



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação**

Izabella Thaís Oliveira Gomes

**Estabilização e análise de estabilidade local de  
sistemas não lineares contínuos no tempo  
representados por modelos nebulosos  
Takagi-Sugeno**

Campinas  
2020

Izabella Thaís Oliveira Gomes

**Estabilização e análise de estabilidade local de sistemas  
não lineares contínuos no tempo representados por  
modelos nebulosos Takagi-Sugeno**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

**Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres**

**Coorientador: Prof. Dr. Ricardo C. L. F. Oliveira**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA IZABELLA THAÍS OLIVEIRA GOMES E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO LUIS DIAS PERES.

Campinas  
2020

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

G585e Gomes, Izabella Thaís Oliveira, 1994-  
Estabilização e análise de estabilidade local de sistemas não lineares contínuos no tempo representados por modelos nebulosos Takagi-Sugeno / Izabella Thaís Oliveira Gomes. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.

Coorientador: Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas nebulosos. 2. Desigualdades matriciais lineares. 3. Sistemas de controle por realimentação. 4. Controle robusto. 5. Sistemas não-lineares. I. Peres, Pedro Luis Dias, 1960-. II. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de, 1978-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Stabilization and local stability analysis of continuous-time nonlinear systems represented by Takagi-Sugeno fuzzy models

**Palavras-chave em inglês:**

Fuzzy systems

Feedback control systems

Robust control

Nonlinear systems

**Área de concentração:** Automação

**Titulação:** Mestra em Engenharia Elétrica

**Banca examinadora:**

Pedro Luis dias Peres

Eugênio de Bona Castelan Neto

Mateus Giesbrecht

**Data de defesa:** 28-02-2020

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Elétrica

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-4603-425X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/2782585414864260>

## COMISSÃO JULGADORA — DISSERTAÇÃO

**Candidata:** Izabella Thaís Oliveira Gomes

**RA:** 211507

**Data da Defesa:** 28/02/2020

**Título da Dissertação:** “Estabilização e análise de estabilidade local de sistemas não lineares contínuos no tempo representados por modelos nebulosos Takagi-Sugeno”

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Mateus Giesbrecht (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto (UFSC)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Tese) e na secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

*Aos meus pais Tereza e Claudio e à minha irmã Hellen.*

# Agradecimentos

Às agências de fomento à pesquisa. O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

Aos meus orientadores e mestres. Pedro, obrigada por proporcionar um ambiente de pesquisa tão seguro e saudável, pelo zelo com os seus alunos e pelas conversas descontraídas sobre viagens e comida. Ricardo, agradeço pela excelência em transmitir seus saberes, a paciência em esclarecer minhas dúvidas e por ser tão acessível a seus alunos. Eduardo, essa pesquisa teve grande influência e participação sua. Obrigada por me abrir esta porta e por seus conselhos de vida profissional. *“Fala com sabedoria e ensina com amor.” Provérbios 31 v.26.*

Aos meus familiares e amigos de Brasília. As escolhas nos levam a sacrifícios e abrir mão de estar ao lado de vocês todos os dias é o maior destes. Nayhane, Jhenerfer, Raquel, Davi, Analine, Rauenya, Ícaro, Luan, Vieira, Letícia, tia Silvana e todos demais amigos de longa data, obrigada por torcerem por mim e por todo o esforço para participarmos das vidas uns dos outros, mesmo que à distância. *“Deus é minha testemunha de como tenho saudade de todos vocês, com a profunda afeição de Cristo Jesus.” Bíblia Sagrada, Filipenses 1 v.8.*

Aos meus amigos e colegas de Campinas. Nem em minhas mais sinceras súplicas e nos mais doces sonhos eu conseguiria imaginar um grupo de amigos que me acolhesse tão bem e com os quais eu teria momentos tão felizes. Cecília, Glauco, Amanda, Daniel, Andressa, Alejandro, Bruno Pereira, Lucas, Bruno, Daniel Campos, Álvaro, Simone e Vitor; vocês fizeram dessa cidade um lar para mim. Agradeço também aos meus colegas da igreja, que me trouxeram palavras de vida e momentos de descontração, e aos colegas da Bosch, por me darem todo o suporte necessário para viver a dupla jornada no segundo ano de pesquisa. *“Ora, àquele que é poderoso para fazer tudo muito mais abundantemente além daquilo que pedimos ou pensamos, segundo o poder que em nós opera.” Bíblia Sagrada, Efésios 3 v.20.*

À minha irmã e melhor amiga, Hellen. Embarcamos nessa aventura juntas, e você foi a melhor companhia que eu poderia ter. Há exatos dois anos nos mudávamos para Campinas, eu para cursar este mestrado, e você, a sua especialização; e hoje concluímos juntas. Sei que vivemos momentos difíceis, mais você do que eu, mas minha alma sempre pôde descansar segura, sabendo que eu a tinha ao meu lado e que cuidaríamos uma da outra. Um novo ciclo se inicia nas nossas vidas. Eu aqui, você em Brasília; seguirei meu caminho, você, o seu; mas sempre haverá o nosso caminho, nossa amizade, nossa irmandade, nosso amor. *“Permaneça o amor fraternal.” Bíblia Sagrada, Hebreus 13 v.1.*

Aos meus pais, Claudio e Tereza. Vocês são a matéria-prima de toda a essência

do meu ser. As suas paixões e personalidades me moldaram e me trouxeram até aqui. Meu pai, com sua força, garra, sensibilidade e sonhos imensos; minha mãe, com sua persistência, fé, dedicação e ternura inigualáveis. Vocês me ensinaram a enxergar a vida com paixão – que me faz ir às nuvens – e equilíbrio – que me mantêm firmes os pés. Eu os amo e admiro com o sentimento mais sincero que há! Obrigada por me darem um lar para onde sei que sempre poderei retornar, haja o que houver. Obrigada também por me darem impulso para voar e ir além do que jamais sonhei ser capaz de ir. *“Como flecha na mão do guerreiro são os filhos nascidos na sua juventude.” Bíblia Sagrada, Salmos 127 v.4.*

Ao Deus da minha salvação. Apesar de todas as minhas limitações, o Senhor me trouxe até aqui. Agradeço-te Deus, pois me presenteaste com todas as dádivas e pessoas junto às quais percorro esse trecho do rio tortuoso chamado vida, até desaguar no oceano de uma eternidade em ti. Sigo para um novo desafio, acreditando que és o combustível da pequena embarcação que sou, o norte da minha bússola e o vento em minhas velas. *“Quando disse: o meu pé vacila; a tua benignidade, Senhor, me susteve.” Bíblia Sagrada, Salmos 94 v.18.*

# Resumo

Esta dissertação aborda os problemas de análise de estabilidade local, estimativa de região de atração e estabilização local por realimentação de estados para sistemas não lineares contínuos no tempo representados por modelos nebulosos Takagi-Sugeno (T-S). Para certificar a estabilidade local e projetar o controlador, condições suficientes, expressas em termos de desigualdade matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) dependentes de parâmetros são fornecidas, tendo como base matrizes de Lyapunov e variáveis de folga polinomiais homogêneas de grau arbitrário. Utilizando-se uma representação politópica para a derivada das funções de pertinência do modelo T-S, evita-se a necessidade do estabelecimento de limitantes para a taxa de variação. Como contribuição adicional, propõe-se que termos não lineares da matriz Jacobiana associada ao modelo T-S sejam substituídos, sempre que possível, pela correspondente série de Taylor truncada em uma ordem pré-determinada, evitando a definição de um novo conjunto de parâmetros incertos, o que aumentaria a complexidade da representação. Exemplos emprestados da literatura T-S são utilizados para ilustrar que os métodos propostos fornecem melhores resultados que outras abordagens, em termos de maiores estimativas para as regiões de atração, tanto no caso de análise de estabilidade, quanto na síntese de controle estabilizante por realimentação de estados. Nesta dissertação também foi feito um estudo sobre o uso de programação linear, como alternativa aos resolvedores especializados em LMIs, para a análise de estabilidade de sistemas lineares incertos.

Palavras-chave: Modelos nebulosos Takagi-Sugeno. Estabilidade local. Realimentação de estados. Desigualdades matriciais lineares.



# Abstract

This dissertation addresses the problems of local stability analysis, estimation of domains of attraction, and local state-feedback stabilization for continuous-time nonlinear systems represented by Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models. Sufficient conditions, expressed in terms of parameter-dependent Linear Matrix Inequalities (LMIs), are given to certify the local stability and for control design, based on homogenous polynomial Lyapunov matrices and slack variables of arbitrary degree. By using a polytopic representation for the time-derivative of the membership functions of the T-S model, upper bounds for the variation rates are not required. As an additional contribution, nonlinear terms of the Jacobian matrix associated with the T-S model are replaced, whenever possible, by the corresponding Taylor series, truncated at a predetermined order, avoiding the definition of a new set of uncertain parameters, which would increase the complexity of the representation. Examples borrowed from the T-S literature are used to illustrate that the proposed methods provide better results than other approaches in terms of larger estimates for the regions of attraction, both in the case of stability analysis and in the synthesis of state-feedback stabilizing controllers. A study about the use of linear programming, as an alternative to specialized LMI solvers, for stability analysis of uncertain linear systems is also included in the dissertation.

Key-words: Takagi-Sugeno fuzzy models. Local stability. State-feedback. Linear matrix inequalities.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Domínio de validade $\mathcal{X}$ do modelo nebuloso T–S (pontilhado preto) com $b = 1.94$ , retrato de fase (setas cinza claro) e estimativas da região de atração utilizando o <b>Corolário 3.1</b> e o <b>Corolário 3.2</b> com $J(\theta)$ (azul contínuo) e $J(\gamma)$ (vermelho tracejado) com grau $g = 3$ de $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1. . . . .	39
Figura 2 – Domínio de validade $\mathcal{X}$ do modelo nebuloso T–S com $b = 2$ e estimativa da região de atração considerando $P_g(\alpha)$ de graus $g = 2$ e $g = 3$ para o <b>Corolário 3.2</b> (azul contínuo) com $J(\theta)$ , <b>Teorema 6.1</b> (CAMPOS, 2015) (verde traço-ponto), <b>Teorema 2</b> de (LEE <i>et al.</i> , 2012) (magenta tracejado) e <b>Teorema 2</b> de (LEE <i>et al.</i> , 2014) com 20 iterações (vermelho pontilhado), para o Exemplo 3.1. . . . .	40
Figura 3 – Domínio de validade $\mathcal{X}$ do modelo nebuloso T–S e estimativa da região de atração com $P_g(\alpha)$ de grau $g = 2$ <b>Corolário 3.2</b> com $J(\theta)$ (azul contínuo) e $J(\gamma)$ (vermelho tracejado), para o Exemplo 3.2. . . . .	42
Figura 4 – Domínio de validade $\mathcal{X}$ do modelo nebuloso T–S e estimativa da região de atração considerando $P_g(\alpha)$ de grau $g = 2$ para o <b>Corolário 3.2</b> (azul contínuo) com $J(\gamma)$ , <b>Teorema 6.1</b> (CAMPOS, 2015) (verde traço-ponto), <b>Teorema 2</b> de (LEE <i>et al.</i> , 2012) (magenta tracejado) e <b>Teorema 2</b> de (LEE <i>et al.</i> , 2014) com 20 iterações (vermelho pontilhado), para o Exemplo 3.2. . . . .	43
Figura 5 – Estimativas da região de atração considerando $P_g(\alpha)$ de grau $g = 3$ para o <b>Corolário 3.2</b> com $J(\theta)$ e <b>Teorema 2</b> (LEE <i>et al.</i> , 2014) com 20 iterações, para o Exemplo 3.3. . . . .	44
Figura 6 – Estimativa da região de atração obtida com o método proposto (magenta contínuo), domínio de validade do modelo (cinza pontilhado) e trajetórias (preto traço-ponto) iniciando em $\circ$ e terminando na origem (quadrado amarelo), para o Exemplo 4.1. . . . .	51
Figura 7 – Estimativas da região de atração obtidas com o método proposto (magenta contínuo), Lee <i>et al.</i> (2012, Teorema 6) (azul tracejado), e Lee e Kim (2014, Teorema 2) (verde traço-ponto), e domínio de validade do modelo (cinza pontilhado), para o Exemplo 4.1. . . . .	52

Figura 8 – Domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo nebuloso T–S (pontilhado preto), trajetórias (preto traço-ponto) iniciando em  $\circ$  e terminando na origem (quadrado amarelo) e estimativas da região de atração utilizando o Corolário 4.1 proposto (magenta contínuo), Lee *et al.* (2012, Theorem 6) (azul tracejado), Lee e Kim (2014, Theorem 2) (verde traço-ponto) e Pan *et al.* (2012b, Theorem 2) (vermelho pontilhado), para o Exemplo 4.2. . . . . 53

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Número de linhas de LMIs $L$ , número de variáveis $V$ e domínio de validade dos estados $b_{\max}$ associados ao <b>Corolário 3.1</b> com $J(\theta)$ e $J(\gamma)$ para diferentes valores do grau $g$ de $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1. . . . .	38
Tabela 2 – Número de linhas de LMIs $L$ , número de variáveis $V$ e domínio de validade dos estados $b_{\max}$ associados ao <b>Corolário 3.2</b> com $J(\theta)$ e $J(\gamma)$ para diferentes valores do grau $g$ de $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1. . . . .	38
Tabela 3 – Valores do $tr(W)$ e área $\mathcal{A}$ das estimativas de região de atração com $b = 1.94$ para o Corolário 3.1 com $J(\theta)$ e $J(\gamma)$ para diferentes valores do grau $g$ de $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1. . . . .	39
Tabela 4 – Valores do $tr(W)$ e área $\mathcal{A}$ das estimativas de região de atração com $b = 1.94$ para o Corolário 3.2 com $J(\theta)$ e $J(\gamma)$ para diferentes valores do grau $g$ de $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1. . . . .	39
Tabela 5 – Número de linhas de LMIs $L$ , número de variáveis $V$ , área $\mathcal{A}$ da estimativa da região de atração contida no domínio de validade $\mathcal{X}$ do modelo T–S com $b = 2$ e grau $g = \{2, 3\}$ de $P_g(\alpha)$ para o <b>Corolário 3.2</b> com $J(\theta)$ , <b>Teorema 6.1</b> (CAMPOS, 2015), <b>Teorema 2</b> (LEE <i>et al.</i> , 2012) e <b>Teorema 2</b> (LEE <i>et al.</i> , 2014) com 20 iterações, para o Exemplo 3.1. . . . .	40
Tabela 6 – Número de linhas de LMIs $L$ , número de variáveis $V$ e área $\mathcal{A}$ da estimativa da região de atração associados ao <b>Corolário 3.2</b> com $J(\theta)$ e $J(\gamma)$ para o grau $g = 2$ de $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.2. . . . .	42
Tabela 7 – Número de linhas de LMIs $L$ , número de variáveis $V$ , área $\mathcal{A}$ da estimativa da região de atração contida no domínio de validade $\mathcal{X}$ do modelo T–S com grau $g = 2$ de $P_g(\alpha)$ para o <b>Corolário 3.2</b> com $J(\gamma)$ , <b>Teorema 6.1</b> (CAMPOS, 2015), <b>Teorema 2</b> (LEE <i>et al.</i> , 2012) e <b>Teorema 2</b> (LEE <i>et al.</i> , 2014) com 20 iterações, para o Exemplo 3.2. . . . .	42
Tabela 8 – Número de linhas de LMIs $L$ , número de variáveis $V$ e volume $\mathcal{V}$ da estimativa da região de atração contida no domínio de validade $\mathcal{X}$ do modelo T–S com $\bar{x}_1 = 7$ , grau $g = 3$ de $P_g(\alpha)$ e grau $d = (2g, 0, 0)$ de $X_d(\alpha, \theta, \gamma)$ para o <b>Corolário 3.2</b> e <b>Teorema 2</b> (LEE <i>et al.</i> , 2014) com 20 iterações, para o Exemplo 3.3. . . . .	44
Tabela 9 – Áreas das estimativas para a região de atração $\mathcal{A}$ , número de variáveis escalares $V$ e número de linhas de LMIs $L$ para cada condição, para o Exemplo 4.1. . . . .	51

Tabela 10 – Áreas das estimativas para a região de atração $\mathcal{A}$ , número de variáveis escalares $V$ e número de linhas de LMIs $L$ para cada condição, para o Exemplo 4.2. . . . .	53
Tabela 11 – Número $V$ de variáveis escalares e $L$ de restrições (linhas de LMIs, no caso dos Lemas 5.1–5.4) para sistemas de 2 estados e 2 vértices utilizando os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e os Teoremas 5.1 e 5.2 propostos com $g = 2$ . . . . .	58
Tabela 12 – Porcentagem de sistemas estáveis ( $e$ ) e tempo de processamento computacional ( $t$ ) para sistemas de 2 estados e 2 vértices para os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e os Teoremas 5.1 e 5.2 propostos com $g = 2$ , com $\lambda_{max} = \{-0.001, -10\}$ e os <i>solvers</i> SeDuMi e Mosek. . . . .	59
Tabela 13 – Porcentagem de sistemas estáveis ( $e$ ), tempo de processamento computacional ( $t$ ), número $V$ de variáveis escalares e $L$ de restrições (linhas de LMIs, no caso dos Lemas 5.1–5.4) para sistemas de 10 estados e 2 vértices para os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e para os Teoremas 5.1 e 5.2 propostos com $g = 2$ , com $\lambda_{max} = \{-0.001, -10\}$ . . . . .	60
Tabela 14 – Porcentagem de sistemas estáveis ( $e$ ), tempo de processamento computacional ( $t$ ), número $V$ de variáveis escalares e $L$ de restrições (linhas de LMIs, no caso dos Lemas 5.1–5.4) para sistemas de 2 estados e 30 vértices para os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e para os Teoremas 5.1 e 5.2 propostos com $g = 1$ e $\lambda_{max} = -0.001$ . . . . .	60
Tabela 15 – Porcentagem de sistemas estáveis ( $e$ ), tempo de processamento computacional ( $t$ ), número $V$ de variáveis escalares e $L$ de restrições (linhas de LMIs, no caso dos Lemas 5.1–5.4) para sistemas de 20 estados e 2 vértices para os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e para o Teorema 5.1 proposto, com $g = 1$ , para $\lambda_{max} = -0.001$ . . . . .	61

# Lista de símbolos e abreviações

T-S	Takagi-Sugeno
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (Desigualdade matricial linear)
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{N}$	Conjunto dos número naturais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{R}^n$	Espaço de vetores reais de ordem $n$
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espaço de matrizes reais de ordem $n \times n$
$v(t)$	Vetor de parâmetros variantes no tempo
$\dot{v}(t)$	Derivada no tempo do vetor $v(t)$
$\Lambda_N$	Simplex unitário de dimensão $N$
$\otimes$	Produto de Kronecker
$h^i$	$i$ -ésimo vértice de um politopo
$co\{\cdot\}$	Combinação convexa
$M^T$ ( $m^T$ )	Transposta da matriz (vetor) $M$ ( $m$ )
$M^{-1}$	Inversa da matriz $M$
$M_{\perp}$	Espaço nulo da matriz $M$ ( $MM_{\perp} = 0$ )
$p(M)$	Posto da matriz $M$
$tr(M)$	Traço da matriz $M$
$He(M)$	Indica a soma da matriz $M$ com sua transposta $M^T$
$M > 0$	Matriz definida positiva
$M < 0$	Matriz definida negativa
$m_{ij}$	elemento da linha $i$ e coluna $j$ da matriz $M$
$M_g(\alpha)$	Matriz polinomial homogênea de grau $g$ , $\alpha \in \Lambda_N$

1	Matriz de uns de dimensão apropriada
0	Matriz de zeros de dimensão apropriada
$\frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha_i}$	Derivada parcial de $M(\alpha)$ em relação a $\alpha_i$

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos matemáticos</b>	<b>23</b>
2.1	Sistemas não lineares	23
2.2	Modelos nebulosos	24
2.3	Sistemas nebulosos Takagi-Sugeno	24
2.4	Não linearidade de setor local	26
2.5	Modelagem nebulosa T-S por não linearidade de setor local	26
2.6	Domínio de validade do modelo T-S	27
2.7	Resultados auxiliares	27
2.8	Testes de dimensão finita	29
<b>3</b>	<b>Análise de estabilidade local e estimativa de região de atração</b>	<b>31</b>
3.1	Análise de estabilidade	31
3.2	Estimativa de região de atração	34
3.2.1	Cômputo de estimativa de região de atração	34
3.3	Resultados principais	34
3.4	Tratamento especial para a matriz Jacobiana	35
3.5	Exemplos numéricos	36
3.6	Conclusão	44
<b>4</b>	<b>Estabilização por realimentação de estados</b>	<b>46</b>
4.1	Outra abordagem para a análise de estabilidade	46
4.2	Controle estabilizante por realimentação de estados	47
4.3	Resultado principal	50
4.4	Exemplos numéricos	50
4.5	Conclusão	53
<b>5</b>	<b>Estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos por meio de programação linear</b>	<b>54</b>
5.1	Estabilidade robusta	54
5.2	Resultados principais	56
5.3	Exemplos numéricos	58
5.4	Conclusão	61
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>62</b>
	<b>Referências</b>	<b>65</b>



# 1 Introdução

O estudo da região de atração de um ponto de equilíbrio de sistemas não lineares é um desafio árduo, sendo que, em muitos casos, não é possível obter uma representação exata. Nas últimas décadas, modelos nebulosos Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985) têm sido empregados com sucesso na representação de sistemas não lineares em diversos contextos. A técnica conhecida como *não linearidade de setor local* (TANAKA; WANG, 2001) permite a exata representação de uma classe ampla de sistemas não lineares por uma combinação de modelos lineares definidos em um conjunto compacto do espaço de estados (considerando-se apenas os estados envolvidos na não linearidade). Assim, diversas técnicas baseadas no método direto de Lyapunov e em Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) (BOYD *et al.*, 1994) têm sido desenvolvidas para tratar os problemas de análise de estabilidade e projeto de controladores de sistemas não lineares representados por modelos nebulosos T-S. Além disso, abordagens baseadas em tais técnicas também proveem superfícies de nível que fornecem regiões invariantes (contrativas) no espaço de estados como estimativas da região de atração do ponto de equilíbrio.

