



UNICAMP

***UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS***

***Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica***

JAIME ANTONIO UTRIA VALDES

Modelo dos sapos em árvores birregulares

Campinas

2019

Jaime Antonio Utria Valdes

Modelo dos sapos em árvores birregulares

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Orientador: Elcio Lebensztayn

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Jaime Antonio Utria Valdes e orientada pelo Prof. Dr. Elcio Lebensztayn.

Campinas

2019

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 140887/2017-2; CAPES

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8024-5080>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Ut7m Utria Valdes, Jaime Antonio, 1988-
Modelo dos sapos em árvores birregulares / Jaime Antonio Utria Valdes. –
Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Elcio Lebensztayn.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Modelo dos sapos (Probabilidades). 2. Probabilidades. 3. Árvores
birregulares. 4. Processo estocástico. 5. Percolação (Física estatística). I.
Lebensztayn, Elcio, 1973-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Frog model on biregular trees

Palavras-chave em inglês:

Frog model (Probabilities)

Probabilities

Biregular trees

Stochastic processes

Percolation (Statistical physics)

Área de concentração: Estatística

Titulação: Doutor em Estatística

Banca examinadora:

Elcio Lebensztayn [Orientador]

Diego Fernando de Bernardini

Alexsandro Giacomo Grimbert Gallo

Valdivino Vargas Júnior

Anatoli Iambartsev

Data de defesa: 05-02-2019

Programa de Pós-Graduação: Estatística

**Tese de Doutorado defendida em 05 de fevereiro de 2019 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ELCIO LEBENSZTAYN

Prof(a). Dr(a). DIEGO FERNANDO DE BERNARDINI

Prof(a). Dr(a). ALEXSANDRO GIACOMO GRIMBERT GALLO

Prof(a). Dr(a). VALDIVINO VARGAS JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). ANATOLI IAMBARTSEV

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Para Magaly, Jaime, Karla e Cindy.

Agradecimentos

No final dessa jornada agradeço:

A Deus por ter me ajudado a chegar até aqui.

Aos meus professores que fizeram parte de minha formação acadêmica durante o Doutorado, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Élcio Lebensztayn pelo apoio, paciência, e incentivo para o desenvolvimento do trabalho. Obrigado por sua entrega e dedicação.

Aos meus pais Magaly e Jaime por seu apoio incondicional, sacrifício, e confiança em todo momento. A vocês minha eterna gratidão.

À minha esposa Cindy, pelo amor, apoio e compreensão nessa longa jornada.

À minha irmã Karla, pelo amor, parceria e torcida em cada um dos meus projetos.

Aos amigos e colegas com quem convivi durante a pós-graduação.

Aos funcionários da Secretária de Pós-graduação, pela ajuda e apoio.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões e pertinentes apontamentos.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram na realização desse trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001 e do Conselho de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (CNPq)- Processo N° 140887/2017-2.

Resumo

O *modelo dos sapos* é um sistema de partículas, a tempo discreto, cujos agentes realizam passeios aleatórios simples em um grafo com probabilidade de desaparecimento $(1 - p)$ antes de cada salto. Inicialmente, cada vértice do grafo contém um número aleatório de partículas. Aquelas posicionadas na raiz do grafo encontram-se acordadas, as demais adormecidas. Cada vez que uma partícula acordada visita uma partícula adormecida, a última é acordada. Resultados de transição de fase com respeito à sobrevivência e recorrência do modelo são apresentados para (d_1, d_2) -árvores birregulares. Para o modelo com configuração inicial de uma partícula por vértice, determinamos a correta ordem de magnitude da probabilidade crítica com respeito à sobrevivência do modelo quando d_1 e d_2 tendem para infinito. Provamos um novo limitante superior para a probabilidade crítica do modelo dos sapos em d -árvores homogêneas, que melhora os resultados previamente conhecidos. Esse limitante superior foi conjecturado em Lebensztayn et al. (*J. Stat. Phys.*, 119 (1-2), 331-345, 2005). Também damos uma fórmula explícita para o limitante superior.

Palavras e frases-chaves: Modelo dos sapos, árvore birregular, transição de fase, probabilidade crítica, percolação.

Abstract

The *frog model* is a discrete time particle system whose agents perform simple random walks on a graph with probability of disappearance $(1 - p)$ before each jump. Initially, each vertex of the graph contains a random number of particles. Those positioned at the root of the graph are awake, the others are sleeping. Each time an awakened particle visits a sleeping particle, the latter particle is awakened. Phase transition results with respect to survival and recurrence of the model are presented for (d_1, d_2) -biregular trees. For the model with initial configuration of one particle per vertex, we determine the correct order of magnitude for the critical probability of survival of the model as d_1 and d_2 approaches infinity. We prove a new upper bound for the critical probability of the frog model on d -homogeneous trees, which improves the previously known results. This upper bound was conjectured in Lebensztayn et al. (*J. Stat. Phys.*, 119 (1-2), 331-345, 2005). We also give an explicit formula for the upper bound.

Keywords and phrases: Frog model, biregular tree, phase transition, critical probability, percolation.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Uma parte das árvores binária \mathbb{T}_2^+ (em verde) e birregular $\mathbb{T}_{2,4}$, os vértices em \mathbb{V}_1 e \mathbb{V}_2 são destacados em vermelho e azul, respectivamente. 20
- Figura 2 – Uma parte da árvore binária (à esquerda) e uma parte da subárvore aleatória após remoção dos elos fechados (à direita). 28
- Figura 3 – Funções $f_n^{(d_1, d_2)}$ com $1 \leq n \leq 5$, para alguns valores do par (d_1, d_2) fixados e a sua respectiva função limite $f^{(d_1, d_2)}$ tracejada em laranja em cada caso. . . 37

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores numéricos dos limitantes para a probabilidade crítica $p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2})$. . . 26

Lista de símbolos

\mathbb{Z}^d Rede hipercúbica d -dimensional.

\mathbb{T}_d d -árvore homogênea.

\mathbb{T}_d^+ Árvore d -ária.

\mathbb{T}_{d_1, d_2} (d_1, d_2) -árvore birregular.

$\lambda(M)$ Maior autovalor da matriz M .

\mathbb{N} Conjunto dos inteiros positivos.

\mathbb{N}_0 Conjunto dos inteiros não negativos.

\mathbb{R}^d Espaço euclidiano d -dimensional.

Sumário

Introdução	14
1 Modelo dos sapos em árvores birregulares	19
Transição de fase para o modelo dos sapos	19
1.1 Preliminares	19
1.2 Existência da transição de fase	23
1.2.1 Resultados principais	23
1.3 Extinção do processo: Prova do limitante inferior	26
1.4 Sobrevivência do processo: Prova do limitante superior	27
1.4.1 Modelo dos sapos acoplado a um processo de percolação	27
1.5 Árvores de Galton-Watson imersas no modelo dos sapos	31
1.5.1 Prova do Teorema 1.2.3 e Corolário 1.2.1	36
1.6 Modelo dos sapos com configuração inicial aleatória	38
1.6.1 Processos de ramificação dominados por um modelo de percolação	39
1.6.2 Modelo dos sapos com densidade inicial q	41
2 Recorrência e transiência para o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2}	45
Recorrência e transiência para $MS(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta)$	45
2.1 Resultados principais	46
2.2 Transiência	46
2.3 Recorrência	48
3 Modelo dos sapos em árvores homogêneas	51
Um novo limitante superior para $p_c(\mathbb{T}_d)$	51
3.1 Resultados principais	52
3.2 Prova do Teorema 3.1.1	52
3.2.1 Construção formal de $\{X_{\ell, n}^{(d)}\}_{\ell \geq 0}$	54
3.2.2 Prova do Teorema 3.1.1	58

<i>Referências</i>	60
<i>APÊNDICE A Convergência, Teorema de Taylor, e Fórmula explícita para $\bar{p}(d)$</i> . . .	62
A.1 Ordens de convergência	62
A.2 Teorema de Taylor	62
A.3 Solução de Descartes para $Q^{(d)}(p) = 0$	64

Introdução

Transição de fase é um dos assuntos centrais da Mecânica Estatística e da Teoria de Probabilidade mais geralmente. O fenômeno de transição de fase pode ser explicado por meio do seguinte exemplo simples de dinâmica populacional. Considere um sistema, a tempo discreto, formado por um grande número de partículas e que evolui estocasticamente como segue. Inicialmente no sistema temos uma única partícula, no instante seguinte ela gera $N \geq 1$ partículas idênticas com probabilidade θ ou gera 0 partículas com probabilidade $1 - \theta$. A cada instante de tempo que houver pelo menos uma partícula viva, cada uma gera independentemente N ou 0 partículas de acordo a mesma regra. A fim de simplificar o modelo assumimos que cada partícula morre após cada instante de tempo. O processo continua até o infinito ou até não haver partícula viva no sistema. Uma pergunta natural é a seguinte: Existe um valor crítico θ_c tal que ao variar θ continuamente através de θ_c o sistema muda de ter nenhuma partícula viva com probabilidade 1 a ter pelo menos uma partícula viva para todo instante de tempo com probabilidade positiva? A resposta a essa questão é afirmativa, e um cálculo elementar leva a que $\theta_c = 1/N$.

Outro exemplo de transição de fase foi realizado em 1895 por Pierre Curie. Ele mostrou que um material ferromagnético perde sua magnetização, quando esquentado acima de uma temperatura crítica, chamada de *temperatura de Curie*. Neste caso, dizemos que o sistema passa da fase paramagnética para a fase ferromagnética. A temperatura crítica depende de cada material particular, por exemplo, o ferro perde a sua magnetização natural a 770 °C, e o cobalto a 1112 °C.

O fenômeno de transição de fase não se restringe somente a sistemas biológicos ou físicos, como nos exemplos anteriores. A fim de entender as propriedades típicas de grafos, em 1960 Erdős e Rényi estudaram o *grafo aleatório* com conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$, denotado por $G_{n,\theta}$, em que cada par de vértices é conectado por um elo com probabilidade θ . A densidade θ de elos pode variar com n , por exemplo, $\theta = \lambda/n$ com $\lambda > 0$, e comumente é considerada a estrutura

de $G_{n,\theta}$ conforme n cresce para o infinito. O seguinte comportamento é observado: quando $\lambda < 1$ o maior componente de $G_{n,\theta}$ é da ordem $\log n$ e quando $\lambda > 1$ existe um componente cujo tamanho é da ordem n , isto é, observamos comportamentos diferentes em as duas fases delimitadas por $\lambda_c = 1$.

Em resumo, uma transição de fase ocorre se uma propriedade macroscópica do sistema muda abruptamente conforme um parâmetro relevante (ex. temperatura, densidade) varia continuamente através de um valor crítico. Em geral, determinar o valor crítico com exatidão é uma tarefa muito difícil e somente em alguns casos particulares tem sido conseguido.

Nesta tese lidamos com o problema da transição de fase para um sistema de partículas, cujos agentes realizam passeios aleatórios simples em um grafo conectado e com raiz, conhecido como o *modelo dos sapos*, que pode ser descrito informalmente como segue. Começamos o processo com uma certa distribuição de partículas em cada vértice do grafo. Inicialmente, aquelas partículas posicionadas na raiz encontram-se ativas (acordadas) e as demais inativas (adormecidas). Partículas ativas realizam passeios aleatórios simples a tempo discreto no grafo ativando qualquer partícula inativa que elas encontram. Uma vez ativadas, as trajetórias de partículas diferentes são independentes. Usualmente as partículas são referidas como *sapos*, continuamos com a tradição aqui.

O processo também pode ser visto como um membro da família dos modelos $A + B \longrightarrow 2A$, frequentemente usado como um modelo de combustão estocástica, em tais modelos existem partículas tipo A e B ocupando os vértices (ou sítios) de um grafo \mathbb{G} , por exemplo \mathbb{Z}^d . Partículas tipo A podem ser interpretadas como “pacotes de energia” que junto com as partículas tipo B produzem mais energia, de acordo à reação $A + B \longrightarrow 2A$. Quando uma partícula tipo A colide com uma partícula tipo B , a última se transforma em uma partícula tipo A . No modelo dos sapos, partículas ativas correspondem a partículas tipo A e partículas inativas a partículas tipo B . Usualmente, nesta interpretação partículas se movem como passeios aleatórios a tempo contínuo.

Destacamos duas versões do modelo, com *morte* e *sem morte*, no primeiro caso partículas ativas realizam passeios aleatórios simples com probabilidade de desaparecimento $(1 - p)$ antes de cada salto, em que $p \in [0, 1]$ é um parâmetro fixado. O modelo sem morte (i.e., $p = 1$) é uma versão a tempo discreto de um modelo proposto por Rick Durrett em 1996, que sugeriu o nome *frog model*. A versão com morte foi formulada por Itai Benjamini em 2000. Habitualmente, o modelo é motivado como um processo para a propagação de uma informação ou infecção num grafo. Pensando que cada partícula ativa carrega uma informação ou infecção que compartilha com todas as partículas inativas que ela encontra em seu caminho.

Focaremos nosso estudo do modelo dos sapos à versão com morte no caso em que o grafo onde as partículas se movimentam é uma árvore não homogênea. Existem várias motivações para estudar modelos probabilísticos em árvores ao invés de grafos mais gerais, por exemplo, é bem sabido que em Mecânica Estatística muitos dos resultados não dependem da estrutura particular do grafo. Além disso, em muitos casos eles capturam o comportamento de processos em redes hipercúbicas de altas dimensões, como ocorre para o modelo de percolação de Bernoulli em árvores binárias (veja-se [Grimmett \(1999\)](#) para mais detalhes). O livro de [Lyons e Peres \(2017\)](#) constitui uma excelente referência para o estudo de diferentes processos aleatórios em grafos infinitos, com especial ênfase em árvores.

Vale a pena ressaltar que existem dois tipos de comportamentos críticos fundamentais para o modelo com respeito ao parâmetro p : um relativo à sobrevivência (existência de partículas ativas em todo instante de tempo) e outro com relação à recorrência (infinitude de visitas de partículas ativas à raiz). Aqui estudamos ambos os casos.

Algumas referências sobre o modelo incluem o trabalho seminal de [Telcs e Wormald \(1999\)](#), onde o modelo é chamado “egg model”. Nesse artigo partículas se movimentam em \mathbb{Z}^d com tempo de vida indefinido, e os autores provaram que para todo d o modelo é recorrente. A mesma questão foi abordada por [Popov \(2001\)](#), começando com configuração inicial de partículas inativas em cada x diferente de $\mathbf{0}$, a origem de \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$, distribuída de acordo com $p(x) \sim \text{Bernoulli}(\alpha/||x||^2)$, em que α é uma constante positiva grande, identificando a taxa crítica

de decaimento de $p(x)$ que separa as fases entre transiência e recorrência. Em [Alves, Machado, e Popov \(2002b\)](#) foi mostrado que o conjunto de posições originais de todas as partículas ativas cresce linearmente e que quando reescalado pelo tempo decorrido converge a um conjunto compacto, convexo e não vazio. O mesmo resultado é estendido em [Alves, Machado, Popov, e Ravishankar \(2001\)](#) para o caso de configuração inicial aleatória. Em [Ramírez e Sidoravicius \(2004\)](#) um resultado similar foi obtido quando as partículas realizam passeios aleatórios a tempo contínuo. Esse tipo de resultado é conhecido com o nome do Teorema da Forma.

Em contraposição ao comportamento do modelo em \mathbb{Z}^d que é recorrente para todo d , o caso é diferente em árvores d -árias. Conforme mostrado por [Hoffman, Johnson, e Junge \(2017\)](#), o modelo é recorrente na árvore binária e transiente para $d \geq 5$, as dimensões $d = 3, 4$ ainda são matéria de investigação. Simulações computacionais sugerem que o modelo é recorrente para $d = 3$ e transiente para $d = 4$. Em [Hoffman, Johnson, e Junge \(2016\)](#), também em árvores d -árias, começando com configuração inicial de partículas inativas em todo vértice diferente da raiz, regulada por uma variável aleatória Poisson(μ), os autores provam que o modelo exibe uma transição de fase entre transiência e recorrência conforme μ varia, além disso estabeleceram limitantes para densidade crítica $\mu_c(d)$, que separa as fases de transiência e recorrência quase certamente. Usando uma técnica semelhante aquela empregada por [Hoffman et al. \(2017\)](#), [Rosenberg \(2018\)](#) provou que o modelo é recorrente na árvore alternante 3,2, a árvore em que as gerações de vértices alternam entre dois e três filhos.

Para o modelo com morte, a existência de transição de fase conforme p varia foi estudada pela primeira vez por [Alves, Machado, e Popov \(2002a\)](#), particularmente em redes hipercúbicas d -dimensionais e d -árvores homogêneas. Como detalharemos depois, a ocorrência de transição de fase significa que existe um valor de p não trivial separando as fases de extinção quase certa e sobrevivência com probabilidade positiva do processo. Além disso, a dicotomia transiência/recorrência do modelo também foi abordada. Em [Fontes, Machado, e Sarkar \(2004\)](#) os autores estudaram o problema da monotonicidade da probabilidade crítica como função do grafo, provando que essa propriedade não é válida em geral. Em [Lebensztayn, Machado,](#)

e Popov (2005), quando o modelo evolui na árvore homogênea, os autores estabeleceram o primeiro limitante superior para a probabilidade crítica no caso de configuração inicial aleatória e como consequência melhoraram o conhecido na época no caso de configuração inicial de uma partícula por vértice, provado em Fontes et al. (2004). Recentemente Gallo e Rodriguez (2018) apresentaram melhoras adicionais a esses limitantes superiores usando Teoria de Renovação.

