



ANÁLISIS DE LOS EXPONENTES DE LYAPUNOV ASOCIADOS AL FUNCIONAMIENTO DE UN DESTILADOR

I. De Paul, I. Ramos, G. Araoz Espoz, C. González, G. Aguirre
CIUNSA – Universidad Nacional de Salta – Av. Bolivia 5150 C.P. 4400 Salta
Tel. 0387-4255389 – Fax 0387-4255449 e-mail: depaul@unsa.edu.ar

RESUMEN. El carácter caótico de la intensificación de la transferencia térmica convectiva en el interior de un destilador no puede determinarse a partir de un único indicador. En trabajos previos se analizaron las series temporales de h , el espectro de Fourier y su tasa de crecimiento. En el presente trabajo se analizan los exponentes de Lyapunov de h así como los de las series temporales medidas de temperaturas involucradas en su cálculo. Los resultados muestran que algunas series de medidas de h presentan caos y otras no, mientras que las medidas de temperatura muestran comportamiento caótico en todas las series de medida.

Palabras clave: Destilación, coeficiente h , caos, exponentes de Lyapunov.

INTRODUCCION

En trabajos previos se planteó la importancia de optimizar desde el punto de vista energético el uso de los dispositivos que se emplean normalmente, lo que requiere el conocimiento profundo de las características de los coeficientes de transferencia térmica convectiva de dichos dispositivos (Baker, y Gollub 1990; Boccaletti, y otros 2004; Brittingham, y otros 1995; Mladin y Zumbrunnen 1994; Vasseur y otros 1987; Zumbrunnen y Aziz 1993). En experiencias previas (De Paul 2000, De Paul 2002, De Paul y Quintana 2002, De Paul y Quintana 2004, De Paul y otros 2006, De Paul 2007, De Paul y otros 2007) se mostró que ante determinadas condiciones de funcionamiento el coeficiente de transferencia térmica convectivo h en el interior de un destilador alcanzaba valores excepcionalmente altos, proponiéndose que el origen de esos valores era un comportamiento caótico del destilador y que esta característica podría aplicarse a otros dispositivos solares, permitiendo aumentar significativamente la transferencia térmica. El análisis de los datos obtenidos en las medidas realizadas en el destilador puede brindar una información muy rica acerca de las características de la transferencia térmica en el mismo y proponer eventualmente criterios de diseño que optimicen la transferencia térmica.

El funcionamiento de un destilador solar se basa en tres etapas principales: la evaporación desde la superficie del agua salada a temperatura Tagua, la transferencia convectiva de calor y masa desde la superficie del agua hasta la cubierta de vidrio y la condensación sobre el mismo (De Paul 2002). La convección natural es un fenómeno no lineal, tridimensional por lo que es de esperar que presente un comportamiento caótico cuyas características es necesario identificar (Burmeister 1983, Manneville 2004, Takens 1981, De Paul 2000). El análisis de las medidas realizadas sobre un destilador en laboratorio con alta frecuencia de muestreo permitió identificar frecuencias características en el espectro de Fourier de h y del destilado, analizar la tasa de crecimiento e identificar el atractor caótico correspondiente en el espacio de representación.

Con el mismo objetivo se continuaron los estudios orientados a la determinación de los coeficientes de Lyapunov asociados a la transferencia térmica convectiva así como los asociados a la transferencia conductiva a través del vidrio de las cubiertas. También se analizó desde este punto de vista el comportamiento de la temperatura del agua que es la que determina la producción del destilador y la influencia de la geometría del sistema, comparando los resultados obtenidos con distinta pendiente en las cubiertas

DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

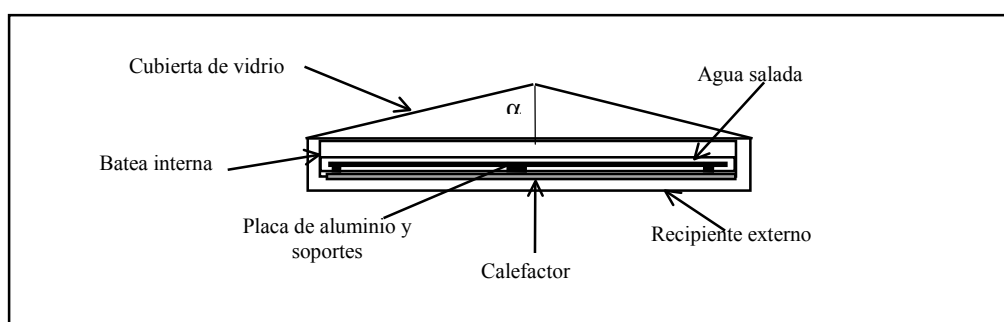


Figura 1. Esquema del destilador empleado en laboratorio

El dispositivo experimental empleado se muestra en la figura 1, y consiste en un módulo de destilador, en latón de 1.36 m de largo, 1.16 m de ancho, con cubierta de vidrio flotado a dos aguas cuya pendiente se puede variar entre 20° y 45°. Las paredes están aisladas con poliestireno expandido de 0.03 m de espesor. La base del destilador es un recipiente doble: la batea que contiene el agua para destilar, encerrada en un recipiente que contiene un conjunto de resistencias eléctricas que permiten calentar el agua simulando el calentamiento solar. Se midió la temperatura del agua, del ambiente y de las caras interna y externa de la cubierta de vidrio con termocuplas y un sistema de adquisición de datos Omega. El calentamiento se realizó manualmente empleando un autotransformador con el que se suministró corriente variable a las resistencias del calefactor, que permitió reproducir las características generales del calentamiento en un destilador colocado a la intemperie, en condiciones de radiación de cielo claro, en invierno, en Salta (Esteban y otros, 2001). El periodo de muestreo de las temperaturas fue de cinco minutos. Se realizaron seis series de medidas con pendiente de 45° y nueve series con pendiente de 20°, cada serie consta de 4 a 5 días consecutivos de medidas.

IDENTIFICACIÓN EMPÍRICA DEL CAOS

En un trabajo anterior (De Paul y otros 2006) se plantearon las dificultades que presenta el análisis de la información tendiente a identificar experimentalmente los fenómenos caóticos y cuáles son los parámetros que determinan tal comportamiento con el fin de ejercer control sobre el mismo. No hay un indicador único que permita definir a un sistema como caótico y determinar sus características, sino que esto surge del análisis global de diferentes indicadores tales como el análisis de Fourier, la tasa de crecimiento, la representación en el espacio de reconstrucción, los coeficientes de Lyapunov, etc (Manneville 2004, Baker y Gollub 1990, Takens 1981).

En el caso de la convección, tal comportamiento depende de la naturaleza del fluido, de la configuración experimental y de la historia misma de la experiencia (Manneville, 2004; Boccaletti, y otros, 2004). Los datos medidos se representan bajo la forma de series temporales de un observable, muestreadas en tiempos discretos $W_k = W(t_k)$, donde $t_k = k\tau$ siendo $1/\tau$ la frecuencia de muestreo. El método de análisis empleado generalmente para conocer la dinámica del sistema se basa en el "método del retardo" propuesto por Ruelle y Takens (Takens 1981) que consiste en analizar la evolución del sistema a partir solamente de la representación de los valores medidos $W_{k+\kappa}$ en función de W_k , siendo κ el retardo en el observable W (espacio de reconstrucción).

Una de las características de los sistemas caóticos es su fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto significa que la evolución producida en cada paso de tiempo modifica las condiciones iniciales para el paso siguiente, por lo que al cabo de pocos pasos de tiempo la dinámica del sistema no tiene memoria del estado dinámico desde el cual el sistema partió inicialmente.

En trabajos previos (De Paul y otros 2006, De Paul 2007, De Paul y otros 2007) se estudió este aspecto a partir del análisis de la tasa de crecimiento Σ de un observable W en función del parámetro de control r definidos por

$$\frac{dW}{dt} = \Sigma W \quad \text{y} \quad r = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \quad (2)$$

siendo Ra del número de Rayleigh y Ra_c el valor crítico correspondiente. Los resultados obtenidos del análisis del coeficiente convectivo h en el interior de las cubiertas mostró intervalos en los que Σ es positiva lo que significa que se establecen modos inestables que amplifican las perturbaciones aleatorias y conducen al establecimiento de un régimen caótico.

En el presente trabajo se enfoca el estudio a partir del análisis de los exponentes de Lyapunov, que son una medida de la tasa de divergencia de las trayectorias del sistema en el espacio de representación, a partir de condiciones iniciales ligeramente diferentes. La evolución temporal del observable W puede representarse de la siguiente forma

$$W = W_0 e^{\lambda t}$$

Si el sistema dinámico es caótico, al menos uno de los exponentes λ en la serie temporal es positivo, produciendo una divergencia exponencial del sistema a partir del estado inicial W_0 .

Se analizaron sistemáticamente todas las series de medidas realizadas para comparar las condiciones en que se realizaron las experiencias. De Paul y Quintana (2002) y De Paul y Quintana (2004) mostraron que en el caso de un calentamiento no estacionario como el que produce el sol, el parámetro más significativo que determina la producción es la temperatura máxima alcanzada por el agua, por lo que se decidió caracterizar cada serie por los valores máximos alcanzados tanto en Tagua como en los valores del Ra y el Nu , así como el rango de valores máximos y mínimos del parámetro de control r . Los resultados se muestran en la Tabla I.

A los efectos de ilustrar los resultados obtenidos del análisis y la influencia de la pendiente del destilador en los mismos, se presentan los gráficos correspondientes a dos series temporales particulares, una correspondiente a la serie 17/04/06, con pendiente a 45° y otra correspondiente a la serie 13/11/06, con pendiente a 20°.

