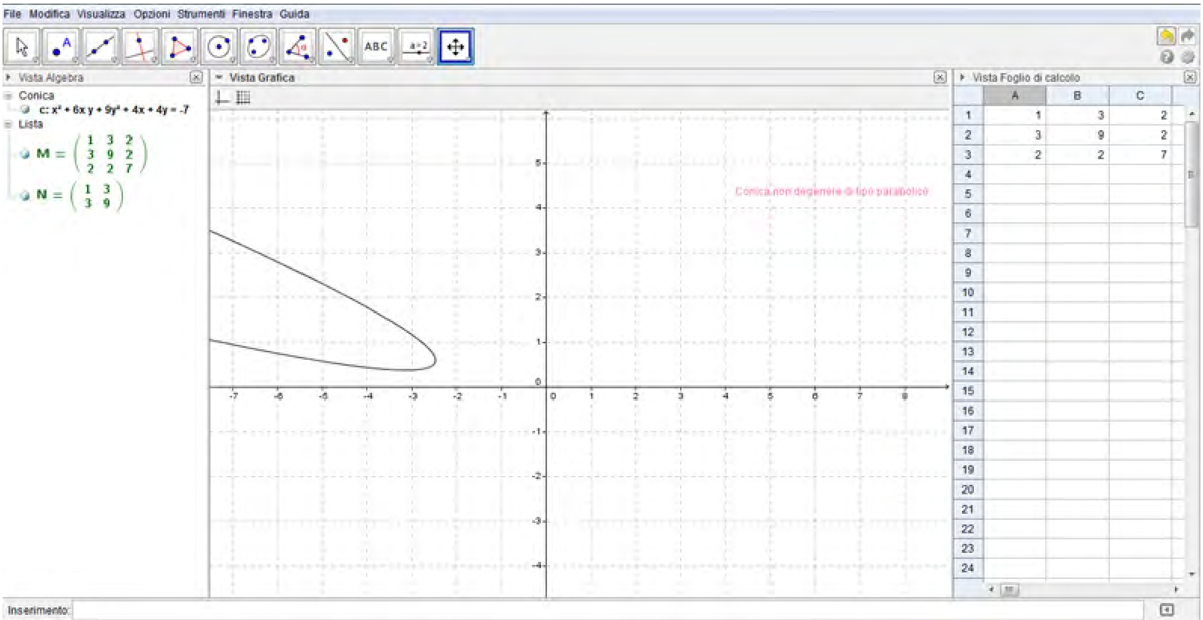


Figura 6. Conica non degenere di tipo parabolico.

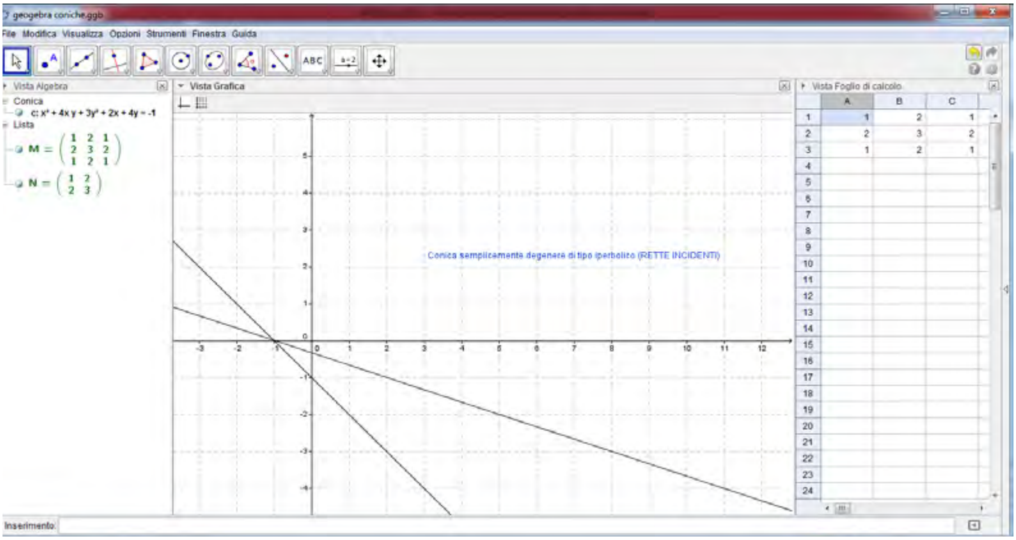


Figura 7. Conica semplicemente degenere di tipo iperbolico

Conclusioni

L'approccio alla geometria nei due diversi gradi di scuola ha avuto effetti molto positivi in entrambe le esperienze.

Il percorso effettuato nella Scuola Secondaria di primo grado ha permesso di rafforzare conoscenze pregresse riguardo le varie figure geometriche, comprendendo a pieno le proprietà sottese. La comprensione del concetto di trasformazione geometrica è avvenuta per mezzo del software e ha avuto ripercussioni positive anche sulla capacità degli alunni di utilizzare gli strumenti classici della geometria per realizzarle, superando le difficoltà incontrate all'inizio del percorso.