A tese é organizada como segue, no Capítulo 1, apresentamos o modelo dos sapos com configuração inicial de partículas por vértice regulada por uma variável aleatória inteira e não negativa η e parâmetro de sobrevivência p em um grafo conectado, infinito, e localmente finito com especial ênfase em (d_1, d_2) -árvores birregulares e provamos o resultado central da tese, que estabelece a *transição de fase* para o modelo em estudo com respeito à sobrevivência, o resultado é provado determinando limitantes explícitos para a *probabilidade crítica* $p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta)$. Esses limitantes generalizam alguns conhecidos na literatura no caso em que o modelo é definido em d -árvores homogêneas. A partir dos resultados obtidos, derivamos a correta ordem de magnitude da probabilidade crítica quando $d_1, d_2 \rightarrow \infty$. No Capítulo 2 provamos que sob adequadas condições nos momentos da distribuição inicial de partículas por vértice temos que o modelo é transiente para qualquer $p < 1$. Em particular, provamos que o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2} com configuração inicial de uma partícula por vértice é transiente para qualquer $p < 1$. Também mostramos que se a cauda da distribuição inicial de partículas for suficientemente pesada então o modelo é recorrente para p suficientemente próximo, porém diferente, de 1. No Capítulo 3 provamos um novo limitante superior para $p_c(\mathbb{T}_d)$ que melhora os resultados previamente conhecidos. Esse limitante superior foi conjecturado em Lebensztayn et al. (2005). Concluímos a tese com um apêndice sobre ordens de convergência e o Teorema de Taylor (A.1, A.2). Seção A.3 é devotada à demonstração de uma fórmula explícita para o limitante superior provado no Capítulo 3. Ressaltamos que em geral, mantivemos como possível as notações em Lebensztayn e Utria (2018), Lebensztayn e Utria (2019).

1 Transição de fase para o modelo dos sapos

1.1 Preliminares

Nesta seção vamos estabelecer algumas preliminares para o modelo em estudo.

Grafos

Começamos com algumas definições e notações da Teoria de Grafos. Seja $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo com conjunto de vértices \mathbb{V} e conjunto de elos \mathbb{E} . Um vértice $\emptyset \in \mathbb{V}$ é fixado e chamado de *raiz* de \mathbb{G} . Denotamos um elo não-orientado com extremos x e y , por xy . Dizemos que x e y são *vizinhos* se pertencem a um elo comum xy , o que denotamos por $x \sim y$. O *grau* de x , denotado por $\deg(x)$, é o número de vizinhos de x . Um *caminho* de comprimento n conectando x e y , é uma sequência $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$ de vértices distintos na qual $x_i \sim x_{i+1}$ para cada $i = 0, \dots, n-1$. A *distância* entre os vértices x e y , denotada por $\text{dist}(x, y)$ é o comprimento mínimo de um caminho conectando os dois; o *nível* de x , denotado por $|x|$, é $\text{dist}(\emptyset, x)$. Dizemos que um grafo é *conectado* se para cada par de vértices x e y , existe um caminho conectando os dois. \mathbb{G} é *infinito* se seu conjunto de vértices e elos são infinitos enumeráveis e *localmente finito* se $\deg(x) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{V}$. Por uma *árvore*, entendemos um grafo conectado, desprovido de circuitos, em que um circuito é uma sequência de vértices x_0, \dots, x_n , $n \geq 3$, sem repetições tal que $x_0 = x_n$. Um grafo é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos \mathbb{V}_1 e \mathbb{V}_2 de modo que todo elo conecta um vértice de \mathbb{V}_1 com um vértice de \mathbb{V}_2 . Para $d_1 \geq 1$ e $d_2 \geq 1$ inteiros, denotamos por \mathbb{T}_{d_1, d_2} a (d_1, d_2) -árvore birregular, que é a árvore bipartida em que o grau de um vértice é $(d_1 + 1)$ ou $(d_2 + 1)$, de acordo ao nível do vértice ser par ou ímpar. A partir de agora, um vértice $x \in \mathbb{V}_i$ será chamado de vértice tipo i .

Comumente os níveis de uma árvore são chamados de *gerações*; e a raiz de *ancestral*. Para um par de vértices x e y dizemos que x é o *pai* de y (ou y é *filho* de x) se e somente se x é o único vértice vizinho de y no caminho conectando o ancestral com y , claramente vale a

propriedade de que $|y| = |x| + 1$. Neste caso, imaginamos a árvore crescendo a partir do ancestral \emptyset . Algumas árvores de interesse são, por exemplo, a d -árvore homogênea denotada por \mathbb{T}_d , em que todos seus vértices têm grau $(d + 1) \geq 2$ e a árvore d -ária denotada por \mathbb{T}_d^+ , em que a raiz tem grau d e os demais vértices têm grau $(d + 1) \geq 2$. Observamos que, \mathbb{T}_1^+ é isomorfa a \mathbb{N}_0 e \mathbb{T}_1 é isomorfa a \mathbb{Z} . Note que a classe das (d_1, d_2) -árvores birregulares contém as d -árvores homogêneas, com a escolha de $d_1 = d_2 = d$. Veja-se a Figura 1 para uma representação de \mathbb{T}_2^+ e $\mathbb{T}_{2,4}$.

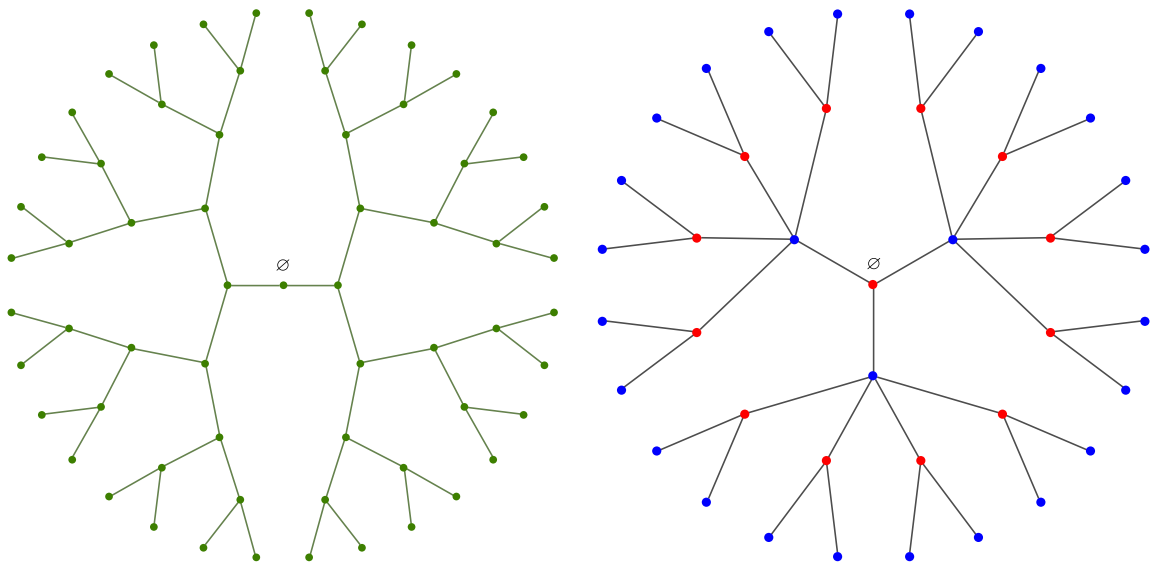


Figura 1 – Uma parte das árvores binária \mathbb{T}_2^+ (em verde) e birregular $\mathbb{T}_{2,4}$, os vértices em \mathbb{V}_1 e \mathbb{V}_2 são destacados em vermelho e azul, respectivamente.

Passeios aleatórios

Por um passeio aleatório simples e simétrico em \mathbb{G} , entendemos uma cadeia de Markov, a tempo discreto, com espaço de estados \mathbb{V} e probabilidades de transição adaptadas à geometria de \mathbb{G} , isto é, dadas por $p : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow [0, 1]$, em que

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{se } x \sim y \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Modelo dos sapos

Definimos formalmente o modelo em estudo em um grafo $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ conectado, infinito e localmente finito. Denotamos por \mathbb{P} e \mathbb{E} a medida de probabilidade e a esperança associada, respectivamente. Escrevemos $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ para o conjunto dos inteiros positivos e $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ para o conjunto dos inteiros não negativos. Seja $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ uma distribuição de probabilidade em \mathbb{N}_0 (i.e., $\rho_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ e $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \rho_k = 1$), definimos $\varphi(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} s^k \rho_k$, $s \in [0, 1]$ a função geradora de $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$. Além disso, seja η uma variável aleatória com distribuição $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$; e considere $\{\eta(x) : x \in \mathbb{V}\}$, $\{(S_n^x(k))_{n \in \mathbb{N}_0} : k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{V}\}$, $\{\Xi_p^x(k) : k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{V}\}$ conjuntos aleatórios e independentes, definidos a seguir. Para cada $x \in \mathbb{V}$, $\eta(x)$ tem a mesma distribuição de η e fornece o número inicial de partículas localizadas no vértice x , isto é, localizamos k partículas em x com probabilidade ρ_k . Se $\eta(x) \in \mathbb{N}$, então, para cada $1 \leq k \leq \eta(x)$, $(S_n^x(k))_{n \in \mathbb{N}_0}$ é um passeio aleatório simples e simétrico a tempo discreto em \mathbb{G} iniciando em x e $\Xi_p^x(k)$ é uma variável aleatória tal que $\mathbb{P}[\Xi_p^x(k) - 1 = j] = (1 - p)p^j$, $j \in \mathbb{N}_0$, em que $p \in [0, 1]$ é um parâmetro fixado, ou seja, $(\Xi_p^x(k) - 1)$ tem distribuição geométrica com média $(1 - p)^{-1}p$.

Desse modo, temos definidos as trajetórias e tempos de vida aleatórios de cada uma das $\eta(x)$ partículas posicionadas inicialmente em x , as quais começam a passear no instante em que são visitadas pela primeira vez (caso isto venha a ocorrer). Uma vez ativada, a k -ésima partícula posicionada em x segue o passeio aleatório $(S_n^x(k))_{n \in \mathbb{N}_0}$ e morre ao alcançar $(\Xi_p^x(k) - 1)$ saltos (devido que, em cada instante de tempo um sapo ativo primeiro decide se sobrevive ou não, e então, no caso de sobrevivência salta). Observe também que as trajetórias de partículas ativas são independentes: cada partícula ativa se move independentemente de qualquer coisa. O modelo recém-definido é chamado de *modelo dos sapos em \mathbb{G} , com parâmetro de sobrevivência p e configuração inicial dada por cópias independentes de η* em cada vértice de \mathbb{G} , e vamos denotá-lo por $\text{MS}(\mathbb{G}, p, \eta)$. Se $\eta \equiv 1$, isto é, o modelo com configuração inicial de uma partícula por vértice, escrevemos simplesmente $\text{MS}(\mathbb{G}, p)$.

A fim de introduzir a criticalidade do modelo com respeito à sobrevivência, conside-

remos a seguinte definição.

Definição 1.1.1. Uma realização particular do modelo dos sapos *sobrevive* se, para todo instante de tempo, existe pelo menos uma partícula ativa. Caso contrário, dizemos que a realização se *extingue*.

Um argumento de acoplamento mostra que $\mathbb{P}[\text{MS}(\mathbb{G}, p, \eta) \text{ sobrevive}]$ é não-decrescente em p , então definimos a *probabilidade crítica* como

$$p_c(\mathbb{G}, \eta) := \inf\{p : \mathbb{P}[\text{MS}(\mathbb{G}, p, \eta) \text{ sobrevive}] > 0\}.$$

Como de costume dizemos que o $\text{MS}(\mathbb{G}, p, \eta)$ exibe transição de fase se $p_c(\mathbb{G}, \eta) \in (0, 1)$. No caso de configuração inicial de uma partícula por vértice, omitimos a dependência em η , e escrevemos $p_c(\mathbb{G})$.

Recordamos que a existência da transição fase conforme p varia foi estudada pela primeira vez em [Alves et al. \(2002a\)](#), especialmente em $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$ e $\mathbb{G} = \mathbb{T}_d$. Conforme provado por [Alves et al. \(2002a, Theorem 1.1\)](#), se $d = 1$, então sob a condição $\mathbb{E} \log(\eta \vee 1) < \infty$, temos que o modelo dos sapos se extingue quase certamente para qualquer $p < 1$, isto é $p_c(\mathbb{Z}, \eta) = 1$. A imagem é bastante diferente para dimensões superiores. De fato, [Alves et al. \(2002a, Theorems 1.2 e 1.5\)](#) demonstraram que o modelo dos sapos em \mathbb{T}_d exibe transição de fase para qualquer $d \geq 2$, desde que $\rho_0 < 1$ e $\mathbb{E} \eta^\delta < \infty$ para algum $\delta > 0$. Aqui provamos um resultado similar quando o processo evolui em $\mathbb{G} = \mathbb{T}_{d_1, d_2}$.

Com respeito à localização da probabilidade crítica, para o modelo em \mathbb{T}_d , alguns limitantes superiores explícitos para $p_c(\mathbb{T}_d)$ foram estabelecidos. [Fontes et al. \(2004\)](#) apresentaram o primeiro limitante superior conhecido, a saber, $(d+1)(2d-2)^{-1}$ para $d \geq 4$. [Lebensztayn et al. \(2005\)](#) provaram que a probabilidade crítica é no máximo $(d+1)(2d)^{-1}$ para $d \geq 2$, esse resultado é uma melhora daquele provado por [Fontes et al. \(2004\)](#). Em [Gallo e Rodriguez \(2018\)](#), melhoras adicionais foram obtidas através da Teoria da Renovação, provando o seguinte limitante superior, $(d+1)[(7d-1) - \sqrt{\Omega_d}][d(7d-1)^2 - 7d + 2 - d(7d-1)\sqrt{\Omega_d}]^{-1}$ para $d \geq 3$, em que $\Omega_d = (7d-1)^2 - 14$. No Capítulo 3 da tese provamos um novo limitante superior para

$p_c(\mathbb{T}_d)$ que melhora os resultados previamente conhecidos. Esse limitante foi conjecturado em [Lebensztayn et al. \(2005\)](#). Além disso, damos uma fórmula explícita para o limitante superior.

Ao que se saiba somente [Rosenberg \(2018\)](#) considerou outro tipo de árvore, provando que o modelo é recorrente na árvore alternante 3,2; em que as gerações de vértices alternam entre dois e três filhos. Vale a pena ressaltar que um passo intermediário para provar a transiência em \mathbb{T}_5^+ foi considerado por [Hoffman et al. \(2017, Proposition 19\)](#), o qual consistiu na prova da transiência do modelo na árvore alternante 5,6. Em ambos os casos anteriores foi considerada a versão sem morte.

A partir deste ponto, nos dedicamos ao estudo do modelo com morte em \mathbb{T}_{d_1, d_2} . Neste capítulo, estamos interessados em provar que o $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta)$ exibe transição de fase, para todo $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$. Provamos nosso resultado estabelecendo limitantes explícitos para $p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta)$ (em particular para \mathbb{T}_d).

1.2 Existência da transição de fase

Nesta seção abordamos o problema de transição de fase para o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2} , isto é, procuramos por condições que garantam que, para p suficientemente próximo de 1 o sistema sobrevive com probabilidade positiva e para p suficientemente próximo de 0 o processo se extingue quase certamente.

1.2.1 Resultados principais

Nosso resultado principal é uma transição de fase conforme p varia.

Teorema 1.2.1 (transição de fase). (i) *Suponha que $\mathbb{E}\eta < \infty$. Se $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$ e p suficientemente próximo de 0, então $\mathbb{P}[\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta) \text{ sobrevive}] = 0$.*

(ii) *Suponha que $\rho_0 < 1$. Se $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$ e p suficientemente próximo de 1, então $\mathbb{P}[\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta) \text{ sobrevive}] > 0$.*

Observação 1.2.1. Pela monotonicidade em p de $\mathbb{P}[\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta) \text{ sobrevive}]$, o Teorema 1.2.1 diz que, se $\mathbb{E}\eta < \infty$ e $\rho_0 < 1$, então o $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta)$ exibe transição de fase.

Como dito antes, provamos o Teorema 1.2.1 estabelecendo limitantes não triviais para o parâmetro crítico. Por simplicidade e clareza trataremos primeiro o caso em que $\eta \equiv 1$ e deixamos o caso de configuração inicial aleatória (não degenerada em 1) para a seção 1.6.

Primeiro, damos uma condição suficiente para a extinção quase certa do processo.

Teorema 1.2.2. *Se $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$, então*

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}) \geq \left[\frac{(d_1 + 1)(d_2 + 1)}{(2d_1 + 1)(2d_2 + 1)} \right]^{1/2}.$$

Para apresentar o limitante superior para $p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2})$, precisamos a seguinte definição.

