Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 6, No. 02 (2017), hal 17 – 26.

PENENTUAN NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS INTERVAL MENGGUNAKAN METODE PANGKAT

Yuyun Eka Pratiwi, Mariatul Kiftiah, Eka Wulan Ramadhani

INTISARI

Matriks interval merupakan perluasan dari matriks real dengan entri-entrinya berupa interval. Interval yang digunakan adalah interval tertutup. Permasalahan yang sering muncul pada suatu matriks tidak terkecuali matriks interval adalah nilai eigen dan vektor eigen. Pada matriks interval permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan salah satu metode numerik yaitu metode pangkat. Metode pangkat adalah metode iterasi yang digunakan untuk menentukan nilai eigen terbesar dan vektor eigen yang bersesuaian dari suatu matriks. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks interval menggunakan metode pangkat dengan operasi aritmetika interval yang dimodifikasi. Operasi tersebut digunakan agar dual yang merupakan operator penting dalam menukar batas atas dengan batas bawah dari suatu interval dapat digunakan dalam perhitungan. Langkah pertama dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks interval menggunakan metode pangkat adalah menentukan vektor tak nol ($\tilde{\mathbf{v}}_0$) dari matriks interval $\tilde{A}_{n\times n}$. Selanjutnya menghitung $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{v}}_k$ dengan $k = 0,1,2,\dots,n$ dan menentukan $\tilde{m}_{k+1}$ yang digunakan untuk menghitung $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1} = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}}{\tilde{m}_{k+1}}$. Setelah itu menentukan kekonvergenan $\tilde{\mathbf{v}}_k$. Kemudian menentukan nilai eigen matriks interval menggunakan formula $\tilde{\lambda}_i = \lim_{k\to\infty} \frac{(\tilde{\mathbf{y}}_{k+1})_r}{(\tilde{\mathbf{v}}_k)_r}$ dengan $i = 1,2,3,\dots,n$ dan $r = 1,2,3,\dots,n$. Setelah diperoleh nilai eigen dan vektor eigen, dilakukan pengecekan nilai eigen dan vektor eigen dengan menggunakan persamaan $\tilde{A}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_i\tilde{\mathbf{v}}$. Diperoleh nilai eigen dan vektor eigen matriks interval yang bersesuaian. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa metode pangkat bisa digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks interval dengan operasi aritmetika interval yang dimodifikasi.

Kata Kunci : *aritmetika interval, modifikasi aritmetika interval*

PENDAHULUAN

Permasalahan nilai eigen dan vektor eigen merupakan salah satu masalah yang sering muncul pada matriks tidak terkecuali matriks interval. Mencari nilai eigen dan vektor eigen pada matriks interval akan sangat sulit dan memerlukan waktu yang lama jika dilakukan dengan cara analitik yaitu menggunakan persamaan karakteristik $\left|\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{\mathrm{I}}\right| = \tilde{0}$. Oleh sebab itu, untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks interval diperlukan suatu metode numerik yaitu dengan menggunakan metode pangkat [1]. Metode pangkat menghasilkan sebuah aproksimasi terhadap nilai eigen terbesar dan vektor eigen yang bersesuaian [2].

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks interval menggunakan metode pangkat dengan operasi aritmetika interval yang dimodifikasi. Pada penelitian ini, entri-entri pada matriks interval merupakan interval tertutup dan aritmetika interval yang digunakan adalah aritmetika interval yang dimodifikasi.

Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mendefinisikan matriks interval berukuran $n \times n$, misalkan $\tilde{A}$ dan menentukan sebarang vektor tak nol, misalkan $\tilde{\mathbf{v}}_0$. Langkah selanjutnya, menghitung $\tilde{\mathbf{y}}_1 = \tilde{A}\tilde{\mathbf{v}}_0$ dan menentukan elemen terbesar dari $\tilde{\mathbf{y}}_1$ yaitu $\tilde{m}_1$. Kemudian menghitung aproksimasi pertama vektor eigen, $\tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_1}{\tilde{m}_1}$. Ulangi langkah tersebut hingga diperoleh aproksimasi vektor eigen yang konvergen dengan aproksimasi vektor eigen pada iterasi sebelumnya atau dapat ditulis $\lim_{k\to\infty} \tilde{\mathbf{v}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{v}}$. Langkah selanjutnya, setelah diperoleh vektor eigen dapat dicari nilai eigen menggunakan formula $\tilde{\lambda}_i = \lim_{k\to\infty} \frac{(\tilde{\mathbf{y}}_{k+1})_r}{(\tilde{\mathbf{v}}_k)_r}$, dengan $i = 1,2,3,\ldots,n$ dan $r = 1,2,3,\ldots,n$. Setelah diperoleh nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian, selanjutnya dilakukan pengecekan untuk melihat apakah nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks interval yang diperoleh telah memenuhi persamaan $\tilde{A}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_i\tilde{\mathbf{v}}$.