A quest'approccio di "gioco", nella Scuola Secondaria di secondo grado se neè sostituito uno più rigoroso e formale. In quest'ambito, quindi, GeoGebra ha permesso di focalizzare l'attenzione sui punti notevoli delle coniche e sul loro significato, introducendo inoltre concetti nuovi.

Il laboratorio di matematica è stato effettivamente un approccio metodologico-didattico che ha permesso agli studenti di imparare gli uni dagli altri, facendo congetture e sperimentandone la validità, in un processo di apprendimento che ha portato allo sviluppo di una conoscenza che si trasformi da "inerte" a "in atto".

Note

1. I progetti PON, finanziati dai Fondi Strutturali Europei 2007-2013, sono finalizzati a migliorare i livelli di competenze di base degli alunni in varie discipline, tra cui matematica. Queste attività aggiuntive integrano quelle curriculari, con lo scopo di arricchire e recuperare capacità, conoscenze, abilità per rafforzare la motivazione ad apprendere e favorire una partecipazione attiva degli alunni nella costruzione dei propri processi di apprendimento.

2. Il Tirocinio Formativo Attivo è un percorso per il conseguimento dell'abilitazione all'insegnamento, composto da ore di lezione (in discipline trasversali e specifiche) e da ore di tirocinio diretto, sotto la supervisione di un tutor d'aula accogliente.

Bibliografia

Limone, P. (2012). *Valutare l'apprendimento on-line*. Bari: Progedit.

Mariotti, M. A. (2010). Riflessioni sulla dinamicità delle figure: il comando di trascinamento. In G. Accascina &E. Rogora (a cura di). *Seminari di geometria dinamica*. Roma: Ed. Nuova Cultura, pp. 57-60

Pellerey, M. (2005). Formare competenze con la matematica. *Atti del III Convegno Matematica, formazione scientifica e nuove tecnologie*. Ferrandina (MT): Ed.Ermes, pp. 127.142

L'AREA DELL'ARBELOS E LA PARABOLA PER TRE PUNTI. GEOGEBRA COME STRUMENTO ATTIVO

Giovanna Valori

Liceo Classico "F. Stabili"-"E. Trebbiani" Ascoli Piceno

"The mathematician's patterns,

like the painter's or the poet's must be beautiful;

the ideas like the colours or the words,

must fit together in a harmonious way.

Beauty is the first test:there is no permanent place in the world for ugly mathematics".

G.H.Hardy, A Mathematician's Apology

Premessa

Nelle Indicazioni nazionali per i Nuovi Licei leggiamo:

> *"Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie elementari per la costruzione di modelli matematici in casi molto semplici ma istruttivi, e saprà utilizzare strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. [Nel liceo classico un'attenzione particolare sarà posta alle relazioni tra pensiero matematico e pensiero filosofico]…."*

> *"Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale."*

> *"L'uso costante del laboratorio per l'insegnamento delle discipline scientifiche; la pratica dell'argomentazione e del confronto; la cura di una modalità espositiva scritta ed orale corretta, pertinente, efficace e personale; l'uso degli strumenti multimediali a supporto dello studio e della ricerca ...".*

Da questa lettura nasce l'idea di realizzare un'attività in cui il laboratorio viene visto come un ambiente in cui gli allievi possono fare congetture, verificarne la validità, fare ricerca, collaborare e confrontarsi, con una diretta responsabilità del proprio lavoro e dei risultati.

Idea anche conseguenza di una mia riflessione sui frequenti insuccessi degli allievi nella risoluzione dei problemi. Mi era già capitato,infatti, di proporre il problema dell'area massima dell'Arbelos dopo aver studiato il cerchio e la parabola. Troppo spesso gli studenti avevano mostrato difficoltà nel legare l'espressione dell'area della figura, calcolata come differenza di aree, a un concetto profondo quale è quello di funzione (parabola come funzione di secondo grado). Anche quando veniva data la soluzione, non apparíva evidente la comprensione: un esercizio da ripetere allo stesso modo di altri nel cui testo si poteva leggere massimo o minimo. Da qui l'idea di tentare un percorso diverso, forse meno lineare, ma credo più efficace, in cui

GeoGebra dà significato alla nozione di funzione, tanto da farla diventare quasi un concetto primitivo. Le competenze matematiche acquisite nello studio del calcolo letterale, dei teoremi di Pitagora e di Euclide, della geometria analitica sono state messe tutte in gioco. La figura di Archimede, cui viene attribuito il libro che contiene l'Arbelos, e quindi il contesto storico in cui si intraprende il calcolo delle aree, emerge solo alla fine, quando si sente la necessità di una autentica dimostrazione, con una interessante lettura in latino[1] della proposizione IV del Libro dei Lemmi, che è stata stimolo per ulteriori approfondimenti.

Il problema e i prerequisiti

Data una semicirconferenza di diametro *AB*, si consideri un punto *M* sul diametro e si costruiscano le semicirconferenze di diametri *AM* e *MB*. La parte di piano delimitata dalle tre circonferenze è detta Arbelos [o Arbelo, deriva dal greco ἄρβηλος "trincetto"] (Figura 1). Studia la variazione dell'area dell'Arbelos al variare di *M* sul diametro AB, individuandone il valore massimo.