Definição 1.2.1. Sejam $\kappa = (d_1 + 1)(d_2 + 1)$, $\Delta = \kappa^2 - 2\kappa(d_1 + d_2)p^2 + (d_2 - d_1)^2p^4$. Também definimos as funções $\alpha, \beta, f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dadas por

$$\alpha(p) = \alpha^{(d_1, d_2)}(p) = \begin{cases} \frac{\kappa + p^2(d_2 - d_1) - \sqrt{\Delta}}{2d_2(d_1 + 1)p} & \text{se } 0 < p \leq 1, \\ 0 & \text{se } p = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\beta(p) = \beta^{(d_1, d_2)}(p) = \begin{cases} \frac{\kappa + p^2(d_1 - d_2) - \sqrt{\Delta}}{2d_1(d_2 + 1)p} & \text{se } 0 < p \leq 1, \\ 0 & \text{se } p = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$f^{(d_1, d_2)}(p) = \alpha(p)\beta(p)(2 - \alpha(p))(2 - \beta(p)) - \frac{1}{d_1 d_2}. \quad (1.3)$$

Observação 1.2.2. A fim de evitar uma notação complicada, algumas vezes omitimos a dependência em p ou d_1 e d_2 das funções dadas na Definição 1.2.1.

Teorema 1.2.3. *Se $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$, então*

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}) \leq \tilde{p}(d_1, d_2),$$

em que $\tilde{p}(d_1, d_2)$ é a única raiz em $(0, 1)$ da função $f^{(d_1, d_2)}$.

Corolário 1.2.1. *Se $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$, então*

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{(d_1 + 1)(d_2 + 1)}{d_1 d_2} \right]^{1/2}.$$

O seguinte resultado concerne ao comportamento assintótico da probabilidade crítica. Pelo Teorema de Taylor (A.2.1), os limitantes inferior e superior dados em Teorema 1.2.2 e Corolário 1.2.1 são iguais, respectivamente,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) + O \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \right) \text{ e } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) + O \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \right),$$

conforme $d_1, d_2 \rightarrow \infty$. Como consequência, encontramos a correta ordem de magnitude da probabilidade crítica.

Corolário 1.2.2. *Para o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2} , começando com configuração inicial de uma partícula por vértice, temos*

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}) = \frac{1}{2} + \Theta \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \quad \text{conforme } d_1, d_2 \rightarrow \infty.$$

Corolário 1.2.3. *Se $d \geq 2$, então*

$$\frac{d+1}{2d+1} \leq p_c(\mathbb{T}_d) \leq \frac{d+1}{2d}.$$

Observação 1.2.3. O limitante inferior pode ser obtido como consequência do resultado provado por Alves et al. (2002a, Proposition 1.2). Já o limitante superior foi obtido por Lebensztayn et al. (2005, Theorem 4.1).

Antes de ir mais longe, ressaltamos que um limitante inferior para $p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2})$ pode ser obtido, usando o seguinte resultado provado por Alves et al. (2002a, Proposition 1.2).

Proposição 1.2.1. *Suponha que \mathbb{G} é um grafo de grau máximo $(D+1)$ e $\mathbb{E}\eta < \infty$. Então*

$$p_c(\mathbb{G}, \eta) \geq \frac{D+1}{D(\mathbb{E}\eta + 1) + 1}.$$

Note que, para $\mathbb{G} = \mathbb{T}_{d_1, d_2}$ com $d_1 = d_2$, o limitante inferior dado no Teorema 1.2.2 é igual ao fornecido pela Proposição 1.2.1. No entanto, para $d_1 \neq d_2$, o limitante inferior

estabelecido no Teorema 1.2.2 é melhor que o da Proposição 1.2.1. Para uma ilustração numérica, consideramos $\eta \equiv 1$, e calculamos os limitantes em Teoremas 1.2.2, 1.2.3 e Proposição 1.2.1 para alguns valores do par (d_1, d_2) .

(d_1, d_2)	LI Proposição 1.2.1	LI Teorema 1.2.2	LS Teorema 1.2.3
(1,2)	0.6000	0.6325	0.8588
(1,3)	0.5714	0.6172	0.8039
(1,4)	0.5556	0.6086	0.7749
(2,2)	0.6000	0.6000	0.7500
(2,3)	0.5714	0.5855	0.7063
(2,4)	0.5556	0.5774	0.6828
(3,100)	0.5025	0.5359	0.5771
(3,1000)	0.5002	0.5347	0.5743
(4,10000)	0.5000	0.5271	0.5572

Tabela 1 – Valores numéricos dos limitantes para a probabilidade crítica $p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2})$.

1.3 Extinção do processo: Prova do limitante inferior

A estratégia para a prova de extinção é comparar o modelo dos sapos com um processo de ramificação multitypo, de modo, que se esse processo se extingue o mesmo acontece com o $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p)$.

Prova do Teorema 1.2.2. Primeiro note que uma partícula em \mathbb{V}_1 tem diferente probabilidade de saltar para frente (escolher um vértice filho) ou para trás (escolher o vértice pai) que uma partícula em \mathbb{V}_2 . Pela geometria de \mathbb{T}_{d_1, d_2} cada partícula durante seu tempo de vida alterna entre cada uma das classes dos vértices. Considere o seguinte processo de ramificação de Galton-Watson multitypo, cuja distribuição de reprodução é como segue. Para $i = 1, 2$, e $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, seja $\mathbf{p}^{(i)}(k_1, k_2)$ a probabilidade de uma partícula tipo i produzir k_1 partículas tipo 1, e k_2 partículas tipo 2, e defina

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(1)}(0, 0) &= 1 - p, & \mathbf{p}^{(1)}(0, 1) &= \frac{p}{d_1 + 1}, & \mathbf{p}^{(1)}(0, 2) &= \frac{pd_1}{d_1 + 1}, \\ \mathbf{p}^{(2)}(0, 0) &= 1 - p, & \mathbf{p}^{(2)}(1, 0) &= \frac{p}{d_2 + 1}, & \mathbf{p}^{(2)}(2, 0) &= \frac{pd_2}{d_2 + 1}. \end{aligned}$$

Além disso, seja $M := (m_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ a matriz de primeiros momentos, i.e., m_{ij} é o número médio de indivíduos tipo j produzidos por uma partícula tipo i em uma geração. Então,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{p}{d_1+1}(1+2d_1) \\ \frac{p}{d_2+1}(1+2d_2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Observando que dentre os vértices vizinhos a uma partícula ativa no instante de tempo $n \in \mathbb{N}$, existe pelo menos um, tal que o salto para ele não implica a ativação de novas partículas, obtemos que o modelo dos sapos é dominado pelo processo de ramificação multi-tipo recém-definido. Já que o conjunto de tipos é finito, é bem sabido, por exemplo, veja-se Cap. 5 de [Athreya e Ney \(1972\)](#), que o processo de ramificação multitypo de Galton-Watson se extingue quase certamente se e somente se o maior autovalor da matrix M , $\lambda(M)$, é menor que 1. Um cálculo simples mostra que se

$$p < \left[\frac{(d_1+1)(d_2+1)}{(2d_1+1)(2d_2+1)} \right]^{1/2},$$

então $\lambda(M)$ é menor que 1, portanto o processo se extingue quase certamente, o que finaliza a prova. \square

1.4 Sobrevivência do processo: Prova do limitante superior

Nesta seção e na seção 1.5, consideramos o caso $\eta \equiv 1$ (Teorema 1.2.3 e Corolário 1.2.1) e nos dedicamos ao caso geral na seção 1.6. Para isso, descrevemos o $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p)$ como um modelo de percolação que domina processos de ramificação de Galton-Watson apropriadamente definidos, de modo que se esses processos sobrevivem, então ocorre percolação. A continuação, levamos esse plano com mais detalhe.

1.4.1 Modelo dos sapos acoplado a um processo de percolação

No modelo de percolação de elos sobre um grafo $\bar{\mathbb{G}} = (\bar{\mathbb{V}}, \bar{\mathbb{E}})$, cada elo é atribuído aleatoriamente um de dois estados: aberto (1) ou fechado (0) de acordo com certa medida de probabilidade no espaço produto $\{0, 1\}^{\bar{\mathbb{E}}}$. O principal interesse é o estudo das propriedades de conectividade do subgrafo aleatório de $\bar{\mathbb{G}}$ obtido após a remoção de elos fechados (veja-se Figura

2 para uma realização típica desse processo na árvore binária). Para mais detalhes no assunto referimos ao leitor aos livros de [Grimmett \(1999\)](#), [Grimmett \(2018\)](#).

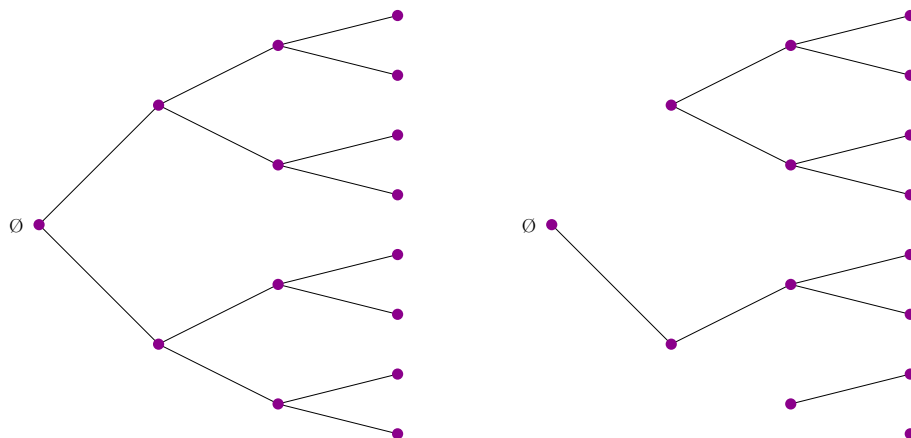


Figura 2 – Uma parte da árvore binária (à esquerda) e uma parte da subárvore aleatória após remoção dos elos fechados (à direita).

Nesta seção vamos descrever o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2} como um modelo particular de percolação de elos. Com efeito, considere a seguinte definição.

Definição 1.4.1. (i) Para $x \in \mathbb{V}$, seja

$$\mathcal{R}_x := \{S_n^x : 0 \leq n < \Xi_p^x\} \subset \mathbb{V},$$

o conjunto *virtual* de vértices visitados pela partícula posicionada originalmente em x durante seu tempo de vida (caso seja ativada) e

(ii) Para $x, y \in \mathbb{V}$ distintos, definimos

$$[x \rightarrow y] := [y \in \mathcal{R}_x] \quad \text{e} \quad [x \nrightarrow y] := [y \notin \mathcal{R}_x].$$

Usamos a palavra virtual porque não sabemos se a partícula em x foi ativada ou não. Assim para $x, y \in \mathbb{V}$, $[x \rightarrow y]$ é o evento de que a partícula localizada inicialmente em x visite (ou alcance) y virtualmente.

Agora, defina $\vec{\mathbb{T}}_{d_1, d_2} = (\mathbb{V}, \vec{\mathbb{E}})$ como o grafo orientado com conjunto de vértices da árvore birregular e conjunto de elos $\vec{\mathbb{E}} := \{\vec{xy} : (x, y) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}, x \neq y\}$, isto é, para cada par de vértices distintos x e y existe um elo orientado de x a y , denotado por \vec{xy} . Tendo em vista a

Definição 1.4.1, declaramos um elo \vec{xy} em um de dois estados: aberto ou fechado, conforme $[x \rightarrow y]$ ou $[x \nrightarrow y]$ ocorra. Observe que a probabilidade de um elo orientado estar aberto ou fechado depende de sua orientação, elos emanando de vértices tipo 1 com extremo final em um vértice tipo 2 tem diferente probabilidade de estarem abertos (resp. fechados) daqueles emanando de vértices tipo 2 com extremo final em um vértice tipo 1, essa última característica dá a *anisotropia* ao modelo. Com efeito, seja $\alpha^{(d_1, d_2)}(p)$ [$\beta^{(d_1, d_2)}(p)$] a probabilidade de que uma partícula começando em $x \in \mathbb{V}_1$ [$x \in \mathbb{V}_2$] alcance um vértice vizinho $y \in \mathbb{V}_2$ [$y \in \mathbb{V}_1$] durante seu tempo de vida. Definimos desse modo um modelo de percolação orientada, dependente, anisotrópica e de longo alcance em $\vec{\mathbb{T}}_{d_1, d_2}$. Com um típico abuso da linguagem vamos chamá-lo de *modelo de percolação anisotrópica na árvore birregular* $\vec{\mathbb{T}}_{d_1, d_2}$, com parâmetros α e β , denotado por $\text{MPA}(\vec{\mathbb{T}}_{d_1, d_2}, \alpha, \beta)$. Além disso, a sobrevivência do $\text{MS}(\vec{\mathbb{T}}_{d_1, d_2}, p)$ equivale à existência de uma sequência infinita de vértices começando na raiz $x_0 = \emptyset, x_1, \dots$, tal que $x_j \rightarrow x_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, ou, na linguagem da Teoria de Percolação, que o tamanho do *aglomerado* da raiz, neste modelo, seja infinito (mais, ainda dizemos que ocorre percolação em $\text{MPA}(\vec{\mathbb{T}}_{d_1, d_2}, \alpha, \beta)$ se isto vem ocorrer).

O seguinte lema sobre probabilidades de *primeira passagem* de passeios aleatórios simples e simétricos na árvore birregular estabelece uma fórmula para $\alpha^{(d_1, d_2)}(p)$ e $\beta^{(d_1, d_2)}(p)$.

Lema 1.4.1. *Sejam $x \sim y$ um par de vértices vizinhos, e suponha $(x, y) \in \mathbb{V}_i \times \mathbb{V}_j$, $i, j = 1, 2$.*

Então,

$$\mathbb{P}[y \in \mathcal{R}_x] = \begin{cases} \alpha^{(d_1, d_2)}(p) & \text{se } i = 1, j = 2, \\ \beta^{(d_1, d_2)}(p) & \text{se } i = 2, j = 1, \end{cases} \quad (1.4)$$

em que $\alpha^{(d_1, d_2)}$ e $\beta^{(d_1, d_2)}$ são dadas na Definição 1.2.1.

Prova do Lema 1.4.1. Seja $\tau_{ij} := \tau_{xy}$ o tempo de primeira passagem de $(S_n^x)_{n \in \mathbb{N}_0}$ no vértice y , i.e., $\tau_{xy} := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n^x = y\}$. Suponha primeiro que $p < 1$, é bem sabido que condicionando no número de saltos da partícula localizada inicialmente em x , temos que a probabilidade de $(S_n^x)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eventualmente (durante sua vida) visitar um vértice y coincide com a função geradora

de probabilidade de τ_{xy} , quer dizer

$$\mathbb{P}[y \in \mathcal{R}_x] = \sum_{k=1}^{\infty} p^k \mathbb{P}[\tau_{ij} = k] = \mathbb{E}[p^{\tau_{ij}}].$$

Além disso, por condicionamento no primeiro passo do passeio aleatório $(S_n^x)_{n \in \mathbb{N}_0}$, temos que, $\mathbb{E}[p^{\tau_{12}}]$ e $\mathbb{E}[p^{\tau_{21}}]$ satisfazem o seguinte sistema de equações de segundo grau

$$\begin{cases} \mathbb{E}[p^{\tau_{12}}] = \frac{1}{d_1 + 1} p + \frac{d_1}{d_1 + 1} p \mathbb{E}[p^{\tau_{12}}] \mathbb{E}[p^{\tau_{21}}] \\ \mathbb{E}[p^{\tau_{21}}] = \frac{1}{d_2 + 1} p + \frac{d_2}{d_2 + 1} p \mathbb{E}[p^{\tau_{12}}] \mathbb{E}[p^{\tau_{21}}] \end{cases} \quad (1.5)$$

Pela continuidade à direita em 0 das funções geradoras de probabilidade de τ_{12} e τ_{21} segue que $\lim_{p \rightarrow 0^+} \mathbb{E}[p^{\tau_{12}}] = \lim_{p \rightarrow 0^+} \mathbb{E}[p^{\tau_{21}}] = 0$. Logo, das quatro soluções de (1.5), descartamos aquelas ilimitadas próximas de 0. Portanto (1.4) são as únicas possíveis soluções do prévio sistema de equações (1.5), o que finaliza a prova para $p < 1$. Além disso, pela continuidade à esquerda em 1 das funções geradoras de probabilidade de τ_{12} e τ_{21} segue que quando as partículas têm tempo de vida indefinido (i.e., $p = 1$) e $(x, y) \in \mathbb{V}_i \times \mathbb{V}_j$,

$$\mathbb{P}[y \in \mathcal{R}_x] = \mathbb{P}[\tau_{ij} < \infty] = \lim_{p \rightarrow 1^-} \mathbb{E}[p^{\tau_{ij}}] = \frac{d_j + 1}{d_j(d_j + 1)}.$$

□

Observação 1.4.1. Se $d_1 \leq d_2$, então $\alpha^{(d_1, d_2)}(p) \geq \beta^{(d_1, d_2)}(p)$.

Lema 1.4.2. Para $(x, y) \in \mathbb{V}_i \times \mathbb{V}_j$, $i, j = 1, 2$, com $\text{dist}(x, y) = k \geq 1$, defina $\pi(i, j, k) := \mathbb{P}[x \rightarrow y]$, como a probabilidade de uma partícula em x visitar o vértice y à distância k . Então,

$$\pi(i, j, k) = \begin{cases} \alpha^n \beta^{n-1} & \text{se } i = 1, j = 2, k = 2n - 1, \\ \alpha^{n-1} \beta^n & \text{se } i = 2, j = 1, k = 2n - 1, \\ \alpha^n \beta^n & \text{se } i = j, k = 2n. \end{cases} \quad (1.6)$$

Prova do Lema 1.4.2. A prova é consequência do seguinte fato: se $(x, y) \in \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$ e $k = 2n - 1$, então o tempo de primeira passagem de $(S_n^x)_{n \in \mathbb{N}_0}$ no vértice y , τ_{xy} , é igual em distribuição à soma

de $2n - 1$ variáveis aleatórias independentes, tal que, n delas são cópias de τ_{12} e $n - 1$ são cópias de τ_{21} . Usando esse fato e o Lema 1.4.1, obtemos que

$$\pi(1, 2, 2n - 1) = \alpha^n \beta^{n-1}.$$

Os outros casos são análogos. □

Observação 1.4.2. Note que $\pi(i, j, k)$ é a probabilidade de um elo $\vec{xy} \in \vec{\mathbb{E}}$, com $x \in \mathbb{V}_i, y \in \mathbb{V}_j$ e $\text{dist}(x, y) = k$ estar aberto.

