



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Daniel Silva Campos

Sistemas CSVIU a Tempo Discreto - Um Estudo de Análise e Controle por Normas

Campinas

2020



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Daniel Silva Campos

Sistemas CSVIU a Tempo Discreto - Um Estudo de Análise e Controle por Normas

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na Área de Automação e Controle.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DANIEL SILVA CAMPOS, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOÃO BOSCO RIBEIRO DO VAL.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

C157s Campos, Daniel Silva, 1993-
Sistemas CSVIU a tempo discreto - um estudo de análise e controle por normas / Daniel Silva Campos. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas estocásticos. 2. Sistemas de controle. 3. Sistemas de controle por realimentação - Modelos matemáticos. 4. Programação dinâmica. I. Val, João Bosco Ribeiro do, 1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Discrete-Time CSVIU Systems - analysis and control by norms study

Palavras-chave em inglês:

Stochastic systems

Control systems

Feedback control systems

Dynamic programming

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

João Bosco Ribeiro do Val [Orientador]

Matheus Souza

Alessandro do Nascimento Vargas

Data de defesa: 09-03-2020

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-9329-6220>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/0334156643885727>

COMISSÃO JULGADORA - DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidato: Daniel Silva Campos RA:211498

Data da Defesa: 09 de março de 2020

Título da Tese: Sistemas CSVIU a Tempo Discreto - Um Estudo de Análise e Controle por Normas.

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (Presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Matheus Souza (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas (/UTFPR-Campus Córnelio Procópio)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese) e na Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

Dedico esta dissertação ao meu irmão, Davi S. Campos: meu primeiro e eterno colega de quarto.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por alcançar mais esta conquista.

Agradeço aos meus familiares (pernambucanos e paulistanos) e amigos por todo apoio e incentivo aos meus estudos.

Estarei sendo ingrato se não estender meus agradecimentos ao professor João B. R. do Val, o qual me recebeu com satisfação e me aceitou como orientando após aproximadamente trinta minutos de conversação. Obrigado por sua orientação e conselhos ao longo destes dois anos.

Sou grato aos amigos do Laboratório LE-16 e professores do Departamento de Sistemas e Energia (DSE) que tive o prazer de conhecer: Prof. Paulo A. V. Ferreira, Prof. Pedro L. D. Peres, Prof. Ricardo C. L. F. Oliveira, Prof. José C. Geromel. Agradeço a toda comunidade acadêmica da FEEC e todos os funcionários que de maneira direta ou indireta colaboraram para a minha formação.

Comunicado formal: o presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

“Porque Dele e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; glória pois a Ele eternamente.

Amém.”

(Romanos 11.36)

“For of Him, and through Him, and to Him, are all things: to Whom be glory for ever.

Amen.”

(Romans 11.36)

Resumo

Esta dissertação trata do problema de análise e controle por normas para sistemas incertos. Em especial será abordada uma classe de sistemas predominantemente afetados por incertezas denominados de “sistemas pouco conhecidos”. A fim de particularizar o cenário a ser investigado, suponha que se deseja construir o modelo linearizado de uma planta. Admita porém que o desconhecimento com respeito ao sistema real seja tal que apenas se disponha de informação o suficiente para confeccionar um modelo matemático grosseiro não fiel ao seu comportamento real. Sobre esta perspectiva, a modelagem CSVIU (Control and State Variation Increase Uncertainty) propõe um sistema Estocástico Linear Invariante no Tempo (LIT) cuja as incertezas que emergem do processo modelado sejam proporcionais à distância ao equilíbrio. Ao se fazer a síntese de controle, esta traz consigo o conceito de um controlador cauteloso. Destacam-se duas condições de custo para o comuto das normas H_2 e H_∞ de um sistema estocástico, estas são: custo α -descontado e custo médio a longo prazo. O critério de longo prazo admite ser irrelevante a evolução em tempo finito do custo/estado do processo, tornando este caso matematicamente mais envolvente que o critério descontado. Ressalta-se que as noções de α -estabilidade e Estabilidade estocástica aqui definidas são distintas da noção de estabilidade quase certa (ou com probabilidade um), esta considerada no problema de controle CSVIU via custo médio quadrático descontado. Sendo assim, a noção de α -observabilidade e observabilidade ($\alpha = 1$) aqui desenvolvidas para sistemas CSVIU, objetivam garantir que tem-se acesso total à energia interna do sistema através da variável de observação e, deste modo, a finitude das medidas de energia consideradas indicarão também a estabilidade do sistema no sentido pretendido. O problema de computar o desempenho por normas para sistemas CSVIU é solucionado por intermédio da *Teoria da Programação Dinâmica* (PD) utilizando-se da propriedade de convexidade da *Função Valor*. Adicionalmente, a solução em norma H_∞ utiliza-se de conceitos advindos da *Teoria dos Jogos Diferenciais*, uma vez que esta abordagem permite conceitualmente que uma segunda variável exerça influência sobre o sistema (variável de perturbação). Tal variável é introduzida ao problema de controle, de maneira que uma lei de controle CSVIU robusta seja obtida. Uma vez que a modelagem CSVIU propõe distúrbio de natureza incessante, salienta-se que o problema de controle CSVIU em norma H_∞ tem como particularidade a presença de uma variável de perturbação de energia infinita, fato este que o diferencia das demais abordagens da literatura.

Palavras-chaves: Sistemas incertos; Controle em Norma; Programação Dinâmica.

Abstract

This dissertation deals with the problem of analysis and control by norms for uncertain systems. It will be approached the class of system predominantly affected by uncertainties, such systems are denominated “poorly known systems”. To pave the way toward the intended investigation, suppose one wishes to build the linearized model of the plant of an uncertain system. However, let us assume that the uncertainty regarding the real system is such that one barely has information on its dynamics, just enough to obtain a rough mathematical model of the system. With that motivation, the CSVIU (Control and State Variation Increase Uncertainty) model proposes a stochastic Linear Time-Invariant (LTI) System model, for which the uncertainties arising from the poor modelling are proportionally related to the distance of the state system to the equilibrium. The synthesis of control gives rise to a controller of precautionary behavior. In computing the H_2 and H_∞ norms of a stochastic system, it is considered two cost conditions: α -discounted cost and the averaged long run cost. The long run criterion admits that the cost of the process is irrelevant in the short term, which makes this scenario mathematically more attractive than the discounted one. The notions of α -stability and Stochastic stability presented here are both distinct from the notion of almost sure stability (stability in probability), this one admitted in the solution of the problem of CSVIU control by the mean quadratic cost criterion. Therefore, the α -observability and observability ($\alpha = 1$) notions are developed for CSVIU systems, both to ensure full access to the internal energy of the system through the observation variable. In this way, the finiteness of the measured energy leads to the system stability in the corresponding sense. The problem of evaluating the performance of CSVIU systems by norms is settled through *Dynamic Programming Theory* (DP) by using the convexity property of the *Value Function*. The H_∞ norm solution adopts *Differential Games Theory* since such an approach admits a second variable influencing the system trajectory states (disturbing variable). Such a variable is included in the control problem in such a way that a robust CSVIU control law is achieved. Once CSVIU modelling proposes an incessant entrance of disturbing, the H_∞ CSVIU control problem admits that the energy of the disturbance variable is infinite, which differentiate it from other approaches from the control literature.

Keywords: Uncertain systems; Control by Norm; Dynamic Programming.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Controle CSVIU	37
Figura 2.2 – Custo Médio Quadrático	38

Lista de tabelas

Tabela 6.1 – Norma H_2 e GP de desempenho do controlador CSVIU (com relação aos controladores Escalonado e Robusto) para o sistema representado pelas matrizes em (6.2).	110
Tabela 6.2 – Norma H_2 e GP de desempenho do controlador CSVIU (com relação aos controladores Escalonado e Robusto) para o sistema representado pelas matrizes em (6.3).	110
Tabela 6.3 – Norma H_2 e GP de desempenho do controlador CSVIU (com relação aos controladores Escalonado e Robusto) para o sistema representado pelas matrizes em (6.4).	110
Tabela 6.4 – Tempo computacional médio das simulações (em segundos).	111

Lista de Acrônimos e Abreviações

$\delta(\cdot)$ Delta de Dirac

$\text{int}(\mathcal{Y})$ Interior do conjunto \mathcal{Y}

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Produto interno usual no espaço euclidiano

\mathcal{D} Domínio de uma função

$\mathcal{N}(A)$ Espaço nulo da matriz $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$

$\|x\|_A^2$ Forma compacta para $x^\top Ax$, $x \in \mathbb{R}^p$

$|x|$ Módulo do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ ($|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$)

Π Espaço de funções que contém todas as Políticas de Controle Admissíveis

• Produto de Hadamard

$\text{tr}(A)$ Operador traço da matriz $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$

$A \prec 0$ Matriz quadrada definida negativa

$A \succ 0$ ($A \succeq 0$) Matriz quadrada definida positiva (semidefinida positiva)

A_d Vetor dos elementos da diagonal principal de $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$

$E[\cdot]$ Operador esperança matemática

i.i.d. Acrônimo para Independente e Identicamente Distribuído

$J(\cdot)$ Funcional de custo

S^{n+} Conjunto das Matrizes simétricas n -dimensionais Semidefinidas Positivas

$X^\top A(\cdot)$ Forma compacta para $X^\top AX$, $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$

CMLP Acrônimo para Custo Médio a Longo Prazo

Sumário

1	Introdução	15
1.1	CSVIU - Modelo e Motivação	17
1.2	Objetivos e Principais Resultados	19
2	Noções Preliminares	21
2.1	Espaços Normados	21
2.2	Programação Dinâmica e Convexidade	24
2.3	Sequência de Funções e Convergência	30
2.4	CSVIU - Resultados Existentes	31
2.5	Princípios de Normas para Sistemas	40
2.5.1	Norma \mathcal{H}_2	40
2.5.2	Potência de um sinal	43
2.5.3	Norma \mathcal{H}_∞	43
2.5.4	Normas Estocásticas	46
2.6	Jogos Diferenciais e Teoria do Controle	48
3	Estabilidade e Observabilidade do Sistema	51
3.1	Observabilidade e finitude da norma	57
4	Norma \mathcal{H}_2 CSVIU	62
4.1	O caso descontado em norma \mathcal{H}_2 : Análise	62
4.2	Norma \mathcal{H}_2 a longo prazo: Análise	64
4.3	Controle CSVIU em Norma \mathcal{H}_2	71
4.3.1	O caso descontado em norma \mathcal{H}_2 : Controle em região de inação global	72
4.3.2	O caso descontado em norma \mathcal{H}_2 : Controle assintótico	73
4.3.3	Norma \mathcal{H}_2 a longo prazo: Controle em região de inação global	79
4.3.4	Norma \mathcal{H}_2 a longo prazo: Controle assintótico	80
5	Norma \mathcal{H}_∞ CSVIU: Mensuração do Ganho do Sinal de Entrada	83
5.1	Norma \mathcal{H}_∞ CSVIU: Análise	84
5.2	Controle CSVIU em Norma \mathcal{H}_∞	90
5.2.1	O caso descontado em norma \mathcal{H}_∞ : Controle em região de inação global	91
5.2.2	O caso descontado em norma \mathcal{H}_∞ : Controle assintótico	94
5.2.3	Norma \mathcal{H}_∞ a longo prazo: Controle em região de inação global	101
5.2.4	Norma \mathcal{H}_∞ a longo prazo: Controle assintótico	103
6	Experimento Numérico	106

6.1	Definição do problema	106
6.2	Resultados	109
7	Conclusão	112
	Referências	114

1 Introdução

Desde tempos antigos, com o advento de invenções fundamentais ao desenvolvimento da sociedade moderna, tais como a polia, a alavanca e a roda por exemplo, a engenharia tem se destacado como uma área de atuação bastante abrangente que objetiva, a priori, a aplicação do conhecimento científico para fins práticos num processo de constante criação e aperfeiçoamento de acessórios ao mundo em que vivemos. Para atingir este fim, a engenharia se utiliza comumente de uma atividade ainda mais antiga que ela mesma, a mensuração.

Em contexto a ser aqui discutido, o ato de mensurar surge na busca de um procedimento sistemático que permita obter o custo operacional do controle de processos sujeitos a um grau considerável de incertezas. Tais processos são comumente conhecidos por *Sistemas Incertos*. O termo “incerteza” está comumente vinculado à situações em que ocorre uma predominante imperfeição ou, até mesmo, a total falta da informação desejada. Este é empregado quando num ambiente parcialmente observável e/ou estocástico. De fato, o fator incerteza parece influenciar fortemente o universo, se fazendo presente em todos os campos da ciência e por vezes levando o pesquisador a repensar conceitos e ideias antes firmadas, não sendo por acaso a declaração:

“Uma coisa que aprendi no decorrer de uma longa vida: toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil - e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos.”

Albert Einstein

É importante destacar porém que, compreender tal incerteza, ainda que de maneira pontual e imperfeita para um determinado fenômeno, pode levar a fins úteis em muitas especialidades, como por exemplo em *Teoria da Decisão*. Dito isto, pode-se considerar então que a modelagem de processos dinâmicos sujeitos a incerteza é uma das mais importantes tarefas da engenharia de controle. Ademais, a modelagem é sempre uma das etapas mais delicadas visto que a realidade física se mostra frequentemente complexa, tornando toda tentativa em descrever matematicamente um processo natural um exercício de simplificação e atribuição de hipóteses.

A diferença existente entre o processo real e seu modelo matemático é uma problemática constante pois, rapidamente a relação existente entre o modelo e a planta real se mostra cada vez mais complexa e sensível. Em se tratando de sistemas dinâmicos lineares, esta diferença acarreta incertezas ao problema de controle uma vez que não linearidades e partes não modeladas do sistema são negligenciadas, fazendo com que

grandes discrepâncias possam se originar a partir da aproximação linear em um dado ponto de operação (MATUSU *et al.*, 2011, p. 1011).

Basicamente, existem dois caminhos alternativos ao se trabalhar com sistemas dinâmicos incertos, o primeiro assume as incertezas via uma caracterização determinística, isto é, a informação disponível, ou presumida, relativa a elementos incertos do sistema possui uma natureza determinística. O segundo se baseia em uma abordagem estocástica, pela qual informações com respeito a elementos incertos do sistema, assim como aquelas relativas a sua saída, possuem uma natureza estatística (CORLESS; LEITMANN, 1986, p. 108). A robustez em sistemas de controle se trata de um conjunto de técnicas que se propõe a lidar com estas incertezas, objetivando garantir que a estabilidade do sistema (ou outro objetivo que se tenha para o sistema) se mantenha a despeito da perturbação (estruturada ou não estruturada) (STOORVOGEL, 1992, p. 2). Métodos modernos de controle robusto modelam a planta como um sistema incerto (este se tratando tipicamente de um família de sistemas) e tomam como base para o projeto do controlador um modelo incerto de sistema (PETERSEN; TEMPO, 2014, p. 1316). A aplicação deste tipo de abordagem exige que o controlador seja robusto com respeito as incertezas que estão representadas no modelo, permitindo que este alcance um bom desempenho enquanto mantém um nível adequado de robustez. Para um estudo mais formal a respeito de incerteza e robustez em sistemas de controle na abordagem determinística, o leitor interessado pode se dirigir por exemplo a (ZHOU; DOYLE, 1999).

Agora, dentro do contexto de sistemas estocásticos existem várias formas de se representar incertezas em um sistema de controle. Um exemplo clássico é o conhecido problema Linear Quadrático Gaussiano (*LQG*), cujas componentes do sistema são perturbadas por ruído gaussiano puramente aditivo. Ainda, controle ótimo estocástico para sistema linear discreto cujos parâmetros estão sujeitos a ruído aditivo e multiplicativo dependente do estado e controle é estudado em (RAMI *et al.*, 2002). Em (HUANG *et al.*, 2006) é tratado o problema linear quadrático (*LQ*) de horizonte infinito para sistemas discretos sujeitos a ruído dependente de ambas variáveis, de estado e controle. Ruído multiplicativo é também considerado em (GHAOUI, 1995), e neste se estuda sistemas LIT perturbados por incertezas paramétricas modeladas como ruído branco. Em especial, a norma H_∞ estocástica tem recebido atenção da comunidade científica, como por exemplo em (GERSHON; U., 2008) e (HOU *et al.*, 2010), em que é tratado o problema de controle em norma H_∞ para sistemas estocásticos discretos sujeitos a ruído multiplicativo dependente do estado e controle. Em (DAMM *et al.*, 2017) esta norma é a norma induzida pela norma \mathcal{L}^2 de um operador entrada/saída de um sistema linear estocástico, sendo caracterizada por uma versão do Bounded Real Lemma e calculada com base em uma equação algébrica parametrizada tipo Riccati. Em (EL BOUHTOURI *et al.*, 1999) leva-

se em consideração sistemas LIT (linear e invariante no tempo) discretos estocásticos em que duas representações de incerteza são abordadas no modelo dinâmico: parâmetros aleatórios e sinais de distúrbio desconhecidos. Uma versão estocástica para a norma H_∞ foi introduzida por Hinrichsen e Pritchard em (HINRICHSEN; PRITCHARD, 1998). Estes definem tal norma por um limitante escalar $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tal que uma equação parametrizada do tipo Riccati possua uma solução estabilizante em que, quanto maior o valor da norma, maior será o efeito máximo da entrada de perturbação sobre o sistema.

Após essa breve abertura aos sistemas incertos, passa-se a descrever as divisões deste capítulo. A Seção 1.1 objetiva apresentar a modelagem CSVIU e as principais motivações que podem levar o projetista a adotar sua formulação. Ressalta-se que este modelo é construído de forma a atender especificações tais como a de representação de incertezas não estruturadas provenientes da planta real e de um tomador de decisões cauteloso frente a tais indeterminações. Por sua vez, a Seção 1.2 se encarrega de indicar os principais objetivos que foram perseguidos ao longo desta dissertação, contendo um roteiro o qual servirá de guia ao leitor.

1.1 CSVIU - Modelo e Motivação

Apesar de toda metodologia outrora desenvolvida a fim de lidar com incerteza em sistemas de controle, ocorrem situações em que as informações disponíveis sobre o processo são escassas sendo suficientes apenas para fornecer uma aproximação local não fidedigna ao comportamento da planta real na vizinhança de um determinado ponto de operação, categorizando o sistema como “pouco conhecido”. A fim de exemplificar tal circunstância, pode-se mencionar fenômenos biológicos e bioquímicos para os quais, em muitos casos, é possível formular um entendimento conceitual na forma de modelo matemático (VANLIER, 2014, p. 2). A análise de sistemas tem sido desenvolvida em muitas áreas da biologia, incluindo ecologia e imunologia (WESTERHOFF; PALSSON, 2004, p. 1249). No entanto, a acurácia de modelos matemáticos e computacionais de sistemas biológicos é frequentemente comprometida pela incerteza presente em dados experimentais (MARINO *et al.*, 2008, p. 178), tornando a concepção do mecanismo dinâmico do modelo uma tarefa difícil. É possível ainda citar a ocorrência de sistemas pouco conhecidos na economia (ONATSKI; STOCK, 2002) e na medicina (JEFFREY *et al.*, 2003).

É neste tipo de cenário em que se projeta a aplicação do modelo CSVIU (Control and State Variation Increase Uncertainty). Este propõe representar as incertezas inerentes ao sistema sob uma perspectiva não tão convencional, acatando a ideia de que uma medida da distância ao equilíbrio servirá de estimativa ao nível da incerteza sobre o sistema. Isto porque uma importante característica do sistema CSVIU que o diferencia das

demais abordagens de modelagem de sistemas incertos, encontra-se em sua capacidade de incorporar ao modelo matemático os erros gerais de modelagem a partir da premissa de que a variação do estado e do controle com respeito a um equilíbrio, aumentam a incerteza. Tal abordagem irá convergir numa lei de controle mais “flexível” que, a depender do estado atual do sistema, será capaz de assumir uma conduta cautelosa. Este comportamento do atuador CSVIU é reflexo da introdução de uma função módulo na equação dinâmica do processo. Dito isto, considere a seguinte equação dinâmica advinda da abordagem CSVIU,

$$\begin{aligned} x(k+1) = & Ax(k) + Bu(k) + (\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x(k)|))\varepsilon^x(k) \\ & + (\sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u(k)|))\varepsilon^u(k) + \sigma\omega(k), \end{aligned} \quad (1.1)$$

em que, para algum vetor $z \in \mathbb{R}^n$ na expressão (1.1) denota-se $|z|$ exclusivamente aqui por $|z| = [|z_1| \ |z_1| \ \dots \ |z_n|]^\top \in \mathbb{R}^n$. Ademais, $\text{diag}(|z|) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a *matriz diagonal* composta por elementos do vetor $|z|$ na diagonal principal enquanto que $\text{Diag}(Y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ indica a matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os mesmos da matriz $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$. As matrizes Jacobianas $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ podem advir da linearização de um sistema não linear incerto n -dimensional em seu ponto de equilíbrio, $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times r}$ o parâmetro de intensidade do distúrbio, $\sigma_x, \bar{\sigma}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\sigma_u, \bar{\sigma}_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são parâmetros de desvio das sequências n -dimensional e m -dimensional, $\{\varepsilon^x(k)\}_{k>0}$ e $\{\varepsilon^u(k)\}_{k>0}$ respectivamente. O distúrbio $\omega(k) \in \mathbb{R}^r$ (ruído da natureza de atuação permanente) é referente a um vetor de variáveis aleatórias normalizadas *i.i.d.*, que não dependem do estado inicial $x(0) = x_0$, além disso, $\varepsilon^x(k) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon^u(k) \in \mathbb{R}^m$ são sequências multidimensionais de variáveis aleatórias gaussianas padrão *i.i.d.*, introduzidas no modelo (1.1) a fim de representar incertezas (ruídos de síntese).

Uma vez que estamos tratando de sistemas incertos, a representação linearizada contribui para a adição de incerteza no modelo e, desta forma, este erro é descrito pela adição dos termos estocásticos $\sigma_x \varepsilon^x(k)$ e $\sigma_u \varepsilon^u(k)$. De igual modo, não se conhece com precisão o real comportamento do sistema no equilíbrio, tal incerteza é penalizado pela adição de $\bar{\sigma}_x \text{diag}(|x(k)|)\varepsilon^x(k)$ ao termo linear A e $\bar{\sigma}_u \text{diag}(|u(k)|)\varepsilon^u(k)$ a B ($\bar{\sigma}_x$ e $\bar{\sigma}_u$ intensificam a incerteza quanto a A e B respectivamente). Observe que o modelo CSVIU apresenta similaridades com os modelos de ruído multiplicativo, no sentido de que aquele não negligencia a dependência das matrizes de difusão $\bar{\sigma}_x$ e $\bar{\sigma}_u$ com relação ao estado do sistema ou entrada de controle. No entanto, dentro de uma perspectiva estocástica, o modelo CSVIU se diferencia de abordagens prévias pela dependência que os termos ruidosos apresentam sobre o valor absoluto do estado e entrada de controle.

Ainda, em geral os trabalhos existentes supõem uma perturbação estocástica que esvanece quando o sistema atinge o equilíbrio e/ou visam adaptar o clássico Bounded Real Lemma ao caso de norma H_∞ estocástico. A modelagem CSVIU, por sua vez, prioriza

a adoção de uma perturbação de energia finita pois, desde sua concepção, é idealizada para uma entrada exógena de natureza incessante. Ainda, o caso de norma H_∞ para o modelo CSVIU será tratado via *Teoria de Jogos Diferenciais*.

1.2 Objetivos e Principais Resultados

O objetivo dessa monografia é contribuir ao desenvolvimento da análise de normas H_2 e H_∞ para o modelo CSVIU, abordando os casos de norma descontada e a longo prazo. Tem ainda como objetivo a solução de controle CSVIU, tendo por critério de desempenho a minimização das normas H_2 e H_∞ , também para ambos os casos, descontado e a longo prazo.

O Capítulo 2 apresenta tópicos selecionados, importantes a um melhor entendimento do tema a ser estudado, e estes servirão de base para o que virá a ser desenvolvido nos Capítulos 3, 4 e 5. A Seção 2.1 contém noções fundamentais referentes a espaços normados, fundamentando nestes espaços, a noção de norma para sinais e sistemas. A Seção 2.2 introduz o método da Programação Dinâmica, o qual permite a construção de algoritmos para a resolução de problemas computacionais, em especial os de otimização. Também, apresenta alguns resultados sobre convexidade de funções, propriedade requerida para a função valor do problema de controle. A Seção 2.3 traz uma sucinta apresentação de resultados sobre sequência de funções, culminando no Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Por sua vez, a Seção 2.6 fornece um panorama geral sobre a *Teoria dos Jogos* e sua conexão com a *Teoria do Controle*. Na Seção 2.5 são apresentadas as normas H_2 e H_∞ para sistemas determinísticos lineares e invariantes no tempo, além de suas correspondências com o caso estocástico discreto. Por fim, na Seção 2.4 o leitor é dirigido aos principais resultados já existentes na literatura de controle com respeito ao modelo CSVIU. São explicitadas as principais características do modelo que o diferenciam de outras metodologias de representação de incertezas. Destaca-se a sua capacidade em incorporar ao modelo matemático do sistema a premissa de que a incerteza varia com a distância ao equilíbrio, fato este que induz uma lei de controle mais conservadora do que a do caso com conhecimento perfeito da planta.

O Capítulo 3 se encarrega de apresentar os conceitos de estabilidade e desenvolver a noção de observabilidade adequados ao problema de norma CSVIU. Na Seção 3.1 é estabelecida a conexão entre a finitude da norma e a estabilidade do sistema por via da noção de observabilidade desenvolvida.

No Capítulo 4 o problema de Controle CSVIU em norma H_2 é solucionado. De início, a Seção 4.1 aborda condições de análise para o caso de norma H_2 descontada enquanto que a Seção 4.2 analisa o caso de Custo Médio a Longo Prazo (CMLP). Em

seguida, a dinâmica CSVIU (1.1) é considerada na Seção 4.3 em que as Seções 4.3.1 e 4.3.3 tratam, respectivamente, do problema de controle CSVIU por norma descontada e a longo prazo.

No que diz respeito ao Capítulo 5, a Seção 5.1 propõe a análise da norma H_∞ para sistemas CSVIU, e o controlador H_∞ é abordado na Seção 5.2 em que o problema de controle na norma em estudo é interpretado como um problema de otimização *Min–Max*. Ademais, seguindo a mesma estrutura do Capítulo 4, o caso descontado é discutido na Seção 5.2.1 enquanto que o controle em norma a longo prazo é abordado na Seção 5.2.3.

O Capítulo 6 propõe comparar numericamente o desempenho de três tipos de controladores (controle CSVIU, controle Escalonado e controle Robusto) em atenuar a energia da perturbação do processo CSVIU. Para tanto, são considerados três sistemas incertos cujas indeterminações são modeladas tal como descreve a equação dinâmica (1.1). Destaca-se que o controle CSVIU é sintetizado com base na informação de que a variação dos estados e controle influenciam o nível da incerteza dominante sobre o sistema, enquanto que os controladores Escalonado e Robusto não consideram esta informação. A Seção 6.1 define o problema a ser numericamente solucionado enquanto que a Seção 6.2 contém resultados e discussão a respeito.

Finalmente, o Capítulo 7 conclui esta dissertação de mestrado e apresenta perspectivas de trabalhos futuros.

2 Noções Preliminares

Neste capítulo é apresentado conteúdo de natureza preliminar ao que será desenvolvido nos capítulos posteriores. A Seção 2.1 contém fundamentos de espaços normados, sobre os quais se torna possível o desenvolvimento das noções de normas estocásticas, assim como o é para o caso determinístico. A Seção 2.2 traz conceitos essenciais referentes à teoria da Programação Dinâmica e Convexidade de funções. O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que trata da convergência de sequências de funções, é introduzido na Seção 2.3. A Seção 2.4 apresenta os principais resultados já existentes na literatura quanto ao modelo CSVIU. Uma vez que o controle por norma é a principal ferramenta a ser explorada, com a finalidade específica de mensurar o desempenho de um sistema incerto a Seção 2.5 fornece uma síntese das noções de norma H_2 , Potência de um Sinal e norma H_∞ para sistemas determinísticos e estocásticos. Estas serão formas de medidas de energia associadas ao desempenho dos modelos CSVIU. A teoria dos Jogos Diferenciais é abordada na Seção 2.6, esta compõe parte do ferramental teórico necessário à solução do problema de controle CSVIU em norma H_∞ .

2.1 Espaços Normados

Um dos conceitos mais fundamentais para o estudo de problemas em análise matemática, diz respeito a espaços métricos. Um espaço métrico é um conjunto de pontos para o qual é atribuído uma noção adequada de distância entre eles. Podemos usar a métrica, ou função distância, para definir conceitos primordiais em análise, tais como convergência, continuidade e compacidade. Em muitas aplicações, o espaço métrico é um espaço vetorial com uma métrica definida por uma norma que fornece o “comprimento” de um vetor. Tais espaços são denominados espaços vetoriais normados. Por exemplo, o espaço Euclidiano n -dimensional é um espaço vetorial normado (após a escolha de um ponto arbitrário para a origem) (HUNTER; NACHTERGAELE, 2000, p. 1).

Começemos pela definição de métrica. Seja \mathbb{V} um conjunto arbitrário não-vazio.

Definição 2.1 (HUNTER; NACHTERGAELE, 2000, p. 1) *(Métrica)* Uma métrica, ou função distância, em \mathbb{V} é uma função

$$d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

com as seguintes propriedades:

- $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$, e $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;

- $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in \mathbb{V}$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{V}$.

Um espaço métrico (\mathbb{V}, d) é um conjunto \mathbb{V} equipado com a métrica d .

Quando a métrica d é entendida a partir do seu contexto, denota-se o espaço métrico simplesmente pelo conjunto \mathbb{V} . Agora, define-se espaço vetorial.

Definição 2.2 (ATKISON; HAN, 2009, p. 1)(Espaço vetorial) *Seja \mathbb{V} um conjunto de objetos, estes denominados vetores; e seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais, ou \mathbb{C} o conjunto dos números complexos. Assuma a existência de duas operações: $(u, v) \rightarrow u + v \in \mathbb{V}$ e $(\alpha, v) \rightarrow \alpha v \in \mathbb{V}$, denominadas de adição e multiplicação por escalar, respectivamente, definidas para todo $u, v \in \mathbb{V}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Estas operações satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $u + v = v + u$ para todo $u, v \in \mathbb{V}$ (comutatividade);
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in \mathbb{V}$ (associatividade);
3. Existe um elemento $0 \in \mathbb{V}$ tal que $0 + u = u$ para todo $u \in \mathbb{V}$ (existência do elemento zero);
4. Para qualquer $u \in \mathbb{V}$, existe um elemento $-u \in \mathbb{V}$ tal que $u + (-u) = 0$ (existência do elemento simétrico);
5. $1u = u$ para todo $u \in \mathbb{V}$;
6. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ para todo $u \in \mathbb{V}$, e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (lei da associatividade na multiplicação por escalar);
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ e $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ para todo $u, v \in \mathbb{V}$, e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (distributividade).

Então \mathbb{V} é denominado um espaço linear ou espaço vetorial.

Um conceito básico no estudo de espaços vetoriais é o de subespaço.

Definição 2.3 (ATKISON; HAN, 2009, p. 3)(Subespaço) *Um subespaço \mathbb{W} do espaço vetorial \mathbb{V} é um subconjunto de \mathbb{V} que é fechado sobre as operações de adição e multiplicação por escalar de \mathbb{V} , i.e., para todo $u, v \in \mathbb{W}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $u + v \in \mathbb{W}$ e $\alpha v \in \mathbb{W}$.*

É verificável que \mathbb{W} por si só, equipado com as operações de adição e multiplicação por escalar de \mathbb{V} , é um espaço vetorial.

Definição 2.4 (ATKISON; HAN, 2009, p. 7) (Espaços Normados) Dado um espaço vetorial \mathbb{V} , uma norma $\|\cdot\|$ é uma função de \mathbb{V} para \mathbb{R} com as seguintes propriedades:

1. $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{V}$, e $\|v\| = 0$ se e somente se $v = 0$;
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{V}$.

O espaço \mathbb{V} equipado com a norma $\|\cdot\|$, $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, é denominado espaço vetorial normado ou, simplesmente, espaço normado.

O conceito de espaço normado é bastante geral, e uma atenção especial é dada a um tipo particular de espaço normado, denominado “Espaço de Banach”.

Definição 2.5 (Sequência de Cauchy) Seja \mathbb{V} um espaço normado. Uma sequência $\{a_n\} \subset \mathbb{V}$ é dita ser de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, $\exists N$ tal que $\forall m, n \geq N$, $\|x_m - x_n\| < \epsilon$. Isto é, $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|a_m - a_n\| = 0$.

Definição 2.6 (ATKISON; HAN, 2009, p. 15) (Espaço de Banach) Um espaço normado é dito ser completo se toda sequência de Cauchy do espaço converge para um elemento do próprio espaço. Um espaço normado completo é denominado de Espaço de Banach.

Outro conceito que merece destaque no estudo de problemas lineares, é o de espaços de produto interno. Estes são espaços onde uma norma pode ser definida através do produto interno e a noção de ortogonalidade de dois elementos pode ser introduzida. O produto interno em um espaço é uma generalização do usual produto escalar no plano \mathbb{R}^2 ou espaço \mathbb{R}^3 (ATKISON; HAN, 2009, p. 22).

Definição 2.7 (ATKISON; HAN, 2009, p. 22) (Espaço de produto interno) Seja \mathbb{V} um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma função de $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ para \mathbb{K} com as seguintes propriedades.

- Para todo $v \in \mathbb{V}$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se e somente se $v = 0$.
- Para quaisquer $u, v \in \mathbb{V}$, $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
- Para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{V}$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.

O espaço \mathbb{V} em conjunto com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é denominado de espaço de produto interno.

No caso de espaço de produto interno real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), a segunda propriedade se reduz a simetria do produto interno:

$$\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

Dentre os espaços de produto interno, de particular importância são os espaços de Hilbert.

Definição 2.8 (ATKISON; HAN, 2009, p. 27) (Espaços de Hilbert) Um espaço de produto interno completo é denominado Espaço de Hilbert.

Da definição, vemos que um espaço de produto interno \mathbb{V} é um espaço de Hilbert se \mathbb{V} é um espaço de Banach sob a norma induzida pelo produto interno. Note ainda que muitas noções importantes de medida e propriedades geométricas como comprimento, distância, ângulos, e a energia de um sistema físico podem ser deduzidos através da noção de produto interno.

