ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.63
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-2-135-143

Поступило в редакцию 10.02.2020
Received 10.02.2020

Член-корреспондент П. П. Матус[1,2], С. В. Лемешевский[1]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Католический университет Люблина, Люблин, Польша

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Исследуется коэффициентная устойчивость решения разностной схемы, аппроксимирующей смешанную задачу для одномерного полулинейного гиперболического уравнения. Получены оценки решения дифференциальной и разностной задач. При этом решение может разрушаться за конечное время. Установлена нижняя граница разрушения решения. В области существования решения получены оценки возмущения решения разностной схемы по отношению к возмущению коэффициентов уравнения, согласующиеся с оценками для дифференциальной задачи. Во всех случаях применялись метод энергетических неравенств, неравенство Бихари и его сеточный аналог.

Ключевые слова: полулинейное гиперболическое уравнение, разностная схема, коэффициентная устойчивость, метод энергетических неравенств

Для цитирования: Матус, П. П. Коэффициентная устойчивость решений разностных схем, аппроксимирующих смешанные задачи для полулинейных гиперболических уравнений / П. П. Матус, С. В. Лемешевский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 2. – С. 135–143. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-2-135-143

Corresponding Member Piotr P. Matus[1,2], Sergey V. Lemeshevsky[1]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Poland

STABILITY WITH RESPECT TO COEFFICIENTS OF SOLUTION OF DIFFERENCE SCHEMES APPROXIMATING INITIAL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR SEMI-LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

Abstract. The stability with respect to coefficients of solution of a difference scheme approximating the initial boundary-value problem for the one-dimensional semi-linear hyperbolic equation is studied. The estimates of the solutions of both differential and difference problems are obtained. In the domain of existence of the solution, the estimates for perturbation of the solution of a difference scheme with respect to perturbation of the coefficients of the equation are obtained. These estimates are consistent with the estimates for the differential problem. In all cases, the method of energy inequalities, the Bihari inequality and its mesh analogue are used.

Keywords: semi-linear hyperbolic equation, difference scheme, stability with respect to coefficients, the method of energy inequalities

For citation: Matus P. P., Lemeshevsky S. V. Stability with respect to coefficients of solutions of difference schemes approximating initial boundary-value problems for semi-linear hyperbolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 2, pp. 135–143 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-2-135-143

Введение. Нелинейные волновые процессы описываются уравнениями в частных производных второго порядка. В частности, смешанные задачи для полулинейного волнового уравнения второго порядка, которое относится к классу гиперболических, описывает механику кристаллов. Существование решения нелинейных волновых уравнений исследовалось многими авторами (см., напр., [1] и библиографию в ней). В указанной работе получены условия разрушения решения смешанной задачи за конечный интервал времени. При этом получена верхняя оценка момента разрушения.

При постановке задачи задается не только правая часть, но и оператор $\mathcal{A}$. Если, например, $\mathcal{A}$ – дифференциальный или разностный оператор, то должны быть заданы коэффициенты уравнения. Естественно требовать, чтобы решение задачи непрерывно зависело не только от возмущения правой части, но и от возмущения оператора $\mathcal{A}$ задачи (например, от коэффициентов дифференциального или разностного уравнения), т. е. чтобы выполнялась оценка вида

$$\| \tilde{u} - u \|_{(0)} \leq \rho \| \tilde{A} - A \|_{(2)},$$

где $\tilde{u}$ – решение задачи с возмущенным оператором $\tilde{A}$; $\| \cdot \|_{(2)}$ – некоторая операторная норма. Вопросы коэффициентной устойчивости разностных схем для стационарных уравнений рассмотрены, например, в [2]. Первые результаты по устойчивости конечно-разностных схем, аппроксимирующих задачи для нестационарных уравнений математической физики, получены в [3; 4].

В нашей работе, используя метод энергетических неравенств, получены условия, содержащие только входные данные задачи и гарантирующие существование и ограниченность решения смешанной задачи для полулинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами. Аналогичные результаты получены для разностной схемы, аппроксимирующей смешанную задачу для полулинейного волнового уравнения. Кроме того, будет доказана коэффициентная устойчивость решений дифференциальной и разностной задач. Данный подход ранее применялся авторами при исследовании устойчивости (в том числе и коэффициентной) решений нелинейных параболических уравнений и соответствующих им разностных схем [5; 6].