Na seguinte seção começamos fornecendo os elementos necessários para a prova da sobrevivência do modelo. Em suma, a ideia é dominar processos de ramificação apropriadamente definidos pela percolação acima.

1.5 Árvores de Galton-Watson imersas no modelo dos sapos

Uma árvore de Galton-Watson é uma árvore genealógica gerada aleatoriamente como segue: dada uma variável aleatória inteira e não negativa ξ , começamos com um indivíduo ancestral e ele se reproduz de acordo com ξ , i.e., a primeira geração é formada pelos ξ filhos dele. Cada um desses filhos (se houver algum) então se reproduz independentemente com a mesma lei, e assim sucessivamente para sempre ou até alguma geração ficar extinta. O processo estocástico que gera essa árvore é chamado de processo de ramificação de (Bienaymé)-Galton-Watson. Nesta seção construímos uma sequência de processos de ramificação cuja sobrevivência implica que $\text{MPA}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \alpha, \beta)$ percola. Uma abordagem semelhante é usada em [Lebensztayn et al. \(2005\)](#) para o modelo dos sapos e por [Lalley e Sellke \(1998\)](#) para o processo de contato; quando ambos os processos evoluem em \mathbb{T}_d .

Começamos com algumas definições.

Definição 1.5.1.

- (i) Definimos uma ordem parcial¹ \leq no conjunto de vértices \mathbb{V} como segue: para $x, y \in \mathbb{V}$, dizemos que $x \leq y$ se x é um vértice no caminho conectando \emptyset e y ; $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$.
- (ii) Para qualquer vértice $x \neq \emptyset$, seja $\mathbb{V}^+(x) := \{y \in \mathbb{V} : x \leq y\}$ e $\mathbb{V}^+(\emptyset) = \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}^+(\emptyset')$, em que \emptyset' é um vértice vizinho de \emptyset arbitrariamente fixado.
- (iii) Para $x \in \mathbb{V}$ e $k \in \mathbb{N}$, defina $L_k(x) = \{y \in \mathbb{V}^+(x) : \text{dist}(x, y) = k\}$.
- (iv) Para $x \in \mathbb{V}$, $y \in L_k(x)$, considere $x_0 = x < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = y$, tal que $\text{dist}(x_0, x_\ell) = \ell$, o caminho conectando x com y , para cada $\ell = 1, 2, \dots, k-1$ denotamos por $[x_0 \rightsquigarrow x_\ell]$ o evento que $[x_0 \rightarrow x_\ell, x_0 \dashrightarrow x_{\ell+1}]$.

Definição 1.5.2. Para $x \in \mathbb{V}$, $y \in L_k(x)$, considere $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$ o caminho conectando x e y . Definimos o evento $[x_0 \xrightarrow{o} x_k]$ indutivamente em k por

- (i) Se $k = 1$, então

$$[x_0 \xrightarrow{o} x_1] := [x_0 \rightarrow x_1].$$

- (ii) Se $k \geq 2$, então

$$[x_0 \xrightarrow{o} x_k] := [x_0 \rightarrow x_k] \cup \bigcup_{\ell=1}^{k-1} [x_0 \rightsquigarrow x_\ell, x_\ell \xrightarrow{o} x_k].$$

Além disso, denotamos o complementar de $[x_0 \xrightarrow{o} x_k]$ por $[x_0 \dashrightarrow x_k]$.

Ora, para $k \in 2\mathbb{N} := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, defina

$$\xi^{(k)} = \sum_{x:|x|=k} \mathbb{1}_{[\emptyset \xrightarrow{o} x]},$$

em que $\mathbb{1}$ denota a função indicadora do evento no subscrito.

Em seguida, construímos uma árvore de Galton-Watson $\mathfrak{T}^{(k)}$ com vértice ancestral \emptyset imersa no MPA($\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \alpha, \beta$), com distribuição de reprodução de acordo $\xi^{(k)}$, ou seja, cada indivíduo independentemente tem um número aleatório de filhos com a mesma distribuição de

¹ Uma ordem parcial é uma relação binária, que é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

$\xi^{(k)}$. A descrição anterior pode ser formalizada como segue, para $n \in \mathbb{N}$ fixado, definimos as gerações de $\mathfrak{T}^{(2n)}$, como segue.

(i) $\mathcal{Y}_{0,n} := \{\emptyset\}$.

(ii) Para $\ell \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Y}_{\ell,n} := \bigcup_{x \in \mathcal{Y}_{\ell-1,n}} \{y \in L_{2n}(x) : x \xrightarrow{0} y\}.$$

Além disso, seja $Y_{\ell,n} = |\mathcal{Y}_{\ell,n}|$ a cardinalidade de $\mathcal{Y}_{\ell,n}$.

Note que $Y_{1,n} \equiv \xi^{(2n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em princípio, cada árvore de Galton-Watson $\mathfrak{T}^{(k)}$ pode ter infinitas gerações ou não. O seguinte resultado, será fundamental para estabelecer uma condição suficiente para que o número de gerações de $\mathfrak{T}^{(k)}$ seja infinito com probabilidade positiva para qualquer $k \in 2\mathbb{N}$.

Lema 1.5.1. *Para todo $n \geq 1$, temos que $\{Y_{\ell,n}\}_{\ell \geq 0}$ é um processo de ramificação de Galton-Watson cuja sobrevivência implica a sobrevivência do $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1,d_2}, p)$. Além disso, o número médio de descendentes por indivíduo satisfaz $\mathbb{E}[Y_{1,n}] = (d_1 d_2)^n \phi_n^{(d_1, d_2)}(p)$, em que*

$$\phi_n^{(d_1, d_2)}(p) = [\alpha(p)\beta(p)(2 - \beta(p))]^n [2 - \alpha(p)]^{n-1}. \quad (1.7)$$

Pela definição do processo $\{Y_{\ell,n}\}_{\ell \geq 0}$ é simples notar que se este sobrevive então o tamanho do aglomerado da raiz no $\text{MPA}(\mathbb{T}_{d_1,d_2}, \alpha, \beta)$ tem tamanho infinito (consequentemente o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1,d_2} sobrevive), assim resta-nos mostrar a segunda afirmação do Lema 1.5.1 a qual decorre dos seguintes dois resultados. No primeiro provamos que a probabilidade de descendência por indivíduo em uma geração do processo de ramificação definido por $\{Y_{\ell,n}\}_{\ell \geq 0}$ cumpre certa fórmula recursiva. Já no segundo mostramos que essa fórmula satisfaz certa equação linear de diferenças e provamos que de fato a solução é igual a (1.7). Antes disso, seja $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$, vamos definir o domínio $\mathcal{A}_{d_1,d_2} := \left[0, \frac{d_2+1}{d_2(d_1+1)}\right] \times \left[0, \frac{d_1+1}{d_1(d_2+1)}\right] \subseteq [0, 1]^2$. Assumimos que, nas expressões que aparecem daqui em diante, um somatório da forma \sum_1^0 é igual a 0.

Lema 1.5.2. Para $(x, y) \in \mathbb{V}_i \times \mathbb{V}_j$, $i, j = 1, 2$, com $\text{dist}(x, y) = k \geq 1$, defina $v(i, j, k) := \mathbb{P}[x \xrightarrow{o} y]$, como a probabilidade de um vértice tipo j ser descendente de um vértice tipo i à distância k . Para todo $n \geq 1$, existem funções F_n, K_n, F_n^*, K_n^* com domínio \mathcal{A}_{d_1, d_2} , não dependendo de d_1, d_2 , tal que

$$\begin{aligned} v(1, 2, 2n-1) &= K_n(\alpha(p), \beta(p)), & v(1, 1, 2n) &= F_n(\alpha(p), \beta(p)) \\ v(2, 1, 2n-1) &= K_n^*(\alpha(p), \beta(p)), & v(2, 2, 2n) &= F_n^*(\alpha(p), \beta(p)). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Prova do Lema 1.5.2. Para $n \geq 1$, e $(a, b) \in \mathcal{A}_{d_1, d_2}$, definimos recursivamente as seguintes sequências funções:

$$K_n(a, b) = a^n b^{n-1} + \sum_{\ell=1}^{n-1} a^\ell b^\ell (1-a) K_{n-\ell}(a, b) + \sum_{\ell=1}^{n-1} a^\ell b^{\ell-1} (1-b) F_{n-\ell}^*(a, b),$$

$$K_n^*(a, b) = b^n a^{n-1} + \sum_{\ell=1}^{n-1} a^\ell b^\ell (1-b) K_{n-\ell}^*(a, b) + \sum_{\ell=1}^{n-1} b^\ell a^{\ell-1} (1-a) F_{n-\ell}(a, b),$$

$$F_n(a, b) = a^n b^n + \sum_{\ell=1}^{n-1} a^\ell b^\ell (1-a) F_{n-\ell}(a, b) + \sum_{\ell=1}^n a^\ell b^{\ell-1} (1-b) K_{n+1-\ell}^*(a, b),$$

$$F_n^*(a, b) = a^n b^n + \sum_{\ell=1}^{n-1} a^\ell b^\ell (1-b) F_{n-\ell}^*(a, b) + \sum_{\ell=1}^n a^\ell b^{\ell-1} (1-a) K_{n+1-\ell}(a, b).$$

Agora, usando o fato que $\mathbb{P}[x_0 \rightsquigarrow x_\ell] = \mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_\ell] - \mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_{\ell+1}]$, obtemos para

todo $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[x_0 \xrightarrow{o} x_{2n-1}] &= \mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_{2n-1}] + \sum_{\ell=1}^{2n-2} \mathbb{P}[x_0 \rightsquigarrow x_\ell] \mathbb{P}[x_\ell \xrightarrow{o} x_{2n-1}] \\ &= \mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_{2n-1}] + \sum_{\ell=1}^{2n-2} \{\mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_\ell] - \mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_{\ell+1}]\} \mathbb{P}[x_\ell \xrightarrow{o} x_{2n-1}], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[x_0 \xrightarrow{o} x_{2n}] &= \mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_{2n}] + \sum_{\ell=1}^{2n-1} \mathbb{P}[x_0 \rightsquigarrow x_\ell] \mathbb{P}[x_\ell \xrightarrow{o} x_{2n}] \\ &= \mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_{2n}] + \sum_{\ell=1}^{2n-1} \{\mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_\ell] - \mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_{\ell+1}]\} \mathbb{P}[x_\ell \xrightarrow{o} x_{2n}]. \end{aligned}$$

Dividimos a prova em dois casos.

(i) Se $(x_0, x_{2n-1}) \in \mathbb{V}_i \times \mathbb{V}_j$, $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$, então

$$\begin{aligned} v(i, j, 2n-1) &= \pi(i, j, 2n-1) + \sum_{\ell=1}^{n-1} [\pi(i, i, 2\ell) - \pi(i, j, 2\ell+1)]v(i, j, 2(n-\ell)-1) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{n-1} [\pi(i, j, 2\ell-1) - \pi(i, i, 2\ell)]v(j, j, 2(n-\ell)). \end{aligned}$$

(ii) Se $(x_0, x_{2n}) \in \mathbb{V}_i \times \mathbb{V}_i$, $i = 1, 2$, então

$$\begin{aligned} v(i, i, 2n) &= \pi(i, i, 2n) + \sum_{\ell=1}^{n-1} [\pi(i, i, 2\ell) - \pi(i, j, 2\ell+1)]v(i, i, 2(n-\ell)) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^n [\pi(i, j, 2\ell-1) - \pi(i, i, 2\ell)]v(j, i, 2(n-\ell)+1). \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.4.2, o resultado segue por indução em n . □

Lema 1.5.3. *A sequência $\{F_n\}$ satisfaz a seguinte equação linear de diferenças de primeira ordem*

$$F_{n+1}(a, b) = ab(2-a)(2-b)F_n(a, b), \quad n \geq 1,$$

com condição inicial $F_1(a, b) = ab(2-b)$. Daí segue que $F_n(a, b) = [ab(2-b)]^n(2-a)^{n-1}$.

Prova do Lema 1.5.3. Seja $n \geq 1$ e $(a, b) \in \mathcal{A}_{d_1, d_2}$, pela definição de F_n temos que

$$F_{n+1}(a, b) = a^{n+1}b^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n a^\ell b^\ell (1-a)F_{n+1-\ell}(a, b) + \sum_{\ell=1}^{n+1} a^\ell b^{\ell-1} (1-b)K_{(n+1)+1-\ell}^*(a, b).$$

Colocando em evidência o fator comum e reordenando a soma, segue que

$$\begin{aligned} F_{n+1}(a, b) &= ab \left[(1-a)F_n(a, b) + a^n b^n + \sum_{\ell=1}^{n-1} a^\ell b^\ell (1-a)F_{n-\ell}(a, b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^n a^\ell b^{\ell-1} (1-b)K_{(n-\ell)+1}^*(a, b) \right] + a(1-b)K_{n+1}^*(a, b), \end{aligned}$$

logo,

$$F_{n+1}(a, b) = ab[(1-a)F_n(a, b) + F_n(a, b)] + a(1-b)K_{n+1}^*(a, b). \quad (1.9)$$

Afirmamos que

$$K_{n+1}^*(a, b) = b(2 - a)F_n(a, b). \quad (1.10)$$

De fato, pela definição de K_n^* segue que

$$K_{n+1}^*(a, b) = b^{n+1}a^n + \sum_{\ell=1}^n a^\ell b^\ell (1-b)K_{n+1-\ell}^*(a, b) + \sum_{\ell=1}^n b^\ell a^{\ell-1} (1-a)F_{n+1-\ell}(a, b).$$

De novo, colocando em evidência o fator comum e reordenando a soma, obtemos

$$\begin{aligned} K_{n+1}^*(a, b) &= b \left[a^n b^n + \sum_{\ell=1}^{n-1} a^\ell b^\ell (1-a)F_{n-\ell}(a, b) + \sum_{\ell=1}^n a^\ell b^{\ell-1} (1-b)K_{n+1-\ell}^*(a, b) \right] + b(1-a)F_n(a, b) \\ &= bF_n(a, b) + b(1-a)F_n(a, b) \\ &= b(2-a)F_n(a, b). \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo (1.10) em (1.9) fica demonstrado o Lema. \square

Prova do Lema 1.5.1. Note que $\mathbb{E}[Y_{1,n}] = \mathbb{E}[\xi^{(2n)}] = (d_1 d_2)^n \nu(1, 1, 2n)$, usando os Lemas 1.5.2 e 1.5.3 concluímos que $F_n(\alpha(p), \beta(p))$ é igual ao lado direito em (1.7), a prova é finalizada ao se notar que $\phi_n^{(d_1, d_2)}(p)$ é simplesmente $F_n(\alpha(p), \beta(p))$. \square

1.5.1 Prova do Teorema 1.2.3 e Corolário 1.2.1

Nesta seção estamos interessados em provar que para p suficientemente próximo de 1 o processo de ramificação de Galton-Watson $\{Y_{\ell,n}\}_{\ell \geq 0}$ é *supercrítico*, isto é, que seu número médio por indivíduo $\mathbb{E}[Y_{1,n}] > 1$.