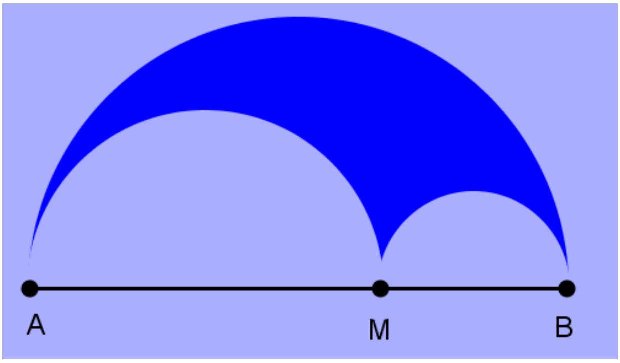


Figura 1

Prerequisiti:

- calcolo letterale
- teoremi di Pitagora ed Euclide
- area del cerchio
- la parabola nel piano cartesiano
- la funzione lineare, la funzione di secondo grado
- strumenti e principali comandi di GeoGebra.

Il laboratorio con GeoGebra

Il riscaldamento iniziale

Il laboratorio si apre con una fase di "riscaldamento" in cui gli allievi lavorano in coppie. Essi familiarizzano con il problema (Figura 2), osservano e discutono utilizzando l'ambiente GeoGebra le relazioni tra l'area dell'Arbelos e le variazioni del punto M e del raggio r (Figura 3), del raggio r soltanto (Figura 4), del punto M soltanto (Figura 5).

1 *"Al termine del percorso di studi lo studente è in grado di: praticare la traduzione non come meccanica applicazione di regole, ma come strumento di conoscenza di testi e autori."* (Indicazioni Nazionali per Lingua e cultura latina – Liceo Classico).

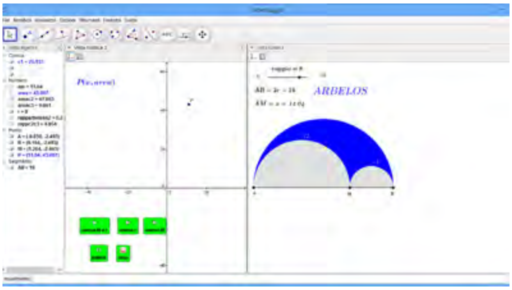


Figura 2

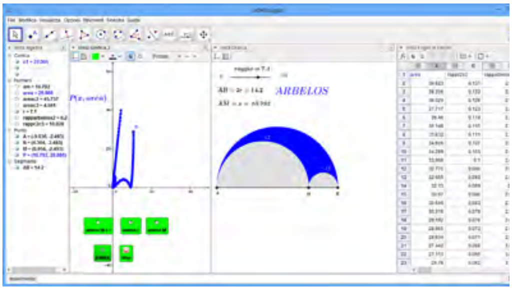


Figura 3

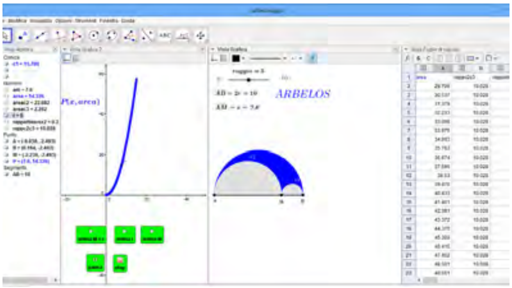


Figura 4

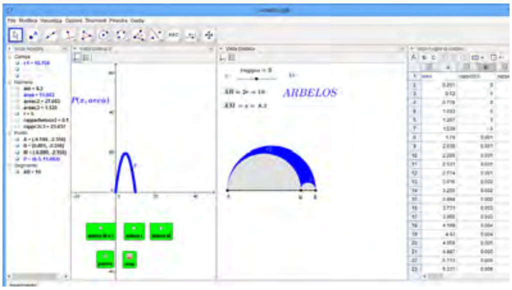


Figura 5

Il riscaldamento si conclude con la scelta degli alunni di fissare un raggio e di variare M.

La divisione della classe in due gruppi

La classe viene successivamente divisa in due gruppi e all'interno di ciascun gruppo gli alunni lavorano in coppia, utilizzando il file predisposto dall'insegnante.

Il primo gruppo inizia con un approccio ludico, individuando fra tre cerchi proposti quello che può essere ritenuto equivalente all'Arbelos (gioco di crescite e simmetrie). Traendo poi spunti e suggerimenti nella Vista Grafica, esso segue un approccio "geometrico-algebrico" per verificare l'equivalenza delle due figure e per determinare il valore massimo dell'area. Tutte le osservazioni e argomentazioni, come ad esempio la dimostrazione algebrica, mediante il completamento del quadrato e le disuguaglianze, che il valore massimo si ottiene per $x=r$, vengono scritte su un foglio dalle singole coppie e quindi discusse nel gruppo. Infine gli alunni rappresentano nella Vista grafica 2 la funzione dell'area così determinata, ritrovando il risultato precedente.

