

Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 08, No. 1 (2019), hal 63 – 72.

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT KAKI GAJAH (FILARIASIS) (Data Kasus Kronis Filariasis di Kabupaten Sambas)

Nurhajjah, Helmi, Woro Budiartini Partiw

INTISARI

Filariasis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh infeksi cacing Filaria yang ditularkan melalui gigitan nyamuk. Penyakit ini tersebar luas di pedesaan dan perkotaan yang beriklim tropis serta dapat menyerang semua golongan tanpa mengenal usia dan jenis kelamin. Model matematika dalam penelitian ini mendeskripsikan tentang penyebaran penyakit Filariasis berdasarkan asumsi dan nilai parameter yang digunakan. Penelitian ini menggunakan model matematika yang terdiri dari empat subpopulasi pada populasi manusia yaitu manusia yang rentan terhadap penyakit (S_h), manusia yang terjangkit penyakit (E_h), manusia yang terinfeksi penyakit (I_h), dan manusia yang kebal terhadap penyakit (R_h) serta tiga subpopulasi pada populasi nyamuk yaitu nyamuk yang rentan terhadap penyakit (S_v), nyamuk yang terjangkit penyakit (E_v), dan nyamuk yang terinfeksi penyakit (I_v). Model matematika yang telah dibentuk selanjutnya dianalisis untuk mengetahui perilaku dari sistem dengan menggunakan simulasi numerik. Simulasi model matematika dan nilai parameter menunjukkan bahwa terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotik dan titik kesetimbangan endemik penyakit yang bersifat tidak stabil. Analisis sensitivitas dari sistem dalam penelitian ini menunjukkan bahwa semakin besar keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada manusia menyebabkan nilai bilangan reproduksi dasar kurang dari satu dan semakin kecil keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada manusia menyebabkan nilai bilangan reproduksi dasar lebih dari satu.

Kata kunci : model matematika, Filariasis, bilangan reproduksi dasar

PENDAHULUAN

Model matematika merupakan salah satu bentuk penerapan ilmu matematika yang dapat digunakan untuk menginterpretasikan masalah pada dunia nyata ke dalam bentuk persamaan maupun pertidaksamaan matematika. Model matematika merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk dinamika penyebaran penyakit epidemik salah satunya adalah penyakit Filariasis. Filariasis atau penyakit kaki gajah merupakan salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh cacing Filaria dan dapat ditularkan melalui gigitan nyamuk. Penyakit ini tersebar luas di pedesaan dan perkotaan yang beriklim tropis serta dapat menyerang semua golongan tanpa mengenal usia dan jenis kelamin [1]. Penyakit ini bersifat kronis dan bila tidak segera mendapatkan penanganan maka menimbulkan cacat menetap berupa pembesaran kaki, lengan, dan alat kelamin. Berdasarkan data yang diberikan oleh Dinas Kesehatan Provinsi, pada tahun 2017 Kalimantan Barat tercatat memiliki 255 kasus kronis Filariasis yang terdiri dari sembilan kabupaten endemis dengan *mikrofilaria rate* >1%. Pada tahun 2017, Kabupaten Sambas tercatat memiliki kasus kronis terbesar dibanding dengan 8 kabupaten lainnya yaitu sebanyak 62 kasus kronis dengan jumlah penduduk 526.367 jiwa.

Tujuan dari penelitian ini adalah (1) mengetahui model penyebaran penyakit Filariasis, (2) menganalisis kestabilan model penyebaran penyakit Filariasis di sekitar titik kesetimbangan, (3) mengetahui pengaruh pemberian obat pencegahan Filariasis pada subpopulasi manusia yang rentan terhadap penyebaran penyakit Filariasis pada level set R_0 . Penelitian ini membahas tentang model penyebaran penyakit Filariasis dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang bersifat tertutup pada suatu wilayah tertentu dan mengabaikan usia pada masing-masing populasi dengan melakukan pemberian obat pencegahan Filariasis pada subpopulasi manusia yang rentan. Individu yang berhasil dengan obat pencegahan Filariasis yang diberikan tidak dapat tertular penyakit kembali.

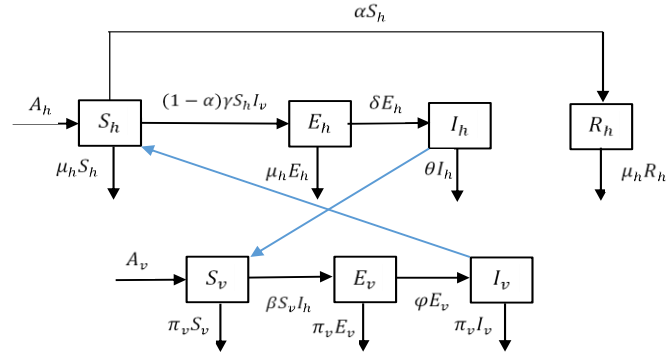
Analisis kestabilan model penyebaran penyakit Filariasis dimulai dengan membuat asumsi-asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunakan pada model yang kemudian dibentuk ke dalam diagram transfer model matematika penyebaran penyakit Filariasis. Berdasarkan diagram transfer tersebut dibentuk model matematika penyebaran penyakit Filariasis. Kemudian, menentukan titik kesetimbangan dari model. Model yang diperoleh dalam penelitian ini adalah model dengan bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Langkah selanjutnya, melakukan linearisasi model dengan membentuk matriks Jacobian dari sistem persamaan [2]. Berdasarkan hasil dari matriks Jacobian, diperoleh nilai-nilai eigen. Selanjutnya, menentukan Matriks Generasi Mendatang (NGM) dari sistem persamaan. NGM diperoleh dari model persamaan subpopulasi yang terjangkit dan terinfeksi pada populasi manusia maupun nyamuk. Berdasarkan matriks NGM diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) yang merupakan suatu bilangan yang menyatakan rata-rata individu baru yang dapat terinfeksi karena adanya satu individu yang terinfeksi yang terjadi dalam subpopulasi rentan [3]. Langkah terakhir adalah melakukan analisis numerik. Analisis yang dilakukan adalah analisis kestabilan sistem yang dilakukan dengan mensubstitusikan data numerik ke dalam nilai eigen yang telah diperoleh sebelumnya pada masing-masing titik kesetimbangan yang kemudian dianalisis berdasarkan dari sifat stabilitas sistem [4], serta analisis penyebaran penyakit Filariasis pada level set R_0 yang dilakukan menggunakan analisis sensitivitas dengan menggunakan grafik simulasi data kasus kronis Filariasis di Kabupaten Sambas, Kalimantan Barat.