Pendiente	Fecha	Tagua max	Ra max	Nu max	r min	r max
45°	29/11/2005	69,0	7,863E+06	214,1	-309,2	4602,5
	05/12/2005	65,7	7,386E+06	214,1	-165,1	4323,1
	17/04/2006	62,2	7,421E+06	102,1	82,5	4344,0
	24/04/2006	64,3	7,936E+06	1113,7	-59,8	4645,6
	08/05/2006	60,1	7,710E+06	4380,6	-27,5	4513,4
	15/05/2006	60,3	8,075E+06	10203,9	-684,0	4726,6
20°	26/09/2006	63,8	1,371E+06	1217,6	32,0	801,8
	02/10/2006	63,7	1,367E+06	1514,2	1,7	799,1
	09/10/2006	65,0	1,305E+06	1500,0	-30,1	762,9
	13/11/2006	66,5	1,330E+06	1208,6	15,1	777,9
	14/05/2007	61,3	1,702E+06	1759,0	13,8	995,4
	21/05/2007	62,9	1,965E+06	1430,1	10,6	1149,4
	28/05/2007	61,7	1,976E+06	1793,4	-62,9	1156,2
	18/06/2007	61,7	1,758E+06	1536,1	-154,2	1028,1
	25/06/2007	59,2	1,574E+06	1535,3	-24,5	920,5
	promedios 45°		63,6	7,732E+06	2704,8	-193,8
promedios 20°		62,9	1,594E+06	1499,4	-22,1	932,4
cociente		1,0	4,8	1,8	8,8	4,9

Tabla I. Valores de los parámetros que caracterizan las series medidas.

TRANSFERENCIA TÉRMICA CONVECTIVA

El coeficiente de transferencia térmica convectiva h en el interior del destilador se calculó usando la expresión (3), a partir de la medida de la temperatura en las caras interna y externa del vidrio de la cubierta, y la del agua que permite calcular con buena precisión la temperatura del vapor como promedio entre Tagua y Tinterna (De Paul 2000).

$$h = \left(\frac{k}{e} \right) \frac{(T_{\text{interna}} - T_{\text{externa}})}{(T_{\text{vapor}} - T_{\text{interna}})} \quad (3)$$

A los efectos de que los resultados sean más fácilmente comparables se adimensionalizaron los observables de la siguiente manera, indicándose los valores adimensionalizados con una tilde.

$$W^* = (W - \text{promedio}(W)) / \text{desviación standard}$$

En la figura 2 se muestran los gráficos del espacio de representación de h' correspondientes a las dos pendientes ensayadas. En ambas se observa la presencia de un atractor que limita los valores de h' accesibles al sistema a ciclos casi cerrados.

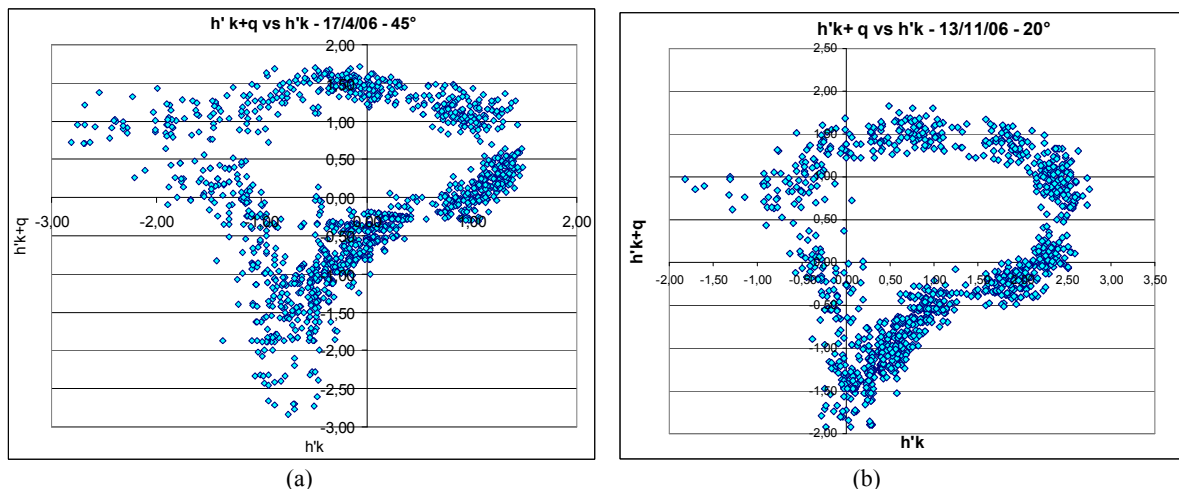


Figura 2. Espacio de representación correspondiente a h , a) pendiente de 45° y b) pendiente de 20°.

La representación de h' en función del parámetro de control r muestra en ambos casos una estructura singular, indicando la presencia de bifurcaciones, así como rangos de acumulación y de carencia de valores de h' (figura 3).