Figura 6

Figura 7

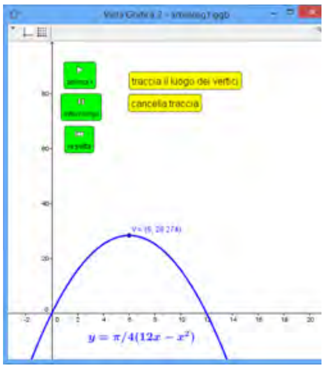


Figura 8

Le coppie che costituiscono il secondo gruppo, invece, dopo l'esplorazione dinamica (Figura 9), inseriscono nella Vista Grafica 2 il punto *P (am,area)* dove il valore *am* è definito come distanza tra M e **A** e il valore *area* è definito come differenza delle aree dei semicerchi contorno dell'Arbelos(Figura 10).

Figura 9

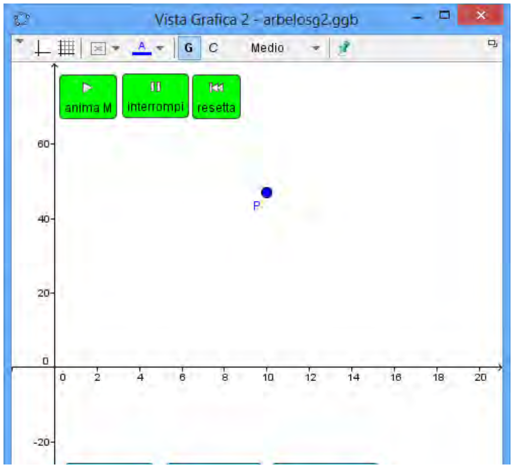


Figura 10

Quindi ne osservano la traccia e scrivono su un foglio l'equazione di una funzione con andamento analogo. Dopo aver registrato su foglio di calcolo i punti *P(am,area)* al variare di M (Figura 11), eseguono l'analisi di regressione bivariata delle coppie ($x(P),y(P)$) registrate, scegliendo come modello quello individuato (Figura 12).

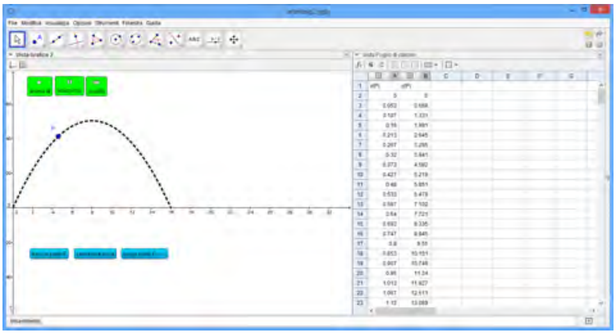


Figura 11

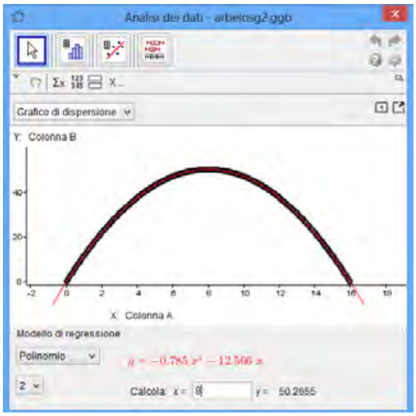


Figura 12

A questo punto gli alunni scelgono tre coppie ($x(P),y(P)$) del foglio di calcolo e inseriscono nella Vista Grafica 2 i punti C, D, E.

Visualizzata la Vista CAS:

- nelle celle 1,2,3 impongono il passaggio per i punti C,D,E, al grafico della funzione prima individuata;
- nella cella 4 creano la lista di equazioni nelle incognite *a,b,c,* {$1,$1,$3};
- nella cella 5 risolvono il sistema;
- nella cella 6 definiscono la funzione $f(x)=ax^2+bx+c$ con *a,b,c* della cella 5.

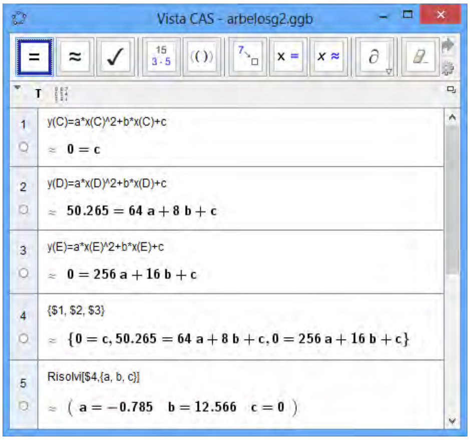


Figura 13

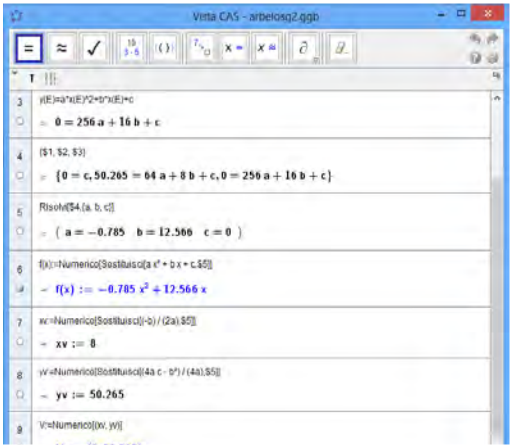


Figura 14

La funzione calcolata con il CAS, come ci si aspettava, coincide con quella dell'analisi di regressione bivariata! Inoltre nella Vista Grafica 2 si osserva che il grafico di questa funzione si sovrappone alla traccia di P (Figura 15).