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT FILARIASIS

Model matematika penyebaran penyakit Filariasis merupakan suatu model matematika yang menggambarkan dinamika penyebaran penyakit Filariasis antara populasi manusia dan populasi nyamuk. Model matematika dalam penelitian ini merupakan model penyebaran penyakit host-vektor yang terdiri dari dua populasi yaitu populasi manusia yang berperan sebagai host dan populasi nyamuk yang berperan sebagai vektor. Berikut merupakan asumsi yang digunakan untuk membentuk model penyebaran penyakit Filariasis yaitu:

1. Penyebaran penyakit Filariasis pada populasi manusia dibagi empat subpopulasi yaitu subpopulasi manusia yang rentan terhadap penyakit, manusia yang terjangkit, manusia yang terinfeksi, dan manusia yang kebal terhadap penyakit, sedangkan populasi nyamuk terbagi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi nyamuk yang rentan terhadap penyakit, nyamuk yang terjangkit, dan nyamuk yang terinfeksi.
 2. Laju kelahiran pada manusia dan nyamuk dianggap konstan.
 3. Dalam populasi manusia diasumsikan terdapat sejumlah orang yang sudah terinfeksi penyakit Filariasis.
 4. Penularan penyakit Filariasis terjadi karena adanya kontak langsung antara nyamuk dan manusia yang terinfeksi Filariasis.
 5. Jumlah populasi manusia dan nyamuk dianggap konstan sedangkan penularan penyakit Filariasis berlangsung secara terus-menerus.
 6. Manusia yang telah terinfeksi penyakit Filariasis tidak dapat sembuh dari penyakit.
 7. Individu yang terinfeksi pada subpopulasi manusia yang terinfeksi dieliminasi dari subpopulasi.
 8. Manusia yang rentan terkena penyakit dapat langsung berpindah ke subpopulasi manusia yang kebal terhadap penyakit apabila pemberian obat pencegahan Filariasis yang dilakukan berhasil dan langsung berpindah ke subpopulasi manusia yang terjangkit apabila pemberian obat pencegahan Filariasis yang dilakukan tidak berhasil.
 9. Laju kematian manusia dan nyamuk pada setiap populasi dianggap konstan.
 10. Pengaruh migrasi diabaikan sehingga penyebaran penyakit bersifat tertutup dalam suatu populasi.
- Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, diperoleh model dinamika penyebaran penyakit Filariasis
-

pada manusia dan nyamuk seperti pada Gambar 1 berikut



Gambar 1. Diagram Dinamika Penyebaran Penyakit Filariasis pada Manusia dan Nyamuk

Berdasarkan Gambar 1, diperoleh model penyebaran penyakit Filariasis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= A_h - (1 - \alpha)\gamma S_h I_v - (\mu_h + \alpha)S_h \\
 \frac{dE_h}{dt} &= (1 - \alpha)\gamma S_h I_v - (\mu_h + \delta)E_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= \delta E_h - \theta I_h \\
 \frac{dR_h}{dt} &= \alpha S_h - \mu_h R_h \\
 \frac{dS_v}{dt} &= A_v - \beta I_h S_v - \pi_v S_v \\
 \frac{dE_v}{dt} &= \beta S_v I_h - (\pi_v + \varphi)E_v \\
 \frac{dI_v}{dt} &= \varphi E_v - \pi_v I_v
 \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $A_h, \mu_h, \gamma, \delta, \theta, A_v, \pi_v, \beta, \varphi > 0$, $S_h, E_h, I_h, R_h, S_v, E_v, I_v \geq 0$ dan $0 < \alpha < 1$, serta keterangan sebagai berikut:

A_h : laju kelahiran alami pada populasi manusia (host)

μ_h : laju kematian alami pada populasi manusia (host)

γ : laju penyebaran penyakit dari populasi nyamuk ke populasi manusia

θ : laju eliminasi manusia yang terinfeksi penyakit Filariasis

α : presentase keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada populasi manusia

δ : laju perpindahan subpopulasi manusia yang terjangkit ke subpopulasi manusia yang terinfeksi

A_v : laju kelahiran alami pada populasi nyamuk (vektor)

π_v : laju kematian alami pada populasi nyamuk (vektor)