A partir do Lema 1.5.1, segue que, resolvendo para cada $n \geq 1$ a equação em p

$$(d_1 d_2)^n \phi_n^{(d_1, d_2)}(p) = 1,$$

obtemos uma sequência de limitantes superiores para $p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2})$. Então, para todo $n \geq 1$, definimos a função

$$f_n^{(d_1, d_2)}(p) = \left[\phi_n^{(d_1, d_2)}(p) \right]^{1/n} - \frac{1}{d_1 d_2}. \quad (1.11)$$

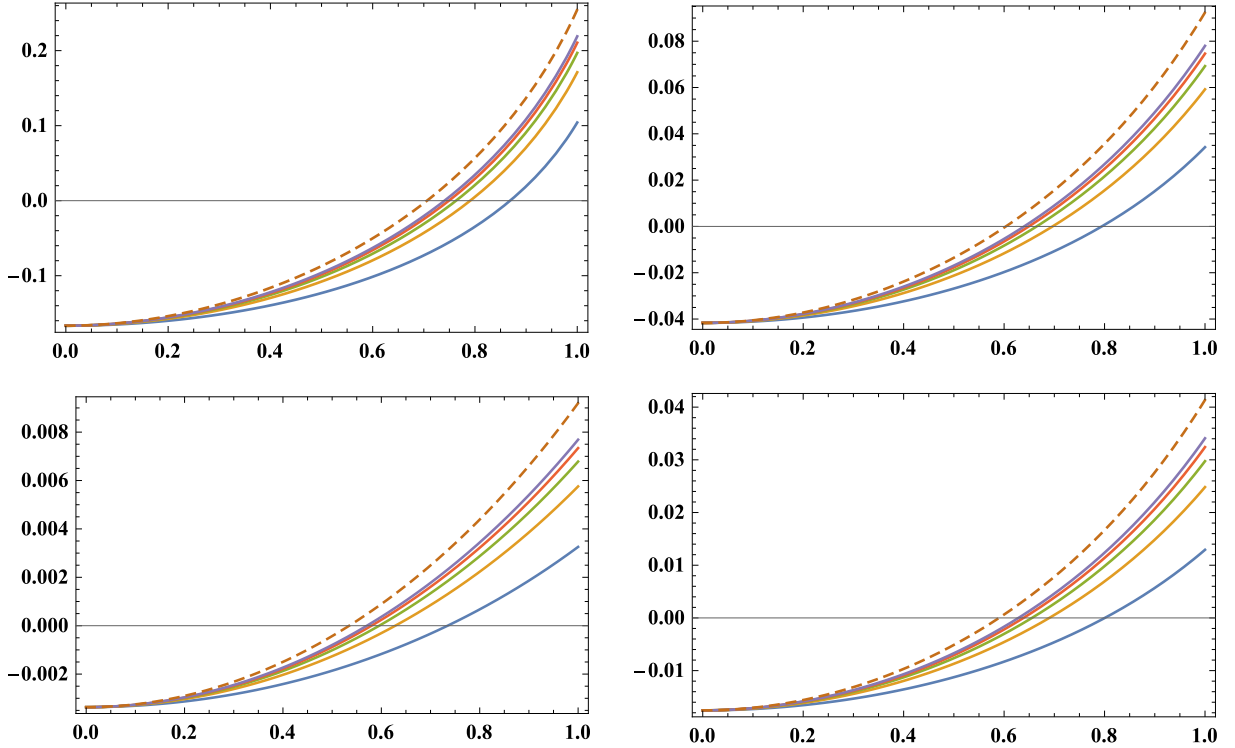


Figura 3 – Funções $f_n^{(d_1, d_2)}$ com $1 \leq n \leq 5$, para alguns valores do par (d_1, d_2) fixados e a sua respectiva função limite $f^{(d_1, d_2)}$ tracejada em laranja em cada caso.

Note que para $p \in [0, 1]$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(d_1, d_2)}(p) = f^{(d_1, d_2)}(p), \quad (1.12)$$

em que $f^{(d_1, d_2)}$ é a função dada na Definição 1.2.1.

Na Figura 3 são apresentadas as funções definidas em (1.11) e (1.12) com $1 \leq n \leq 5$ para alguns valores do par $(d_1, d_2) \in \{(2, 3), (4, 6), (9, 33), (19, 3)\}$ e a sua respectiva função limite em cada caso.

Para finalizar a prova do limitante superior apresentado em Teorema 1.2.3 usamos o seguinte lema de Análise Real (que é enunciado sem demonstração).

Lema 1.5.4. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções crescentes e contínuas a valores reais, definidas em $[0, 1]$, tal que $f_n(0) < 0$ e $f_n(1) > 0$ para todo n . Suponha que $\{f_n\}$ converge pontualmente quando $n \rightarrow \infty$ a uma função crescente e contínua f definida em $[0, 1]$ e seja r_n a única raiz de f_n em $[0, 1]$. Então, existe $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ e $f(r) = 0$.*

Agora, estamos preparados para provar o Teorema 1.2.3.

Prova do Teorema 1.2.3. É simples mostrar que as funções em (1.11) e (1.12) satisfazem as condições do Lema 1.5.4 para todo n suficientemente grande (que depende de d_1, d_2). Portanto, definindo $\tilde{p}_n(d_1, d_2)$ como a única raiz de $f_n^{(d_1, d_2)}$ no intervalo $[0, 1]$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_n(d_1, d_2) = \tilde{p}(d_1, d_2),$$

em que o limite é a única raiz de $f^{(d_1, d_2)}$ em $(0, 1)$. Desde que $f_n^{(d_1, d_2)}(p) > 0$ para qualquer $p > \tilde{p}_n(d_1, d_2)$, a partir do Lema 1.5.1, temos que

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}) \leq \tilde{p}_n(d_1, d_2).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, o teorema está provado. \square

Finalizamos esta seção com a prova do Corolário 1.2.1.

Prova do Corolário 1.2.1. Pelo Teorema 1.2.3, temos que $\tilde{p}(d_1, d_2)$ é a única raiz em $(0, 1)$ de $f^{(d_1, d_2)}(p) = \alpha(p)\beta(p)(2 - \alpha(p))(2 - \beta(p)) - (d_1 d_2)^{-1}$. Denotamos por

$$\bar{p} = \bar{p}(d_1, d_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{(d_1 + 1)(d_2 + 1)}{d_1 d_2} \right]^{1/2},$$

o limitante superior estabelecido no Corolário 1.2.1. O resultado segue desde que $f^{(d_1, d_2)}(\bar{p}) \geq 0$ para todo d_1, d_2 . \square

1.6 Modelo dos sapos com configuração inicial aleatória

Até agora provamos que o modelo dos sapos com configuração inicial de uma partícula por vértice exibe um comportamento crítico não trivial com respeito à sobrevivência. Nesta seção, procuramos por condições que garantam a existência das fases de extinção e sobrevivência do modelo ao que se refere à distribuição inicial de partículas dada por cópias independentes de η em cada vértice. Com isso, ficará demonstrado o Teorema 1.2.1.

Na continuação, provamos a extinção quase certa do $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta)$, sob a condição de integrabilidade de η .

Teorema 1.6.1. *Suponha $\mathbb{E}\eta < \infty$. Se $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$, então*

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta) \geq \left[\frac{(d_1 + 1)(d_2 + 1)}{(d_1(\mathbb{E}\eta + 1) + 1)(d_2(\mathbb{E}\eta + 1) + 1)} \right]^{1/2}.$$

Prova do Teorema 1.6.1. Dominamos o $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta)$ pelo seguinte processo de ramificação multitypo. Como na prova do Teorema 1.2.2, para $i = 1, 2$, e $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, denotamos por $\mathbf{p}^{(i)}(k_1, k_2)$ a probabilidade de uma partícula tipo i produzir k_1 partículas tipo 1, e k_2 partículas tipo 2.

Recorde-se que $\mathbb{P}[\eta = k] = \rho_k$, e defina

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(1)}(0, 0) &= 1 - p, & \mathbf{p}^{(1)}(0, 1) &= \frac{p + d_1 \rho_0}{d_1 + 1}, & \mathbf{p}^{(1)}(0, k) &= \frac{p d_1 \rho_{k-1}}{d_1 + 1}, \quad k \geq 2, \\ \mathbf{p}^{(2)}(0, 0) &= 1 - p, & \mathbf{p}^{(2)}(1, 0) &= \frac{p + d_2 \rho_0}{d_2 + 1}, & \mathbf{p}^{(2)}(k, 0) &= \frac{p d_2 \rho_{k-1}}{d_2 + 1}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Neste caso, a matriz de primeiros momentos $M := (m_{ij})_{i, j \in \{1, 2\}}$ torna-se

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{p}{d_1 + 1}(1 + d_1(\mathbb{E}\eta + 1)) \\ \frac{p}{d_2 + 1}(1 + d_2(\mathbb{E}\eta + 1)) & 0 \end{bmatrix}.$$

A prova é finalizada ao se notar que se

$$p < \left[\frac{(d_1 + 1)(d_2 + 1)}{(d_1(\mathbb{E}\eta + 1) + 1)(d_2(\mathbb{E}\eta + 1) + 1)} \right]^{1/2},$$

então $\lambda(M)$ é menor que 1, portanto o processo se extingue quase certamente. \square

Observação 1.6.1. Observe que, no caso $\eta \equiv 1$, o Teorema 1.2.2 é uma consequência direta do Teorema 1.6.1.

1.6.1 Processos de ramificação dominados por um modelo de percolação

Considere o $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta)$ e defina para cada $x \in \mathbb{V}$

$$\mathcal{R}_x^k := \{S_n^x(k) : 0 \leq n < \Xi_p^x(k)\} \subset \mathbb{V},$$

como o conjunto de vértices visitados pela k -ésima partícula posicionada originalmente no vértice x e

$$\mathcal{R}_x = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{\eta(x)} \mathcal{R}_x^k & \text{se } \eta(x) \neq 0, \\ \{x\} & \text{se } \eta(x) = 0, \end{cases}$$

como o traço virtual de x .

Do mesmo modo que na Seção 1.4.1, declaramos cada elo orientado $\vec{xy} \in \vec{\mathbb{E}}$ em um de dois estados: aberto se o evento $[x \rightarrow y] := [y \in \mathcal{R}_x]$ ocorre ou fechado se $[x \rightarrow y] := [y \notin \mathcal{R}_x]$ ocorre. Logo, condicionando no número inicial de partículas em $x \in \mathbb{V}$ e usando o Lema 1.4.2, obtemos que a probabilidade de que pelo menos uma partícula em x visite um vértice y a distância k é dada por

$$\pi_\eta(i, j, k) = \begin{cases} 1 - \varphi(1 - \alpha^n \beta^{n-1}) & \text{se } i = 1, j = 2, k = 2n - 1, \\ 1 - \varphi(1 - \beta^n \alpha^{n-1}) & \text{se } i = 2, j = 1, k = 2n - 1, \\ 1 - \varphi(1 - \alpha^n \beta^n) & \text{se } i = j, k = 2n, \end{cases} \quad (1.13)$$

em que φ é a função geradora de probabilidade de η .

Neste caso, o chamamos de *modelo de percolação anisotrópica em \mathbb{T}_{d_1, d_2} com parâmetros α, β , e regulado por η* , e vamos denotá-lo por $\text{MPA}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \alpha, \beta, \eta)$.

De novo, para cada $n \geq 1$, temos que o $\text{MPA}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \alpha, \beta, \eta)$ é dominado pelo processo de ramificação $\{Y_{\ell, n}\}_{\ell \geq 0}$. Usando a fórmula (1.13), as probabilidades de descendência por indivíduo, neste caso, são dadas agora por

$$\begin{aligned} v_\eta(1, 2, 2n - 1) &= K_n(\alpha(p), \beta(p)), & v_\eta(1, 1, 2n) &= F_n(\alpha(p), \beta(p)) \\ v_\eta(2, 1, 2n - 1) &= K_n^*(\alpha(p), \beta(p)), & v_\eta(2, 2, 2n) &= F_n^*(\alpha(p), \beta(p)), \end{aligned} \quad (1.14)$$

em que as funções definidas na prova do Lema 1.5.2 tornam-se, para cada $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} K_n(a, b) &= [1 - \varphi(1 - a^n b^{n-1})] + \sum_{\ell=1}^{n-1} [\varphi(1 - a^{\ell+1} b^\ell) - \varphi(1 - a^\ell b^\ell)] K_{n-\ell}(a, b) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{n-1} [\varphi(1 - a^\ell b^\ell) - \varphi(1 - a^\ell b^{\ell-1})] F_{n-\ell}^*(a, b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_n^*(a, b) &= [1 - \varphi(1 - b^n a^{n-1})] + \sum_{\ell=1}^{n-1} [\varphi(1 - b^{\ell+1} a^\ell) - \varphi(1 - a^\ell b^\ell)] K_{n-\ell}^*(a, b) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{n-1} [\varphi(1 - a^\ell b^\ell) - \varphi(1 - b^\ell a^{\ell-1})] F_{n-\ell}(a, b), \end{aligned}$$

$$F_n(a, b) = [1 - \varphi(1 - a^n b^n)] + \sum_{\ell=1}^{n-1} [\varphi(1 - a^{\ell+1} b^\ell) - \varphi(1 - a^\ell b^\ell)] F_{n-\ell}(a, b) \\ + \sum_{\ell=1}^n [\varphi(1 - a^\ell b^\ell) - \varphi(1 - a^\ell b^{\ell-1})] K_{n+1-\ell}^*(a, b),$$

$$F_n^*(a, b) = [1 - \varphi(1 - b^n a^n)] + \sum_{\ell=1}^{n-1} [\varphi(1 - b^{\ell+1} a^\ell) - \varphi(1 - a^\ell b^\ell)] F_{n-\ell}^*(a, b) \\ + \sum_{\ell=1}^n [\varphi(1 - a^\ell b^\ell) - \varphi(1 - b^\ell a^{\ell-1})] K_{n+1-\ell}(a, b).$$

Observação 1.6.2. Note que em geral as funções acima não são necessariamente polinomiais em a e b , pois φ depende da distribuição de η , por exemplo, se $\eta \sim \text{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$, então $\varphi(s) = \exp(-\theta(s-1))$, $s \in [0, 1]$.

1.6.2 Modelo dos sapos com densidade inicial q

Estudamos primeiro um caso em que as funções $\{K_n\}$, $\{F_n\}$, $\{K_n^*\}$, $\{F_n^*\}$ são polinomiais em a e b . Para isso, consideramos o modelo dos sapos com configuração inicial regulada por η_q , em que η_q é uma variável aleatória 0-1, com $\mathbb{P}(\eta_q = 0) = 1 - \mathbb{P}(\eta_q = 1) = 1 - q$. Para evitar trivialidades assumimos $q > 0$. Provaremos que $p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta_q) < 1$ e a partir daí mostramos que $p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta) < 1$ desde que $\rho_0 < 1$. Logo, pelo Teorema 1.6.1 concluímos que o $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta)$ exhibe transição de fase, o que finaliza a prova do resultado central deste capítulo (Teorema 1.2.1).

O seguinte resultado garante que o modelo dos sapos com densidade inicial q fixada, sobrevive para p suficientemente próximo de 1. Primeiro defina para $p \in [0, 1]$, a função

$$f^{(d_1, d_2, q)}(p) = \alpha(p)\beta(p)[1 + q(1 - \alpha(p))][1 + q(1 - \beta(p))] - \frac{1}{d_1 d_2}, \quad (1.15)$$

em que $\alpha(p)$, $\beta(p)$ são dadas na Definição 1.2.1.

Teorema 1.6.2. *Suponha que $q > 0$. Se $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$, então*

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta_q) \leq \tilde{p}(d_1, d_2, q),$$

em que $\tilde{p}(d_1, d_2, q)$ é a única raiz em $(0, 1)$ da função $f^{(d_1, d_2, q)}$ dada em (1.15).

Observação 1.6.3. Note que o Teorema 1.2.3 é uma consequência direta do resultado acima, com a escolha de $q = 1$.

Corolário 1.6.1. *Suponha que $\rho_0 < 1$. Se $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$ então temos que*

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta) \leq \tilde{p}(d_1, d_2, \rho_0),$$

em que $\tilde{p}(d_1, d_2, \rho_0)$ é a única raiz em $(0, 1)$ de $f^{(d_1, d_2, q)}$ dada em (1.15), com a escolha de $q = 1 - \rho_0$.

O Teorema 1.6.2 segue do seguinte lema, que estabelece uma fórmula para o número médio de descendentes por indivíduo do processo de ramificação definido por $\{Y_{\ell, n}\}_{\ell \geq 0}$.

Lema 1.6.1. *Para todo $n \geq 1$, temos que $\{Y_{\ell, n}\}_{\ell \geq 0}$ é um processo de ramificação de Galton-Watson cuja sobrevivência implica a sobrevivência do $\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta_q)$. Além disso, o número médio de descendentes por indivíduo é igual $\mathbb{E}[Y_{1, n}] = (d_1 d_2)^n \phi_n^{(d_1, d_2, q)}(p)$ em que*

$$\phi_n^{(d_1, d_2, q)}(p) = q[\alpha(p)\beta(p)(1 + q(1 - \beta(p)))]^n [1 + q(1 - \alpha(p))]^{n-1} \quad (1.16)$$

Prova do Lema 1.6.1. A prova decorre do fato que para $s \in [0, 1]$ a função geradora de probabilidade de η_q é dada por $\varphi(s) = 1 - q(1 - s)$. Daí temos que $\pi_{\eta_q}(i, j, k) = q\pi(i, j, k)$, em que $\pi(i, j, k)$ é dada em (1.6). Usando este fato, temos que, $v_{\eta_q}(1, 1, 2n) = F_n^{(q)}(\alpha(p), \beta(p))$, em que $F_n^{(q)}(\alpha(p), \beta(p))$ é dada pelas fórmulas enunciadas no final da subseção 1.6.1 com a escolha de $\varphi(s) = 1 - q(1 - s)$. Finalmente, por indução em n , temos que $F_n^{(q)}$ satisfaz

$$F_{n+1}^{(q)}(a, b) = ab[1 + q(1 - a)][1 + q(1 - b)]F_n^{(q)}(a, b), n \geq 1,$$

com condição inicial $F_1^{(q)}(a, b) = q[ab(1 + q(1 - b))]$. Consequentemente para todo $n \geq 1$,

$$F_n^{(q)}(a, b) = q[ab(1 + q(1 - b))]^n [1 + q(1 - a)]^{n-1}.$$

O resultado segue, notando que $\phi_n^{(d_1, d_2, q)}(p)$ dada em (1.16) é simplesmente $F_n^{(q)}(\alpha(p), \beta(p))$.

□

Agora estamos preparados para provar o Teorema 1.6.2.