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Sebuah matriks persegi $n \times n$ memiliki nilai dan vektor karakteristik yang lebih sering disebut sebagai nilai dan vektor eigen. Berikut diberikan definisi nilai dan vektor eigen dari suatu matriks.

Definisi 1 [3] *Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol* $\mathbf{v}$ *pada* $\boldsymbol{R}^n$ *disebut vektor eigen (eigenvector) dari A jika $A\mathbf{v}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari* $\mathbf{v}$ *yaitu*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen (eigenvalue) dari A, dan $\mathbf{v}$ *disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.*

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A berukuran $n \times n$, dapat ditulis sebagai $A\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v}$ atau ekuivalen dengan

$$(\lambda I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{1}$$

agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat paling sedikit satu solusi tak nol dari Persamaan 1. Namun, Persamaan 1 memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0 \tag{2}$$

Persamaan 2 disebut persamaan karakteristik matriks A. Skalar-skalar yang memenuhi persamaan tersebut adalah nilai-nilai eigen matriks A.

INTERVAL

Interval adalah himpunan bilangan-bilangan real yang ditunjukkan sebagai suatu pasangan berurut dan dinyatakan dalam suatu ketaksamaan [4]. Dalam analisis interval, suatu ketaksamaan interval dinyatakan dalam bentuk interval tertutup pada garis real. Berikut ini diberikan definisi tentang interval tertutup, *midpoint*, dan *width* dari suatu interval.

Definisi 2 [5] *Interval tertutup adalah himpunan semua bilangan real x yang dinyatakan dalam suatu ketaksamaan $\underline{x} \le x \le \overline{x}$ untuk sebarang konstanta real $\underline{x}$ dan $\bar{x}$ dengan $\underline{x} \le \overline{x}$ dan dinotasikan dengan $[\underline{x}, \overline{x}]$.*

Dikenal pula istilah titik tengah (*midpoint*) dan lebar (*width*) dari suatu interval yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3 [6] *Titik tengah atau midpoint dari suatu interval dengan $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ adalah bilangan real:*

$$m(\tilde{x}) = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}$$

Definisi 4 [6] *Lebar atau width dari suatu interval dengan $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ adalah bilangan real:*

$$w(\tilde{x}) = \overline{x} - \underline{x}$$

Selanjutnya, dalam mempelajari interval dikenal istilah himpunan semua interval sejati yang didefinisikan dengan:

$$\mathbf{IR} = \{\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}] : \underline{x} \le \overline{x}, \text{dengan } \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}$$

dan himpunan semua interval tak sejati yang didefinisikan dengan:

$$\overline{\mathbf{IR}} = \{\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}] : \underline{x} > \overline{x}, \text{dengan } \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}$$

Sedangkan gabungan himpunan interval sejati dan himpunan interval tak sejati yang disebut dengan generalisasi interval didefinisikan dengan:

$$\mathbf{D} = \mathbf{IR} \cup \overline{\mathbf{IR}} = \{[\underline{x}, \overline{x}], \text{dengan } \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}.$$

Entri-entri matriks interval dalam penelitian ini berada pada **D** agar operator *dual* bisa digunakan.

ARITMETIKA INTERVAL

Diberikan $+, -, \cdot$, dan $\div$, yang masing-masing menyatakan operasi aritmetika pada penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian suatu interval. Jika $* \in \{+, -, \cdot, \div\}$ dan $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbf{D}$ dengan $\mathbf{D} = \mathbf{IR} \cup \overline{\mathbf{IR}} = \{[\underline{x}, \overline{x}], \text{dengan } \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}\}$, maka berikut ini diberikan definisi operasi aritmetika pada bilangan interval $\tilde{x}$ dan $\tilde{y}$.