β : laju kontak penularan penyakit dari populasi manusia ke populasi nyamuk

φ : laju perpindahan subpopulasi nyamuk yang terjangkit ke subpopulasi nyamuk yang terinfeksi

Selanjutnya adalah menentukan titik kesetimbangan dari Sistem Persamaan (1). Berdasarkan Sistem Persamaan (1) diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (TK_1) dan titik kesetimbangan endemik penyakit (TK_2) sebagai berikut:

$$TK_1 = \left(S_{h1} = \frac{A_h}{\mu_h + \alpha}, E_{h1} = 0, I_{h1} = 0, R_{h1} = \frac{\alpha A_h}{(\mu_h + \alpha)\mu_h}, S_{v1} = \frac{A_v}{\pi_v}, E_{v1} = 0, I_{v1} = 0 \right) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 TK_2 &= \left(S_{h2} = \frac{(\theta(\mu_h + \delta)\pi_v + A_h\beta\delta)\pi_v(\varphi + \pi_v)}{\beta\delta((\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + \varphi(\mu_h + \alpha)\pi_v - \varphi A_v\gamma(\alpha - 1))}, \right. \\
 E_{h2} &= \frac{-\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^3 - \varphi\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^2 - A_h\varphi A_v\beta\delta\gamma(\alpha - 1)}{\beta\delta(\mu_h + \delta)((\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + \varphi(\mu_h + \alpha)\pi_v - \varphi A_v\gamma(\alpha - 1))}, \\
 I_{h2} &= \frac{-\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^3 - \varphi\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^2 - \varphi A_v\beta\delta\gamma(\alpha - 1)}{\beta\theta(\mu_h + \delta)((\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + \varphi(\mu_h + \alpha)\pi_v - \varphi A_v\gamma(\alpha - 1))}, \\
 R_{h2} &= \frac{\alpha\pi_v(\theta(\mu_h + \delta)\pi_v + A_h\beta\delta)(\varphi + \pi_v)}{\beta\delta((\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + \varphi(\mu_h + \alpha)\pi_v - \varphi A_v\gamma(\alpha - 1))\mu_h},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{v2} &= -\frac{\theta(\mu_h+\delta)((\mu_h+\alpha)\pi_v^2+\varphi(\mu_h+\alpha)\pi_v-\varphi A_v\gamma(\alpha-1))}{(\alpha-1)(\theta(\mu_h+\delta)\pi_v+A_h\beta\delta)\varphi\gamma}, \\
E_{v2} &= \frac{\theta(\mu_h+\delta)(\mu_h+\alpha)\pi_v^3+\varphi\theta(\mu_h+\delta)(\mu_h+\alpha)\pi_v^2+A_h\varphi A_v\beta\delta\gamma(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\theta(\mu_h+\delta)\pi_v+A_h\beta\delta)\varphi\gamma(\varphi+\pi_v)}, \\
I_{v2} &= \frac{\theta(\mu_h+\delta)(\mu_h+\alpha)\pi_v^3+\varphi\theta(\mu_h+\delta)(\mu_h+\alpha)\pi_v^2+A_h\varphi A_v\beta\delta\gamma(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\theta(\mu_h+\delta)\pi_v+A_h\beta\delta)\pi_v\gamma(\varphi+\pi_v)} \quad (3)
\end{aligned}$$

Titik kesetimbangan TK_1 menunjukkan kondisi bebas penyakit Filariasis pada suatu daerah dengan adanya pemberian obat pencegahan Filariasis pada subpopulasi manusia yang rentan terhadap penyakit (S_h). Pada kondisi ini tidak ada individu yang terjangkit dan terinfeksi penyakit Filariasis baik pada populasi manusia maupun nyamuk. Titik Kesetimbangan TK_2 menunjukkan kondisi masih adanya penyakit Filariasis dalam suatu populasi pada suatu daerah karena ketidakberhasilan dari obat pencegahan Filariasis yang diberikan pada subpopulasi manusia yang rentan terhadap penyakit (S_h). Pada kondisi ini masih adanya individu yang terjangkit dan terinfeksi penyakit Filariasis baik pada populasi manusia maupun nyamuk.

ANALISIS KESTABILAN MODEL PENYEBARAN PENYAKIT FILARIASIS

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial nonlinear dilakukan melalui linearisasi terlebih dahulu. Linearisasi dicari menggunakan matriks Jacobian dari Sistem Persamaan (1) sehingga diperoleh matriks \mathbf{J} sebagai berikut:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -(1-\alpha)\gamma I_v - \mu_h - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-\alpha)\gamma S_h \\ (1-\alpha)\gamma I_v & -\mu_h - \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\alpha)\gamma S_h \\ 0 & \delta & -\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta S_v & 0 & -\beta I_h - \pi_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta S_v & 0 & \beta I_h & -\pi_v - \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi & -\pi_v & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (2) ke dalam Persamaan (4) diperoleh matriks \mathbf{J}_1 sebagai berikut

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} -\mu_h - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(1-\alpha)\gamma A_h}{\mu_h + \alpha} \\ 0 & -\mu_h - \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\alpha)\gamma A_h}{\mu_h + \alpha} \\ 0 & \delta & -\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta A_v}{\pi_v} & 0 & -\pi_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta A_v}{\pi_v} & 0 & 0 & -\pi_v - \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi & -\pi_v & 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari suatu sistem dapat diketahui dengan menentukan nilai eigen dari sistem tersebut terlebih dahulu. Nilai eigen dari matriks Jacobian \mathbf{J}_1 dapat diperoleh menggunakan persamaan $|\mathbf{J}_1 - \lambda \mathbf{I}| = 0$ [5]. Matriks \mathbf{J}_1 merupakan matriks Jacobian hasil linearisasi untuk titik kesetimbangan bebas penyakit dan \mathbf{I} merupakan matriks identitas, sehingga diperoleh nilai eigen untuk titik kesetimbangan bebas penyakit. Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (3) ke dalam Persamaan (4) diperoleh matriks \mathbf{J}_2 sebagai berikut