Tornando in Vista CAS (Figura 14), gli alunni:

- nelle celle 7 e 8 definiscono le coordinate del vertice V della parabola: *xv* e *yv*;
- nella cella 9 definiscono il vertice *V(xv,yv)*, con attiva la Vista Grafica 2.

Le coordinate del vertice danno rispettivamente la posizione di M per la quale l'area dell'Arbelos è massima e l'area massima (Figura 15).

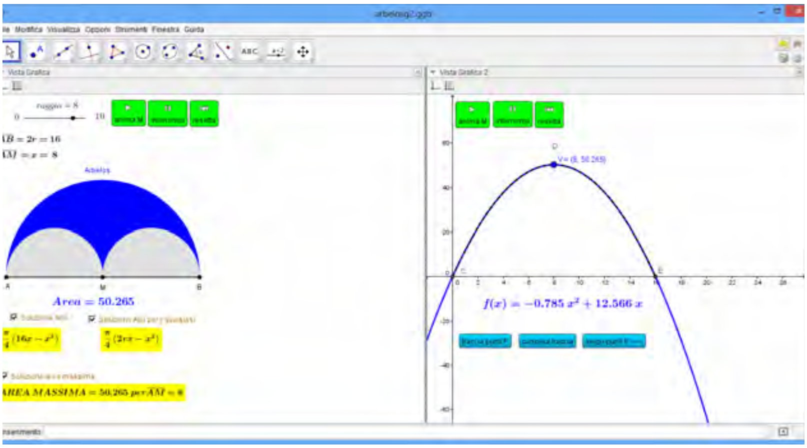


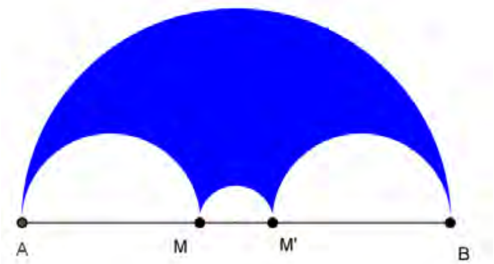
Figura 15

Gli alunni infine verificano l'uguaglianza tra la funzione trovata con il CAS e quella che si ottiene con carta e penna come differenza di aree.

Il confronto tra i gruppi

Terminata l'attività con GeoGebra, i gruppi scelgono due rappresentanti che espongono, utilizzando la LIM, la risoluzione del problema. Desta particolare interesse lo strumento CAS, mai usato prima. Interessante anche la discussione sulla scelta dell'arrotondamento con tre cifre decimali per scoprire il valore approssimato (0.785).

Uno studente propone una variante dell'Arbelos (Figura 16).



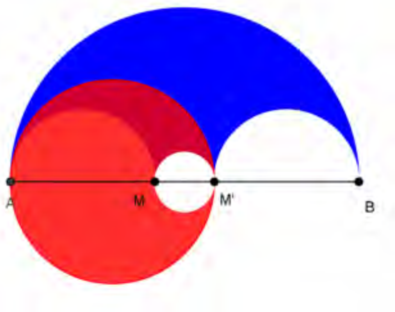


Figura 16 *Figura 17*

Questa loro scoperta li motiva fortemente alla ricerca delle proprietà della nuova figura (Figura 17)!

La lettura della Proposizione IV del LIBER ASSUMPTORUM

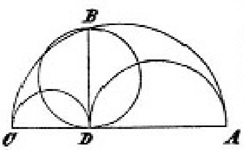
Solo alla fine del confronto tra i gruppi, l'insegnante propone la lettura e traduzione della Proposizione IV del LIBER ASSUMPTORUM (LIBRO DEI LEMMI) dell'opera Archimedis OPERA OMNIA del filologo danese J. L. Heiberg (vol.II- LIPSIAE MDCCCLXXXI). Gli alunni scoprono che la figura oggetto del loro studio è attribuita ad Archimede e rimangono affascinati dalla chiarezza dell'argomentazione del genio siracusano!

432 LIBER ASSUMPTORUM.

IV.

Sit *ABC* semicirculus, et fiant super *AC* diametrum duo semicirculi, quorum unus *AD*, alter uero *DC*, et *DB* perpendicularis, utique figura proueniens, quam uocat Archimedes Arbelon (est superficies comprehensa ab arcu semicirculi maioris et duabus circumferentiis semicirculorum minorum), est aequalis circulo, cuius diameter est perpendicularis *DB*.[1])

Demonstratio. quia linea *DB* media proportionalis est inter duas lineas *DA*, *DC* [Eucl. VI, 13; Zeitschrift f. Math., histor. Abth. XXIV p. 181 nr. 16], erit planum *AD* in *DC* aequale quadrato *DB* [Eucl. VI, 17]. et ponamus *AD* in *DC* cum duobus quadratis *AD*, *DC* communiter; fiet planum *AD* in *DC* bis cum duobus quadratis *AD*, *DC*, nempe quadratum *AC* [Eucl. II, 4], aequale duplo quadrati *DB* cum duobus quadratis *AD*, *DC*. et proportio circulorum eadem est ac proportio quadratorum [Eucl. XII, 2]. ergo circulus, cuius diameter est *AC*, aequalis est duplo circuli, cuius diameter est *DB*, cum duobus circulis, quorum dia-



1) Has propositiones de arbelo (4, 5, 6 et 1) non dubito Archimedi tribuere. proprietates arbeli antiquitus tractatas esse, testatur Pappus IV, 19 p. 208, 9: ἀρχαία πρότασις. nomen accepit ex similitudine cultelli sutorii (schol. ad Nicandri Theriac. 428).