Prova do Teorema 1.6.2. Para cada $n \geq 1$ e $q \in (0, 1]$ fixado, definimos

$$f_n^{(d_1, d_2, q)}(p) = \left[\phi_n^{(d_1, d_2, q)}(p) \right]^{1/n} - \frac{1}{d_1 d_2}. \quad (1.17)$$

Note que para $p \in [0, 1]$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(d_1, d_2, q)}(p) = f^{(d_1, d_2, q)}(p),$$

em que $f^{(d_1, d_2, q)}(p)$ é dada na equação (1.15).

Desde que as funções em (1.17) e (1.15) satisfazem as condições em Lema 1.5.4, obtemos que

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta_q) \leq \tilde{p}(d_1, d_2, q),$$

em que $\tilde{p}(d_1, d_2, q)$ é a única raiz em $(0, 1)$ de $f^{(d_1, d_2, q)}(p)$. \square

Por fim, lembre-se que o principal objetivo desta seção é provar que o $MS(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta)$ exhibe transição de fase para $\eta \sim \{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ (não somente uma v.a. 0-1).

Na continuação, provamos o Corolário 1.6.1.

Prova do Corolário 1.6.1. Pela definição de $\{Y_{\ell, n}\}$, seu número médio de descendentes por indivíduo é dado por

$$\mathbb{E}[Y_{1, n}] = (d_1 d_2)^n \nu_\eta(1, 1, 2n) = (d_1 d_2)^n F_n(\alpha(p), \beta(p)).$$

A fim de obtermos um limitante inferior para $\mathbb{E}[Y_{1, n}]$ (não dependendo de φ), truncamos a configuração inicial do modelo dos sapos. Consideremos a configuração inicial modificada η' dada por

$$\eta'(x) = \mathbb{1}_{\{\eta(x) \geq 1\}}, \quad x \in \mathbb{V}.$$

Já que η' é dominada por η na usual ordem estocástica, segue que

$$\nu_\eta(1, 1, 2n) \geq \nu_{\eta'}(1, 1, 2n).$$

Mas, para o modelo dos sapos restrito com configuração inicial regulada por η' ,

$$v_{\eta'}(1, 1, 2n) = \phi_n^{(d_1, d_2, q)}(p),$$

em que $q = 1 - \rho_0 > 0$. Então, usando Teorema 1.6.2, desde que η' é uma v.a. 0-1, segue que existe $\tilde{p}(d_1, d_2, \rho_0) \in (0, 1)$, tal que

$$p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta) \leq p_c(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta') \leq \tilde{p}(d_1, d_2, \rho_0).$$

□

Observação 1.6.4. (i) Observe que, no caso $q = 1$ ($\iff \rho_0 = 0$), obtemos o limitante superior no Teorema 1.2.3.

(ii) Note que, a condição $\rho_0 < 1$, é também condição necessária para a sobrevivência do modelo.

Os resultados desenvolvidos nesse capítulo são apresentados em [Lebensztayn e Utria \(2018\)](#).

2 *Recorrência e transiência para o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2}*

Dizemos que uma realização particular do modelo dos sapos é *recorrente*, se a raiz é visitada por infinitas partículas ativas. Caso contrário, dizemos que a realização é *transiente*. Enfatizamos que, inclusive se cada passeio aleatório for transiente, o número de visitas à raiz ainda pode ser infinito. Como citado anteriormente, para o modelo sem morte um tema importante de pesquisa concerne à questão de recorrência/transiência em árvores infinitas e em redes hipercúbicas, também veja-se [Kosygina e Zerner \(2017\)](#) onde os autores proveram condições suficientes para a validade de uma lei zero-um, entre recorrência e transiência para modelos dos sapos em uma ampla generalidade. Em [Döbler et al. \(2018\)](#) estabeleceram a existência da dicotomia recorrência/transiência dependendo das probabilidades de transição para o modelo com *deriva* em \mathbb{Z}^d e [Rosenberg \(2017\)](#) estudou esse assunto para o modelo em \mathbb{R} , em que as partículas são localizadas nos pontos de um processo de Poisson na reta com intensidade ν e assim que uma partícula é ativada começa a se mover de acordo um movimento Browniano com deriva à esquerda, nesse artigo o autor deu condições na intensidade ν para o modelo ser transiente ou não.

Nesse Capítulo estabelecemos condições na distribuição inicial de partículas, para que o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2} , exiba uma transição de fase com respeito à recorrência/transiência conforme o parâmetro p varia. As demonstrações dos resultados principais apresentados aqui se fundamentam nas ideias do trabalho de [Alves et al. \(2002a\)](#).

Agora, definimos o parâmetro crítico p_u , como segue

$$p_u(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta) := \inf\{p : \mathbb{P}[\text{MS}(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, p, \eta) \text{ é recorrente}] > 0\}.$$

Note que, se o $\text{MS}(\mathbb{G}, p, \eta)$ é recorrente então também sobrevive. Portanto, $p_u(\mathbb{G}, \eta) \geq p_c(\mathbb{G}, \eta)$ para qualquer \mathbb{G} e η .

2.1 Resultados principais

Começamos apresentando um caso em que o modelo é transiente para todo $p < 1$.

Teorema 2.1.1. *Suponha que $\mathbb{E}\eta^\varepsilon < \infty$ para todo $\varepsilon \in (0, 1)$. Se $d_1 \geq 2$ ou $d_2 \geq 2$, então*

$$p_u(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta) = 1,$$

Observação 2.1.1. Note que, em particular, o Teorema 2.1.1 implica que, começando com configuração inicial de uma partícula por vértice o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2} é transiente para todo $p < 1$.

O próximo teorema fornece uma condição suficiente na distribuição caudal de η para que o modelo seja recorrente para p suficientemente perto, porém diferente, de 1.

Teorema 2.1.2. *Suponha que existe $r < \frac{\log(\sqrt{d_1 d_2})}{2 \log(\sqrt{d_1 d_2} + 1)}$ tal que*

$$\mathbb{P}[\eta \geq k] \geq \frac{1}{k^r},$$

para todo k suficientemente grande. Então $p_u(\mathbb{T}_{d_1, d_2}, \eta) < 1$.

2.2 Transiência

A ideia da prova para a transiência é supor que todas as partículas encontram-se ativas no instante inicial, um simples acoplamento mostra que se este modelo menos restrito for transiente, então o modelo dos sapos original também o será. Iniciamos com um par de resultados úteis que são enunciados sem demonstração e podem ser obtidos usando cálculo elementar.

Lema 2.2.1. *Defina $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1/d_1 d_2]$, como $\sigma(p) = \alpha(p)\beta(p)$, então temos que $\sigma(p)$ é uma função contínua e crescente em p . Ademais, vale a seguinte equivalência*

$$\sigma(p) = v \iff p = \left[\frac{(d_1 + 1)(d_2 + 1)v}{(d_1 v + 1)(d_2 v + 1)} \right]^{1/2}.$$

Observação 2.2.1. Observe que, para $i = 1, 2$, e $(x, y) \in \mathbb{V}_i \times \mathbb{V}_i$, $(\sigma(p))^{\text{dist}(x, y)/2}$ é a probabilidade de uma partícula localizada em $x \in \mathbb{V}_i$ visitar eventualmente um vértice $y \in \mathbb{V}_i$.

O seguinte resultado pode ser consultado em [Alves et al. \(2002a, section 2\)](#)

Lema 2.2.2. Para $u \in [0, 1]$ e $k, n \in \mathbb{N}$, defina $\hat{n}(k, u) = \lfloor \log k / \log(u^{-1}) \rfloor$, em que $\lfloor s \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a s , e $w(k, n, u) = 1 - (1 - u^n)^k$. Então, existem constantes, $C_1, C_2, C_3 > 0$ tais que,

$$C_1 \leq w(k, n, u) \leq 1,$$

para $k \leq \hat{n}(k, u)$

$$C_2 u^{n - \hat{n}(k, u)} \leq w(k, n, u) \leq C_3 u^{n - \hat{n}(k, u) - 1},$$

para $k > \hat{n}(k, u)$.

Agora, estamos preparados para provar o Teorema 2.1.1.

Prova do Teorema 2.1.1. Seja V' o número de visitas por partículas ativas à raiz no modelo menos restrito, ou seja, assumindo que todas as partículas encontram-se ativas no instante inicial e V o número de visitas à raiz no modelo original, é simples notar que V' domina estocasticamente a V . Note que

$$\sum_{x \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}} \mathbb{P}[x \rightarrow \emptyset] = \sum_{x \in \mathbb{V}_1 \setminus \{\emptyset\}} \mathbb{P}[x \rightarrow \emptyset] + \sum_{x \in \mathbb{V}_2} \mathbb{P}[x \rightarrow \emptyset].$$

Primeiro, observe que pela equação (1.13) e pelo Lema 2.2.2, temos que existem constantes (que podem depender de d_1, d_2), $C_0, C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{V}_1 \setminus \{\emptyset\}} \mathbb{P}[x \rightarrow \emptyset] &\leq C_0 \sum_{n \geq 1} (d_1 d_2)^n [1 - \varphi(1 - \sigma^n)] \\ &\leq C_1 \sum_{k \geq 1} \rho_k \left[\sum_{n \leq \hat{n}(k, \sigma)} (d_1 d_2)^n [1 - (1 - \sigma^n)^k] + \sum_{n > \hat{n}(k, \sigma)} (d_1 d_2)^n [1 - (1 - \sigma^n)^k] \right] \\ &\leq C_0 \sum_{k \geq 1} \rho_k \left[\sum_{n \leq \hat{n}(k, \sigma)} (d_1 d_2)^n + C_1 \sum_{n > \hat{n}(k, \sigma)} (d_1 d_2)^n \sigma^{n - \hat{n}(k, \sigma) - 1} \right] \\ &\leq C_0 \sum_{k \geq 1} \rho_k \left[1 - (d_1 d_2)^{\frac{\log(k)}{\log(1/\sigma)}} + C_2 \right] \end{aligned}$$

$$\leq C_0 \sum_{k \geq 1} \rho_k k^{\frac{\log(d_1 d_2)}{\log(1/\sigma)}} + C_2 < \infty,$$

Além disso, seja $C = (d_1 + 1)(1 - \varphi(1 - \beta)) > 0$, então pelo Lema 2.2.2, temos que existem constantes (que podem depender de d_1, d_2), $C'_0, C'_1, C'_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{V}_2} \mathbb{P}[x \rightarrow \emptyset] &\leq C'_0 \sum_{n \geq 1} (d_1 d_2)^n [1 - \varphi(1 - \sigma^n)] + C \\ &\leq C'_1 \sum_{k \geq 1} \rho_k \left[\sum_{n \leq \hat{n}(k, \sigma)} (d_1 d_2)^n [1 - (1 - \sigma^n)^k] + \sum_{n > \hat{n}(k, \sigma)} (d_1 d_2)^n [1 - (1 - \sigma^n)^k] \right] + C \\ &\leq C'_0 \sum_{k \geq 1} \rho_k \left[\sum_{n \leq \hat{n}(k, \sigma)} (d_1 d_2)^n + C_1 \sum_{n > \hat{n}(k, \sigma)} (d_1 d_2)^n \sigma^{n - \hat{n}(k, \sigma) - 1} \right] + C \\ &\leq C'_0 \sum_{k \geq 1} \rho_k \left[1 - (d_1 d_2)^{\frac{\log(k)}{\log(1/\sigma)}} + C'_2 \right] + C \\ &\leq C'_0 \sum_{k \geq 1} \rho_k k^{\frac{\log(d_1 d_2)}{\log(1/\sigma)}} + C'_2 < \infty, \end{aligned}$$

tomando $\varepsilon = \frac{\log(d_1 d_2)}{\log(1/\sigma)} < 1$ desde que $\sigma = \sigma^{(d_1, d_2)}(p) < \frac{1}{d_1 d_2}$ ($\iff p < 1$, pelo Lema 2.2.1).

Portanto, pelo Lema de Borel-Cantelli, segue que V' é finita quase certamente. Consequentemente V também o será. \square

2.3 Recorrência

A grosso modo, a prova da recorrência é baseada no seguinte argumento: particionamos o conjunto de vértices \mathbb{V} , como segue $\mathbb{V} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{V}(n)$, onde $\mathbb{V}(n)$ é definido como o n -ésimo nível de \mathbb{T}_{d_1, d_2} com $\mathbb{V}(0) = \{\emptyset\}$. Inicialmente, com *alta* probabilidade $\mathbb{V}(n)$ contém um número suficientemente grande de partículas, condicionado nesse evento, também com *alta* probabilidade o traço dessas partículas *cobrirá* o seguinte nível $\mathbb{V}(n+1)$ e à raiz, portanto acordando todas as partículas localizadas originalmente em $\mathbb{V}(n+1)$. Então, mostramos que a interseção desses eventos ocorre com probabilidade positiva, o que implica, consequentemente que o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2} é recorrente (desde que para cada n existe uma partícula de $\mathbb{V}(n)$ que visita à raiz, isso implica que o número de visitas à raiz é infinito). Na continuação formalizamos essa ideia.

Prova do Teorema 2.1.2. Fixe $a_0 > 1$ de modo que $\frac{\log(\sqrt{d_1 d_2})}{2 \log(a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))} > r$ ($\iff \frac{\sqrt{d_1 d_2}}{(a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{2r}} > 1$), e fixe $\sigma = \sigma(p)$, tal que

$$\frac{1}{a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1)} < \sigma(p) < \frac{1}{d_1 d_2}. \quad (2.1)$$

Agora, seja $\mathcal{L}_n^\emptyset := \mathbb{V}(n) \cup \{\emptyset\}$ e definimos os seguintes eventos

$$A_n = A_n^{(d_1, d_2)} = \bigcup_{|x|=n} \{\eta(x) \geq [a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1)]^{2n}\},$$

$$B_n = B_n^{(d_1, d_2)} = \bigcup_{|y|=n-1} \{y \rightarrow \mathcal{L}_n^\emptyset\}.$$

Note que B_{n+1} é o evento de que existe pelo menos uma partícula no nível n que visita o nível $n+1$ e à raiz. Por outro lado, para todo $n \geq 2$, temos

$$|\mathbb{V}(n)| \geq (\sqrt{d_1 d_2})^n. \quad (2.2)$$

$$|\mathcal{L}_n^\emptyset| \leq (\sqrt{d_1 d_2} + 1)^n. \quad (2.3)$$

Considere os seguintes dois casos:

i. Por (2.2) e pela hipótese na distribuição caudal de η , segue que, para algum $C_1 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_{2n}] &\geq 1 - \prod_{|x|=2n} (1 - \mathbb{P}[\eta(x) \geq (a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{4n}]) \\ &\geq 1 - (1 - \mathbb{P}[\eta \geq (a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{4n}])^{(d_1 d_2)^n} \\ &\geq 1 - \left(1 - \frac{1}{(a_0(d_1 d_2 + 1))^{4n}}\right)^{(d_1 d_2)^n} \\ &\geq 1 - C_1 \exp\left\{-\left[\frac{d_1 d_2}{(a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{4r}}\right]^n\right\}. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\max_{|x|=2n, |y|=2n+1} \text{dist}(x, y) = 4n + 1.$$

Além disso, usando (2.3) e (1.6) segue que, para alguma constante $C_2 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B_{2n+1} | A_{2n} \cap B_{2n}] &\geq 1 - (\sqrt{d_1 d_2} + 1)^{2n+1} (1 - \sigma^{2n} \alpha)^{(a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{2n}} \\ &\geq 1 - C_2 (\sqrt{d_1 d_2} + 1)^{2n+1} \exp\left\{-\alpha (a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1) \sigma)^{2n}\right\}. \end{aligned}$$

Portanto para n par, temos que

$$\mathbb{P}[A_n] \geq 1 - C_1 \exp \left\{ - \left[\frac{\sqrt{d_1 d_2}}{(a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{2r}} \right]^n \right\},$$

e

$$\mathbb{P}[B_{n+1} | A_n \cap B_n] \geq 1 - C_2 (\sqrt{d_1 d_2} + 1)^{n+1} \exp \left\{ -\alpha (a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1) \sigma)^n \right\}.$$

ii. De novo por (2.2) e pela hipótese na distribuição caudal de η , segue que, para algum

$$C'_1 > 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_{2n+1}] &\geq 1 - \prod_{|x|=2n+1} (1 - \mathbb{P}[\eta(x) \geq (a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{4n+2}]) \\ &\geq 1 - (1 - \mathbb{P}[\eta \geq (a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{4n+2}])^{(d_1 d_2)^n} \\ &\geq 1 - \left(1 - \frac{1}{(a_0(d_1 d_2 + 1))^{2r(2n+1)}} \right)^{(d_1 d_2)^n} \\ &\geq 1 - C'_1 \exp \left\{ - \left[\frac{(d_1 d_2)^n}{(a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{2r(2n+1)}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Notando que

$$\max_{|x|=2n+1, |y|=2n+2} \text{dist}(x, y) = 4n + 3,$$

e por (2.3) e (1.6) temos que para alguma constante $C'_2 > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[B_{2n+2} | A_{2n+1} \cap B_{2n+1}] &\geq 1 - (\sqrt{d_1 d_2} + 1)^{2n+1} (1 - \sigma^{2n+1} \beta)^{(a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{2n+1}} \\ &\geq 1 - C'_2 (\sqrt{d_1 d_2} + 1)^{2n+1} \exp \left\{ -\beta (a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1) \sigma)^{2n+1} \right\}. \end{aligned}$$

Portanto para n ímpar, temos que

$$\mathbb{P}[A_n] \geq 1 - C'_1 \exp \left\{ -(\sqrt{d_1 d_2})^{-1} \left[\frac{\sqrt{d_1 d_2}}{(a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{2r}} \right]^n \right\},$$

e

$$\mathbb{P}[B_{n+1} | A_n \cap B_n] \geq 1 - C'_2 (\sqrt{d_1 d_2} + 1)^{n+1} \exp \left\{ -\beta (a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1) \sigma)^n \right\}.$$

De i. e ii., e o fato que $\frac{\sqrt{d_1 d_2}}{(a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1))^{2r}} > 1$, $a_0(\sqrt{d_1 d_2} + 1) \sigma > 1$, concluímos que B_n ocorre infinitas vezes com probabilidade positiva. Consequentemente o modelo dos sapos em \mathbb{T}_{d_1, d_2} é recorrente. \square

3 Um novo limitante superior para a probabilidade crítica do modelo dos sapos em árvores homogêneas

O propósito deste capítulo é provar um novo limitante superior para a probabilidade crítica com respeito à sobrevivência do modelo dos sapos na árvore homogênea \mathbb{T}_d de grau $(d + 1) \geq 3$, que melhora os resultados previamente conhecidos. Esse limitante foi conjecturado em [Lebensztayn et al. \(2005\)](#).