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} -m_1 - \mu_h - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-\alpha)\gamma m_2 \\ m_1 & -\mu_h - \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\alpha)\gamma m_2 \\ 0 & \delta & -\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\mu_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta m_3 & 0 & -m_4 - \pi_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta m_3 & 0 & m_4 & -\pi_v - \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi & -\pi_v & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang sama juga dilakukan untuk titik kesetimbangan endemik penyakit menggunakan persamaan $|\mathbf{J}_2 - \lambda \mathbf{I}| = 0$ [5]. Matriks \mathbf{J}_2 merupakan matriks Jacobian hasil linearisasi untuk titik kesetimbangan endemik penyakit, sehingga diperoleh nilai eigen untuk titik kesetimbangan endemik penyakit.

Selanjutnya, menentukan nilai dari bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan R_0 memiliki tiga kriteria yaitu jika $R_0 > 1$ maka akan terjadi endemik yang ditandai dengan meningkatnya subpopulasi manusia yang terinfeksi. Jika $R_0 < 1$ maka tidak terjadi endemik yang ditandai dengan menurunnya subpopulasi manusia yang terinfeksi. Jika $R_0 = 1$ maka individu yang terinfeksi akan menularkan tepat kepada satu individu rentan, sehingga penyakit dalam populasi akan stabil atau menetap. Nilai R_0 merupakan nilai eigen maksimum yang diperoleh dari Matriks Generasi Mendatang (NGM). NGM dapat diperoleh dari model persamaan subpopulasi yang terjangkit dan terinfeksi pada populasi manusia maupun nyamuk [3].

Matriks NGM dari Sistem Persamaan (1) untuk titik kesetimbangan bebas penyakit diberikan oleh

$$\mathbf{NGM}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\alpha)\gamma A_h}{\pi_v(\mu_h + \alpha)} \\ \frac{\delta}{\mu_h + \delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta A_v}{\pi_v \theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi}{\pi_v + \varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks \mathbf{NGM}_1 , polinom karakteristik yang dihasilkan untuk menentukan nilai R_0 pada titik kesetimbangan bebas penyakit adalah

$$P_1(x) = \lambda^4 - \frac{A_h A_v \beta \delta \gamma \varphi (1 - \alpha)}{(\mu_h + \delta) \pi_v^2 \theta (\mu_h + \alpha) (\pi_v + \varphi)}$$

Sehingga diperoleh nilai R_0 untuk titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut

$$R_0(DFE) = \sqrt[4]{\frac{A_h A_v \beta \delta \gamma \varphi (1 - \alpha)}{(\mu_h + \delta) \pi_v^2 \theta (\mu_h + \alpha) (\pi_v + \varphi)}}$$

Selanjutnya matriks NGM dari Sistem Persamaan (1) untuk titik kesetimbangan endemik penyakit diberikan oleh

$$\mathbf{NGM}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\alpha)\gamma(\theta(\mu_h+\delta)\pi_v+A_h\beta\delta)(\varphi+\pi_v)}{\beta\delta((\mu_h+\alpha)\pi_v^2+\varphi(\mu_h+\alpha)\pi_v-\varphi A_v\gamma(1-\alpha))} \\ \frac{\delta}{\mu_h+\delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta(\mu_h+\delta)((-\mu_h-\alpha)\pi_v^2-\varphi(\mu_h+\alpha)\pi_v+\varphi A_v\gamma(\alpha-1))}{(\alpha-1)(\theta(\mu_h+\delta)\pi_v+A_h\beta\delta)\varphi\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi}{\pi_v+\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks \mathbf{NGM}_2 , polinom karakteristik yang dihasilkan untuk menentukan nilai R_0 pada titik kesetimbangan endemik penyakit adalah

$$P_2(x) = \lambda^4 - 1$$

Sehingga diperoleh nilai R_0 untuk titik kesetimbangan endemik penyakit sebagai berikut