Definisi 5 [6] *Operasi pada aritmetika interval dengan $\tilde{x}, \tilde{y} \in \boldsymbol{D}$ dan $* \in \{+, -, \cdot, \div\}$ dapat ditulis sebagai berikut:*

$$\tilde{x} * \tilde{y} = \{x * y | x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}\}$$

Oleh karena itu, interval $\tilde{x} * \tilde{y}$ menghasilkan operasi yang memuat setiap bilangan yang dapat dibentuk sebagai $x * y$ untuk setiap $x \in \tilde{x}$ dan $y \in \tilde{y}$. Berikut ini diberikan sifat-sifat untuk dua interval $\tilde{x} * \tilde{y}$ dari suatu interval tertutup. Misalkan diberikan dua interval yaitu $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ dan $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$; $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbf{D}$, sifat-sifat yang memenuhi operasi aritmetika interval $\tilde{x} * \tilde{y}$ adalah sebagai berikut:

1. $\tilde{x} + \tilde{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$,
2. $\tilde{x} - \tilde{y} = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$,
3. $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = [min\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\}, max\{\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y}\}]$,
4. $\tilde{x} \div \tilde{y} = \tilde{x} \cdot \frac{1}{\tilde{y}} = [\underline{x}, \overline{x}] \cdot \frac{\mathbf{1}}{[\underline{y}, \overline{y}]}$, dengan $\frac{\mathbf{1}}{[\underline{y}, \overline{y}]} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\overline{y}}, \frac{\mathbf{1}}{\underline{y}}\right]$ untuk $0 \notin \tilde{y}$.
5. $\alpha + \tilde{x} = [\alpha + \underline{x}, \alpha + \overline{x}]$.
6. $\alpha \cdot \tilde{x} = [min\{\alpha \cdot \underline{x}, \alpha \cdot \overline{x}\}, max\{\alpha \cdot \underline{x}, \alpha \cdot \overline{x}\}]$

Dikenal pula istilah nilai mutlak pada interval yang dapat ditentukan dengan melihat nilai maksimum dari *lower endpoint* dan *upper endpoint*. Selain itu dapat pula ditentukan relasi (hubungan) antar dua interval yang digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu interval lebih besar dari interval lainnya yang dapat dilihat dari *midpoint* kedua interval. Berikut ini diberikan definisi nilai mutlak dari suatu interval dan relasi (hubungan) antar dua interval.

Definisi 6 [6] Nilai mutlak suatu interval didefinisikan sebagai berikut:

$$(\forall\, \tilde{x} \in \boldsymbol{D})(|\tilde{x}| = max(|\underline{x}|, |\overline{x}|)$$

Definisi 7 [7] *Relasi $\leq$ pada $\boldsymbol{D}$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$(\forall\, \tilde{x}, \tilde{y} \in \boldsymbol{D})(\tilde{x} \leq \tilde{y} \Leftrightarrow mid\ \tilde{x} \leq mid\ \tilde{y})$$

Selain aritmetika interval dikenal pula modifikasi aritmetika interval. Adanya modifikasi aritmetika interval menyebabkan berlakunya sifat distributif pada perkalian interval. Dikenal pula istilah *dual* pada modifikasi aritmetika interval yang nantinya digunakan pada perhitungan menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks interval menggunakan metode pangkat.

MODIFIKASI ARITMETIKA INTERVAL

Dikenal istilah *dual* dalam modifikasi aritmetika interval. *Dual* merupakan operator penting dalam menukar batas atas (*upper endpoint*) dengan batas bawah (*lower endpoint*) dari suatu interval. Operator *dual* pada modifikasi aritmetika interval hanya digunakan pada operasi pengurangan dan pembagian pada dua interval yang bernilai sama. Misalkan diberikan $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ maka *dual* dari interval $\tilde{x}$ dapat ditulis sebagai

$dual(\tilde{x}) = dual[\underline{x}, \overline{x}] = [\overline{x}, \underline{x}]$. Pada sebuah interval $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ dikenal pula istilah *half-width* yaitu setengah dari lebar interval $\tilde{x}$. Berikut ini diberikan definisi mengenai *half-width* dan sifat-sifat operasi modifikasi aritmetika interval.

Definisi 8 [8] *Misalkan diberikan suatu interval* $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ *dengan* $\tilde{x} \in \mathbf{D}$. *Setengah dari lebar interval* $\tilde{x}$ *yang disebut sebagai half-widht* $\tilde{x}$, *dapat dituliskan sebagai berikut:*

$$w(\tilde{x}) = \left(\frac{\overline{x} - \underline{x}}{2}\right)$$

Definisi 9 [9] *Diberikan dua interval dengan* $\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ *dan* $\tilde{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$, *sehingga:*

i. *Penjumlahan*

$$\tilde{x} + \tilde{y} = [\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{y}, \overline{y}] = [m(\tilde{x}) + m(\tilde{y}) - k, m(\tilde{x}) + m(\tilde{y}) + k]$$