2.2 Programação Dinâmica e Convexidade

A Programação Dinâmica (PD) se trata de uma técnica matemática bastante útil na solução de problemas de otimização que envolvam tomar uma sequência de decisões sobre um sistema dinâmico. Esta permite construir uma sequência inter-relacionada de decisões, fornecendo um procedimento sistemático a fim de determinar a combinação ideal destas. A aplicação de tal teoria matemática tem crescido constantemente, assim como a capacidade dos computadores digitais em armazenar, processar e recuperar informações prévias, tem aumentado exponencialmente.

Um conceito muito importante na PD é o de “política”, se tratando de uma lei capaz de informar qual decisão tomar em termos do estado atual do sistema. Em relação a Teoria do Controle, uma política tem a capacidade de fornecer o controle a ser empregado para qualquer que seja o estado atual do sistema. Uma política que seja mais eficiente no sentido de minimizar tempo, combustível, ou um custo em geral, ou ainda maximizar o lucro, é denominada de Política Ótima (BELLMAN, 1966, p. 34,35). A ideia de política ótima é baseada no Princípio da Otimalidade de Bellman, que diz o seguinte:

Uma política ótima tem a propriedade de que, sejam quais forem o estado e decisão iniciais, as decisões restantes devem constituir uma política ótima em relação ao estado resultante da primeira decisão (BELLMAN, 1957, p. 83).

De maneira sucinta, este princípio estabelece que “políticas ótimas possuem subpolíticas ótimas”(LEW; MAUCH, 2007, p. 5).

Aplicado ao problema de controle estocástico, o método da PD permite obter a política ótima em termos de um problema de otimização envolvendo a função valor do problema de controle estocástico (O’DONOGHUE *et al.*, 2011, p. 424).

Considere o caso estocástico em horizonte finito de tempo, isto é $k \in [0, T - 1]$ com $T < \infty$. Tenha em mente que solucionar um problema de controle estocástico implica em encontrar a sequência de decisões ótimas π^* tal que o funcional de custo

$$J_t(x_t, \pi) = E \left[\sum_{k=t}^{T-1} c(x(k), u(k)) + c_T(x(T)) \right] \quad (2.2)$$

alcance o seu valor **mínimo**. Dito isto, nomeia-se a função $c(x(k), u(k))$ como o *custo incorrido por estágio* definido de acordo com o funcional de custo adotado, e $c_T(x(T))$ por *custo terminal*, esta não depende do controlador e também deve ser fornecida a priori. Perceba a força da palavra *mínimo* destacada em negrito mais acima, ela remete a ideia de que (2.2) possui um mínimo global, isto é, existe $\pi^* = \{u^*(x_t), u^*(x_{t+1}), \dots, u^*(x_{T-2})\}$ tal que

$$J_t^*(x, \pi^*) = \inf_{\pi \in \Pi} J_t(x, \pi), \quad (2.3)$$

para todo $x_t = x \in \mathbb{R}^n$ estado inicial fornecido a priori e $t \in [0, T - 1]$. Ainda, afim de aplicar o princípio da Programação Dinâmica, considere a equação a diferenças

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k, \omega_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, T - 1 \quad (2.4)$$

novamente com $\{\omega_k\}$ uma sequência de distúrbio aleatório *i.i.d.*, independente do estado inicial x_t . A função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ do sistema é uma função mensurável dada. Então, para o processo (2.4) a equação da programação dinâmica pode ser escrita por

$$J_T(x) = c_T(x) \quad (2.5)$$

$$J_k(x) = \min_u E \left[(c(x, u) + J_{k+1}(x_{k+1})) \right] \quad (2.6)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $k = T - 1, T - 2, \dots, 0$. E adaptando a expressão do custo (2.2) para a equação de Bellman da Programação Dinâmica de um sistema estocástico

$$J_k^*(x_k) = \min_{u_k \in G(x_k)} \left(c(x_k, u_k) + E \left[J_{k+1}^*(x_{k+1}) \right] \right), \quad (2.7)$$

em que $G(x_k)$ é o conjunto de todos os controladores admissíveis no estado $x_k \in \mathbb{R}^n$, x_{k+1} descreve a evolução do sistema de acordo com a equação dinâmica em (2.4) (NEREU, 2018, p. 13).

Este feito permite que o problema de otimização seja subdividido em várias etapas correspondentes às subpolíticas ótimas. Uma vez que a solução via PD é dada de maneira retroativa no tempo, a equação de Bellman computa o custo ótimo incorrido a partir do limiar do horizonte de tempo pré-determinado T (custo terminal) até o estágio inicial $k = 0$. Atente ainda que $c(x_k, u_k)$ é o custo no estágio k e $J_{k+1}^*(x_{k+1})$ o custo de partida ótimo no instante seguinte.

Seja o conjunto de sistemas sujeitos a uma classe de controladores dinâmicos no qual um supervisor, com acesso completo aos estados do sistema, deve observar continuamente o estado corrente e decidir sobre uma ação que influenciará o seu comportamento futuro. A cada mudança de estado (instantes de decisão) uma nova ação deve ser escolhida dentre um conjunto de ações disponíveis para cada estado observado. Nestas circunstâncias, para qualquer sistema em específico, uma lei que dita a forma com que as ações devem ser escolhidas ao longo do tempo define uma política de controle na classe dos controladores por realimentação de estados.

No caso dos sistemas estocásticos, sob a hipótese da ausência de memória, este tipo de controle dinâmico caracteriza o sistema como um Processo Markoviano de Decisão (PMD), isto é, o estado de transição depende do estado corrente x e da ação de um vetor de controle $u(x)$ que é aplicado ao sistema. Uma descrição pormenorizada da natureza deste tipo de processo é dada por (HERNÁNDEZ-LERMA; LASSERRE, 1996, p. 2), em que um modelo de controle discreto Markoviano é descrito por uma quintupla

$$(X, G, \{G(x) : x \in X\}, F, c), \quad (2.8)$$

com X e G (ambos subconjuntos de Borel de um espaço métrico completo e separável) conjuntos dados, chamados de espaço de estados e conjunto de controle, respectivamente. $\{G(x) : x \in X\}$ é uma família de subconjuntos não vazios $G(x)$ de G , com $G(x)$ sendo o conjunto de controles (ou ações) viáveis no estado $x \in X$. Finalmente, F é a lei de transição — a exemplo tem-se a equação (1.1) — e c é a função custo incorrido por estágio.

A interpretação se dá em que, se o sistema está no estado $x_k = x \in X$ no instante k e o controle $u_k = u \in G(x)$ é aplicado, então duas coisas acontecem:

- I. um custo $c(x, u)$ é incorrido e
- II. o sistema se move para o próximo estado x_{k+1} , sendo este um vetor aleatório de valores em X e cuja distribuição $F(\mathcal{B}|x, u) := Prob(x_{k+1} \in \mathcal{B}|x_k = x, u_k = u), \mathcal{B} \subset X$.

Agora, afim de estabelecer conexão entre a Teoria da PD e Controladores Markovianos, defina o problema de custo médio descontado em um horizonte infinito por

$$J_0^*(x_0) := \lim_{T \rightarrow \infty} \min_{\pi \in \Pi} E \left[\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k c(x(k), u(k)) \right], \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.9)$$

para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dado e $\pi \in \Pi$ política de controle markoviana. A expressão em (2.3) define a função valor do problema de controle e é de grande importância garantir que esta possua um mínimo global. Para tanto, sabemos que a soma de conjuntos convexos preserva a convexidade e a cada estágio k é interessante que $J_k(x, u)$ seja uma função (estritamente) convexa no conjunto $G(x)$, adotando-se funções custo por estágio e custo terminal (estritamente) convexas e evitando a possibilidade de mínimos locais ao se calcular o controle ótimo em (2.7). Considere então a seguinte hipótese adaptada de (HERNÁNDEZ-LERMA; LASSERRE, 1996, p. 45,46):

Hipótese 2.1 *Uma função mensurável $V_0^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser solução do problema descontado se esta satisfaz a equação do custo ótimo*

$$V_k^*(x_k) = \min_{G(x)} \left\{ c(x_k, u_k) + E[V_{k+1}^*(F(x_k, u_k, \omega_k))] \right\}, \quad (2.10)$$

para $V_0^*(x_0) = J_0^*(x_0)$ e $x_0 \in X$, em que:

- I. *A função custo por estágio c é contínua e mensurável, não negativa e (estritamente) convexa em $\mathbb{K} := \{(x, u) | x \in X, u \in G(x)\}$;*
- II. *A função F é contínua;*
- III. *Existe uma política admissível de Markov π tal que $V_0^*(x) < \infty$ para cada $x \in X$.*

Em particular, a condição III. garante que $V_0^*(x)$ é finito para cada estado inicial x .

Os resultados que virão a seguir advêm da análise de funções convexas e servem à identificação da propriedade de convexidade de uma função. Estes servem de embasamentos teóricos a fim de que seja possível obter uma função valor convexa para o problema de controle CSVIU em norma, via equação da Programação Dinâmica. Considere a princípio a classe de funções \mathcal{C}^2 , isto é, funções duplamente diferenciáveis cuja derivada é contínua em todo ponto do domínio \mathcal{D} .

Definição 2.9 (BORWEIN; NOLL, 1994, p. 45) *Seja f uma função convexa contínua definida em um espaço normado \mathbb{V} . Então f é duas vezes diferenciável em $x \in \mathbb{V}$ se existe $y^* \in \nabla f(x)$ e um operador linear limitado $\mathcal{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^*$ tal que f tem uma representação da forma*

$$f(x+h) = f(x) + \langle y^*, h \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{T}h, h \rangle + o(\|h\|^2) \quad (\|h\| \rightarrow 0), \quad (2.11)$$

para todo $h \in \mathbb{V}$.

Assumimos \mathcal{T} um operador linear limitado não negativo e simétrico (i.e., $\langle \mathcal{T}h, h \rangle \geq 0$ e $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\top$) e usamos a notação $\mathcal{T} = \nabla^2 f(x)$, em que $\nabla^2 f(x)$ é a matriz Hessiana de f em x .

Proposição 2.1 (HLENKA, 2006, p. 28) *Considere uma função $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 (observe que o espaço real euclidiano pode ser definido como um espaço normado) e \mathbf{a} um ponto interior de \mathcal{D} . Então existe um único polinômio p_2 de grau 2 de n variáveis que satisfaz as condições:*

$$\begin{aligned} p_2(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a}), \\ \nabla p_2(\mathbf{a}) &= \nabla f(\mathbf{a}), \\ \nabla^2 p_2(\mathbf{a}) &= \nabla^2 f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Este polinômio é dado por

$$p_2(x) = f(\mathbf{a}) + \nabla f^\top(\mathbf{a})(x - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(x - \mathbf{a})^\top \nabla^2 f(\mathbf{a})(x - \mathbf{a}). \quad (2.12)$$

Além disso,

$$f(x) = p_2(\mathbf{a}) + R_2(\mathbf{a}, x), \quad (2.13)$$

onde o erro $R_2(\mathbf{a}, x)$ satisfaz a propriedade:

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{a}, x)}{\|x - \mathbf{a}\|^2} = \lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(x) - p_2(x)}{\|x - \mathbf{a}\|^2} = 0,$$

isto é, o erro $R_2(\mathbf{a}, x)$ vai para zero mais rapidamente que o quadrado da distância entre \mathbf{a} e x . A equação (2.13) é chamada fórmula de Taylor com resto infinitesimal.

Com respeito ao problema de controle CSVIU, devido a existência de uma função módulo na equação dinâmica em (1.1), não podemos contar com a condição de possuir uma função valor de classe \mathcal{C}^2 para o problema. Apresenta-se em seguida o Teorema de Alexandrov, o mesmo generaliza a Proposição 2.1 para uma classe de funções não diferenciáveis em quase todo o domínio.

Proposição 2.2 (ROCKAFELLAR, 1999, p. 2) (Teorema de Alexandrov). *Seja $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Em quase todo ponto (qtp.) $x \in \text{int } \mathcal{D}$ existe uma expansão quadrática de segunda ordem na forma*

$$f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle + o(\|h\|^2) \quad (\|h\| \rightarrow 0), \quad (2.14)$$

em que, qtp. denota que a função f é diferenciável em todo ponto pertencente ao domínio $\mathcal{D}(f)$, exceto em conjuntos de medida nula.

Em outras palavras, a Proposição 2.2 indica que para quase todo ponto do domínio de uma função convexa existem derivadas de segunda ordem.

Os resultados acima possibilitam uma aproximação quadrática para a função valor uma vez que se tenha conhecimento da sua convexidade. Mais especificamente, vamos nos aproveitar quando possível da convexidade da função valor e, sobre esta premissa, avaliar a convergência de uma aproximação quadrática via limite de uma sequência de funções. Relembre o modelo dinâmico CSVIU explanado na Seção (1.1) e admita válidas as condições de positividade,

$$\sigma_x \bar{\sigma}_x^\top + \bar{\sigma}_x \sigma_x^\top \succeq 0 \quad \sigma_u \bar{\sigma}_u^\top + \bar{\sigma}_u \sigma_u^\top \succeq 0. \quad (2.15)$$

A Proposição 2.3 caracteriza a convexidade da função valor em (2.3) para o problema de controle CSVIU, sua prova pode ser consultada em (PEDROSA, 2018, p. 38).

Proposição 2.3 *Sejam c e c_T funções (estritamente) convexas e mensuráveis em (2.2). Então a função valor do problema $x \rightarrow J_t^*(x, \pi^*)$ em (2.3) é contínua e (estritamente) convexa para todo $0 \leq t \leq T$, em vistas das condições (2.15).*

É conveniente ainda introduzir dois conceitos requeridos ao entendimento da solução do problema de controle CSVIU.

Definição 2.10 (PAIVA, 2015, p. 20) (Derivada direcional) *Seja uma função convexa $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sua derivada direcional em um ponto $x \in \mathcal{D}$ na direção $d \in \mathbb{R}^n$ é dada por*

$$f'(x, d) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}. \quad (2.16)$$

Definição 2.11 (PAIVA, 2015, p. 21) (Subdiferencial) *O subdiferencial $\partial f(x)$ de f em x é o conjunto convexo compacto e não-vazio de \mathbb{R}^n definido por*

$$\partial f(x) := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, d \rangle \leq f'(x, d) \text{ para todo } d \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.17)$$

Um vetor $v \in \partial f(x)$ é chamado de subgradiente de f em x .

Observe que a definição acima envolve dois passos: calcula-se a derivada direcional e então determina-se o conjunto que ela suporta. Contudo, é possível dar uma definição direta sem nenhuma referência à diferenciação.

Definição 2.12 (PAIVA, 2015, p. 21) (Subdiferencial) *O subdiferencial de uma função f em x é o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem*

$$f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Um exemplo para ilustrar a ideia de subdiferencial é a função módulo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$. O ponto $\bar{x} = 0$ é o único minimizador global irrestrito de f . Para identificar os possíveis subgradiantes em torno do ponto $\bar{x} = 0$ usamos a expressão (2.18). Note que a desigualdade

$$f(y) = |y| \geq f(0) + v \cdot y = v \cdot y \quad (2.19)$$

é verdadeira para todo $y \in \mathbb{R}$ se $|v| \leq 1$. Assim, temos o subdiferencial $\partial f(0) = [-1, 1]$. Vale mencionar ainda que os subgradiantes podem ser vistos como aproximações lineares por baixo de uma função.

2.3 Sequência de Funções e Convergência

Certos problemas importantes na matemática visam determinar funções satisfazendo a certas condições. Uma das maneiras de abordar tais problemas consiste em obter funções que satisfaçam as condições apenas aproximadamente, com erro cada vez menor, e depois “passar ao limite”. É de se esperar que a “função-limite” seja uma solução exata do problema. Isto nos dá uma primeira ideia sobre o interesse da noção de limite de uma sequência de funções (LIMA, 2016, p. 361).

Para alcançar este objetivo, considere o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, este é amplamente usado em teoria das probabilidades uma vez que fornece condição suficiente para a convergência em valor esperado de variáveis aleatórias.

Proposição 2.4 (CABRAL, 2016, p. 32) *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)* Seja $(\mathbb{V}, \Sigma, \mu)$ um espaço de medida em que \mathbb{V} é um conjunto, Σ é uma σ -álgebra de subconjuntos de \mathbb{V} e μ medida em \mathbb{V} (elementos de Σ são ditos conjuntos mensuráveis). Também, seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais integráveis em \mathbb{V} tais que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \mu - \text{qtp. em } \mathbb{V} \text{ (convergência pontual)} \quad (2.20)$$

Suponha que exista uma função integrável g tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \mu - \text{qtp. em } \mathbb{V} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ (dominância por função integrável)} \quad (2.21)$$

Então f é integrável e

$$\int_{\mathbb{V}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{V}} f_n d\mu. \quad (2.22)$$

Definição 2.13 (CABRAL, 2016, p. 32) Dizemos que uma sequência de funções mensuráveis f_n converge em medida para f se $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|f_n - f| \geq a) = 0$ para todo $a > 0$.

Nota 2.1 Alternativamente, a Proposição 2.4 diz o seguinte:

Supondo (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em \mathbb{V} tal que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (2.23)$$

existe para todo $x \in \mathbb{V}$. Se existe uma função g integrável a Lebesgue tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots; x \in \mathbb{V}), \quad (2.24)$$

então f é integrável a Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{V}} |f_n - f| d\mu = 0, \quad (2.25)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{V}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{V}} f d\mu. \quad (2.26)$$

Note que cada $f_n(x)$ é dominada pela função integrável $g(x)$ e, portanto, g refere-se a uma “função dominante” para a sequência (f_n)

Nota 2.2 Certo que este documento tratará sobre sistemas estocásticos a tempo discreto, é conveniente trazer uma interpretação da Proposição 2.4 também para este caso:

Alternativamente, sejam $f_1, f_2, \dots, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tal que $|f_N(n)| \leq g(n)$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) < \infty$, e $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(n) = f(n)$. Então,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_N(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n). \quad (2.27)$$

2.4 CSVIU - Resultados Existentes

O problema de controle CSVIU via custo médio quadrático descontado foi estudado em trabalhos anteriores, a citar as dissertações a nível de mestrado (PEDROSA, 2018) e (NEREU, 2018) e os trabalhos publicados em anais de congresso e periódicos internacionais (PEDROSA *et al.*, 2017), (SILVA *et al.*, 2017), (Do VAL; SOUTO, 2017), e (PEDROSA *et al.*, 2019). Em especial, a referência (SILVA *et al.*, 2017) discute sobre a relação existente entre a solução robusta em norma H_2 para sistemas incertos e a abordagem CSVIU a tempo contínuo. Particularmente, da solução do problema de controle para o caso discreto estudado em (NEREU, 2018), (PEDROSA, 2018), (PEDROSA *et al.*, 2017) e (PEDROSA *et al.*, 2019), serão aqui destacadas as equações tipo Lyapunov e Riccati modificadas pelas quais se torna possível obter o controle ótimo em certas regiões do espaço de estados e atestar a estabilidade estocástica do sistema. Atente-se também ao fato de que as soluções destas equações estão intimamente associadas à função valor do problema de controle ótimo CSVIU.

Seja o processo CSVIU controlado (1.1) repetido aqui por conveniência,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + (\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x(k)|))\varepsilon^x(k) \\ &\quad + (\sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u(k)|))\varepsilon^u(k) + \sigma\omega(k), \end{aligned} \quad (2.28)$$

cuja saída medida $y(k) = Cx(k) + Du(k)$ tem acesso completo aos estados do processo. Adotando a função custo por estágio $c(x(k), u(k)) = \|y(k)\|^2$ se obtém o funcional de custo descontado

$$J^*(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \min_{\pi \in \Pi} E_{x_0} \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \{x_k^\top Q x_k + 2u_k^\top N x_k + u_k^\top R u_k\} \right], \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.29)$$

em que $Q = C^\top C \succeq 0$, $R = D^\top D \succ 0$, $N = D^\top C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\pi \in \Pi$ política de controle sobre a classe dos controladores markovianos.

A solução do problema (2.29) exige alguma discussão quanto as peculiaridades inerentes ao modelo CSVIU em (2.28). O problema de controle CSVIU é abordado como um problema de regulação, sendo que sua solução em malha fechada deve ser considerada sob uma perspectiva de particionamento do espaço de estados em que três regiões de controle disjuntas devem ser consideradas para cada entrada de controle $u_i(x)$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$). Sendo assim, para a i -ésima entrada do vetor de controle ótimo define-se as seguintes partições do \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{R}_i^+ := \{x \in \mathbb{R}^n | u_i^*(x) > 0\}, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{R}_i^- := \{x \in \mathbb{R}^n | u_i^*(x) < 0\}, \quad (2.31)$$

$$\mathcal{R}_i^0 := \{x \in \mathbb{R}^n | u_i^*(x) = 0\}. \quad (2.32)$$

Seja ainda $s_u \in \{1, -1\}^m$ o vetor de sinais de um vetor de controle ótimo $u^*(x) = [u_1(x) \ u_2(x) \ \dots \ u_m(x)]^\top$ não nulo elemento a elemento e, analogamente, defina também $s_x \in \{1, 0, -1\}^n$ para todo vetor de estados $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^\top$.

Feitas essas considerações, as próximas discussões desta Seção são relativas ao problema de controle CSVIU sobre as partições \mathcal{R}_i^0 , \mathcal{R}_i^+ e \mathcal{R}_i^- :

Por causa da introdução da função módulo no modelo dinâmico (2.28), uma interessante característica haverá de ser herdada por sistemas CSVIU, esta diz respeito ao surgimento de uma região no espaço de estados na qual a ação de controle ótima é equivalente a não atuação do controlador. Tal particularidade do modelo é consequência da não diferenciabilidade da função módulo na fronteira dos octantes de \mathbb{R}^n . A região do espaço de estados sobre a qual a atuação do controlador é nula ($u^*(x) \equiv 0_m$) é dada pela

intersecção $\mathcal{R}^0 = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^0$. Esta é particularmente denominada *Região de Inação Global* e é única sobre o espaço de estados.

A presença de uma *região de inação* (\mathcal{R}_i^0) está conectada à ideia de um controle cauteloso. Isto porque o modelo CSVIU propõe que a melhor alternativa é a de não interferir na evolução dinâmica do sistema quando nas proximidades do equilíbrio, uma vez que não se conhece precisamente o comportamento do sistema real.

Por força de sua própria definição, o leitor há de concluir que não se faz necessário obter um controle pois $u^*(x) = 0_m$ por definição, de forma que se $x \in \mathcal{R}^0$ a solução de controle CSVIU demanda apenas que a equação tipo Lyapunov apresentada no lema a seguir tenha uma única solução $U \in S^{n+}$, garantindo a estabilidade do sistema quando transitando no interior da região não controlada.

Para algum $U \in S^{n+}$ defina os operadores $\mathcal{Z}_x : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{W}_x : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\varpi_1 : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_x(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top U \bar{\sigma}_x), \\ \mathcal{W}_x(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top U \sigma_x + \sigma_x^\top U \bar{\sigma}_x), \\ \varpi_1(U) &= \text{tr}\{U(\sigma\sigma^\top + \sigma_x\sigma_x^\top + \sigma_u\sigma_u^\top)\},\end{aligned}\tag{2.33}$$

e

$$\Sigma(U) = \alpha B^\top U A + D^\top C \in \mathbb{R}^{m \times n}.\tag{2.34}$$

Lema 2.1 (PEDROSA, 2018, p. 46) *Considere o problema de controle em horizonte infinito com o custo descontado apresentado em (2.29), bem como a equação a tempo discreto tipo Lyapunov*

$$U = \alpha A^\top U A + \alpha \mathcal{Z}_x(U) + Q\tag{2.35}$$

Se existir uma solução única e positiva semidefinida U para (2.35), a Função Valor para cada $x \in \mathcal{R}^0 = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^0$ será dada por

$$V_0^*(x) = \|x\|_U^2 + r_0^\top |x| + \ell_0\tag{2.36}$$

onde $r_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\ell_0 \geq 0$ satisfazem

$$r_0 \cdot s_x = \alpha (I_n - \alpha A)^{-\top} \mathcal{W}_{x_d}(U) \cdot s_x\tag{2.37}$$

$$\ell_0(1 - \alpha) = \alpha \varpi_1(U).\tag{2.38}$$

Observe ainda a dependência que a expressão (2.37) apresenta com relação ao octante em que o estado $x \in \mathbb{R}^n$ se encontra. Esta dependência é imposta por meio do vetor de sinais s_x fazendo com que a interpretação da função valor do problema CSVIU se dê de forma particionada sobre o \mathbb{R}^n .

Visto que o surgimento da região de inação \mathcal{R}_i^0 se trata de uma importante particularidade da modelagem CSVIU, uma análise de suas fronteiras é conveniente para um entendimento mais geral do problema de controle. Desta forma, tomando as soluções U e r_0 advindas do Lema 2.1, os hiperplanos que limitam a inação global definindo suas fronteiras que compõem a porção $\mathcal{R}_i^0 \subset \mathcal{R}^0$ são dados pelo conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \Sigma(U)_i x + \frac{\alpha}{2} B^\top_{\cdot i} (r_0 \cdot s_x) = 0 \right\} \quad (2.39)$$

em que N_i indica a i -ésima linha da matriz $N \in \mathbb{R}^{p \times q}$. O termo $\Sigma(U)_i$ é um vetor normal ao hiperplano $\Sigma(U)_i x + \frac{\alpha}{2} B^\top_{\cdot i} (r_0 \cdot s_x) = 0$, definindo a direção e a constante $B^\top_{\cdot i} (r_0 \cdot s_x)$ define o afastamento à origem. Ainda, para vetores de sinais s_x simétricos do estado, por (2.39) se obtém dois hiperplanos com o mesmo vetor normal mas com afastamento de sinal contrário. Isto indica que cada \mathcal{R}_i^0 está contido entre dois hiperplanos paralelos.

Por fim, a região \mathcal{R}_i^0 é não vazia, isto é, uma vez que a equação (2.35) admite solução única $U \in S^{n+}$, então o termo $r_0 \cdot s_x$ que define o afastamento entre os hiperplanos limitantes da região $\mathcal{R}_i^0 \subset \mathcal{R}^0$ é certamente não nulo.

Considere agora regiões do espaço de estados suficientemente distantes de todo \mathcal{R}_i^0 tal que $u_i^*(x) \neq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Tendo em mente cada possível vetor de sinais s_u , define-se a região do espaço de estados $\mathcal{R}^{s_u} \in \mathbb{R}^n$ pela intersecção $\cap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^- \cup \mathcal{R}_i^+$ para algum s_u previamente fixado. De outra forma, adote a métrica usual $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ e suponha $x \in \mathbb{R}^n$ suficientemente afastado de \mathcal{R}_i^0 para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que a bola $B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x, y) < \delta\}$ centrada em x possua um raio δ suficientemente grande e os vetores s_x, s_u não se alterem, $\forall y \in B(x, \delta)$. Perceba que a região descrita anteriormente está contida em algum \mathcal{R}^{s_u} .

Tendo-se conceituado as *regiões de sinais homogêneos* (\mathcal{R}^{s_u}), considere agora algum vetor de estados contido em alguma região de sinal homogêneo tal que não exista qualquer possibilidade de mudança do vetor de sinais s_u , isto é $|x| \rightarrow \infty$. Convencionou-se então que o vetor de estados $x \in \mathcal{R}^{s_u}$ está contido na *região assintótica* referente ao vetor sinal s_u . O problema de controle CSVIU é solucionado como um problema de regulação. Sendo assim, é de se esperar que uma equação tipo Riccati “aponte” para a existência (ou não) de um ganho estabilizante para o modelo de sistema dinâmico estudado. Todavia, é importante frisar que a possível solução da equação tipo Riccati terá sua validade restrita apenas à regiões assintóticas para estados $x \in \mathcal{R}^{s_u}$ suficientemente afastados de cada região de inação \mathcal{R}_i^0 e distante de qualquer possibilidade de alteração do sinal s_u da

entrada de controle $u(x)$.

Para algum $U \in S^{n+}$ defina os operadores $\mathcal{Z}_u : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathcal{W}_u : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_u(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_u^\top U \bar{\sigma}_u), \\ \mathcal{W}_u(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_u^\top U \sigma_u + \sigma_u^\top U \bar{\sigma}_u),\end{aligned}\tag{2.40}$$

e

$$\Lambda(U) = \alpha B^\top U B + \alpha \mathcal{Z}_u(U) + D^\top D \in \mathbb{R}^{m \times m}.\tag{2.41}$$

Considere então o Lema 2.2.

Lema 2.2 (PEDROSA, 2018, p. 50) *Considere o problema de controle em horizonte infinito com custo (2.29) e a equação algébrica racional de Riccati*

$$U = \alpha A^\top U A + \alpha \mathcal{Z}_x(U) - \Sigma(U)^\top \Lambda(U)^{-1} \Sigma(U) + Q\tag{2.42}$$

Caso exista uma solução única e positiva semidefinida U para (2.42), em regiões do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n onde s_u corresponde ao vetor de sinais do controle ótimo, então a função valor $V^(x)$ tende assintoticamente para $V_a^*(x)$ e para todo x ponto interior de \mathcal{R}^{s_u}*

$$V_a^*(x) = \|x\|_U^2 + r^{\alpha^\top} |x| + \ell^\alpha\tag{2.43}$$

tal que $r^\alpha \in \mathbb{R}^n$ e $\ell^\alpha \geq 0$ satisfazem

$$r^\alpha \cdot s_x = \alpha (I_n - \alpha A + \alpha B \Lambda(U)^{-1} \Sigma(U))^{-\top} (\mathcal{W}_{x_d}(U) \cdot s_x - \Sigma(U)^\top \Lambda(U)^{-1} \mathcal{W}_{u_d}(U) \cdot s_u)\tag{2.44}$$

$$\ell^\alpha (1 - \alpha) = \alpha \left(\varpi_1(U) - \frac{\alpha}{4} \Omega(U)^\top \Lambda(U)^{-1} \Omega(U) \right)\tag{2.45}$$

em que $\Omega(U) = \mathcal{W}_{u_d}(U) \cdot s_u + B^\top (r^\alpha \cdot s_x) \in \mathbb{R}^m$. Além disso, no interior de \mathcal{R}^{s_u} a política de controle ótima u^* é dada por uma forma afim de realimentação de estados, esta é,

$$u^*(x) = -\Lambda(U)^{-1} \left(\Sigma(U)x + \frac{\alpha}{2} (\mathcal{W}_{u_d}(U) \cdot s_u + B^\top (r^\alpha \cdot s_x)) \right).\tag{2.46}$$

Uma solução para a equação (2.42) significa aplicar um controle não nulo (com s_u constante) em sequência, e desta forma as equações (2.44) e (2.45) são válidas para regiões \mathcal{R}^{s_u} do espaço de estados afastadas de qualquer mudança de sinal do estado e do controle. Sobre estas regiões assintóticas obtêm-se as soluções estacionárias para o problema (2.29) por meio do Lema 2.2, de forma que (2.43) componha aproximações quadráticas por partes para o custo do controlador CSVIU.

Note que a lei de controle (2.46) apresenta uma dependência com relação ao vetor de sinais (s_u) da entrada de controle. Isto posto, a cada instante discreto $k \in [0, T]$ se fará necessário conhecer s_u antes mesmo de aplicar o controle ótimo ao sistema. A avaliação do sinal s_{u_i} do elemento $u_i^*(x_k)$, $i = 1, 2, \dots, m$ do controle ótimo pode ser explorada a partir da convexidade da função valor e, sabendo que a função módulo é não diferenciável na origem, abordando a noção de subdiferencial advinda da análise de funções convexas.

Conforme (NEREU, 2018, p. 25) a convexidade de $J(x, u_i)$ implica na monotonicidade do subdiferencial $\partial_{u_i} J(x, u)$ e por esta é possível analisar o sinal s_{u_i} da entrada de controle $u_i^*(x)$ a cada instante k do processo CSVIU. Seja então $J(x, u)$ funcional de custo estritamente convexo em u (note aqui que esta hipótese é válida sob as condições da Proposição 2.3) tal como (2.29) e defina o conjunto subdiferencial na origem $\mathbb{S}_i := \partial_{u_i} J(x, u)|_{u_i=0}$. Desta forma tem-se que,

- Se $\zeta > 0, \forall \zeta \in \mathbb{S}_i \implies \partial_{u_i} J(x, u_i)|_{u_i=0}$ é crescente na origem e portanto o seu mínimo será atingido no semiplano cartesiano esquerdo, isto é $u_i^*(x) < 0$;
- Se $\zeta < 0, \forall \zeta \in \mathbb{S}_i \implies \partial_{u_i} J(x, u_i)|_{u_i=0}$ é decrescente na origem e portanto o seu mínimo será atingido no semiplano cartesiano direito, isto é $u_i^*(x) > 0$;
- Se $\zeta = 0 \in \mathbb{S}_i \implies \partial_{u_i} J(x, u_i)|_{u_i=0}$ se encontra o mínimo em $u_i^*(x) = 0$.

De outra forma temos:

$$\begin{cases} u_i^*(x) > 0, \text{ se } x \in \mathcal{R}_i^+ \\ u_i^*(x) < 0, \text{ se } x \in \mathcal{R}_i^- \\ u_i^*(x) = 0, \text{ se } x \in \mathcal{R}_i^0 \end{cases} \quad (2.47)$$

em que,

$$\mathcal{R}_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u_i \rightarrow 0^+} \partial_{u_i} J(x, u) < 0\} \quad (2.48)$$

$$\mathcal{R}_i^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u_i \rightarrow 0^-} \partial_{u_i} J(x, u) > 0\} \quad (2.49)$$

$$\mathcal{R}_i^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{R}_i^+ \cup \mathcal{R}_i^-)^c\}. \quad (2.50)$$

Em suma, a cada estágio k do processo regido pela equação dinâmica (2.28), se faz necessário avaliar qual é o valor do sinal s_{u_i} de cada elemento $u_i^*(x_k)$ do vetor de controle ótimo. Admitindo a convexidade de $J(x, u)$ em cada componente u_i e lembrando que a mesma é não diferenciável em $u_i = 0$, tal avaliação é realizada por via dos subdiferenciais. Por exemplo, num instante k qualquer, para um vetor de estados $x_k \in \mathbb{R}^n$, o elemento $u_i^*(x_k)$ terá o seu sinal s_{u_i} determinado ao tomar a função $J(x_k, u_i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e avaliar o seu subdiferencial $\partial_{u_i} J(x_k, u_i)|_{u_i=0}$ nos extremos do intervalo $[-1, 1]$. Na prática,

calcula-se o subdiferencial $\partial_{u_i} J(x_k, u_i)|_{u_i=0}$ para $s_{u_i} = 1$ e $s_{u_i} = -1$ e, a partir dos sinais dos dois resultados, avalia-se quais das relações em (2.47)-(2.50) são satisfeitas.