$$R_0(DEE) = 1$$

SIMULASI DAN INTERPRETASI MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT FILARIASIS DI KABUPATEN SAMBAS

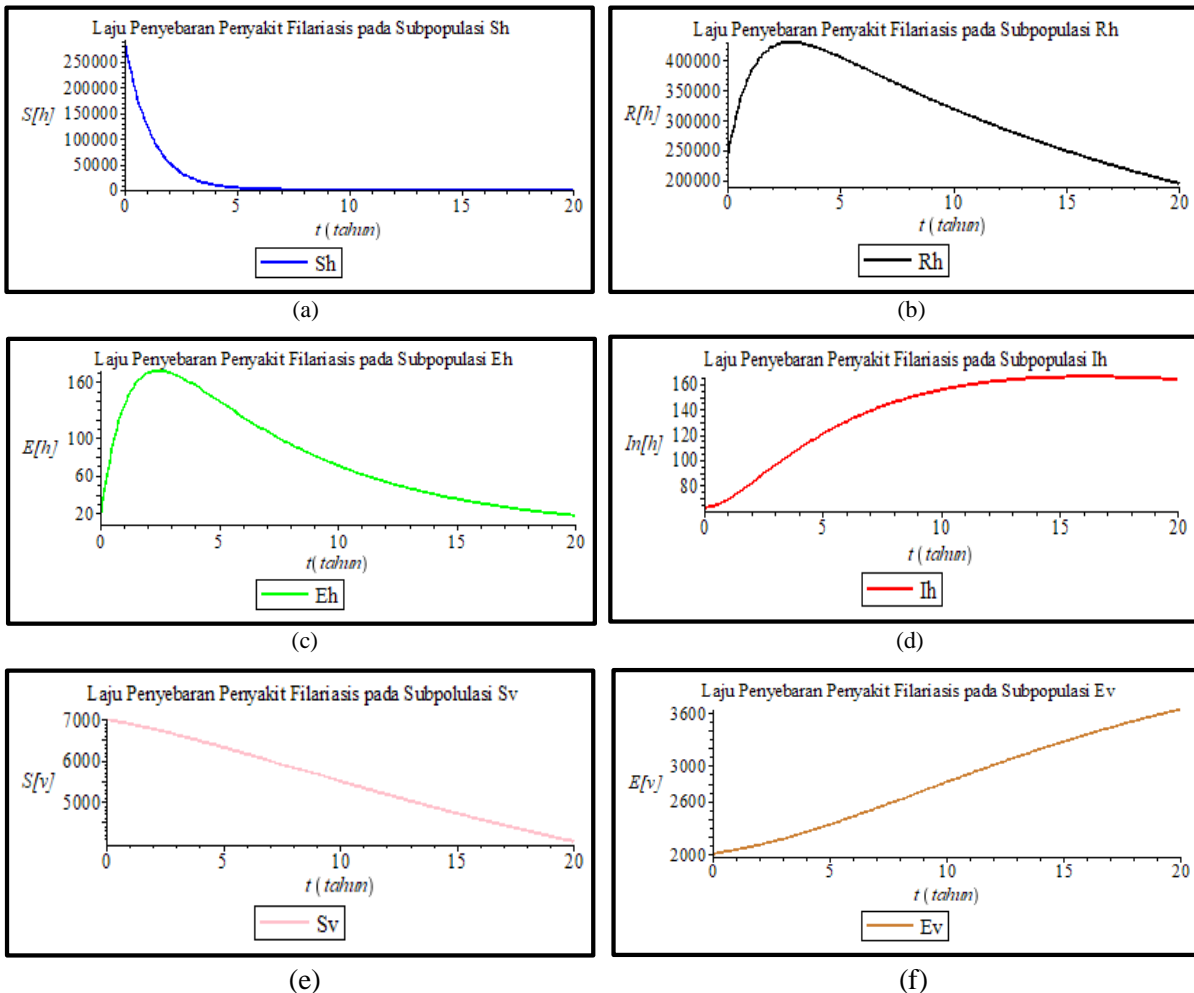
Simulasi model dalam penelitian ini bertujuan untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit Filariasis di Kabupaten Sambas dengan menggunakan parameter-parameter dan nilai awal tertentu terkait dengan hasil yang telah dianalisis sebelumnya. Adapun nilai-nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini diberikan pada Tabel 1 berikut

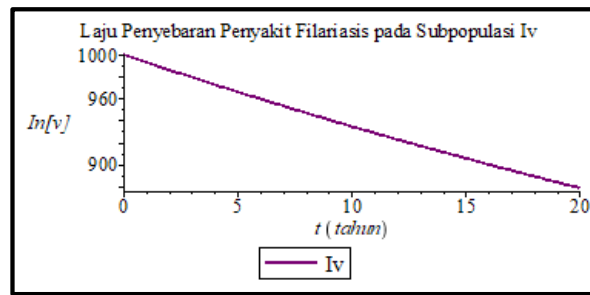
Tabel 1. Nilai-Nilai Paramater Penyebaran Penyakit Filariasis (per tahun)

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
A_h	0,01	δ	0,09
μ_h	0,05	A_v	1
γ	0,0000034	π_v	0,008
θ	0,016	β	0,00014
α	0,8	φ	0,0005

Dengan nilai $N_h = 526.367$ dan $N_v = 10.000$ serta nilai awal $S_h(0) = 292.386$, $E_h(0) = 11$, $I_h(0) = 62$, $R_h(0) = 233.908$, $S_v(0) = 7.000$, $E_v(0) = 2.000$ dan $I_v(0) = 1.000$. Berdasarkan nilai-nilai parameter tersebut, diperoleh nilai eigen untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $\lambda_1 = -0,050$; $\lambda_2 = -0,850$; $\lambda_3 = -0,008$; $\lambda_4 = -0,140$; $\lambda_5 = -0,016$; $\lambda_6 = -0,008$; dan $\lambda_7 = -0,008$. Berdasarkan hasil simulasi numerik diketahui bahwa semua nilai eigen yang didapat dari titik kesetimbangan bebas penyakit berupa bilangan real negatif, akibatnya titik kesetimbangan TK_1 bersifat stabil asimtotik [4]. Sedangkan nilai eigen untuk titik endemik penyakit yaitu $\lambda_1 = -0,050$; $\lambda_2 = -0,140$; $\lambda_3 = -0,041$; $\lambda_4 = 0,023$; $\lambda_5 = -0,006 + 0,030i$; $\lambda_6 = -0,006 - 0,030i$; dan $\lambda_7 = -0,008$. Dari hasil simulasi numerik diketahui bahwa terdapat satu nilai eigen yang didapat dari titik kesetimbangan endemik penyakit berupa bilangan real positif, akibatnya titik kesetimbangan TK_2 bersifat tidak stabil [4].