O principal resultado em [Lebensztayn et al. \(2005\)](#) consistiu na obtenção do seguinte limitante superior para $p_c(\mathbb{T}_d)$ para todo $d \geq 2$,

$$p_c(\mathbb{T}_d) \leq \frac{d+1}{2d}. \quad (3.1)$$

Em uma observação no final da Seção 4 em [Lebensztayn et al. \(2005, p. 341\)](#), os autores argumentaram que um refinamento do raciocínio na demonstração de (3.1) levaria a um melhor resultado, a saber

$$p_c(\mathbb{T}_d) \leq \frac{(d+1)\bar{v}}{1+d\bar{v}^2}, \quad (3.2)$$

onde \bar{v} é a única raiz em $[0, 1/d]$ do polinômio $R^{(d)}(v) = d^2v^4 - d(d+1)v^3 + 2dv - 1$. Contudo, conforme os autores ressaltaram, algumas dificuldades técnicas impossibilitaram a prova por completo de (3.2). Nosso objetivo principal é provar esse novo limitante superior para $p_c(\mathbb{T}_d)$, que também melhora o resultado derivado recentemente em [Gallo e Rodriguez \(2018\)](#). Apresentamos a prova de (3.2) que se baseia nas ideias de [Lebensztayn et al. \(2005\)](#), porém é totalmente independente, e tem a vantagem de oferecer uma interpretação probabilística, desde que define os processos de aproximação que permitem levar à fórmula (3.2).

3.1 Resultados principais

Para $d \geq 2$, definimos

$$\bar{p}(d) = \frac{(d+1)\bar{v}}{1+d\bar{v}^2}, \quad (3.3)$$

onde \bar{v} é a única raiz em $[0, 1/d]$ do polinômio

$$R^{(d)}(v) = d^2v^4 - d(d+1)v^3 + 2dv - 1. \quad (3.4)$$

Além disso, denotamos por $\hat{p}(d)$ o limitante superior estabelecido em [Gallo e Rodriguez \(2018, Proposition 2\)](#):

$$\hat{p}(d) = \begin{cases} 0.720836 & \text{se } d = 2, \\ \frac{(d+1)[(7d-1) - \sqrt{(7d-1)^2 - 14}]}{d(7d-1)^2 - 7d + 2 - d(7d-1)\sqrt{(7d-1)^2 - 14}} & \text{se } d \geq 3. \end{cases}$$

Vale a pena ressaltar que esse limitante melhora [\(3.1\)](#).

Teorema 3.1.1. *Para todo $d \geq 2$, temos que:*

(i) $p_c(\mathbb{T}_d) \leq \bar{p}(d)$.

(ii) $\bar{p}(d)$ é a única raiz em $(0,1)$ do polinômio

$$Q^{(d)}(p) = p^4 - \frac{4(d+1)}{(3d+1)}p^3 - \frac{2(d-1)(d+1)^2}{(3d+1)^2}p^2 + \frac{(d+1)^3}{d(3d+1)}p - \frac{(d+1)^4}{d(3d+1)^2}. \quad (3.5)$$

(iii) $\bar{p}(d) < \hat{p}(d)$.

Por uma questão de completude no apêndice [A.3](#), escrevemos uma fórmula explícita para $\bar{p}(d)$ não envolvendo números imaginários (números complexos com parte imaginária não nula).

3.2 Prova do Teorema 3.1.1

Seja $d \geq 2$ fixado. O primeiro passo na prova é descrever o $\text{MS}(\mathbb{T}_d, p)$ como um modelo de percolação como fizemos na seção [1.4.1](#). Naturalmente, o modelo dos sapos sobrevive

se e somente se existe uma sequência infinita de distintos vértices $x_0 = \emptyset, x_1, \dots$, satisfazendo $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots$ (isto é, o aglomerado da raiz nesse modelo de percolação orientada tem tamanho infinito). Conforme provado em [Lebensztayn et al. \(2005, Lemma 2.1\)](#), a probabilidade de $[x \rightarrow y]$ é

$$\mathbb{P}[x \rightarrow y] = (\gamma^{(d)}(p))^{\text{dist}(x,y)},$$

onde a função $\gamma^{(d)}(p) : [0, 1] \mapsto [0, 1/d]$ é dada por

$$\gamma^{(d)}(p) = \begin{cases} \frac{(d+1) - \sqrt{(d+1)^2 - 4dp^2}}{2dp} & \text{se } 0 < p \leq 1, \\ 0 & \text{se } p = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Além disso, ressaltamos que para qualquer $v \in [0, 1/d]$,

$$\gamma^{(d)}(p) = v \iff p = \frac{(1+d)v}{1+dv^2}. \quad (3.7)$$

No que segue, necessitamos da seguinte definição.

Definição 3.2.1. Para $b \in [0, 1/d]$, definimos

$$\psi(b) = \sqrt{b^4 - 4b + 4}, \quad \text{e}$$

$$\lambda(b) = \frac{b}{2} (2 - b^2 + \psi(b)).$$

A ideia central para provar o Teorema 3.1.1 é resumida no seguinte resultado.

Lema 3.2.1. Para todo $n \geq 1$, existe um processo de ramificação $\{X_{\ell,n}^{(d)}\}_{\ell \geq 0}$ imerso no $\text{MS}(\mathbb{T}_d, p)$, e uma função ω_n (que não depende de d) com domínio $[0, 1/d]$, com as seguintes propriedades:

(i) $X_{0,n}^{(d)} = 1$.

(ii) A sobrevivência de $\{X_{\ell,n}^{(d)}\}_{\ell \geq 0}$ implica a sobrevivência do modelo dos sapos em \mathbb{T}_d .

(iii) O número médio de descendentes por indivíduo em $\{X_{\ell,n}^{(d)}\}_{\ell \geq 0}$ é igual

$$\mathbb{E}[X_{1,n}^{(d)}] = d^n \omega_n(\beta^{(d)}(p)).$$

Ademais, para qualquer $b \in [0, 1/d]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\omega_n(b)]^{1/n} = \lambda(b). \quad (3.8)$$

Note que, encontrando p tal que cada um desses processos de ramificação seja supercrítico, obtemos uma sequência $\{\bar{p}_n(d)\}_{n \geq 1}$ de limitantes superiores para $p_c(\mathbb{T}_d)$. Portanto, para concluir que $p_c(\mathbb{T}_d) \leq \bar{p}(d)$, é suficiente demonstrar que $\bar{p}_n(d)$ converge para $\bar{p}(d)$ quando $n \rightarrow \infty$. Antes de fazer isso, apresentamos a construção dos processos de ramificação e a prova do Lema 3.2.1.

3.2.1 Construção formal de $\{X_{\ell,n}^{(d)}\}_{\ell \geq 0}$

Para definir o processo de ramificação $\{X_{\ell,n}^{(d)}\}_{\ell \geq 0}$, restringimos a propagação do modelo dos sapos a uma árvore com raiz \emptyset que é isomorfa a árvore d -ária. Primeiro, com a notação introduzida na Definição 1.5.1 (aqui \mathbb{V} é o conjunto de vértices de \mathbb{T}_d), consideramos a seguinte definição.

Definição 3.2.2. Para $x \in \mathbb{V}$, $y \in L_n(x)$, considere $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ o caminho conectando x e y . Definimos o evento $[x_0 \xrightarrow{o} x_n]$ indutivamente em n por

(i) Se $n = 1$

$$[x_0 \xrightarrow{o} x_1] := [x_0 \rightarrow x_1]$$

(ii) Se $n = 2$

$$[x_0 \xrightarrow{o} x_2] := [x_0 \rightarrow x_2] \cup [x_0 \rightsquigarrow x_1, x_1 \xrightarrow{o} x_2]$$

(iii) Se $n \geq 3$

$$[x_0 \xrightarrow{o} x_n] := [x_0 \rightarrow x_n] \cup [x_0 \rightsquigarrow x_1, x_1 \xrightarrow{o} x_n] \cup \bigcup_{\ell=2}^{n-1} [x_0 \rightsquigarrow x_\ell, \langle x_{\ell-1}, x_\ell \rangle \xrightarrow{o} x_n]$$

em que

$$[\langle x_{\ell-1}, x_\ell \rangle \xrightarrow{o} x_n] = [x_{\ell-1} \xrightarrow{o} x_n] \cup [x_\ell \xrightarrow{o} x_n]$$

Agora, seja $n \in \mathbb{N}$ fixado, $\mathcal{X}_{0,n}^{(d)} := \{\emptyset\}$, e para $\ell \in \mathbb{N}$ defina

$$\mathcal{X}_{\ell,n}^{(d)} := \bigcup_{x \in \mathcal{X}_{\ell-1,n}^{(d)}} \{y \in L_n(x) : x \xrightarrow{o} y\}.$$

Seja $X_{\ell,n}^{(d)} = |\mathcal{X}_{\ell,n}^{(d)}|$ a cardinalidade de $\mathcal{X}_{\ell,n}^{(d)}$. Então, o processo começa com \emptyset de \mathbb{T}_d , e dado um vértice x , seus potenciais descendentes diretos são vértices localizados em $L_n(x)$. Um vértice é considerado como um *descendente* de x se e somente se $[x \xrightarrow{o} y]$.

Observação 3.2.1. Embora seja usada a mesma notação para definir $[x \xrightarrow{o} y]$ daquela usada na Definição 1.5.2, note que o evento do y ser descendente de x dada aqui contempla a contribuição de mais partículas.

Note que, para todo $n \geq 1$, $\{X_{\ell,n}^{(d)}\}_{\ell \geq 0}$ é de fato um processo de ramificação com $X_{0,n}^{(d)} = 1$, e cuja sobrevivência implica a sobrevivência do modelo dos sapos em \mathbb{T}_d . Para finalizar a prova do Lema 3.2.1, necessitamos provar a parte (iii) e a fórmula (3.8).

Primeiro, considere a sequência de funções $\{\omega_n\}_{n \geq 1}$ com domínio $[0, 1/d]$ indutivamente dada por

$$\begin{aligned} \omega_1(b) &= b, \\ \omega_2(b) &= b^2(2-b), \\ \omega_n(b) &= b^n + b(1-b)\omega_{n-1}(b) + \sum_{\ell=2}^{n-1} b^\ell(1-b)[\omega_{n-\ell+1}(b) + (1-b)\omega_{n-\ell}(b)], \quad n \geq 3. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Então, a parte (iii) do Lema 3.2.1 é estabelecida uma vez que provemos o seguinte resultado.

Lema 3.2.2. *Para todo $n \geq 1$, a probabilidade de um vértice $x_n \in L_n(x_0)$ ser um descendente de x_0 é dada por*

$$\mathbb{P}[x_0 \xrightarrow{o} x_n] = \omega_n(\gamma^{(d)}(p)),$$

em que ω_n é dada em (3.9).

Prova do Lema 3.2.2. Primeiro note que por (3.6), segue que para $\ell = 1, \dots, n-1$,

$$\mathbb{P}[x_0 \rightsquigarrow x_\ell] = [\gamma_d(p)]^\ell [1 - \gamma_d(p)].$$

Além disso, note-se que $\mathbb{P}[\langle x_{\ell-1}, x_\ell \rangle \xrightarrow{o} x_n]$ pode ser obtida por meio da fórmula de Inclusão-Exclusão, e o fato que

$$\mathbb{P}[x_{\ell-1} \xrightarrow{o} x_n, x_\ell \xrightarrow{o} x_n] = \mathbb{P}[x_{\ell-1} \rightarrow x_\ell] \mathbb{P}[x_\ell \xrightarrow{o} x_n] = \gamma^{(d)}(p) \mathbb{P}[x_\ell \xrightarrow{o} x_n].$$

Portanto, observando que para $n \geq 3$,

$$\mathbb{P}[x_0 \xrightarrow{o} x_n] = \mathbb{P}[x_0 \rightarrow x_n] + \mathbb{P}[x_0 \rightsquigarrow x_1] \mathbb{P}[x_1 \xrightarrow{o} x_n] + \sum_{\ell=2}^{n-1} \mathbb{P}[x_0 \rightsquigarrow x_\ell] \mathbb{P}[\langle x_{\ell-1}, x_\ell \rangle \xrightarrow{o} x_n],$$

e usando fórmula (3.6), o resultado segue por indução em n . \square

A prova de (3.8) procede em dois passos, que são formulados em Lemas 3.2.3 e 3.2.4.

Lema 3.2.3. *A sequência $\{\omega_n\}$ satisfaz a seguinte equação linear de diferenças de segunda ordem*

$$\omega_n(b) = b(2 - b^2)\omega_{n-1}(b) - b^3(1 - b)\omega_{n-2}(b), \quad n \geq 3, \quad (3.10)$$

com condições iniciais $\omega_1(b) = b$ e $\omega_2(b) = b^2(2 - b)$.

Prova do Lema 3.2.3. É simples verificar que para $n = 3$, ambas as fórmulas (3.9) e (3.10) levam a $\omega_3(b) = b^3(4 - 3b - b^2 + b^3)$. Da definição de ω_n dada em (3.9), temos que para qualquer $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(b) &= b^{n+1} + \sum_{\ell=2}^n b^\ell (1 - b) [\omega_{n-\ell+2}(b) + (1 - b)\omega_{n-\ell+1}(b)] + b(1 - b)\omega_n(b) \\ &= b^{n+1} + \sum_{\ell=2}^{n-1} b^{\ell+1} (1 - b) [\omega_{n-\ell+1}(b) + (1 - b)\omega_{n-\ell}(b)] + b^2(1 - b) [\omega_n(b) + (1 - b)\omega_{n-1}(b)] \\ &\quad + b^2(1 - b) [\omega_n(b) + (1 - b)\omega_{n-1}(b)] + b(1 - b)\omega_n(b). \end{aligned}$$

Portanto, colocando em evidência o fator comum b , obtemos

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(b) &= b[\omega_n(b) - b(1 - b)\omega_{n-1}(b)] + b^2(1 - b) [\omega_n(b) + (1 - b)\omega_{n-1}(b)] + b(1 - b)\omega_n(b) \\ &= b(2 - b^2)\omega_n(b) - b^3(1 - b)\omega_{n-1}(b), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. \square

Lema 3.2.4. Para todo $b \in [0, 1/d]$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\omega_n(b)]^{1/n} = \lambda(b) = \frac{b}{2}(2 - b^2 + \psi(b)).$$

Prova do Lema 3.2.4. É suficiente considerar $b \in (0, 1/d]$. A fim de resolver (3.10), calculamos o discriminante Δ_0 do polinômio característico associado.

$$\lambda^2 - b(2 - b^2)\lambda + b^3(1 - b) = 0, \quad (3.11)$$

obtendo $\Delta_0 = b^2(4 - 4b + b^4) > 0$, então a equação (3.11) tem duas raízes distintas e reais, dadas por

$$\lambda_{\pm} = b/2(2 - b^2 \pm \psi(b)).$$

A solução geral de (3.10) é expressa como

$$\omega_n(b) = c_1(\lambda_-)^n + c_2(\lambda_+)^n = (\lambda_+(b))^n \left[c_1 \left(\frac{\lambda_-(b)}{\lambda_+(b)} \right)^n + c_2 \right], \quad (3.12)$$

onde c_1, c_2 são funções de b determinadas pelas condições iniciais. Como $\lambda(b) = \lambda_+(b) > \lambda_-(b)$, o resultado segue.

Observação 3.2.2. Para derivar uma fórmula explícita para ω_n , estendemos a sequência $\{\omega_n\}$ para o índice $n = 0$, reescrevendo

$$\omega_n(b) = b(2 - b^2)\omega_{n-1}(b) - b^3(1 - b)\omega_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (3.13)$$

com condições iniciais $\omega_0(b) = 1$, $\omega_1(b) = b$. Impondo essas condições iniciais em (3.12), obtemos

$$c_1(b) = \frac{\psi(b) - b^2}{2\psi(b)} \quad \text{e} \quad c_2(b) = \frac{\psi(b) + b^2}{2\psi(b)}.$$

Consequentemente, para todo $n \geq 0$ e $b \in [0, 1/d]$,

$$\omega_n(b) = \frac{b^n}{2^{n+1}\psi(b)} \left[(\psi(b) - b^2)(2 - b^2 - \psi(b))^n + (\psi(b) + b^2)(2 - b^2 + \psi(b))^n \right], \quad (3.14)$$

□

Observação 3.2.3. Com a suposição de que um produtório da forma $\prod_{k=1}^0$ é igual a 1, considere a sequência $\{F_n\}_{n \geq 1}$, dada por

$$F_n(b) = b^n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - b^k) + \sum_{j=1}^{n-1} \left[b^{n-j} F_j(b) \prod_{k=1}^{n-j-1} (1 - b^k) \right].$$

Ressaltamos que ω_n é igual à função G_n obtida através do método alternativo descrito em [Lebensztayn et al. \(2005\)](#), na observação no final da Seção 4, para construir outra função aproximada a F_n , tal que $F_n(b) \geq G_n(b)$ para qualquer b . Isto é, ω_n é idêntica à função G_n obtida quando a inequação $(1 - b^k) \geq (1 - b^2)$ para $k \geq 2$ é usada ao invés de $(1 - b^k) \geq (1 - b)$ para $k \geq 1$, na definição da função G_n . Essa é a razão pela qual o limitante superior estabelecido aqui coincide com o conjecturado em [Lebensztayn et al. \(2005\)](#).