dengan $k = \left(\frac{(\overline{y} + \overline{x}) - (\underline{y} + \underline{x})}{2}\right)$

ii. *Pengurangan*

$$\tilde{x} - \tilde{y} = [\underline{x}, \overline{x}] - [\underline{y}, \overline{y}] = [m(\tilde{x}) - m(\tilde{y}) - k, m(\tilde{x}) - m(\tilde{y}) + k]$$

dengan $k = \left(\frac{(\overline{y} + \overline{x}) - (\underline{y} + \underline{x})}{2}\right)$ *tetapi, jika* $\tilde{x} = \tilde{y}$ *atau* $[\underline{x}, \overline{x}] = [\underline{y}, \overline{y}]$, *maka* $\tilde{x} - \tilde{y} = \tilde{x} - dual(\tilde{x}) = [\underline{x}, \overline{x}] - [\overline{x}, \underline{x}] = [(\underline{x} - \underline{x}), (\overline{x} - \overline{x})] = [0,0]$

iii. *Perkalian*

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = [\underline{x}, \overline{x}] \cdot [\underline{y}, \overline{y}] = [(m(\tilde{x})m(\tilde{y}) - k), (m(\tilde{x})m(\tilde{y}) + k)]$$

dengan $k = min\{(m(\tilde{x})m(\tilde{y}) - \alpha), (\beta - m(\tilde{x})m(\tilde{y}))\}$

$\alpha = min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y})$ *dan* $\beta = max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y})$

iv. *Pembagian*

$$1 \div \tilde{x} = \frac{1}{\tilde{x}} = \frac{1}{[\underline{x}, \overline{x}]} = \left[\frac{1}{m(\tilde{x})} - k, \frac{1}{m(\tilde{x})} + k\right]$$

dengan $k = min\left\{\frac{1}{\overline{x}}\left(\frac{\overline{x} - \underline{x}}{\underline{x} + \overline{x}}\right), \frac{1}{\underline{x}}\left(\frac{\overline{x} - \underline{x}}{\underline{x} + \overline{x}}\right)\right\}$ *dan* $0 \notin \tilde{x}$, *Jika* $\tilde{x} = \tilde{y}$, *maka*

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}} &= \frac{\tilde{x}}{dual(\tilde{x})} \\ &= [\underline{x}, \overline{x}]\frac{1}{[\overline{x}, \underline{x}]} \\ &= [\underline{x}, \overline{x}]\left[\frac{1}{\underline{x}}, \frac{1}{\overline{x}}\right] \\ &= \left[\frac{\underline{x}}{\underline{x}}, \frac{\overline{x}}{\overline{x}}\right] = [1,1]\end{aligned}$$

v. *Perkalian interval dengan sebuah skalar*

$$\lambda\tilde{x} = \begin{cases}[\lambda\underline{x}, \lambda\overline{x}], untuk\ \lambda \geq 0 \\ [\lambda\overline{x}, \lambda\underline{x}], untuk\ \lambda < 0\end{cases}$$

MATRIKS INTERVAL

Matriks interval merupakan himpunan dari matriks-matriks dengan $\tilde{a}_{ij}$ yang menyatakan entri dari matriks pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Untuk setiap $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \in \mathbb{R}$ maka $\underline{a}_{ij}$ adalah entri pada matriks interval dengan nilai terkecil dari $\tilde{a}_{ij}$ dan $\overline{a}_{ij}$ adalah entri pada matriks dengan nilai terbesar dari $\tilde{a}_{ij}$. Secara umum, matriks interval didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 10 [8] *Suatu matriks $\tilde{A}$ berukuran $m \times n$ dengan setiap entri-entrinya sebagai berikut:*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{m\times n}$$

$\tilde{a}_{ij} = \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right] \in \mathbf{D}$ *atau* $\tilde{A} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right]$ *untuk sebarang* $\underline{A}$, $\overline{A}$ *yang memenuhi* $\underline{A} \leq \overline{A}$, dengan masing-masing entrinya

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \cdots & \underline{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{a}_{m1} & \cdots & \underline{a}_{mn} \end{bmatrix} \text{dan } \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya untuk menyatakan himpunan semua matriks interval yang berukuran $m \times n$ digunakan notasi $M_{m\times n}(\boldsymbol{D})$.