A fim de ilustrar os conceitos introduzidos nos parágrafos anteriores, considere um sistema incerto modelado via proposta CSVIU. Nestas condições, a Figura 2.1 procura retratar a geometria de uma possível política ótima de controle CSVIU aplicada ao sistema para cada estado $x = [x_1 \ x_2]^\top$ previamente fornecido. Note a região de inação \mathcal{R}_1^0 (porque $u \in \mathbb{R}$ tem-se que $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}_1^0$) representada na figura pela faixa central que divide o espaço de estados nas sub-regiões de controle \mathcal{R}_1^+ , \mathcal{R}_1^- .

A Figura 2.2 apresenta a função valor do problema de controle CSVIU, em que o custo médio incorrido referente a região não controlada (\mathcal{R}^0) também se destaca numa faixa central em torno da origem do espaço de estados.

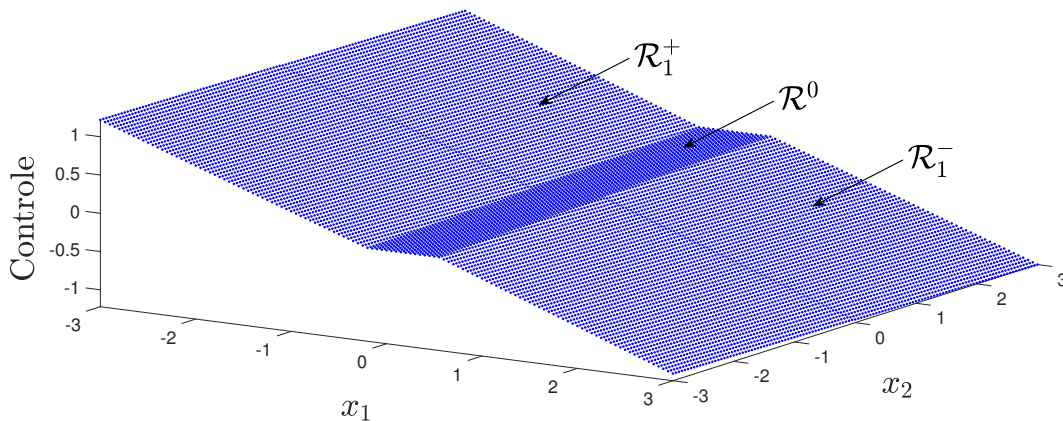


Figura 2.1 – Controle CSVIU

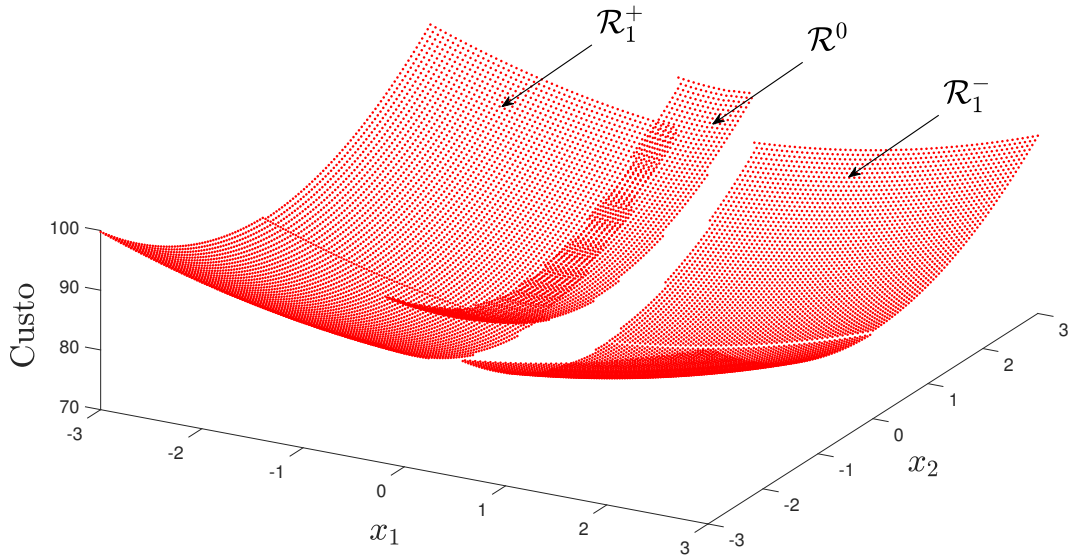


Figura 2.2 – Custo Médio Quadrático

Importante enfatizar que a solução ótima do controle em torno do equilíbrio é conhecida, esta é $u^*(x) = 0, \forall x \in \mathcal{R}^0$ porém as funções representadas por \mathcal{R}_1^+ e \mathcal{R}_1^- em ambas figuras acima são válidas assintoticamente, isto é, à distância da região de inação para um vetor de estados $x \in \mathcal{R}^{su}$ tal que $|x| \rightarrow \infty$. Assim sendo, o controle retratado pela Figura 2.1 é obtido por vias de uma *Interpolação Linear* que conecta as soluções assintóticas do controle à região de inação. Esta estratégia de aproximação para o controle ótimo CSVIU é melhor discutida em (NEREU, 2018, p. 49-52). Por sua vez, a Figura 2.2 não retrata com exatidão o comportamento da função valor a medida em que x se aproxima da região de inação. De fato, uma vez que a Proposição 2.3 caracteriza a convexidade (estrita) da função valor para o problema de controle CSVIU, a sua continuidade incorre por implicação e, deste modo, havemos de concluir que há de ocorrer uma transição suave de (2.36) para (2.43) conforme x se afasta das fronteiras da região de inação e se aproxima das regiões assintóticas.

Uma noção de estabilidade para sistemas em malha fechada obtidos ao empregar a lei de controle CSVIU é abordada em (PEDROSA *et al.*, 2019). Na referência citada, busca-se a estabilidade do processo CSVIU (2.28) por intermédio da teoria de Lyapunov e obtêm-se um resultado de estabilidade estocástica em probabilidade.

Uma vez que funções de energia provenientes de conceitos físicos em geral são boas tentativas para se encontrar uma função de Lyapunov (BARBAZELLI, 2005, p. 30), reconsidere o custo descontado (2.29) e admita válido o complemento de Schur:

$$Z = \begin{bmatrix} Q & N \\ N^\top & R \end{bmatrix} \succ 0 \iff R \succ 0, \quad (Q - NR^{-1}N^\top) \succ 0, \quad (2.51)$$

disto tem-se que,

$$\begin{aligned} [x \ u]Z[x \ u]^\top &\geq x^\top(Q - NR^{-1}N^\top)x, \quad \forall x, u \\ \implies \sum_{k=0}^T \alpha^k [x_k \ u_k]Z[x_k \ u_k]^\top &\geq \sum_{k=0}^T \alpha^k x^\top(Q - NR^{-1}N^\top)x > 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Em (PEDROSA *et al.*, 2019) um critério de estabilidade é derivado com base na última expressão tal que, se $(Q - NR^{-1}N^\top) \succ 0$ e a equação de Riccati (2.42) admitir solução, esta será positiva semidefinida e o controlador será estabilizante no sentido determinístico. Ademais, dada a convexidade estrita da função valor para o problema de controle CSVIU (Proposição 2.3) se demonstra a coercividade da mesma de onde segue que esta é um funcional tipo Lyapunov e o sistema é quase que certamente estável (ou equivalentemente estável com probabilidade um).

Neste critério de estabilidade é importante destacar o alto nível de exigência imposta sobre a matriz Q do problema (2.29). Isto é, a fim de que a estabilidade assintótica do sistema descontado seja garantida por via da teoria de Lyapunov, exige-se não apenas $Q \succ 0$ mas também $(Q - NR^{-1}N^\top) \succ 0$ além de que, neste caso, o sistema é trivialmente observável, de forma que o critério de estabilidade anterior não é adequado ao problema de norma. Por sua vez, no Capítulo 3 desta dissertação o leitor é apresentado a dois critérios de estabilidade (Definições 3.1 e 3.2) os quais nos remetem à estabilidade em média quadrática. Esta, apesar de ser mais restritiva que a estabilidade no sentido quase certo, permite relaxar as condições impostas sobre a matriz $Q = C^\top C$, admitindo $Q \succeq 0$ se mostrando portanto mais adequada ao problema de norma.

Nota 2.3 A região de inação global \mathcal{R}^0 é definida como a interseção entre as m regiões do tipo \mathcal{R}_i^0 . Tais regiões, no entanto, se prolongam ao longo do espaço de estados de forma que não estão restritas a região de inação global. Para cada $i = 1, 2, \dots, m$ a fronteira de \mathcal{R}_i^0 para alguma região exterior à \mathcal{R}^0 , é dada por

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{R}^0 : \langle \Lambda(U)_i^{-1}, \frac{\alpha}{2} B^\top(r \cdot s_x) + \mathcal{W}_u(U) \cdot s_u \rangle = 0 \right\} \quad (2.53)$$

com U , r parâmetros diferentes daqueles calculados no Lema 2.1 uma vez que ao menos uma entrada de controle será não nula. Logo, esses cálculos não podem ser feitos para regiões do espaço de estados em que o vetor de controle ótimo possui pelo menos um elemento não nulo pois, sobre tais regiões, não poderemos aproximar os coeficientes da função valor por vias do Lema 2.1. Este é um problema em aberto que está sob investigação. Contudo, note que o caso de controle mono-entrada não apresenta tais dificuldades pois $\mathcal{R}_1^0 = \mathcal{R}^0$ de forma que é possível determinar os limites da única região de inação existente sem impedimentos adicionais.

2.5 Princípios de Normas para Sistemas

A grandeza de um objeto é, em geral, representada por um número que indique sua largura ou comprimento. No entanto, em se tratando da mensuração de sinais deve-se levar em consideração que este é uma função variante no tempo e, sendo assim, não apenas a sua amplitude deve ser considerada em tal medida, mas também sua duração. As noções aqui apresentadas permitem um tratamento quantitativo do desempenho e robustez de sistemas de controle e para tal, será requerida a introdução apropriada de normas de sinais e sistemas. Por estas se obtém uma medida da magnitude dos sinais e se desenvolvem também operadores envolvidos no problema de controle.

2.5.1 Norma \mathcal{H}_2

Seja um sinal escalar contínuo $v(t) \in \mathbb{R}$ indexado no tempo $t \geq 0$. Uma possível medida para este é dada por sua norma \mathcal{L}^p

$$\|v\|_p := \left(\int_0^\infty |v(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1. \quad (2.54)$$

Se $\|v\|_p$ é finita, $v(t)$ é dito p -integrável pertencente ao espaço funcional \mathcal{L}^p .

Um caso particular de espaço funcional sob o qual se desenvolve a teoria de normas para sistemas dinâmicos, são os espaços de Hilbert. Como definido em Definição 2.8, estes são espaços vetoriais completos (toda sequência de Cauchy deste converge para um elemento dele mesmo) que admitem a noção de produto interno e, para nós, são de grande importância uma vez que permitem a indução de uma norma a partir da operação de produto interno. Observe que a definição de espaço de Hilbert implica que este é também um espaço de Banach.

A exemplo, $\mathcal{L}^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) espaço das funções contínuas em Ω é um espaço de Hilbert. De maneira mais geral, seja $g(x)$ uma função-peso* em Ω , o espaço $\mathcal{L}_g^2(\Omega) = \{v \text{ mensurável} \mid \int_\Omega |v(x)|^2 g(x) dx < \infty\}$ ($\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$) é um espaço de Hilbert munido do produto interno ponderado

$$\langle u, v \rangle_g = \int_\Omega u(x)^\top v(x) g(x) dx \quad u(x), v(x) \in \Omega \quad (2.55)$$

e para $g(\cdot) \equiv 1$, tal produto interno induz à norma \mathcal{L}^2 padrão, esta é $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$. A ideia de uma função peso faz mais sentido quando se discute o caso de custo descontado, para este um fator de desconto $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = e^{-\alpha t}$ ou

*Função peso, no sentido clássico, é qualquer função contínua e não negativa em \mathbb{R} (GROSSMAN *et al.*, 1980, p. 11). É utilizada quando é calculado um somatório, uma integral ou uma média, por exemplo. Em especial, a esperança de uma variável estocástica é a média ponderada dos possíveis valores que esta pode assumir, e caso essa tenha densidade de probabilidade, a densidade coincide com a noção de peso.

$g(k) = \alpha^k$ ($0 < \alpha < 1$) é anexado ao funcional de custo de um problema de controle em horizonte infinito de tempo (contínuo ou discreto respectivamente) tornando finito um custo de horizonte infinito.

Antes de dar prosseguimento ao estudo de normas para sistemas no domínio do tempo, convém apresentar alguns resultados acerca de sua representação clássica em termos de sinais e sistemas. Classicamente, a representação de um sinal no domínio da frequência passa pela transformada de Laplace deste, dada por

$$\hat{v}(s) = \int_0^{\infty} v(t)e^{-st} dt, \quad (2.56)$$

$\forall s \in \mathbb{C}$ e $v(t) = 0$ para $t < 0$. Podemos, em equivalência a (2.54), definir a norma \mathcal{L}^2 ($p = 2$) para o sinal transformado $\hat{v}(s)$ por

$$\|\hat{v}\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{v}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (2.57)$$

Agora, de acordo com (TOIVONEN, 2000, p. 11), para um sistema linear SISO estável com função de transferência $G(s)$, a norma H_2 é definida em analogia com (2.57) como

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.58)$$

Ainda, para um sistema multivariável com função de transferência $G(s) = [g_{kl}(s)]$, a generalização da definição acima é

$$\begin{aligned} \|G\| &= \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \|g_{kl}\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m |g_{kl}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(G(j\omega)^* G(j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \end{aligned} \quad (2.59)$$

com $G(j\omega)^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$ sendo a matriz conjugada transposta de $G(j\omega) \in \mathbb{C}^{n \times m}$. A matriz quadrada $G(j\omega)^* G(j\omega) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é chamada de matriz Hermitiana pois é igual a sua conjugada transposta.

Nota 2.4 A notação H em H_2 (em substituição a \mathcal{L}^2) remete a espaços funcionais que, em adicional a ter norma \mathcal{L}^p finita, é composto por funções $G(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$ limitadas e analíticas no semiplano direito complexo fechado. Ou seja, o domínio de sua transformada de Laplace satisfaz $\{s : \text{Re}(s) \geq 0\} \subset \mathcal{D}$ (isto é, todos os seus polos estão situados no semi plano esquerdo complexo aberto). Tais espaços funcionais são chamados espaços de Hardy (H_p). Portanto, funções de transferência estáveis pertencem a estes espaços, desde que a integral associada seja finita.

Agora, sobre o domínio do tempo, a norma H_2 de um sinal multidimensional $v(t) = [v_1(t), \dots, v_n(t)]^\top \in \mathbb{R}^n$, pode ser definida como a raiz quadrada da integral do produto interno $\langle v, v \rangle$, ou seja

$$\|v\| = \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^n v_i(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty v(t)^\top v(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (2.60)$$

Para um sinal de natureza discreta $v(k)$, a mesma é definida por

$$\|v\| = \left(\sum_{k=0}^\infty \|v(k)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (2.61)$$

em que $\|v(k)\|$ é a norma euclidiana $\sqrt{v(k)^\top v(k)} \geq 0$ do vetor $v(k)$. Dito isto, a norma H_2 do sinal v é obtida por $\|v\|^2$, esta carregando consigo a interpretação física de ser proporcional a “energia” total associada ao sinal (LATHI, 2007, p. 76).

O próximo passo consiste em definir norma H_2 para sistemas determinísticos, considerando sistemas a tempo discreto. Em lugar de se calcular diretamente a energia do sistema por meio da integral em (2.59), a norma H_2 pode ser convenientemente computada no domínio do tempo. Assuma um sistema LIT (Linear e Invariante no Tempo) estável com a seguinte representação no espaço de estados

$$\Phi := \begin{cases} x(k+1) & = Ax(k) + Bv(k) \\ y(k) & = Cx(k), \quad x(0) = 0_n. \end{cases} \quad (2.62)$$

em que $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $v(\cdot) \in \mathbb{R}^m$. A caracterização da norma H_2 pode ser feita através da resposta ao impulso do sistema, isto é:

$$v(k) = \delta(k)I_m = \begin{cases} 1 \cdot I_m, & \text{para } k = 0 \\ 0 \cdot I_m, & \text{para } k > 0 \end{cases} \implies y(k) = \begin{cases} 0, & \text{para } k = 0 \\ \sum_{j=1}^m CA^{k-1}B_j, & \text{para } k > 0 \end{cases}$$

com I_m matriz identidade $m \times m$ e B_j é referente à coluna $j \in \{1, \dots, m\}$ da matriz B . Deste modo, tem-se que

$$\|\Phi\|^2 := \sum_{k=1}^\infty \|y(k)\|^2 = \text{tr} \left(\sum_{k=1}^\infty [CA^{k-1}BB^\top(A^{k-1})^\top C^\top] \right) = \text{tr} (CL_c C^\top)$$

com a matriz L_c definido acima e que também pode ser obtida como solução da equação do gramiano de controlabilidade

$$AL_c A^\top - L_c + BB^\top = 0. \quad (2.63)$$

2.5.2 Potência de um sinal

Em termos determinísticos, já foi visto que uma condição necessária para que o tamanho (energia) do sinal seja mensurável é que a amplitude deste tenda a 0 quando o tempo tende a infinito. No entanto, existem sinais em que esta condição não é satisfeita e portanto, para estes, a ideia de tamanho/energia discutida anteriormente não faz sentido. Neste tipo de situação, em que a energia do sinal $v(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ é infinita, uma medida mais significativa do seu tamanho é conhecida por *Potência Média* (P) do sinal. Esta é definida por

$$P := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|v(t)\|^2 dt \quad (2.64)$$

ou para sinais a tempo discreto

$$P := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T \|v(k)\|^2. \quad (2.65)$$

caso os limites acima existam.

Perceba que a potência de um sinal de energia finita é zero ($P = 0$) e a energia de um sinal de potência finita é infinita, de forma que um mesmo sinal não pode ser ao mesmo de tempo de energia e potência finitas. A diferença básica entre as medidas de potência e energia consiste no fato de que a primeira pode ser mensurada acumuladamente a partir de qualquer instante de tempo, enquanto que a segunda deve ser medida por unidade de um certo período de tempo, digamos um segundo ou uma hora.

Importante pontuar porém que num horizonte infinito de tempo nem todo sinal possui energia ou potência finita. De fato, a existência de uma medida finita da energia do sinal está intimamente ligada à propriedade de convergência da integral em (2.60) ou da série em (2.61).

2.5.3 Norma \mathcal{H}_∞

Uma outra medida de desempenho adotada em teoria do controle é a norma H_∞ . Esta, talvez, tenha um significado fundamentalmente mais importante que a norma H_2 uma vez que provê uma medida do pior caso para o ganho de energia sofrido pelo sistema quando sujeito a perturbações.

Existe muito interesse no projeto de controladores que minimizem a norma H_∞ de um sistema específico, para tanto, ambas abordagens (domínio da frequência e espaço de estados) podem vir a ser utilizadas a fim de solucionar este problema. Quando no domínio da frequência, tem-se à disposição métodos tais como *Teoria do Operador*, *Fatoração Espectral* e *Métodos Polinomiais*, enquanto que para sistemas em espaço de estados se utiliza ideias similares ao clássico *Problema Linear Quadrático* (LQ) e *Teoria dos Jogos Diferenciais* (KUSTER, 2012, p. ii).

Considere novamente um sinal $v(t) \in \mathbb{R}^n$ e sua norma \mathcal{L}^p definida de forma similar a (2.54). A medida em que $p \rightarrow \infty$, a norma \mathcal{L}^p tende a chamada norma \mathcal{L}^∞ , definida como o menor limitante superior do valor absoluto

$$\|v\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |v_i(t)| \quad (2.66)$$

representando o pico de um sinal em particular num instante t . Diferentemente do caso da norma H_2 , não há uma via direta entre as noções de norma \mathcal{L}^∞ para vetores e H_∞ para sistemas em espaço de estados. Todavia, antes de se introduzir o conceito de norma H_∞ para sistemas via espaço de estados, cabe aqui uma breve apresentação da ideia clássica desta norma no domínio da frequência.

Considere um sistema linear SISO estável com função de transferência $G(s)$ em que $|G(j\omega)|$ é o fator pelo qual a amplitude de uma entrada senoidal com frequência ω é amplificada pelo sistema. Então, a norma H_∞ é definida como

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (2.67)$$

significando que a norma H_∞ é uma medida do maior fator pelo qual qualquer entrada senoidal é amplificada pelo sistema.

Para uma função de transferência multivariável estável $G(s)$, uma caracterização importante da norma H_∞ é dada em termos do efeito de G no espaço das entradas com normas \mathcal{L}^2 limitadas. Seja $v(t)$ um sinal com transformada de Laplace $\hat{v}(s)$, tal que a norma \mathcal{L}^2 seja limitada. Então a saída do sistema, seja ela $\hat{z}(s) = G(s)\hat{v}(s)$, tem norma \mathcal{L}^2 limitada por cima por $\|G\|_\infty \|\hat{v}\|_2$, pois

$$\begin{aligned} \|G\hat{v}\|_2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)\hat{v}(j\omega)\|^2 d\omega \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\|G(j\omega)\| \|\hat{v}(j\omega)\|]^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &\leq \sup_{\omega} \|G(j\omega)\| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{v}(j\omega)\|^2 d\omega \right)^{1/2} = \|G\|_\infty \|\hat{v}\|_2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Portanto, como discutido em (TOIVONEN, 2000, p. 18) a norma H_∞ é a norma de um operador induzido pela norma \mathcal{L}^2 , i.e.

$$\|G\|_\infty = \sup \left\{ \frac{\|G\hat{v}\|_2}{\|\hat{v}\|_2} : \hat{v} \neq 0 \right\}. \quad (2.69)$$

A expressão em (2.69) fornece uma outra alternativa a fim de computar a norma H_∞ a partir da representação via espaço de estados, esta consiste em caracterizá-la como um operador induzido pela norma \mathcal{L}^2 . Considere $\bar{\Phi}$ sistema controlado a tempo

discreto admitindo uma saída de referência $z(\cdot)$ perturbada por uma entrada exógena $v(\cdot) \in \mathcal{L}^2$

$$\bar{\Phi} := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + B_2v(k) \\ z(k) = C_1x(k) + D_1v(k) + D_2u(k) \end{cases} \quad (2.70)$$

em que $B_1, D_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $B_2, D_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $v(k) \in \mathbb{R}^r$ é o sinal de distúrbio que causa o desvio de $z(k)$ (saída controlada) do equilíbrio e, seu efeito perturbador deve ser amenizado via ação de controle $u(k) \in \mathbb{R}^m$ (suponha observação completa dos estados do sistema). Então, é possível caracterizar a norma H_∞ no domínio do tempo pela máxima relação saída/distúrbio (z / v), em que

$$\|\bar{\Phi}\|_\infty = \max_v \left\{ \frac{\|z\|}{\|v\|} : v \neq 0, v \in \mathcal{L}^2 \right\} \quad (2.71)$$

trazendo consigo a noção de maior ganho (amplificação) de energia possível a que $\bar{\Phi}$ será submetido dado que o sinal v é uma entrada de distúrbio indesejável no sistema.

Na prática, o computo de $\|\bar{\Phi}\|_\infty$ se dá através de uma aproximação por cima para o menor limitante superior $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma = \sup_{0 < \|v\| < \infty} \frac{\|z\|}{\|v\|} \quad (2.72)$$

em que γ representa o ganho máximo de energia do sistema. Segue então que, para qualquer $\gamma > 0$, $\|\bar{\Phi}\|_\infty < \gamma$ se e somente se

$$\begin{aligned} \frac{\|z\|^2}{\|v\|^2} < \gamma^2 &\iff \|z\|^2 - \gamma^2\|v\|^2 < 0 \iff \sum_{k=0}^T z(k)^\top z(k) - \gamma^2 \sum_{k=0}^T v(k)^\top v(k) < 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^T \{z(k)^\top z(k) - \gamma^2 v(k)^\top v(k)\} < 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Desta forma, tem-se convenientemente explicitada uma expressão de custo adequada ao problema de controle na norma em estudo.

No contexto de sistemas controlados com entrada de controle u , sujeito ao distúrbio v , produzindo uma saída de referência z , o objetivo geral do controle em norma H_∞ pode ser descrito como “projetar um mecanismo de controle que manterá a saída de referência z pequena a despeito do distúrbio v ” (BAŞAR; BERNHARD, 2008, p. 8) deixando claro a dualidade do objetivo do controlador robusto: manter o sistema robustamente estável e minimizar um funcional de custo.

Como mencionado em (STOORVOGEL, 1992, p. 2), um modelo matemático descrevendo o comportamento da planta é o primeiro passo para se trabalhar no controle de um sistema. No entanto, o projetista deve ter em mente que qualquer modelo está longe de ser perfeito. Isto significa que a planta não será exatamente descrita pelo modelo e, portanto, caso este seja demasiadamente simples, uma possível consequência é a

total ignorância com relação ao quão sensível as entradas do modelo são com respeito as diferenças entre o modelo e a planta, por isso o comportamento real obtido pode diferir significativamente daquele que foi previsto. O conceito de robustez neste caso se apresenta como a capacidade deste sistema de se comportar adequadamente frente as incertezas a que ele esteja submetido. Mais especificamente, há de se perceber que o critério de norma H_∞ se trata de uma avaliação de robustez em estabilidade. Estudo mais detalhado com respeito a normas e robustez de sistemas determinísticos pode ser encontrado por exemplo em (COLANERI *et al.*, 1997) e (ZHOU; DOYLE, 1999).

2.5.4 Normas Estocásticas

Até aqui no entanto, apenas tratou-se o problema de norma para sinais e sistemas determinísticos. Uma outra abordagem diz respeito a “retratar” o sistema a ser modelado via teoria de processos estocásticos. Sistemas dinâmicos estocásticos vem ganhando cada vez mais interesse nas últimas décadas pela diversidade de problemas cuja modelagem inclui algum aspecto probabilístico (RUFFINO, 2009, p. 1).

Denote por $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ o espaço de probabilidade equipado com a filtragem $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$ e considere o processo a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + \sigma\omega(k), \quad x(0) = x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.74)$$

definido em $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$, em que x é dado, $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $\omega(k)$, $k = 1, 2, \dots, T$ é sequência de variáveis aleatórias (ruído estocástico) q -dimensional *i.i.d.* de média nula e variância finita. Em analogia ao sistema determinístico (2.62) podemos definir um sistema estocástico LIT com equação de estados perturbada por ruído aditivo e saída $y(\cdot)$, este é,

$$\Phi := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + \sigma\omega(k) \\ y(k) = Cx(k), \quad x(0) = 0_n. \end{cases} \quad (2.75)$$

Note que, a princípio não é possível garantir que $\omega(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$, isto por que $\omega(\cdot)$ se trata de um distúrbio de natureza incessante. Neste caso, uma alternativa ao computo da energia do sistema estocástico Φ é,

$$\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot)) := E_x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right], \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2.76)$$

Uma vez que a sequência $\{a_k\}_{k \geq 0} = (\alpha^k, \alpha^{k+1}, \alpha^{k+2}, \dots)$ é monótona estritamente decrescente e limitada inferiormente por 0, então a mesma é necessariamente convergente. Este resultado é de significativa relevância uma vez que cancela a finitude da medida (2.76) caso $\|y(k)\|^2$ não cresça numa taxa geometricamente maior do que $\{a_k\}$.

Tendo sido apresentada a medida (2.65) para um sistema determinístico, é conveniente introduzir uma outra noção de desempenho para sistemas estocásticos. Uma outra possível medida de desempenho para o sistema estocástico Φ será a solução,

$$\|\Phi\| = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} E \|y(k)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.77)$$

ou ainda a medida

$$\|\Phi\| = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T E \|y(k)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.78)$$

Os custos em (2.77) e (2.78) são representados em (DRAGAN *et al.*, 2000, p. 225) sobre a hipótese de estabilidade exponencial em média quadrática de um sistema autônomo estocástico sujeito a ruído aditivo e se mostra que são medidas equivalentes. Posto isto, tem-se que uma possível medida da energia do sistema estocástico é dada pela saída do sistema em regime mediada pelo tempo, isto é, por meio do custo não descontado

$$\mathcal{E}_2(y(\cdot)) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_x \left[\sum_{k=0}^T \|y(k)\|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T E \|y(k)\|^2 \quad (2.79)$$

novamente supondo que o limite existe e $x(0) = x$ determinístico.

Com relação a norma H_∞ estocástica, retome o sistema em (2.70) e admita adicionar à equação dinâmica de $\bar{\Phi}$ o termo $\sigma\omega(k)$ com $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times q}$ modulando a intensidade da entrada de ruído no sistema

$$\bar{\Phi} := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1u(k) + B_2v(k) + \sigma\omega(k) \\ z(k) = C_1x(k) + D_1v(k) + D_2u(k). \end{cases} \quad (2.80)$$

Perceba que, além do termo determinístico $v(\cdot)$, agora a dinâmica do sistema estará sendo constantemente perturbada por uma entrada ruidosa de natureza estocástica.

Um modelo de custo deve apresentar a capacidade de estimar como a energia total de operação varia dado o estado inercial do sistema. Entender o funcional de custo do problema proposto é de grande valia, uma vez que sua adoção obedece a especificidades do sistema e da medida que dele se deseja tomar. Neste caso, uma medida significativa associada à norma H_∞ para sistemas estocásticos é dada pelo custo descontado,

$$\mathcal{E}_\infty^\alpha(z(\cdot)) := E_x \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} \quad (2.81)$$

ou ainda, em analogia ao problema de controle em norma H_2 a longo prazo

$$\mathcal{E}_\infty(z(\cdot)) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_x \left\{ \sum_{k=0}^T \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\}. \quad (2.82)$$

Nota 2.5 O leitor há de ter percebido que, por definição, a finitude da norma é uma condição para a sua existência. Isto implica que, quando na busca de uma solução para o

problema de norma de sistemas dinâmicos, estejam eles submetidos a sinais de natureza estocástica ou determinística, se faz necessário fornecer uma noção de estabilidade antes de se buscar uma aproximação para a norma do sistema. Esse aspecto será abordado para os problemas aqui estudados no Capítulo 3.

2.6 Jogos Diferenciais e Teoria do Controle

Em variadas situações do mundo real, há de se notar a importância de se tomar decisões baseadas em escolhas de caráter estratégico. Historicamente, esta preocupação foi sentida em meados de 1940 com o lançamento do agora clássico livro intitulado “The Theory of Games and Economic Behavior”, de Von Neumann e Morgenstern. Inicialmente o objetivo era de usar as ideias abordadas no livro para fins militares. Todavia, as aplicações em outros campos da ciência se mostraram mais promissoras (GROTE, 1974, p. 1).

Dentro do contexto da Teoria dos Jogos, um jogo diferencial é um modelo dinâmico de um jogo, usado com a finalidade de estudar sistemas que se processam ao longo do tempo e cuja dinâmica pode ser representada por uma equação diferencial no caso contínuo, ou a diferenças no caso discreto. A exemplo, certos tipos de combate militar como, um torpedo perseguindo um navio, um míssil interceptando uma aeronave, um atirador defendendo um alvo contra um invasor, são típicos modelos de jogos diferenciais. Similarmente, o planejamento financeiro entre setores concorrentes da economia, a competição de produtos concorrentes em um sistema de fabricação, problemas relacionados ao atendimento da demanda com uma oferta adequada em um sistema de mercado, todos esses exemplos podem ser interpretados como jogos diferenciais (ALIYU, 2011, p. 27). Ainda, exemplos de jogos dinâmicos aplicados a problemas econômicos e de gestão podem ser encontrados em (PLASMANS *et al.*, 2006), (JØRGENSEN; ZACCOUR, 2004) e (DOCKNER *et al.*, 2000).

Um jogo não cooperativo (conflitante) se trata de uma situação estratégica na qual os jogadores não entram em acordo sob hipótese alguma tomando decisões de maneira independente com a finalidade de satisfazer unicamente seus próprios interesses. A referida Teoria dos Jogos se destaca com respeito ao relacionamento conflitante ou de cooperação entre tomadores de decisão, trazendo consigo três características chaves para a economia, ecologia ou qualquer outra área em que esta se aplique, são elas: a busca por um comportamento ótimo, a presença de múltiplos agentes e consequências duradouras advindas das decisões (BERNHARD *et al.*, 2000, p. 59). A mesma teoria depende fortemente de modelos matemáticos e tem se mostrado bastante útil quando endereçada a solucionar problemas de interesses conflituosos ou colaborativos em economia e gestão, assim como em outras áreas da ciência (DOCKNER *et al.*, 2000, p. xi).

Em meados da década de 1960, a teoria do controle já era um assunto bem difundido, com uma série de revistas e encontros internacionais. Percebeu-se então que o problema de controle é virtualmente idêntico a um jogo diferencial com apenas um jogador (GROTE, 1974, p. 5). De fato, em um problema de controle ótimo existe uma única variável, a variável de controle u , e um critério a ser otimizado. Por outro lado, a teoria dos jogos diferenciais tem a capacidade de generalizar o problema anterior para duas variáveis, sejam elas u e v , uma para cada “jogador”. A medida que o *jogador 1*, representado pela entrada exógena v , se esforça ao máximo a fim de desviar o sistema de sua referência, o *jogador 2* todavia faz todo o possível por meio da variável de controle u para levar o sistema a sua estabilidade, concomitantemente minimizando um funcional de custo por estágio. Este problema é abarcado pela teoria do controle ótimo sendo comumente denominado *Controle Min – Max* onde a ideia é clara, a cada estágio k , uma variável de entrada do sistema busca a maximização ao passo que a outra a minimização.