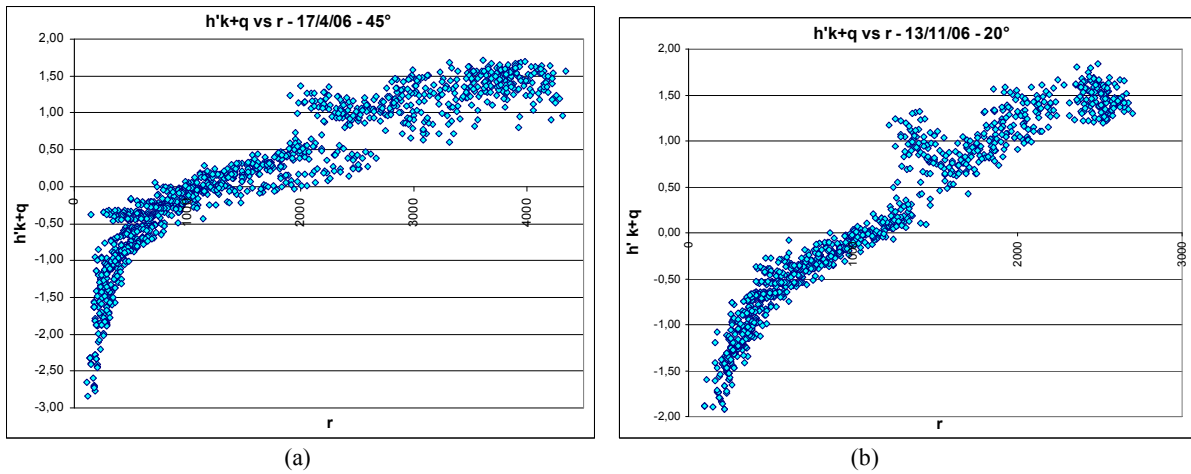


Figura 3. Representación de h' en función del parámetro de control r , a) pendiente de 45° y b) pendiente de 20° .

Los exponentes de Lyapunov muestran un comportamiento disímil, tomando en el caso de pendiente de 45° siempre valores negativos, salvo los valores iniciales asociados a un transitorio, mientras que para 20° los λ toman valores positivos y negativos. En ambos casos se observan intervalos de oscilaciones intensas (figura 4). No es evidente en el primer caso el comportamiento caótico.

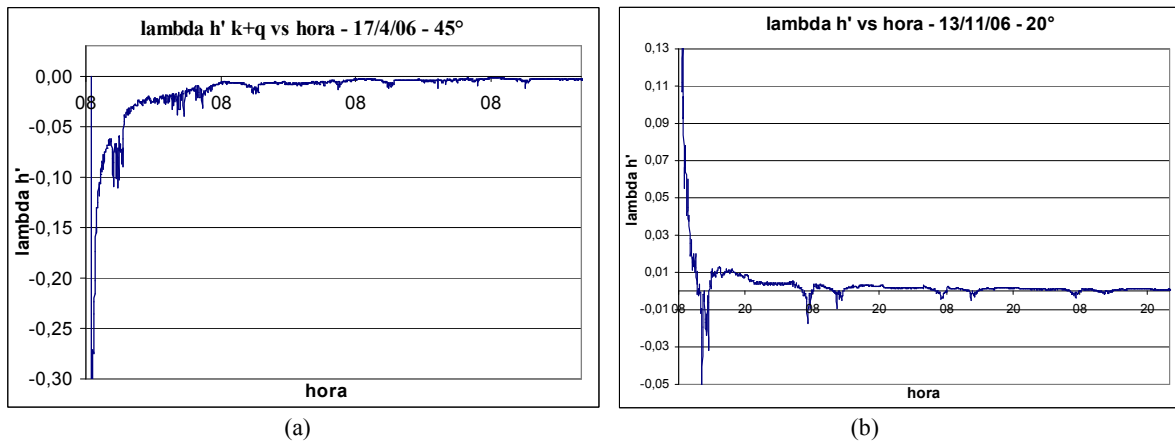


Figura 4. Representación de λ de h' en función de la hora, a) pendiente de 45° y b) pendiente de 20° .

TEMPERATURAS

Dado que el valor de h no resulta de la medida directa de una variable sino del cálculo resultante de diferencias de temperaturas medidas, lo que puede presentar algunas dificultades a la hora de realizar su análisis (De Paul 1999), se calcularon los coeficientes de Lyapunov de todas las variables involucradas: h , T_{agua} , que determina la temperatura de vapor y la producción del destilador, ($T_{\text{interna}} - T_{\text{externa}}$) que determina el calor que pasa por conducción a través del vidrio y ($T_{\text{vapor}} - T_{\text{interna}}$) que es la que determina la energía térmica convectiva que llega desde el interior del destilador a la cubierta.

Temperatura del agua

El espacio de representación de T_{agua} muestra la presencia de un atractor muy definido y la evolución del sistema en ciclos límites con una estructura peculiar (figura 5).

Los coeficientes de Lyapunov en ambos casos toman valores positivos y negativos, poniendo en evidencia un comportamiento caótico, que es de esperar toda vez que en el agua salada de la batea se desarrolla un proceso convectivo del tipo de Bénard (figura 6).