Selanjutnya, hasil simulasi numerik model penyebaran penyakit Filariasis untuk 20 tahun mendatang dapat dilihat pada Gambar 2 berikut:





(g)

Gambar 2. Grafik Laju Penyebaran Penyakit Filariasis pada Setiap Populasi

Berdasarkan Gambar 2 (a), jumlah individu pada subpopulasi S_h mengalami penurunan dari mula-mula 292.836 manusia yang rentan pada waktu $t = 0$ tahun menjadi 0 manusia yang rentan kurang lebih pada waktu $t = 8$ tahun. Hal ini terjadi karena adanya interaksi antara nyamuk yang terinfeksi dengan manusia yang rentan dan ketidakberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis yang diberikan kepada manusia yang rentan menyebabkan berpindahnya individu pada subpopulasi S_h ke E_h , selain itu dipengaruhi juga oleh keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada manusia yang rentan mengakibatkan berpindahnya individu pada subpopulasi S_h ke R_h , serta adanya kematian alami dari populasi manusia sehingga subpopulasi S_h menurun.

Berdasarkan Gambar 2 (b), jumlah individu pada subpopulasi R_h mengalami peningkatan dari mula-mula ada sekitar 233.908 manusia yang kebal terhadap penyakit pada waktu $t = 0$ tahun menjadi sekitar 430.000 manusia yang kebal terhadap penyakit pada waktu kurang lebih $t = 3$ tahun. Hal ini terjadi karena keberhasilan dari pemberian obat pencegahan Filariasis pada subpopulasi S_h yang cukup besar sehingga individu pada subpopulasi S_h mengalami kekebalan terhadap penyakit Filariasis yang menyebabkan individu pada subpopulasi R_h juga mengalami peningkatan pada rentang waktu tersebut. Pada $t = 4$ tahun dan seterusnya jumlah individu pada subpopulasi R_h mengalami penurunan secara terus menerus hingga menuju titik nol pada waktu tertentu. Hal ini disebabkan karena menurunnya jumlah individu pada subpopulasi S_h dan juga dipengaruhi oleh adanya kematian alami dari populasi manusia sehingga individu pada subpopulasi R_h menurun.

Berdasarkan Gambar 2 (c), jumlah individu pada subpopulasi E_h mengalami peningkatan dari mula-mula 11 manusia yang terjangkit pada waktu $t = 0$ tahun menjadi sekitar 170 manusia yang terjangkit pada waktu kurang lebih $t = 3$ tahun. Hal ini dikarenakan adanya interaksi antara nyamuk yang terinfeksi dengan manusia yang rentan dan ketidakberhasilan pemberian obat pencegahan yang diberikan sehingga berpindahnya individu pada subpopulasi S_h ke E_h menyebabkan individu pada subpopulasi E_h mengalami peningkatan. Pada $t = 4$ tahun dan seterusnya jumlah individu pada subpopulasi E_h mengalami penurunan secara terus menerus dari 170 manusia terjangkit hingga menuju titik nol pada waktu tertentu. Hal ini dikarenakan menurunnya jumlah individu pada subpopulasi S_h dan karena berkembangnya penyakit sehingga individu yang terjangkit menjadi terinfeksi menyebabkan berpindahnya individu pada subpopulasi E_h ke I_h , serta adanya kematian alami dari populasi manusia sehingga individu pada subpopulasi E_h menurun.

Berdasarkan Gambar 2 (d), jumlah individu pada subpopulasi I_h mengalami peningkatan dari mula-mula 62 manusia yang terinfeksi pada waktu $t = 0$ tahun menjadi sekitar 170 manusia yang terinfeksi pada waktu kurang lebih $t = 18$ tahun. Hal ini terjadi karena meningkatnya individu pada subpopulasi E_h pada waktu tertentu menyebabkan individu pada subpopulasi I_h juga mengalami peningkatan. Pada $t = 19$ tahun dan seterusnya jumlah individu pada subpopulasi I_h mulai mengalami penurunan. Hal ini dikarenakan menurunnya jumlah individu pada subpopulasi E_h pada waktu tertentu dan karena adanya eliminasi terhadap individu yang terinfeksi sehingga individu pada subpopulasi I_h menurun.

Berdasarkan Gambar 2 (e), jumlah individu pada subpopulasi S_v mengalami penurunan yang terjadi secara terus menerus dari mula-mula sekitar 7.000 nyamuk yang rentan pada waktu $t = 0$ tahun hingga menuju titik nol pada waktu kurang lebih $t = 20$ tahun. Hal ini dikarenakan meningkatnya individu pada subpopulasi I_h pada waktu tertentu menyebabkan interaksi antara manusia yang terinfeksi dengan nyamuk yang rentan juga meningkat yang berakibat berpindahnya individu pada subpopulasi S_v ke E_v dan karena adanya kematian alami dari populasi nyamuk sehingga subpopulasi S_v menurun.