3.2.2 Prova do Teorema 3.1.1

Seja $d \geq 2$ fixado. Definimos as funções

$$h_n^{(d)}(p) = \left[\omega_n(\gamma^{(d)}(p)) \right]^{1/n} - \frac{1}{d}, \quad n \geq 1, \quad \text{e} \quad h^{(d)}(p) = \lambda(\gamma^{(d)}(p)) - \frac{1}{d}. \quad (3.15)$$

Da equação (3.8), temos que, para qualquer $p \in [0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(d)}(p) = f^{(d)}(p).$$

Além disso, observamos que

$$\lambda(b) = \frac{1}{d} \iff R^{(d)}(b) = 0, \quad (3.16)$$

onde $R^{(d)}$ é o polinômio do quarto grau dado em (3.4). Desde que λ é uma função crescente, satisfazendo $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(1/d) > 1/d$ (pois $R^d(1/d) = (d-1)/d > 0$), concluímos que as equações equivalentes em (3.16) têm uma única solução $\bar{v} = \bar{v}(d)$ no intervalo $[0, 1/d]$. Além disso, segue que

$$\bar{p}(d) = \frac{(d+1)\bar{v}}{1+d\bar{v}^2},$$

é a única raiz da equação $h^{(d)}(p) = 0$ no intervalo $[0, 1]$.

É simples verificar que $\{h_n^{(d)}\}$ e $h^{(d)}$ dadas em (3.15) satisfazem as condições do Lema 1.5.4. Portanto, definindo $\bar{p}_n = \bar{p}_n(d)$ como a única raiz de $h_n^{(d)}$ no intervalo $[0,1]$, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_n(d) = \bar{p}(d).$$

Mas para qualquer $p > \bar{p}_n(d)$, temos que $h_n^{(d)}(p) > 0$, daí, pelo Lema 3.2.1, o modelo dos sapos em \mathbb{T}_d sobrevive com probabilidade positiva. Consequentemente,

$$p_c(\mathbb{T}_d) \leq \bar{p}_n(d),$$

e a parte (i) do Teorema 3.1.1 é estabelecida fazendo $n \rightarrow \infty$.

A parte (ii) é provada expandindo e simplificando apropriadamente a equação

$$R^{(d)}(\gamma^{(d)}(p)) = 0.$$

A manipulação da fórmula envolvida pode ser realizada usando um software matemático. Essa ferramenta também pode ser usada para estabelecer que $Q^{(d)}(\hat{p}(d)) > 0$ para todo $d \geq 2$. Juntamente com o fato que $Q^{(d)}(0) < 0$, isso leva à parte (iii).

Os resultados desenvolvidos nesse capítulo são apresentados em [Lebensztayn e Utria \(2019\)](#).

Referências

- Alves, O. S. M., Machado, F. P., e Popov, S. (2002a). Phase transition for the frog model. *Electron. J. Probab.*, 7(16), 21 p.
- Alves, O. S. M., Machado, F. P., e Popov, S. (2002b). The shape theorem for the frog model. *Ann. Appl. Probab.*, 12(2), 534–547.
- Alves, O. S. M., Machado, F. P., Popov, S., e Ravishankar, K. (2001). The shape theorem for the frog model with random initial configuration. *Markov Process. Related Fields*, 7(4), 525–539.
- Athreya, K. B., e Ney, P. E. (1972). *Branching processes*. Springer-Verlag, New York.
- De Boislaurent, F. F. D. B. (1807). *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*. Chez Dondey-Dupré.
- Dickson, L. E. (1917). *Elementary theory of equations*. J. Wiley & Sons.
- Döbler, C., Gantert, N., Höfelsauer, T., Popov, S., Weidner, F., et al. (2018). Recurrence and transience of frogs with drift on \mathbb{Z}^d . *Electronic Journal of Probability*, 23.
- Fontes, L. R., Machado, F. P., e Sarkar, A. (2004). The critical probability for the frog model is not a monotonic function of the graph. *J. Appl. Probab.*, 41(1), 292–298.
- Fourier, J. (1820). Sur l'usage du théorème de descartes dans la recherche des limites des racines. *Bulletin des sciences, par la société philomatique de paris*, 156–165.
- Gallo, S., e Rodriguez, P. M. (2018). Frog models on trees through renewal theory. *Journal of Applied Probability*, 55(3), 887–899. doi: 10.1017/jpr.2018.56
- Grimmett, G. (1999). *Percolation* (2nd ed.). Springer-Verlag, Berlin.
- Grimmett, G. (2018). *Probability on graphs: random processes on graphs and lattices* (Vol. 8). Cambridge University Press.
- Hoffman, C., Johnson, T., e Junge, M. (2016). From transience to recurrence with Poisson tree frogs. *Ann. Appl. Probab.*, 26(3), 1620–1635.
- Hoffman, C., Johnson, T., e Junge, M. (2017). Recurrence and transience for the frog model on trees. *Ann. Probab.*, 45(5), 2826–2854.
- Kosygina, E., e Zerner, M. P. (2017). A zero-one law for recurrence and transience of frog processes. *Probability Theory and Related Fields*, 168(1-2), 317–346.
- Lalley, S. P., e Sellke, T. (1998). Limit set of a weakly supercritical contact process on a homogeneous tree. *Ann. Probab.*, 26(2), 644–657.
- Lebensztayn, E., Machado, F. P., e Popov, S. (2005). An improved upper bound for the critical probability of the frog model on homogeneous trees. *J. Stat. Phys.*, 119(1-2), 331–345.
- Lebensztayn, E., e Utria, J. (2018). *Phase transition for the frog model on biregular trees*. arXiv: [1811.05495](https://arxiv.org/abs/1811.05495).
- Lebensztayn, E., e Utria, J. (2019). *A new upper bound for the critical probability of the frog on homogeneous trees*. arXiv: [1901.06412](https://arxiv.org/abs/1901.06412).

- Lyons, R., e Peres, Y. (2017). *Probability on trees and networks* (Vol. 42). Cambridge University Press.
- Popov, S. (2001). Frogs in random environment. *J. Statist. Phys.*, 102(1-2), 191–201.
- Ramírez, A. F., e Sidoravicius, V. (2004). Asymptotic behavior of a stochastic combustion growth process. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 6(3), 293–334.
- Rosenberg, J. (2017). The frog model with drift on \mathbb{R}^d . *Electronic Communications in Probability*, 22.
- Rosenberg, J. (2018). Recurrence of the frog model on the 3,2-alternating tree. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 15(2), 811–836.
- Telcs, A., e Wormald, N. C. (1999). Branching and tree indexed random walks on fractals. *J. Appl. Probab.*, 36(4), 999–1011.

APÊNDICE A – Convergência, Teorema de Taylor, e Fórmula explícita para $\bar{p}(d)$

Este apêndice contém algumas notações sobre ordens de convergência, o Teorema de Taylor multivariado, e finaliza com a solução de Descartes da equação $Q^{(d)}(p) = 0$, em que $Q^{(d)}(p)$ é o polinômio dado no enunciado do Teorema 3.1.1[parte (ii)].

A.1 Ordens de convergência

Para funções $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, escrevemos $f(d) = O(g(d))$ se existem uma constante $C > 0$ e um inteiro $d_0 \geq 1$, tal que para todo $d \geq d_0$

$$\left| \frac{f(d)}{g(d)} \right| \leq C.$$

Se $f(d) = O(g(d))$ e $g(d) = O(f(d))$ então, escrevemos $f(d) = \Theta(g(d))$.

Similarmente, para funções $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, escrevemos $f(d_1, d_2) = O(g(d_1, d_2))$ se existem uma constante $C > 0$ e inteiros $d_0^{(1)}, d_0^{(2)} \geq 1$, tal que para todo $d_1 \geq d_0^{(1)}$, $d_2 \geq d_0^{(2)}$

$$\left| \frac{f(d_1, d_2)}{g(d_1, d_2)} \right| \leq C.$$

Se $f(d_1, d_2) = O(g(d_1, d_2))$ e $g(d_1, d_2) = O(f(d_1, d_2))$ então, escrevemos $f(d_1, d_2) = \Theta(g(d_1, d_2))$.

A.2 Teorema de Taylor

Seja $f : U \mapsto \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. O *gradiente* de f no ponto $\mathbf{a} \in U$, é o vetor

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{a}) \right),$$

em que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ significa a derivada de f em relação a sua i -ésima variável, seja qual for o nome que se atribua a ela.

Além disso, assuma que f possui as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x})$ em todo ponto \mathbf{x} do aberto U . A j -ésima derivada parcial da função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \mapsto \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{x} \in U$ será indicada por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Se essas derivadas parciais de segunda ordem existirem em cada ponto $x \in U$, teremos d^2 funções $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : U \mapsto \mathbb{R}$. Quando tais funções forem contínuas, diremos que f é de classe C^2 .

Teorema A.2.1 (Taylor). *Seja $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Fixado $\mathbf{a} \in U$, temos que*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2), \quad \text{conforme } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a},$$

em que $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d u_i v_i$, denotam a norma Euclidiana em \mathbb{R}^d e o produto interno de $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ por $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$.

A.3 Solução de Descartes para $Q^{(d)}(p) = 0$

A fim de encontrar uma fórmula explícita para o limitante superior apresentado em (3.3), resolvemos aqui a equação $Q^{(d)}(p) = 0$, e isolamos a única raiz real no intervalo $(0,1)$. Aqui apresentamos as ideias principais da demonstração, para mais detalhes veja-se o livro de Dickson (1917).

Precisamos da seguinte definição.

Definição A.3.1. Para $d \geq 2$ fixado, definimos as constantes

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{2(d+1)^2(d+2)}{(3d+1)^2}, \\ \mathfrak{R} &= \frac{(d+1)^3(5d^2+2d+1)}{d(3d+1)^3}, \\ \mathfrak{S} &= -\frac{(d+1)^4(2d+1)}{(3d+1)^4}, \\ \mathfrak{D} &= -\frac{(d-1)^2(d+1)^6(16d^3-259d^2-162d-27)}{3456d^2(3d+1)^6}, \\ \mathfrak{P} &= -\frac{(d-1)^2(d+1)^4}{36(3d+1)^4}, \\ \Theta &= \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{-\mathfrak{P}^3}}\right), \text{ com } \arccos : [-1, 1] \mapsto [0, \pi].\end{aligned}\tag{A.1}$$

Também, seja

$$\mathfrak{K} = \begin{cases} 6^{-1/2}[-\Omega + 6\{(\mathfrak{D} + \sqrt{\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{P}^3})^{1/3} + (\mathfrak{D} - \sqrt{\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{P}^3})^{1/3}\}]^{1/2} & \text{se } 2 \leq d \leq 9, \\ 6^{-1/2}[-\Omega + 12\sqrt{-\mathfrak{P}} \cos(\Theta)]^{1/2} & \text{se } d \geq 10. \end{cases}$$

Teorema A.3.1. Para qualquer $d \geq 2$,

$$\bar{p}(d) = \frac{d+1}{3d+1} - \mathfrak{K} + \frac{[\mathfrak{K}(-4\mathfrak{K}^3 - 2\mathfrak{K}\Omega + \mathfrak{R})]^{1/2}}{2\mathfrak{K}}.\tag{A.2}$$

Prova do Teorema A.3.1. Primeiro note-se que pela regra dos signos de Descartes, $Q^{(d)}$ tem uma ou três raízes positivas. Naturalmente, $\bar{p}(d)$ é a menor raiz positiva. Começamos aplicando a transformação de Tschirnhaus ao polinômio $Q^{(d)}$, isto é, $p = z + \frac{d+1}{3d+1}$ e obtemos a forma reduzida.

$$z^4 + \Omega z^2 + \mathfrak{R}z + \mathfrak{S} = 0,\tag{A.3}$$

onde Ω, \mathfrak{R} e \mathfrak{S} são dados na Definição A.3.1. Logo, considere a seguinte equação cúbica auxiliar

$$x^3 + \frac{1}{2}\Omega x^2 + \frac{1}{16}(\Omega^2 - 4\mathfrak{S})x - \frac{1}{64}\mathfrak{R}^2. \quad (\text{A.4})$$

Para resolver a equação (A.3), temos que escolher qualquer raiz \mathfrak{X} não nula de (A.4) e definir \mathfrak{K} como a raiz quadrada positiva do \mathfrak{X} escolhido. Portanto, as quatro raízes de (A.3) são as raízes dos seguintes polinômios quadráticos

$$\begin{aligned} g_1(z) &= z^2 + 2\mathfrak{K}z + \frac{1}{2}\Omega + 2\mathfrak{K}^2 - \frac{\mathfrak{R}}{4\mathfrak{K}}, \\ g_2(z) &= z^2 + 2\mathfrak{K}z - \frac{1}{2}\Omega + 2\mathfrak{K}^2 + \frac{\mathfrak{R}}{4\mathfrak{K}}, \end{aligned}$$

dadas por

$$\begin{aligned} z_1 &= -\mathfrak{K} - \frac{[\mathfrak{K}(-4\mathfrak{K}^3 - 2\mathfrak{K}\Omega + \mathfrak{R})]^{1/2}}{2\mathfrak{K}}, \\ z_2 &= -\mathfrak{K} + \frac{[\mathfrak{K}(-4\mathfrak{K}^3 - 2\mathfrak{K}\Omega + \mathfrak{R})]^{1/2}}{2\mathfrak{K}}, \\ z_3 &= \mathfrak{K} - \frac{[-\mathfrak{K}(4\mathfrak{K}^3 + 2\mathfrak{K}\Omega + \mathfrak{R})]^{1/2}}{2\mathfrak{K}}, \\ z_4 &= \mathfrak{K} + \frac{[-\mathfrak{K}(4\mathfrak{K}^3 + 2\mathfrak{K}\Omega + \mathfrak{R})]^{1/2}}{2\mathfrak{K}}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A fim de estudar as raízes de (A.3), calculamos o discriminante Δ da equação (A.4), obtendo que $\Delta = d^{-4}(3d+1)^{-10}\mathfrak{H}_0(d)/4096$, onde

$$\mathfrak{H}_0(d) = (d-1)^4(d+1)^{12}(32d^3 - 275d^2 - 162d - 27).$$

Usando o Teorema de Budan-Fourier (1807,1820)[veja-se De Boislaurant (1807), Fourier (1820)] para \mathfrak{H}_0 , temos que \mathfrak{H}_0 tem 0 raízes reais em (2,9) e que (9,10) contém exatamente uma única raiz real (i.e., (9,10) é um intervalo *isolado*), e pelo fato que $\mathfrak{H}_0(9) < 0 < \mathfrak{H}_0(10)$, concluímos que $\Delta < 0$ para $2 \leq d \leq 9$ e $\Delta > 0$ para $d \geq 10$. Portanto, separamos a prova em dois casos:

- (i) ($2 \leq d \leq 9$). Neste caso, temos que $\Delta < 0$, a equação (A.3) tem duas raízes reais distintas e duas raízes complexas, portanto as raízes de $Q^{(d)}$ são uma negativa, uma positiva e duas complexas conjugadas. Além disso, a equação (A.4) tem uma única raiz real, que é

positiva. O valor de \mathfrak{R} dado no enunciado do Teorema A.3.1 para $2 \leq d \leq 9$ é exatamente a raiz quadrada positiva da única raiz real da equação (A.4), a qual foi obtida usando a solução de Cardano para cúbicas. Observe-se que $z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ (caso contrário z_3 seria negativo). Portanto, $z_2 + (d+1)/(3d+1)$ é a única raiz positiva de $Q^{(d)}$, o que finaliza a prova da fórmula para $\bar{p}(d)$ neste caso.

(ii) ($d \geq 10$). Agora, temos que $\Delta > 0$, $\Omega < 0$ e $4\mathfrak{S} - \Omega < 0$, as raízes de (A.3) são todas reais e distintas, e isso implica que $Q^{(d)}$ tem três raízes positivas e uma negativa. Além disso, a equação (A.4) tem três raízes reais positivas, que são melhor expressadas na forma trigonométrica (o chamado de caso irreduzível). O valor de \mathfrak{R} dado no enunciado do Teorema A.3.1 para $d \geq 10$ é a raiz quadrada positiva de uma dessas raízes. Assim, as quatro raízes de (A.3) são $z_1 < z_2$ and $z_3 < z_4$. Para finalizar a prova, é suficiente mostrar que $z_1 < -(d+1)/(3d+1)$, mas isso é verdade pois $g_1(-(d+1)/(3d+1)) < 0$.

□