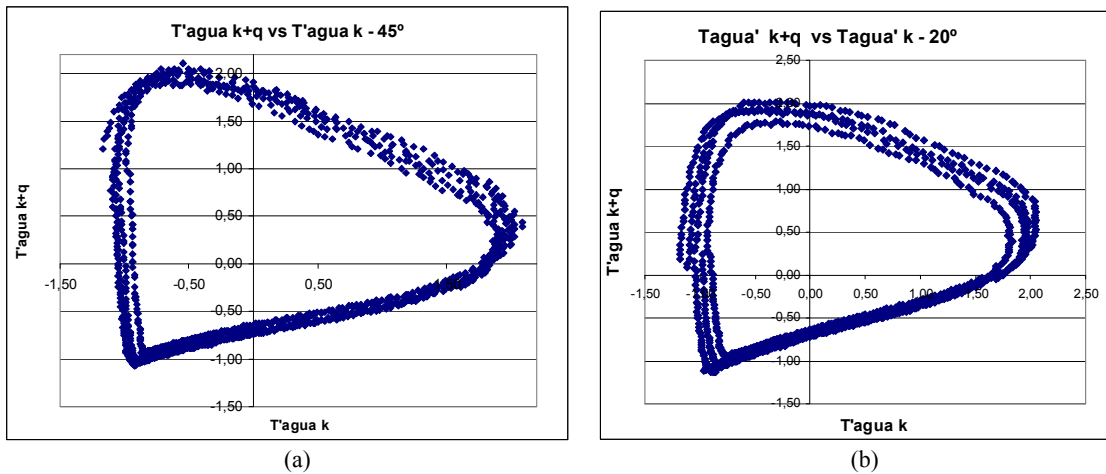


Figura 5. Espacio de representación correspondiente a T'_{agua} , a) pendiente de 45° y b) pendiente de 20° .

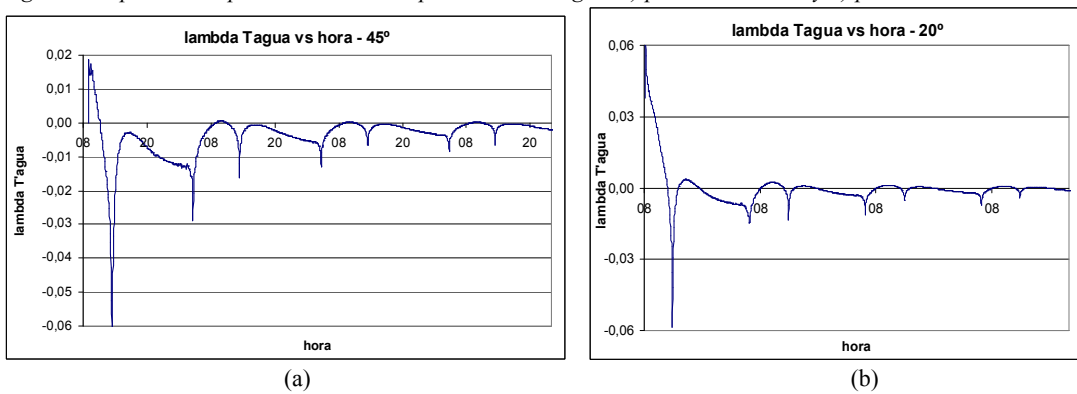


Figura 6. Representación de λ de T'_{agua} en función de la hora, a) pendiente de 45° y b) pendiente de 20° .

Transferencia conductiva en el vidrio

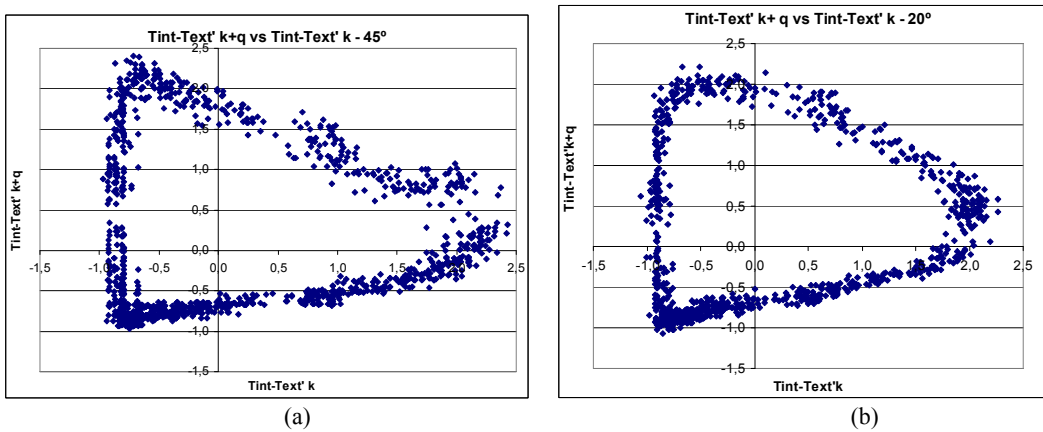


Figura 7. Espacio de representación correspondiente a $(Tint-Text)'$, a) pendiente de 45° y b) pendiente de 20° .