Para investigar a estabilidade e sintetizar controladores para sistemas nebulosos T-S, o uso de funções quadráticas com uma matriz de Lyapunov constante (independente das funções de pertinência) tem sido amplamente explorado (TANAKA; WANG, 2001; FENG, 2006), fornecendo em alguns casos procedimentos convergentes em termos de LMIs (isto é, condições suficientes que se tornam assintoticamente necessárias) (MONTAGNER *et al.*, 2009; SALA; ARIÑO, 2007). Contudo, essa abordagem pode fornecer resultados conservadores em muitos casos. Como uma alternativa menos conservadora para funções quadráticas com uma matriz de Lyapunov constante (TANAKA; WANG, 2001), funções nebulosas de Lyapunov (isto é, dependentes das funções de pertinência) (TANAKA *et al.*, 2003) têm sido propostas no contexto de sistemas nebulosos T-S discretos (GUERRA; VERMEIREN, 2004) e contínuos no tempo (TANAKA *et al.*, 2001; TANAKA *et al.*, 2003; MOZELLI *et al.*, 2009).

Uma das maiores dificuldades em lidar com funções nebulosas de Lyapunov no domínio do tempo contínuo é a presença explícita das derivadas no tempo das funções de pertinência (que dependem dos estados) nas condições de estabilidade e de síntese de controladores. A solução mais simples para este caso consiste no uso de limitantes superiores para as derivadas no tempo das funções de pertinência, como proposto em Mozelli *et al.* (2009), Tognetti *et al.* (2011), Xie *et al.* (2015). No entanto, não há garantia quanto à estabilidade, caso a região em que os limitantes são válidos não seja conhecida. Isto porque, uma vez que os limitantes são definidos *a priori*, se a característica local inerente

do modelo nebuloso T–S não é levada em consideração, a região na qual a estabilidade é efetivamente verificada pode ser muito restrita. Desta maneira, essa estratégia também torna-se ineficiente para o projeto de controladores, pois, uma vez que o valor efetivo dos limitantes não pode ser conhecido de antemão, surge a necessidade de se realizar um teste *a posteriori* para verificar se o domínio de validade do modelo está completamente contido na região onde tais limitantes são válidos. Esse inconveniente foi parcialmente contornado recentemente por meio da proposição de condições de estabilidade e estabilizabilidade local que levam em consideração as características inerentes da representação de sistemas não lineares por modelos nebulosos T–S, garantindo a estabilidade da origem e produzindo uma estimativa da região de atração (BERNAL; GUERRA, 2010; PAN *et al.*, 2012b; GUERRA *et al.*, 2012; LEE *et al.*, 2012; LEE; KIM, 2014; LEE *et al.*, 2014; KIM *et al.*, 2016; MÁRQUEZ *et al.*, 2017; HU *et al.*, 2019).

Para apresentar o problema de estabilização local em termos de LMIs, são impostos limitantes absolutos nas derivadas parciais das funções de pertinência (BERNAL; GUERRA, 2010; PAN *et al.*, 2012b; GUERRA *et al.*, 2012; MÁRQUEZ *et al.*, 2017; HU *et al.*, 2019). Ou, inspirado por Tanaka *et al.* (2001), uma representação politópica do gradiente das funções de pertinência é considerada (LEE *et al.*, 2012; LEE; KIM, 2014; LEE *et al.*, 2014; KIM *et al.*, 2016; CAMPOS, 2015). Em ambos os casos, a estimativa da região de atração é baseada em superfícies de nível da função de Lyapunov. Resultados menos conservadores para estabilidade local também têm sido obtidos por meio da representação de modelos nebulosos por produto de tensores (ARIÑO; SALA, 2007) ou por estruturas multi-simplex (TOGNETTI *et al.*, 2011), utilizando técnicas de relaxações como os somatórios nebulosos multidimensionais (BERNAL; GUERRA, 2010; LEE; KIM, 2014; LEE *et al.*, 2014; HU *et al.*, 2019) e matrizes homogêneas polinomialmente dependentes de parâmetros (LEE; JOO, 2014; KIM *et al.*, 2016).

Em Lee *et al.* (2012), Lee e Kim (2014), a interseção do domínio de validade do modelo T–S com o espaço definido pelos limitantes das derivadas no tempo das funções de pertinência é levada em conta nas condições de análise e de síntese, provendo estimativas mais precisas para a região de atração. Porém, não há uma maneira única de definir os valores dos limitantes superiores usados na síntese. Em Pan *et al.* (2012b), Pan *et al.* (2012a), Márquez *et al.* (2017), sugestões para os limitantes superiores são propostas, enquanto que em Guerra *et al.* (2012), um limitante para o sinal de entrada (saturação) é imposto. Embora alguns trabalhos referentes à análise de estabilidade evitem o uso de limitantes na derivada no tempo das funções de pertinência (LEE *et al.*, 2014), extensões para o projeto de controladores ainda é uma questão em aberto.

Vale destacar que, no domínio do tempo discreto, modelos nebulosos T–S não apresentam o desafio de representação da taxa de variação. Assim, resultados para estimativas de região de atração e síntese de controladores em diversos cenários podem ser encontrados na literatura (KLUG *et al.*, 2015a; KLUG *et al.*, 2015b; DONG *et al.*, 2011).

Nesse contexto, este trabalho propõe novas condições para análise de estabilidade local e estimativa de regiões de atração, assim como técnicas de projeto de controladores por realimentação de estados, para sistemas não lineares contínuos no tempo representados por modelos nebulosos T–S obtidos a partir da técnica de não linearidade de setor local. Para tanto, são utilizadas funções nebulosas de Lyapunov construídas com matrizes homogêneas polinomialmente dependentes de parâmetros. Além disso, uma nova manipulação por produto de Kronecker nas derivadas no tempo da função de Lyapunov, juntamente com o uso de relaxações e do Lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001), viabilizam a obtenção de condições na forma de LMIs dependentes de parâmetros. O gradiente das funções de pertinência é modelado em termos de um politopo e, como outra novidade, os termos não lineares da matriz Jacobiana são representados, sempre que possível, por meio de uma expansão em série de Taylor truncada em uma ordem pré-determinada, evitando assim a introdução de mais um domínio de parâmetros e, como consequência, o aumento da complexidade da representação. As vantagens dessa abordagem tornam-se mais evidentes quando os termos não lineares da matriz Jacobiana possuem a mesma estrutura que os termos das funções de pertinência, como, por exemplo, em sistemas não lineares com campo vetorial polinomial.

Quanto à síntese de controladores, este trabalho também propõe uma técnica de projeto em que o conhecimento explícito dos limitantes das derivadas no tempo das funções de pertinência não é requerido. Condições de análise de estabilidade local (GOMES *et al.*, 2019), que explicitamente consideram o domínio de validade do modelo T–S representado como um politopo nas condições de estabilidade, são estendidas para prover condições de síntese para sistemas nebulosos T–S. Devido à dificuldade de manipulação das condições para a formulação de um problema de otimização baseado em LMIs para o projeto de controladores, é proposto um procedimento de dois estágios. No primeiro estágio, uma lei de controle estabilizante por realimentação de estados é computada para o sistema dual. Embora o controlador projetado não apresente garantias de estabilidade para o sistema original, esse controlador é utilizado como um dado de entrada em uma segunda condição de projeto que, se satisfeita, garante a estabilidade em malha fechada do sistema nebuloso T–S original e provê uma estimativa do domínio de atração dentro da região de validade do modelo.

No primeiro estágio, as condições são dadas em termos de desigualdades dependentes de parâmetros com uma variável escalar, tornando-se lineares para valores fixos dessa variável. O segundo estágio, que requer um ganho estabilizante de realimentação de estados dependente das funções de pertinência conhecido, é formulado em termos de LMIs dependentes de parâmetros com variáveis de folga. Ambos os estágios podem ser resolvidos por meio de relaxações LMIs, baseadas em matrizes polinomiais homogêneas de grau arbitrário. Uma solução factível no segundo estágio provê um controlador estabilizante de realimentação de estados e uma estimativa do domínio de atração, que é certificada por

meio da função de Lyapunov dependente das funções de pertinência dentro da região de validade do modelo nebuloso T–S. A função de Lyapunov também garante a estabilidade da malha fechada com o controlador inicial e, portanto, garante a mesma estimativa para a região de atração. Diversos exemplos numéricos encontrados na literatura são abordados neste manuscrito, de forma a ilustrar que os métodos propostos, tanto para análise de estabilidade local, quanto para a síntese de controle por realimentação de estados, podem prover melhores resultados, em termos de maiores estimativas da região de atração, quando comparados com outras abordagens disponíveis na literatura.

Outro objeto de estudo deste trabalho trata dos métodos utilizados para lidar com problemas de análise de estabilidade e controle em geral, com particular protagonismo para o uso de LMIs (BOYD *et al.*, 1994; OLIVEIRA; PERES, 2010). Os métodos mais populares, cujo surgimento pode ser atribuído aos grandes avanços computacionais das últimas décadas, são baseados em programação semi-definida. Porém, diversos métodos matemáticos e computacionais podem ser utilizados para a resolução do problema como, por exemplo, decomposição em soma de quadrados (PARRILO; LALL, 2003; PAPACHRISTODOULOU *et al.*, 2013), ou parametrizações baseadas em matrizes de Gram (CHESI *et al.*, 2009). Além disso, estratégias baseadas em testes de positividade para polinômios (usando, por exemplo, *B-splines*, que são uma base de funções polinomiais por partes (HILHORST *et al.*, 2016), ou bases de Bernstein (BOUDAUD *et al.*, 2008; LETH *et al.*, 2016)) também podem ser utilizadas (KAMYAR; PEET, 2015). Entretanto, o custo computacional requerido para a resolução dessas condições é muito alto, inviabilizando o tratamento de sistemas de grandes dimensões (muitos estados ou muitos parâmetros incertos). Esse fato é devido, principalmente, ao número excessivo de variáveis de otimização e restrições (linhas de LMIs).

Com base no exposto acima, nesta dissertação são propostos métodos para certificar a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos invariantes no tempo por meio de funções de Lyapunov polinomiais homogêneas, porém sem utilizar programação semi-definida para resolver as LMIs. A estratégia consiste em utilizar condições LMIs bem conhecidas na literatura, mas substituindo a resolução tradicional com programação semi-definida (*LMI solvers*) por um conjunto de restrições lineares. Para este fim, é empregado o teorema de Gershgorin, construindo-se restrições lineares sobre os elementos da LMI que garantem a negatividade (ou positividade). Embora as condições resultantes sejam apenas suficientes, a técnica permite o aumento da eficiência computacional em dois sentidos. O primeiro está relacionado ao fato de que os métodos de pontos interiores, largamente utilizados para resolver problemas de otimização linear, cônica e semi-definida, possuem uma eficiência maior ao lidar com programação linear (BEN-TAL; NEMIROVSKI, 2001). Em segundo lugar o método permite que resolvidores de programação linear baseados no bem conhecido método *simplex* também possam ser empregados, aumentando ainda mais as dimensões possíveis de serem tratadas. A fim de diminuir o número de restrições do

problema, outra proposta apresentada é a verificação da positividade da matriz de Lyapunov *a posteriori*, resolvendo-se primeiro o problema sem essa restrição. Se uma solução é encontrada, verifica-se se a matriz de Lyapunov é definida positiva (com testes mais simples, que envolvem apenas cálculo de autovalores) e, em caso afirmativo, a estabilidade robusta é comprovada.

A estrutura desta dissertação e as descrições resumidas de cada capítulo são apresentadas a seguir.

**Capítulo 2:** Introduce a classe de sistemas não lineares estudada nesta dissertação. Também são apresentados conceitos referentes a modelos nebulosos e, em seguida, é descrita a classe de modelos nebulosos T–S. Uma breve discussão sobre a técnica de não linearidade de setor local leva à apresentação de um algoritmo para a obtenção do modelo nebuloso T–S a partir de um sistema não linear contínuo no tempo com as características apresentadas no início do capítulo. Em seguida, são apresentadas diferentes representações para o domínio de validade do modelo nebuloso T–S, utilizadas para as condições de análise e de síntese propostas neste trabalho. Por fim, são apresentados lemas e definições da literatura, que servem como base para a apresentação dos resultados propostos.

**Capítulo 3:** São apresentadas novas condições em termos de LMIs dependentes de parâmetros para a análise de estabilidade local e estimativa de região de atração de sistemas não lineares representados por modelos nebulosos T–S por meio da técnica de não linearidade de setor. Para isto, é utilizada uma propriedade específica do produto de Kronecker, além de variáveis de otimização com dependência polinomial homogênea nos parâmetros, relaxações para testes de positividade de polinômios homogêneos e o Lema de Finsler. O gradiente das funções de pertinência é modelado em termos de um polítopo e, como outra novidade, os termos não lineares da matriz Jacobiana são representados por meio de uma expansão em série de Taylor truncada em uma ordem pré-determinada.

**Capítulo 4:** É apresentada uma nova estratégia de controle por realimentação de estados para sistemas contínuos não lineares representados por modelos nebulosos T–S. A abordagem consiste em um procedimento de dois estágios, que, ao final do segundo estágio, caso as condições sejam satisfeitas, garante-se a estabilidade em malha fechada do sistema nebuloso T–S original, obtendo-se um controlador estabilizante por realimentação de estados e uma estimativa da região de atração dentro do domínio de validade do modelo.

**Capítulo 5:** Enuncia um método para certificar a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos invariantes no tempo por meio de funções de Lyapunov polinomiais homogêneas, porém sem utilizar programação semi-definida para resolver as LMIs.

**Capítulo 6:** São apresentadas as conclusões da dissertação, além de perspectivas para trabalhos futuros e relação dos artigos produzidos no decorrer desta pesquisa de mestrado.

## 2 Fundamentos matemáticos

Neste capítulo são introduzidos os conceitos fundamentais para que o leitor se familiarize com a classe de sistemas não lineares a ser tratada, assim como é feita uma discussão a respeito de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno (T-S) e a técnica de não linearidade de setor. Neste contexto, é apresentada a definição de sistemas nebulosos T-S, com um algoritmo para a obtenção de modelos T-S a partir de um sistema não linear utilizando a técnica de não linearidade de setor e a definição do domínio de validade no espaço de estados. Também são apresentadas maneiras equivalentes de representar o domínio de validade do modelo e, por fim, são expostos alguns fundamentos utilizados para a manipulação e programação de desigualdades matriciais e para a introdução de variáveis de folga.

### 2.1 Sistemas não lineares

Um sistema é não linear quando não é possível aplicar o princípio da superposição, ou seja, a resposta à combinação linear de duas entradas não corresponde à combinação linear das duas respostas (OGATA, 1990). A grande maioria dos sistemas físicos possui dinâmica não linear e, por isso, o estudo desses sistemas torna-se praticamente inevitável do ponto de vista da engenharia.

Ao se representar um sistema não linear em termos de equações de estado, consideram-se os pontos de equilíbrio para a análise da dinâmica. Para um sistema sem entradas forçadas, um ponto de equilíbrio, segundo Khalil (2002), é definido como um ponto  $x = x^*$  tal que sempre que o estado começar em  $x^*$ , permanece em  $x^*$  para todo tempo futuro. Caso o sistema tenha mais de um ponto de equilíbrio, estes podem ser analisados localmente no espaço de estados. A Teoria de Lyapunov classifica os pontos de equilíbrio quanto à estabilidade, podendo ser instáveis, estáveis ou assintoticamente estáveis.

A classe de sistemas não lineares investigada neste trabalho é descrita por

$$\dot{x}(t) = f(x(t))x(t) + g(x(t))u(t), \quad (2.1)$$

sendo que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas forçadas,  $f(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $g(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são funções limitadas e suaves em uma região compacta do espaço de estados. Para entrada nula, a origem deve ser um ponto de equilíbrio, isto é,  $f(0) = 0$ .

Consideram-se regiões no espaço de estados que contenham um único ponto de equilíbrio do sistema não linear, supondo que a origem do espaço de estados é esse ponto de interesse. Se necessário, uma mudança de coordenadas pode ser utilizada.

## 2.2 Modelos nebulosos

O conceito primordial para a formulação de modelos nebulosos (em inglês, *fuzzy models*) é dado pelos conjuntos nebulosos (ZADEH, 1965). Esses denominam classes que têm como característica intrínseca a continuidade dos graus de associação. Por exemplo, considere o conjunto (precisamente conhecido) de números naturais maiores que 10,  $\{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$ . Este conjunto claramente inclui  $\{n = 11, 12, \dots, \infty\}$  e não inclui  $\{n = 1, 2, \dots, 10\}$ . Por outro lado, o cenário torna-se ambíguo quando se tenta caracterizar os números muito maiores que 10, pois este conjunto não remete ao senso matemático usual. Note que o número 11 está pouco associado a esse conjunto, enquanto que 1000000 tem maior probabilidade de associação. Portanto, o grau de associação muda à medida que são considerados números maiores. A lógica nebulosa (ZADEH, 1965) surgiu para lidar com essa classe de conjuntos ou sistemas de forma quantitativa.

A lógica nebulosa possibilita a caracterização de conjuntos parciais, associados a uma determinada faixa de probabilidade de adesão a um conceito. Assim, cada elemento do conjunto possui um grau de associação, atribuído por uma função que leva a um intervalo real, por exemplo, entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1 estiver o valor da função, maior o grau de associação com o conjunto.