Коэффициентная устойчивость решения полулинейного гиперболического уравнения. В данном разделе изучается коэффициентная устойчивость решения полулинейного параболического уравнения. Получены оценки возмущения решения в энергетической норме.

Рассмотрим смешанную задачу для одномерного гиперболического уравнения с нелинейным источником:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + cu|u|^{p-1}, \quad x \in \Omega = \{x : 0 < x < l\}, \quad 0 < t \leq T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{3}$$

Здесь

$$c = \text{const} > 0, \quad p = \text{const} > 1,$$

$$k(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad 0 < m_1 \leq k(x) \leq m_2 \quad \text{для всех } x \in \Omega.$$

Определим оператор $\mathcal{A}$ как

$$\mathcal{A}u = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Он отображает множество $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ на $L_2(\Omega)$. Нетрудно показать [6; 7], что для линейного самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ справедливы неравенства

$$(\mathcal{A}u, u)_{L_2(\Omega)} \geq \lambda \| u \|^2_{L_2(\Omega)} \quad \text{для всех } u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \lambda = \frac{m_1 \pi^2}{l^2}, \tag{4}$$

$$\| \mathcal{A}u \|^2_{L_2(\Omega)} \geq \lambda (\mathcal{A}u, u)_{L_2(\Omega)} \quad \text{для всех } u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{5}$$

и

$$\| u \|^2_{C(\Omega)} \leq \gamma^2 (\mathcal{A}u, u)_{L_2(\Omega)}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{m_1}}. \tag{6}$$

Стандартным образом введем скалярное произведение $(v, w)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}v, w)_{L_2(\Omega)}$, тогда соответствующее ему энергетическое пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = H^1(\Omega)$.

Наряду с задачей (1)–(3) будем рассматривать задачу с возмущенным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{k}(x)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right) + c\tilde{u}\left|\tilde{u}\right|^{p-1}, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T, \tag{7}$$

$$\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(l, t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\tilde{u}(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad x \in \Omega. \tag{9}$$

Будем предполагать, что

$$u_0(x) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \tilde{u}_0(x) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \tilde{\mathcal{A}}\tilde{u} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{k}(x)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Априорные оценки решения. Для получения априорных оценок решения уравнения нам понадобится следующая лемма [8]:

Л е м м а 1. *Пусть для неотрицательной функции $v = v(t)$ для всех $t \in [0, T]$ выполнено следующее соотношение:*

$$\frac{dv}{dt} \le av^q, \quad v(0) = v_0,$$

где a – положительная постоянная. Тогда для $t \in [0, T_{\text{cr}})$ выполнено неравенство

$$v(t) \le \frac{v_0}{(1-(q-1)av_0^{q-1}t)^{1/(q-1)}},$$

где

$$T_{\text{cr}} = \frac{1}{(q-1)av_0^{q-1}}.$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Для решений задач (1)–(3) и (7)–(10) при $t \in [0, T_{\text{cr}})$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \| u \|_{(1,t)} &\le M \frac{2^{p-1} m_1^{p/2} \pi \| u \|_{(1,0)}}{2^{p-1} m_1^{p/2} \pi - (p-1) c l^{(p+1)/2} t \| u \|_{1,0}^{p-1}}, \\ \| \tilde{u} \|_{(1,t)} &\le M \frac{2^{p-1} m_1^{p/2} \pi \| u \|_{(1,0)}}{2^{p-1} m_1^{p/2} \pi - (p-1) c l^{(p+1)/2} t \| u \|_{1,0}^{p-1}}, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$T_{\text{cr}} = \frac{2^{p-1} m_1^{p/2} \pi}{(p-1) c l^{(p+1)/2} \| u \|_{(1,0)}^{p-1}} \tag{12}$$

и

$$\| u \|_{(1,t)} = \left(\left\| \frac{\partial u(t)}{\partial t} \right\|^2 + \left\| u(t) \right\|_{\mathcal{A}}^2 \right)^{1/2}. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Получим первую из оценок (11). Для этого умножим уравнение (1) на $2\frac{\partial u}{\partial t}$ и результат проинтегрируем по области Ω. Получим следующее энергетическое тождество:

$$\frac{d}{dt}\left(\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \| u \|_{\mathcal{A}}^2 \right) = 2c\left(u | u |^{p-1}, \frac{\partial u}{\partial t} \right). \tag{14}$$