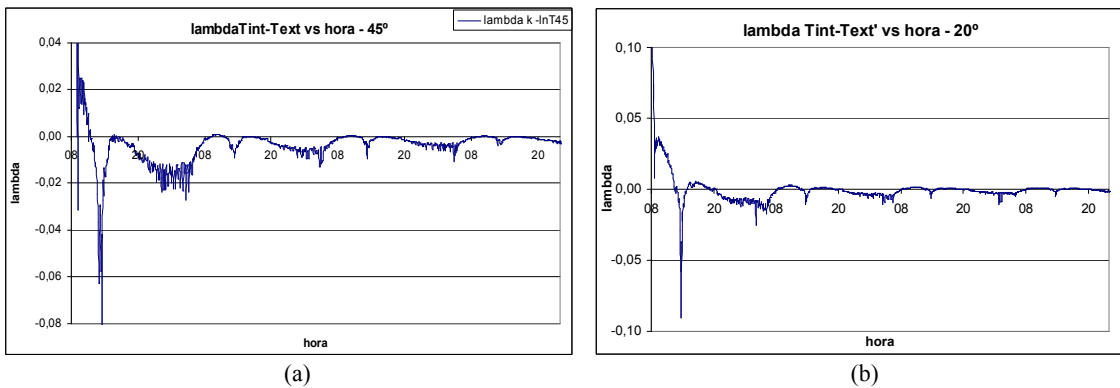


Figura 8. Representación de λ de $(Tint-Text)'$, en función de la hora, a) pendiente de 45° y b) pendiente de 20° .

La transferencia térmica conductiva a través del vidrio presenta un atractor de estructura similar a la observada en el caso del agua, pero más compleja en el sentido que presenta zonas de acumulación y carencia, especialmente notables en la figura 7 a) correspondiente a la pendiente de 45°. Los coeficientes λ toman en ambos casos valores positivos y negativos con intervalos de fuertes oscilaciones, sugiriendo una transferencia de tipo caótica (figura 8).

Transferencia convectiva sobre el vidrio

El análisis de la transferencia convectiva desde el vapor encerrado en el destilador hacia la cubierta de vidrio se muestra en las figuras 9 y 10. También en este caso evidencia un atractor definido y coeficientes de Lyapunov positivos y negativos mostrando un comportamiento caótico, esperable en un proceso de convección natural.

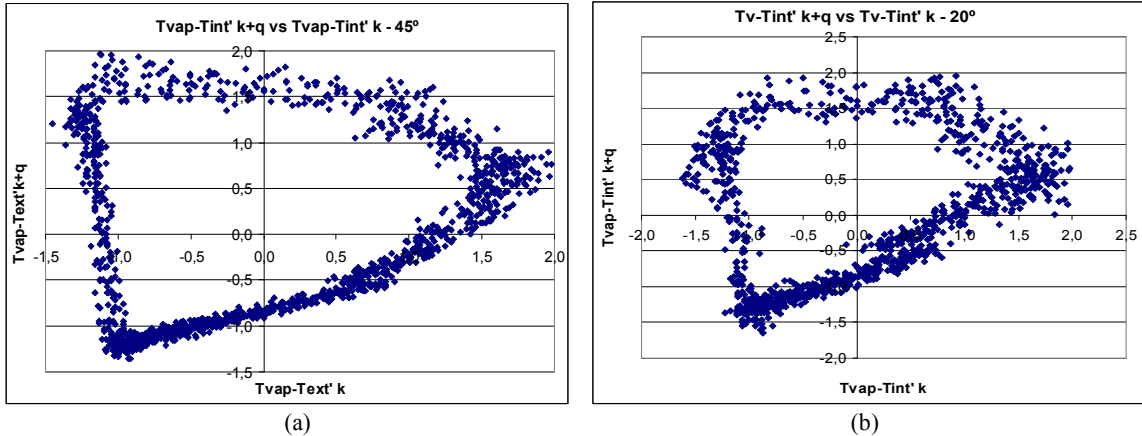


Figura 9. Espacio de representación correspondiente a $(T_{vap}-T_{int})'$, a) pendiente de 45° y b) pendiente de 20°.