Pada matriks interval dikenal istilah *midpoint* dan *width*. *Midpoint* dari matriks interval $\tilde{A}$ merupakan matriks dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$m(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} m(\tilde{a}_{11}) & \cdots & m(\tilde{a}_{n1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & m(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}$$

dan *width* matriks interval $\tilde{A}$ merupakan matriks *width* dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$w(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} w(\tilde{a}_{11}) & \cdots & w(\tilde{a}_{n1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & w(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}$$

dengan entri-entri matriks $w(\tilde{A})$ selalu non negatif.

Definisi 11 [8] *Diketahui bahwa dua matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ berordo $m \times n$ dikatakan sama yang dinotasikan dengan $\tilde{A} = \tilde{B}$ jika dan hanya jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$ dan $w(\tilde{A}) = w(\tilde{B})$. Sedangkan matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dikatakan ekuivalen dan dinotasikan dengan $\tilde{A} \approx \tilde{B}$ jika dan hanya jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$.*

METODE PANGKAT MATRIKS INTERVAL

Misalkan $\tilde{A}_{n\times n}$ merupakan matriks interval berukuran $n \times n$. Diasumsikan bahwa $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n$ adalah nilai-nilai eigen matriks interval $\tilde{A}$ yang berbeda sehingga

$$|\tilde{\lambda}_1| > |\tilde{\lambda}_2| > \cdots > |\tilde{\lambda}_n|$$

Matriks A memiliki nilai eigen terbesar dengan vektor eigen yang bersesuaian. Selanjutnya, dipilih vektor eigen tak nol dari matriks $\tilde{A} \in M_{n\times n}(\boldsymbol{D})$. Inisialisasi vektor tak nol berada di $\mathbf{D}^n$. Dimisalkan $\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2}, \cdots, \tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{n}}$ sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n$. Setiap vektor $\tilde{\mathbf{v}}$ yang berada dalam ruang vektor eigen $\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2}, \cdots, \tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{n}}$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor tersebut [10]. Adapun kombinasi linearnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{c}_1\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1} + \tilde{c}_2\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} + \cdots + \tilde{c}_n\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{n} \tag{3}$$

Misalkan

$$\left.\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1} &= \tilde{\lambda}_1\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \\ \tilde{A}\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} &= \tilde{\lambda}_2\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} \\ &\vdots \\ \tilde{A}\tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{n}} &= \tilde{\lambda}_n\tilde{\mathbf{v}}_{\boldsymbol{n}} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Selanjutnya, dengan mengalikan kedua ruas pada Persamaan 3 dengan $\tilde{A}$ dan mensubstitusikan Sistem Persamaan 4 sehingga diperoleh:

$$\tilde{A}\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{c}_1\tilde{\lambda}_1\tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{c}_2\tilde{\lambda}_2\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} + \cdots + \tilde{c}_n\tilde{\lambda}_n\tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{n}$$

$$\approx \tilde{\lambda}_1 \left[\tilde{c}_1 \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1} + \tilde{c}_2 \left(\frac{\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_1} \right) \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} + \cdots + \tilde{c}_n \left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_1} \right) \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{n} \right]$$

Selanjutnya dengan menggunakan cara yang sama diperoleh:

$$\tilde{A}^2 \tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_1^2 \left[\tilde{c}_1 \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1} + \tilde{c}_2 \left(\frac{\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_1} \right)^2 \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} + \cdots + \tilde{c}_n \left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_1} \right)^n \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{n} \right]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\tilde{A}^k \tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_1^k \left[\tilde{c}_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{c}_2 \left(\tfrac{\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_1} \right)^k \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} + \cdots + \tilde{c}_n \left(\tfrac{\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_1} \right)^k \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{n} \right] \tag{5}$$

$$\tilde{A}^{k+1} \mathbf{v} \approx \tilde{\lambda}_1^{k+1} \left[\tilde{c}_1 \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1} + \tilde{c}_2 \left(\tfrac{\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_1} \right)^{k+1} \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{2} + \cdots + \tilde{c}_n \left(\tfrac{\tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_1} \right)^{k+1} \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{n} \right] \tag{6}$$

Telah diasumsikan sebelumnya bahwa nilai-nilai eigennya berbeda dan $\left|\tilde{\lambda}_i / \tilde{\lambda}_1\right| \stackrel{\sim}{<} 1, i = 2,3, \dots, n$ dan $0 \notin \tilde{\lambda}_1$, sehingga untuk $k \to \infty$, maka

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_1} \right)^k = \tilde{0}$$

Dengan demikian Persamaan 5 dan Persamaan 6 menjadi

$$\tilde{A}^k \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\lambda}_1^k \tilde{c}_1 \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1}$$

dan

$$\tilde{A}^{k+1} \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\lambda}_1^{k+1} \tilde{c}_1 \tilde{\mathbf{v}}_1$$