Для правой части (14), используя неравенства Шварца и Коши и учитывая (4)–(6), получим:

$$2c\left(u\,|\,u\,|^{p-1},\frac{\partial u}{\partial t}\right)\le 2c\,\|\,u\,\|_{C(\Omega)}^{p-1}\|\,u\,\|_{L_2(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\le\frac{2c\gamma^{p-1}}{\lambda^{1/2}}\|\,u\,\|_{\mathcal{A}}^{p}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\le$$

$$\le\frac{2c\gamma^{p-1}}{\lambda^{1/2}}\left(\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\|\,u\,\|_{\mathcal{A}}^2\right)^{1/2}\right)^{p}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\|\,u\,\|_{\mathcal{A}}^2\right)^{1/2}.$$

Подставляя последнюю оценку в (14), с учетом (13) получим

$$2\,\|\,u\,\|_{(1,t)}\frac{d\,\|\,u\,\|_{(1,t)}}{dt}\le\frac{2c\gamma^{p-1}}{\lambda^{1/2}}\|\,u\,\|_{(1,t)}^{p+1}.$$

Положим $v(t)=\|\,u\,\|_{(1,t)}$, $a=c\gamma^{p-1}/\lambda^{1/2}$, $q=p$. Таким образом, используя лемму 1, приходим к утверждению теоремы.

Теорема 1 дает оценки решений смешанных задач (1)–(3) и (7)–(9) на конечном интервале времени до момента T_{cr}, определяемого соотношением (12), в том случае, когда решение может разрушаться, т. е. обращаться в бесконечность.

Коэффициентная устойчивость. Для исследования устойчивости решения задачи (1)–(3), вычтем (1), (2) и (3) из (7), (8) и (9) соответственно. Принимая во внимание формулу конечных приращений Лагранжа [9]

$$\tilde{u}|\tilde{u}|^{p-1}-u|u|^{p-1}=p\left(\int_0^1|u+\theta\overline{u}|^{p-1}\,d\theta\right)\overline{u}=p\mathcal{P}(u,\tilde{u})\overline{u},$$

получим задачу для возмущения $\overline{u}=\tilde{u}-u$:

$$\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial t^2}+\mathcal{A}\overline{u}=pc\mathcal{P}(u,\tilde{u})\overline{u}-(\tilde{\mathcal{A}}-\mathcal{A})\tilde{u},\quad x\in\Omega,\quad 0<t\le T, \tag{15}$$

$$\overline{u}(0,t)=\overline{u}(l,t)=0,\quad 0<t\le T,$$

$$\overline{u}(x,0)=\overline{u}_0(x)=0,\quad\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad x\in\Omega.$$

Очевидно, что для функции $\mathcal{P}(u,\tilde{u})$ имеет место неравенство

$$\left\|\mathcal{P}(u,\tilde{u})\right\|_{C(\Omega)}\le\max\left\{\|\,u\,\|_{C(\Omega)}^{p-1},\|\,\tilde{u}\,\|_{C(\Omega)}^{p-1}\right\}. \tag{16}$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Решение задачи (1)–(3) устойчиво по отношению к возмущению коэффициентов при* $t\in[0,T_{\text{cr}}-\delta]$ $(\delta>0)$ *и для его возмущения справедлива оценка*

$$\left\|\tilde{u}(t)-u(t)\right\|_{(2,t)}\le M_1(e^{\mu t}-1)\left\|\tilde{k}-k\right\|_{C^1[0,l]}, \tag{17}$$

где $\|\,v\,\|_{(2,t)}=\left(\left\|\frac{dv}{dt}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2+\|\,u\,\|^2\right)^{1/2}$ *и* $\mu=2pc\gamma^{p-1}c_1^{p-1}/\sqrt{\lambda}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим уравнение (15) на $2\mathcal{A}^{-1}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial t}$ и результат проинтегрируем по области Ω. Получим следующее энергетическое тождество:

$$\frac{d\,\|\,\overline{u}\,\|_{(2,t)}^2}{dt}=2pc\left(\mathcal{P}(u,\tilde{u})\overline{u},\mathcal{A}^{-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right)-2\left((\tilde{\mathcal{A}}-\mathcal{A})\tilde{u},\mathcal{A}^{-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right). \tag{18}$$