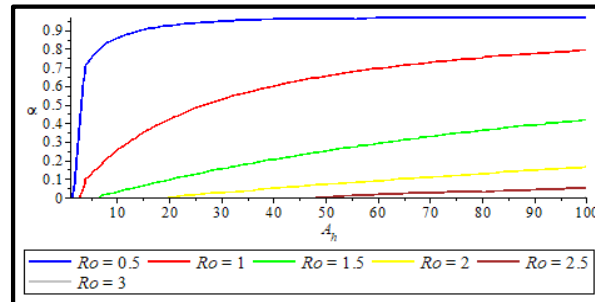
Berdasarkan Gambar 2 (f), jumlah individu pada subpopulasi E_v mengalami peningkatan secara terus menerus dari mula-mula sekitar 2.000 nyamuk yang terjangkit penyakit pada waktu $t = 0$ tahun menjadi sekitar 3.600 nyamuk yang terjangkit pada waktu kurang lebih $t = 20$ tahun. Hal ini dikarenakan meningkatnya individu pada subpopulasi I_h pada waktu tertentu menyebabkan interaksi antara manusia yang terinfeksi dengan nyamuk yang rentan juga meningkat sehingga individu pada subpopulasi E_v terus bertambah dari tahun ke tahun.

Berdasarkan Gambar 2 (g), jumlah individu pada subpopulasi I_v mengalami penurunan secara terus menerus dari mula-mula sekitar 1.000 nyamuk yang terinfeksi pada waktu $t = 0$ tahun hingga menuju titik nol kurang lebih pada waktu $t = 20$ tahun. Hal ini dikarenakan adanya kematian alami dari populasi nyamuk sehingga subpopulasi I_v menurun.

ANALISIS SENSITIVITAS

Analisis sensitivitas pada penelitian ini dilakukan untuk mengetahui hubungan antara parameter satu terhadap parameter lainnya pada level set R_0 . Adapun analisis yang dilakukan adalah sebagai berikut:

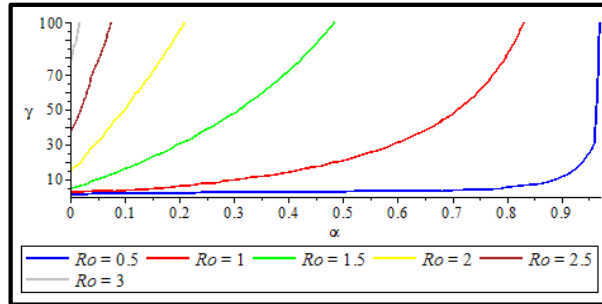
- Hubungan antara rata-rata kelahiran alami manusia (A_h) terhadap keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada populasi manusia (α) pada level set R_0 .



Gambar 3. Grafik Simulasi Hubungan antara A_h terhadap α pada Level Set R_0

Berdasarkan Gambar 3, dapat dilihat bahwa nilai A_h dan α mempengaruhi nilai R_0 . Semakin kecil angka kelahiran alami manusia (A_h) dan semakin besar keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada populasi manusia (α), maka nilai R_0 semakin kecil menyebabkan nilai $R_0 < 1$ yang berarti bahwa penyakit Filariasis di Kabupaten Sambas semakin berkurang bahkan hilang pada suatu waktu tertentu. Sebaliknya, semakin besar angka kelahiran alami manusia (A_h) dan semakin kecil angka keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada populasi manusia (α), maka nilai R_0 semakin besar menyebabkan nilai $R_0 > 1$ yang berarti bahwa penyakit Filariasis di Kabupaten Sambas menjadi endemik pada suatu waktu tertentu. Hal ini sesuai dengan kondisi pada dunia nyata bahwa semakin kecil nilai kelahiran alami manusia dan semakin besar keberhasilan obat pencegahan Filariasis yang diberikan di dalam suatu populasi mengakibatkan jumlah individu yang rentan terkena penyakit semakin berkurang. Sebaliknya, semakin besar nilai kelahiran alami manusia dan semakin kecil keberhasilan obat pencegahan Filariasis yang diberikan di dalam suatu populasi mengakibatkan jumlah individu yang rentan terkena penyakit semakin meningkat.

- b. Hubungan antara tingkat keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada populasi manusia (α) terhadap laju penyebaran penyakit dari populasi nyamuk ke populasi manusia (γ) pada level set R_0 .



Gambar 4. Grafik Simulasi Hubungan antara α terhadap γ pada Level Set R_0

Berdasarkan Gambar 4, semakin besar keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada populasi manusia (α) dan semakin kecil laju penyebaran penyakit dari populasi nyamuk ke populasi manusia (γ), maka nilai R_0 semakin kecil menyebabkan nilai $R_0 < 1$ yang berarti penyakit Filariasis di Kabupaten Sambas berkurang bahkan hilang pada suatu waktu tertentu. Sebaliknya, semakin kecil keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada populasi manusia (α) dan semakin besar laju penyebaran penyakit dari populasi nyamuk ke populasi manusia (γ), maka nilai R_0 semakin besar menyebabkan nilai $R_0 > 1$ yang berarti penyakit Filariasis di Kabupaten Sambas menjadi endemik pada suatu waktu tertentu. Hal ini sesuai dengan kondisi nyata bahwa semakin kecil laju penyebaran penyakit dan semakin besar keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis di dalam suatu populasi menyebabkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit semakin berkurang. Sebaliknya, semakin besar laju penyebaran penyakit dan semakin kecil keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis di dalam suatu populasi menyebabkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit bertambah.