Sia ABC un semicerchio, e si costruiscano sul diametro AC due semicerchi, dei quali uno di diametro AD, l'altro DC, e la perpendicolare DB, dunque la figura che viene fuori, che Archimede chiama ***Arbelo*** (è la superficie compresa tra l'arco del semicerchio maggiore e le due circonferenze dei semicerchi minori), è "uguale" al cerchio, il cui diametro è la perpendicolare DB[2].

Dimostrazione. Poiché il segmento ("linea") DB è medio proporzionale tra i segmenti DA e DC [Euclide VI,13], allora il rettangolo ("planum") di lati AD e DC è "uguale" al quadrato di lato DB [Euclide VI,17].

$AD \cdot DC = DB^2$

E consideriamo il rettangolo di lati AD e DC con due quadrati di lati AD e DC, saranno fatti due rettangoli di lati AD e DC con due quadrati di lati AD e DC,

dunque il quadrato di lato AC [Euclide II,4]

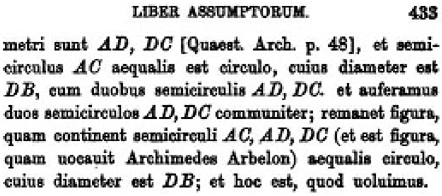
$AC^2 = (AD+DC)^2 = AD^2 + DC^2 + 2 AD \cdot DC$

sarà "uguale" al doppio del quadrato di lato DB con due quadrati di lati AD e DC.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2 DB^2$

E la proporzione dei cerchi è la stessa della proporzione dei quadrati [Euclide XII,2]. Dunque il cerchio, il cui diametro è AC, è "uguale" al doppio cerchio il cui diametro è DB, con due cerchi, i cui

2 *Non dubito ad attribuire ad Archimede queste proposizioni sull' arbelo (4,5,6 e 1). Pappo IV, 19 p.208,9: "in una antica proposizione" attesta che fin dalla antichità' sono state trattate le proprietà dell'arbelo. Il nome deriva dalla similitudine con il coltello del calzolaio presente in un' opera di Nicandro (poeta Greco di età ellenistica).*



LIBER ASSUMPTORUM. 433

metri sunt *AD*, *DC* [Quaest. Arch. p. 48], et semicirculus *AC* aequalis est circulo, cuius diameter est *DB*, cum duobus semicirculis *AD*, *DC*. et auferamus duos semicirculos *AD*, *DC* communiter; remanet figura, quam continent semicirculi *AC*, *AD*, *DC* (et est figura, quam uocauit Archimedes Arbelon) aequalis circulo, cuius diameter est *DB*; et hoc est, quod uoluimus.

diametri sono AD e DC [Quaest. Arch. p.48],

AC=2 DB+ AD+ DC

e il semicerchio di diametro AC è uguale al cerchio il cui diametro è DB, con due semicerchi di diametri AD e DC.

AC= DB+ AD+ DC

E portiamo via i due semicerchi di diametri AD e DC in comune; rimane una figura che contiene i semicerchi di diametri AC, AD, DC (è la figura che Archimede chiama *Arbelo) "uguale" al cerchio il cui diametro è DB; e questo è ciò che volevamo.*

AC- AD- DC = DB

Conclusioni, compiti per casa e ringraziamenti

L'aspetto fondamentale dell'attività svolta che voglio mettere in evidenza è il mio tentativo di costruire la conoscenza matematica e di rafforzarla attraverso la posizione di problemi con un approccio anche ludico. L'uso di GeoGebra è stato fondamentale per creare un ambiente di lavoro accattivante, per manipolare la figura, per recuperare il profondo legame esistente tra l'aspetto algebrico e quello geometrico, per vedere l'area come funzione. Anche la divisione in gruppi e coppie di lavoro ha permesso di integrare e valorizzare alunni con differenti capacità, producendo un loro maggiore impegno, senso di responsabilità e serenità.

La lettura finale ha stimolato in modo naturale l'interesse storico relativo al calcolo delle aree e alla matematica greca.

Numerose le loro ricerche spontanee sul web dove hanno trovato materiali, interessanti per ulteriori approfondimenti, come la catena di Pappo (Figura 18) e la dimostrazione senza parole di Roger B. Nelsen, Math Mag. 75 (2002) della equivalenza tra l'Arbelos e il cerchio**,** la cui dimostrazione formale è stata data come compito per casa! (Figura 19).