Para algum $T < \infty$ denote o funcional de custo $J(u, v)$ por

$$J(u, v) = E_x \left\{ \sum_{k=0}^T \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\}. \quad (2.83)$$

Estendendo um pouco mais os conceitos do problema em teoria dos jogos, *jogos de soma zero* são jogos em que o ganho de um jogador representa necessariamente uma perda para o outro (FIANI, 2006, p. 35). Em conexão a metodologia discutida, define-se duas importâncias:

Valor Superior:

$$\bar{J} := \inf_{u \in \mathbf{U}} \sup_{v \in \mathbf{W}} J(u, v) \quad (2.84)$$

e Valor Inferior:

$$\underline{J} := \sup_{v \in \mathbf{W}} \inf_{u \in \mathbf{U}} J(u, v) \quad (2.85)$$

sendo válida a desigualdade

$$\bar{J} \geq \underline{J}. \quad (2.86)$$

Se obtivermos uma igualdade em (2.86), o valor comum a ambos os valores

$$J^* = \bar{J} = \underline{J} \quad (2.87)$$

é chamado de *valor do jogo de soma zero*, e além disso, se existe um par $(u^* \in \mathbf{U}, v^* \in \mathbf{W})$ tal que

$$\min_{u \in \mathbf{U}} J(u, v^*) = \max_{v \in \mathbf{W}} J(u^*, v) = J(u^*, v^*) = J^* \quad (2.88)$$

então o par (u^*, v^*) é dito solução do ponto de sela e, neste caso, diz-se que o jogo admite um ponto de sela (BAŞAR; BERNHARD, 2008, p. 34).

Se a solução do ponto de sela de um jogo de soma zero não é única, então qualquer combinação ordenada desses múltiplos pontos de sela pode ser adotada como solução. Acrescenta-se então que $J(u, v)$ é contínuo no par (u, v) e definido sobre o espaço vetorial $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$, em que $u \in \mathbf{U} \subset \mathcal{U}$ e $v \in \mathbf{W} \subset \mathcal{V}$, onde \mathbf{U} e \mathbf{W} são conjuntos restrição, ambos compactos. A caracterização do funcional (2.83) nestes termos será de grande importância a fim de se estabelecer a unicidade da solução ótima por vias da Proposição 2.6. Especificamente, a compacidade dos conjuntos \mathbf{W} e \mathbf{U} assegura a existência de um valor máximo em v e mínimo em u para uma função contínua em $u \in \mathbf{U}$ e $v \in \mathbf{W}$ (BAŞAR; BERNHARD, 2008, p. 33).

As seguintes proposições, se satisfeitas, atestam a unicidade da solução de ponto de sela.

Proposição 2.5 (BAŞAR; BERNHARD, 2008, p. 36) *Sejam \mathbf{U}, \mathbf{W} conjuntos compactos, e o funcional $J(u, v)$ contínuo no par (u, v) . Então existe um ponto de sela na política de controle $\text{Min} - \text{Max}$.*

Proposição 2.6 (BAŞAR; BERNHARD, 2008, p. 36) *Em adicional a Proposição 2.5, sejam \mathbf{U} e \mathbf{W} conjuntos convexos, $J(u, v)$ função convexa em $u \in \mathbf{U}$ para todo $v \in \mathbf{W}$ e concava em $v \in \mathbf{W}$ para todo $u \in \mathbf{U}$. Então existe um ponto de sela. Se, além disso, $J(u, v)$ é do tipo estritamente convexa-concava, o ponto de sela é solução única.*

Sob o ponto de vista do controle por norma H_∞ , o contexto dos jogos diferenciais pode ser claramente adaptado ao CSVIU, uma vez que ambas as modelagens tem sua inspiração em cenários advindos das ciências econômicas. Esta conexão haverá de ser percebida particularmente na Seção 5.2, em que se desenvolve a solução do problema de controle CSVIU por norma H_∞ .

Importante destacar ainda que, embora a norma H_∞ de um sistema linear seja originalmente caracterizada no domínio da frequência, em uma caracterização no domínio do tempo, as equações do tipo Riccati que surgem naturalmente em jogos diferenciais desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da solução do problema de controle.

3 Estabilidade e Observabilidade do Sistema

Neste capítulo são introduzidas as noções de α -estabilidade e estabilidade estocástica, estes conceitos de estabilidade serão adotados como pré-requisitos ao projeto de controladores CSVIU por normas H_2 e H_∞ . Aqui, a noção de observabilidade adequada ao problema de norma CSVIU e também algumas convenções adotadas ao longo de todo o texto são formalizadas. Na Seção 3.1 é definido o conjunto das matrizes de observabilidade para sistemas CSVIU e, por vias da noção de observabilidade apresentada, é estabelecida a conexão entre a finitude das medidas de energia em (2.76), (2.79) e a estabilidade do sistema nos sentidos pretendidos.

A princípio, considere o seguinte processo não controlado a tempo discreto advindo da abordagem CSVIU,

$$x(k+1) = Ax(k) + (\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x(k)|))\varepsilon^x(k) + \sigma\omega(k), \quad x(0) = x \quad (3.1)$$

em que o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é dado. Este é definido no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) equipado com a filtragem $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N}\}$. De maneira geral, adota-se a seguinte notação de base estocástica: $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$.

Para qualquer processo $\{\mathcal{F}_k\}$ -mensurável e n -dimensional definido em $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$, digamos $k \rightarrow y(k)$ com $k \in \mathbb{N}$, considere as medidas de energia média pertencentes ao espaço $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definidas por (2.76) e (2.79) em que $E_x[\cdot]$ é a forma compacta de denotar a esperança condicional $E[\cdot | \mathcal{F}_0]$. Em concordância com a natureza persistente da excitação produzida pelo ruído em (3.1), a medida proposta em (2.76) adota uma forma descontada enquanto que aquela apresentada em (2.79) é melhor relacionada com a potência média do processo $y(\cdot)$.

Agora, considere adicionar ao sistema em (3.1) uma saída de interesse, e seja o sistema completo abaixo,

$$\Theta := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + \sigma(x(k))\omega_0(k), \\ y(k) = Cx(k), \quad x(0) = x, \end{cases} \quad (3.2)$$

tal que

$$\sigma(x) = [\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x|) \quad \sigma] \in \mathbb{R}^{n \times n+r} \quad (3.3)$$

e $\omega_0(k) = [\varepsilon^x(k) \quad \omega(k)]^\top$ é um vetor de “ruído branco” cujos elementos formam uma sequência *i.i.d.* de média nula e $\text{Cov}(\omega_0) = I_{n+r}$.

Duas possíveis normas de interesse estão definidas em (2.76) e (2.79) respectivamente ao se tomar

$$\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot)) \quad \text{com} \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_2(y(\cdot)). \quad (3.4)$$

Um conceito essencial em sistemas dinâmicos é o de estabilidade, aqui entenda-se estabilidade no sentido estocástico. Considere as duas noções de estabilidade para Θ a serem utilizadas nessa monografia:

Definição 3.1 (*α -estabilidade*) *O sistema estocástico é α -estocasticamente estável se a medida $\mathcal{E}_2^\alpha(x(\cdot)) < \infty$ para todo $x(0) = x \in \mathbb{R}^n$.*

Definição 3.2 (*Estabilidade estocástica*) *O sistema estocástico é estável no sentido estocástico se a medida $\mathcal{E}_2(x(\cdot)) < \infty$ para todo $x(0) = x \in \mathbb{R}^n$.*

A comprovação da condição proposta na Definição 3.1 implica em que a estabilidade do sistema se mantém no sentido de que a sequência $(\sqrt{\alpha^k}x(k))_{k \geq 0}$ converge a zero na média quadrática a medida que k tende a infinito. Desta forma, ao dizer que o sistema Θ é α -estocasticamente estável, tem-se que a série infinita em (2.76) é convergente.

Por sua vez, a ideia de um sistema estocasticamente estável (Definição 3.2) está conectada a finitude da potência de saída do sistema. Um critério de estabilidade similar é apresentado em (SOONG, 1973, p. 257), em que o sistema é dito estável em média quadrática se $\lim_{t \rightarrow \infty} E|x(t)x^\top(t)| < M$, onde M é uma matriz quadrada constante cujos elementos são finitos. Este critério implica em que toda entrada limitada em média quadrática leva a uma saída limitada em média quadrática.

É importante salientar que as noções de estabilidade definidas acima são distintas da noção de estabilidade quase certa (ou com probabilidade um) considerada em (PEDROSA *et al.*, 2019). Isto porque, apesar das similaridades existentes entre o problema de custo médio quadrático descontado (2.29) tratado na referência citada, e o problema de norma H_2 descontada (tópico a ser tratado posteriormente nesta dissertação) para sistemas CSVIU, a estabilidade quase certa impõe forte exigência de positividade com relação a matriz C da saída medida do sistema no sentido de que não apenas a condição de positividade $Q = C^\top C \succ 0$ deve ser atendida, mas também a condição $(Q - NR^{-1}N^\top) \succ 0$ deve ser evidenciada. As Definições 3.1 e 3.2 no entanto permitem relaxar a condição sobre a matriz Q admitindo $Q \succeq 0$.

Seja a coleção de 3^n vetores distintos $s_i = [\bar{s}_1 \ \dots \ \bar{s}_n]^\top$ em que cada \bar{s}_j é tomado do conjunto $\{-1, 0, +1\}$, seguindo uma ordem arbitrária para $i \in \{1, \dots, 3^n\}$.

Considere ainda a função sinal $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \{-1, 0, +1\}^n$ tal que, para $x = [x_1 \ \cdots \ x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{S}(x) = [\bar{s}_1 \ \cdots \ \bar{s}_n]^\top \quad (3.5)$$

com $\bar{s}_j = \text{sign}(x_j)$, $j = 1, \dots, n$, em que por convenção $\text{sign}(0) = 0$. Ademais, indica-se para cada vetor s_i o conjunto $\mathbb{O}_i \subset \mathbb{R}^n$ tal que se $x \in \mathbb{O}_i$ então $\mathcal{S}(x) = s_i$. Se $s_i = [\bar{s}_1 \ \cdots \ \bar{s}_n]^\top$ e cada $\bar{s}_j \neq 0$ então \mathbb{O}_i é o i -ésimo hiperoctante aberto do \mathbb{R}^n sobre a ordem escolhida.

Para qualquer matriz $U \in S^{n+}$, reproduzem-se aqui os operadores $\mathcal{Z}_x(U)$, $\mathcal{W}_x(U)$ estabelecidos em (2.33) e define-se o operador $\varpi : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ por,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_x(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top U \bar{\sigma}_x), \\ \mathcal{W}_x(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top U \sigma_x + \sigma_x^\top U \bar{\sigma}_x), \\ \varpi(U) &= \text{tr}\{U(\sigma\sigma^\top + \sigma_x\sigma_x^\top)\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

juntamente com $\mathcal{L}^\alpha : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\mathcal{L}^\alpha(U) = \alpha(A^\top U A + \mathcal{Z}_x(U)) \quad \text{para } 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (3.7)$$

em que $\mathcal{L}^1(U) = \mathcal{L}(U)$.

Uma questão importante em controle estocástico é como o desempenho de um sistema, aferido em termos de uma medida da energia média da saída, está relacionado com a estabilidade deste sistema. Uma vez que o problema de norma esteja bem definido deseja-se garantir que a finitude desta norma implique na estabilidade do sistema. Desta forma, se deseja conectar a finitude de medidas tais como $\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot))$ ou $\mathcal{E}_2(y(\cdot))$ com as correspondentes noções de estabilidade α -estocástica ou estabilidade estocástica do sistema. Tendo isto em mente designe,

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)) := E_x \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] \quad (3.8)$$

para algum $T > 0$, e considere a seguinte definição.

Definição 3.3 (Noções de observabilidade) (i) O sistema estocástico Θ é (C, \mathcal{L}^α) -observável, ou simplesmente α -observável se existe k^0 , x^0 e $\xi > 0$ tal que $\mathcal{E}_2^{\alpha, k^0}(y(\cdot)) \geq \xi \|x - x^0\|^2$ para algum $x(0) = x \in \mathbb{R}^n$ e todo $k \geq k^0$.

(ii) O sistema estocástico Θ é (C, \mathcal{L}) -observável, ou simplesmente observável se existe k^0 , x^0 e $\xi > 0$ tal que $\mathcal{E}_2^{k^0}(y(\cdot)) \geq \xi \|x - x^0\|^2$ para algum $x(0) = x \in \mathbb{R}^n$ e todo $k \geq k^0$.

Para o sistema Θ , denote ainda a probabilidade,

$$p_{ji}(x(k)) := P(\mathcal{S}(x(k+1)) = s_j | x(k) \in \mathbb{O}_i) \quad (3.9)$$

e então,

$$E[\mathcal{S}(x_{k+1}) = s_j | \mathcal{S}(x_k) = s_i] = \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x(k)) s_j. \quad (3.10)$$

Seja L_k , ℓ_k e r_k , $0 \leq k \leq T$, definidas respectivamente pelas seguintes equações a diferenças,

$$L_{k+1} := \mathcal{L}^\alpha(L_k) + C^\top C, \quad L_0 = 0, \quad (3.11a)$$

$$\ell_{k+1} := \alpha(\ell_k + \varpi(L_k)), \quad \ell_0 = 0, \quad (3.11b)$$

em que $s_i = \mathcal{S}(x_k)$,

$$\sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k)(r_{k+1} \cdot s_j) = r_{k+1}^0 \cdot s_i, \quad r_T = 0, \quad (3.11c)$$

com

$$\alpha A^\top r_{k+1}^0 + \alpha \mathcal{W}_{x_d}(L_{T-k+1}) - r_k = 0, \quad (3.12)$$

para todo $0 \leq k \leq T$. Note que $L(\cdot)$ e $\ell(\cdot)$ são unicamente definidos e independentes da trajetória dos estados do processo em (3.1).

Com relação a equação (3.12), dado que x_k representa o estado atual do sistema (3.2) não existe portanto indeterminação quanto ao valor do vetor sinal $\mathcal{S}(x_k) = s_i$ no instante k . Em outras palavras, $P(\mathcal{S}(x(k)) = s_j | x(k) \in \mathbb{O}_i) = 0$ para todo $j \neq i$. Portanto tem-se $r_k^0 \equiv r_k$.

Lema 3.1 Para todo $x(0) = x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)) = \|x\|_{L_{T+1}}^2 + \langle E[r_0], |x| \rangle + \ell_{T+1}. \quad (3.13)$$

Para $L(\cdot)$, $r(\cdot)$ e $\ell(\cdot)$ dados por (3.11).

Prova Considere a função

$$\phi(k, x_k) := \alpha^k (x_k^\top P_k x_k + \langle r_k, |x_k| \rangle + g_k),$$

para algum $k \rightarrow P_k = P_k^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \rightarrow r_k \in \mathbb{R}^n$, escalar $k \rightarrow g_k$ e para $k \rightarrow x_k$, o vetor de estados do sistema Θ . Assumindo que $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mencionados acima, satisfazem as seguintes equações

$$\alpha A^\top P_{k+1} A + \alpha \mathcal{Z}_x(P_{k+1}) - P_k + C^\top C = 0 \quad (3.14a)$$

$$r_{k+1} := \begin{cases} \alpha A^\top r_{k+1}^0 + \alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k = 0, \\ \text{e para } \mathcal{S}(x_k) = s_i, \quad \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k)(s_j \cdot r_{k+1}) = s_i \cdot r_{k+1}^0 \end{cases} \quad (3.14b)$$

$$\alpha g_{k+1} + \alpha \varpi(P_{k+1}) - g_k = 0 \quad (3.14c)$$

Tendo em mente as relações, $\text{tr}\{U \cdot \text{diag}(|x|)\} = \mathcal{S}(x)^\top \text{Diag}(U)x$, $\langle v, |x| \rangle = \langle \mathcal{S}(x), v \cdot x \rangle$, em que $U \in S^{n+}$ e $v, x \in \mathbb{R}^n$, juntamente com a equação dinâmica do sistema Θ , tem-se a seguinte avaliação,

$$\begin{aligned} & \alpha^{-k} (\phi(k+1, x_{k+1}) - \phi(k, x_k)) \\ &= \alpha \|x_{k+1}\|_{P_{k+1}}^2 + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot x_{k+1} \rangle + \alpha g_{k+1} - (\|x_k\|_{P_k}^2 + \langle s_k, r_k \cdot x_k \rangle + g_k) \\ &= \alpha \|Ax_k\|_{P_{k+1}}^2 - \|x_k\|_{P_k}^2 + 2\alpha (Ax_k)^\top P_{k+1} \sigma(x_k) \omega_{0_k} \\ & \quad + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (Ax_k + \sigma(x_k) \omega_{0_k}) \rangle - \langle s_k, r_k \cdot x_k \rangle \\ & \quad + \alpha g_{k+1} - g_k + \alpha \|\sigma(x_k) \omega_{0_k}\|_{P_{k+1}}^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que $s_{k+1} = \mathcal{S}(x_{k+1})$ e $s_k = \mathcal{S}(x_k)$. Fazendo $x_k = x$ e $\omega_0 = \omega_{0_k}$ note que

$$\begin{aligned} E[\|\sigma(x) \omega_0\|_U^2] &= \text{tr}\{\text{Diag}(U \sigma(x) \sigma(x)^\top)\} \\ &= x^\top \mathcal{Z}_x(U)x + \text{tr}\{\mathcal{W}_x(U) \text{diag}(|x|)\} + \varpi(U) \\ &= \|x\|_{\mathcal{Z}_x(U)}^2 + \langle \mathcal{S}(x), \mathcal{W}_x(U)x \rangle + \varpi(U). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Então,

$$\begin{aligned} & \alpha^{-k} (\phi(k+1, x_{k+1}) - \phi(k, x_k)) \\ &= \alpha (\|Ax_k\|_{P_{k+1}}^2 + \|x_k\|_{\mathcal{Z}_x(P_{k+1})}^2) - \|x_k\|_{P_k}^2 \\ & \quad + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (Ax_k) \rangle + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle \\ & \quad + \alpha g_{k+1} + \alpha \varpi(P_{k+1}) - g_k + m_k \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$m_k = 2\alpha (Ax_k)^\top P_{k+1} \sigma(x_k) \omega_{0_k} + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot \sigma(x_k) \omega_{0_k} \rangle, \quad (3.18)$$

em que o processo m_k representa todos os termos omitidos tal que $E[m_k] = 0$.

Tendo em mente que se $s_k = \mathcal{S}(x_k) = s_i$,

$$\begin{aligned} & \alpha A^\top r_{k+1}^0 + \alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k = 0, \\ & \text{e } r_{k+1} \text{ é tal que } \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) (r_{k+1} \cdot s_j) = r_{k+1}^0 \cdot s_i, \end{aligned} \quad (3.19)$$

tem-se então,

$$\begin{aligned}
 & E[\langle s_{k+1}, \alpha r_{k+1} \cdot (Ax_k) \rangle + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle | \mathcal{S}(x_k) = s_i] \\
 &= \alpha \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) \langle s_j, r_{k+1} \cdot (Ax_k) \rangle + \langle s_i, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle \\
 &= \alpha \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) \langle s_j, \text{diag}(r_{k+1}) Ax_k \rangle - \alpha \langle A^\top r_{k+1}^0 \cdot s_i, x_k \rangle \\
 &= \alpha \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) \langle A^\top (r_{k+1} \cdot s_j), x_k \rangle - \alpha \langle A^\top r_{k+1}^0 \cdot s_i, x_k \rangle = 0.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Agora, por (3.14), (3.17) e (3.20) tem-se que

$$E[\phi(k+1, x_{k+1}) - \phi(k, x_k) | x_k] = -\alpha^k E[\|y(k)\|^2] \tag{3.21}$$

e uma vez que o processo Θ é markoviano,

$$E[\phi(T, x_T) - \phi(0, x_0)] = -E\left[\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k \|y(k)\|^2\right]. \tag{3.22}$$

Pode-se reescrever (3.22) por,

$$E_{x_0}[\|x_0\|_{P_0}^2 + \langle r_0, |x_0| \rangle + g_0] = E_{x_0}\left[\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k \|y(k)\|^2\right] + \alpha^k E_{x_0}[\|x_T\|_{P_T}^2 + \langle r_T, |x_T| \rangle + g_T]. \tag{3.23}$$

Note ainda que (3.14a) e (3.14c) são equações que independem a trajetória do processo, portanto suas soluções são únicas. Fazendo $P_T = L_0 = 0$ e $g_T = \ell_0 = 0$ uma “reversão temporal” é introduzida e, as equações (3.14a) e (3.14c) podem ser escritas equivalentemente por,

$$\begin{aligned}
 L_{k+1} &= \alpha A^\top L_k A + \alpha \mathcal{Z}_x(L_k) + C^\top C, \quad L_0 = 0, \\
 \ell_{k+1} &= \alpha \ell_k + \alpha \varpi(L_k), \quad \ell_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

com isto, a primeira expressão em (3.14b) pode ser escrita por

$$\alpha A^\top r_{k+1}^0 + \alpha \mathcal{W}_{x_d}(L_{T-k+1}) - r_k = 0 \quad , \text{ em que } r_T = 0.$$

Finalmente, por (3.22) e (3.24) tem-se que

$$E_x[\phi(0, x) - \phi(T, x_T)] = E_x\left[\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k \|y(k)\|^2\right] = \|x\|_{L_T}^2 + E_x[\langle r_0, |x| \rangle] + \ell_T, \tag{3.25}$$

o que leva à representação final.

□

Nota 3.1 Por (3.11) tem-se que os operadores $\mathcal{L}^\alpha(U)$ e $\varpi(U)$ possuem a característica de preservar o sinal da matriz U no sentido semidefinido positivo. Por definição $\mathcal{E}_2^{\alpha,T}(y(\cdot)) \geq 0$ e o Lema 3.1 indica que se $L_k \succ 0$ então $\mathcal{E}_2^{\alpha,T}(y(\cdot)) > 0$, para todo T suficientemente grande, exceto talvez por uma condição inicial $x_0 = \bar{x}$ que dependa do horizonte T . A seguir, introduz-se condições que garantem a positividade da matriz L_T para T suficientemente grande.

3.1 Observabilidade e finitude da norma

Uma vez que \mathcal{L}^α é um operador linear, a solução de (3.11a) pode ser escrita por

$$L_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathcal{L}^\alpha)^i (C^\top C). \quad (3.26)$$

Em conexão, introduz-se o conjunto de matrizes de observabilidade $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n}$ do sistema Θ , definidas por

$$\mathcal{O} := [O(0) \ O(1) \ \dots \ O(n-1)]^\top, \quad (3.27)$$

onde cada $O(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida como

$$O(k) := (\mathcal{L}^\alpha)^k (C^\top C). \quad (3.28)$$

O conjunto das matrizes de observabilidade \mathcal{O} é análogo ao das matrizes de observabilidade para sistemas lineares determinísticos surgindo no contexto estudado por (ZABCZYK, 1995).

Lema 3.2 A matriz \mathcal{O} possui Posto completo se e somente se $L_k \succ 0$ para todo $k \geq n-1$.

Prova Suponha inicialmente que L_k não seja definida positiva para $k \geq n-1$ e assuma que existe $\eta \geq n-1$ e x , tal que $x^\top L_\eta x = 0$. Note que

$$L_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathcal{L}^\alpha)^i (C^\top C) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i(k) (\mathcal{L}^\alpha)^i (C^\top C) \quad (3.29)$$

onde cada $\gamma_i(\cdot)$ é uma função escalar. Então, se para algum $\eta \geq n-1$, $x^\top L_\eta x = 0$, tem-se que $x^\top (\mathcal{L}^\alpha)^{i-1} (C^\top C) x = 0$ para $i = 1, \dots, n$, ou equivalentemente $x \in \mathcal{N}(\mathcal{O})$, o que implica que $\mathcal{N}(\mathcal{O}) \neq \emptyset$.

Reciprocamente, se $L_k \succ 0$ para $k > n-1$, (3.29) implica que $x^\top (\mathcal{L}^\alpha)^{i-1} (C^\top C) x > 0$ para algum $i = 1, \dots, n$ e $x \in \mathbb{R}^n$, o que é equivalente a $\mathcal{N}(\mathcal{O}) = \emptyset$. \square

Para checar se o sistema Θ é tal que (C, \mathcal{L}^α) é α -observável, o leitor pode avaliar se a matriz de observabilidade \mathcal{O} em (3.27) possui posto completo.

Teorema 3.1 *Suponha que o sistema Θ é tal que (C, \mathcal{L}^α) é α -observável para algum $\alpha \geq 0$. Então, existe $\varrho_T > 0$ tal que*

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, T}(x(\cdot)) \leq \varrho_T \mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)), \quad \forall x_0 = x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.30)$$

Portanto se $\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot)) < \infty$, o sistema Θ é α -estocasticamente estável. Mais ainda, se $\mathcal{E}_2(y(\cdot)) < \infty$, o sistema Θ é estocasticamente estável.

Prova Se Θ é tal que (C, \mathcal{L}^α) é α -observável, \mathcal{O} possui posto completo e pelo Lema 3.2 $L_k \succ 0, \forall k \geq n - 1$. Em conjunto com o Lema 3.1 tem-se a representação,

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, n-1}(y(\cdot)) = \|x\|_{L_n}^2 + \langle E_x[r_0^{(n)}], |x| \rangle + \ell_n \geq 0 \quad (3.31)$$

$\forall x_0 = x \in \mathbb{R}^n$ com $L_n \succ 0$. Denote $r_0 = r_0^{(n)}$ para enfatizar sua dependência com respeito ao horizonte $n - 1$ e por definição o vetor aleatório $r_0^{(n)}$ é limitado. Denote também $\vartheta^x = \mathcal{S}(x) \cdot E_x[r_0^{(n)}]$ a fim de escrever (3.31) equivalentemente por

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, n-1}(y(\cdot)) = \|L_n x + \frac{1}{2} \vartheta^x\|_{L_n}^2 - \frac{1}{4} \|\vartheta^x\|_{L_n}^2 + \ell_n \quad (3.32)$$

$\forall x_0 = x \in \mathbb{R}^n$. Uma vez que por definição $\mathcal{E}_2^{\alpha, k}(y(\cdot)) \geq 0, \forall k > 0$ e $\forall x_0 = x \in \mathbb{R}^n$, (3.32) mostra que

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, k}(y(\cdot)) > 0 \quad (3.33)$$

exceto talvez para algum ponto $x_0 = \bar{x}$ que dependa do horizonte $n - 1$. Para completar a prova, necessitamos do próximo resultado.

Lema 3.3 *Considere que o sistema Θ é (C, \mathcal{L}^α) -observável. Então, existe $\tau \geq n - 1$, tal que*

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)) \geq \frac{1}{\tau} E_x \left[\sum_{k=0}^{T-2\tau} \alpha^k \left(\|x_k\|_{L_n}^2 + \langle r_0^{(n)}, |x_k| \rangle + \ell_n \right) \right], \quad (3.34)$$

se mantêm para $T \geq 2\tau$ suficientemente grande e $\alpha > 0$.

Prova Considere de (3.31) que para qualquer $\tau \geq n - 1$

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, \tau}(y(\cdot)) = E_x \left[\sum_{k=0}^{\tau} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] \geq \|x\|_{L_n}^2 + \langle E_x[r_0^{(n)}], |x| \rangle + \ell_n. \quad (3.35)$$

Faça $k^+ = \max\{k : k \cdot \tau \leq T\}$ e para algum $0 \leq j \leq \tau$, escreva

$$\begin{aligned}
 E_x \left[\sum_{i=0}^T \alpha^i \|y(i)\|^2 \right] &\geq E_x \left[\sum_{k=0}^{k^+-2} \left(\sum_{i=j+k\tau}^{j+(k+1)\tau} \alpha^i \|y(i)\|^2 \right) \right] \\
 &= E_x \left[\sum_{k=0}^{k^+-2} E \left[\sum_{i=j+k\tau}^{j+(k+1)\tau} \alpha^i \|y(i)\|^2 \middle| \mathcal{F}_{j+k\tau} \right] \right] \\
 &\geq E_x \left[\sum_{k=0}^{k^+-2} \alpha^{j+k\tau} E \left[\|x_{j+k\tau}\|_{L_n}^2 + \langle E_{x_{j+k\tau}}[r_0^{(n)}], |x_{j+k\tau}| \rangle + \ell_n \middle| \mathcal{F}_{j+k\tau} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Somando sobre j em ambos os lados no intervalo $0, \dots, \tau - 1$ a expressão acima produz,

$$\begin{aligned}
 \tau E_x \left[\sum_{i=0}^T \alpha^i \|y(i)\|^2 \right] &\geq \\
 E_x \left[\sum_{k=0}^{k^+-2} \sum_{j=0}^{\tau-1} \alpha^{j+k\tau} \left(\|x_{j+k\tau}\|_{L_n}^2 + \langle r_0^{(n)}, |x_{j+k\tau}| \rangle + \ell_n \right) \right] & \\
 = E_x \left[\sum_{k=0}^{(k^+-1)\tau} \alpha^k \left(\|x_k\|_{L_n}^2 + \langle r_0^{(n)}, |x_k| \rangle + \ell_n \right) \right] & \\
 \geq E_x \left[\sum_{k=0}^{T-2\tau} \alpha^k \left(\|x_k\|_{L_n}^2 + \langle r_0^{(n)}, |x_k| \rangle + \ell_n \right) \right] &
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

e o Lema está provado. □

Retornando a prova do Teorema 3.1, pelo Lema 3.3 juntamente com (3.31) e (3.32), tem-se que

$$\begin{aligned}
 E_x \left[\sum_{i=0}^T \alpha^i \|y(i)\|^2 \right] &\geq \frac{1}{2\delta} E_x \left[\sum_{k=0}^{T-\delta} \alpha^k \left(\|x_k\|_{L_n}^2 + \langle r_0^{(n)}, |x_k| \rangle + \ell_n \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\delta} E_x \left[\sum_{k=0}^{T-\delta} \alpha^k \left(\|L_n x_k + \frac{1}{2} \vartheta_k^x\|_{L_n^{-1}}^2 - \frac{1}{4} \|\vartheta_k^x\|_{L_n^{-1}}^2 + \ell_n \right) \right] \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

com $\vartheta_k^x = \mathcal{S}(x_k) \cdot E_{x_k}[r_0^{(n)}]$ e $\delta = 2\tau$. Note pela definição de r_0 em (3.14b) que $\|r_0^{(n)}\|^2$ é limitado e, portanto, ϑ_k^x é limitado para cada x_k , então existe $\varrho_T > 0$ tal que

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, T}(x(\cdot)) \leq \varrho_T \mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)), \quad \forall x_0 = x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.39}$$

Agora, se

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} E_x \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] < \infty \tag{3.40}$$

então

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} E_x \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \left(\|L_n x_k + \frac{1}{2} \vartheta_k^x\|_{L_n^{-1}}^2 \right) \right] < \infty, \tag{3.41}$$

implicando que $\limsup_{T \rightarrow \infty} E_x[\sum_{k=0}^T \alpha^k \|x_k\|^2] < \infty$, ou de forma equivalente, se $\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot)) < \infty$ implica que $\mathcal{E}_2^\alpha(x(\cdot)) < \infty$, o qual é equivalente a estabilidade α -estocástica.

Para o caso não descontado, faça $\alpha = 1$, e os cálculos em Lema 3.3 podem ser refeitos de forma a obter expressão similar a (3.34),

$$\mathcal{E}_2^T(y(\cdot)) \geq \frac{1}{\tau} E_x \left[\sum_{k=0}^{T-2\tau} \left(\|x_k\|_{L_n}^2 + \langle r_0^{(n)}, |x_k| \rangle + \ell_n \right) \right], \quad (3.42)$$

e logo, se $\mathcal{E}_2(y(\cdot)) < \infty$ então

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} E_x \left[\frac{1}{T} \sum_{k=0}^T \left(\|L_n x_k + \frac{1}{2} \vartheta_k^x\|_{L_n^{-1}}^2 \right) \right] < \infty, \quad (3.43)$$

implicando que $\mathcal{E}_2(x(\cdot)) < \infty$ e que o sistema Θ é estocasticamente estável.

□

Corolário 3.1 (i) *Suponha que o sistema Θ seja (C, \mathcal{L}^α) -observável para algum $0 \leq \alpha < 1$. Então, se $\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot)) < \infty$, o sistema Θ é α -estocasticamente estável.*

(ii) *Se Θ é (C, \mathcal{L}) -observável e $\mathcal{E}_2(y(\cdot)) < \infty$, o sistema Θ é estável no sentido estocástico.*

A (C, \mathcal{L}^α) -observabilidade conecta a finitude de medidas de energia do tipo $\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot))$ para algum $0 \leq \alpha \leq 1$ com a correspondente noção de estabilidade α -estocástica do sistema Θ . Note que, no caso da asserção (i) ser verdadeira, $k \rightarrow E[\|y(k)\|^2]$ não cresce em uma taxa geometricamente maior que $k \rightarrow \alpha^{-k}$ e a noção de estabilidade α -estocástica assegura que o processo $k \rightarrow \sqrt{\alpha^k} x(k)$ satisfaça a mesma limitação na taxa de crescimento. A estabilidade α -estocástica implica em $\sqrt{\alpha^k} x(k) \rightarrow 0$ no sentido de média quadrática, e.g. (SOONG, 1973).

A (C, \mathcal{L}) -observabilidade conecta a finitude de medidas como $\mathcal{E}_2(y(\cdot))$ e a estabilidade de Θ no sentido estocástico. Esta noção de estabilidade implica potência finita (ou energia média) do sistema Θ , de forma que $\limsup_{\tau \rightarrow \infty} E[\|x(\tau)\|^2] \leq c < \infty$.

Tais condições sobre o sistema Θ podem ser verificadas da seguinte maneira.

Corolário 3.2 (i) *O sistema Θ é (C, \mathcal{L}^α) -observável se e somente se $\mathcal{O} = [(\mathcal{L}^\alpha)^k (C^\top C), k = 0, \dots, n-1]$ possui posto completo de colunas. Neste caso $\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot)) < \infty$ implica estabilidade α -estocástica do sistema Θ .*

(ii) *O sistema Θ é (C, \mathcal{L}) -observável se e somente se $\mathcal{O} = [(\mathcal{L})^k (C^\top C), k = 0, \dots, n-1]$ possui posto completo de colunas. Neste caso $\mathcal{E}_2(y(\cdot)) < \infty$ implica estabilidade estocástica do sistema Θ .*

Em resumo, a Definição 3.3 fornece noções de observabilidade indissociáveis das medidas de energia (2.76) e (2.79). O conjunto das matrizes de observabilidade introduzidas em (3.27) juntamente com o Lema 3.2 estabelecem uma correspondência com o teste de posto para matrizes de observabilidade clássico para o caso determinístico. A partir da hipótese de α -observabilidade (observabilidade) e finitude das medidas de energia consideradas, o Teorema 3.1 conclui a estabilidade α -estocástica (estabilidade estocástica) do sistema. O Corolário 3.2 conecta a completude do posto da matriz \mathcal{O} com a observabilidade do sistema estocástico e, com base no teorema anterior, estabelece que a finitude da energia do sinal de saída exógena do sistema implica estabilidade do mesmo no sentido pretendido.