Um sistema dinâmico pode ser caracterizado como nebuloso se as entradas, saídas e estados apresentarem comportamento regido pela lógica nebulosa. Observe que sistemas nebulosos podem aparentar semelhança com sistemas estocásticos, porém não há informações estatísticas sobre as variáveis em sistemas nebulosos, apenas valores das funções de associação. Ainda segundo Zadeh (1965), é possível verificar que a noção de convexidade pode ser estendida para conjuntos nebulosos, o que é útil em aplicações que envolvem problemas de otimização.

Neste contexto, modelos nebulosos podem ser utilizados com a finalidade de construir representações locais de sistemas não lineares como uma composição de sistemas lineares. Assim, o agrupamento desses sistemas lineares gera um modelo completo equivalente ao sistema não linear em questão. Uma das técnicas para gerar esse tipo de representação, utilizada neste trabalho, é apresentada a seguir.

## 2.3 Sistemas nebulosos Takagi-Sugeno

O modelo nebuloso proposto por Takagi e Sugeno é descrito por regras nebulosas do tipo SE-ENTÃO, que representam relações locais lineares entre as entradas e as saídas de sistemas não lineares (TANAKA; WANG, 2001). Nesse modelo, a dinâmica local de cada regra nebulosa é expressa por um sistema linear. As  $N$  regras do modelo nebuloso T-S para a classe de sistemas contínuos não lineares dada em (2.1) são apresentadas a seguir.



**Sistema nebuloso contínuo no tempo.** Regras do modelo:

**SE**  $z_1(t)$  é  $M_{i1}$  e  $\dots$  e  $z_p(t)$  é  $M_{ip}$ , **ENTÃO**

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

sendo que  $M_{ij}$  representam os conjuntos nebulosos,  $z(t) = [z_1(t) \ \dots \ z_p(t)]^T$  é o vetor das variáveis premissas, que podem ser funções dos estados, de distúrbios externos ou do tempo. Os vetores  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  são, respectivamente, os estados e as entradas do sistema e as matrizes do modelo são tais que  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . A quantidade de regras do modelo nebuloso T-S está diretamente relacionada ao número de variáveis premissas do modelo,  $N = 2^p$ . Neste trabalho, as variáveis premissas dependem dos estados e, conseqüentemente, do tempo.

O grau de associação da variável premissa  $z_j(t)$  ao conjunto nebuloso  $M_{ij}$  é dado por  $M_{ij}(z_j(t))$ . Desta maneira, é possível obter as funções peso das associações para cada subsistema linear  $A_i x(t) + B_i u(t)$  que compõe o modelo nebuloso T-S, dadas por

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Finalmente, as funções de associação, ou funções de pertinência, normalizadas de cada subsistema linear no modelo nebuloso T-S são dadas por

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{j=1}^N w_j(z(t))}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Uma vez que as funções peso  $\alpha_i(z(t))$  assumem sempre valores não negativos, as funções de associação pertencem ao simplex unitário, isto é,  $\alpha(z(t)) \in \Lambda_N$ , sendo  $\Lambda_N$  o simplex unitário definido como

$$\Lambda_N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \right\}. \quad (2.4)$$

Portanto, para um dado par de entradas e saídas  $x(t)$  e  $u(t)$ , os sistemas nebulosos T-S são representados no espaço de estados por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)), \quad \alpha(t) \in \Lambda_N, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

A fim de simplificar a notação e tornar a leitura deste manuscrito mais fluida, a dependência no tempo é omitida a partir deste ponto. Além disso, pelo mesmo motivo, fica implícita a dependência de  $\alpha$  em termos de  $z$ .

## 2.4 Não linearidade de setor local

A modelagem por não linearidade de setor local (TANAKA; WANG, 2001), também conhecida como modelagem por vértices (SALA, 2009), é uma metodologia sistemática utilizada para obter representações de sistemas não lineares na forma de sistemas nebulosos T–S dentro de uma região compacta no espaço de estados que compõem as não linearidades. Essa técnica garante a representação exata do sistema, uma vez que o modelo nebuloso T–S obtido é equivalente ao modelo não linear original para todos os pontos dentro do domínio de validade definido no espaço de estados. Nesse cenário, o modelo obtido consiste na combinação convexa de modelos lineares variantes no tempo, tendo, como uma das principais vantagens, a possibilidade de se utilizarem ferramentas de programação semi-definida para a análise de estabilidade e o projeto de controladores a partir de LMIs.

A obtenção de um modelo nebuloso T–S por meio da técnica de não linearidade de setor local tem como requisito mínimo a definição da região  $\mathcal{X}$  de validade do modelo no espaço de estados. Para sistemas físicos, essa região é definida levando-se em consideração os limites de atuação do sistema, e deve ser convexa e conter a origem. Conhecendo a região de validade, o modelo nebuloso T–S pode ser obtido conforme o procedimento apresentado na próxima seção.

## 2.5 Modelagem nebulosa T–S por não linearidade de setor local

Considere o sistema não linear (2.1), em que a origem é um ponto de equilíbrio. O modelo nebuloso T–S, obtido a partir da técnica de não linearidade de setor local, que representa de forma exata este sistema não linear dentro da região de modelagem, é obtido por meio dos passos listados a seguir.

1. Escolher as  $p$  **variáveis premissas**  $z(x)$ . Cada elemento de  $z(x)$  equivale a um termo distinto em  $f(x)$  e  $g(x)$  que gera não linearidades no sistema original. Observe que pode haver mais de uma opção de escolha das variáveis premissa para o mesmo sistema não linear. Vale lembrar que a quantidade de regras  $N$  do modelo nebuloso T–S é determinada pelo número de variáveis premissas,  $N = 2^p$ .
2. Conhecendo-se a região  $\mathcal{X}$  de validade do modelo, obter os **valores mínimos e máximos de cada variável premissa**, isto é,

$$\underline{z}_i = \min\{z_i\}, \quad \overline{z}_i = \max\{z_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Impõem-se limites para as demais variáveis de estado, para garantir que  $\mathcal{X}$  seja compacto.

3. Obter os **graus de associação**  $M_{ij}(z_i(x))$  para cada variável premissa

$$M_{i1}(z_i(x)) = \frac{z_i(x) - \underline{z}_i}{\bar{z}_i - \underline{z}_i}, \quad M_{i2}(z_i(x)) = 1 - M_{i1}(z_i(x)), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

4. Obter as  $N$  **funções de associação** do modelo nebuloso T–S

$$\alpha_i = \prod_{i_1=1}^2 \cdots \prod_{i_p=1}^2 M_{1i_1}(z_i(x)) \cdots M_{pi_p}(z_i(x)), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

4. A partir dos limitantes das variáveis premissas, obter os **vértices**  $A_i$  e  $B_i$  do **modelo nebuloso T–S**. Para tanto, devem ser aplicadas as  $N$  combinações diferentes dos valores máximos e mínimos de todas as variáveis premissas em  $f(x)$  e  $g(x)$  do modelo não linear.
5. Por fim, utilizar os dados obtidos nos itens anteriores para montar o modelo nebuloso T–S na forma (2.5)

## 2.6 Domínio de validade do modelo T–S

O domínio de validade do modelo nebuloso T–S (2.5) é dado pelo politopo (conjunto poliedral limitado) (BOYD *et al.*, 1994)

$$\mathcal{X} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : a_k^T x \leq c_k, \quad k = 1, \dots, q \right\}, \quad (2.6)$$

com  $a_k \in \mathbb{R}^n$  e  $c_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, q$ , conhecidos. Observe que as restrições lineares que definem  $\mathcal{X}$  garantem que  $0 \in \mathcal{X}$ . Ademais,  $\mathcal{X}$  também pode ser descrito, utilizando um algoritmo de enumeração de vértices (AVIS; FUKUDA, 1992), como

$$\mathcal{X} = \text{co}\{h^1, h^2, \dots, h^\kappa\}, \quad (2.7)$$

sendo que os vetores  $h^i$ ,  $i = 1, \dots, \kappa$  podem ser obtidos sistematicamente por meio das restrições lineares em (2.6). Como consequência, qualquer  $x \in \mathcal{X}$  pode ser representado por

$$x_\gamma = \sum_{k=1}^{\kappa} \gamma_k h^k, \quad \gamma \in \Lambda_\kappa. \quad (2.8)$$

## 2.7 Resultados auxiliares

Nesta seção são apresentados resultados literatura utilizados nas manipulações algébricas necessárias para a para obtenção e sustentação das provas dos resultados propostos neste trabalho. Primeiramente, é apresentado o Complemento de Schur, que permite transformar restrições não lineares que definem espaços convexos em LMIs. Em seguida, tem-se o Lema de Finsler, que é utilizado para introduzir variáveis de folga e,

assim, proporcionar a diminuição do conservadorismo das condições propostas. Por fim, é apresentado o Teorema Circular de Gershgorin, que serve como base para a proposta de um método baseado em programação linear para resolução de problemas de otimização que envolvam LMIs sem a necessidade do uso de ferramentas de programação semi-definida. Do Teorema Circular de Gershgorin, deriva-se a definição de matriz diagonalmente dominante, utilizada nos capítulos subsequentes para produzir um teste suficiente para a positividade de uma matriz.

**Lema 2.1** (Complemento de Schur). (*BOYD et al., 1994*) *Sejam as matrizes  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C = C^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Então, as seguintes desigualdades matriciais são equivalentes:*

1.  $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0$
2.  $A > 0$  e  $C - B^T A^{-1} B > 0$
3.  $C > 0$  e  $A - B C^{-1} B^T > 0$ .

**Lema 2.2** (Lema de Finsler). (*SKELTON et al., 1998; DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001*) *Considere  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $p(\mathcal{B}) < n$  e  $\mathcal{B}_\perp$  representando uma base para o espaço nulo de  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{B}\mathcal{B}_\perp = 0$ ). Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- i.  $w^T \mathcal{D} w < 0$ ,  $\forall w \neq 0$ ,  $\mathcal{B} w = 0$ ;
- ii.  $\mathcal{B}_\perp^T \mathcal{D} \mathcal{B}_\perp < 0$ ;
- iii.  $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  :  $\mathcal{D} + X \mathcal{B} + \mathcal{B}^T X^T < 0$ .

**Teorema 2.1** (Teorema de estabilidade de Lyapunov). (*KHALIL, 2002*) *Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio para o sistema  $\dot{x} = f(x)$  e  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$  um domínio contendo a origem. Seja  $V(x)$  uma função escalar contínua diferenciável tal que*

$$V(0) = 0, V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} - \{0\} \text{ e } \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} - \{0\}.$$

*Então a origem do sistema é assintoticamente estável.*

**Definição 2.1** (Matriz diagonalmente dominante e discos de Gershgorin). (*HORN; JOHNSON, 1985*) *Seja  $M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . A matriz  $M$  é diagonalmente dominante se*

$$|m_{ii}| \geq R_i,$$

*e é estritamente diagonalmente dominante se*

$$|m_{ii}| > R_i,$$

com

$$R_i = \sum_{j=1; j \neq i}^n |m_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

definindo os raios dos discos  $D_i$  de Gershgorin, centrados em  $m_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , isto é,

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - m_{ii}| \leq R_i\}.$$

A Definição 2.1, derivada do Teorema de Gershgorin, afirma que todo autovalor de  $M$  está dentro de algum disco de Gershgorin de  $M$ . Esse resultado é utilizado no Capítulo 5 para produzir um teste suficiente para certificar a positividade de uma matriz.

**Observação 2.1.** Para a apresentação dos resultados deste trabalho, a notação  $X_g(\alpha)$  é utilizada para representar uma matriz polinomial homogênea<sup>1</sup> de grau  $g$  em  $\alpha$ . O caso  $g = 1$  equivale à matriz com dependência afim em  $\alpha$ . Por exemplo, uma matriz incerta com  $N = 3$  vértices e grau  $g = 1$  é dada por

$$X_1(\alpha) = \alpha_1 X_{100} + \alpha_2 X_{010} + \alpha_3 X_{001},$$

enquanto uma matriz com  $N = 2$  vértices e grau  $g = 2$  é representada por

$$X_2(\alpha) = \alpha_1^2 X_{20} + \alpha_1 \alpha_2 X_{11} + \alpha_2^2 X_{02}.$$

Note que cada matriz coeficiente é indexada pelos expoentes do monômio correspondente. Mais detalhes dessa notação podem ser encontrados em [Oliveira e Peres \(2007\)](#).

## 2.8 Testes de dimensão finita

Todas as condições propostas neste trabalho foram formuladas em termos de variáveis matriciais com dependência polinomial homogênea nos parâmetros incertos, resultando em desigualdades polinomiais que precisam ser verificadas para todos os valores dos parâmetros. Esses testes são de difícil solução e, assim, uma alternativa para resolvê-los de forma eficiente, embora algum conservadorismo possa ser introduzido, é por meio do uso de relaxações. Por exemplo, é possível usar o Teorema de Pólya, que permite formular os testes em termos de um conjunto finito de LMIs (programáveis) ([POWERS; REZNICK, 2001](#); [SCHERER, 2005](#)). O pacote computacional Robust LMI Parser (ROLMIP) aplica relaxações de Pólya e extrai o conjunto finito de LMIs a partir das desigualdades polinomiais. Uma vantagem de utilizar o ROLMIP é que as condições propostas podem ser apresentadas em termos de desigualdades matriciais polinomiais, não sendo necessário definir nenhum tipo de notação (em geral complexa) para fornecer as condições suficientes em termos de LMIs finitas.

<sup>1</sup> Um polinômio é homogêneo se todos os seus monômios têm o mesmo grau.

As rotinas desenvolvidas para este trabalho foram implementadas no Matlab versão 9.4.0.813654 (R2018a), utilizando-se o Yalmip ([LÖFBERG, 2004](#)) e os *solvers* SeDuMi ([STURM, 1999](#)) e Mosek ([MOSEK ApS, 2015](#)) por meio da interface ROLMIP (versão 3.0) ([AGULHARI \*et al.\*, 2019](#)) em um computador Intel Core (TM) i7-7700 CPU @ 3.60GHz x 8 com 16GB RAM.

## 3 Análise de estabilidade local e estimativa de região de atração

Neste capítulo são propostas novas condições para análise de estabilidade local e estimativa de região de atração para sistemas não lineares contínuos no tempo representados por modelos nebulosos Takagi–Sugeno na forma (2.5). Para esse fim, são utilizadas funções nebulosas de Lyapunov com dependência polinomial homogênea de grau arbitrário nos parâmetros. Como novidade técnica, é proposta uma manipulação na derivada no tempo da matriz de Lyapunov utilizando uma propriedade do produto de Kronecker, que permite obter condições LMI por meio de relaxações e do Lema de Finsler. Considera-se que o gradiente das funções de associação pertence a um politopo e, como outra pequena contribuição, os termos não lineares da matriz Jacobiana são representados por meio de uma expansão em série de Taylor truncada em uma ordem pré-determinada, o que evita a introdução de um novo conjunto de parâmetros incertos e, como consequência, possibilita a diminuição da complexidade computacional associada à resolução do problema.

### 3.1 Análise de estabilidade

O sistema não linear contínuo no tempo (2.1), sem entradas forçadas explícitas, é dado por

$$\dot{x} = f(x)x. \quad (3.1)$$

Assim, o modelo nebuloso T–S obtido a partir da técnica de não linearidade de setor que representa exatamente o sistema não linear (3.1) dentro de uma região compacta  $\mathcal{X}$  em torno da origem no espaço de estados, é dado por

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(z(x))A_i x = A(\alpha)x, \quad \alpha \in \Lambda_N. \quad (3.2)$$

Considere a função de Lyapunov quadrática nos estados

$$V(x) = x^T P_g(\alpha)x, \quad (3.3)$$

com  $P_g(\alpha)$  uma matriz de Lyapunov polinomial homogênea de grau  $g$  (OLIVEIRA; PERES, 2007).

Define-se o gradiente da matriz de Lyapunov  $P_g(\alpha)$  em relação às funções de associação  $\alpha$  como

$$\nabla_{\alpha} P_g(\alpha) = \left[ \frac{\partial P_g(\alpha)}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial P_g(\alpha)}{\partial \alpha_N} \right].$$

Além disso, supõe-se que  $\dot{\alpha}(z)$  pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(z) &= J(\theta)\dot{x}, & J(\theta) &= \nabla_x \alpha(z) = \sum_{i=1}^{\vartheta} \theta_i(x) J_i, \\ \theta(x) &\in \Lambda_{\vartheta}, & \left[ \nabla_x \alpha(z) \right]_{ij} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

uma vez que as variáveis premissas dependem dos estados, com as matrizes  $J_i$  obtidas por meio da técnica de não linearidade de setor local aplicada sobre  $\alpha(z)$  no domínio  $\mathcal{X}$  (TANAKA; WANG, 2001).

A primeira contribuição deste trabalho é apresentada no teorema a seguir, que fornece uma condição de análise de estabilidade baseada na função de Lyapunov (3.3).

**Teorema 3.1.** *Se existir uma matriz polinomial homogênea  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T > 0$  de grau  $g$  tal que*

$$A(\alpha)^T P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha) + \nabla_{\alpha} P_g(\alpha) (J(\theta) A(\alpha) x_{\gamma} \otimes I_n) < 0 \quad (3.5)$$

para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $\theta \in \Lambda_{\vartheta}$  e  $\gamma \in \Lambda_{\kappa}$ , então a origem do sistema nebuloso  $T$ - $S$  (3.2) é assintoticamente estável.

**Prova 3.1.** *A derivada no tempo da função de Lyapunov (3.3) é dada por*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P_g(\alpha) x + x^T P_g(\alpha) \dot{x} + x^T \dot{P}_g(\alpha) x \\ &= x^T \left( A(\alpha)^T P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha) + \dot{P}_g(\alpha) \right) x \end{aligned}$$

e é negativa para todo  $x \neq 0$  se, e somente se,

$$A(\alpha)^T P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha) + \dot{P}_g(\alpha) < 0$$

para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .

Computando  $\dot{P}_g(\alpha)$ , tem-se

$$\dot{P}_g(\alpha) = \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i \left[ \nabla_{\alpha} P_g(\alpha) \right]_i = \nabla_{\alpha} P_g(\alpha) (\dot{\alpha} \otimes I_n), \quad \dot{\alpha} \otimes I_n = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 I_n \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_N I_n \end{bmatrix}.$$

Substituindo  $\dot{x}$  em (3.4) por (3.2) e, em seguida,  $x$  por  $x_{\gamma}$  dado em (2.8), tem-se

$$\dot{\alpha} = J(\theta) A(\alpha) x_{\gamma},$$

de forma que

$$\dot{P}_g(\alpha) = \nabla_{\alpha} P_g(\alpha) (J(\theta) A(\alpha) x_{\gamma} \otimes I_n),$$

concluindo-se a prova.

O resultado do Teorema 3.1 pode ser melhorado ao se explorar a soma nula



das derivadas no tempo das variáveis premissas. De fato, note que

$$\sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1}^T J(\theta) A(\alpha) x = 0, \quad (3.6)$$

com  $\mathbf{1} \triangleq [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ , uma vez que

$$\sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i(z) = \mathbf{1}^T \dot{\alpha} = \mathbf{1}^T J(\theta) \dot{x} = \mathbf{1}^T J(\theta) A(\alpha) x = 0.$$

O próximo teorema utiliza o resultado (3.6) e introduz variáveis de folga na condição de estabilidade por meio do Lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001).