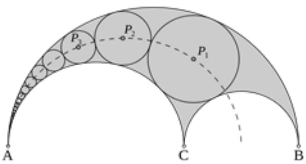


Figura 18

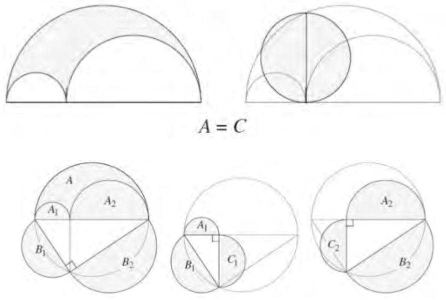


Figura 19

Ringrazio la collega Silvia Agostini (insegnante di Latino e Greco) per l'aiuto nella traduzione dal latino della Proposizione IV del Libro dei Lemmi.

Bibliografia

Boyer, C.B. (1990). *Storia della Matematica*, Oscar Saggi. Milano: Mondadori.

Enriques, F. (2003). *Insegnamento dinamico*, con scritti di F. Ghione e M. Moretti. La Spezia: Agorà.

Geymonat, M. (2008). *Il grande Archimede*. Roma: Sandro Teti Editore.

Heiberg, J. L. (a cura di) (1881). *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii.Volumen II* Lipsiae.

Harold, P. B. (2006). *Reflections on the Arbelos*. American Mathematical Monthly, 113 No. 3, 236-249

Rike, T. (2006). *Archimedes and the Arbelos*. Berkeley Math Circle.

AA.VV. (2004). *Percorsi di geometria dinamica*. Schede di lavoro. Cabri World.

Brigaglia, A. Baldanza, D. Perez, G.E. & Sanfilippo, L. (2001). *Il problem solving e il gioco nell'insegnamento della matematica: le costruzioni geometriche*. Università degli Studi di Palermo S.I.S.S.I.S. Indirizzo 2. fisico-informatico-matematico. http://math.unipa.it/~grim/cdSISSIS/ps%20e%20gioco%20insmat.PDF

Paola, D. (1998). *Mathematical discussion in classroom about students' concepts images*. in P. Abrantes, J. Porfirio, M. Baía (editors),Proceedings of CIEAEM 49(Setubal, Portogallo), 132-139.

Arzarello, F., Olivero, F., Robutti, O. & Paola, D. (1999). *Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.v. 22B, 209-234.

Hohenwarter, J. & Hohenwarter, M. (2012). *Introduzione a GeoGebra*. Versione 4.2. http://www.geogebra.org/cms/it/

TFA, ARMONIA E BELLEZZA

Michela Viale
Università degli Studi di Torino – TFA A059

Premessa

Tra i vari argomenti svolti durante il tirocinio attivo, ho scelto di scrivere la mia relazione finale sulla sezione aurea. Ho affrontato questo approfondimento con gli allievi di seconda (scuola secondaria di primo grado), a conclusione del loro studio sui rapporti e le proporzioni.

La natura multidisciplinare di questo argomento mi ha permesso di coinvolgere attivamente i ragazzi, in modo particolare quelli che "non amano" la matematica. Ho cercato di mostrare loro un modo diverso di vedere questa materia, dando loro la possibilità di concretizzare ciò che studiano in classe. Spesso infatti, in particolare nella fascia d'età preadolescenziale, la matematica viene vista come un qualcosa di astratto che non si può applicare al quotidiano. Spero di aver dimostrato ai miei ragazzi che, al contrario, questa disciplina fa parte della vita di tutti i giorni, in modo più o meno esplicito, e che può essere divertente andare a ricercarla in ciò che ci circonda.

Una buona competenza matematica è ormai fondamentale per molte carriere professionali, infatti una buona educazione matematica permette di acquisire capacità di ragionamento applicabili in molteplici contesti (Eastaway & Askew, 2013). Credo però che questa motivazione non sia sufficiente per appassionare i ragazzi allo studio della disciplina, e che spetti dunque all'insegnante far sì che gli studenti non abbiano un approccio ostile verso questa materia, ma piuttosto che sviluppino curiosità. Se la matematica non viene presentata ai propri allievi come una materia interessante e accattivante, è infatti assai poco probabile che ci si appassionino (Eastaway & Askew, 2013).

Il percorso didattico: la sezione aurea

Ho scelto di affrontare questo percorso didattico poiché, dal momento che il mio tirocinio attivo è iniziato nell'ultima fase dell'anno scolastico, gran parte degli argomenti erano già stati svolti.

La classe 2ª aveva concluso in anticipo il programma di matematica previsto per l'anno scolastico e, dal momento che gli ultimi argomenti affrontati erano stati i rapporti e le proporzioni, ho deciso di proporre un tema collegato a ciò che avevano appena studiato, ma che al tempo stesso stimolasse la loro curiosità. L'argomento relativo alla sezione aurea è un approfondimento di natura multidisciplinare, che ben collega numerose discipline studiate nella scuola secondaria di I grado: arte, musica, scienze, tecnologia … Inoltre, credo che possa essere un ottimo spunto per creare un percorso multidisciplinare da esporre nella prova orale dell'esame finale al termine della classe 3ª.