4 Norma \mathcal{H}_2 CSVIU

Neste capítulo o problema de controle CSVIU em norma H_2 será solucionado. As Seções 4.1 e 4.2 se encarregam de analisar as condições de existência da norma-2 descontada e a longo prazo para o sistema CSVIU não controlado (3.2). Por sua vez, a Seção 4.3 introduz uma variável de controle ao sistema (3.2) e retrata a minimização das medidas de energia (2.76) e (2.79) como um problema de otimização na variável de controle. A Seção 4.3 é subdividida em duas Subseções. A primeira soluciona o problema de controle CSVIU via minimização da norma H_2 descontada, a segunda se encarrega de solucionar o caso de controle CSVIU em norma H_2 a longo prazo.

4.1 O caso descontado em norma \mathcal{H}_2 : Análise

Considere o sistema Θ em (3.2), a sua saída $y(k) = Cx(k)$, $k \geq 0$ é conectada à medição $\mathcal{E}_2^{\alpha,T}$ dada em (3.8) assumindo que o sistema é (C, \mathcal{L}^α) -observável, ver Definição 3.3. Recorde ainda os operadores dados em (3.6) e (3.7).

Proposição 4.1 (*Norma H_2 descontada*) *Suponha que $L^\alpha \in S^{n+}$ seja a solução única de (4.7). Se o par (C, \mathcal{L}^α) é α -observável, então o sistema Θ é α -estocasticamente estável e sua norma H_2 descontada é dada por*

$$\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot)) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \varpi(L^\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{tr}\{L^\alpha(\sigma\sigma^\top + \sigma_x\sigma_x^\top)\}. \quad (4.1)$$

Prova Defina a função quadrática $\mathcal{G}^\alpha(x) := \|x\|_{L_T^\alpha}^2 + \langle E[r_0], |x| \rangle + \ell_T^\alpha$, obtida a partir do Lema 3.1 para algum $T > 0$. A partir desta, tem-se que é possível representar a medida de energia $\mathcal{E}_2^{\alpha,T}(y(\cdot))$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2^{\alpha,T}(y(\cdot)) &= E\left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \|y(k)\|^2\right] = E\left[\sum_{k=0}^T \alpha^k (\mathcal{G}^\alpha(x_k) - \alpha \mathcal{G}^\alpha(x_{k+1}))\right] \\ &= \mathcal{G}^\alpha(x_0) - E[\alpha^T \mathcal{G}^\alpha(x_T)] \quad \text{para } T < \infty. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dado o processo em (3.1) então $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N}\}$ é sua filtração natural em que $\mathcal{F}_n := \sigma(x_k | k \leq n)$ denota a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots, x_n . Assim sendo $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, e ao tomar o limite em T na expressão (4.2), tem-se

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E}_2^{\alpha,T}(y(\cdot)) = \mathcal{G}^\alpha(x_0) - E[\alpha f(x_1) + \alpha^2 f(x_2) + \alpha^3 f(x_3) + \dots] \quad (4.3)$$

em que $E[f(x_k)] = E[f(x_k)|x_{k-1}, \dots, x_0] = E[\mathcal{G}^\alpha(x_k) - \mathcal{G}^\alpha(x_k)|x_{k-1}, \dots, x_0]$. Assumindo agora que o processo é markoviano tem-se

$$E[f(x_k)|x_{k-1}, \dots, x_0] = E[f(x_k)|x_{k-1}]. \quad (4.4)$$

Agora, pelo Corolário 3.1 a α -observabilidade e a finitude da medida $\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot))$ implicam que $\mathcal{E}_2^\alpha(x(\cdot)) < \infty$ (α -estabilidade). Sob estas hipóteses o limite da série telescópica em (4.3) existe e sua convergência ocorre em média para $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)) = \mathcal{G}^\alpha(x_0)$, isto é

$$\mathcal{G}^\alpha(x_0) := \|x_0\|_{L^\alpha}^2 + \langle E[r_0], |x_0| \rangle + \ell^\alpha \quad (4.5)$$

com $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ determinístico. Por fim, para obter a norma H_2 descontada do sistema estocástico em (3.2), basta tomar $x_0 = 0$ e deste modo ficamos com

$$E_x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] = \frac{\alpha}{1-\alpha} \varpi(L^\alpha) < \infty \quad (4.6)$$

corroborando com a definição de estabilidade α -estocástica, como desejamos provar.

□

É evidente que, se a equação perturbada de Lyapunov

$$\alpha A^\top U A - U + \alpha \mathcal{Z}_x(U) + C^\top C = 0 \iff \mathcal{L}^\alpha(U) + C^\top C = 0 \quad (4.7)$$

admite uma única solução $U \in S^{n+}$ definida positiva para algum $0 < \alpha < 1$, então a equação

$$\ell^\alpha(1-\alpha) = \alpha \varpi(U) \quad (4.8)$$

admite solução única $\ell^\alpha \geq 0$. E mais, o vetor de norma limitada r_0 é obtido de forma retroativa no tempo a partir de um estágio $T > 0$ com $r_T = 0$. Desta forma, tem-se que

$$\begin{aligned} r_k &= \alpha A^\top r_{k+1}^0 + \alpha \mathcal{W}_{x_d}(L_{T-k+1}) \\ \text{com } \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k)(r_{k+1} \cdot s_j) &= r_{k+1}^0 \cdot s_i, \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que $p_{ji}(x_k) = P(\mathcal{S}(x(k+1)) = s_j | x(k) \in \mathbb{O}_i)$ denotando a mesma probabilidade definida em (3.9).

Dito isto, perceba que os coeficientes $L^\alpha \in S^{n+}$, $\ell^\alpha \geq 0$ e $r_0 \in \mathbb{R}^n$ da função valor (4.5) são as soluções das respectivas equações (4.7), (4.8) e (4.9).

Nota 4.1 A Proposição 4.1 tem por objetivo estender os resultados do Lema 3.1 para o caso em que o estágio T tende ao infinito. Isto é possível devido à conexão estabelecida

entre a definição de α -estabilidade e a finitude da medida (2.76) para o processo em (3.2). Atente para que, se a α -observabilidade do sistema se mantém para $0 \leq k < T$ (seja qual for o valor de T), então a finitude da medida (2.76) implica em α -estabilidade para o sistema estocástico (3.2) e a existência de uma única solução $L^\alpha \in S^{n+}$ definida positiva advinda da equação tipo Lyapunov em (4.7), em adicional, implica na existência e unicidade do coeficiente $\ell^\alpha \geq 0$ em (4.8).

4.2 Norma \mathcal{H}_2 a longo prazo: Análise

Ao adotar um critério de desempenho descontado tal como em (2.76), sob a hipótese de α -estabilidade o comportamento assintótico do sistema não será levado em consideração. O oposto acontece quando o critério escolhido é de longo prazo como em (2.79). Através deste, a evolução em tempo finito do custo/estado do processo é, de certa forma, completamente irrelevante e o comportamento estável assintótico é desejável, fazendo deste caso matematicamente mais envolvente que o anterior. O critério de desempenho de CMLP apresenta um forte contraste com o de custo descontado uma vez que aquele enfatiza o dispêndio incorrido em termos de um futuro mais longínquo. De fato, as duas abordagens podem ser consideradas dois extremos, em que a primeira captura primariamente o desempenho transitório do sistema e a segunda, a ser desenvolvida nesta seção, se preocupa em capturar o desempenho em um futuro distante, dando ênfase ao comportamento em regime do sistema.

Através da análise do problema de norma H_2 não descontada, objetiva-se aferir o custo médio da ação do controlador tendo em vista um prazo estendido de atuação do processo CSVIU. Para tanto, note que a adoção de um fator de desconto $0 < \alpha < 1$, apesar de fornecer uma necessária noção de estabilidade ao sistema estocástico, limitará sobremaneira a janela de atuação do controlador estabelecendo um limiar para a tomada de decisão sobre o processo. Além disso, a introdução de um fator de desconto apresenta a desvantagem de basear a solução do problema de norma descontada em uma matriz dinâmica cujo raio espectral é forçadamente minorado por $\sqrt{\alpha}$.

A fim de gerar um melhor entendimento do objetivo desta análise, suponha que desejemos minimizar o custo a longo prazo

$$J(x_0, \pi) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\sum_{k=0}^T E\{\|y(k)\|^2\} \right], \quad (4.10)$$

em que o custo ótimo é determinado pela sequência ótima de controle π^* que minimiza a expressão matemática acima e $y(k)$ é a saída exógena do sistema controlado no instante k . A princípio, não é possível garantir a existência do limite em (4.10), e portanto, é de

costume substituir o operador \lim por \limsup ou \liminf , da seguinte forma:

$$\bar{J}(x_0, \pi) := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\sum_{k=0}^T E\{\|y(k)\|^2\} \right] \quad (4.11)$$

ou

$$\underline{J}(x_0, \pi) := \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\sum_{k=0}^T E\{\|y(k)\|^2\} \right] \quad (4.12)$$

com $\pi \in \Pi$. De fato, há de se concluir que $\underline{J} \leq \bar{J}$, porém se for escolhido minimizar o problema (4.12) estaremos diante de uma situação de bastante otimismo uma vez que se deseja minimizar o menor custo esperado. É mais plausível então adotar uma atitude conservadora e buscar minimizar o pior custo esperado, este dado por (4.11) (HERNÁNDEZ-LERMA; LASSERRE, 1996, p. 4).

Dito isto, se faz necessário estudar sobre a existência do limite em (4.10) para a norma H_2 a longo prazo e, com isto, assentar as bases teóricas que permitirão a solução do problema de controle CSVIU via CMLP.

Seja o sistema estocástico em (3.2), a conexão entre a medida de energia em (2.79) e a saída do sistema Θ é estabelecida assumindo que este é (C, \mathcal{L}) -observável (ver Definição 3.3). Dentre as técnicas que podem ser utilizadas na análise do problema de norma H_2 a longo prazo, a mais comum é a abordagem conhecida por “vanish discount”, esta é assim chamada por se basear na convergência de um custo α -descontado, em que $\alpha \uparrow 1$ ($0 < \alpha < 1$) (HERNÁNDEZ-LERMA; PRIETO-RUMEAU, 2008, p. 2). A grosso modo, a ideia é buscar obter a solução do problema de custo não descontado considerando a sequência de problemas de custo descontado relacionados a este ao fazer $\alpha \rightarrow 1$.

Uma vez que a solução de norma a longo prazo passa pela solução de custo descontado, se faz necessário então estabelecer uma conexão entre estas, de tal forma que a partir da segunda se alcance a solução da primeira. Esta necessidade será satisfeita por meio do teorema a seguir, este é de grande importância na análise do critério de custo médio e sua prova pode ser encontrada em (SZNADJER; FILAR, 1992).

Proposição 4.2 (ARAPOSTATHIS et al., 1993, p. 337) (Teorema Tauberiano)

Seja $\{a_k\}_{k \geq 0}$ uma sequência de números não negativos e $\alpha \in (0, 1)$. Então

$$\begin{aligned} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} a_k &\leq \liminf_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k a_k \\ &\leq \limsup_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k a_k \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} a_k. \end{aligned} \quad (4.13)$$

No contexto de séries numéricas, um dos problemas consiste em obter métodos que somem uma dada série finita ou infinita. Em geral, é difícil determinar a soma de

uma série convergente diretamente, ou ainda mais, pode ser desejável atribuir de maneira razoável um valor para a soma de uma possível série divergente. Sendo assim, em muitas aplicações se faz necessário conhecer sob quais condições uma série realmente converge (KOREVAAR, 2004, p. VII). Na matemática, a *Teoria Tauberiana* lida com o problema de achar tais condições e, levando em conta o estudo de Processos de Decisão Markovianos Discretos e Jogos Estocásticos, usualmente os autores que trabalham com o tema buscam estudar condições que demonstrem a relação existente entre os dois métodos de somar uma sequência de custos (métodos descontado e a longo prazo) (SZNADJER; FILAR, 1992, p. 201).

A fim de explicitar a relação pretendida com a Proposição 4.2, considere $a_k = f(x_k, u_k)$ ($u_k \in \pi$) e o funcional de custo $J(x_0, \pi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k E[a_k]$, em que supõe-se a existência de uma sequência de controle π e um estado inicial x_0 satisfazendo $J(x_0, \pi) < \infty$. Defina também que $\bar{J}(x_0, \pi) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[\sum_{k=0}^{T-1} a_k]$. Agora, tomando mão da Proposição 4.2, a terceira desigualdade se transforma em

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) J(x_0, \pi) \leq \bar{J}(x_0, \pi), \quad \forall \pi \in \Pi, \quad x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n \quad (4.14)$$

donde Π representa o conjunto de todas as sequências π admissíveis. Sem mais delongas, suponha que a política ótima de controle π^* existe e tome o ínfimo da expressão acima sobre o conjunto Π para obter

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) J^*(x_0, \pi^*) \leq \bar{J}^*(x_0, \pi^*), \quad \forall x_0 \in X. \quad (4.15)$$

Em outras palavras, se adequadamente a função custo descontado for normalizada, no sentido de que seja multiplicada por $(1 - \alpha)$, então esta se torna um limitante inferior para o critério de CMLP, para valores de α próximos a 1. Observe ainda que a ideia aqui discutida para os funcionais de custo J e \bar{J} pode, sem perda de generalidade, ser estendida para as medidas (2.76) e (2.79).

De fato os próximos resultados desta seção buscam demonstrar que, sob certas condições, a igualdade estrita em (4.13) é satisfeita. Isto indica que para $\alpha = 1$ a série dada pela medida (2.79) é convergente em média e, portanto, a solução do problema de norma H_2 a longo prazo existe para sistemas CSVIU.

Aqui adote a notação $U \succeq V$ ($U \preceq V$), para $U, V \in S^{n+}$ quando $U - V \in S^{n+}$ ($V - U \in S^{n+}$). Seja $\Phi^\alpha : S^{n+} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ operador monótono no sentido de que, se $U \succeq V$, então $\Phi^\alpha(U) \succeq \Phi^\alpha(V)$ ou então $\Phi^\alpha(U) \preceq \Phi^\alpha(V)$. Também, defina $\mathfrak{L}^\alpha : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ por

$$\mathfrak{L}^\alpha(U) = \alpha A^\top U A + \alpha \mathcal{Z}_x(U) + \Phi^\alpha(U), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (4.16)$$

para alguma matriz $U \in S^{n+}$.

Lema 4.1 (Sequência “emergente” de soluções) *Suponha $\alpha_n \uparrow 1$ uma sequência monótona. Seja L^{α_n} , $n \geq 0$ a sequência correspondente de soluções advindas da equação tipo Lyapunov*

$$U = \mathfrak{L}^{\alpha_n}(U) + C^\top C. \quad (4.17)$$

Esta se trata de uma sequência crescente de matrizes no sentido semidefinido positivo. Mais ainda, se existir $L \succ 0$ solução única para

$$U = \mathfrak{L}^1(U) + C^\top C \quad (4.18)$$

então, $L^{\alpha_n} \uparrow L$.

Prova Considere os operadores $\mathcal{Z}_x : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ descrito em (3.6) e $\mathcal{L}^\alpha : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ em (3.7). Note que o operador \mathcal{Z}_x é monótono, no sentido de que, para $U, V \in S^{n+}$ com $U \succeq V$, isto implica que $\mathcal{Z}_x(U) \succeq \mathcal{Z}_x(V)$.

De forma auxiliar, considere o operador $\tilde{\mathfrak{L}}^\alpha : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\tilde{\mathfrak{L}}^\alpha(U, V) = \alpha A^\top U A + \alpha \mathcal{Z}_x(V) + \Phi^\alpha(V). \quad (4.19)$$

Supondo α -observabilidade as soluções de $U = \mathfrak{L}^\alpha(U) + C^\top C$ e $U = \tilde{\mathfrak{L}}^\alpha(U, V) + C^\top C$ para algum $V \in S^{n+}$ são matrizes únicas em S^{n+} para cada $\alpha \geq 0$. Agora, denote por \tilde{L} e L as seguintes soluções:

$$\tilde{\mathfrak{L}}^\alpha(\tilde{L}, V) - \tilde{L} = \mathfrak{L}^\alpha(L) - L = -C^\top C \quad (4.20)$$

e da monotonicidade de \mathcal{Z}_x segue que se $L \succeq V$ implica que

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^\alpha(L) - L - (\tilde{\mathfrak{L}}^\alpha(\tilde{L}, V) - \tilde{L}) &= \tilde{\mathfrak{L}}^\alpha(L, L) - L - (\tilde{\mathfrak{L}}^\alpha(\tilde{L}, V) - \tilde{L}) \\ &= \alpha A^\top (L - \tilde{L}) A - (L - \tilde{L}) + \alpha \mathcal{Z}_x(L - V) + \Phi^\alpha(L) - \Phi^\alpha(V) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

isto implicando que $L \succeq \tilde{L}$.

Analogamente, considere o operador $\bar{\mathfrak{L}}^\alpha : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\bar{\mathfrak{L}}^\alpha(U, V) = \alpha A^\top U A + \alpha \mathcal{Z}_x(V) + \Phi^\alpha(V). \quad (4.22)$$

Então, as soluções \bar{L} e L em

$$\bar{\mathfrak{L}}^\alpha(\bar{L}, V) - V = \mathfrak{L}^\alpha(L) - L = -C^\top C \quad (4.23)$$

são tais que se $L \succeq V$ isto implica que

$$\mathfrak{L}^\alpha(L) - L - (\bar{\mathfrak{L}}^\alpha(\bar{L}, V) - V) = \mathcal{L}^\alpha(L - \bar{L}) - (L - V) + \Phi^\alpha(L) - \Phi^\alpha(\bar{L}) = 0, \quad (4.24)$$

implicando que $L \succeq \bar{L}$. Finalmente, considere as soluções

$$\mathfrak{L}^\alpha(L_1) - L_1 = \mathfrak{L}^\beta(L_2) - L_2 = -C^\top C \quad 1 \geq \beta \geq \alpha \geq 0. \quad (4.25)$$

Note a princípio que as soluções \bar{L}_1 e \bar{L}_2 de

$$\bar{\mathfrak{L}}^\alpha(\bar{L}_1, V) - V = \bar{\mathfrak{L}}^\beta(\bar{L}_2, V) - V = -C^\top C, \quad (4.26)$$

são tais que se $\bar{L}_1, \bar{L}_2 \succeq V$, implica que $\bar{\mathfrak{L}}^\beta(\bar{L}_2, V) - V - (\bar{\mathfrak{L}}^\alpha(\bar{L}_1, V) - V) = \mathcal{L}^{\beta-\alpha}(\bar{L}_2 - \bar{L}_1) + \Phi^\beta(\bar{L}_2) - \Phi^\alpha(\bar{L}_1) = 0$, implicando que $\bar{L}_2 \succeq \bar{L}_1$. Agora, faça $V = L_1$ para concluir que

$$\mathfrak{L}^\alpha(L_1) - L_1 = \bar{\mathfrak{L}}^\alpha(L_1, L_1) - L_1 = \bar{\mathfrak{L}}^\beta(\bar{L}_2, L_1) - L_1 = \mathfrak{L}^\beta(L_2) - L_2 = -C^\top C \quad (4.27)$$

com $L_2 \succeq \bar{L}_2 \succeq L_1$.

Agora, seja $\alpha_2 \geq \alpha_1$ e tome $L_0 = 0$ para construir a sequência crescente de soluções

$$\tilde{\mathfrak{L}}^{\alpha_1}(\tilde{L}_1, 0) = \mathfrak{L}^{\alpha_1}(L_1) - L_1 = \bar{\mathfrak{L}}^{\alpha_2}(\bar{L}_2, L_1) - L_1 = \mathfrak{L}^{\alpha_2}(L_2) - L_2 = -C^\top C \quad (4.28)$$

no sentido de que $0 \preceq \tilde{L}_1 \preceq L_1 \preceq \bar{L}_2 \preceq L_2 \cdots$, de forma que L_k , a solução de $L_k = \mathfrak{L}^{\alpha_k}(L_k) + C^\top C$ é tal que $L_k \uparrow L_\infty$ no sentido de semipositividade tal que L_∞ satisfaz (4.18). Pela unicidade da solução, $L_\infty = L \in S^{n+}$, e isto completa a prova.

□

O Lema 4.1 aponta à existência de uma sequência monótona crescente e convergente de soluções matriciais $L^{\alpha_1} \preceq L^{\alpha_2} \preceq \cdots \preceq L^1 \in S^{n+}$ advindas da equação de Lyapunov perturbada (4.7) em que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots \leq 1$. Isto é, ao tomar a sequência $\alpha_n \uparrow 1$ sobre (4.7), tem-se que uma família de equações é gerada tal que suas respectivas soluções obedecem a ordem de semipositividade definida acima.

Tendo sido apresentados a Proposição 4.2 e Lema 4.1 tem-se ferramental o suficiente a fim de solucionar o problema de norma H_2 a longo prazo para sistemas CSVIU. Para tanto, o próximo Teorema fornece a solução desejada.

Teorema 4.1 (Norma H_2 a longo prazo) *Suponha $\alpha = 1$. Se $L^1 = L \in S^{n+}$ é solução única definida positiva de (4.7) e o par (C, \mathcal{L}^1) é observável, então o sistema Θ em (3.2) é estocasticamente estável e sua norma em CMLP é dada por*

$$\mathcal{E}_2(y(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\sum_{k=0}^T \|y(k)\|^2 \right] = \varpi(L). \quad (4.29)$$

Prova A partir da demonstração da Proposição 4.1, relembre (4.5) função não negativa para algum $0 < \alpha < 1$. Seja $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ qualquer sequência tal que $\alpha \geq 0$ e $\alpha_n \uparrow 1$. Então,

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_n)\mathcal{E}_2^{\alpha_n}(y(\cdot)) &= (1 - \alpha_n)E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^k \|y(k)\|^2 \right] \\ &= (1 - \alpha_n)(\|x_0\|_{L^{\alpha_n}}^2 + \langle E[r_0], |x_0| \rangle) + \ell^{\alpha_n} \\ &= (1 - \alpha_n)(\|x_0\|_{L^{\alpha_n}}^2 + \langle E[r_0], |x_0| \rangle) + \alpha_n \varpi(L^{\alpha_n}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

tomando o limite sobre a sequência convergente $\{\alpha_n\}$ tem-se que

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 1} (1 - \alpha_n)\mathcal{E}_2^{\alpha_n}(y(\cdot)) = \lim_{\alpha_n \rightarrow 1} (1 - \alpha_n)(\|x_0\|_{L^{\alpha_n}}^2 + \langle E[r_0], |x_0| \rangle) + \lim_{\alpha_n \rightarrow 1} \alpha_n \varpi(L^{\alpha_n}) \quad (4.31)$$

e de acordo com o Lema 4.1, $L^{\alpha_n} \uparrow L$ no sentido semidefinido positivo para a solução de (4.18). Logo, se o limite existe, então vale a igualdade,

$$\liminf_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha)E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] = \limsup_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha)E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] = \varpi(L). \quad (4.32)$$

Por outro lado, considere $V^\alpha(x) = \|x\|_{L^\alpha}^2 + \langle E[r_0], |x| \rangle$ com L^α e r_0 as respectivas soluções de (4.7) e (4.9). Agora, fazendo $V_k^\alpha = V^\alpha(x_k)$ tem-se que

$$\begin{aligned} &E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k (\alpha V_{k+1}^\alpha - V_k^\alpha) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \left(x_k^\top (\mathcal{L}^\alpha(L^\alpha) - L^\alpha)x_k + \langle s_{k+1}, \alpha r_0 \cdot (Ax_k) \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(L^\alpha) - r_0) \cdot x_k \rangle + \alpha \varpi(L^\alpha) \right) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \left(-x_k^\top C^\top C x_k + \alpha \varpi(L^\alpha) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Multiplique a identidade (4.33) por (-1) e, logo após, adicione a quantidade $\alpha \varpi(L^\alpha)$ a ambos os lados da igualdade para obter

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)) = E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] = E \left[V_0^\alpha - \alpha^T V_T^\alpha + \sum_{k=0}^T \alpha^{k+1} \varpi(L^\alpha) \right] \quad (4.34)$$

Fazendo $\alpha = \alpha_n \uparrow 1$ e atentando para o fato de que $\varpi(L^\alpha)$ não depende explicitamente do estágio k do processo, usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue (Proposição 2.4) temos

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \rightarrow 1} E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \sum_{k=0}^T \alpha^{k+1} \varpi(L^\alpha) + \lim_{\alpha \rightarrow 1} E \left[V_0^\alpha - \alpha^T V_T^\alpha \right] \\ &= T \varpi(L) + E \left[V^1(x_0) - V^1(x_T) \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

em que $V^1(x) = \|x\|_L^2 + \langle E[r_0], |x| \rangle$, com $L = L^1$ solução simétrica definida positiva de (4.18) e r_0 satisfazendo (4.9) para $\alpha = 1$. Atentando à desigualdade (4.13) em Proposição 4.2, tome o limite superior em T na expressão resultante do seguinte modo,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\sum_{k=0}^T \|y(k)\|^2 \right] = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[V^1(x_0) - V^1(x_T) \right] + \varpi(L) \quad (4.36)$$

uma vez que $V^1(x_0)$ é avaliado em $x(0) = x_0$, então $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [V^1(x_0)] = 0$. Além do mais, o lado esquerdo de (4.36) é finito, levando em conta a observabilidade (Definição 3.3) conclui-se que a saída $y(\cdot)$ tem acesso a toda energia interna do sistema. Logo, nesse caso o sistema Θ é estocasticamente estável (Definição 3.2), obtendo a igualdade,

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[V^1(x_0) - V^1(x_T) \right] + \varpi(L) \\ &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} V^1(x_0) + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[-V^1(x_T) \right] + \varpi(L) \\ &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[-V^1(x_T) \right] + \varpi(L) \end{aligned} \quad (4.37)$$

em que, pela estabilidade estocástica,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[-V^1(x_T) \right] + \varpi(L) = \varpi(L) - \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[V^1(x_T) \right] \leq \varpi(L). \quad (4.38)$$

Agora, a igualdade (4.32) e o teorema Tauberiano permitem escrever

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\sum_{k=0}^T \|y(k)\|^2 \right] \quad (4.39)$$

o qual, juntamente com (4.37) e (4.38) permite concluir que a igualdade estrita em (4.13) ocorrerá se $\mathcal{E}_2^1(y(\cdot)) < \infty$.

□

Nota 4.2 *A partir da não negatividade de (4.5) e da existência de uma sequência crescente de soluções da equação tipo Lyapunov (4.7) a medida em que α tende a 1, se torna possível utilizar a abordagem Vanish Discount a fim de solucionar o problema de norma \mathcal{H}_2 CSVIU a longo prazo. Este objetivo é alcançado ao utilizar a desigualdade (4.13) advinda da Proposição 4.2 a fim de conectar a medida descontada (2.76) à medida não descontada (2.79). Especificamente, tomando $a_k = E\{\|y(k)\|^2\}$, o sistema (3.2) permite que a igualdade estrita em (4.13) seja verdadeira pois o limite é obtido por (4.29) de fato (isto é $\liminf = \limsup$).*

Nota 4.3 *Para que o Teorema anterior faça sentido, note que é essencial a validade de que a estabilidade estocástica do sistema se mantenha (Definição 3.2). Note de (4.38) que*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[V^1(x_T)] = 0 \quad (4.40)$$

necessariamente. Juntamente com a α -observabilidade e o fato de que a solução L da equação (4.18) é tal que $L \in S^{n+}$, (4.40) implica que se $\mathcal{E}_2^1(y(\cdot)) < \infty$, a estabilidade se mantém no sentido de que

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[\|x(T)\|^2] = 0. \quad (4.41)$$

4.3 Controle CSVIU em Norma \mathcal{H}_2

A seção anterior se encarregou de definir e analisar o problema de norma H_2 para o processo CSVIU não controlado dado por (3.2). Duas alternativas são abordadas para o computo da norma, a primeira diz respeito a introdução de um fator de desconto $0 < \alpha < 1$ tal que possibilite à energia do sistema ser finita em algum sentido, esta é representada pela medida (2.76). A segunda se dá por meio da medida de energia não descontada em (2.79), esta se mostra ainda mais significativa quando se tratando de sistemas estocásticos submetidos a distúrbio de natureza incessante.

Reconsidere o sistema Θ em (3.2) e admita adicionar uma variável de controle u ao processo dinâmico em questão, de forma que a dinâmica CSVIU de ordem completa seja alcançada, esta é dada por (2.28). Feito isto, obtém-se então o sistema controlado,

$$\Theta_{ctr} := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \sigma(x, u)\omega_0(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \quad x(0) = x, \end{cases} \quad (4.42)$$

cujas saídas é dada por $y(k)$ e, em adicional a (3.2), tem-se que $C^\top C \in S^{n+}$ e $D^\top D \in S^{m+}$, esta ultima estritamente positiva. Além do mais, redefine-se $\sigma(\cdot)$ em (3.3) por,

$$\sigma(x, u) = [\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x|) \quad \sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u|) \quad \sigma] \in \mathbb{R}^{n \times n+m+r} \quad (4.43)$$

e o vetor de “ruído branco” $\omega_0(k) = [\varepsilon^x(k) \quad \varepsilon^u(k) \quad \omega(k)]^\top$ cujos elementos formam uma sequência *i.i.d.* de média zero e $\text{Cov}(\omega_0) = I_{n+m+r}$. Com $\varepsilon^x(\cdot)$ e $\varepsilon^u(\cdot)$ introduzidos na síntese CSVIU e $\omega(\cdot)$ advindo da “natureza”.

Para o sistema Θ_{ctr} , denote a mesma probabilidade descrita em (3.9). Recorde da Seção 2.4 que uma particularidade do modelo CSVIU, é a de que seu problema de controle é solucionado via particionamento do espaço de estados (\mathbb{R}^n) em três regiões de controle disjuntas para cada entrada de controle $u_i(x)$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$). São elas: as regiões assintóticas dadas pelos subconjuntos $\mathcal{R}_i^+ := \{x \in \mathbb{R}^n | u_i^*(x) > 0\}$ e $\mathcal{R}_i^- := \{x \in \mathbb{R}^n | u_i^*(x) < 0\}$, além da região de inação $\mathcal{R}_i^0 := \{x \in \mathbb{R}^n | u_i^*(x) = 0\}$.

Aponta-se ainda ao fato de que a presença de uma região de inação tem por interpretação um controlador cauteloso. Sendo assim, definiu-se a região de inação global

por $\mathcal{R}^0 = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^0$, sobre a qual o controle ótimo CSVIU é equivalente ao vetor nulo m -dimensional 0_m .

Também, para regiões suficientemente distantes da origem tais que $u_i^*(x) \neq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, relembre o conjunto $s_u \in \{1, -1\}^m$ de todos os vetores de sinais do controle ótimo $u^*(x)$ não nulo. Tendo em mente cada possível vetor de sinais s_u , cada região \mathcal{R}^{s_u} do espaço de estados foi definida por uma intersecção de regiões de sinais homogêneos, isto é $\mathcal{R}^{s_u} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^- \cup \mathcal{R}_i^+$ com s_u previamente fixado.

A partir das medidas de energia (2.76) e (2.79), as soluções para os problemas de controle em norma descontada e não descontada do sistema (4.42) surgirão a partir da resolução dos respectivos problemas de otimização:

$$\begin{aligned}
& \underset{\pi \subset \Pi}{\text{Minimizar}} && \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k E \|y(k)\|^2 \quad \text{ou} \\
& \underset{\pi \subset \Pi}{\text{Minimizar}} && \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T E \|y(k)\|^2 \\
& \text{Sujeito a} && x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + (\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x(k)|))\varepsilon^x(k) \\
& && \quad + (\sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u(k)|))\varepsilon^u(k) + \sigma\omega(k), \\
& && y(k) = Cx(k) + Du(k), \quad x(0) = x \in \mathbb{R}^n, \\
& && 0 < \alpha \leq 1, \quad C^\top C \succeq 0, \quad D^\top D \succ 0,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

com $\pi \subset \Pi$ política de controle sobre a classe dos controladores markovianos. O controle ótimo CSVIU na norma H_2 descontada é tratado nas Seções 4.3.1 e 4.3.2. Já o controle CSVIU na norma H_2 a longo prazo é abordado nas Seções 4.3.3 e 4.3.4.

Por conveniência, reproduz-se aqui os operadores:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_x(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top U \bar{\sigma}_x) & \mathcal{Z}_u(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_u^\top U \bar{\sigma}_u) \\
\mathcal{W}_x(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top U \sigma_x + \sigma_x^\top U \bar{\sigma}_x) & \mathcal{W}_u(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_u^\top U \sigma_u + \sigma_u^\top U \bar{\sigma}_u) \\
\varpi_1(U) &= \text{tr}\{U(\sigma\sigma^\top + \sigma_x\sigma_x^\top + \sigma_u\sigma_u^\top)\} & \Sigma(U) &= \alpha B^\top U A + D^\top C \\
\Lambda(U) &= \alpha B^\top U B + \alpha \mathcal{Z}_u(U) + D^\top D
\end{aligned}$$

definidos em (2.33), (2.34) e (2.41).

4.3.1 O caso descontado em norma \mathcal{H}_2 : Controle em região de inação global

A princípio, aborda-se o controle sobre região de inação global (\mathcal{R}^0), logo após, trata-se o caso de controle assintótico em regiões de sinais homogêneos não nulos (\mathcal{R}^{s_u}). Uma vez que sobre a região de inação global a entrada ótima de controle é dada equivalentemente por $u^*(x) \equiv 0_m$, $\forall x \in \mathcal{R}^0$ tem-se que sobre esta a dinâmica do sistema Θ_{ctr} é,

$$x(k+1) = Ax(k) + (\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x(k)|))\varepsilon^x(k) + \sigma_u \varepsilon^u(k) + \sigma\omega(k). \tag{4.45}$$

Perceba que a única diferença entre esta e a equação dinâmica do sistema (3.2) é a adição do termo estocástico $\sigma_u \varepsilon^u(\cdot)$. Desta forma, o custo do controle CSVIU em norma H_2 descontada sobre \mathcal{R}^0 é dado em equivalência com a Proposição 4.1, com o adendo de substituir $\varpi(L^\alpha) = \text{tr}\{L^\alpha(\sigma\sigma^\top + \sigma_x\sigma_x^\top)\}$ por $\varpi_1(L^\alpha) = \text{tr}\{L^\alpha(\sigma\sigma^\top + \sigma_x\sigma_x^\top + \sigma_u\sigma_u^\top)\}$.