Для первого слагаемого правой части последнего соотношения с учетом (16) имеем

$$2pc\left(\mathcal{P}(u,\tilde{u})\overline{u},\mathcal{A}^{-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right)\le 2pc\left\|\mathcal{P}(u,\tilde{u})\overline{u}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}\left\|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}\le$$

$$\le 2pc\left\|\mathcal{P}(u,\tilde{u})\right\|_{C(\Omega)}\|\overline{u}\|_{\mathcal{A}^{-1}}\left\|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}\le$$

$$\le\frac{2pc}{\lambda^{1/2}}\max\left\{\|u\|_{C(\Omega)}^{p-1},\|\tilde{u}\|_{C(\Omega)}^{p-1}\right\}\|\overline{u}\|\left\|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Отсюда, учитывая (4)–(6), (11) и то, что при $t\in[0,T_{\mathrm{cr}}-\delta]$ (см. теорему 1)

$$\|u\|_{(1,t)}\le c_1,\quad \|\tilde{u}\|_{(1,t)}\le c_1,$$

получим

$$2pc\left(\mathcal{P}(u,\tilde{u})\overline{u},\mathcal{A}^{-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right)\le\frac{2pc}{\lambda^{1/2}}\gamma^{p-1}c_1^{p-1}\|\overline{u}\|\left\|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}\le\frac{4pc\gamma^{p-1}}{\sqrt{\lambda}}c_1^{p-1}\|\overline{u}\|_{(1,t)}^2, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}2\left((\tilde{\mathcal{A}}-\mathcal{A})\tilde{u},\mathcal{A}^{-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right)&\le 2\left\|(\tilde{\mathcal{A}}-\mathcal{A})\tilde{u}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}\left\|\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}\le\\ &\le 2\sqrt{2}\left\|(\tilde{\mathcal{A}}-\mathcal{A})\tilde{u}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}\|\overline{u}\|_{(1,t)}.\end{aligned}\tag{20}$$

Подставляя (19) и (20) в (18), получим

$$\frac{d\|\overline{u}\|_{(2,t)}}{dt}\le\frac{2pc\gamma^{p-1}}{\sqrt{\lambda}}c_1^{p-1}\|\overline{u}\|_{(2,t)}+\sqrt{2}\left\|(\tilde{\mathcal{A}}-\mathcal{A})\tilde{u}\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Отсюда, учитывая лемму Гронуолла и неравенство (см., напр., [10]) $\left\|(\tilde{\mathcal{A}}-\mathcal{A})\tilde{u}(t)\right\|_{\mathcal{A}^{-1}}\le$ $\le M\left\|\tilde{k}-k\right\|_{C[0,l]}\|\tilde{u}\|_{(1,t)}$, получаем оценку (17).

Коэффициентная устойчивость разностной схемы для полулинейного гиперболического уравнения. В данном пункте изучается коэффициентная устойчивость решения линеаризованной разностной схемы, аппроксимирующей задачу (1)–(3). Получены оценки решений исходной и возмущенной разностной задачи и их разности.

В области $\overline{Q}_T=\{(x,t):0\le x\le l,0\le t\le T\}$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$, $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,$ $i=0,\dots,\ N,hN=l\}=\omega_h\cup\{x_0=0,x_N=l\}$, $\overline{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,n=0,\dots,N_0,\tau N_0=T\}=\omega_\tau\cup\{t_{N_0}=T\}$.