**Teorema 3.2.** *Se existirem matrizes polinomiais homogêneas  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T > 0$ , e  $X_d(\alpha, \theta, \gamma) \in \mathbb{R}^{n(N+2) \times n(N+1)}$  de graus  $g$  e  $d = (d_\alpha, d_\theta, d_\gamma)$ , respectivamente, tais que*

$$\mathcal{D} + X_d(\alpha, \theta, \gamma) \mathcal{B} + \mathcal{B}^T X_d(\alpha, \theta, \gamma)^T < 0, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & -I & -(\mathbf{1}^T \otimes I_n) \\ (J(\theta)A(\alpha)x_\gamma \otimes I_n) & 0 & -I \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & P_g(\alpha) & 0.5 \nabla_\alpha P_g(\alpha) \\ P_g(\alpha) & 0 & 0 \\ 0.5 \nabla_\alpha P_g(\alpha)' & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $\theta \in \Lambda_\theta$  e  $\gamma \in \Lambda_\kappa$ , então, a origem do sistema nebuloso  $T$ - $S$  (3.2) é assintoticamente estável.

**Prova 3.2.** *Observe que (3.5) pode ser reescrita na forma  $\mathcal{B}_\perp^T \mathcal{D} \mathcal{B}_\perp < 0$ , com*

$$\mathcal{B}_\perp = \begin{bmatrix} I \\ A(\alpha) \\ J(\theta)A(\alpha)x_\gamma \otimes I_n \end{bmatrix}.$$

Além disso, também note que,

$$\mathcal{B} \mathcal{B}_\perp = \begin{bmatrix} A(\alpha) - A(\alpha) - (\mathbf{1}^T \otimes I_n)(J(\theta)A(\alpha)x_\gamma \otimes I_n) \\ (J(\theta)A(\alpha)x_\gamma \otimes I_n) - (J(\theta)A(\alpha)x_\gamma \otimes I_n) \end{bmatrix} = 0,$$

devido à propriedade do produto misto<sup>2</sup> do produto de Kronecker e (3.6), conforme segue

$$(\mathbf{1}^T \otimes I_n)(J(\theta)A(\alpha)x_\gamma \otimes I_n) = \mathbf{1}^T J(\theta)A(\alpha)x_\gamma \otimes I_n = 0 \otimes I_n = 0.$$

Finalmente, aplicando o Lema de Finsler, tem-se (3.7).

**Observação 3.1.** *As condições do Teorema 3.2 são mais complexas do que as condições do Teorema 3.1, pois possuem mais variáveis de otimização devido à variável matricial  $X_d(\alpha, \theta, \gamma)$ . Contudo, quando consideram-se os mesmos graus  $g$  e  $d$  nos dois teoremas, resultados menos conservadores são esperados do Teorema 3.2.*

<sup>2</sup>  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ , em que  $A, B, C$  e  $D$  possuem dimensões apropriadas.

## 3.2 Estimativa de região de atração

As condições dos Teoremas 3.1 e 3.2 apenas garantem que a função de Lyapunov é positiva com a derivada no tempo negativa dentro do domínio de validade do modelo nebuloso T-S. Para prover uma estimativa do domínio de atração, supõe-se que o maior conjunto invariante contido no politopo  $\mathcal{X}$  é definido como

$$\Omega \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_g(\alpha)x \leq 1\}.$$

A restrição  $\Omega \in \mathcal{X}$  é garantida (BOYD *et al.*, 1994) se  $a_k^T P_g(\alpha)^{-1} a_k \leq c_k^2$ ,  $k = 1, \dots, q$ . Aplicando o complemento de Schur nessas restrições, tem-se

$$\begin{bmatrix} P_g(\alpha) & a_k \\ a_k^T & c_k^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \dots, q, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N. \quad (3.8)$$

Entre várias possibilidades, o aumento do volume de  $\Omega$  pode ser obtido adotando-se o seguinte critério (KAPILA; GRIGORIADIS, 2002)

$$\min \left( \text{tr}(W) \right) \quad (3.9)$$

sujeito a (3.8) e

$$P_g(\alpha) \leq W \quad (3.10)$$

Devido a (3.10), o volume de  $\Omega$  também é aumentado.

### 3.2.1 Cômputo de estimativa de região de atração

A representação do conjunto invariante  $\Omega$  é obtida para todos os exemplos apresentados nos Capítulos 3 e 4, conforme o seguinte procedimento: uma vez que  $P_g(\alpha)$  é determinada, uma representação gráfica de  $\Omega$  é obtida por meio de uma grade fina sobre a região  $\mathcal{X}$ , em que, basicamente, são avaliados todos os pontos que satisfazem  $x^T P_g(\alpha)x \leq 1$ . Para sistemas com dois estados, utilizando a função `contour` do Matlab, o contorno da região factível, que é um polígono, pode ser determinado e traçado, enquanto a função `polyarea` calcula a área. Quando tratar-se sistemas com três estados, a superfície da região factível é determinada e traçada utilizando-se a função `pcontour3` e o respectivo volume é obtido a partir da função `pvolume` do Matlab.

## 3.3 Resultados principais

Os próximos corolários proveem condições de estabilidade (baseadas nos Teoremas 3.1 e 3.2, respectivamente), assim como um procedimento para a maximização de  $\Omega$  dentro do domínio de validade do modelo nebuloso T-S.

**Corolário 3.1.** *Se existir uma matriz polinomial homogênea  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T > 0$  de grau  $g$  que seja solução de*

$$\min \left( \text{tr}(W) \right) \quad \text{sujeito a (3.5), (3.8) e (3.10)}$$

para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $\theta \in \Lambda_\theta$  e  $\gamma \in \Lambda_\kappa$ , então a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e  $\Omega \subseteq \mathcal{X}$  é um conjunto invariante contido na região de atração do sistema não linear (3.1).

**Corolário 3.2.** *Se existirem matrizes polinomiais homogêneas  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T > 0$ , e  $X_d(\alpha, \theta, \gamma) \in \mathbb{R}^{n(N+2) \times n(N+1)}$  de graus  $g$  e  $d = (d_\alpha, d_\theta, d_\gamma)$ , respectivamente, que sejam solução de*

$$\min \left( \text{tr}(W) \right) \quad \text{sujeito a (3.7), (3.8) e (3.10)}$$

para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $\theta \in \Lambda_\theta$  e  $\gamma \in \Lambda_\kappa$ , então a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e  $\Omega \subseteq \mathcal{X}$  é um conjunto invariante contido na região de atração do sistema não linear (3.1).

## 3.4 Tratamento especial para a matriz Jacobiana

Como visto em (3.4), a matriz  $J(\theta)$  pertence a um politopo cujo número de vértices depende da quantidade de termos (funções dos estados) independentes na matriz Jacobiana. Isto significa que o número de parâmetros  $\theta_i$  necessário para representar o envelope convexo de  $J(\theta)$  aumenta com o número de termos independentes em  $\nabla_x \alpha(z)$ , podendo no pior caso ser igual a  $2^{nN}$ . Portanto, essa abordagem se torna proibitiva do ponto de vista computacional para valores grandes de  $n$  e  $N$ . Para reduzir a complexidade e, possivelmente, o conservadorismo,  $\nabla_x \alpha(z)$  pode ser representada diretamente em termos de  $x_\gamma$  por meio de uma expansão em série de Taylor truncada em um determinado grau, sem a necessidade de criar o vetor de parâmetros  $\theta \in \Lambda_\theta$ , conforme mostrado a seguir.

Sejam os termos dependentes dos estados em  $\nabla_x \alpha(z)$  representados por

$$z_{\nabla}(x) = [z_{\nabla_1}(x) \quad \dots \quad z_{\nabla_p}(x)]^T,$$

em que  $p$  é o número de termos independentes. Para cada  $z_{\nabla_i}(x)$ ,  $x$  é diretamente substituído por  $x_\gamma$  se o termo é polinomial. Caso contrário,

$$z_{\nabla_i}(x) = \Phi_i + \delta_i(\beta_i),$$

tal que  $\Phi_i$  é a série de Taylor de  $z_{\nabla_i}(x)$  truncada em um determinado grau e  $\delta_i(\beta_i)$  o resíduo, descrito por

$$\delta_i(\beta_i) = \beta_{i_1} \bar{\delta}_i + \beta_{i_2} \underline{\delta}_i, \quad \forall \beta_i \in \Lambda_2,$$

com

$$\bar{\delta}_i = \max(z_{\nabla_i}(x) - \Phi_i), \quad \underline{\delta}_i = \min(z_{\nabla_i}(x) - \Phi_i). \quad (3.11)$$

Após isso,  $x$  é substituído por  $x_\gamma$ , assim como é feito para os termos polinomiais, isto é,

$$z_{\nabla_i}(x_\gamma) = z_{\nabla_i}(x), \quad x = x_\gamma, \quad \gamma \in \Lambda_\kappa.$$

Nesta representação, o termo  $J(\theta)$  nos Teoremas 3.1 e 3.2 pode ser substituído por

$$J(\gamma, \beta) = \nabla_x \alpha(z_\nabla). \quad (3.12)$$

Note que no caso desses termos serem polinomiais, não há necessidade de parâmetros  $\delta_i$ . Por outro lado, se a expansão em série de Taylor for aplicada, os limites em (3.11) podem ser obtidos por um processo de otimização linear local. Considerando o número de parâmetros adicionais, note que a estratégia que utiliza expansão em série de Taylor introduz, no máximo,  $2p$  parâmetros incertos, enquanto a definição da matriz  $J(\theta)$  requer  $2^p$ , sendo  $p$  o número de termos independentes. Assim, claramente, o crescimento linear do número de parâmetros incertos adicionais da abordagem por série de Taylor pode ser vantajoso ao lidar-se com um número alto de regras nos modelos nebulosos T-S.

### 3.5 Exemplos numéricos

**Exemplo 3.1.** Considere o sistema não linear (CAMPOS, 2015) dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{80}(240x_1 - 44x_1x_2^2 - 22x_1^3 + x_1^3x_2^2) + 2x_2 + \frac{1}{4}x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{8}x_1^3 - \frac{1}{160}(144x_2 - 40x_1^2x_2 + 21x_1^2x_2^3) \end{aligned}$$

com  $x \in \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq b, i = 1, 2, b \in \mathbb{R}_+^*\}$ .

Para a escolha particular das variáveis premissas

$$z_1 = x_1^2, \quad z_2 = x_2^2,$$

obtem-se um modelo nebuloso T-S com 4 regras, isto é,  $\alpha \in \Lambda_4$ , construído sobre o domínio de validade  $\mathcal{X}$ , em que  $\gamma \in \Lambda_4$ . A matriz Jacobiana das funções de pertinência possui 16 vértices quando utilizada a abordagem com  $J(\theta)$ , enquanto o método proposto neste trabalho, que utiliza  $J(\gamma)$ , é construído no<sup>3</sup> simplex de  $\gamma$  e possui grau 3.

Após a escolha das variáveis premissas, o sistema não linear pode ser reescrito como  $\dot{x} = A(z)x$ , com

$$A(z) = \begin{bmatrix} -3 + \frac{11z_2}{20} + \frac{11z_1}{40} - \frac{z_1z_2}{80} & 2 + \frac{z_2}{4} \\ -\frac{z_1}{8} & -\frac{9}{10} + \frac{z_1}{4} - \frac{21z_1z_2}{160} \end{bmatrix}.$$

<sup>3</sup> A variável  $\beta$  não é necessária, pois o sistema possui apenas termos polinomiais.

Considerando o domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo nebuloso T-S, obtêm-se os limitantes das variáveis premissas,  $\bar{z}_i = \max(z_i)$  e  $\underline{z}_i = \min(z_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Assim, as matrizes dinâmicas correspondentes a cada uma das quatro regras do modelo nebuloso T-S são dadas por

$$A_1 = A(\underline{z}_1, \underline{z}_2), \quad A_2 = A(\underline{z}_1, \bar{z}_2), \quad A_3 = A(\bar{z}_1, \underline{z}_2), \quad A_4 = A(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

e as funções de pertinência são tais que

$$\begin{aligned} \alpha_1(z) &= \frac{(z_1 - \underline{z}_1)(z_2 - \underline{z}_2)}{(\bar{z}_1 - \underline{z}_1)(\bar{z}_2 - \underline{z}_2)}, & \alpha_2(z) &= \frac{(z_1 - \underline{z}_1)(\bar{z}_2 - z_2)}{(\bar{z}_1 - \underline{z}_1)(\bar{z}_2 - \underline{z}_2)}, \\ \alpha_3(z) &= \frac{(\bar{z}_1 - z_1)(z_2 - \underline{z}_2)}{(\bar{z}_1 - \underline{z}_1)(\bar{z}_2 - \underline{z}_2)}, & \alpha_4(z) &= \frac{(\bar{z}_1 - z_1)(\bar{z}_2 - z_2)}{(\bar{z}_1 - \underline{z}_1)(\bar{z}_2 - \underline{z}_2)}. \end{aligned}$$

A matriz Jacobiana das funções de pertinência é dada por

$$\frac{\partial \alpha(z, z_\nabla)}{\partial x} = \frac{1}{(\bar{z}_1 - \underline{z}_1)(\bar{z}_2 - \underline{z}_2)} \begin{bmatrix} -z_{\nabla_1} \bar{z}_2 + z_{\nabla_3} & -\bar{z}_1 z_{\nabla_2} + z_{\nabla_4} \\ -z_{\nabla_3} + z_{\nabla_1} \underline{z}_2 & \bar{z}_1 z_{\nabla_2} - z_{\nabla_4} \\ -z_{\nabla_1} \bar{z}_2 - z_{\nabla_3} & -z_{\nabla_4} + \underline{z}_1 z_{\nabla_2} \\ z_{\nabla_3} - z_{\nabla_1} \underline{z}_2 & z_{\nabla_4} - \underline{z}_1 z_{\nabla_2} \end{bmatrix},$$

de forma que os termos em função dos estados na Jacobiana são

$$z_{\nabla_1} = \frac{\partial z_1}{\partial x_1} = 2x_1, \quad z_{\nabla_2} = \frac{\partial z_1 z_2}{\partial x_1} = 2x_1 x_2^2, \quad z_{\nabla_3} = \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = 2x_2, \quad z_{\nabla_4} = \frac{\partial z_1 z_2}{\partial x_2} = 2x_1^2 x_2.$$

Para a abordagem com  $J(\theta)$ , obtêm-se os limitantes ( $\underline{z}_{\nabla_i} = \min(z_{\nabla_i})$  e  $\bar{z}_{\nabla_i} = \max(z_{\nabla_i})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ) de  $z_\nabla$  dentro da região de validade do modelo nebuloso T-S e, em seguida, os 16 vértices de  $J(\theta)$  são obtidos.

$$\begin{aligned} J_1 &= J(\underline{z}_{\nabla_1}, \underline{z}_{\nabla_2}, \underline{z}_{\nabla_3}, \underline{z}_{\nabla_4}), & J_2 &= J(\underline{z}_{\nabla_1}, \underline{z}_{\nabla_2}, \underline{z}_{\nabla_3}, \bar{z}_{\nabla_4}), & J_3 &= J(\underline{z}_{\nabla_1}, \underline{z}_{\nabla_2}, \bar{z}_{\nabla_3}, \underline{z}_{\nabla_4}), \\ J_4 &= J(\underline{z}_{\nabla_1}, \underline{z}_{\nabla_2}, \bar{z}_{\nabla_3}, \bar{z}_{\nabla_4}), & J_5 &= J(\underline{z}_{\nabla_1}, \bar{z}_{\nabla_2}, \underline{z}_{\nabla_3}, \underline{z}_{\nabla_4}), & J_6 &= J(\underline{z}_{\nabla_1}, \bar{z}_{\nabla_2}, \underline{z}_{\nabla_3}, \bar{z}_{\nabla_4}), \\ J_7 &= J(\underline{z}_{\nabla_1}, \bar{z}_{\nabla_2}, \bar{z}_{\nabla_3}, \underline{z}_{\nabla_4}), & J_8 &= J(\underline{z}_{\nabla_1}, \bar{z}_{\nabla_2}, \bar{z}_{\nabla_3}, \bar{z}_{\nabla_4}), & J_9 &= J(\bar{z}_{\nabla_1}, \underline{z}_{\nabla_2}, \underline{z}_{\nabla_3}, \underline{z}_{\nabla_4}), \\ J_{10} &= J(\bar{z}_{\nabla_1}, \underline{z}_{\nabla_2}, \underline{z}_{\nabla_3}, \bar{z}_{\nabla_4}), & J_{11} &= J(\bar{z}_{\nabla_1}, \underline{z}_{\nabla_2}, \bar{z}_{\nabla_3}, \underline{z}_{\nabla_4}), & J_{12} &= J(\bar{z}_{\nabla_1}, \underline{z}_{\nabla_2}, \bar{z}_{\nabla_3}, \bar{z}_{\nabla_4}), \\ J_{13} &= J(\bar{z}_{\nabla_1}, \bar{z}_{\nabla_2}, \underline{z}_{\nabla_3}, \underline{z}_{\nabla_4}), & J_{14} &= J(\bar{z}_{\nabla_1}, \bar{z}_{\nabla_2}, \underline{z}_{\nabla_3}, \bar{z}_{\nabla_4}), & J_{15} &= J(\bar{z}_{\nabla_1}, \bar{z}_{\nabla_2}, \bar{z}_{\nabla_3}, \underline{z}_{\nabla_4}), \\ & & & & J_{16} &= J(\bar{z}_{\nabla_1}, \bar{z}_{\nabla_2}, \bar{z}_{\nabla_3}, \bar{z}_{\nabla_4}). \end{aligned}$$

Na abordagem  $J(\gamma)$  proposta, dado que todos os termos dependentes dos estados na matriz Jacobiana são polinomiais para este exemplo, basta obter as representações politópicas dos estados  $x_1$  e  $x_2$  a partir de  $x_\gamma$ , isto é,

$$x_\gamma = \begin{bmatrix} x_{1\gamma} \\ x_{2\gamma} \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix},$$

e substituir diretamente na matriz Jacobiana.

Neste exemplo, sempre que existir a matriz polinomial de variáveis de folga  $X_d(\alpha, \theta, \gamma)$ , os seguintes graus são utilizados:  $d = (g, 0, 0)$ , em que  $g$  é o grau da matriz  $P_g(\alpha)$ .

Os dados obtidos para a primeira parte deste experimento são apresentados nas Tabelas 1 e 2, em que avaliou-se o custo computacional em termos do número de linhas de LMIs ( $L$ ) e do número de variáveis escalares ( $V$ ), assim como o máximo valor de  $b$  em  $\mathcal{X}$ , denotado por  $b_{\max}$ , tal que  $|x_i| \leq b_{\max}$ . O problema de estabilidade provê uma solução factível para o modelo nebuloso T–S considerado. Observe que, para cada valor de  $b_{\max}$ , tem-se um modelo nebuloso T–S distinto. Os resultados apresentados referem-se aos Corolários 3.1 e 3.2, respectivamente, em que o grau  $g$  de  $P_g(\alpha)$  é modificado no decorrer dos testes.

Tabela 1 – Número de linhas de LMIs  $L$ , número de variáveis  $V$  e domínio de validade dos estados  $b_{\max}$  associados ao **Corolário 3.1** com  $J(\theta)$  e  $J(\gamma)$  para diferentes valores do grau  $g$  de  $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1.

$g$	$J(\theta)$			$J(\gamma)$		
	$L$	$V$	$b_{\max}$	$L$	$V$	$b_{\max}$
1	1344	15	1.96	464	15	1.94
2	2720	33	2.00	960	33	1.95
3	4800	63	2.00	1720	63	1.97

Tabela 2 – Número de linhas de LMIs  $L$ , número de variáveis  $V$  e domínio de validade dos estados  $b_{\max}$  associados ao **Corolário 3.2** com  $J(\theta)$  e  $J(\gamma)$  para diferentes valores do grau  $g$  de  $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1.