Proposição 4.3 (*Controle em Norma H_2 descontada sobre região de inação*) *Suponha $L^\alpha \in S^{n+}$ definida positiva solução única de (4.7). Se o par (C, \mathcal{L}^α) é α -observável, então o sistema Θ_{ctr} é α -estocasticamente estável e a norma H_2 descontada é dada por*

$$\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot)) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \varpi_1(L^\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{tr}\{L^\alpha(\sigma\sigma^\top + \sigma_x\sigma_x^\top + \sigma_u\sigma_u^\top)\}. \quad (4.46)$$

Prova Substitua $\varpi(L^\alpha)$ por $\varpi_1(L^\alpha)$ em (4.8). Feito isto, a prova da Proposição 4.3 segue de maneira análoga à prova da Proposição 4.1.

Concluimos então que

$$E_x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] = \frac{\alpha}{1-\alpha} \varpi_1(L^\alpha). \quad (4.47)$$

□

4.3.2 O caso descontado em norma \mathcal{H}_2 : Controle assintótico

Com relação as regiões \mathcal{R}^{s_u} do espaço de estados, a Seção 2.4 define estas como regiões do \mathbb{R}^n suficientemente afastadas da origem tal que, dado algum $s_u \in \{1, -1\}^m$, $\forall x \in \mathcal{R}^{s_u}$ os vetores de sinais do estado s_x e controle s_u se mantêm inalterados em uma região considerável em torno de x . A partir desta noção de regiões de controle com sinais homogêneos não nulos, introduziu-se ainda o conceito de regiões assintóticas. Recorde da Seção 2.4 que, se $x \in \mathcal{R}^{s_u}$ tal que $|x| \rightarrow \infty$, por convenção o vetor de estados x estará contido na região assintótica referente ao vetor sinal s_u .

Note que, sobre regiões assintóticas não existe a possibilidade de mudanças nos sinais do estado e do controle. Este fato torna possível a obtenção de soluções estacionárias que permitirão a construção de um controlador CSVIU sob a classe dos controladores markovianos. Os próximos resultados desta seção tem por objetivo solucionar o problema de controle CSVIU em norma H_2 descontada quando em regiões assintóticas do espaço de estados.

Redefina L_k , r_k e ℓ_k , $0 \leq k \leq T$ respectivamente como soluções das seguintes equações a diferenças,

$$L_{k+1} := \mathcal{L}^\alpha(L_k) - \Sigma(L_k)^\top \Lambda(L_k)^{-1} \Sigma(L_k) + C^\top C, \quad L_0 = I_n, \quad (4.48a)$$

$$\alpha \left(A - B\Lambda(L_{T-k+1})^{-1}\Sigma(L_{T-k+1}) \right)^\top r_{k+1}^0 \cdot s_i + \alpha \mathcal{W}_{x_d}(L_{T-k+1}) \cdot s_i - \alpha \Sigma(L_{T-k+1})^\top \Lambda(L_{T-k+1})^{-1} \mathcal{W}_{u_d}(L_{T-k+1}) \cdot s_u = r_k \cdot s_i, \quad (4.48b)$$

com

$$\sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k)(r_{k+1} \cdot s_j) = r_{k+1}^0 \cdot s_i, \quad r_T = 0_n \quad \text{e} \quad s_i = \mathcal{S}(x_k),$$

$$\alpha \left(\ell_{k+1} + \varpi_1(L_{T-k+1}) - \frac{\alpha}{4} \Omega(L_{T-k+1})^\top \Lambda(L_{T-k+1})^{-1} \Omega(L_{T-k+1}) \right) = \ell_k, \quad \ell_T = 0, \quad (4.48c)$$

para todo $0 \leq k \leq T$ e, para algum $s_u \in \{1, -1\}^m$,

$$\Omega(L_{T-k+1}) := \mathcal{W}_{u_d}(L_{T-k+1}) \cdot s_u + B^\top (r_{k+1}^0 \cdot s_i) \in \mathbb{R}^m. \quad (4.49)$$

Aqui, chama-se atenção mais uma vez ao fato de que a equação em (4.48a) tem solução $L(\cdot)$ unicamente definida e independente da trajetória dos estados do sistema em (4.42). Reconsidere agora a medida (3.8) e recorde as relações, $\text{tr}\{U \cdot \text{diag}(|x|)\} = \mathcal{S}(x)^\top \text{Diag}(U)x$, $\langle v, |x| \rangle = \langle \mathcal{S}(x), v \cdot x \rangle$, em que $U \in S^{n+}$ e $v, x \in \mathbb{R}^n$ a fim de definir o próximo lema.

Lema 4.2 *Considere o sistema controlado (4.42). Admita $x(k) \in \mathcal{R}^{s_u}$ vetor de estados transitando sobre regiões assintóticas do espaço de estados euclidiano \mathbb{R}^n para todo $k = 1, 2, \dots, T$, então*

$$\min_u \mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)) = \|x\|_{L_{T+1}}^2 + E[\langle r_0, |x| \rangle + \ell_0]. \quad (4.50)$$

Para $L(\cdot)$, $r(\cdot)$ e $\ell(\cdot)$ soluções dadas por (4.48). Ademais, a lei de controle em malha fechada obtida num estágio k assume uma forma afim no estado x_k , esta é

$$u_k^* = -\Lambda(L_{T-k+1})^{-1} \left(\Sigma(L_{T-k+1})x_k + \frac{\alpha}{2} (\mathcal{W}_{u_d}(L_{T-k+1}) \cdot s_u + B^\top (r_{k+1}^0 \cdot s_i)) \right) \quad (4.51)$$

para algum $L_{T-k+1} \in S^{n+}$, $s_i = \mathcal{S}(x_k)$ e $s_u \in \{1, -1\}^m$.

Prova Considere a função

$$\phi(k, x_k) := \alpha^k (x_k^\top P_k x_k + \langle r_k, |x_k| \rangle + \ell_k),$$

para algum $k \rightarrow P_k = P_k^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \rightarrow r_k \in \mathbb{R}^n$, escalar $k \rightarrow \ell_k$ e para $k \rightarrow x_k$, o vetor de estados do sistema Θ . Assumindo que $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\ell : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mencionados acima, satisfazem as seguintes equações

$$\alpha A^\top P_{k+1} A + \alpha \mathcal{Z}_x(P_{k+1}) - P_k - \Sigma(P_{k+1})^\top \Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) + C^\top C = 0, \quad P_T = I_n, \quad (4.52a)$$

$$r_{k+1} := \begin{cases} \alpha \left(A - B\Lambda(P_{k+1})^{-1}\Sigma(P_{k+1}) \right)^\top r_{k+1}^0 \cdot s_i + \left(\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k \right) \cdot s_i \\ \quad - \alpha \Sigma(P_{k+1})^\top \Lambda(P_{k+1})^{-1} \mathcal{W}_{u_d}(P_{k+1}) \cdot s_u = 0, \\ \text{e para } \mathcal{S}(x_k) = s_i, \quad \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) (s_j \cdot r_{k+1}) = s_i \cdot r_{k+1}^0, \quad r_T = 0_n, \end{cases} \quad (4.52b)$$

$$\alpha \left(\ell_{k+1} + \varpi_1(P_{k+1}) - \frac{\alpha}{4} \Omega(P_{k+1})^\top \Lambda(P_{k+1})^{-1} \Omega(P_{k+1}) \right) - \ell_k = 0, \quad \ell_T = 0, \quad (4.52c)$$

em que, lembrando a identidade (3.10) tem-se que $\Omega(P_{k+1}) = \mathcal{W}_{u_d}(P_{k+1}) \cdot s_u + B^\top (r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i])$.

Ainda, para alguma matriz $U \in S^{n+}$, admita a seguinte igualdade,

$$\begin{aligned} E[\|\sigma(x, u)\omega_0\|_U^2] &= \text{tr}\{\text{Diag}(U\sigma(x, u)\sigma(x, u)^\top)\} \\ &= x^\top \mathcal{Z}_x(U)x + \text{tr}\{\mathcal{W}_x(U) \text{diag}(|x|)\} + \varpi_1(U) \\ &\quad + u^\top \mathcal{Z}_u(U)u + \text{tr}\{\mathcal{W}_u(U) \text{diag}(|u|)\} \\ &= \|x\|_{\mathcal{Z}_x(U)}^2 + \langle \mathcal{S}(x), \mathcal{W}_x(U)x \rangle + \varpi_1(U) \\ &\quad + \|u\|_{\mathcal{Z}_u(U)}^2 + \langle s_u, \mathcal{W}_u(U)u \rangle. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Utilizaremos a Equação Estocástica de Bellman (2.7) juntamente com a equação dinâmica do sistema controlado Θ_{ctr} em (4.42), para efetuar a seguinte avaliação em $0 \leq k \leq T - 1$,

$$\begin{aligned} \alpha^{-k} \left(\phi(k+1, x_{k+1}) - \phi(k, x_k) + \alpha^k \chi(k) \right) &= -\alpha^{-k} \left(\alpha^k \|Cx(k)\|^2 \right) \\ &= \alpha \|x_{k+1}\|_{P_{k+1}}^2 + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot x_{k+1} \rangle + \alpha \ell_{k+1} \\ &\quad - \left(\|x_k\|_{P_k}^2 + \langle s_k, r_k \cdot x_k \rangle + \ell_k \right) + \chi(k) \end{aligned} \quad (4.54)$$

em que $s_{k+1} = \mathcal{S}(x_{k+1})$, $s_k = \mathcal{S}(x_k)$ e $\chi(k) = \left(u_k^\top D^\top Du_k + 2x_k^\top C^\top Du_k \right)$. O primeiro passo consiste em acoplar a dinâmica do sistema Θ_{ctr} em (4.54) e utilizar a igualdade (4.53) obtendo

$$\begin{aligned} & - \left(\|Cx(k)\|^2 \right) \\ &= \alpha \left(\|Ax_k\|_{P_{k+1}}^2 + \|x_k\|_{\mathcal{Z}_x(P_{k+1})}^2 \right) - \|x_k\|_{P_k}^2 + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (Ax_k) \rangle \\ &\quad + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle + \alpha \ell_{k+1} + \alpha \varpi_1(P_{k+1}) - \ell_k \\ &\quad + \min_{u_k} \left[u_k^\top \Lambda(P_{k+1})u_k + (2\Sigma(P_{k+1})x_k + \alpha\Omega(P_{k+1}))^\top u_k \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

em que $\Omega(U) = \mathcal{W}_{u_d}(U) \cdot s_u + B^\top (r_{k+1} \cdot E[s_{k+1} | s_k])$ - vide identidade (3.10) - para algum s_u e, necessariamente, $\Lambda(P_{k+1}) \succ 0$. Agora, minimizando a expressão (4.55) em u_k — ou,

equivalentemente, substituindo a lei de controle (4.2) em (4.55) — e reordenando-a,

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\|Ax_k\|_{P_{k+1}}^2 + \|x_k\|_{\mathcal{Z}_x(P_{k+1})}^2 \right) - \|x_k\|_{P_k}^2 - x_k^\top \Sigma(P_{k+1})^\top \Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) x_k \\
&\quad + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (Ax_k) \rangle + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle - \alpha \Omega(P_{k+1})^\top \Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) x_k \\
&\quad + \alpha \ell_{k+1} - \ell_k + \alpha \varpi_1(P_{k+1}) - \frac{\alpha^2}{4} \Omega(P_{k+1})^\top \Lambda(P_{k+1})^{-1} \Omega(P_{k+1}).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Se $s_k = \mathcal{S}(x_k)$, então,

$$\begin{aligned}
&\alpha \left(A - B\Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) \right)^\top r_{k+1}^0 \cdot s_k + \left(\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k \right) \cdot s_k \\
&\quad - \alpha \Sigma(P_{k+1})^\top \Lambda(P_{k+1})^{-1} \mathcal{W}_{u_d}(P_{k+1}) \cdot s_u = 0,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\text{e } r_{k+1} \text{ é tal que } \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) (r_{k+1} \cdot s_j) = r_{k+1}^0 \cdot s_i,$$

aplicando o operador esperança matemática $E[\cdot]$ nos termos da equação em (4.56), procede-se a seguinte avaliação, semelhante à passagem (3.20),

$$\begin{aligned}
&E[\alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1}^0 \cdot (Ax_k - B\Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) x_k) \rangle + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle \\
&\quad - \alpha \langle s_u \cdot \mathcal{W}_{u_d}(P_{k+1}), \Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) x_k \rangle | \mathcal{S}(x_k) = s_i] \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) \langle s_j, r_{k+1} \cdot (Ax_k - B\Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) x_k) \rangle \\
&\quad + \langle s_i, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle - \alpha \langle s_u \cdot \mathcal{W}_{u_d}(P_{k+1}), \Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) x_k \rangle \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) \langle s_j, \text{diag}(r_{k+1}) \left(A - B\Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) \right) x_k \rangle \\
&\quad - \alpha \langle \left(A - B\Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) \right)^\top r_{k+1}^0 \cdot s_i, x_k \rangle \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) \langle \left(A - B\Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) \right)^\top (r_{k+1} \cdot s_j), x_k \rangle \\
&\quad - \alpha \langle \left(A - B\Lambda(P_{k+1})^{-1} \Sigma(P_{k+1}) \right)^\top r_{k+1}^0 \cdot s_i, x_k \rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.58}$$

e

$$\begin{aligned}
&E[\alpha \ell_{k+1} - \ell_k + \alpha \varpi_1(P_{k+1}) - \frac{\alpha^2}{4} \Omega(P_{k+1})^\top \Lambda(P_{k+1})^{-1} \Omega(P_{k+1}) | \mathcal{S}(x_k) = s_i] \\
&= \alpha \ell_{k+1} - \ell_k + \alpha \varpi_1(P_{k+1}) - \frac{\alpha^2}{4} \Omega(P_{k+1})^\top \Lambda(P_{k+1})^{-1} \Omega(P_{k+1}) = 0
\end{aligned} \tag{4.59}$$

ao tomar $\Omega(P_{k+1}) = \mathcal{W}_{u_d}(P_{k+1}) \cdot s_u + B^\top (r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i])$ em que $s_i = \mathcal{S}(x_k)$ e $s_j = \mathcal{S}(x_{k+1})$.

Agora, por (4.52), (4.56) e sabendo ainda que o processo Θ_{ctr} é markoviano,

$$E[\phi(T, x_T) - \phi(0, x_0)] = -E\left[\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k \|y(k)\|^2\right]. \tag{4.60}$$

Pode-se reescrever (4.60) como ,

$$E_{x_0}[\|x_0\|_{P_0}^2 + \langle r_0, |x_0| \rangle + \ell_0] = E_{x_0}[\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k \|y(k)\|^2] + \alpha^T E_{x_0}[\|x_T\|_{P_T}^2 + \langle r_T, |x_T| \rangle + \ell_T]. \quad (4.61)$$

Note ainda que a equação (4.52a) independe da trajetória do processo, e portanto sua solução é única. Fazendo $P_T = L_0 = 0$ introduzimos uma “reversão temporal” e a equação (4.52a) pode ser escrita por (4.48a). Com isto, a primeira expressão em (4.52b) e a equação (4.52c) podem ser reescritas respectivamente por (4.48b) e (4.48c).

Finalmente, por (4.60) e equações (4.48a) - (4.48c) tem-se que

$$E_x[\phi(0, x) - \phi(T, x_T)] = E_x[\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k \|y(k)\|^2] = \|x\|_{L_T}^2 + E_x[\langle r_0, |x| \rangle + \ell_0], \quad (4.62)$$

o que leva à representação final.

□

O lema a seguir fornece a solução assintótica para o desempenho do atuador CSVIU tendo por critério de custo a norma H_2 descontada.

Lema 4.3 (*Controle assintótico em norma H_2 descontada*) *Suponha $L^\alpha \in S^{n+}$ definida positiva solução única de (4.67). Se o par (C, \mathcal{L}^α) é α -observável, então o sistema Θ_{ctr} é α -estocasticamente estável e a norma H_2 descontada assintótica, é dada por*

$$\min_u \mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot)) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\varpi_1(L^\alpha) - \frac{\alpha}{4} \Omega(L^\alpha)^\top \Lambda(L^\alpha)^{-1} \Omega(L^\alpha) \right). \quad (4.63)$$

com $\Omega(L^\alpha) = \mathcal{W}_{u_d}(L^\alpha) \cdot s_u + B^\top(r^\alpha \cdot s_x)$ e $s_x = \mathcal{S}(x)$.

Prova Redefina a quadrática $\mathcal{G}^\alpha(x)$ por $\mathcal{G}^\alpha(x) := \|x\|_{L_T^\alpha}^2 + E[\langle r_0, |x| \rangle + \ell_0]$, esta é obtida a partir do Lema 4.2 para algum $T > 0$. A partir desta e procedendo de forma semelhante aos passos descritos em (4.2)-(4.5) obtém-se

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \min_u \mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)) = \mathcal{G}^\alpha(x) = \|x_0\|_{L^\alpha}^2 + E[\langle r_0, |x_0| \rangle + \ell_0], \quad (4.64)$$

em que foram admitas as hipóteses de α -observabilidade e finitude da medida $\mathcal{E}_2^\alpha(y(\cdot))$, implicando em α -estabilidade do sistema (4.42) – vide Corolário 3.1.

Suponha $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ sobre regiões assintóticas, isto é, afastado o suficiente da origem de forma que qualquer indeterminação com relação ao sinal do estado e controle seja dispensável, deste modo temos

$$\mathcal{G}^\alpha(x) = \|x_0\|_{L^\alpha}^2 + \langle r^\alpha, |x_0| \rangle + \ell^\alpha \quad (4.65)$$

com $L^\alpha \in S^{n+}$ e $r^\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\ell^\alpha \geq 0$ vetor e escalar constantes denominados soluções assintóticas. Neste sentido, atente que a função valor em (4.65) vale assintoticamente no espaço de estados para algum s_x e algum s_u .

Por fim, para obter a norma H_2 descontada do sistema controlado (4.42), basta tomar $x_0 = 0$ e deste modo ficamos com

$$\min_u E_x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left\{ \varpi_1(L^\alpha) - \frac{\alpha}{4} \Omega(L^\alpha)^\top \Lambda(L^\alpha)^{-1} \Omega(L^\alpha) \right\} < \infty \quad (4.66)$$

pois $\Omega(L^\alpha) = \mathcal{W}_{u_d}(L^\alpha) \cdot s_u + B^\top(r^\alpha \cdot s_x) < \infty$, corroborando com a definição de estabilidade α -estocástica.

□

Admita $0 < \alpha < 1$ e com relação ao sistema Θ_{ctr} em (4.42), assuma sua α -observabilidade (Definição 3.3). Afirma-se que, se a equação tipo Riccati modificada

$$\alpha A^\top U A + \alpha \mathcal{Z}_x(U) - U - \Sigma(U)^\top \Lambda(U)^{-1} \Sigma(U) + C^\top C = 0 \quad (4.67)$$

admite solução única $U \in S^{n+}$ definida positiva, então o vetor de norma limitada r_0 é obtido de forma retroativa no tempo a partir de um estágio T suficientemente grande com $r_T = 0_n$ por (4.48b). De igual modo o coeficiente escalar ℓ_0 é obtido retroativamente por (4.48c) para $\ell_T = 0$.

Em conexão com a definição de regiões assintóticas, fixado $s_x = \mathcal{S}(x) = s_i$ para qualquer \mathbb{O}_i o i -ésimo hiperoctante aberto do \mathbb{R}^n , e para algum vetor de sinal $s_u \in \{1, -1\}^m$, a incerteza com relação aos sinais do estado (longe das fronteiras em que há comutação de quaisquer dos sinais s_x e s_u) e controle é desfeita tornando possível aplicar uma reversão temporal também às equações (4.48b) e (4.48c). Sendo assim, uma vez obtida a solução matricial única em (4.67), o vetor $r^\alpha \in \mathbb{R}^n$ e o escalar $\ell^\alpha \geq 0$ são obtidos por,

$$r^\alpha \cdot s_x = \alpha (I_n - \alpha A + \alpha B \Lambda(U)^{-1} \Sigma(U))^{-\top} (\mathcal{W}_{x_d}(U) \cdot s_x - \Sigma(U)^\top \Lambda(U)^{-1} \mathcal{W}_{u_d}(U) \cdot s_u) \quad (4.68)$$

$$\ell^\alpha (1 - \alpha) = \alpha \left(\varpi_1(U) - \frac{\alpha}{4} \Omega(U)^\top \Lambda(U)^{-1} \Omega(U) \right) \quad (4.69)$$

com $\Omega(U) = \mathcal{W}_{u_d}(U) \cdot s_u + B^\top(r^\alpha \cdot s_x)$. Deste modo, adicionalmente ao Lema 4.3 os coeficientes da função valor (4.65) são denominados de soluções assintóticas de (4.67), (4.68) e (4.69).

Perceba ainda que a lei de controle (4.51) depende do vetor aleatório $r_{k+1}^0 \cdot \mathcal{S}(x_k)$, e por (3.10) tem-se que $r_{k+1}^0 \cdot \mathcal{S}(x_k) = r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i]$. No entanto, a natureza

estatística deste vetor é de difícil determinação. Portanto, a fim de obter uma lei de controle estacionária de validade assintótica, fundamentado no Lema 4.2 e na existência de soluções únicas para (4.67), (4.68) e (4.69) propõe-se o Lema a seguir.

Lema 4.4 (*Lei de controle CSVIU na norma H_2*) *Seja o vetor de estados $x \in \mathbb{R}^n$ no interior de algum \mathcal{R}^{s_u} região do espaço de estados sobre a qual o vetor de sinais s_u é não nulo e, por hipótese, afastada de qualquer possibilidade de mudança de sinais do estado e controle. A política de controle CSVIU em malha fechada para x é dada pela forma afim*

$$u^*(x) = -\Lambda(L^\alpha)^{-1} \left(\Sigma(L^\alpha)x + \frac{\alpha}{2} (\mathcal{W}_{u_d}(L^\alpha) \cdot s_u + B^\top (r^\alpha \cdot s_x)) \right). \quad (4.70)$$

com $L^\alpha \in S^{n+}$ e $r^\alpha \in \mathbb{R}^n$ soluções assintóticas de (4.67) e (4.68).

Prova A demonstração segue da minimização da expressão (4.55) na variável de controle u e da hipótese de existência de soluções estacionárias para as equações (4.67), (4.68) e (4.69). □

Nota 4.4 *Em comparação com o computo da norma para o caso não controlado (3.2), perceba que a noção de norma para o processo em (4.42) nos remete a uma constante $\ell^\alpha \geq 0$ que depende do vetor de sinais do estado s_x . Dito isto, uma alternativa de caráter conservador é considerar a norma H_2 assintótica por,*

$$\|\Theta_{ctr}\|_2^\alpha = \max_{s_x} \left\{ \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\varpi_1(L^\alpha) - \frac{\alpha}{4} \Omega(L^\alpha)^\top \Lambda(L^\alpha)^{-1} \Omega(L^\alpha) \right) \right\}. \quad (4.71)$$

4.3.3 Norma \mathcal{H}_2 a longo prazo: Controle em região de inação global

A norma H_2 a longo prazo para o sistema controlado Θ_{ctr} será computada tendo em vista o que já foi discutido na Seção 4.2 e considerando o problema de otimização (4.44). Observe que o objetivo é minimizar o limite em (2.79) para o sinal de saída $y(\cdot)$ em (4.42).

Mais uma vez, iremos nos utilizar da técnica “vanish discount” e o leitor é induzido a perceber que a norma a longo prazo do sistema (4.42) é nada mais que uma extensão do caso não controlado analisado na Subseção 4.2, com o adendo de que agora um problema de otimização é solucionado na variável de controle u antes de tomar o limite na desigualdade (4.13).

Considere a princípio $x \in \mathcal{R}^0$, isto implica em que $u^*(x) = 0_m$. Este fato simplifica o problema de norma H_2 a longo prazo sobre a região de inação global \mathcal{R}^0 e, dada a Proposição 4.3, torna a sua solução uma consequência quase direta do Teorema 4.1.

Corolário 4.1 (Controle na Norma H_2 a longo prazo sobre região de inação) Suponha $\alpha = 1$ em (4.7). Se $L^1 = L \in S^{n+}$ é solução única definida positiva de (4.7) e o par (C, \mathcal{L}^1) é observável, então o sistema Θ_{ctr} é estocasticamente estável e sua norma H_2 em CMLP é dada por

$$\mathcal{E}_2(y(\cdot)) = \varpi_1(L) = \text{tr}\{L(\sigma\sigma^\top + \sigma_x\sigma_x^\top + \sigma_u\sigma_u^\top)\}. \quad (4.72)$$

Prova A partir da Proposição 4.3, admita mais uma vez o teorema Tauberiano reproduzido em Proposição 4.2 e Lema 4.1. Por estes, depreende-se diretamente por vias do Teorema 4.1 que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\sum_{k=0}^T \|y(k)\|^2 \right] = \varpi_1(L) = \text{tr}\{L(\sigma\sigma^\top + \sigma_x\sigma_x^\top + \sigma_u\sigma_u^\top)\}. \quad (4.73)$$

□

4.3.4 Norma \mathcal{H}_2 a longo prazo: Controle assintótico

A fim de obter a solução assintótica do problema de norma H_2 em CMLP para o sistema (4.42), relembre o Lema 4.2 e Proposição 4.3. Destes se obtém a função valor (4.65) cuja validade se restringe as regiões assintóticas, isto é, regiões de sinais homogêneos afastadas de qualquer possibilidade de alteração dos sinais do estado e controle. O Lema 4.1, que trata da existência de uma sequência crescente e convergente de soluções matriciais, pode ser estendido sem perda de generalidade à equação tipo Riccati (4.67). Por fim, relembre que a Proposição 4.2 estabelece a conexão necessária entre os casos de norma descontada e não descontada e, por meio desta, se torna possível aplicar o “vanish discount”.

Teorema 4.2 (Controle assintótico em norma H_2 a longo prazo) Suponha $\alpha = 1$ em (4.67). Se $L^1 = L \in S^{n+}$ é solução única definida positiva de (4.67) e o par (C, \mathcal{L}^1) é observável, então o sistema Θ_{ctr} é estocasticamente estável e sua norma H_2 em CMLP, sobre regiões assintóticas, é dada por

$$\min_u \mathcal{E}_2(y(\cdot)) = \varpi_1(L) - \frac{1}{4} \Omega(L)^\top \Lambda(L)^{-1} \Omega(L) \quad (4.74)$$

com $\Omega(L) = \mathcal{W}_{u_d}(L) \cdot s_u + B^\top(r^\alpha \cdot s_x)$ e $s_x = \mathcal{S}(x)$.

Prova Relembre a função valor do sistema controlado Θ_{ctr} dada em (4.65) para algum $0 < \alpha < 1$. Seja $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ qualquer sequência tal que $\alpha \geq 0$ e $\alpha_n \uparrow 1$. Através da abordagem

do vanish discount temos que,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_n \rightarrow 1} (1 - \alpha_n) \mathcal{E}_2^{\alpha_n}(y(\cdot)) &= \lim_{\alpha_n \rightarrow 1} (1 - \alpha_n) E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^k \|y(k)\|^2 \right] \\ &= \lim_{\alpha_n \rightarrow 1} (1 - \alpha_n) (\|x_0\|_{L^{\alpha_n}}^2 + \langle r^{\alpha_n}, |x_0| \rangle + \ell^{\alpha_n}) \\ &= \lim_{\alpha_n \rightarrow 1} (1 - \alpha_n) (\|x_0\|_{L^{\alpha_n}}^2 + \langle r^{\alpha_n}, |x_0| \rangle) + \lim_{\alpha_n \rightarrow 1} \ell^{\alpha_n} (1 - \alpha_n) \end{aligned} \quad (4.75)$$

em que L^{α_n} é solução de (4.67) e o operador min_u foi omitido. Ao tomar a identidade

$$\Phi^\alpha(U) = -\Sigma(U)^\top \Lambda(U)^{-1} \Sigma(U), \quad (4.76)$$

no Lema 4.1, depreende-se deste que a sequência de fatores de desconto $\alpha_n \uparrow 1$ sobre (4.67) gera uma família de equações tipo Riccati, de forma que suas respectivas soluções dão origem a uma sequência crescente e convergente de matrizes simétricas no sentido de positividade. Dito isto, pela igualdade (4.69) podemos tomar a média ao limite para obter

$$\lim_{\alpha_n \rightarrow 1} (1 - \alpha_n) \mathcal{E}_2^{\alpha_n}(y(\cdot)) = \varpi_1(L) - \frac{1}{4} \Omega(L)^\top \Lambda(L)^{-1} \Omega(L) = \varrho \quad (4.77)$$

e a existência deste limite juntamente com a desigualdade em (4.13) permite escrever,

$$\liminf_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] = \limsup_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] = \varrho. \quad (4.78)$$

Para a segunda parte da prova, redefina a função $V^\alpha(x)$ por $V^\alpha(x) := \|x\|_{L^\alpha}^2 + \langle E[r_0], |x| \rangle$ com L^α solução da equação de Riccati em (4.67) e r_0 solução de (4.48b). Faça $V_k^\alpha = V^\alpha(x_k)$ e, similarmente a (4.33), obtenha

$$\begin{aligned} &E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k (\alpha V_{k+1}^\alpha - V_k^\alpha) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \left(x_k^\top (\mathcal{L}^\alpha(L^\alpha) - L^\alpha - \Sigma(L^\alpha)^\top \Lambda(L^\alpha)^{-1} \Sigma(L^\alpha)) x_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \langle s_{k+1}, r_0 \cdot (Ax_k) \rangle + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(L^\alpha) - r_0) \cdot x_k \rangle - \alpha \Omega(L^\alpha)^\top \Lambda(L^\alpha)^{-1} \Sigma(L^\alpha) x_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha \varpi_1(L^\alpha) - \frac{\alpha^2}{4} \Omega(L^\alpha)^\top \Lambda(L^\alpha)^{-1} \Omega(L^\alpha) \right) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \left(-x_k^\top C^\top C x_k + \underbrace{\alpha \varpi_1(L^\alpha) - \frac{\alpha^2}{4} \Omega(L^\alpha)^\top \Lambda(L^\alpha)^{-1} \Omega(L^\alpha)}_{\ell^\alpha(1-\alpha)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Agora, uma vez que estamos trabalhando sobre regiões de sinais homogêneos, o termo sobre colchetes acima é constante para vetores s_x e s_u fixos. Multiplicando a igualdade (4.79) por (-1) e adicionando $\ell^\alpha(1 - \alpha)$ a ambos os lados da igualdade, obtém-se

$$\mathcal{E}_2^{\alpha, T}(y(\cdot)) = \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] = E \left[V_0^\alpha - \alpha^T V_T^\alpha + \sum_{k=1}^T \alpha^k \ell^\alpha (1 - \alpha) \right]. \quad (4.80)$$

Fazendo $\alpha \uparrow 1$, como o valor esperado da soma é equivalente a soma das esperanças e, enfatizando ainda que o termo constante $\ell^\alpha(1-\alpha)$ não depende explicitamente do estágio k do processo, pela Proposição 2.4 tomamos o limite e chega-se em,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 1} E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \sum_{k=0}^T \alpha^k E[\ell^\alpha(1-\alpha)] + \lim_{\alpha \rightarrow 1} E \left[V_0^\alpha - \alpha^T V_T^\alpha \right] \\ &= T\varpi_1(L) - \frac{T}{4} \Omega(L)^\top \Lambda(L)^{-1} \Omega(L) + E \left[V_0^\alpha - \alpha^T V_T^\alpha \right] \quad (4.81) \\ &= T\varrho + E \left[V^1(x_0) - V^1(x_T) \right] \end{aligned}$$

em que $V^1(x) = \|x\|_{L^1}^2 + \langle r^1, |x| \rangle$, com $L = L^1$ solução simétrica definida positiva de (4.67) e $r = r^1$ solução assintótica que satisfaz (4.68). A partir da expressão resultante e da desigualdade (4.13), escreve-se

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\sum_{k=0}^T \|y(k)\|^2 \right] = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[V^1(x_0) - V^1(x_T) \right] + \varrho \quad (4.82)$$

uma vez que $V^1(x_0)$ é avaliado em $x(0) = x_0$, então $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} E[V^1(x_0)] = 0$. O lado esquerdo de (4.82) é finito, levando em conta a observabilidade (Definição 3.3) conclui-se que a saída $y(\cdot)$ tem acesso a toda energia interna do sistema. Logo, nesse caso o sistema Θ_{ctr} é estocasticamente estável (Definição 3.2) e,

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[V^1(x_0) - V^1(x_T) \right] + \varrho \\ = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} V^1(x_0) + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[-V^1(x_T) \right] + \varrho \end{aligned} \quad (4.83)$$

em que,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[-V^1(x_T) \right] + \varrho = \varrho - \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[V^1(x_T) \right] \leq \varrho. \quad (4.84)$$

Agora, a igualdade (4.78) e o teorema Tauberiano permitem escrever

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 1} (1-\alpha) E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|y(k)\|^2 \right] \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\sum_{k=0}^T \|y(k)\|^2 \right] \quad (4.85)$$

o qual, juntamente com (4.83) e (4.84) permite concluir que a igualdade estrita em (4.13) ocorrerá se $\mathcal{E}_2^1(y(\cdot)) < \infty$.

□

Nota 4.5 *Estendendo um pouco mais a discussão para o caso controlado a longo prazo (CMLP), percebe-se que se $\alpha = 1$ e a matriz dinâmica A do sistema CSVIU (4.42) é instável, então a existência de uma região de inação global \mathcal{R}^{0*} não seria possível. No entanto, a modelagem CSVIU ainda poderá ser adotada uma vez que seja possível construir um controlador CSVIU para todo o espaço de estados.*

*Para mais detalhes acerca da região de inação ver Seção 2.4

5 Norma \mathcal{H}_∞ CSVIU: Mensuração do Ganho do Sinal de Entrada

Este capítulo propõe uma metodologia por meio da qual se torna possível trazer os conceitos de limitante superior da norma H_∞ para a modelagem CSVIU. O objetivo principal é possibilitar a obtenção de um projeto de controlador que minimize um dado indexador de desempenho submetido as piores perturbações possíveis.