На введенной сетке дифференциальную задачу (1)–(3) заменим разностной:

$$y_{\bar{t}t}+A_h\hat{y}=c\breve{y}^{(0,5)}\left|\breve{y}^{(0,5)}\right|^{p-1}, \tag{21}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad \hat{y}_0=0,\quad \hat{y}_N=0, \tag{22}$$

где

$$A_hy=-(ay_{\bar{x}})_x,\quad a=0,5(k_{i-1}+k_i). \tag{23}$$

Здесь и ниже используются стандартные обозначения теории разностных схем [2]:

$$y=y_i^n=y(x_i,t_n);\hat{y}=y^{n+1}=y(x_i,t_{n+1});\breve{y}=y^{n-1}=y(x_i,t_{n-1});y^{(0,5)}=0,5(\hat{y}+y);$$

$$y_t=\frac{\hat{y}-y}{\tau};\quad y_{\bar{t}}=\frac{y-\breve{y}}{\tau};\quad y_{\bar{t}t}=\frac{y_t-y_{\bar{t}}}{\tau};\quad (ay_{\bar{x}})_x=\frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_i}{h}-a_i\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_{i-1}}{h}\right).$$

Для исследования устойчивости возмущенную задачу (7)–(9) аппроксимируем аналогичной разностной схемой

$$\tilde{y}_{\bar{t}t}+\tilde{A}_h\hat{\tilde{y}}=c\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\left|\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\right|^{p-1}, \tag{24}$$

$$\tilde{y}(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad \hat{\tilde{y}}_0=0,\quad \hat{\tilde{y}}_N=0. \tag{25}$$

Вычитая из уравнений (21)–(22) соответственно уравнения (24)–(25) и используя формулу Лагранжа, получим задачу для возмущения $\overline{y} = \tilde{y} - y$

$$\overline{y}_{\overline{t}t} + A_h\hat{\overline{y}} = c\left(\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\left|\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\right|^{p-1} - \breve{y}^{(0,5)}\left|\breve{y}^{(0,5)}\right|^{p-1}\right) - (\tilde{A}_h - A_h)\hat{\tilde{y}}, \tag{26}$$

$$\overline{y}(x,0) = 0,\ x \in \overline{\omega}_h, \quad \hat{\overline{y}}_0 = \hat{\overline{y}}_N = 0.$$

Введем в рассмотрение скалярные произведения и сеточные нормы:

$$\|y\|_C = \max_{1\le i\le N-1}|y_i|; \quad \|y\|_{\overline{C}} = \max_{0\le i\le N}|y_i|; \quad (y,v)_h = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h; \quad \|y\|_h = \sqrt{(y,y)_h};$$

$$\|y\|_{A_h} = \sqrt{(A_h y, y)_h}, \quad \|y_{\overline{x}}]|^2 = \sum_{i=1}^{N} h y^2_{\overline{x},i},$$

где $A_h = A_h^* > 0$ – самосопряженный положительный оператор, определенный соотношением (23).

Имеют место следующие сеточные аналоги теорем вложения [2; 11; 12].

Л е м м а 2. *Для произвольной сеточной функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\overline{\omega}_h$ и равной нулю при $x = 0$, $x = l$, имеют место неравенства*

$$\|y\|_h \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\|y\|_{A_h}, \quad \|y\|_{A_h} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\|A_h y\|, \quad \|y\|_h \le \frac{1}{\lambda_h}\|A_h y\|, \quad \lambda_h = \frac{9m_1}{l^2}, \tag{27}$$

$$\|y\|_C \le \gamma\|y\|_{A_h}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{m_1}}. \tag{28}$$

Оценки решений разностных схем. В дальнейшем нам понадобится сеточный аналог неравенства Бихари [13].

Л е м м а 3. *Пусть $m > 1$ и выполнены неравенства*

$$0 \le v_0 \le c \quad (c > 0), \quad v_n \le c + \sum_{k=0}^{n-1} a_k v_k^m \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где последовательности $v_k \ge 0$, $a_k \ge 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда имеет место неравенство

$$v_n \le \frac{c}{\left(1 - (m-1)c^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)^{\frac{1}{m-1}}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

если только

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k < \frac{1}{(m-1)c^{m-1}}.$$

Прежде чем доказывать устойчивость, необходимо получить априорные оценки для y и $\tilde{y}$. Имеет место следующая

Т е о р е м а 3. *Для решений задач (21)–(22) и (24)–(25) при $t_n \le T_{\text{cr}h}$ справедливы оценки*

$$\|y\|_{(1_h,n+1)} \le \frac{3\cdot 2^p m_1^p \|y\|_{(1_h,0)}}{3\cdot 2^p m_1^p - (p-1)t_n l^{(p+1)/2}\|y\|_{(1_h,0)}}, \tag{29}$$

$$\|\tilde{y}\|_{(1_h,n+1)} \le \frac{3\cdot 2^p m_1^p \|\tilde{y}\|_{(1_h,0)}}{3\cdot 2^p m_1^p - (p-1)t_n l^{(p+1)/2}\|\tilde{y}\|_{(1_h,0)}}, \tag{30}$$