Selanjutnya untuk $k \to \infty$ dan rasio r diperoleh

$$\tilde{\lambda}_1{}^k = \lim_{k \to \infty} \frac{(\tilde{A}^k \tilde{\mathbf{v}})_r}{(\tilde{c}_1 \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1})_r} \tag{7}$$

dan

$$\tilde{\lambda}_1{}^{k+1} = \lim_{k \to \infty} \frac{(\tilde{A}^{k+1} \tilde{\mathbf{v}})_r}{(\tilde{c}_1 \tilde{\mathbf{v}}_\mathbf{1})_r} \tag{8}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan 7 ke Persamaan 8 maka diperoleh:

$$\tilde{\lambda}_1 = \lim_{k \to \infty} \frac{(\tilde{A}^{k+1} \tilde{\mathbf{v}})_r}{(\tilde{A}^k \tilde{\mathbf{v}})_r} \tag{9}$$

dengan r menunjukkan komponen n vektor dengan $r = 1,2,3, \dots, n$. Oleh karena itu, diperoleh n rasio yang mendekati nilai yang sama yang merupakan nilai eigen terbesar. Algoritma sederhana untuk metode pangkat diberikan sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \tilde{A} \tilde{\mathbf{v}}_k, \qquad k = 0,1,2 \dots, n$$
$$\tilde{\mathbf{v}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} / \tilde{m}_{k+1}$$

dengan $\tilde{m}_{k+1}$ merupakan elemen terbesar dari $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}$ dengan $0 \notin \tilde{m}_{k+1}$. Sehingga Persamaan 9 bisa ditulis sebagai:

$$\tilde{\lambda}_1 = \lim_{k \to \infty} \frac{(\tilde{\mathbf{y}}_{k+1})_r}{(\tilde{\mathbf{v}}_k)_r} \ , \ r = 1,2,3, \dots, n$$

dan $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ sebagai vektor eigen yang bersesuaian.

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS INTERVAL

Berdasarkan Definisi 1, nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks A dengan entri-entri bilangan real harus memenuhi $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Dalam penelitian ini konsep tersebut juga diterapkan untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen pada matriks interval menggunakan metode pangkat dengan operasi aritmetika interval yang dimodifikasi. Akan tetapi pada matriks interval digunakan $\tilde{A}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{v}}$.

Berdasarkan Definisi 11**,** dua matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ berordo $m \times n$ dikatakan sama yang dinotasikan dengan $\tilde{A} = \tilde{B}$ jika dan hanya jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$ dan $w(\tilde{A}) = w(\tilde{B})$. Sedangkan matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dikatakan ekuivalen dan dinotasikan dengan $\tilde{A} \approx \tilde{B}$ jika dan hanya jika $m(\tilde{A}) = m(\tilde{B})$. Definisi inilah yang menjadi dasar untuk mengatakan bahwa persamaan $\tilde{A}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_i\tilde{\mathbf{v}}$ ekuivalen. Berikut ini diberikan contoh mencari nilai eigen dan vektor eigen matriks interval menggunakan metode pangkat.

Contoh 11 Diberikan matriks interval $\tilde{C} = \begin{bmatrix} [3,4] & [1,5] & [0,0] & [3,4] \\ [2,3] & [3,7] & [1,5] & [1,1] \\ [0,0] & [5,6] & [3,4] & [1,1] \\ [1,1] & [1,2] & [1,2] & [2,4] \end{bmatrix}$, tentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks interval $\tilde{C}$!

Langkah-langkah menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks interval $\tilde{C}$ dengan metode pangkat sebagai berikut.

A. Menentukan sebarang vektor tak nol $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \begin{bmatrix} [1,1] \\ [1,1] \\ [1,1] \\ [0,0] \end{bmatrix}$.