$g$	$J(\theta)$			$J(\gamma)$		
	$L$	$V$	$b_{\max}$	$L$	$V$	$b_{\max}$
1	7744	495	1.96	2464	495	1.94
2	15520	1233	2.00	4960	1233	1.95
3	27200	2463	2.00	8720	2463	1.98

Como é possível verificar, embora os métodos baseados tanto em  $J(\theta)$  quanto em  $J(\gamma)$  utilizem o mesmo número de variáveis para cada valor de  $g$ , a abordagem com  $J(\gamma)$ , para ambos os Corolários 3.1 e 3.2, demanda um menor custo computacional, uma vez que menos linhas de LMIs são requeridas. Por outro lado, o uso de  $J(\theta)$  sempre provê resultados maiores para  $b_{\max}$ , mostrando que a abordagem proposta é mais conservadora em termos do aumento de  $b_{\max}$ , neste exemplo, para os valores de  $g$  considerados.

A segunda parte do experimento consiste em obter estimativas para a região de atração. Para que existam soluções factíveis para todos os graus da matriz de Lyapunov, o menor valor de  $b_{\max}$  obtido nas Tabelas 1 e 2, isto é,  $b = 1.94$ , foi escolhido para definir o domínio de validade do modelo nebuloso T–S. As Tabelas 3 e 4 mostram os valores do

$tr(W)$  e as áreas  $\mathcal{A}$  correspondentes às estimativas da região de atração dentro do domínio de validade do modelo (conforme ilustra a Figura 1 para  $g = 3$ ).

Tabela 3 – Valores do  $tr(W)$  e área  $\mathcal{A}$  das estimativas de região de atração com  $b = 1.94$  para o Corolário 3.1 com  $J(\theta)$  e  $J(\gamma)$  para diferentes valores do grau  $g$  de  $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1.

$g$	$J(\theta)$		$J(\gamma)$	
	$tr(W)$	$\mathcal{A}$	$tr(W)$	$\mathcal{A}$
1	1.1608	6.4564	1.3854	5.7299
2	1.0415	7.2377	1.2693	6.1128
3	1.0114	7.3032	1.1062	6.7791

Tabela 4 – Valores do  $tr(W)$  e área  $\mathcal{A}$  das estimativas de região de atração com  $b = 1.94$  para o Corolário 3.2 com  $J(\theta)$  e  $J(\gamma)$  para diferentes valores do grau  $g$  de  $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1.

$g$	$J(\theta)$		$J(\gamma)$	
	$tr(W)$	$\mathcal{A}$	$tr(W)$	$\mathcal{A}$
1	1.1608	6.4564	1.3854	5.7300
2	1.0415	7.2370	1.2693	6.1128
3	1.0017	7.4025	1.0673	6.9759

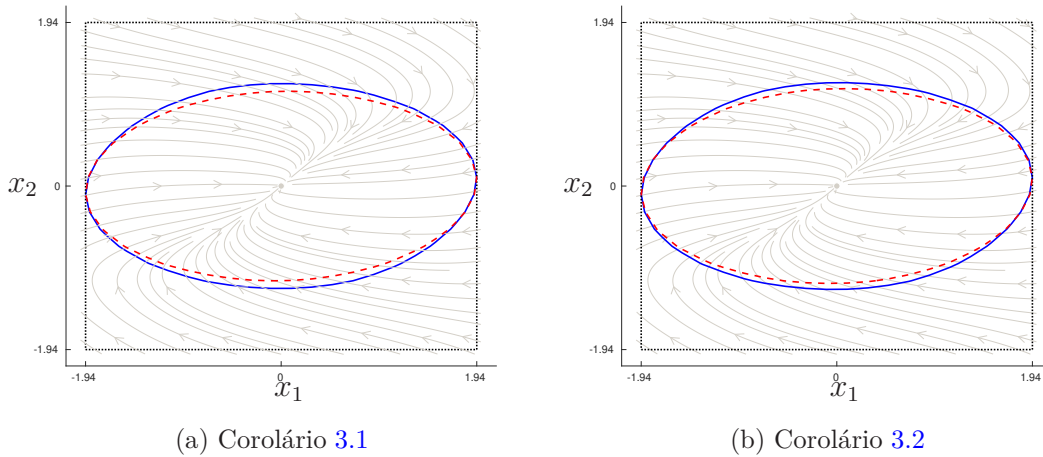


Figura 1 – Domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo nebuloso T-S (pontilhado preto) com  $b = 1.94$ , retrato de fase (setas cinza claro) e estimativas da região de atração utilizando o **Corolário 3.1** e o **Corolário 3.2** com  $J(\theta)$  (azul contínuo) e  $J(\gamma)$  (vermelho tracejado) com grau  $g = 3$  de  $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.1.

Como é possível verificar nas Tabelas 3 e 4, o Corolário 3.2 sempre produz valores menores (ou, pelo menos, iguais) para o  $tr(W)$  em comparação com o Corolário 3.1, reforçando as vantagens de se fazer uso de variáveis de folga para diminuir o conservadorismo. Por outro lado, a complexidade computacional é significativamente maior. Outro

fato que pode ser constatado é que a abordagem com  $J(\theta)$  sempre provê maiores áreas para a estimativa da região de atração, como corroborado pela Figura 1, sendo menos conservadora para este exemplo.

A Tabela 5 apresenta uma comparação entre os Corolários 3.1 e 3.2 utilizando  $J(\theta)$ , e o Teorema 6.1 de (CAMPOS, 2015), o Teorema 2 de (LEE *et al.*, 2012), e o Teorema 2 de (LEE *et al.*, 2014) considerando  $b = 2$ . As curvas obtidas para as estimativas das regiões de invariância baseadas em  $P_g(\alpha)$  são apresentadas na Figura 2 para os graus  $g = 2$  e  $g = 3$ . Observe-se que, pelas trajetórias do retrato de fase, aparentemente o sistema não linear é globalmente assintoticamente estável.

Tabela 5 – Número de linhas de LMIs  $L$ , número de variáveis  $V$ , área  $\mathcal{A}$  da estimativa da região de atração contida no domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo T–S com  $b = 2$  e grau  $g = \{2, 3\}$  de  $P_g(\alpha)$  para o **Corolário 3.2** com  $J(\theta)$ , **Teorema 6.1** (CAMPOS, 2015), **Teorema 2** (LEE *et al.*, 2012) e **Teorema 2** (LEE *et al.*, 2014) com 20 iterações, para o Exemplo 3.1.

	$g = 2$			$g = 3$		
	$L$	$V$	$\mathcal{A}$	$L$	$V$	$\mathcal{A}$
Corolário 3.2	15640	1233	6.1847	27440	2463	6.8551
Teo. 6.1 (CAMPOS, 2015)	5140	944	6.1096	10280	3776	6.3085
Teo. 2 (LEE <i>et al.</i> , 2012)	140	128	5.8893	-	-	-
Teo. 2 (LEE <i>et al.</i> , 2014)	327804	1844	3.3956	655604	7364	5.1160

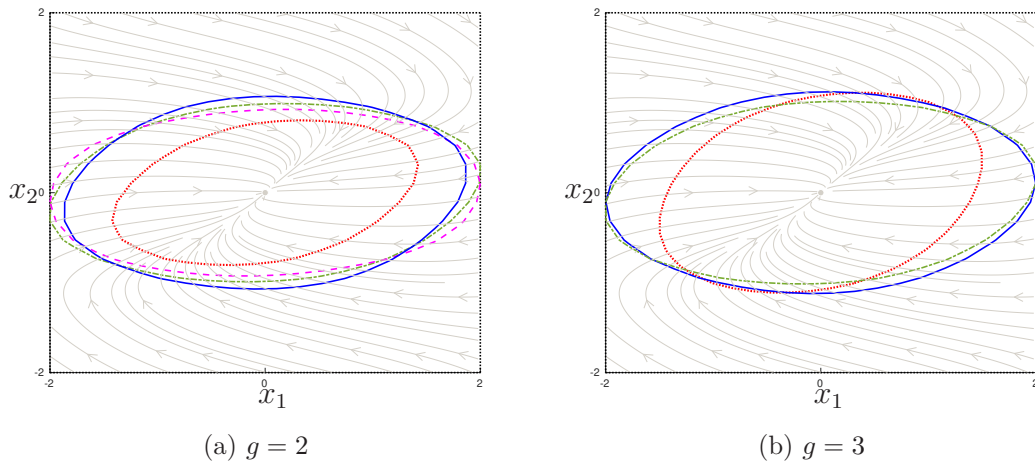


Figura 2 – Domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo nebuloso T–S com  $b = 2$  e estimativa da região de atração considerando  $P_g(\alpha)$  de graus  $g = 2$  e  $g = 3$  para o **Corolário 3.2** (azul contínuo) com  $J(\theta)$ , **Teorema 6.1** (CAMPOS, 2015) (verde traço-ponto), **Teorema 2** de (LEE *et al.*, 2012) (magenta tracejado) e **Teorema 2** de (LEE *et al.*, 2014) com 20 iterações (vermelho pontilhado), para o Exemplo 3.1.

É possível notar que o Corolário 3.2 demanda um custo computacional maior que Campos (2015, Teorema 6.1) e Lee *et al.* (2012, Teorema 2), mas provê estimativas



maiores que todos os demais métodos em comparação para a região de invariância, tanto para  $g = 2$ , quanto para  $g = 3$ .

**Exemplo 3.2.** *Considere o sistema não linear*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(1 + \frac{\lambda(1 - \text{sen}(x_1))}{2}\right)x_1 - 2x_2,\end{aligned}$$

com  $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq \pi/2\}$ , com  $x_2$  limitado artificialmente e com pontos de equilíbrio em  $(0, 0)$  e em  $\left(2x_2, \frac{\arcsen(4 + \lambda)}{2}\right)$ ,  $\lambda \neq -4$ ,  $\lambda \in [-5, -3]$ .

Escolhendo  $\lambda = 20$  (em que a origem passa a ser o único ponto de equilíbrio) e  $z = \text{sen}(x_1)$  como variável premissa, obtém-se o modelo nebuloso T-S na forma (3.2) encontrado em Lee *et al.* (2012, Exemplo 2), com

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -21 & -2 \end{bmatrix} \\ \alpha_1 &= \frac{1 + \text{sen}(x_1)}{2} & \alpha_2 &= 1 - \alpha_1.\end{aligned}$$

As derivadas parciais das funções de associação em relação a  $x_1$  contêm o termo não linear não polinomial  $\cos(x_1)$ , de forma que a matriz Jacobiana das funções de pertinência é dada por

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0.5 \cos(x_1) & 0 \\ -0.5 \cos(x_1) & 0 \end{bmatrix},$$

Para a abordagem com  $J(\theta)$ , tem-se

$$J(\theta) = \theta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, a matriz Jacobiana tem apenas dois vértices e grau um em  $\theta$ . Por outro lado, para a abordagem proposta com  $J(\gamma)$ , a série de Taylor de  $\cos(x_1)$ , truncada na terceira ordem e o respectivo resíduo são dados por

$$\Phi = 1 - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^4}{24}, \quad \delta = \cos(x_1) - \Phi.$$

Dessa maneira, a matriz Jacobiana tem grau quatro em  $\gamma$  e grau um no parâmetro  $\beta$ , referente ao resíduo. Neste exemplo, para a variável de folga  $X_d(\alpha, \theta, \gamma)$ , foi utilizado o grau  $d = (g - 1, 0, 1)$ , em que  $g = 2$  é o grau de  $P_g(\alpha)$ .

Como é corroborado pela Tabela 6, a modelagem da matriz Jacobina para a abordagem  $J(\gamma)$  tem maior custo computacional. Porém, quanto ao conservadorismo,  $J(\theta)$  fornece menores áreas para as estimativas da região de atração, como também é possível ver na Figura 3.

Tabela 6 – Número de linhas de LMIs  $L$ , número de variáveis  $V$  e área  $\mathcal{A}$  da estimativa da região de atração associados ao **Corolário 3.2** com  $J(\theta)$  e  $J(\gamma)$  para o grau  $g = 2$  de  $P_g(\alpha)$ , para o Exemplo 3.2.

	$L$	$V$	$\mathcal{A}$
$J(\theta)$	3972	396	4.5418
$J(\gamma)$	32388	780	5.1361

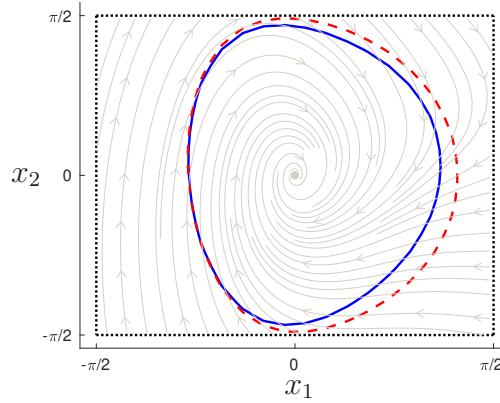


Figura 3 – Domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo nebuloso T–S e estimativa da região de atração com  $P_g(\alpha)$  de grau  $g = 2$  **Corolário 3.2** com  $J(\theta)$  (azul contínuo) e  $J(\gamma)$  (vermelho tracejado), para o Exemplo 3.2.

Tabela 7 – Número de linhas de LMIs  $L$ , número de variáveis  $V$ , área  $\mathcal{A}$  da estimativa da região de atração contida no domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo T–S com grau  $g = 2$  de  $P_g(\alpha)$  para o **Corolário 3.2** com  $J(\gamma)$ , **Teorema 6.1** (CAMPOS, 2015), **Teorema 2** (LEE *et al.*, 2012) e **Teorema 2** (LEE *et al.*, 2014) com 20 iterações, para o Exemplo 3.2.

	$L$	$V$	$\mathcal{A}$
Corolário 3.2	32388	780	5.1361
Teo. 2 (LEE <i>et al.</i> , 2012)	84	40	5.0104
Teo. 6.1 (CAMPOS, 2015)	876	252	4.7814
Teo. 2 (LEE <i>et al.</i> , 2014)	15640	1775	4.2664

A partir da Figura 4 e da Tabela 7, verifica-se que o método proposto apresenta maior estimativa para a região de atração que os demais métodos da literatura em comparação, embora sujeito a um custo maior.

**Exemplo 3.3.** *O sistema de Lorenz resulta do primeiro estudo numérico do caos. Foi modelado por Edward Lorenz no final da década de 1950, a partir de um estudo sobre as correntes de ar na atmosfera (LORENZ, 1963). A Teoria do Caos tem aplicação em inúmeros problemas de engenharia, economia, biologia e muitas outras áreas de estudo.*

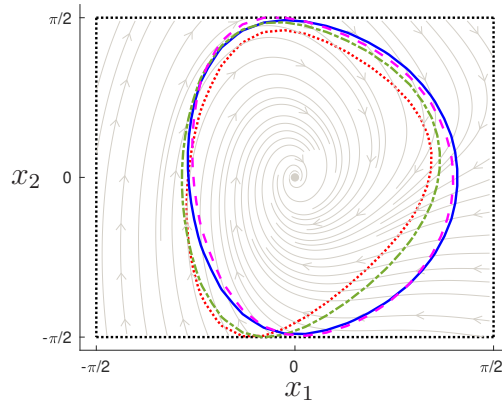


Figura 4 – Domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo nebuloso T–S e estimativa da região de atração considerando  $P_g(\alpha)$  de grau  $g = 2$  para o **Corolário 3.2** (azul contínuo) com  $J(\gamma)$ , **Teorema 6.1** (CAMPOS, 2015) (verde traço-ponto), **Teorema 2** de (LEE *et al.*, 2012) (magenta tracejado) e **Teorema 2** de (LEE *et al.*, 2014) com 20 iterações (vermelho pontilhado), para o Exemplo 3.2.

Considere as equações dinâmicas que descrevem o sistema caótico de Lorenz

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ -\beta x_3 + x_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

que possui um ponto de equilíbrio na origem quando  $\rho < 1$ .

Para a escolha particular de  $z = x_1$  como variável premissa, obtém-se o mesmo modelo nebuloso T–S (3.2) que em Lee *et al.* (2014), com

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & \bar{x}_1 \\ 0 & -\bar{x}_1 & -\beta \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & -\bar{x}_1 \\ 0 & \bar{x}_1 & -\beta \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1 = \frac{-x_1 + \bar{x}_1}{2\bar{x}_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x_1 + \bar{x}_1}{2\bar{x}_1}, \quad \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \in [-\bar{x}_1, \bar{x}_1]\}$$

e matriz Jacobiana das funções de pertinência dada por

$$J = \frac{1}{2\bar{x}_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escolhendo-se  $(\sigma, \rho, \beta) = (20.1, 0.2, 23.6)$ , de forma que a origem do sistema caótico de Lorenz é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (no caso, trata-se do único ponto de equilíbrio), foram realizadas simulações computacionais a fim de comparar a abordagem proposta com o método iterativo apresentado em Lee *et al.* (2014). Foi utilizado o mesmo cenário que no artigo em comparação, isto é,  $\bar{x}_1 = 7$  para o valor máximo (em módulo) do estado  $x_1$  e  $g = 3$  para o grau de  $P_g(\alpha)$ . Além disso, foram realizadas 20 iterações para o algoritmo iterativo em comparação.

Tabela 8 – Número de linhas de LMIs  $L$ , número de variáveis  $V$  e volume  $\mathcal{V}$  da estimativa da região de atração contida no domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo T–S com  $\bar{x}_1 = 7$ , grau  $g = 3$  de  $P_g(\alpha)$  e grau  $d = (2g, 0, 0)$  de  $X_d(\alpha, \theta, \gamma)$  para o **Corolário 3.2** e **Teorema 2** (LEE *et al.*, 2014) com 20 iterações, para o Exemplo 3.3.

	$L$	$V$	$\mathcal{V}$
Corolário 3.2	9744	786	1012.2616
Teo. 2 (LEE <i>et al.</i> , 2014)	60975	17343	486.2368

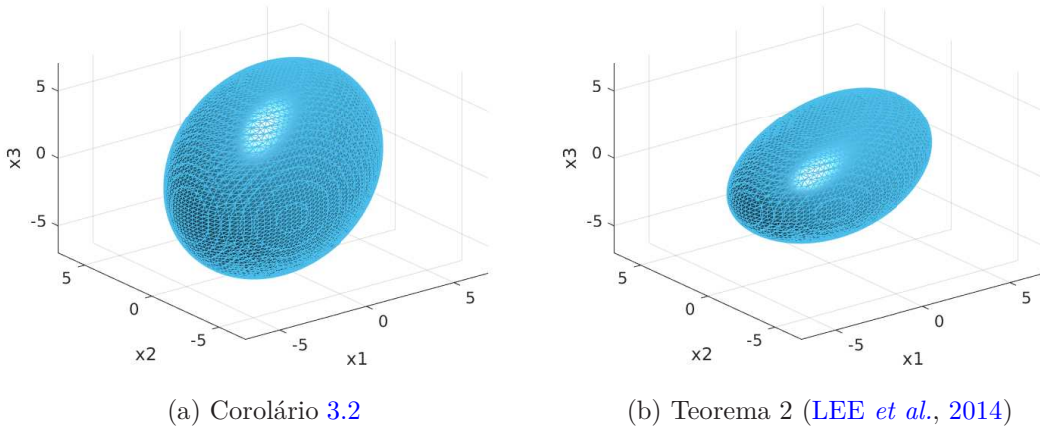


Figura 5 – Estimativas da região de atração considerando  $P_g(\alpha)$  de grau  $g = 3$  para o **Corolário 3.2** com  $J(\theta)$  e **Teorema 2** (LEE *et al.*, 2014) com 20 iterações, para o Exemplo 3.3.