где

$$T_{\text{cr}h} = \frac{3\cdot 2^p m_1^p}{c(p-1)l^{(p+1)/2}\|y\|_{(1_h,0)}},$$

$$\|y\|_{(1_h,n)} = \left(\left\|y_t^n\right\|_h^2 + \left\|0,5(y^{n+1} + y^n)\right\|_{A_h}\right)^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая разностное уравнение (21) скалярно на $2y_t = (y_t + y_{\bar{t}})$, получим энергетическое тождество

$$\left(\left\|y_t\right\|^2 + \left\|y^{(0,5)}\right\|^2_{A_h}\right)_{\bar{t}} + 2\tau\left\|y_t\right\|^2_{A_h} = 2c\left(\breve{y}^{(0,5)}\left|\breve{y}^{(0,5)}\right|^{p-1}, y_t\right)_h. \tag{31}$$

Используя вложения (27), (28) скалярное произведение в правой части (31) оценим следующим образом:

$$2c\left(\breve{y}^{(0,5)}\left|\breve{y}^{(0,5)}\right|^{p-1}, y_t\right)_h \le \frac{2c\gamma^{p-1}}{\lambda_h^{1/2}}\left\|\breve{y}^{(0,5)}\right\|^p_{A_h} \| y \|_{(1h,n)}. \tag{32}$$

Обозначая $\hat{v} = v_{n+1} = \| y \|_{(1_h,n+1)}$, из (31) и (32) получим

$$(v^2)_t \le \frac{2c\gamma^{p-1}}{\lambda_h^{1/2}} v^p(\hat{v} + v).$$

Отсюда, принимая во внимание тождество $\frac{(v^2)}{\hat{v}+v} = \frac{\hat{v}^2 - v^2}{\tau(\hat{v}+v)} = \frac{\hat{v}-v}{\tau} = v_t$, получим неравенство $v_t \le \frac{2c\gamma^{p-1}}{\lambda_h^{1/2}} v^p$. Умножая последнее неравенство на τ и суммируя результат по $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получим $v_{n+1} \le v_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\tau\frac{2c\gamma^{p-1}}{\lambda_h^{1/2}} v_k^p$. Учитывая лемму 3, из последнего неравенства получаем оценку (29), имеющую место при $t_n < T_{\mathrm{cr}h}$. Оценка (30) доказывается аналогично.

Таким образом, мы получили оценки разностных решений, аналогичные оценкам решений дифференциальных задач.

Коэффициентная устойчивость разностного решения. Прежде чем перейти к получению оценок коэффициентной устойчивости решения разностной схемы преобразуем первое слагаемое в правой части (24):

$$\begin{aligned}
&\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\left|\breve{\tilde{y}}\right|^{p-1} - \breve{y}^{(0,5)}\left|\breve{y}^{(0,5)}\right|^{p-1} = \\
&= \breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\left|\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\right|^{p-1} + \breve{y}^{(0,5)}\left(\left|\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\right|^{p-1} - \left|\breve{y}^{(0,5)}\right|^{p-1}\right) = \\
&= \breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\left|\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\right|^{p-1} + \breve{y}^{(0,5)}\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\frac{\left|\breve{\tilde{y}}\right|^{(0,5)} - \left|\breve{y}^{(0,5)}\right|}{\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}}\sum_{k=0}^{p-2}\left|\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\right|^{p-2-k}\left|\breve{y}^{(0,5)}\right|^k = \\
&= \breve{\tilde{y}}^{(0,5)} f_1\left(\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\right) + \breve{\tilde{y}}^{(0,5)} f_2\left(\breve{y}^{(0,5)}, \breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\right).
\end{aligned}$$