B. Melakukan proses iterasi vektor eigen matriks interval sebagai berikut:

1. Iterasi Pertama

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \tilde{C}\tilde{\mathbf{v}}_0 = \begin{bmatrix} [4,9] \\ [6,15] \\ [8,10] \\ [3,5] \end{bmatrix}, \text{ dengan elemen terbesar dari } \tilde{\mathbf{y}}_1 \text{ yaitu } m_1 = [6,15]$$

Menghitung aproksimasi pertama vektor eigen:

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{m_1}\tilde{\mathbf{y}}_1 = \frac{1}{[6,15]}\begin{bmatrix} [4,9] \\ [6,15] \\ [8,10] \\ [3,5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0.24, 0.93] \\ [1,1] \\ [0.48, 1.14] \\ [0.18, 0.54] \end{bmatrix}$$

2. Iterasi Kedua

$$\tilde{\mathbf{y}}_2 = \tilde{C}\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} [2.26, 10.35] \\ [4.14, 14.36] \\ [6.62, 10.77] \\ [2.08, 6.68] \end{bmatrix}, \text{dengan elemen terbesar dari } \tilde{\mathbf{y}}_2 \text{ yaitu } \tilde{m}_2 = [4.14, 14.36]$$

Menghitung aproksimasi kedua vektor eigen:

$$\tilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{m_2}\tilde{y}_2 = \frac{1}{[4.14, 14.36]}\begin{bmatrix} [2.26, 10.35] \\ [4.14, 14.36] \\ [6.62, 10.77] \\ [2.08, 6.68] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0.15, 1.22] \\ [1,1] \\ [0.46, 1.44] \\ [0.14, 0.81] \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama diperoleh iterasi ketiga, keempat, kelima, dan keenam vektor eigen matriks interval sebagai berikut:

$$\tilde{\mathbf{y}}_3 = \begin{bmatrix} [1.87,12.24] \\ [3.9,16.17] \\ [6.52,12.08] \\ [1.89,8.18] \end{bmatrix}, \tilde{m}_3 = [3.9,16.17],\ \tilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} [0.11,1.29] \\ [1,1] \\ [0.39,1.46] \\ [0.11,0.89] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_4 = \begin{bmatrix} [1.66,12.74] \\ [3.72,16.33] \\ [6.28,12.19] \\ [1.72,8.45] \end{bmatrix}, \tilde{m}_4 = [3.72,16.33], \tilde{\mathbf{v}}_4 = \begin{bmatrix} [0.1,1.34] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.91] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_5 = \begin{bmatrix} [1.6,12.97] \\ [3.67,16.46] \\ [6.21,12.24] \\ [1.67,8.56] \end{bmatrix}, \tilde{m}_5 = [3.67,16.46], \tilde{\mathbf{v}}_5 = \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_6 = \begin{bmatrix} [1.6,13.08] \\ [3.67,16.52] \\ [6.21,12.25] \\ [1.67,8.61] \end{bmatrix}, \tilde{m}_6 = [3.67,16.52], \tilde{\mathbf{v}}_6 = \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix}$$

Dari iterasi yang telah dilakukan dapat diketahui bahwa $\tilde{\mathbf{v}}_6$ konvergen ke $\tilde{\mathbf{v}}_5$, sehingga iterasi dapat dihentikan. Dengan demikian, diperoleh vektor eigen matriks interval $\tilde{C}$ adalah

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix}$$

C. Menentukan nilai eigen matriks interval $\tilde{C}$

$$\tilde{\lambda}_i = \lim_{k\to\infty} \frac{(\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{k+1}})_r}{(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}})_r},\ \text{dengan } r = 1,2,3,4$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{[1.6,13.08]}{[0.1,1.36]} = [1.18,18.92]$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{[3.67,16.52]}{[1,1]} = [3.67,16.52]$$

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{[6.21,12.25]}{[0.37,1.47]} = [4.28,15.83]$$

$$\tilde{\lambda}_4 = \frac{[1.67,8.61]}{[0.1,0.92]} = [1.82,18.32]$$

D. Ditunjukkan bahwa nilai eigen dan vektor eigen yang telah diperoleh memenuhi persamaan

Untuk $\tilde{\lambda}_1 = [1.18,18.92]$ dengan $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix}$ memenuhi $\tilde{C}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{v}}$.

$$\tilde{C}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_1\tilde{\mathbf{v}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} [3,4] & [1,5] & [0,0] & [3,4] \\ [2,3] & [3,7] & [1,5] & [1,1] \\ [0,0] & [5,6] & [3,4] & [1.1] \\ [1,1] & [1,2] & [1,2] & [2,4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix} \approx [1.18,18.92] \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} [1.6,13.08] \\ [3.67,16.52] \\ [6.21,12.25] \\ [1.67,8.61] \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} [0.12,14.55] \\ [1.18,18.92] \\ [0.44,18.05] \\ [0.12,10.13] \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 11, bahwa diperoleh *midpoint* dan *width* dari $\tilde{C}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_1\tilde{\mathbf{v}}$ yaitu:

$$m(\tilde{C}\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 7.3 \\ 10.1 \\ 9.2 \\ 5.1 \end{bmatrix}, \quad m(\tilde{\lambda}_1\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 7.3 \\ 10.1 \\ 9.2 \\ 5.1 \end{bmatrix}$$

$$w(\tilde{C}\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 11.4 \\ 12.8 \\ 6.04 \\ 6.9 \end{bmatrix}, \quad w(\tilde{\lambda}_1\tilde{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 14.4 \\ 17.7 \\ 17.6 \\ 10.01 \end{bmatrix}$$