Ho dedicato cinque lezioni a questo approfondimento, l'ultima ora del lunedì; per via della cadenza settimanale, i primi minuti delle lezioni erano dedicati a un ripasso delle attività svolte negli incontri precedenti.

Uno dei modi migliori per appassionare la classe a questa disciplina spesso poco apprezzata è quello di partire da situazioni reali e concrete; ho pertanto cercato di introdurre l'argomento nella prima lezione con due esperienze pratiche, che i ragazzi hanno svolto in classe, a coppie.

Ho pianificato le mie lezioni in un'ottica di didattica dell'integrazione. Ho cercato quindi di proporre i contenuti scolastici in modo che fossero uno stimolo percepibile e utilizzabile da tutti gli alunni e per questo non ho previsto materiale o attività alternative per gli studenti HC.

Finalità e obiettivi

Le **finalità educative** del mio percorso didattico sono state:

- cambiare l'atteggiamento dei ragazzi nei confronti della matematica,
- coinvolgere maggiormente gli studenti nel processo di insegnamento-apprendimento.

Per quanto riguarda gli **obiettivi di apprendimento**:

- saper descrivere un oggetto attraverso linguaggi disciplinari diversi;
- riconoscere proporzioni geometriche particolari nell'arte e nella natura;
- saper costruire figure rispettando regole assegnate;
- saper rappresentare "regole" presenti in natura o in opere costruite dall'uomo;
- saper usare strumenti (anche multimediali) per rappresentare i risultati di una ricerca.

Gli **obiettivi disciplinari:**

- i numeri irrazionali e le grandezze incommensurabili;
- le proporzioni continue.

Le lezioni in classe

Dopo aver introdotto il concetto di sezione aurea con esperienze pratiche (misura del rapporto delle dimensioni delle carte del supermercato, misura del rapporto tra l'altezza e la distanza dell'ombelico da terra), ho proposto ai ragazzi una presentazione di elementi naturali e antropici dove compare il rapporto aureo (Figura 1). Insieme abbiamo poi visto il cartone animato "Paperino nel mondo della matemagica" (Walt Disney, 1959).

Ho poi proposto ai ragazzi due tecniche per disegnare il segmento e il rettangolo aureo: uno classico, con matita e squadretta, e uno "nuovo", con GeoGebra (Figura 2).

In questa fascia di età i ragazzi sono molto recettivi, per cui ho approfittato della loro curiosità per proporre un modo di utilizzare questo software. Il tema dell'approfondimento esula dai classici programmi scolastici, e proprio per questo ho deciso che potesse essere un modo divertente per avvicinare i ragazzi a GeoGebra.

Figura 1

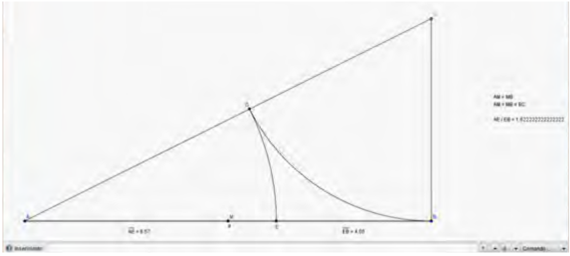


Figura 2

GeoGebra, questo sconosciuto

Ho deciso di “approfittare” del mio ruolo di tirocinante per introdurre nuove metodologie didattiche, ma anche nuovi strumenti, come appunto GeoGebra. Gli studenti hanno avuto modo di imparare a usare il programma in modo naturale, *provando* a usarlo. L’intuitività del software ha motivato la classe, stimolando l’apprendimento non solo dell’uso del software stesso, ma anche di elementi di geometria. Gli allievi si sono sentiti rassicurati dal fatto che ogni errore potesse essere corretto “tornando indietro” e questo ha permesso loro di rendersi conto di quali fossero gli errori che stavano commettendo, in modo tale da andare poi a intervenire correggendosi autonomamente.

L’uso di un nuovo software all’interno della classe presenta comunque delle difficoltà, dal momento che mancano le basi teoriche. Questo inconveniente viene superato dal fatto che i ragazzi possono imparare facendo e, aspetto da non sottovalutare, divertendosi.

Un altro aspetto negativo è il fatto che i tempi vengono dilatati; occorre poi tenere conto delle dinamiche della classe (allievi che si interessano perché incuriositi, altri che approfittano della novità per distrarsi …).

Conclusioni

L’uso di un nuovo strumento didattico quale GeoGebra all’interno di un percorso didattico disciplinare si è rivelato molto interessante. I ragazzi hanno infatti potuto imparare a usare un nuovo software con un approccio pratico e coinvolgente. I ragazzi hanno infatti appreso l’uso del programma in modo costruttivo e divertente, “saltando” l’approccio puramente teorico, che spesso ha come risultato la distrazione del gruppo classe, che è demotivato in quanto non percepisce l’utilità di ciò che sta imparando.

Bibliografia

Eastway, R. & Askew, M. (2013). *Matematica per mamma e papà - Contro lo stress dei compiti a casa.* Milano: TEA Pratica.

Disney, W. (1959). *Donald in Mathmagic Land.*

Viale, M. (2013). *Viaggio nel bello. La sezione aurea: armonia matematica*. Tesi finali, TFA-A059. Torino