Для f_1 и f_2 при $t_n \le T_{\mathrm{cr}h} - \delta$ $(\delta > 0)$ из теоремы 3 имеем

$$\begin{aligned}
f_1(\breve{\tilde{y}}^{(0,5)}) &\le \gamma^{p-1}\| \tilde{y} \|^{p-1}_{(1_h,n)} \le c_{1h}, \\
f_2\left(\breve{y}^{(0,5)}, \breve{\tilde{y}}^{(0,5)}\right) &\le (p-1)\gamma^{p-1}\| y \|^{p-1}_{(1_h,n)} \le (p-1)c_{1h}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Т е о р е м а 4. *Решение разностной схемы (21)–(23) устойчиво по отношению к возмущению коэффициентов при* $t_n \le T_{\mathrm{cr}h} - \delta$ $(\delta > 0)$ *и для его возмущения справедлива оценка*

$$\| \tilde{y}(t) - y(t) \|_{(2h,n)} \le M_{1h}(e^{\mu t} - 1)\| \tilde{a} - a \|_C, \tag{34}$$

где $\| u \|_{(2h,n)} = \left(\| y_t^n \|^2_{A_h^{-1}} + \| 0,5(y^{n+1} + y^n) \|\right)^{1/2}$, $\mu = 2cpc_{1h} / \lambda_h^{1/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим разностное уравнение (26) скалярно на $2A_h^{-1}\overline{y}_t$, получим энергетическое тождество

$$\left(\|\bar{y}\|^2_{(2h,n)}\right)_{\bar{t}} + 2\tau\|\bar{y}_t\|^2 = 2c(\breve{\bar{y}}^{(0,5)} f_1, A_h^{-1}\bar{y}_t) + 2c\left(\breve{\bar{y}}^{(0,5)} f_2, A_h^{-1}\bar{y}_t\right) - \\ -2\left((\tilde{A}_h - A_h)\tilde{y}, A_h^{-1}\bar{y}_t\right). \tag{35}$$

Учитывая оценки (33) и лемму 2, оценим скалярные произведения в правой части (35):

$$2c\left(\breve{\bar{y}}^{(0,5)} f_1, A_h^{-1}\bar{y}_t\right) + 2c\left(\breve{\bar{y}}^{(0,5)} f_2, A_h^{-1}\bar{y}_t\right) \le \frac{2cpc_{1h}}{\lambda_h^{1/2}}\left\|\breve{\bar{y}}^{(0,5)}\right\| \frac{\|\bar{y}\|_{(2h,n)} + \|\bar{y}\|_{(2h,n-1)}}{2} \le$$

$$\le \frac{2cpc_{1h}}{\lambda_h^{1/2}} \|\bar{y}\|_{(2h,n)} \frac{\|\bar{y}\|_{(2h,n)} + \|\bar{y}\|_{(2h,n-1)}}{2},$$

$$2\left((\tilde{A}_h - A_h)\tilde{y}, \bar{y}_t\right) \le 2\left\|(\tilde{A}_h - A_h)\tilde{y}\right\|_{A_h^{-1}} \frac{\|\bar{y}\|_{(2h,n)} + \|\bar{y}\|_{(2h,n-1)}}{2}.$$

Подставляя полученные оценки в (35), получим

$$\left(\|\bar{y}\|_{(2h,n)}\right)_t \le \mu\|\bar{y}\|_{(2h,n)} + \left\|(\tilde{A}_h - A_h)\tilde{y}\right\|_{A_h^{-1}}. \tag{36}$$

Оценка второго слагаемого правой части неравенства (36) дает (см., напр., [10])

$$\left\|(\tilde{A}_h - A_h)\tilde{y}\right\|^2_{A_h^{-1}} \le M_h \left\|\tilde{a} - a\right\|^2_C \|\tilde{y}\|_{(1h,n)}.$$

Учитывая последнее неравенство, разностный аналог леммы Гроноулла и теорему 3, приходим к требуемой оценке устойчивости (34) при $t_n \le T_{crh} - \delta$.

Таким образом мы получили оценку коэффициентной устойчивости разностной схемы, аналогичную оценке решения дифференциальной задачи.

Список использованных источников

1. Levine, H. A. Instability and Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations of the Form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$ / H. A. Levine // Transactions of the American Mathematical Society. – 1974. – Vol. 192. – P. 1–21. https://doi.org/10.2307/1996814

2. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Москва, 1977. – 657 с.