PENUTUP

Beberapa kesimpulan dalam penelitian ini antara lain:

1. Model matematika untuk penyebaran penyakit Filariasis adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= A_h - (1 - \alpha)\gamma S_h I_v - (\mu_h + \alpha)S_h \\ \frac{dE_h}{dt} &= (1 - \alpha)\gamma S_h I_v - (\mu_h + \delta)E_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \delta E_h - \theta I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \alpha S_h - \mu_h R_h \\ \frac{dS_v}{dt} &= A_v - \beta I_h S_v - \pi_v S_v \\ \frac{dE_v}{dt} &= \beta S_v I_h - (\pi_v + \varphi)E_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \varphi E_v - \pi_v I_v \end{aligned}$$

2. Analisis model matematika penyebaran penyakit Filariasis menghasilkan dua titik kesetimbangan, yaitu

- a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$TK_1 = (S_{h1}, E_{h1}, I_{h1}, R_{h1}, S_{v1}, E_{v1}, I_{v1}) = \left(\frac{A_h}{\mu_h + \alpha}, 0, 0, \frac{\alpha A_h}{(\mu_h + \alpha)\mu_h}, \frac{A_v}{\pi_v}, 0, 0 \right)$$

- b. Titik kesetimbangan endemik penyakit

$$\begin{aligned} TK_2 &= (S_{h2}, E_{h2}, I_{h2}, R_{h2}, S_{v2}, E_{v2}, I_{v2}) \\ &= \left(\frac{(\theta(\mu_h + \delta)\pi_v + A_h\beta\delta)\pi_v(\varphi + \pi_v)}{\beta\delta((\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + \varphi(\mu_h + \alpha)\pi_v - \varphi A_v\gamma(\alpha - 1))} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{-\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^3 - \varphi\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^2 - A_h\varphi A_v\beta\delta\gamma(\alpha - 1)}{\beta\delta(\mu_h + \delta)((\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + \varphi(\mu_h + \alpha)\pi_v - \varphi A_v\gamma(\alpha - 1))},$$

$$\frac{-\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^3 - \varphi\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^2 - A_h\varphi A_v\beta\delta\gamma(\alpha - 1)}{\beta\theta(\mu_h + \delta)((\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + \varphi(\mu_h + \alpha)\pi_v - \varphi A_v\gamma(\alpha - 1))},$$

$$\frac{\alpha\pi_v(\theta(\mu_h + \delta)\pi_v + A_h\beta\delta)(\varphi + \pi_v)}{\beta\delta((\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + \varphi(\mu_h + \alpha)\pi_v - \varphi A_v\gamma(\alpha - 1))\mu_h},$$

$$\frac{\theta(\mu_h + \delta)((\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + \varphi(\mu_h + \alpha)\pi_v - \varphi A_v\gamma(\alpha - 1))}{(\alpha - 1)(\theta(\mu_h + \delta)\pi_v + A_h\beta\delta)\varphi\gamma},$$

$$\frac{\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^3 + \varphi\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + A_h\varphi A_v\beta\delta\gamma(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\theta(\mu_h + \delta)\pi_v + A_h\beta\delta)\varphi\gamma(\varphi + \pi_v)},$$

$$\frac{\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^3 + \varphi\theta(\mu_h + \delta)(\mu_h + \alpha)\pi_v^2 + A_h\varphi A_v\beta\delta\gamma(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\theta(\mu_h + \delta)\pi_v + A_h\beta\delta)\pi_v\gamma(\varphi + \pi_v)}.$$

Berdasarkan hasil simulasi numerik analisis kestabilan pada titik kesetimbangan diperoleh kestabilan sistem pada model matematika penyebaran penyakit Filariasis adalah stabil asimtotik untuk titik kesetimbangan bebas dan tidak stabil untuk titik kesetimbangan endemik penyakit.

3. Berdasarkan hasil analisis sensitivitas dari simulasi numerik pada penderita Filariasis di Kabupaten Sambas dengan nilai awal dan parameter yang telah diberikan, diperoleh bahwa:
 - a. Semakin kecil angka kelahiran alami manusia (A_h) dan semakin besar keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada populasi manusia (α), maka nilai R_0 semakin kecil menyebabkan nilai $R_0 < 1$ yang berarti penyakit Filariasis di Kabupaten Sambas semakin berkurang bahkan hilang pada suatu waktu tertentu, begitu juga sebaliknya.
 - b. Semakin besar keberhasilan pemberian obat pencegahan Filariasis pada populasi manusia (α) dan semakin kecil laju penyebaran penyakit dari populasi nyamuk ke populasi manusia (γ), maka nilai R_0 semakin kecil sehingga menyebabkan nilai $R_0 < 1$ yang berarti penyakit Filariasis di Kabupaten Sambas berkurang bahkan hilang pada suatu waktu tertentu, begitu juga sebaliknya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kementerian Kesehatan RI. *Situasi Filariasis di Indonesia Tahun 2015*. Jakarta: Pusdatin; 2016.
- [2] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems Third Edition*. United States of America: Springer-Verlag; 2001.
- [3] Driessche P, Watmough J. Reproduction Number and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 2002; 180: 29-48.
- [4] Boyce WE, DiPrima RC. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Ninth Edition*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc; 2009.
- [5] Anton H, Rorres C. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Ed ke-8*. Jakarta: Erlangga; 2004.

NURHAJJAH : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
nnurhajjah@gmail.com

HELMI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
helmi132205@yahoo.co.id

WORD BUDIARTINI PARTIWI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak,
woro.partiwi@gmail.com