A semelhança da estrutura adotada pelo Capítulo anterior, busca-se primeiro por meio da Seção 5.1 analisar a existência da norma em estudo. Adianta-se que a análise da norma H_∞ para sistemas CSVIU de ordem completa demonstra um nível maior de complexidade comparado ao caso de norma H_2 . Este fato demandou uma sutil alteração ($\sigma_x = 0$) na equação dinâmica (2.28) e será melhor explicado ao final da Seção 5.1. O controlador CSVIU via norma H_∞ é sintetizado na Seção 5.2, nela introduz-se uma variável de controle ao sistema perturbado e, desta forma, o problema de controle passa a ser interpretado como um problema de otimização *Min – Max*. Nas Seções 5.2.1 e 5.2.2 o caráter não colaborativo entre as entradas de controle e de distúrbio do problema de norma H_∞ é evidenciado de forma mais clara ao tratar o caso controlado via norma descontada. Por fim, as Seções 5.2.3 e 5.2.4 tratam do controle em norma H_∞ a longo prazo para sistemas CSVIU.

Uma vez que se propõe investigar a noção de norma H_∞ para sistemas CSVIU, considere o sistema (3.2) de forma modificada*:

$$\hat{\Theta} := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + (\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x(k)|))\varepsilon^x(k) + \sigma v(k) \\ z(k) = C_1 x(k) + D_1 v(k), \quad x(0) = x, \end{cases} \quad (5.1)$$

em que $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$ função determinística, $D_1^\top D_1 \in S^{r+}$ e $C_1^\top C_1 \in S^{n+}$.

Diferentemente do problema de norma H_2 estocástica, o distúrbio $v(\cdot)$ aqui deve ser tratado como uma função determinística. Caso se continue a considerar distúrbio de mesma natureza que $\omega(\cdot)$ o termo resultante do acoplamento entre a perturbação estocástica ε^x e o distúrbio irá se anular ao tomar a média na equação estocástica de Bellman (2.7). Sendo assim não será possível transmitir o efeito máximo do distúrbio ao sistema, e uma vez que a intenção é o estudo das consequências danosas à estabilidade e à atenuação na saída do sistema causadas pela pior entrada possível do distúrbio, não fará sentido então considerar v processo estocástico. De forma específica, devemos considerar

*Mais uma vez omite-se o caso controlado de início com a finalidade de evidenciar os resultados de forma mais direta e simplificada

v como um sinal determinístico que satisfaça condições de convergência compatíveis às Definições 3.1 e 3.2. Isto é, energia descontada ($\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \|v(k)\|^2 < \infty$) ou potência média ($\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^T \|v(k)\|^2 < \infty$) finita.

Em termos determinísticos, se tratando da norma H_∞ dois importantes conceitos relativos a estabilidade de sistemas merecem atenção, são eles: *Estabilidade Interna* e *Estabilidade Externa*. O primeiro diz respeito a estabilidade do sistema trivial, enfatizando então o efeito do estado inicial na trajetória do sistema quando qualquer entrada externa seja nula. Para definir estabilidade externa, suponha um sistema cuja única entrada seja o sinal v limitado, se este é externamente estável então sua saída perturbada $z(k) = C_1 x(k) + D_1 v(k)$ satisfará a desigualdade

$$\|v\|_p \leq M_1 < \infty \implies \|z\|_p \leq M_2 < \infty \quad (5.2)$$

em que $\|\cdot\|_p$ é uma norma adequada aos sinais $z(\cdot)$, $v(\cdot)$ e M_1, M_2 são escalares positivos. A estabilidade externa lida com restrições externas a solução trivial e garante que entradas limitadas produzam respostas limitadas. Em outras palavras, a estabilidade externa é concernente aos efeitos de $v(k)$ em $z(k)$, $\forall k \geq 0$ quando $x(0) = 0$, podendo ser vista como uma propriedade qualitativa que, se válida para $\hat{\Theta}$, permitirá quantificar o quanto o sinal $v(\cdot)$ é amplificado/atenuado pelo sistema.

As duas condições acima não se mostram suficientes a fim de garantir a estabilidade do sistema (5.1). De forma que as noções de estabilidade α -estocástica e estabilidade estocástica, apresentadas em Definição 3.1 e 3.2, ainda se fazem necessárias à solução de norma H_∞ CSVIU. Dando sentido a noção de norma H_∞ , aqui serão adotadas as medidas de energia descritas pelos custos em (2.81) e (2.82) para algum $0 < \alpha < 1$. Ao aplicar operação de maximização sobre v em ambas medidas $\mathcal{E}_\infty^\alpha$ e \mathcal{E}_∞ , obtém-se justamente a ideia desejada de majoração máxima da entrada de perturbação $v(k)$, $\forall k \geq 0$.

As duas possíveis normas de interesse estão definidas por

$$\mathcal{E}_\infty^\alpha(z(\cdot)) \quad \text{com} \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_\infty(z(\cdot)). \quad (5.3)$$

5.1 Norma \mathcal{H}_∞ CSVIU: Análise

Seja a variável matricial $U \in S^{n+}$, considere mais uma vez os operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_x(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top U \bar{\sigma}_x) & \mathcal{Z}_u(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_u^\top U \bar{\sigma}_u) \\ \mathcal{W}_x(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top U \sigma_x + \sigma_x^\top U \bar{\sigma}_x) & \mathcal{W}_u(U) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_u^\top U \sigma_u + \sigma_u^\top U \bar{\sigma}_u) \\ \mathcal{L}^\alpha(U) &= \alpha(A^\top U A + \mathcal{Z}_x(U)). \end{aligned}$$

definidos na Seção 2.4 e reproduzidos aqui por conveniência. Adicionalmente, defina os operadores:

$$\Upsilon(U) = D_1^\top D_1 + \alpha \sigma^\top U \sigma - \gamma^2 I_r \prec 0 \quad (5.4)$$

$$\Psi(U) = \alpha \sigma^\top U A + D_1^\top C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}. \quad (5.5)$$

Para algum $0 < T < \infty$, seja a medida

$$\mathcal{E}_\infty^{\alpha, T}(z(\cdot)) := E_x \left\{ \sum_{k=0}^T \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2] \right\}. \quad (5.6)$$

Note a partir de (5.6) que γ assume o mesmo significado de limitante superior adotado por padrão no computo da norma H_∞ de sistemas lineares determinísticos, este discutido da Seção 2.5.3.

As variáveis \mathbf{L}_k , \mathbf{r}_k e l_k com $0 \leq k \leq T$ são obtidas respectivamente pelas seguintes equações a diferenças,

$$\mathbf{L}_{k+1} := \mathcal{L}^\alpha(\mathbf{L}_k) + C_1^\top C_1 - \Psi(\mathbf{L}_k)^\top \Upsilon(\mathbf{L}_k)^{-1} \Psi(\mathbf{L}_k), \quad \mathbf{L}_0 = I_n, \quad (5.7a)$$

$$\alpha(A^\top - \Psi(\mathbf{L}_{T-k+1})^\top \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \sigma^\top) \mathbf{r}_{k+1}^0 + \alpha \mathcal{W}_{x_d}(\mathbf{L}_{T-k+1}) - \mathbf{r}_k = 0,$$

com

$$\sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) (\mathbf{r}_{k+1} \cdot s_j) = \mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i, \quad \mathbf{r}_T = 0_n, \quad e \quad s_i = \mathcal{S}(x_k), \quad (5.7b)$$

$$\alpha(l_{k+1} + \text{tr}\{\mathbf{L}_{T-k+1}(\sigma_x \sigma_x^\top)\}) - \frac{\alpha}{4} (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i)^\top \sigma \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \sigma^\top \mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i - l_k = 0, \quad l_T = 0 \quad (5.7c)$$

para todo $0 \leq k \leq T$ e algum $0 < \alpha < 1$. Em paralelo ao conjunto de equações em (3.11), note que $\mathbf{L}(\cdot)$ é unicamente definida e independente da trajetória dos estados do sistema $\hat{\Theta}$. Seja \mathbf{L}_T solução da equação recursiva (5.7a), então o vetor de norma limitada \mathbf{r}_0 e o escalar $l_0 \geq 0$, são obtidos de forma retroativa no tempo por (5.7b) e (5.7c) respectivamente a partir de um estágio T suficientemente grande com $\mathbf{r}_T = 0_n$ e $l_T = 0$.

Lema 5.1 *Seja $\gamma > 0$. Para todo $x(0) = x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\max_v \mathcal{E}_\infty^{\alpha, T}(z(\cdot)) = \|x\|_{\mathbf{L}_{T+1}}^2 + E[\langle \mathbf{r}_0, |x| \rangle + l_0]. \quad (5.8)$$

Para $\mathbf{L}(\cdot)$, $\mathbf{r}(\cdot)$ e $l(\cdot)$ dados por (5.7).

Prova Considere a função

$$\phi(k, x_k) := \alpha^k (x_k^\top P_k x_k + \langle \mathbf{r}_k, |x_k| \rangle + l_k),$$

para algum $k \rightarrow P_k = P_k^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \rightarrow r_k \in \mathbb{R}^n$, escalar $k \rightarrow l_k$ e para $k \rightarrow x_k$, o vetor de estados do sistema $\hat{\Theta}$. Assumindo que $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mencionados acima, satisfazem as seguintes equações

$$\alpha A^\top P_{k+1} A + \alpha \mathcal{Z}_x(P_{k+1}) - P_k + C_1^\top C_1 - \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) = 0, \quad P_T = I_n, \quad (5.9a)$$

$$r_{k+1} := \begin{cases} \alpha A^\top r_{k+1}^0 + \alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - \alpha \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top r_{k+1}^0 - r_k = 0, \\ \text{e para } \mathcal{S}(x_k) = s_i, \quad \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) s_j \cdot r_{k+1} = s_i \cdot r_{k+1}^0, \quad r_T = 0_n, \end{cases} \quad (5.9b)$$

$$\alpha l_{k+1} - l_k + \alpha \operatorname{tr}\{P_{k+1}(\sigma_x \sigma_x^\top)\} - \frac{\alpha^2}{4} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i] \rangle^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i] \rangle = 0, \quad (5.9c)$$

com $l_T = 0_n$, e por (3.10) tem-se que $r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i] = r_{k+1}^0 \cdot s_i$.

Tendo em mente as relações, $\operatorname{tr}\{U \cdot \operatorname{diag}(|x|)\} = \mathcal{S}(x)^\top \operatorname{Diag}(U)x$, $\langle v, |x| \rangle = \langle \mathcal{S}(x), v \cdot x \rangle$, em que $U \in S^{n+}$ e $v, x \in \mathbb{R}^n$, tomemos a equação dinâmica do sistema $\hat{\Theta}$ e façamos a seguinte avaliação no estágio $0 \leq k \leq T$,

$$\begin{aligned} \alpha^{-k} \left(\phi(k+1, x_{k+1}) - \phi(k, x_k) + \alpha^k \chi(k) \right) &= -\alpha^{-k} \left(\alpha^k \|C_1 x(k)\|^2 \right) \\ &= \alpha \|x_{k+1}\|_{P_{k+1}}^2 + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot x_{k+1} \rangle + \alpha l_{k+1} \\ &\quad - \left(\|x_k\|_{P_k}^2 + \langle s_k, r_k \cdot x_k \rangle + l_k \right) + \chi(k) \end{aligned} \quad (5.10)$$

em que $s_{k+1} = \mathcal{S}(x_{k+1})$, $s_k = \mathcal{S}(x_k)$ e $\chi(k) = \left(v_k^\top (D_1^\top D_1 - \gamma^2 I_r) v_k + 2x_k^\top C_1^\top D_1 v_k \right)$. Para $x_k = x$ e $\varepsilon_k^x = \varepsilon^x$, considere a identidade abaixo,

$$E[\|\sigma_x \varepsilon^x + \bar{\sigma}_x \operatorname{diag}(|x|) \varepsilon^x\|_U^2] = \|x\|_{\mathcal{Z}_x(U)}^2 + \langle \mathcal{S}(x), \mathcal{W}_x(U)x \rangle + \operatorname{tr}\{U(\sigma_x \sigma_x^\top)\}. \quad (5.11)$$

Acoplando a dinâmica do sistema $\hat{\Theta}$ em (5.10) e utilizando a identidade (5.11), fatoramos com relação as variáveis x_k e v_k do problema e, explicitando o operador \max_{v_k} , temos

$$\begin{aligned} & - \left(\|C_1 x(k)\|^2 \right) \\ &= \alpha \left(\|Ax_k\|_{P_{k+1}}^2 + \|x_k\|_{\mathcal{Z}_x(P_{k+1})}^2 \right) - \|x_k\|_{P_k}^2 + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (Ax_k) \rangle \\ & \quad + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle + \alpha l_{k+1} + \alpha \operatorname{tr}\{P_{k+1}(\sigma_x \sigma_x^\top)\} - l_k \\ & \quad + \max_{v_k} \left[v_k^\top \Upsilon(P_{k+1}) v_k + 2 \left(x_k^\top C_1^\top D_1 + \alpha (Ax_k)^\top P_{k+1} \sigma \right) v_k + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (\sigma v_k) \rangle \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

em que necessariamente $\Upsilon(P_{k+1}) \prec 0$. Agora, efetuando operação de maximização com relação ao distúrbio v_k e em seguida fatorando com respeito ao vetor de estados x_k , chegamos a,

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\|Ax_k\|_{P_{k+1}}^2 + \|x_k\|_{\mathcal{Z}_x(P_{k+1})}^2 \right) - \|x_k\|_{P_k}^2 - x_k^\top \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) x_k \\
&\quad + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (Ax_k) \rangle - \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (\sigma \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) x_k) \rangle \\
&\quad + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle + \alpha |l_{k+1} - l_k + \alpha \text{tr}\{P_{k+1}(\sigma_x \sigma_x^\top)\} \\
&\quad - \frac{\alpha^2}{4} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot s_{k+1} \rangle^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot s_{k+1} \rangle
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Tendo em mente que se $s_k = \mathcal{S}(x_k) = s_i$,

$$\begin{aligned}
&\alpha A^\top r_{k+1}^0 + \alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - \alpha \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top r_{k+1}^0 - r_k = 0 \\
&\quad \text{e } r_{k+1} \text{ é tal que } \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) (r_{k+1} \cdot s_j) = r_{k+1}^0 \cdot s_i,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

tem-se então em paralelo a (3.20),

$$\begin{aligned}
&E[\alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1}^0 \cdot (Ax_k - \sigma \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) x_k) \rangle \\
&\quad + \langle s_k, (\alpha \mathcal{W}_{x_d}(P_{k+1}) - r_k) \cdot x_k \rangle | \mathcal{S}(x_k) = s_i] \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) \langle s_j, \text{diag}(r_{k+1}) (Ax_k - \sigma \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) x_k) \rangle \\
&\quad - \alpha \langle (A^\top r_{k+1}^0 - \alpha \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top r_{k+1}^0) \cdot s_i, x_k \rangle \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) \langle (A^\top - \alpha \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top) r_{k+1} \cdot s_j, x_k \rangle \\
&\quad - \alpha \langle (A^\top - \alpha \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top) r_{k+1}^0 \cdot s_i, x_k \rangle = 0 \\
&= \alpha \langle (A^\top - \alpha \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top) r_{k+1}^0 \cdot s_j, x_k \rangle \\
&\quad - \alpha \langle (A^\top - \alpha \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top) r_{k+1}^0 \cdot s_i, x_k \rangle = 0
\end{aligned} \tag{5.15}$$

e

$$\begin{aligned}
&E[\alpha |l_{k+1} - l_k + \alpha \text{tr}\{P_{k+1}(\sigma_x \sigma_x^\top)\} \\
&\quad - \frac{\alpha^2}{4} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot s_{k+1} \rangle^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot s_{k+1} \rangle | \mathcal{S}(x_k) = s_i] \\
&= \alpha |l_{k+1} - l_k + \alpha \text{tr}\{P_{k+1}(\sigma_x \sigma_x^\top)\} \\
&\quad - \frac{\alpha^2}{4} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i] \rangle^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i] \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

com $s_i = \mathcal{S}(x_k)$ e $s_j = \mathcal{S}(x_{k+1})$.

Agora, por (5.9) e (5.13) tem-se que

$$E[\phi(k+1, x_{k+1}) - \phi(k, x_k) | x_k] = -\alpha^k E\left\{ \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} \tag{5.17}$$

e uma vez que o processo $\hat{\Theta}$ é markoviano,

$$E[\phi(T, x_T) - \phi(0, x_0)] = -E\left\{\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2]\right\}. \quad (5.18)$$

Pode-se reescrever (5.18) como,

$$\begin{aligned} E_{x_0}[\|x_0\|_{P_0}^2 + \langle r_0, |x_0\rangle + l_0] = & E_{x_0}\left\{\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2]\right\} \\ & + \alpha^k E_{x_0}[\|x_T\|_{P_T}^2 + \langle r_T, |x_T\rangle + l_T]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Note ainda que a solução de (5.9a) independe da trajetória do processo, isto é, sua solução é única. Fazendo $P_T = L_0 = I_n$ uma “reversão temporal” é introduzida e, a equação (5.9a) pode ser escrita equivalentemente por (5.7a). Com isto, a primeira expressão em (5.9b) e a expressão em (5.9c) podem ser escritas por

$$\alpha(A - \sigma\Upsilon(L_{T-k+1})^{-1}\Psi(L_{T-k+1}))^\top r_{k+1}^0 + \alpha\mathcal{W}_{x_d}(L_{T-k+1}) - r_k = 0,$$

tal que $\sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k)(r_{k+1} \cdot s_j) = r_{k+1}^0 \cdot s_i$,

e

$$\alpha(l_{k+1} + \text{tr}\{L_{T-k+1}(\sigma_x \sigma_x^\top)\}) - \frac{\alpha}{4}(r_{k+1}^0 \cdot s_i)^\top \sigma \Upsilon(L_{T-k+1})^{-1} \sigma^\top r_{k+1}^0 \cdot s_i - l_k = 0,$$

em que $r_T = 0_n$ e $l_T = 0$.

Finalmente, por (5.18) e equações (5.7a) - (5.7c), tem-se que

$$E_x[\phi(0, x) - \phi(T, x_T)] = E_x\left\{\sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2]\right\} = \|x\|_{L_T}^2 + E_x[\langle r_0, |x\rangle + l_0], \quad (5.20)$$

o que leva à representação final.

□

Iremos analisar com um pouco mais de atenção os resultados provenientes do Lema 5.1. Para tanto, considere as Notas a seguir:

Nota 5.1 Dadas as matrizes $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $P_{k+1} \in S^{n+}$, $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e o escalar $0 < \alpha < 1$, observe que uma restrição ao problema de norma é que a negatividade da matriz $\Upsilon(P_{k+1})$ se mantenha. Caso esta propriedade não seja observada, não é possível garantir a existência de um máximo em v para cada estágio k em (5.12) e portanto o problema de norma em discussão não terá solução para o γ escolhido.

Nota 5.2 Devido à negatividade da matriz $\Upsilon(P_{k+1})$ explicitada em (5.4), o termo quadrático $-\Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1})$ em (5.9a) é positivo. Diferentemente do problema

de controle em norma H_2 descontada em que (4.48a) não apresenta tal peculiaridade, esta condição é imposta à equação (5.7a) devido ao sistema (5.1) ser “realimentado” tão somente pela máxima entrada de distúrbio v possível, uma vez que não existe controle atuando no sistema.

Nota 5.3 A característica desestabilizante do distúrbio v é evidenciada ao fechar a malha do sistema tal como se v fosse uma variável de controle. Procedendo assim, maximizando com relação a v em (5.12) tem-se que a entrada exógena que realiza o máximo, quando injetada no sistema a cada estágio k assume a seguinte forma afim no estado x_k

$$v_k^* = -\Upsilon(P_{k+1})^{-1} \left(\Psi(P_{k+1})x_k + \frac{\alpha}{2} \sigma^\top (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i) \right) \quad (5.21)$$

com $\mathcal{S}(x_k) = s_i$. Além disso, a “matriz dinâmica perturbada” do sistema em malha fechada é dada por

$$A_{cl} = A - \sigma \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}). \quad (5.22)$$

Note que em (5.22) a matriz A tem seus auto valores perturbados e, ainda que esta possua os mesmos inscritos no círculo de raio unitário, é possível que o raio espectral da matriz A_{cl} equivalha ou ultrapasse a circunferência unitária, instabilizando completamente o sistema.

Nota 5.4 A Nota 5.3 descreve por (5.21) uma forma sistemática para determinação da entrada de perturbação máxima injetada no sistema. A princípio, note que esta apresenta uma dependência com relação ao vetor aleatório $\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathcal{S}(x_k) = \mathbf{r}_{k+1} \cdot E[s_j | s_i]$ – vide identidade (3.10). Isto indica que, nas proximidades da origem do espaço de estados, região em torno da qual há a possibilidade da existência de uma região de inação global, ocorre uma perturbação aleatória cuja natureza estatística é de difícil determinação. A fim de contornar esta complicação e possibilitar o estudo do problema de controle CSVIU em norma H_∞ , faremos uma simplificação na dinâmica do sistema CSVIU em (5.1). Considere então analisar o caso em que $\sigma_x = 0$. Com esta alteração, o operador $\mathcal{W}_x(\cdot)$ será nulo.

A equação recursiva em (5.7a) não sofrerá alterações, uma vez que esta não depende da matriz σ_x . As equações (5.7b) e (5.7c) no entanto serão modificadas para,

$$\alpha \left(A - \sigma \Upsilon(L_{T-k+1})^{-1} \Psi(L_{T-k+1}) \right)^\top \mathbf{r}_{k+1}^0 = \mathbf{r}_k, \quad (5.23)$$

em que,

$$s_i = \mathcal{S}(x_k), \quad \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) (\mathbf{r}_{k+1} \cdot \mathbf{s}_j) = \mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i, \quad \mathbf{r}_T = 0_n,$$

e

$$\alpha \left(\mathbf{l}_{k+1} - \frac{\alpha}{4} (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i)^\top \sigma \Upsilon(L_{T-k+1})^{-1} \sigma^\top \mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i \right) = \mathbf{l}_k, \quad \mathbf{l}_T = 0 \quad (5.24)$$

respectivamente. Sendo assim, a solução para as mesmas serão $\mathbf{r}_0 = 0_n$ e $\mathbf{l}_0 = 0$.

5.2 Controle CSVIU em Norma \mathcal{H}_∞

Tomando o modelo CSVIU com $\sigma_x = 0$ e adicionando controle em (5.1), obtém-se o sistema controlado,

$$\hat{\Theta}_{ctr} := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \hat{\sigma}(x, u)\omega_0(k) + \sigma v(k) \\ z(k) = C_1x(k) + D_1v(k) + D_2u(k), \quad x(0) = x \end{cases} \quad (5.25)$$

em que $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$ é função determinística, $C_1^\top C_1 \in S^{n+}$, $D_1^\top D_1 \in S^{r+}$ e $D_2^\top D_2 \in S^{m+}$, esta última estritamente positiva. Também, defina a função $\hat{\sigma}(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n+m}$ por,

$$\hat{\sigma}(x, u) = [\bar{\sigma}_x \text{diag}(|x|) \quad \sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u|)] \in \mathbb{R}^{n \times n+m} \quad (5.26)$$

e o vetor de “ruído branco” $\omega_0(k) = [\varepsilon^x(k) \quad \varepsilon^u(k)]^\top$ cujos elementos formam uma sequência *i.i.d.* de média zero e $\text{Cov}(\omega_0) = I_{n+m}$.

Antes de construir o problema de otimização a ser solucionado, é de interesse explorar o funcional que rege o somatório em (5.6) quanto algumas particularidades mais que o governam. Tomando-se apenas o termo geral de (5.6) no interior do operador esperança e reescrevendo-os, temos

$$\begin{aligned} \|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 &= \|C_1x(k) + D_1v(k) + D_2u(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \\ &= x_k^\top C_1^\top C_1 x_k + 2x_k^\top C_1^\top D_1 v_k + 2x_k^\top C_1^\top D_2 u_k + v_k^\top D_1^\top D_1 v_k \\ &\quad + 2u_k^\top D_2^\top D_1 v_k + u_k^\top D_2^\top D_2 u_k - \gamma^2 I_r v_k^\top v_k \end{aligned} \quad (5.27)$$

Com o desenvolvimento da expressão, haverá de surgir termos puramente quadráticos em v e u . Disto, uma particularidade aflora de imediato, devido a condição de negatividade imposta em (5.4). A expressão resultante se mostrará convexa na variável de controle u e concava na variável exógena v . De início, isto gera uma certa preocupação, partindo do princípio da programação dinâmica é interessante que um funcional de custo convexo seja adotado a fim de obter uma aproximação também convexa para a função valor. Mas, logo se percebe que a avaliação da política de controle ótima passa pela solução de um problema tipo sela, uma vez que a solução deste recai na maximização da entrada de perturbação v e, ao substituir este em (5.27), nos vemos diante de uma expressão estritamente convexa na variável de controle u se as condições da Proposição 2.3 forem atendidas. Esta tratativa, além de abrir espaço à convexidade da função custo, permite efetuar uma avaliação do sistema frente a um cenário extremo de perturbação oferecido pela variável exógena. Também, esta metodologia leva naturalmente ao computo do limitante superior $\gamma > 0$ da norma H_∞ do sistema, fato este que será melhor elucidado com o desenvolvimento dos cálculos.

Após estes comentários, temos um cenário pronto para construir os dois problemas de controle com objetivos bem definidos, este são:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min}_{u \in \mathcal{U}} \quad \text{Max}_{v \in \mathcal{W}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k E\{\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2\} \quad \text{ou} \\
 & \text{Min}_{u \in \mathcal{U}} \quad \text{Max}_{v \in \mathcal{W}} \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T E\{\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2\} \\
 & \text{Sujeito a} \quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x(k)|)\varepsilon^x(k) \\
 & \quad \quad \quad + (\sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u(k)|))\varepsilon^u(k) + \sigma v(k), \\
 & \quad \quad \quad z(k) = C_1 x(k) + D_1 v(k) + D_2 u(k), \quad x(0) = x \in \mathbb{R}^n, \\
 & \quad \quad \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad C_1^\top C_1 \succeq 0, \quad D_1^\top D_1 \succeq 0, \quad D_2^\top D_2 \succ 0.
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Mais uma vez, recorre-se a solução de controle via teoria da programação dinâmica, o que permitirá a divisão do problema original em subproblemas localizados no tempo e, a partir destes, determina-se a sequência de controle ótima por realimentação de estados π^* na classe dos controladores markovianos que minimiza o ganho de energia do sistema.

5.2.1 O caso descontado em norma \mathcal{H}_∞ : Controle em região de inação global

Será abordado a princípio as possíveis regiões do espaço de estados cujo controle seja nulo, isto é $u^*(x) = 0_m, \forall x \in \mathcal{R}^0$. Apesar da entrada de controle ser nula, a entrada de distúrbio não cessará de atuar sobre o processo, tornando a região de inação uma possível zona de desequilíbrio e, conseqüentemente, podendo inviabilizar sua existência. Fazendo então $u^*(x) = 0_m$ em (5.25) a dinâmica do sistema $\hat{\Theta}_{ctr}$ se torna,

$$x(k+1) = Ax(k) + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x|)\varepsilon^x(k) + \sigma_u \varepsilon^u(k) + \sigma v(k). \tag{5.29}$$

Para o próximo Lema, defina \mathbf{L}_k e l_k , soluções únicas das seguintes equações a diferenças,

$$\mathbf{L}_{k+1} := \mathcal{L}^\alpha(\mathbf{L}_k) + C_1^\top C_1 - \Psi(\mathbf{L}_k)^\top \Upsilon(\mathbf{L}_k)^{-1} \Psi(\mathbf{L}_k), \quad \mathbf{L}_0 = I_n, \tag{5.30a}$$

$$l_{k+1} := \alpha(l_k + \text{tr}\{\mathbf{L}_k(\sigma_u \sigma_u^\top)\}), \quad l_0 = 0. \tag{5.30b}$$

para $0 \leq k \leq T$ e $0 < \alpha < 1$.

Lema 5.2 *Seja $\gamma > 0$ dado. Para todo $x(0) = x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\max_v \mathcal{E}_\infty^{\alpha, T}(z(\cdot)) = \|x\|_{\mathbf{L}_{T+1}}^2 + l_{T+1}. \tag{5.31}$$

Para $\mathbf{L}(\cdot)$ e $l(\cdot)$ dados por (5.30).

Prova Observe que o processo (5.29) surge da equação dinâmica do sistema (5.1) a partir da substituição do termo $\sigma_u \varepsilon^u(\cdot)$ em lugar de $\sigma_x \varepsilon^x(\cdot)$. Feita esta comparação, recorde o Lema 5.1, válido para o sistema não controlado $\hat{\Theta}$ em (5.1). Substitua a identidade em (5.11) por,

$$E[\|\sigma_u \varepsilon^u + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x|)\varepsilon^x\|_U^2] = \|x\|_{\mathcal{Z}(U)}^2 + \text{tr}\{U(\sigma_u \sigma_u^\top)\} \quad (5.32)$$

Como $\sigma_x = 0$ tem-se que as equações a serem satisfeitas serão dadas por,

$$\alpha A^\top P_{k+1} A + \alpha \mathcal{Z}_x(P_{k+1}) - P_k + C_1^\top C_1 - \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) = 0 \quad (5.33a)$$

$$r_{k+1} := \begin{cases} \alpha (A - \sigma \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \Psi(\mathbf{L}_{T-k+1}))^\top r_{k+1}^0 = r_k, \\ \text{e para } \mathcal{S}(x_k) = s_i, \quad \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) s_j \cdot r_{k+1} = s_i \cdot r_{k+1}^0 \end{cases} \quad (5.33b)$$

$$\begin{aligned} \alpha l_{k+1} + \alpha \text{tr}\{\mathbf{L}_{T-k+1}(\sigma_u \sigma_u^\top)\} \\ - \frac{\alpha^2}{4} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i] \rangle^\top \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \langle \sigma^\top, r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i] \rangle = l_k. \end{aligned} \quad (5.33c)$$

De imediato, depreende-se que a solução que atenderá (5.33b) é $r_0 = 0_n$ (vide Nota 5.4), eliminando a dependência de l_k com respeito a r_{k+1}^0 . Portanto, as soluções das equações em (5.33a) e (5.33c) serão únicas e independentes da trajetória do processo.

Efetuando mudança de variáveis, isto é $P_T = \mathbf{L}_0 = I_n$ e $l_T = l_0 = 0$, uma “reversão temporal” é introduzida, com isto (5.33a) e (5.33c) podem ser reescritas por,

$$\mathbf{L}_{k+1} = \mathcal{L}^\alpha(\mathbf{L}_k) + C_1^\top C_1 - \Psi(\mathbf{L}_k)^\top \Upsilon(\mathbf{L}_k)^{-1} \Psi(\mathbf{L}_k), \quad \mathbf{L}_0 = I_n, \quad (5.34)$$

$$l_{k+1} = \alpha l_k + \alpha \text{tr}\{\mathbf{L}_k(\sigma_u \sigma_u^\top)\}, \quad l_0 = 0. \quad (5.35)$$

Finalmente, semelhantemente à passagem (5.20) escrevemos,

$$E_x \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2] \right\} = \|x\|_{\mathbf{L}_T}^2 + l_T. \quad (5.36)$$

Isto finaliza a prova. □

Proposição 5.1 (Controle em Norma H_∞ descontada sobre região de inação) *Seja $\gamma > 0$ e suponha $\mathbf{L}^\alpha \in S^{n+}$ definida positiva solução única de (5.43). Se o par $(C_1, \mathcal{L}^\alpha)$ é α -observável, então o sistema $\hat{\Theta}_{ctr}$ é α -estocasticamente estável e sua norma H_∞ descontada é dada por*

$$\max_v \mathcal{E}_\infty^\alpha(z(\cdot)) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{tr}\{\mathbf{L}^\alpha(\sigma_u \sigma_u^\top)\}. \quad (5.37)$$

Prova Para esta prova, defina a função $\mathbf{G}^\alpha(x) := \|x\|_{\mathbb{L}_T^\alpha}^2 + l_T^\alpha$, obtida a partir do Lema 5.2 $T > 0$. Em semelhança a passagem (5.13) podemos representar a medida $\mathcal{E}_\infty^{\alpha,T}(z(\cdot))$ em (5.6) por

$$\begin{aligned} \max_v \mathcal{E}_\infty^{\alpha,T}(z(\cdot)) &= E \left\{ \sum_{k=0}^T \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2] \right\} = E \left\{ \sum_{k=0}^T \alpha^k (\mathbf{G}^\alpha(x_k) - \alpha \mathbf{G}^\alpha(x_{k+1})) \right\} \\ &= \mathbf{G}^\alpha(x_0) - E[\alpha^T \mathbf{G}^\alpha(x_T)] \quad \text{para } T < \infty. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Agora, tome o limite em T na expressão (5.38) e utilize os mesmos argumentos que levam à passagem (4.3), para obter

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \max_v \mathcal{E}_\infty^{\alpha,T}(z(\cdot)) = \mathbf{G}^\alpha(x_0) - E[\alpha f(x_1) + \alpha^2 f(x_2) + \alpha^3 f(x_3) + \dots] \quad (5.39)$$

em que $E[f(x_k)] = E[f(x_k)|x_{k-1}, \dots, x_0] = E[\mathbf{G}^\alpha(x_k) - \mathbf{G}^\alpha(x_k)|x_{k-1}, \dots, x_0]$. Agora, assumindo que o processo é markoviano, tem-se que

$$E[f(x_k)|x_{k-1}, \dots, x_0] = E[f(x_k)|x_{k-1}]. \quad (5.40)$$

Pelo Corolário 3.1 a α -observabilidade e a finitude da medida $\mathcal{E}_2^\alpha(z(\cdot))$ implicam que $\mathcal{E}_2^\alpha(x(\cdot)) < \infty$ (α -estabilidade). Sob estas hipóteses o limite da série telescópica em (5.39) existe e sua convergência ocorre em média para \mathbf{G}_0^α , isto é

$$\mathbf{G}^\alpha(x_0) = \|x_0\|_{\mathbb{L}_\alpha}^2 + l^\alpha \quad (5.41)$$

com $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ determinístico. Por fim, para obter a norma H_∞ descontada do sistema estocástico (5.1), basta tomar $x_0 = 0$ e deste modo a norma H_∞ CSVIU descontada se mostra equivalente ao escalar

$$\max_v E \left\{ \sum_{k=0}^T \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2] \right\} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{tr}\{\mathbf{L}^\alpha(\sigma_u \sigma_u^\top)\} < \infty. \quad (5.42)$$

isto finaliza a prova. □

Em adicional, considere $0 < \alpha < 1$ e algum $\gamma > 0$. Afirma-se que, se a equação tipo Riccati modificada

$$\alpha A^\top U A + \alpha \mathcal{Z}_x(U) - U - \Psi(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \Psi(U) + C_1^\top C_1 = 0 \quad (5.43)$$

admite uma única solução $U \in S^{n+}$ definida positiva, então a equação

$$l^\alpha(1-\alpha) = \alpha \text{tr}\{U(\sigma_u \sigma_u^\top)\} \quad (5.44)$$

admite solução única $l^\alpha \geq 0$. Neste caso, os coeficientes $\mathbf{L}^\alpha \in S^{n+}$ e $l^\alpha \geq 0$ da função valor (5.41) são as respectivas soluções das equações (5.43) e (5.44).