Como resultado, foram obtidas as estimativas da região de atração, apresentadas na Figura 5, e os respectivos volumes  $\mathcal{V}$  e complexidade computacional (em termos de  $L$  e  $V$ ), conforme visto na Tabela 8. Para o Teorema 2 de Lee *et al.* (2014), o número de variáveis e de linhas de LMIs computado equivale a apenas uma iteração. Para o Corolário 3.2 proposto, o grau considerado para a variável de folga  $X_d(\alpha, \theta, \gamma)$  foi  $d = (2g, 0, 0)$ , sendo que  $g$  é o grau da matriz de Lyapunov. Observe que a abordagem proposta não só produz melhores estimativas para a região de atração, como também demanda um menor custo computacional ( $L$  e  $V$  menores) quando comparado com o Teorema 2 de Lee *et al.* (2014).

### 3.6 Conclusão

Um novo método para certificar a estabilidade local e prover uma estimativa do domínio de atração pra sistemas não lineares contínuos no tempo representados por modelos nebulosos T–S foi proposto. A estabilidade local foi garantida por meio de condições LMIs dependentes de parâmetros, com matrizes de Lyapunov e variáveis de folga polinomiais homogêneas de graus arbitrários. A representação politópica da derivada no

tempo das funções de pertinência foi aprimorada e uma nova técnica, que consiste em representar os termos não lineares da Jacobiana por meio de expansões em série de Taylor, também foi proposta. Exemplos numéricos ilustram as vantagens do método proposto, tanto em termos de melhores estimativas para a região de atração, quanto em menor custo computacional (número de linhas de LMIs e de variáveis) quando comparado com outras abordagens da literatura.

## 4 Estabilização por realimentação de estados

Neste capítulo é proposta uma estratégia para lidar com o problema de síntese de controladores localmente estabilizantes, por realimentação de estados, para sistemas nebulosos T–S contínuos no tempo. A abordagem apresentada não requer o conhecimento prévio de limitantes para as derivadas no tempo das funções de pertinência e é obtida a partir da extensão de condições de estabilidade local similares às apresentadas no Capítulo 3. Por se tratar de um problema de difícil manipulação algébrica, no sentido de proverem-se condições de projeto em termos de LMIs, é proposto um procedimento de dois estágios. No primeiro estágio é computada uma lei de controle estabilizante de realimentação de estados para o sistema dual. No caso de factibilidade, o ganho calculado é utilizado como parâmetro de entrada para a condição do segundo estágio que, se factível, garante a estabilidade, provê um controlador de realimentação de estados estabilizante e uma estimativa da região de atração para o sistema nebuloso T–S original.

### 4.1 Outra abordagem para a análise de estabilidade

No Capítulo 3 foi apresentada uma abordagem para a análise de estabilidade do sistema não linear contínuo no tempo sem entradas forçadas (3.1). Para a síntese de controladores, é proposto neste capítulo uma condição de análise também baseada na função nebulosa de Lyapunov (3.3).

**Lema 4.1.** *Se existir uma matriz polinomial homogênea  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T > 0$  de grau  $g$  tal que*

$$He\left(A(\alpha)^T P_g(\alpha) + \left(\frac{1}{2}\right) \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) A(\alpha)\right) < 0, \quad (4.1)$$

com

$$\nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) = \left[ \frac{\partial P_g(\alpha) x_\gamma}{\partial \alpha_1} \dots \frac{\partial P_g(\alpha) x_\gamma}{\partial \alpha_N} \right], \quad (4.2)$$

seja satisfeita para todo  $\alpha \in \Lambda_r$ ,  $\theta \in \Lambda_\theta$  e  $\gamma \in \Lambda_\nu$ , então a origem do sistema nebuloso (3.2) é assintoticamente estável.

**Prova 4.1.** *Para o sistema (3.2) com  $u = 0$ , a derivada no tempo da função de Lyapunov em (3.3) é dada por*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P_g(\alpha) x + x^T P_g(\alpha) \dot{x} + x^T \dot{P}_g(\alpha) x \\ &= x^T \left( A(\alpha)^T P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha) + \dot{P}_g(\alpha) \right) x. \end{aligned}$$

Considerando apenas o termo quadrático em  $x$  envolvendo  $\dot{P}_g(\alpha)$ , utilizando (2.8), (3.4)

e (4.2), tem-se

$$\begin{aligned}
x^T \dot{P}_g(\alpha)x &= x^T \left( \frac{\partial P_g(\alpha)}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 + \dots + \frac{\partial P_g(\alpha)}{\partial \alpha_N} \dot{\alpha}_N \right) x \\
&= x^T \left( \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i \frac{\partial P_g(\alpha)}{\partial \alpha_i} \right) x = \sum_{i=1}^N x^T \left( \frac{\partial P_g(\alpha)}{\partial \alpha_i} \right) x \dot{\alpha}_i \\
&= x^T \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) A(\alpha) x \\
&= x^T \left( He \left( \left( \frac{1}{2} \right) \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) A(\alpha) \right) \right) x
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Portanto, se a condição (4.1) é satisfeita para todo  $\alpha \in \Lambda_r$ ,  $\theta \in \Lambda_\theta$  e  $\gamma \in \Lambda_\nu$ , então

$$\dot{V}(x) = x^T \left( He \left( A(\alpha)^T P_g(\alpha) + \left( \frac{1}{2} \right) \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) A(\alpha) \right) \right) x < 0$$

e a prova está completa.

Observe que entre o segundo e o terceiro passo apresentados em (4.3), o estado  $x$  (que multiplica  $\dot{\alpha}_i$ ) é substituído por  $x_\gamma$ , que é válido no domínio  $\mathcal{X}$ . Note que essa é a principal diferença em relação ao Teorema 3.1, não sendo utilizado o produto de Kronecker, pois o mesmo dificulta a derivação de condições de síntese.

## 4.2 Controle estabilizante por realimentação de estados

O objetivo deste capítulo consiste em projetar uma lei de controle de realimentação de estados  $u = K(\alpha)x$  tal que a origem do sistema nebuloso T–S em malha fechada

$$\dot{x} = \left( A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha) \right) x, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \tag{4.4}$$

seja assintoticamente estável, além de prover uma estimativa para a região de atração dentro de  $\mathcal{X}$ . Assim, a primeira contribuição para resolver o problema consiste em uma condição de síntese de realimentação de estados que assegura a estabilidade assintótica da origem do sistema dual de (4.4), isto é, de

$$\dot{v} = \underbrace{\left( A(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha) \right)^T}_{A_{cl_d}(\alpha)} v, \quad \forall v \in \mathcal{X}. \tag{4.5}$$

**Teorema 4.1.** *Se existirem matrizes polinomiais homogêneas  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T > 0$ ,  $L_d(\alpha)$ , de graus  $g$  e  $d$ , respectivamente, uma matriz  $S$  e um escalar  $\xi$  tais que*

$$\begin{aligned}
&\left[ \begin{array}{c} He \left( A(\alpha) P_g(\alpha) + \left( \frac{1}{2} \right) \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) A(\alpha)^T + B(\alpha) L_d(\alpha) \right) \quad \star \\ L_d(\alpha)^T B(\alpha)^T \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array} \right] \\
&+ He \left( \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \xi I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} P_g(\alpha) + \left( \frac{1}{2} \right) J(\theta)^T \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha)^T - S & -S \end{array} \right] \right) < 0. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

seja satisfeita para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $\theta \in \Lambda_\theta$  e  $\gamma \in \Lambda_\kappa$ , então  $K_d(\alpha) = L_d(\alpha)S^{-1}$  é um ganho de realimentação de estados que garante a estabilidade assintótica do sistema dual (4.5).

**Prova 4.2.** Multiplicando (4.6) à direita por  $\mathcal{B}_\perp$  e à esquerda por  $\mathcal{B}_\perp^T$ , com

$$\mathcal{B}_\perp = \begin{bmatrix} I \\ S^{-1} \left( P_g(\alpha) + \left(\frac{1}{2}\right) J(\theta)^T \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha)^T \right) - I \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{aligned} He \left( A(\alpha)P_g(\alpha) + \left(\frac{1}{2}\right) \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) A(\alpha)^T + B(\alpha)L_d(\alpha)S^{-1}P_g(\alpha) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}\right) B(\alpha)L_d(\alpha)S^{-1}J(\theta)^T \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha)^T \right) < 0 \end{aligned}$$

Considerando  $K_d(\alpha) = L_d(\alpha)S^{-1}$ , então

$$He \left( A_{cl_d}(\alpha)P_g(\alpha) + \left(\frac{1}{2}\right) \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) A_{cl_d}(\alpha)^T \right) < 0$$

e, logo,

$$He(A_{cl_d}(\alpha)P_g(\alpha)) + \dot{P}_g(\alpha) < 0$$

o que comprova a estabilidade assintótica da origem do sistema (4.5).

A primeira observação a ser feita sobre as condições do Teorema 4.1 é que as manipulações algébricas propostas não funcionam (ou, pelo menos, não de maneira imediata) se o sistema primal (4.4) for considerado. Nesse caso, seriam necessárias transformações de congruência envolvendo a inversa da matriz de Lyapunov, além de que seria muito mais difícil lidar com a manipulação de  $\dot{P}_g(\alpha)$ , utilizando o modelo dado em (4.3).

A estratégia de tratar a estabilização do sistema dual (4.5) proposta nesta dissertação é motivada pelo fato de que a estabilidade do sistema original (4.4) é equivalente no caso de funções de pertinência com taxas de variação arbitrárias (HU; BLANCHINI, 2010). Embora nada possa ser garantido no que se refere à equivalência no caso de taxas limitadas, os exemplos numéricos investigados no final deste capítulo mostram que esta heurística provê um bom ponto de início para o teorema apresentado a seguir, que fornece condições para o cálculo do controlador para o sistema original (4.4).

**Teorema 4.2.** *Seja  $K_d(\alpha)$  um ganho de realimentação de estados polinomial homogêneo de grau  $d$  dado. Se existirem matrizes polinomiais homogêneas  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T > 0$ ,  $F_g(\alpha)$ ,  $G_g(\alpha)$  de grau  $g$ ,  $L_d(\alpha)$  de grau  $d$  e uma matriz  $H$  tais que*

$$Q + He(XB) < 0, \tag{4.7}$$



seja satisfeita para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $\theta \in \Lambda_\theta$  e  $\gamma \in \Lambda_\kappa$ , com  $Q$ ,  $X$  e  $\mathcal{B}$  dadas por

$$Q = \begin{bmatrix} \phi_Q & \star & \star \\ P_g(\alpha) - F_g(\alpha)^T + G_g(\alpha) (A(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha)) & -G_g(\alpha) - G_g(\alpha)^T & \star \\ B(\alpha)^T \left( F_g(\alpha)^T + \left(\frac{1}{2}\right) J(\theta)^T \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha)^T \right) & B(\alpha)^T G_g(\alpha)^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} L_d(\alpha) - HK_d(\alpha) & 0 & -H \end{bmatrix},$$

com

$$\phi_Q = He \left( \left( A(\alpha)^T + K_d(\alpha)^T B(\alpha)^T \right) F_g(\alpha)^T + \left(\frac{1}{2}\right) \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) (A(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha)) \right),$$

então  $K(\alpha) = H^{-1}L_d(\alpha)$  é um ganho de realimentação de estados que garante que a origem do sistema nebuloso  $T$ - $S$  em malha fechada (4.4) é assintoticamente estável.

**Prova 4.3.** Multiplicando (4.7) à direita por  $\mathcal{B}_\perp$  e à esquerda por  $\mathcal{B}_\perp^T$ , com

$$\mathcal{B}_\perp = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ H^{-1}L_d(\alpha) - K_d(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

e assumindo  $K(\alpha) = H^{-1}L_d(\alpha)$  e  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} He \left( A_{cl}(\alpha)^T F_g(\alpha)^T + \left(\frac{1}{2}\right) \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) A_{cl}(\alpha) \right) & \star \\ P_g(\alpha) - F_g(\alpha)^T + G_g(\alpha) A_{cl}(\alpha) & -G_g(\alpha) - G_g(\alpha)^T \end{bmatrix} < 0. \quad (4.8)$$

Multiplicando (4.8) por  $\mathcal{T}$  à esquerda e por  $\mathcal{T}^T$  à direita, com

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} I & A_{cl}(\alpha)^T \end{bmatrix}$$

obtem-se

$$He \left( A_{cl}(\alpha)^T P_g(\alpha) + \left(\frac{1}{2}\right) \nabla_{\alpha\gamma} P_g(\alpha) J(\theta) A_{cl}(\alpha) \right) < 0$$

e, então,

$$He \left( A_{cl}(\alpha)^T P_g(\alpha) \right) + \dot{P}_g(\alpha) < 0,$$

o que prova que  $K(\alpha)$  é um ganho estabilizante. Por outro lado, executando os mesmos passos, porém utilizando

$$\mathcal{B}_\perp^T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

obtem-se  $He \left( A_{cl}(\alpha)^T P_g(\alpha) \right) + \dot{P}_g(\alpha) < 0$ , o que permite concluir que a matriz de Lyapunov  $P_g(\alpha)$  também prova que  $K_d(\alpha)$  é um ganho estabilizante.

Se as condições do Teorema 4.2 fornecerem uma solução factível, o ganho sintetizado  $K(\alpha)$  é, de fato, estabilizante, certificado pela matriz de Lyapunov  $P_g(\alpha)$ . Adicionalmente, é interessante notar que a mesma matriz de Lyapunov também garante que o ganho  $K_d(\alpha)$  dado *a priori* (computado para o sistema dual) é estabilizante. Como consequência, a estimativa da região de atração, conforme proposto em (3.2), é válida para ambos os ganhos.

Uma propriedade interessante do Teorema 4.2 é que o ganho  $K(\alpha)$  resultante pode ser usado como um novo dado de entrada, possibilitando a implementação de um procedimento iterativo, o que pode melhorar as estimativas para a região de atração em termos de volumes maiores.

### 4.3 Resultado principal

O próximo corolário provê condições de síntese associadas com a maximização de  $\Omega$  dentro do domínio de validade do modelo nebuloso T-S, agrupando os resultados obtidos neste capítulo.

**Corolário 4.1.** *Seja  $K_d(\alpha)$  um ganho de realimentação de estados polinomial homogêneo de grau  $d$  dado. Se existirem matrizes polinomiais homogêneas  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T > 0$ ,  $F_g(\alpha)$ ,  $G_g(\alpha)$  de grau  $g$ ,  $L_d(\alpha)$  de grau  $d$  e uma matriz  $H$  tais que*

$$\min \text{tr}(W) \quad \text{sujeito a} \quad (3.8), (3.10) \text{ e } (4.7),$$

*seja satisfeito para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ ,  $\theta \in \Lambda_\vartheta$  e  $\gamma \in \Lambda_\kappa$ , então  $K(\alpha) = H^{-1}L_d(\alpha)$  é um ganho de realimentação de estados que garante que a origem do sistema nebuloso T-S em malha fechada (4.4) é assintoticamente estável e  $\Omega \subseteq \mathcal{X}$  dado por (3.2) é um conjunto invariante que fornece uma estimativa da região de atração.*

### 4.4 Exemplos numéricos

**Exemplo 4.1.** *Considere o sistema não linear*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2+a}{2} + \frac{2-a}{2} \text{sen}(x_1) & -4 \\ \frac{19}{2} - \frac{21}{2} \text{sen}(x_1) & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{10+b}{2} + \frac{10-b}{2} \text{sen}(x_1) \end{bmatrix} u,$$

*que pode ser exatamente representado pelo modelo nebuloso T-S (3.2) na região compacta  $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq \pi/2, i = 1, 2\}$ , com*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1(z) = \frac{1 + \text{sen}(x_1)}{2}, \quad \alpha_2(z) = 1 - \alpha_1(z).$$

As escolhas particulares  $a = -4$  e  $b = 1$  reproduzem Lee *et al.* (2012, Exemplo 7) e Lee e Kim (2014, Exemplo 3). A Figura 6 apresenta a estimativa da região invariante para o sistema em malha fechada utilizando o Corolário 4.1, em que  $K_d(\alpha)$  é computado com o Teorema 4.1. Nesse cenário,  $g = 3$  foi escolhido como grau de  $P_g(\alpha)$ ,  $d = g$  foi a escolha para o grau de  $L_d(\alpha)$ , e fixou-se  $\xi = 10$ . Para ilustrar a dinâmica do sistema nebuloso T-S, algumas trajetórias para diferentes condições iniciais também são apresentadas na figura.

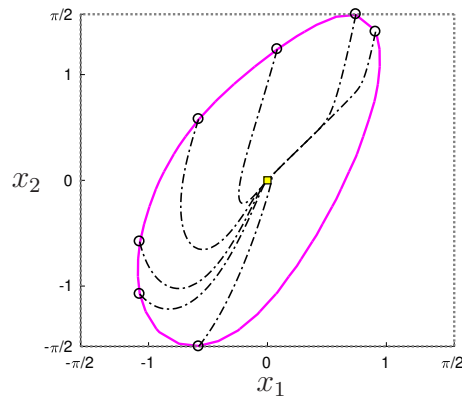


Figura 6 – Estimativa da região de atração obtida com o método proposto (magenta contínuo), domínio de validade do modelo (cinza pontilhado) e trajetórias (preto traço-ponto) iniciando em  $\circ$  e terminando na origem (quadrado amarelo), para o Exemplo 4.1.

A Figura 7 e a Tabela 9 apresentam uma comparação, em termos de estimativas da região de atração e respectivas áreas, entre o método proposto e os métodos Lee *et al.* (2012, Teorema 6) (com  $\phi_1 = \phi_2 = 5$ ) e Lee e Kim (2014, Teorema 2) (com  $q = 3$  e  $\phi = \phi^* = 172.0994$ ). Ademais, a Tabela 9 também apresenta o número de variáveis escalares  $V$  e de linhas de LMIs  $L$  para cada método (incluindo o Teorema 4.1). Não foi obtida solução factível para as condições de Pan *et al.* (2012b, Teorema 2) neste exemplo.

Tabela 9 – Áreas das estimativas para a região de atração  $\mathcal{A}$ , número de variáveis escalares  $V$  e número de linhas de LMIs  $L$  para cada condição, para o Exemplo 4.1.

	$\mathcal{A}$	$V$	$L$
Teorema 4.1	–	24	168
Corolário 4.1	3.9215	40	392
Lee <i>et al.</i> (2012, Teorema 6)	2.9982	44	30
Lee e Kim (2014, Teorema 2)	2.9432	129	180

Como pode ser visto na Tabela 9, a abordagem proposta provê ganhos estabilizantes associados com melhores estimativas da região de atração, mas, em contrapartida, apresenta um aumento significativo da complexidade computacional em termos de  $L$ .

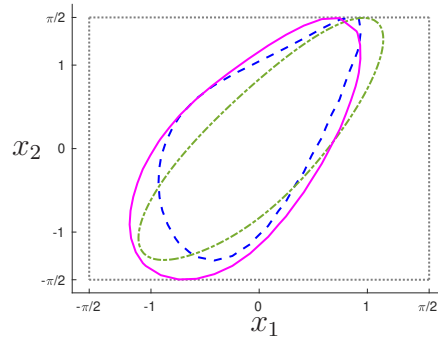


Figura 7 – Estimativas da região de atração obtidas com o método proposto (magenta contínuo), Lee *et al.* (2012, Teorema 6) (azul tracejado), e Lee e Kim (2014, Teorema 2) (verde traço-ponto), e domínio de validade do modelo (cinza pontilhado), para o Exemplo 4.1.

**Exemplo 4.2.** Considere o sistema não linear

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\text{sen}(x_1) & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{13}{2} + \frac{7}{2}\text{sen}(x_1) \end{bmatrix} u$$

que pode ser exatamente representado pelo modelo nebuloso  $T$ - $S$  (3.2) na região compacta  $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq \pi/2, i = 1, 2\}$ , com

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1(z) = \frac{1 + \text{sen}(x_1)}{2}, \quad \alpha_2(z) = 1 - \alpha_1(z),$$

conforme apresentado em Pan *et al.* (2012b, Exemplo 4).