3. Самарский, А. А. Сильная устойчивость дифференциально-операторных и операторно-разностных схем / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус // Докл. РАН. – 1997. – Т. 356, № 4. – С. 455–457.

4. Самарский, А. А. Коэффициентная устойчивость дифференциально-операторных и операторно-разностных схем / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус // Матем. моделирование. – 1998. – Т. 10, № 8. – С. 103–113.

5. Matus, P. P. Well-posedness and blow up for IBVP for semilinear parabolic equations and numerical methods / P. P. Matus, S. V. Lemeshevsky, A. N. Kandratsiuk // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2010. – Vol. 10, N 4. – P. 395–421. https://doi.org/10.2478/cmam-2010-0024

6. Матус, П. П. Коэффициентная устойчивость решения разностной схемы, аппроксимирующей смешанную задачу для полулинейного параболического уравнения / П. П. Матус, С. В. Лемешевский // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 7. – С. 947–955.

7. Samarskii, A. Computational Heat Transfer / A. Samarskii, P. Vabishchevich. – Chichester, 1995. – Vol. 1: Mathematical Modelling. – 406 p.

8. Bihari, I. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations / I. Bihari // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1956. – Vol. 7, N 1. – P. 81–94. https://doi.org/10.1007/bf02022967

9. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – Москва, 1980. – 496 с.

10. Stability of solutions of differential-operator and operator-difference equations in the sense of perturbation of operators / B. S. Jovanovich [et al.] // Comp. Meth. Appl. Math. – 2006. – Vol. 6, N 3. – P. 269–290. https://doi.org/10.2478/cmam-2006-0015

11. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва, 1989. – 432 с.

12. Samarskii, A. Difference Schemes with Operator Factors / A. Samarskii, P. Matus, P. Vabishchevich. – London, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

13. Демидович, В. Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений / В. Б. Демидович // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 7. – С. 1247–1255.

References

1. Levine H. A. Instability and Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations of the Form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1974, vol. 192, pp. 1–21. https://doi.org/10.2307/1996814

2. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes*. Moscow, 1977. 467 p. (in Russian).

3. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N., Matus P. P. The strong stability of differential-operator and operator-difference schemes. *Doklady Mathematics*, 1997, vol. 56, no. 2, pp. 726–728.

4. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N., Matus P. P. Coefficient stability of differential-operator equations and operator-difference schemes. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 1998, vol. 10, no. 8, pp. 103–113 (in Russian).

5. Matus P. P., Lemeshevsky S. V., Kandratsiuk A. N. Well-posedness and blow up for IBVP for semilinear parabolic equations and numerical methods. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 395–421. https://doi.org/10.2478/cmam-2010-0024

6. Matus P. P., Lemeshevsky S. V. Coefficient Stability of the Solution of a Difference Scheme Approximating a Mixed Problem for a Semilinear Parabolic Equation. *Differential equations*, 2018, vol. 54, pp. 929–937. https://doi.org/10.1134/s0012266118070108

7. Samarskii A., Vabishchevich P. *Computational Heat Transfer, Volume 1, Mathematical Modelling*. Chichester, 1995. 406 p.

8. Bihari I. A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1956, vol. 7, no. 1, pp. 81–94. https://doi.org/10.1007/bf02022967

9. Trenogin V. A. *Functional analysis*. Moscow, 1980. 496 p. (in Russian).

10. Jovanovich B. S., Lemeshevsky S. V., Matus P. P., Vabishchevich P. N. Stability of solutions of differential-operator and operator-difference equations in the sense of perturbation of operators. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2006, vol. 6, no. 3, pp. 269–290. https://doi.org/10.2478/cmam-2006-0015

11. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Numerical methods*. Moscow, 1989. 432 p. (in Russian).

12. Samarskii A., Matus P., Vabishchevich P. *Difference Schemes with Operator Factors*. London, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

13. Demidovich V. B. On one sign of the stability of difference equations. *Differential equations*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian).

Информация об авторах

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: matus@im.bas-net.by.

Лемешевский Сергей Владимирович – канд. физ.-мат. наук, директор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: svl@im.bas-net.by.

Information about the authors

Matus Piotr P. – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: matus@im.bas-net.by.

Lemeshevsky Sergey V. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Director. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: svl@im.bas-net.by.