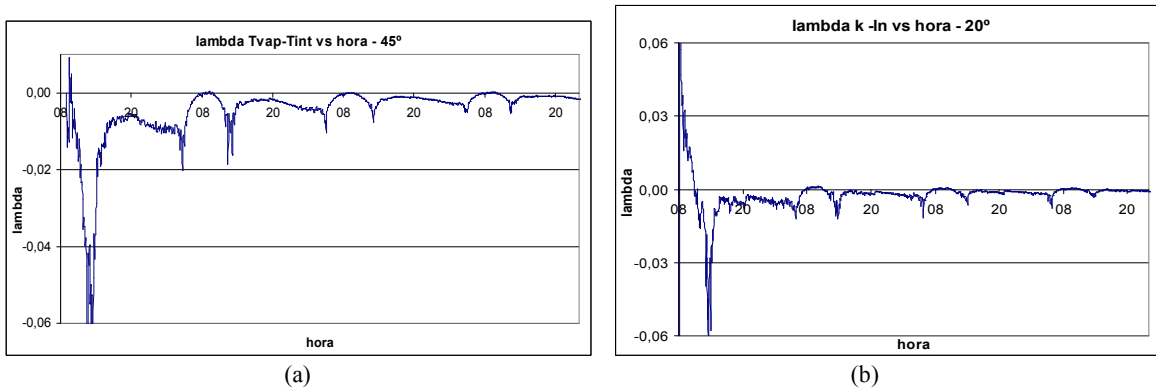


Figura 10. Representación de λ de $(T_{vap}-T_{int})'$, en función de la hora, a) pendiente de 45° y b) pendiente de 20°.

ANÁLISIS GENERAL DE RESULTADOS

Los exponentes de Lyapunov de todas las series de medidas, de todas las variables analizadas, se muestran en la Tabla II, indicando en cada caso si se obtuvieron valores positivos o negativos.

Pendiente	Fecha	λh	λh_{k+q}	λT_{agua}	$\lambda T_{int}-T_{ext}$	$\lambda T_{vap}-T_{int}$
45°	29/11/2005	+	+	+	+	+
	05/12/2005	+	+	+	+	+
	17/04/2006	-	-	+	+	+
	24/04/2006	+	+	+	+	+
	08/05/2006	+	+	+	+	+
	15/05/2006	+	+	+	+	+
20°	26/09/2006	+	+	+	+	+
	02/10/2006	+	+	+	+	+
	09/10/2006	-	-	+	+	+
	13/11/2006	+	+	+	+	+
	14/05/2007	-	-	+	+	+
	21/05/2007	+	+	+	+	+
	28/05/2007	+	+	+	+	+
	18/06/2007	+	+	+	+	+
	25/06/2007	-	-	+	+	+

Tabla II. Exponentes de Lyapunov de las series temporales analizadas.

Los estudios previos realizados por medio del análisis de las series temporales $h(t)$, del espectro de Fourier y la tasa de crecimiento de h sugerían un comportamiento de tipo caótico como se propuso oportunamente. Es curioso encontrar que los coeficientes de Lyapunov obtenidos son en algunas series positivos y en otros negativos, indicando en este último caso la ausencia de caos. Sin embargo, los fenómenos de gran intensificación del coeficiente convectivo h se observaron en todas las series de medida realizadas. Este resultado contradictorio podría entenderse teniendo en cuenta que h es el resultado de un cálculo, mientras que los valores medidos que realmente determinan la transferencia son los valores de $(T_{int}-T_{ext})$ y $(T_{vap}-T_{int})$, que tienen asociados coeficientes positivos en todas las medidas realizadas.

El análisis de la Tabla I muestra la influencia de la pendiente de las cubiertas del destilador en la dinámica del sistema, a partir de valores promedio correspondientes a ambas pendientes. Para un rango similar de temperaturas máximas alcanzadas, los valores de Ra máximos alcanzados son 4,8 veces mayores para una pendiente de 45° respecto de los correspondientes a 20° , mientras que la transferencia térmica sobre las cubiertas dada por el número de Nusselt es 1,8 veces mayor en la misma relación. Esto determina que el rango de valores que puede alcanzar el parámetro de control r sea apreciablemente mayor en el caso de la pendiente de 45° . Se requiere un análisis más detallado de los rangos de r en los que se observa intensificación de h , en ambas configuraciones, para precisar la influencia de la geometría en la transferencia térmica caótica.

CONCLUSIONES

Los espacios de representación de todas las variables analizadas, h , T_{agua} , $(T_{int}-T_{ext})$ y $(T_{vap}-T_{int})$ muestran la presencia de un atractor, de características definidas y cerradas como un ciclo límite en las temperaturas, y con una estructura más abierta y compleja para h .

Los coeficientes de Lyapunov de h' toman valores positivos y negativos, observándose en ambas geometrías intervalos de oscilaciones intensas. No se puede concluir que siempre haya comportamiento caótico.

Los coeficientes de Lyapunov de las temperaturas medidas toman valores positivos en todas las series de medida realizadas, poniendo en evidencia un comportamiento caótico tanto en la temperatura del agua como en la transferencia térmica conductiva a través del vidrio como en la convectiva desde el vapor hacia las cubiertas.

Los resultados aparentemente contradictorios obtenidos para h pueden ser una consecuencia del hecho que h se determina a partir de un cociente entre dos series temporales de medidas de temperatura, cada una de las cuáles presenta en sí misma comportamiento caótico.