A Figura 8 (a) mostra a estimativa para a região de atração obtida a partir do Corolário 4.1 utilizando grau  $g = 3$  para a matriz de Lyapunov e  $d = g$  para o grau de  $L_d(\alpha)$ , assim como trajetórias partindo de pontos iniciais na fronteira da região estimada, evidenciando a propriedade de invariância. No primeiro estágio é utilizado o Teorema 4.1 com  $g = 3$  e  $d = g$  como graus de  $P_g(\alpha)$  e  $L_d(\alpha)$ , respectivamente, além de  $\xi = 10$ . Na Figura 8 (b), são apresentadas as estimativas da região de atração obtidas para o Corolário 4.1 nas mesmas condições da Figura 8 (a), o Teorema 6 de Lee *et al.* (2012) com  $\phi_1 = \phi_2 = 5$ , o Teorema 2 de Pan *et al.* (2012b) (reprodução da curva apresentada no artigo) e o Teorema 2 de Lee e Kim (2014) (utilizando grau  $q = 3$  e  $\phi = 10000$ ). Os valores de área correspondentes às regiões de atração estimadas são apresentadas na Tabela 10, com o número  $V$  de variáveis escalares e  $L$  de linhas de LMIs para cada condição. Assim como no Exemplo 4.1, o método proposto provê a maior área para a região de atração.

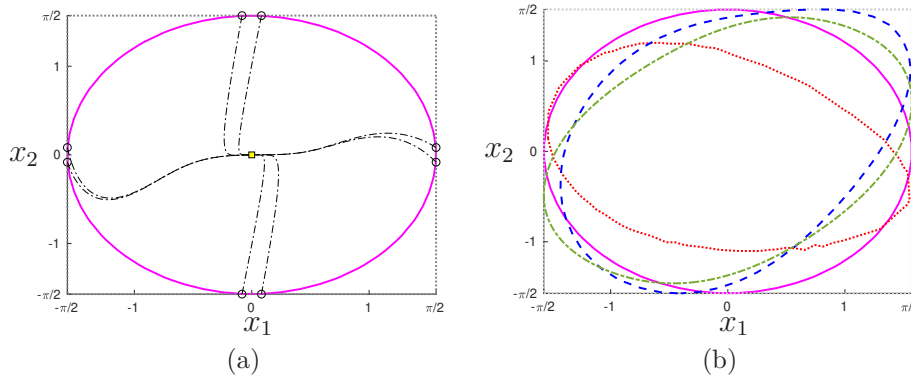


Figura 8 – Domínio de validade  $\mathcal{X}$  do modelo nebuloso T–S (pontilhado preto), trajetórias (preto traço-ponto) iniciando em  $\circ$  e terminando na origem (quadrado amarelo) e estimativas da região de atração utilizando o Corolário 4.1 proposto (magenta contínuo), Lee *et al.* (2012, Theorem 6) (azul tracejado), Lee e Kim (2014, Theorem 2) (verde traço-ponto) e Pan *et al.* (2012b, Theorem 2) (vermelho pontilhado), para o Exemplo 4.2.

Tabela 10 – Áreas das estimativas para a região de atração  $\mathcal{A}$ , número de variáveis escalares  $V$  e número de linhas de LMIs  $L$  para cada condição, para o Exemplo 4.2.

	$\mathcal{A}$	$V$	$L$
Teorema 4.1	–	27	224
Corolário 4.1	7.7244	40	344
(LEE <i>et al.</i> , 2012, Teorema 6)	6.8524	44	30
(LEE; KIM, 2014, Teorema 2)	6.6008	129	180
(PAN <i>et al.</i> , 2012b, Teorema 2)	5.2738	22	32

## 4.5 Conclusão

Foi apresentada uma nova estratégia para computar leis de controle de realimentação de estados para estabilização de sistemas nebulosos T–S. As condições são dadas em termos de LMIs dependentes de parâmetros e devem ser resolvidas em dois estágios. No primeiro estágio, um ganho que estabiliza o sistema dual é obtido. No segundo estágio, utilizando o ganho como entrada, condições suficientes proveem outro ganho de controle de realimentação de estados, associado com uma estimativa para a região de atração do sistema em malha fechada. A estabilidade em malha fechada do sistema e a invariância do domínio de atração estimado são certificadas por meio de uma função de Lyapunov nebulosa com dependência polinomial de grau arbitrário. A abordagem provê leis de controle que garantem maiores estimativas da região de atração quando comparadas com outras técnicas, como ilustrado em exemplos emprestados da literatura.

## 5 Estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos por meio de programação linear

Neste capítulo é proposta uma abordagem para lidar com o problema de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares contínuos no tempo com incertezas politópicas por meio de programação linear utilizando o Teorema de Gershgorin. A técnica explora condições de estabilidade robusta obtidas a partir de uma função de Lyapunov quadrática com matriz polinomial homogênea dependente de parâmetros incertos, resultando em desigualdades matriciais lineares dependentes de parâmetros. Porém, diferentemente dos métodos tradicionais da literatura, que usam condições suficientes na forma de LMIs (relaxações) e programação semi-definida para resolver o problema, propõe-se como principal novidade a utilização do Teorema de Gershgorin e de programação linear na construção de um certificado de estabilidade robusta, com o teste de positividade da matriz de Lyapunov realizado *a posteriori*.

### 5.1 Estabilidade robusta

Sistemas lineares politópicos contínuos no tempo podem ser representados em espaço de estados como

$$\dot{x} = A(\alpha)x, \quad (5.1)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados e  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz dinâmica incerta com estrutura politópica, o que significa que  $A(\alpha)$  pode ser escrita como uma combinação convexa de  $N$  vértices conhecidos, isto é

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad \alpha \in \Lambda_N \quad (5.2)$$

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (5.3)$$

A estabilidade robusta de (5.1) é assegurada se todos os autovalores de  $A(\alpha)$  estiverem localizados no semiplano esquerdo aberto do plano complexo, ou seja, se todos os autovalores tiverem parte real negativa.

Uma condição de estabilidade robusta equivalente pode ser obtida a partir da existência da função de Lyapunov

$$\nu(x) = x^T P(\alpha)x, \quad (5.4)$$

com  $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$ ,  $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que verifique

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \dot{x}^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)\dot{x} \\ &= x^T (A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha))x < 0, \quad \alpha \in \Lambda_N, \end{aligned} \quad (5.5)$$

garantindo assim a estabilidade assintótica da origem para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . Em outras palavras,  $A(\alpha)$  é Hurwitz estável para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  se, e somente se, existir  $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$  tal que

$$A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N. \quad (5.6)$$

A condição (5.6) é uma LMI dependente de parâmetros (ou LMI robusta), e precisa ser verificada para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ , com a matriz  $P(\alpha)$  dependendo de maneira genérica de  $\alpha$ , o que produz um problema de difícil solução, pois é de dimensão infinita. Porém, existem diversas abordagens (relaxações) para a construção de um conjunto finito de restrições na forma de LMIs, desigualdades ou equações algébricas que, no caso de haver solução factível, asseguram a factibilidade da LMI robusta para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . Basicamente, impõe-se uma estrutura para  $P(\alpha)$  e, a seguir, desenvolvem-se condições suficientes para que (5.6) seja válida em todo o domínio incerto.

A estabilidade quadrática consiste em atestar a estabilidade do sistema (5.1) por meio da construção de uma função de Lyapunov para o caso em que  $P(\alpha) = P, \forall \alpha \in \Lambda_N$ , conforme enuncia o próximo lema.

**Lema 5.1.** (*HORISBERGER; BELANGER, 1976*) *O sistema (5.1) é estável  $\forall \alpha \in \Lambda_N$  se existir uma matriz  $P = P^T > 0$  tal que*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.7)$$

No Lema 5.1, a estabilidade do sistema (5.1) é certificada para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ , mesmo com as LMIs testadas apenas nos vértices do politopo. Este resultado é estendido para o caso em que  $P(\alpha)$  tem estrutura com dependência afim, fornecendo o teste de estabilidade apresentado a seguir.

**Lema 5.2.** (*RAMOS; PERES, 2002*) *Se existirem matrizes  $P_i = P_i^T > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que*

$$\begin{aligned} A_i^T P_i + P_i A_i &< 0, \quad i = 1, \dots, N \\ A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j &< 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = i+1, \dots, N \end{aligned}$$

então uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros que certifica a estabilidade do sistema (5.1) para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  é dada por

$$P(\alpha) = P(\alpha)^T, \quad P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \quad \alpha \in \Lambda_N. \quad (5.8)$$

Uma outra abordagem que pode ser utilizada para certificar a estabilidade de (5.1) com  $P(\alpha)$  afim é baseada na introdução de variáveis de folga  $\mathcal{X} = [X_1 \ X_2]^T$  em (5.6) por meio do Lema de Finsler.

**Lema 5.3.** (*DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001*) Se existirem matrizes  $P_i = P_i^T > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  e  $X_1, X_2$  tais que

$$\begin{bmatrix} X_1 A_i + A_i^T X_1^T & P_i - X_1 + A_i^T X_2^T \\ P_i + X_2 A_i - X_i^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

então  $P(\alpha)$  dada por (5.8) é tal que (5.6) é verificada  $\forall \alpha \in \Lambda_N$ .

A aplicação do Lema de Finsler diretamente nas condições do Lema 5.2 produz mais uma condição suficiente de estabilidade.

**Lema 5.4.** (*LEITE; PERES, 2003*) Se existirem matrizes  $P_i = P_i^T > 0$  e  $X_{1i}, X_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que

$$\begin{bmatrix} X_{1i} A_i + A_i^T X_{1i}^T & P_i - X_{1i} + A_i^T X_{2i}^T \\ P_i + X_{2i} A_i - X_{1i}^T & -X_{2i} - X_{2i}^T \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = i+1, \dots, N$$

$$\Phi_{11} = A_i^T X_{1j}^T + X_{1j} A_i + A_j^T X_{1i}^T + X_{1i} A_j,$$

$$\Phi_{21} = P_i + P_j - X_{1i}^T - X_{1j}^T + X_{2j} A_i + X_{2i} A_j,$$

$$\Phi_{22} = -X_{2i} - X_{2i}^T - X_{2j} - X_{2j}^T,$$

então  $P(\alpha)$  dada por (5.8) é uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que certifica a estabilidade do sistema (5.1) para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .

## 5.2 Resultados principais

Com base no Teorema de Gershgorin, foi apresentada a Definição 2.1, a partir da qual são obtidas condições para produzir um teste suficiente para a positividade de uma matriz, conforme apresentado no lema a seguir.

**Lema 5.5.** Uma matriz  $M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é definida positiva se

$$m_{ij} > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = i+1, \dots, n$$

$$m_{ii} > \sum_{j=1; j \neq i}^n m_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Com base no Lema 5.5, são apresentadas na sequência condições suficientes na forma de um número finito de desigualdades lineares escalares para testar a positividade de uma matriz polinomial homogênea de grau genérico.



**Lema 5.6.** *Seja  $M_g(\alpha) = M_g(\alpha)^T$  uma matriz polinomial homogênea de grau  $g$  em  $\alpha \in \Lambda_N$ .  $M_g(\alpha)$  é definida positiva se todas as matrizes coeficientes associadas a todos os monômios satisfizerem as condições do Lema 5.5, ou seja, forem definidas positivas.*

**Prova 5.1.** *A prova do Lema 5.6 é imediata, observando que todos os monômios são não negativos (todos os  $\alpha_i$  são não negativos) e que as desigualdades escalares garantem que as matrizes coeficientes são definidas positivas. Note que no Lema 5.5 o módulo não é mais considerado na condição que define o disco de Gershgorin. Assim, a formulação do problema é simplificada, ao preço de algum conservadorismo.*

Em função do teste de positividade estabelecido pelo Lema 5.6, formulou-se uma nova condição de estabilidade robusta, baseada puramente em restrições lineares, como mostra o próximo teorema. Para um resultado mais geral, a matriz de Lyapunov é considerada de grau genérico  $g$ . Note que, sempre que o sistema for estável, existe uma matriz polinomial homogênea de grau finito  $g$  solução da desigualdade de Lyapunov (5.6) (OLIVEIRA; PERES, 2007).

**Teorema 5.1.** *Se existirem matrizes polinomiais homogêneas  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T$  e  $Q_{g+1}(\alpha) = Q_{g+1}(\alpha)^T$ , de graus  $g$  e  $g + 1$ , respectivamente, tais que a positividade de  $Q_{g+1}(\alpha)$  seja verificada utilizando as condições do Lema 5.6 e*

$$A(\alpha)^T P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha) + Q_{g+1}(\alpha) = 0, \quad (5.9)$$

*então testam-se todos os coeficientes associados aos monômios de  $P_g(\alpha)$ . Se forem definidos positivos, o sistema (5.1) é robustamente estável.*

A existência de uma solução para (5.9) garante que  $A(\alpha)^T P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha) < 0$ , pois  $Q_{g+1}(\alpha)$  é uma matriz definida positiva. Ademais, a factibilidade do teste  $P_g(\alpha) > 0$  realizado *a posteriori* certifica a estabilidade robusta do sistema. A variável  $Q_{g+1}(\alpha)$  não é estritamente necessária, uma vez que as condições do Lema 5.6 podem ser aplicadas diretamente na desigualdade de Lyapunov, como propõe o próximo teorema.

**Teorema 5.2.** *Se existir uma matriz polinomial homogênea  $P_g(\alpha) = P_g(\alpha)^T$  de grau  $g$  tal que todos os coeficientes matriciais do polinômio*

$$-\left(A(\alpha)^T P_g(\alpha) + P_g(\alpha) A(\alpha)\right) > 0 \quad (5.10)$$

*sejam definidos positivos utilizando as condições do Lema 5.5, então testam-se todos os coeficientes associados aos monômios de  $P_g(\alpha)$ . Se forem definidos positivos, o sistema (5.1) é robustamente estável.*

Embora o Teorema 5.2 tenha menor complexidade que o Teorema 5.1, devido à exclusão de  $Q_{g+1}(\alpha)$ , os experimentos numéricos mostram que a presença dessa variável

extra é crucial para propiciar melhores resultados, de certa forma compensando o conservadorismo associado às condições do Lema 5.5. Nos Teoremas 5.1 e 5.2, o teste da positividade de  $P_g(\alpha)$  é realizado após uma solução ter sido obtida, e, portanto, todas as matrizes coeficientes são conhecidas, reduzindo a avaliação a um simples teste de sinal dos autovalores. Como uma abordagem para melhorar o teste de positividade de  $P_g(\alpha)$ , pode-se utilizar relaxações de Pólya, isto é, testar os coeficientes de  $(\alpha_1 + \dots + \alpha_N)^d P_g(\alpha)$ , com  $d$  (inteiro) crescente (OLIVEIRA; PERES, 2005).

Os Teoremas 5.1 e 5.2, portanto, propõem abordagens para a certificação da estabilidade de sistemas contínuos lineares incertos utilizando apenas desigualdades e igualdades lineares escalares, com características de esparsidade. Essa estratégia possibilita o uso de resolvidores especializados em programação linear, como os que utilizam o método Simplex (por exemplo, o CPLEX). Neste contexto, os resolvidores baseados em métodos de pontos interiores podem ser mais eficientes do que quando aplicados à programação semi-definida (BEN-TAL; NEMIROVSKI, 2001).

### 5.3 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos obtidos a partir de uma base de dados<sup>1</sup> de sistemas incertos estáveis criados randomicamente nos quais o autovalor com maior parte real  $\lambda_{\max}$  (computado por meio de uma grade fina no espaço paramétrico) está posicionado em  $-10^{-3}$  e  $-10$  e  $N$  vértices, com  $N = 2$  e  $30$  e  $n = 2, 10$  e  $20$  estados. Para os Teoremas 5.1 e 5.2, foi utilizado o ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2019) apenas para extrair os coeficientes das matrizes polinomiais homogêneas e, então, construir as restrições lineares por meio do Lema 5.5.

As Tabelas 11 e 12 apresentam dados referentes à comparação entre os métodos propostos neste trabalho e condições da literatura (Lemas 1–4 da Seção 5.1, por programação semi-definida) para sistemas de 2 estados e 2 vértices, avaliando a eficiência dos solvers SeDuMi e Mosek.

Tabela 11 – Número  $V$  de variáveis escalares e  $L$  de restrições (linhas de LMIs, no caso dos Lemas 5.1–5.4) para sistemas de 2 estados e 2 vértices utilizando os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e os Teoremas 5.1 e 5.2 propostos com  $g = 2$ .

	L. 5.1	L. 5.2	L. 5.3	L. 5.4	T. 5.1	T. 5.2
$V$	3	6	14	22	33	9
$L$	12	20	40	56	36	12

Conforme mostra a Tabela 11, o Teorema 5.1 é o que utiliza mais variáveis para resolver o problema, seguido dos Lemas 5.4 e 5.3 e do Teorema 5.2, nessa ordem. Porém,

<sup>1</sup> A base de dados utilizada pode ser acessada em: <<http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/programs/SBAI2019/baseSistemasSBAI19.zip>>

Tabela 12 – Porcentagem de sistemas estáveis ( $e$ ) e tempo de processamento computacional ( $t$ ) para sistemas de 2 estados e 2 vértices para os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e os Teoremas 5.1 e 5.2 propostos com  $g = 2$ , com  $\lambda_{\max} = \{-0.001, -10\}$  e os *solvers* SeDuMi e Mosek.

	<i>solver</i>	SeDuMi		Mosek	
	$\lambda_{\max}$	$e(\%)$	$t(ms)$	$e(\%)$	$t(ms)$
L. 5.1	-0.001	93	20.2	93	1.7
	-10	96	12.8	96	1.4
L. 5.2	-0.001	99	21.3	99	2.8
	-10	100	14.4	100	1.7
L. 5.3	-0.001	99	20.9	94	2.2
	-10	100	17.9	100	1.7
L. 5.4	-0.001	99	23.4	97	2.4
	-10	100	19.9	100	2.3
T. 5.1	-0.001	87	10.9	95	1.9
	-10	99	7.3	99	1.5
T. 5.2	-0.001	86	9.9	82	1.2
	-10	99	3.4	99	1.2

os teoremas propostos (com  $g = 2$ ) usam uma quantidade menor ou igual de restrições que os lemas em comparação, exceto pelos Lemas 5.1 e 5.2 em relação ao Teorema 5.2. O aumento de  $g$  pode melhorar a efetividade das condições propostas mas, por outro lado, implica em maior esforço computacional, com mais variáveis e restrições. Esse efeito é menos acentuado no Teorema 5.2, que não possui a variável auxiliar.

Embora a Tabela 11 mostre que, em alguns casos, os Teoremas 5.1 e 5.2 demandam mais restrições, vale lembrar que são desigualdades escalares, enquanto nas outras condições (Lemas 5.1–5.4) tratam-se de linhas de desigualdades matriciais. Isto justifica o fato de os custos computacionais dos teoremas propostos serem, na maioria das vezes, menores que os dos lemas em comparação. Tais grandezas podem ser vistas na Tabela 12, em que, no melhor caso, o método proposto resolve o problema 5.85 vezes mais rápido que os demais utilizando o *solver* SeDuMi e 2 vezes mais rápido com o Mosek. Por ter sido o mais eficiente dos *solvers* nos testes, apenas o Mosek é utilizado a partir deste ponto.

Os Teoremas propostos certificam a estabilidade de uma quantidade menor de sistemas quando comparados com os Lemas 5.1–5.4, o que é explicado pela aplicação da condição de positividade do Lema 5.5. Um número menor de sistemas estáveis é identificado para  $\lambda_{\max} = -0.001$  (mais próximo de zero). Porém, para um autovalor máximo mais distante do eixo imaginário do plano complexo, os Teoremas propostos passam a ser competitivos.