Karena $m(\tilde{C}\tilde{\mathbf{v}}) = m(\tilde{\lambda}_1\tilde{\mathbf{v}})$ dan $w(\tilde{C}\tilde{\mathbf{v}}) \neq w(\tilde{\lambda}_1\tilde{\mathbf{v}})$ maka $\tilde{\lambda}_1 = [1.18,18.92]$ merupakan nilai eigen matriks interval $\tilde{C}$ dengan $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix}$. Cara yang sama juga dilakukan untuk mengecek $\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4$ dengan $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix}$ memenuhi persamaan $\tilde{C}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_i\tilde{\mathbf{v}}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa matriks interval $\tilde{C}$ mempunyai empat nilai eigen yaitu

$$\tilde{\lambda}_1 = [1.82,18.92], \; \tilde{\lambda}_2 = [3.67,16.52]$$

$$\tilde{\lambda}_3 = [4.28,15.83], \; \tilde{\lambda}_4 = [1.82,18.32]$$

Berdasarkan Definisi 6 dapat disimpulkan bahwa yang menjadi nilai eigen terbesar dari matriks interval $\tilde{C}$ adalah $\tilde{\lambda}_1$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut adalah $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix}$.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah disampaikan maka dapat disimpulkan bahwa:

Metode pangkat dapat digunakan untuk mencari nilai eigen dan vektor eigen pada matriks interval yang berukuran $n \times n$ dengan operasi yang digunakan adalah operasi aritmetika interval yang dimodifikasi. Adapun langkah-langkah dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks interval dengan metode pangkat yaitu menentukan vektor tak nol dari sebarang matriks interval yang berada di $\mathbf{D}^n$. Menghitung iterasi vektor eigen matriks interval dengan menggunakan formula $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{v}}_k$ untuk selanjutnya menghitung $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}/\tilde{m}_{k+1}$ dengan $k = 0,1,2, \dots, n$, selanjutnya menghitung nilai eigen matriks interval dengan formula $\tilde{\lambda}_i = \lim_{k\to\infty} \frac{(\tilde{\mathbf{y}}_{k+1})_r}{(\tilde{\mathbf{v}}_k)_r}, i = 0,1,2,, \dots, n$ dan $r = 1,2,3, \dots, n$. Kemudian mengecek nilai eigen dan vektor eigen yang telah diperoleh dengan menggunakan persamaan $\tilde{A}\tilde{\mathbf{v}} \approx \tilde{\lambda}_i\tilde{\mathbf{v}}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Veeramalai, G., 2012. Eigen Values of an Interval Matrix. Volume 02.

[2]. Anton, H., 1987. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.

[3]. Howart, A. R., 2004. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi Kedelapan. Jakarta: Erlangga

[4]. Ramon E. Moore, R. B. K. M. J. C., 2009. *Introduction to Interval Analysis.* Philadelphia: SIAM.

[5]. Hansen, E., 1965. *Interval Arithmetic With Some Aplication for Digital Computers.* California: Lickheed Missiles & Space Company.

[6]. Walster, E. H. &. G. W., 2004. *Global Optimization Using Interval Analysis.* Edisi Kedua. New York: Marcel Dekker.

[7]. Kaleyski, N. S., 2014. Eigenvalues of Symmetric Interval Matrices. Halaman. 7.

[8]. K.Ganesan, 2007. On Some Properties of Interval Matrices. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering,* Volume 1, Halaman. 25-30.

[9]. T. Nirmala, D. D. H. K. K. G., 2011. Inverse Interval Matrix: A New Approach. *Applied Mathematical Sciences,* Volume 5, Halaman. 609-615.

[10]. S.R.K.Iyengar, R., 2009. *Numerical Methods.* Edisi Kedua. India: New Age.

YUYUN EKA PRATIWI : FMIPA Untan, Pontianak, ekapratiwiyuyun@gmail.com

MARIATUL KIFTIAH : FMIPA Untan, Pontianak, kiftiahmariatul@math.untan.ac.id

EKA WULAN RAMADHANI : FMIPA Untan, Pontianak, wulan2890@gmail.com