Estos análisis confirman el comportamiento caótico en el funcionamiento del destilador pero todavía son insuficientes para establecer criterios de control que permitan optimizar su funcionamiento haciendo uso de las características caóticas.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- Baker, G. L., Gollub, J. P. (1990). Chaotic dynamics, an introduction. Cambridge University Press.
- Boccaletti, S., Gluckman, B. J., Kurths, J., Pecora, L. M., Meucci, R., Yordanov, O. Ed. (2004). Experimental Chaos. 8th. Experimental Chaos Conference - Italy, 2004. American Institute of Physics Conference Proceedings Vol 742. Melville, New York.
- Brittingham, R.A., Mladin, E.C., Zumbrunnen, D.A. (1995). Heat transfer transients in stagnation flows due to changes in flow velocity. *Journal of Thermophysics and heat transfer*, **10**, 1, 186-189,
- Burmeister, L. C. (1983). Convective heat transfer. J. Wiley & Sons. Kansas. EE. UU.
- Chikhaoui, A. Marcillat, J. F. y Sani, R. L., (1988). Successive transitions in thermal convection within a vertical enclosure. *Natural Convection in Enclosures*, ASME, HTD – **Vol 99**, 29.
- Close, D. J. Peck, M. K., White, R. F. y Wong, P. H., (1988). Natural convection heat transfer rates and flow patterns in a cavity filled with a gas vapour mixture. *Natural Convection in Enclosures*, ASME, HTD – **Vol 99**, 23.
- De Paul, I. (2000). Estudio experimental de la transferencia de energía por convección natural en recintos cerrados empleando modelos a varias escalas. Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias Exactas, UNSa.
- De Paul. (2002). A new model of a basin-type solar still. *Journal of Solar Energy Engineering*. **Vol. 124**, 3, pp: 311-314. ISSN 0199-6231
- De Paul, J. M. Quintana. (2002). Características del funcionamiento no estacionario de un destilador solar. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*. **Vol. 6**, versión CD, pp.02.07-02.12. ISSN. 0329-5184.
- De Paul, J. M. Quintana. (2004). Peculiaridades del funcionamiento no estacionario de un destilador solar. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*. **Vol. 8**, versión CD, pp.03.01-03.06. ISSN. 0329-5184.
- De Paul, I., Perales, M. A., Ramos, I., Quintana, J., González C., Gündel, S., Ramos, B. “Características caóticas del funcionamiento de un destilador” *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*. **Vol. 10**, versión CD, pp.03.07-03.13. (2006). ISSN. 0329-5184
- De Paul, I. “Análisis de la intensificación caótica de la transferencia térmica convectiva en un destilador” *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*. **Vol. 11**, versión CD, pp.03.09-03.15. (2007). ISSN. 0329-5184.
- De Paul, I., Perales, M. A., González C., Quintana, J., Gündel, S., Ramos, B Ramos, I., Aguirre, G. “Efectos de histéresis en la producción de un destilador” *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*. **Vol. 11**, versión CD, pp.03.17-03.23. (2007). ISSN. 0329-5184.
- De Paul. “Algunas dificultades en el cálculo de coeficientes de transferencia térmica en el interior de una cavidad cerrada”. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*. **Vol. 3**, Tomo 1, pp.08.1-08.4. (1999). ISSN. 0329-5184.

- Del Campo, E. M., Sen, M., Ramos, E. (1988). Analysis of laminar natural convection in a triangle enclosure. *Numerical Heat Transfer*, **13**, pp: 353-372.
- Dunkle, R. V., Solar Water Distillation: the roof type Still and a Multiple Effect Still, *Int. Development in Heat transfer, Conference at Denver*, **Part 5**, 895, (1961).
- Esteban, S., Vilte, M., De Paul, I., Hoyos, E. (2001). Comparación de resultados en destiladores con distintas pendientes: medidas de campo. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*. **Vol. 5**, versión CD, pp.02.37-02.41.
- Manneville, P. (2004). *Instabilités, chaos et turbulence*. Editions de l'École Polytechnique. Francia.
- Mladin, E.C., Zumbrennen, D.A. (1994). Dependence of heat transfer to pulsating stagnation flow on pulse characteristics. *Journal of Thermophysics and heat transfer*, **9**, 1, 181-192.
- Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. *Lect. Notes Math.* **898**, p: 366.
- Sayigh, A. A. M. (1977). *Solar Energy Engineering*, Academic Press.
- Vasseur, P., Robillard, L, Sen, M. (1987). Unicellular convective motion in an inclined fluid layer with uniform heat flux. *Bifurcation Phenomena in Thermal Processes and Convection*. *HTD-Vol. 94, AMD-Vol. 89*, pp: 23-29. ASME.
- Zumbrennen, D.A., Aziz, M. (1993). Convective heat transfer enhancement due to intermittency in an impinging jet. *Journal of Heat Transfer*, **115**, 91-98,

ABSTRACT. The chaotic character of the convective heat transfer enhancement inside a still cannot be stated from a unique indicator. In previous papers time series, the Fourier spectrum and the growing rate of h were performed. In the present work Lyapunov exponents of h are calculated, as well as those of the time series of measured temperatures involved in its calculation. The results show that some series of h present chaos and others not, while all the temperatures measurements show a chaotic behaviour.

Keywords: Distillation, h coefficient, chaos, Lyapunov exponents.