A Tabela 13 apresenta os resultados obtidos para sistemas com 10 estados e 2 vértices. Nota-se que os Lemas 5.1 e 5.2 demandam tempos menores de resolução, porém o Teorema 5.1 com  $g = 2$  certifica mais sistemas estáveis que todos os demais métodos, sendo o menos conservador neste cenário. Em contrapartida, o Teorema 5.2 obteve a menor

Tabela 13 – Porcentagem de sistemas estáveis ( $e$ ), tempo de processamento computacional ( $t$ ), número  $V$  de variáveis escalares e  $L$  de restrições (linhas de LMIs, no caso dos Lemas 5.1–5.4) para sistemas de 10 estados e 2 vértices para os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e para os Teoremas 5.1 e 5.2 propostos com  $g = 2$ , com  $\lambda_{max} = \{-0.001, -10\}$ .

	$\lambda_{max}$	$e(\%)$	$t(ms)$	$V$	$L$
L. 5.1	-0.001	57	5.9	55	300
	-10	92	5.0		
L. 5.2	-0.001	96	9.9	110	500
	-10	100	6.8		
L. 5.3	-0.001	86	37.8	310	1000
	-10	100	33.6		
L. 5.4	-0.001	94	86.0	510	1400
	-10	100	75.2		
T. 5.1	-0.001	98	16.1	605	660
	-10	100	13.0		
T. 5.2	-0.001	43	19.5	165	220
	-10	83	16.1		

quantidade de sistemas estáveis. O fato do Teorema 5.1 apresentar melhores resultados que o Teorema 5.2 pode ser justificado pela presença de  $Q_{g+1}(\alpha)$ .

Tabela 14 – Porcentagem de sistemas estáveis ( $e$ ), tempo de processamento computacional ( $t$ ), número  $V$  de variáveis escalares e  $L$  de restrições (linhas de LMIs, no caso dos Lemas 5.1–5.4) para sistemas de 2 estados e 30 vértices para os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e para os Teoremas 5.1 e 5.2 propostos com  $g = 1$  e  $\lambda_{max} = -0.001$ .

	L. 5.1	L. 5.2	L. 5.3	L. 5.4	T. 5.1	T. 5.2
$e(\%)$	75	91	85	91	84	65
$t(ms)$	4.4	66.8	11.8	257.1	59.9	7.2
$V$	3	90	98	330	2880	90
$L$	124	495	600	7560	4185	1325

Na Tabela 14 (2 estados e 30 vértices), observa-se o conservadorismo dos teoremas propostos ao se aumentar o número de parâmetros incertos nos sistemas, visto que esses certificam uma quantidade maior de sistemas estáveis apenas quando comparados ao Teorema 5.1 e ao Lema 5.1. Por outro lado, o Teorema 5.2 mostra-se vantajoso, em termos de eficiência computacional, quando comparado com os demais métodos que também utilizam matrizes de Lyapunov afins (Lemas 5.2–5.4). O Teorema 5.1, diferente do Teorema 5.2, apresenta custo computacional maior que o Lema 5.3, podendo ser menos vantajoso também nesse quesito.

A Tabela 15 apresenta os resultados para 20 estados e 2 vértices. Como é possível verificar, o Teorema 5.1 certifica a estabilidade de todos os sistemas, da mesma forma que o Lema 5.2, porém com o menor tempo computacional. Finalmente, é impor-

Tabela 15 – Porcentagem de sistemas estáveis ( $e$ ), tempo de processamento computacional ( $t$ ), número  $V$  de variáveis escalares e  $L$  de restrições (linhas de LMIs, no caso dos Lemas 5.1–5.4) para sistemas de 20 estados e 2 vértices para os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 e para o Teorema 5.1 proposto, com  $g = 1$ , para  $\lambda_{\max} = -0.001$ .

	L. 5.1	L. 5.2	L. 5.3	L. 5.4	T. 5.1
$e(\%)$	70	100	80	90	100
$t(ms)$	34.6	106.9	458.4	1428.5	101.6
$V$	210	420	1220	2020	1680
$L$	1200	2000	4000	5600	1890

tante observar que o Teorema 5.1 é o mais vantajoso quanto ao custo computacional, se comparado com os métodos que também utilizam matrizes de Lyapunov afins, embora o número de variáveis sempre tenha sido maior (com exceção do caso da Tabela 15). Isso corrobora o argumento de que os métodos de pontos interiores possuem maior eficiência quando aplicados à programação linear.

## 5.4 Conclusão

Neste capítulo foi proposta uma nova abordagem para certificação de estabilidade de sistemas dinâmicos incertos contínuos no tempo. Ao contrário das propostas conhecidas, que resolvem este tipo de problema utilizando LMI *solvers* e programação semi-definida, a estratégia apresentada utiliza-se unicamente de restrições lineares escalares, com base no Teorema de Gershgorin. Como outra novidade, a positividade da matriz de Lyapunov não é imposta com restrições, mas sim verificada *a posteriori*. Foi utilizada uma base de sistemas garantidamente estáveis, a partir da qual obtiveram-se resultados computacionais, tanto dos teoremas propostos quanto de condições da literatura resolvidas por programação semi-definida. Foi mostrado que, para sistemas com um maior número de estados, a técnica proposta é competitiva com os demais métodos da literatura, tanto em relação à certificação de estabilidade dos sistemas, quanto à eficiência computacional. Entretanto, para sistemas com muitos parâmetros incertos, o conservadorismo é maior e também há desvantagens quanto ao custo computacional. A extensão da metodologia proposta para analisar a estabilidade de sistemas discretos, ou outras LMIs dependentes de parâmetros, como as apresentadas nos Capítulos 3 e 4, é imediata.

## 6 Considerações finais

Neste trabalho foram tratados sistemas não lineares contínuos no tempo representados por modelos nebulosos Takagi-Sugeno (T-S) por meio da técnica de não linearidade de setor local. Foram propostas técnicas que proveem certificados de estabilidade local e estimativas para a região de atração a partir de condições LMIs dependentes de parâmetros, com matrizes de Lyapunov e variáveis de folga polinomiais homogêneas de graus arbitrários. As novidades dos métodos apresentados são o uso de uma manipulação por meio do produto de Kronecker nas derivadas no tempo das funções de associação, e a proposição de uma abordagem para a representação politópica da derivada no tempo das funções de pertinência, representando-se os termos não lineares da Jacobiana por meio de expansões em série de Taylor truncada em uma ordem pré-determinada. A principal vantagem dos métodos propostos é que, ao contrário da maioria dos resultados encontrados na literatura, não é requerido um conhecimento prévio de limitantes para as derivadas no tempo das funções de pertinência.

Utilizando uma das condições de análise de estabilidade proposta como ponto de partida, foi fornecida uma nova estratégia para computar leis de controle por realimentação de estados para a estabilização de sistemas T-S. A condição de projeto é realizada em dois estágios. No primeiro obtém-se um ganho de realimentação de estados que estabiliza o sistema dual. O ganho obtido é utilizado como parâmetro de entrada do segundo estágio, composto por condições suficientes que, se factíveis, fornecem um ganho de realimentação de estados que estabiliza o sistema original. Assim como nas condições de análise, o método apresentado não requer um conhecimento prévio de limitantes para as derivadas no tempo das funções de pertinência, o que é uma vantagem ainda maior no contexto de síntese de leis de controle. As condições apresentadas são formuladas em termos de LMIs dependentes de parâmetros com busca em um parâmetro escalar.

Tanto para a análise de estabilidade, quanto para a estabilização, a estimativa da região de invariância foi obtida a partir de um problema de otimização composto pelas condições propostas e condições adicionais que fazem com que a região estimada seja maximizada dentro do domínio de validade do modelo T-S. Para comprovar a efetividade dos métodos propostos, foram utilizados exemplos numéricos da literatura que permitem comparar os resultados deste trabalho com outras abordagens existentes. Verificou-se que a abordagem proposta que faz uso de expansões em série de Taylor para a representação politópica da matriz Jacobiana das funções de pertinência permite diminuir o custo computacional, o que pode ser vantajoso para sistemas com muitos estados ou muitos termos não lineares. Além disso, foi possível verificar que os métodos propostos, tanto para análise de estabilidade, quanto para estabilização, sempre fornecem maiores estimativas para

a região de atração que os métodos em comparação para os exemplos verificados, em geral ao preço de um maior esforço computacional.

Por fim, foi apresentada uma abordagem que lida com o problema de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares contínuos no tempo com incertezas politópicas. A técnica proposta consiste em utilizar o Teorema de Gershgorin e programação linear para obter um certificado de estabilidade robusta por meio de restrições lineares, com o teste de positividade da matriz de Lyapunov realizado *a posteriori*. Desta maneira, é dispensado o uso de LMI *solvers* e de programação semi-definida. Utilizando-se uma base de sistemas garantidamente estáveis, foram feitos experimentos computacionais com o método proposto e com técnicas da literatura que utilizam programação semi-definida. Foi possível verificar que a técnica proposta é mais vantajosa que as demais, tanto em relação à certificação de estabilidade, quanto à eficiência computacional, quando tratados sistemas com um maior número de estados. Por outro lado, para sistemas com muitos parâmetros incertos, o método proposto é mais conservador e, em alguns casos, mais custoso que os demais.

## Perspectivas

Como trabalhos futuros sugere-se a investigação dos seguintes aspectos:

1. Obtenção de uma lei de controle por realimentação de estados para sistemas não lineares representados por modelos T–S a partir das condições do Capítulo 3, que utiliza a nova manipulação por produto de Kronecker nas derivadas no tempo da função de Lyapunov.
2. Utilizar as técnicas propostas para tratar problemas similares no âmbito de filtragem de sistemas não lineares representados por modelos T–S.
3. Estender as condições propostas para calcular ganhos estabilizantes por realimentação de saída.
4. Estender os métodos de análise de estabilidade e controle para computar as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

## Trabalhos publicados

1. GOMES, I. O.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos via programação linear utilizando o Teorema de Gershgorin. In: Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automação Inteligente. Ouro Preto, MG, Brasil: Outubro, 2019. p. 829–834. DOI: 10.17648/sbai-2019-111241;

2. GOMES, I. O.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Local stability analysis and estimation of the domain of attraction for nonlinear systems via Takagi–Sugeno fuzzy modeling. In: Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control. Nice, France: December, 2019. p. 4826–4828.

## Trabalho aceito para publicação

- GOMES, I. O.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D.; TOGNETTI, E. S. Local state-feedback stabilization of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. In: 21st IFAC World Congress. Berlin, Germany, July, 2020.



# Referências

- AGULHARI, C. M.; FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 45, n. 3, p. 36:1–36:25, ago. 2019. <<http://rolmip.github.io>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 58.
- ARIÑO, C.; SALA, A. Relaxed LMI conditions for closed-loop fuzzy systems with tensor-product structure. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, v. 20, n. 8, p. 1036–1046, dez. 2007. Citado na página 18.
- AVIS, D.; FUKUDA, K. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra. *Discrete & Computational Geometry*, v. 8, n. 3, p. 295–313, set. 1992. Citado na página 27.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. *Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications*. [S.l.]: Siam, 2001. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 58.
- BERNAL, M.; GUERRA, T. M. Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi–Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 18, n. 4, p. 815–822, ago. 2010. Citado na página 18.
- BOUDAUD, F.; CARUSO, F.; ROY, M.-F. Certificates of positivity in the Bernstein basis. *Discrete & Computational Geometry*, v. 39, n. 4, p. 639–655, jun. 2008. Citado na página 20.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. Citado 5 vezes nas páginas 17, 20, 27, 28 e 34.
- CAMPOS, V. C. S. *Takagi-Sugeno models in a tensor product approach: Exploiting the representation*. Tese (Doutorado) — Federal University of Minas Gerais, Belo Horizonte, Brazil, jul. 2015. Citado 7 vezes nas páginas 9, 11, 18, 36, 40, 42 e 43.
- CHESI, G.; GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2009. v. 390. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 390). Citado na página 20.
- DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado 4 vezes nas páginas 19, 28, 33 e 56.
- DONG, J.; WANG, Y.; YANG, G.-H.  $\mathcal{H}_\infty$  and mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control of discrete-time T–S fuzzy systems with local nonlinear models. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 164, n. 1, p. 1–24, fev. 2011. Citado na página 18.
- FENG, G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 14, n. 5, p. 676–697, out. 2006. Citado na página 17.

- GOMES, I. O.; TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Local stability analysis and estimation of the domain of attraction for nonlinear systems via Takagi–Sugeno fuzzy modeling. In: *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control*. Nice, France: [s.n.], 2019. p. 4826–4828. Citado na página 19.
- GUERRA, T. M.; BERNAL, M.; GUELTON, K.; LABIOD, S. Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi–Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 201, p. 40–54, ago. 2012. Citado na página 18.
- GUERRA, T. M.; VERMEIREN, L. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form. *Automatica*, v. 40, n. 5, p. 823–829, maio 2004. Citado na página 17.
- HILHORST, G.; LAMBRECHTS, E.; PIPELEERS, G. Control of linear parameter-varying systems using B-splines. In: *Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, NV, USA: [s.n.], 2016. p. 3246–3251. Citado na página 20.
- HORISBERGER, H. P.; BELANGER, P. R. Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 21, p. 705–708, 1976. Citado na página 55.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge, MA, USA: Cambridge University Press, 1985. Citado na página 28.
- HU, G.; LIU, X.; WANG, L.; LI, H. Further study on local analysis of continuous-time T–S fuzzy models with bounded disturbances. *IET Control Theory & Applications*, v. 13, p. 403–410, fev. 2019. Citado na página 18.
- HU, T.; BLANCHINI, F. Non-conservative matrix inequality conditions for stability/stabilizability of linear differential inclusions. *Automatica*, v. 46, n. 1, p. 190–196, 2010. Citado na página 48.
- KAMYAR, R.; PEET, M. M. Polynomial optimization with applications to stability analysis and control — Alternatives to sum of squares. *Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B*, v. 20, n. 8, p. 2383–2417, out. 2015. Citado na página 20.
- KAPILA, V.; GRIGORIADIS, K. M. (Ed.). *Actuator Saturation Control*. New York, NY: Marcel Dekker, Inc., 2002. (Control Engineering Series). Citado na página 34.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 28.
- KIM, H. S.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. Relaxed stability conditions for the Takagi–Sugeno fuzzy system using a polynomial non-quadratic Lyapunov function. *IET Control Theory & Applications*, v. 10, n. 13, p. 1590–1599, 2016. Citado na página 18.
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T–S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 26, n. 3, p. 191–200, jun. 2015. Citado na página 18.

- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; LEITE, V. J. S.; SILVA, L. F. P. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 263, p. 92–111, mar. 2015. Citado na página 18.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H. Extended robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for discrete time-invariant linear systems with polytopic uncertainty. *Circuits Systems and Signal Processing*, v. 33, n. 2, p. 393–419, fev. 2014. Citado na página 18.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. Local stability analysis of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems: A fuzzy Lyapunov function approach. *Information Sciences*, v. 257, p. 163–175, fev. 2014. Citado 7 vezes nas páginas 9, 11, 18, 40, 42, 43 e 44.
- LEE, D. H.; KIM, D. W. Relaxed LMI conditions for local stability and local stabilization of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, v. 44, n. 3, p. 394–405, mar. 2014. Citado 6 vezes nas páginas 9, 10, 18, 51, 52 e 53.
- LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Information Sciences*, v. 185, n. 1, p. 230–248, fev. 2012. Citado 11 vezes nas páginas 9, 10, 11, 18, 40, 41, 42, 43, 51, 52 e 53.
- LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. An improved LMI condition for robust  $\mathcal{D}$ -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 3, p. 500–504, mar. 2003. Citado na página 56.
- LETH, T.; SLOTH, C.; WISNIEWSKI, R. Lyapunov function synthesis — algorithm and software. In: *Proceedings of the 2016 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Buenos Aires, Argentina: [s.n.], 2016. p. 641–647. Citado na página 20.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. <<http://yalmip.github.io>>. Citado na página 30.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963. Citado na página 42.
- MÁRQUEZ, R.; GUERRA, T. M.; BERNAL, M.; KRUSZEWSKI, A. Asymptotically necessary and sufficient conditions for Takagi-Sugeno models using generalized non-quadratic parameter-dependent controller design. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 306, p. 48–62, jan. 2017. Citado na página 18.
- MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and  $\mathcal{H}_\infty$  control for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 17, n. 4, p. 863–873, ago. 2009. Citado na página 17.
- MOSEK ApS. *The MOSEK optimization software*. [S.l.], 2015. <<http://www.mosek.com>>. Citado na página 30.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; SOUZA, F. O.; MENDES, E. M. A. M. Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, v. 45, n. 6, p. 1580–1583, jun. 2009. Citado na página 17.

OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1990. Citado na página 23.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 405, p. 209–228, ago. 2005. Citado na página 58.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, jul. 2007. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 57.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Análise e controle de sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais lineares. In: FELTRIN, A. P.; MINUSSI, C. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; LÁZARO, R. A. R. (Ed.). *Tutoriais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2010. p. 203–229. ISBN 978-85-7983-061-7. Citado na página 20.

PAN, J.; FEI, S.; GUERRA, T. M.; JAADARI, A. Non-quadratic local stabilisation for continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy models: A descriptor system method. *IET Control Theory & Applications*, v. 6, n. 12, p. 1909–1917, ago. 2012. Citado na página 18.

PAN, J. T.; GUERRA, T. M.; FEI, S. M.; JAADARI, A. Nonquadratic stabilization of continuous T–S fuzzy models: LMI solution for a local approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 20, n. 3, p. 594–602, jun. 2012. Citado 5 vezes nas páginas 10, 18, 51, 52 e 53.

PAPACHRISTODOULOU, A.; ANDERSON, J.; VALMORBIDA, G.; PRAJNA, S.; SEILER, P.; PARRILO, P. A. *SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB*. <http://arxiv.org/abs/1310.4716>, 2013. Available from <http://www.eng.ox.ac.uk/control/sostools>, <http://www.cds.caltech.edu/sostools> and <http://www.mit.edu/~parrilo/sostools>. Citado na página 20.

PARRILO, P. A.; LALL, S. Semidefinite programming relaxations and algebraic optimization in control. *European Journal of Control*, v. 9, n. 2-3, p. 307–321, 2003. Citado na página 20.

POWERS, V.; REZNICK, B. A new bound for Pólya’s Theorem with applications to polynomials positive on polyhedra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 164, p. 221–229, 2001. Citado na página 29.

RAMOS, D. C. W.; PERES, P. L. D. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 4, p. 675–678, abr. 2002. Citado na página 55.

SALA, A. On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems. *Annual Reviews in Control*, v. 33, n. 1, p. 48–58, abr. 2009. Citado na página 26.

SALA, A.; ARIÑO, C. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polyá’s theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 158, n. 24, p. 2671–2686, dez. 2007. Citado na página 17.

- SCHERER, C. W. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 27, n. 2, p. 365–395, jun. 2005. Citado na página 29.
- SKELTON, R. E.; IWASAKI, T.; GRIGORIADIS, K. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Bristol, PA: Taylor & Francis, 1998. Citado na página 28.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>. Citado na página 30.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15, n. 1, p. 116–132, jan. 1985. Citado na página 17.
- TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. O. A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design. In: *Proceedings of the 2001 American Control Conference*. Arlington, VA, USA: [s.n.], 2001. p. 4790–4795. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 11, n. 4, p. 582–589, ago. 2003. Citado na página 17.
- TANAKA, K.; WANG, H. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. New York, NY: John Wiley & Sons, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 17, 24, 26 e 32.
- TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Selective  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 19, n. 5, p. 890–900, out. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- XIE, X.-P.; LIU, Z.-W.; ZHU, X.-L. An efficient approach for reducing the conservatism of LMI-based stability conditions for continuous-time T–S fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 263, p. 71–81, 2015. Citado na página 17.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965. Citado na página 24.