5.2.2 O caso descontado em norma \mathcal{H}_∞ : Controle assintótico

Nesta seção define-se os operadores adicionais para algum $U \in S^{n+}$

$$\Gamma(U) = \alpha \sigma^\top U B + D_1^\top D_2 \in \mathbb{R}^{r \times m} \quad (5.45)$$

$$\Delta(U) = \Lambda(U) - \Gamma(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \Gamma(U) \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (5.46)$$

Para fins de mudança notacional, reescreva ainda (2.34) e (2.41) como,

$$\Sigma(U) = \alpha B^\top U A + D_2^\top C_1 \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (5.47)$$

$$\Lambda(U) = \alpha B^\top U B + \alpha \mathcal{Z}_u(U) + D_2^\top D_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (5.48)$$

Em subseções anteriores, foi discutido que a solução do problema de controle ótimo CSVIU via o funcional de custo (5.6) passaria necessariamente pela abordagem de jogos diferenciais não cooperativos. Em termos de teoria da decisão, isto significa que estaremos lhe dando com um problema de controle *Min – Max*. No entanto, até agora, a necessidade desta tratativa ainda não se manifestou de forma direta no problema de norma proposto.

Todavia, trabalhando sobre regiões assintóticas, a solução de controle assume um formato que permite evidenciar o comportamento competitivo assumido pelas variáveis de entrada do sistema. Para demonstrar este curso não colaborativo assumido por ambas variáveis de entrada — variáveis de controle e de perturbação — propõe-se desenvolver uma lei de controle estacionária que caracterize localmente a função valor do problema sobre cada região asintótica.

Sejam \mathbf{L}_k , \mathbf{r}_k e l_k com $0 \leq k \leq T$ soluções advindas de

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{k+1} := & \mathcal{L}^\alpha(\mathbf{L}_k) + C_1^\top C_1 - \Psi(\mathbf{L}_k)^\top \Upsilon(\mathbf{L}_k)^{-1} \Psi(\mathbf{L}_k) \\ & - \left\{ \Sigma(\mathbf{L}_k) - \Gamma(\mathbf{L}_k)^\top \Upsilon(\mathbf{L}_k)^{-1} \Psi(\mathbf{L}_k) \right\}^\top \Delta(\mathbf{L}_k)^{-1} \left\{ \cdot \right\}, \quad \mathbf{L}_0 = I_n, \end{aligned} \quad (5.49a)$$

$$\begin{aligned} & \alpha A^\top \mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i - \alpha \Psi(\mathbf{L}_{T-k+1})^\top \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \sigma^\top \mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i - \mathbf{r}_k \cdot s_i \\ & - \alpha \left\{ \Sigma(\mathbf{L}_{T-k+1}) - \Gamma(\mathbf{L}_{T-k+1})^\top \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \Psi(\mathbf{L}_{T-k+1}) \right\}^\top \Delta(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \\ & \cdot \left\{ \Omega(\mathbf{L}_{T-k+1}) - \Gamma(\mathbf{L}_{T-k+1})^\top \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.49b)$$

com

$$\sum_{j=1}^{3n} p_{ji}(x_k) (\mathbf{r}_{k+1} \cdot s_j) = \mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i, \quad \mathbf{r}_T = 0, \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(x_k) = s_i,$$

$$\begin{aligned} \alpha l_{k+1} - l_k + \alpha \operatorname{tr}\{\mathbf{L}_{T-k+1}(\sigma_u \sigma_u^\top)\} - \frac{\alpha^2}{4}(\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i)^\top \sigma \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i) \\ - \frac{\alpha^2}{4} \left\{ \Omega(\mathbf{L}_{T-k+1}) - \Gamma(\mathbf{L}_{T-k+1})^\top \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i) \right\}^\top \Delta(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \{ \cdot \} = 0, \end{aligned} \quad (5.49c)$$

$l_T = 0$, para todo $0 \leq k \leq T$. E para algum $s_u \in \{1, -1\}^m$,

$$\Omega(\mathbf{L}_{T-k+1}) := \mathcal{W}_{u_d}(\mathbf{L}_{T-k+1}) \cdot s_u + B^\top (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i) \in \mathbb{R}^m. \quad (5.50)$$

Lema 5.3 *Seja $\gamma > 0$ e considere o sistema controlado (5.25). Seja $x(k) \in \mathcal{R}^{s_u}$ vetor de estados transitando sobre regiões assintóticas do espaço de estados euclidiano \mathbb{R}^n para todo $k = 1, 2, \dots, T$, então*

$$\min_u \max_v \mathcal{E}_\infty^{\alpha, T}(z(\cdot)) = \|x\|_{\mathbf{L}_{T+1}}^2 + E_x[\langle \mathbf{r}_0, |x| \rangle + l_0]. \quad (5.51)$$

Para $\mathbf{L}(\cdot)$, $\mathbf{r}(\cdot)$ e $l(\cdot)$ dados por (5.49). Ademais, no instante k a lei de controle em malha fechada assume uma forma afim no estado x_k , esta é

$$\begin{aligned} u_k^* = -\Delta(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \left((\Sigma(\mathbf{L}_{T-k+1}) - \Gamma(\mathbf{L}_{T-k+1})^\top \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \Psi(\mathbf{L}_{T-k+1})) x_k \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{2} (\Omega(\mathbf{L}_{T-k+1}) - \Gamma(\mathbf{L}_{T-k+1})^\top \Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i)) \right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Em contra partida, a entrada de perturbação máxima injetada no sistema no instante k é dada por

$$v_k^* = -\Upsilon(\mathbf{L}_{T-k+1})^{-1} \left(\Psi(\mathbf{L}_{T-k+1}) x_k + \Gamma(\mathbf{L}_{T-k+1}) u_k^* + \frac{\alpha}{2} \sigma^\top (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathbf{s}_i) \right), \quad (5.53)$$

para algum $\mathbf{L}_{T-k+1} \in S^{n+}$, $s_i = \mathcal{S}(x_k)$ e $s_u \in \{1, -1\}^m$.

Prova Considere a função

$$\phi(k, x_k) := \alpha^k (x_k^\top P_k x_k + \langle \mathbf{r}_k, |x_k| \rangle + l_k),$$

para algum $k \rightarrow P_k = P_k^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \rightarrow \mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^n$, escalar $k \rightarrow l_k$ e para $k \rightarrow x_k$, o vetor de estados do sistema controlado $\hat{\Theta}_{ctr}$. Assumindo que $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{r} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mencionados acima, satisfazem as seguintes equações

$$\begin{aligned} \alpha A^\top P_{k+1} A + \alpha \mathcal{Z}_x(P_{k+1}) - P_k + C_1^\top C_1 - \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) \\ - \left\{ \Sigma(P_{k+1}) - \Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) \right\}^\top \Delta(P_{k+1})^{-1} \{ \cdot \} = 0, \quad P_T = I_n, \end{aligned} \quad (5.54a)$$

$$\mathbf{r}_{k+1} := \begin{cases} \alpha A^\top \mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i - \alpha \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top \mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i - \mathbf{r}_k \cdot s_i \\ \quad - \alpha \left\{ \Sigma(P_{k+1}) - \Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) \right\}^\top \Delta(P_{k+1})^{-1} \\ \quad \cdot \left\{ \Omega(P_{k+1}) - \Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot s_i) \right\} = 0 \\ \text{e para } \mathcal{S}(x_k) = s_i, \quad \sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k) s_j \cdot \mathbf{r}_{k+1} = s_i \cdot \mathbf{r}_{k+1}^0, \quad \mathbf{r}_T = 0_n, \end{cases} \quad (5.54b)$$

$$\begin{aligned} \alpha l_{k+1} - l_k + \alpha \operatorname{tr}\{P_{k+1}(\sigma_u \sigma_u^\top)\} - \frac{\alpha^2}{4} (\mathbf{r}_{k+1} \cdot E[s_j | s_i])^\top \sigma \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}_{k+1} \cdot E[s_j | s_i]) \\ - \frac{\alpha^2}{4} \left\{ \Omega(P_{k+1}) - \Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}_{k+1} \cdot E[s_j | s_i]) \right\}^\top \Delta(P_{k+1})^{-1} \left\{ \cdot \right\} = 0, \end{aligned} \quad (5.54c)$$

com $l_T = 0$, e pela identidade (3.10) se tem ainda $\Omega(P_{k+1}) = \mathcal{W}_{u_d}(U) \cdot s_u + B^\top (\mathbf{r}_{k+1} \cdot E[s_j | s_i])$ com $s_u \in \{1, -1\}^m$.

Tomemos a equação dinâmica do sistema $\hat{\Theta}_{ctr}$ e, por intermédio da Equação Estocástica de Bellman (2.7) façamos a seguinte avaliação no estágio $0 \leq k \leq T$,

$$\begin{aligned} \alpha^{-k} \left(\phi(k+1, x_{k+1}) - \phi(k, x_k) + \alpha^k \chi(k) \right) &= -\alpha^{-k} \left(\alpha^k \|C_1 x(k)\|^2 \right) \\ &= \alpha \|x_{k+1}\|_{P_{k+1}}^2 + \alpha \langle s_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1} \cdot x_{k+1} \rangle + \alpha l_{k+1} \\ &\quad - \left(\|x_k\|_{P_k}^2 + \langle s_k, \mathbf{r}_k \cdot x_k \rangle + l_k \right) + \chi(k) \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde $s_{k+1} = \mathcal{S}(x_{k+1})$, $s_k = \mathcal{S}(x_k)$ e

$$\chi(k) = \left(v_k^\top (D_1^\top D_1 - \gamma^2 I_r) v_k + 2(x_k^\top C_1^\top D_1 + u_k^\top D_2^\top D_1) v_k + u_k^\top D_2^\top D_2 u_k + 2x_k^\top C_1^\top D_2 u_k \right).$$

Para alguma matriz $U \in S^{n+}$, admita a identidade,

$$\begin{aligned} E[\|\hat{\sigma}(x, u) \omega_0\|_U^2] &= x^\top \mathcal{Z}_x(U) x + u^\top \mathcal{Z}_u(U) u + \operatorname{tr}\{\mathcal{W}_u(U) \operatorname{diag}(|u|)\} + \operatorname{tr}\{U \sigma_u \sigma_u^\top\} \\ &= \|x\|_{\mathcal{Z}_x(U)}^2 + \|u\|_{\mathcal{Z}_u(U)}^2 + \langle s_u, \mathcal{W}_u(U) u \rangle + \operatorname{tr}\{U \sigma_u \sigma_u^\top\}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Agora, acople a dinâmica de $\hat{\Theta}_{ctr}$ em (5.55) e substitua a identidade (5.56), reorganizando a expressão resultante com relação ao estado x_k , distúrbio v_k e variável de controle u_k , chega-se a

$$\begin{aligned} & - \left(\|C_1 x(k)\|^2 \right) \\ &= \alpha \left(\|Ax_k\|_{P_{k+1}}^2 + \|x_k\|_{\mathcal{Z}_x(P_{k+1})}^2 \right) - \|x_k\|_{P_k}^2 + \alpha \langle s_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1} \cdot (Ax_k) \rangle \\ &\quad + \alpha l_{k+1} - l_k + \alpha \operatorname{tr}\{P_{k+1}(\sigma_u \sigma_u^\top)\} - \langle s_k, \mathbf{r}_k \cdot x_k \rangle \\ &\quad + \min_{u_k} \left[u_k^\top \Lambda(P_{k+1}) u_k + (2\Sigma(P_{k+1}) x_k + \alpha \Omega(P_{k+1}))^\top u_k + \max_{v_k} \left[v_k^\top \Upsilon(P_{k+1}) v_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2\Psi(P_{k+1}) x_k + 2\Gamma(P_{k+1}) u_k + \alpha \sigma^\top \mathbf{r}_{k+1} \cdot s_{k+1})^\top v_k \right] \right] \end{aligned} \quad (5.57)$$

com $\Omega(P_{k+1}) = \mathcal{W}_{u_d}(U) \cdot s_u + B^\top r_{k+1} \cdot s_{k+1}$, para algum s_u e necessariamente $\Upsilon(P_{k+1}) \prec 0$ e $\Lambda(P_{k+1}) \succ 0$. Maximizando com relação ao distúrbio v_k — ou, equivalentemente, substituindo (5.53) em (5.57) — haveremos de obter

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\|Ax_k\|_{P_{k+1}}^2 + \|x_k\|_{\mathcal{Z}_x(P_{k+1})}^2 \right) - \|x_k\|_{P_k}^2 - x_k^\top \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) x_k \\
&\quad + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (Ax_k) \rangle - \langle s_k, r_k \cdot x_k \rangle - \alpha (r_{k+1} \cdot s_{k+1})^\top \sigma \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) x_k \\
&\quad + \alpha l_{k+1} - l_k + \alpha \operatorname{tr}\{P_{k+1}(\sigma_u \sigma_u^\top)\} - \frac{\alpha^2}{4} (r_{k+1} \cdot s_{k+1})^\top \sigma \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top (r_{k+1} \cdot s_{k+1}) \\
&\quad + \min_{u_k} \left[u_k^\top \Delta(P_{k+1}) u_k + (2\Sigma(P_{k+1}) x_k + \alpha \Omega(P_{k+1}) - 2\Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) x_k \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - \alpha \Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top (r_{k+1} \cdot s_{k+1}) \right)^\top u_k \Big]. \tag{5.58}
\end{aligned}$$

O próximo passo consiste na minimização da Hamiltoniana em u_k — ou, equivalentemente, substituição da lei de controle (5.52) em (5.58) — e reordenação da equação, de forma a explicitar a dependência no vetor de estados $x = x_k$, obtendo,

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\|Ax\|_{P_{k+1}}^2 + \|x\|_{\mathcal{Z}_x(P_{k+1})}^2 \right) - \|x\|_{P_k}^2 - x^\top \Psi(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) x \\
&\quad - x^\top \left\{ \Sigma(P_{k+1}) - \Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) \right\}^\top \Delta(P_{k+1})^{-1} \{ \cdot \} x \\
&\quad + \alpha \langle s_{k+1}, r_{k+1} \cdot (Ax) \rangle - \langle s_k, r_k \cdot x \rangle - \alpha (r_{k+1} \cdot s_{k+1})^\top \sigma \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) x \\
&\quad - \alpha \left\{ \Omega(P_{k+1}) - \Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top (r_{k+1} \cdot s_{k+1}) \right\}^\top \Delta(P_{k+1})^{-1} \\
&\quad \quad \quad \cdot \left\{ \Sigma(P_{k+1}) - \Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \Psi(P_{k+1}) \right\} x \\
&\quad + \alpha l_{k+1} - l_k + \alpha \operatorname{tr}\{P_{k+1}(\sigma_u \sigma_u^\top)\} - \frac{\alpha^2}{4} (r_{k+1} \cdot s_{k+1})^\top \sigma \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top (r_{k+1} \cdot s_{k+1}) \\
&\quad - \frac{\alpha^2}{4} \left\{ \Omega(P_{k+1}) - \Gamma(P_{k+1})^\top \Upsilon(P_{k+1})^{-1} \sigma^\top (r_{k+1} \cdot s_{k+1}) \right\}^\top \Delta(P_{k+1})^{-1} \{ \cdot \}. \tag{5.59}
\end{aligned}$$

Uma vez que $s_k = \mathcal{S}(x_k) = s_i$, $s_k = \mathcal{S}(x_{k+1}) = s_j$ e por (3.10) $\sum_{j=1}^{3^n} p_{ji}(x_k)(r_{k+1} \cdot s_j) = r_{k+1} \cdot E[s_j | s_i]$, tem-se que ao tomar o operador esperança $E[\cdot]$ nos termos da equação em (5.59), em média, as igualdades em (5.54b) e (5.54c) são atendidas. Por (5.54) e (5.59),

$$E[\phi(k+1, x_{k+1}) - \phi(k, x_k) | x_k] = -\alpha^k E \left\{ \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} \tag{5.60}$$

e uma vez que o processo $\hat{\Theta}_{ctr}$ é markoviano,

$$E[\phi(T, x_T) - \phi(0, x_0)] = -E \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\}. \tag{5.61}$$

Agora, pode-se reescrever (5.61) por,

$$\begin{aligned}
E_{x_0} [\|x_0\|_{P_0}^2 + \langle r_0, |x_0| \rangle + l_0] &= E_{x_0} \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} \\
&\quad + \alpha^k E_{x_0} [\|x_T\|_{P_T}^2 + \langle r_T, |x_T| \rangle + l_T]. \tag{5.62}
\end{aligned}$$

A equação em (5.54a) possui solução única e, fazendo $P_T = L_0 = I_n$, se introduz uma “reversão temporal” tornando esta passível de ser reescrita equivalentemente por (5.49a). Por sua vez, a primeira equação em (5.54b) e a equação (5.54c) são solucionadas retroativamente no tempo, isto é, por (5.49b) e (5.49c), com $r_T = 0_n$ e $l_T = 0$.

Logo, por (5.61) e (5.49) tem-se que

$$E_x[\phi(0, x) - \phi(T, x_T)] = E_x \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} \alpha^k \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} = \|x\|_{L_T}^2 + E_x[\langle r_0, |x| \rangle + l_0]. \quad (5.63)$$

□

O lema a seguir fornece a solução assintótica para o desempenho do atuador CSVIU tendo por critério de custo a norma H_∞ descontada.

Lema 5.4 (*Controle assintótico em norma H_∞ descontada*) *Seja $\gamma > 0$ e suponha $L^\alpha \in S^{n+}$ definida positiva solução única de (5.68). Se o par $(C_1, \mathcal{L}^\alpha)$ é α -observável, então o sistema $\hat{\Theta}_{ctr}$ é α -estocasticamente estável e sua norma H_∞ descontada em regiões assintóticas é dada por*

$$\begin{aligned} \|\hat{\Theta}_{ctr}\|_\infty = \frac{\alpha}{1-\alpha} & \left(\text{tr}\{L^\alpha(\sigma_u \sigma_u^\top)\} - \frac{\alpha}{4} (r^\alpha \cdot s_x)^\top \sigma \Upsilon (L^\alpha)^{-1} \sigma^\top (r^\alpha \cdot s_x) \right. \\ & \left. - \frac{\alpha}{4} \left\{ \Omega(L^\alpha) - \Gamma(L^\alpha)^\top \Upsilon (L^\alpha)^{-1} \sigma^\top (r^\alpha \cdot s_x) \right\}^\top \Delta(L^\alpha)^{-1} \left\{ \cdot \right\} \right) \end{aligned} \quad (5.64)$$

com $\Omega(L^\alpha) = \mathcal{W}_{u_d}(L^\alpha) \cdot s_u + B^\top (r^\alpha \cdot s_x)$ e $s_x = \mathcal{S}(x)$.

Prova Redefina a quadrática $G^\alpha(x)$ por $G^\alpha(x) := \|x\|_{L_\alpha}^2 + E[\langle r_0, |x| \rangle + l_0]$, esta obtida a partir do Lema 5.3 para algum $T > 0$. A partir desta e procedendo de forma semelhante aos passos descritos em (4.2)-(4.5) se torna possível escrever

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \min_u \max_v \mathcal{E}_\infty^{\alpha, T}(z(\cdot)) = \|x_0\|_{L_\alpha}^2 + E[\langle r_0, |x_0| \rangle + l_0], \quad (5.65)$$

em que admitiu-se as hipóteses de α -observabilidade e finitude da medida $\mathcal{E}_2^\alpha(z(\cdot))$, implicando em α -estabilidade do sistema (5.25) (vide Corolário 3.1).

Suponha $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ em regiões de sinais homogêneos \mathcal{R}^{s_u} suficientemente distantes de regiões de inação \mathcal{R}_i^0 de forma que não haja possibilidade de variação dos sinais do estado e controle. Deste modo, pode-se escrever a função valor assintótica do problema de controle em norma H_∞ por,

$$G^\alpha(x_0) = \|x_0\|_{L_\alpha}^2 + \langle r^\alpha, |x_0| \rangle + l^\alpha \quad (5.66)$$

com $L^\alpha \in S^{n+}$ e $r^\alpha \in \mathbb{R}^n$, $l^\alpha \geq 0$ denominados soluções assintóticas. Neste sentido, entenda-se que a função (5.66) vale assintoticamente no espaço de estados para algum s_x e algum s_u .

Por fim, uma vez que a norma H_∞ é definida para um estado inicial nulo, faça $x_0 = 0$ para obter

$$\begin{aligned} \min_u \max_v E_x \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} \\ = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\text{tr} \{ L^\alpha (\sigma_u \sigma_u^\top) \} - \frac{\alpha}{4} (r^\alpha \cdot s_x)^\top \sigma \Upsilon (L^\alpha)^{-1} \sigma^\top (r^\alpha \cdot s_x) \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{4} \left\{ \Omega(L^\alpha) - \Gamma(L^\alpha)^\top \Upsilon(L^\alpha)^{-1} \sigma^\top (r^\alpha \cdot s_x) \right\}^\top \Delta(L^\alpha)^{-1} \{ \cdot \} \right) < \infty \end{aligned} \quad (5.67)$$

em que $\Omega(L^\alpha) = \mathcal{W}_{ud}(L^\alpha) \cdot s_u + B^\top (r^\alpha \cdot s_x) < \infty$.

□

Considere $0 < \alpha < 1$ e algum $\gamma > 0$. Se a equação de Riccati modificada

$$\begin{aligned} \alpha A^\top U A + \alpha \mathcal{Z}_x(U) - U - \Psi(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \Psi(U) \\ - \left\{ \Sigma(U) - \Gamma(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \Psi(U) \right\}^\top \Delta(U)^{-1} \{ \cdot \} + C_1^\top C_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

admite solução única $U \in S^{n+}$ definida positiva, então dado $T > 0$ suficientemente grande, o vetor r_0 e o escalar l_0 são obtidos retroativamente no tempo por (5.49b) e (5.49c), a partir de $r_T = 0_n$ e $l_T = 0$.

Introduzindo a noção de regiões assintóticas de sinais homogêneos ao Lema 5.3, por definição tem-se que dado o i -ésimo hiperoctante \mathbb{O}_i do \mathbb{R}^n o vetor de sinais $s_u \in \{1, -1\}^m$ para qualquer entrada de controle é fixo. Admitir esta hipótese torna possível obter soluções únicas também por intermédio das equações em (5.49b) e (5.49c). Neste caso, tendo sido obtida a solução matricial $U \in S^{n+}$ em (5.68), o vetor $r^\alpha \in \mathbb{R}^n$ e o escalar $l^\alpha \geq 0$ são obtidos por,

$$\begin{aligned} r^\alpha \cdot s_x = \alpha \left(I_n - \alpha A + \alpha \sigma \Upsilon(U)^{-1} \Psi(U) - \alpha [\sigma \Upsilon(U)^{-1} \Gamma(U) - B] \Delta(U)^{-1} \right. \\ \left. \cdot [\Sigma(U) - \Gamma(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \Psi(U)] \right)^{-\top} \\ \cdot \left([\Gamma(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \Psi(U) - \Sigma(U)]^\top \Delta(U)^{-1} \mathcal{W}_{ud}(U) \cdot s_u \right) \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} l^\alpha (1 - \alpha) = \alpha \text{tr} \{ U (\sigma_u \sigma_u^\top) \} - \frac{\alpha^2}{4} (r^\alpha \cdot s_x)^\top \sigma \Upsilon(U)^{-1} \sigma^\top (r^\alpha \cdot s_x) \\ - \frac{\alpha^2}{4} \left\{ \Omega(U) - \Gamma(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \sigma^\top (r^\alpha \cdot s_x) \right\}^\top \Delta(U)^{-1} \{ \cdot \} \end{aligned} \quad (5.70)$$

com $\Omega(U) = \mathcal{W}_{ud}(U) \cdot s_u + B^\top (r^\alpha \cdot s_x)$. Em adicional ao Lema 5.4, tem-se que os coeficientes da função valor (5.66) são as respectivas soluções assintóticas de (5.68), (5.69) e (5.70).

Note que a lei de controle em (5.52) e a entrada de máxima perturbação do sistema, dada por (5.53), dependem do vetor aleatório $\mathbf{r}_{k+1}^0 \cdot \mathcal{S}(x_k) = \mathbf{r}_{k+1} \cdot E[s_j | s_i]$. Uma vez que a natureza estatística deste vetor é desconhecida e de difícil determinação, o próximo lema tem por objetivo permitir obter uma lei de controle estacionária de validade assintótica.

Lema 5.5 (*Lei de controle CSVIU na norma H_∞*) *Seja o vetor de estados $x \in \mathbb{R}^n$ no interior de algum \mathcal{R}^{s_u} região do espaço de estados sobre a qual o vetor de sinais s_u é não nulo e, por hipótese, afastada de qualquer possibilidade de mudança de sinais do estado e controle. Se existe $\mathbf{L}^\alpha \in S^{n+}$ tal que a desigualdade (5.4) é satisfeita, $\Delta(\mathbf{L}^\alpha)$ é invertível e a equação modificada de Riccati (5.68) é também satisfeita, então existe solução única para o ponto de sela, e esta é dada como definida abaixo:*

Se o “jogo” CSVIU admite uma única solução de ponto de sela, esta solução é dada por (u^, v^*) , tal que*

$$u^*(x) = -\Delta(\mathbf{L}^\alpha)^{-1} \left((\Sigma(\mathbf{L}^\alpha) - \Gamma(\mathbf{L}^\alpha)^\top \Upsilon(\mathbf{L}^\alpha)^{-1} \Psi(\mathbf{L}^\alpha)) x + \frac{\alpha}{2} (\Omega(\mathbf{L}^\alpha) - \Gamma(\mathbf{L}^\alpha)^\top \Upsilon(\mathbf{L}^\alpha)^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}^\alpha \cdot s_x)) \right) \quad (5.71)$$

e

$$v^*(x) = -\Upsilon(\mathbf{L}^\alpha)^{-1} \left(\Psi(\mathbf{L}^\alpha) x + \Gamma(\mathbf{L}^\alpha) u^* + \frac{\alpha}{2} \sigma^\top (\mathbf{r}^\alpha \cdot s_x) \right), \quad (5.72)$$

com $\mathbf{L}^\alpha \in S^{n+}$ e $\mathbf{r}^\alpha \in \mathbb{R}^n$ soluções assintóticas de (5.68) e (5.69).

Nota 5.5 *No Lema 5.5, $x \in \mathbb{R}^n$ é a correspondente trajetória do estado gerada pela dinâmica CSVIU (2.28). Em que a de se notar também a dependência do jogador 1 (v^*) com relação ao valor corrente do jogador 2 (u^*) e que ambas as soluções obedecem a uma estrutura afim em x .*

Nota 5.6 *Diferentemente do problema de controle em norma H_2 , observa-se aqui o surgimento de duas expressões do tipo Riccati, uma para o controle CSVIU em região de inação global e outra que surge a partir da consideração de regiões de controle assintóticas. A primeira é descrita em (5.43) sendo resultante da maximização da expressão em (5.12) com relação a v , enquanto que a equação (5.68) resulta da solução de um problema de controle Min – Max nas variáveis u e v , este expresso na passagem (5.57).*

Este fato decorre da existência de uma segunda variável (v) que exerce influência no sistema em processo. Esta atuará mesmo quando o controle ótimo $u^(x) = 0$, no entanto, apresenta um objetivo totalmente contrário ao de estabilização, contribuindo de forma favorável ao desequilíbrio do sistema. Assim sendo, não necessariamente as duas equações (5.43) e (5.68) admitem soluções. De fato, supondo x em regiões de controle*

nulo \mathcal{R}_i^0 , $i = 1, 2, \dots, m$, em que $u_i^*(x) = 0$, a entrada de distúrbio v continuará a atuar no sistema podendo inviabilizar a existência das denominadas regiões de inação (regiões de controle nulo). Caso isto ocorra, a equação em (5.43) não admitirá solução e se fará necessário estender a solução de ponto de sela assintótico (u^*, v^*) , dado por (5.71) e (5.72), para todo o espaço de estados euclidiano \mathbb{R}^n .

Nota 5.7 A prova do Lema 5.3 nos remete a expressões quadradas em x , u e v (5.57), e a desigualdade estrita em (5.4) indica a existência de um ponto extremo de máximo para a expressão dependente de v . Atente ao papel chave que a matriz $\Upsilon(L^\alpha) \prec 0$ desempenha no computo de um limitante superior para a norma do sistema. Mais especificamente, a partir de um $\gamma > 0$ grande o suficiente, busca-se minimizar o escalar $\gamma \in \mathbb{R}_+$ sobre o critério de que as equações (5.43) e/ou (5.68) ainda forneçam soluções únicas simétricas definida positivas e a matriz $\Upsilon(L^\alpha)$ seja definida negativa.

Agora, considere que $v(\cdot)$ seja variável aleatória tal como $\omega(\cdot)$ em (3.2). Repetindo os passos (5.10)-(5.12) haveremos de chegar na seguinte condição com respeito ao limitante superior γ

$$\Upsilon(\cdot) = D_1^\top D_1 - \gamma^2 I_r \prec 0 \iff \gamma^2 I_r \succ D_1^\top D_1. \quad (5.73)$$

Perceba que esta condição não se expressa na dependência da matriz de intensidade σ do distúrbio $v(\cdot)$, muito menos de uma solução de Riccati $L^\alpha \in S^{n+}$, se mostrando claramente uma condição mais fraca que (5.4). Além do mais, a negatividade estrita em (5.4) garante também a não singularidade da matriz $\Upsilon(\cdot)$. O que, de fato, é uma condição necessária à existência dos coeficientes L^α , r^α e l^α que compõem a função valor em (5.41) e (5.66).

Nota 5.8 Uma vez que a norma H_∞ advém sempre da análise de pior caso com respeito a entrada de distúrbio v no sistema, dado o estado $x_0 = 0$ e o ganho máximo de energia γ , a função valor em (5.41) tem por significado fornecer uma medida do máximo desvio que a entrada exógena $v(\cdot)$ é capaz de promover ao sistema em termos de energia. Interpretação análoga serve para (5.66).

5.2.3 Norma \mathcal{H}_∞ a longo prazo: Controle em região de inação global

Semelhante ao caso da norma H_2 , aqui é proposta uma solução de controle na norma H_∞ via abordagem de custo médio a longo prazo (CMLP), utilizando para tanto a medida (2.82) e a metodologia “vanish discount” apresentada na Seção 4.2.

A partir do Lema 4.1, considere $U \in S^{n+}$ e adote a identidade,

$$\Phi^\alpha(U) = -\Psi(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \Psi(U). \quad (5.74)$$

Isto feito, é possível concluir o caráter crescente e convergente das soluções da equação tipo Riccati (5.43) a medida em que $\alpha \rightarrow 1$. Nesta Seção, lembre ainda o teorema Tauberiano na Proposição 4.2. A solução de norma H_∞ CSVIU no problema de CMLP surgirá na forma de corolários dos Teoremas 4.1 e 4.2. Portanto, as demonstrações dos próximos resultados são apresentadas com a finalidade de evitar ambiguidades com relação as notações empregadas.

Corolário 5.1 (Controle na Norma H_∞ a longo prazo sobre região de inação) *Suponha $\alpha = 1$ em (5.43). Se $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L} \in S^{n+}$ é solução única definida positiva de (5.43) e o par (C_1, \mathcal{L}^1) é observável, então o sistema $\hat{\Theta}_{ctr}$ é estocasticamente estável e sua norma H_∞ para o problema de CMLP tem por solução*

$$\max_v \mathcal{E}_\infty(z(\cdot)) = \text{tr}\{\mathbf{L}(\sigma_u \sigma_u^\top)\}. \quad (5.75)$$

Prova Pela Proposição 5.1, considere algum $0 < \alpha < 1$ e seja a quadrática (5.41) não negativa. Seja ainda a sequência de fatores de desconto $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$, em que $\alpha_n \uparrow 1$. Utilizando o vanish discount chega-se a,

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_n) \mathcal{E}_\infty^{\alpha_n}(z(\cdot)) &= (1 - \alpha_n) \max_v E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2] \right\} \\ &= (1 - \alpha_n) (\|x_0\|_{\mathbf{L}^{\alpha_n}}^2 + l^{\alpha_n}) \\ &= (1 - \alpha_n) \|x_0\|_{\mathbf{L}^{\alpha_n}}^2 + l^{\alpha_n} (1 - \alpha_n) \rightarrow \text{tr}\{\mathbf{L}^1 \sigma_u \sigma_u^\top\} \end{aligned} \quad (5.76)$$

(aqui omite-se o operador \max_v) ao tomar o limite $\lim_{\alpha \rightarrow 1}$, e dado o Lema 4.1 tem-se \mathbf{L}^1 solução de (5.43). Portanto, uma vez que o limite existe tem-se

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2] \right\} = \text{tr}\{\mathbf{L}^1 \sigma_u \sigma_u^\top\}. \quad (5.77)$$

Considere agora a quadrática pura $\mathbf{V}^\alpha(x) = \|x\|_{\mathbf{L}^\alpha}^2$ com \mathbf{L}^α solução da equação tipo Riccati (5.43). Faça $\mathbf{V}_k^\alpha = \mathbf{V}^\alpha(x_k)$ e, similarmente ao passo (4.33), obtenha

$$\begin{aligned} &E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k (\alpha \mathbf{V}_{k+1}^\alpha - \mathbf{V}_k^\alpha) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \left(x_k^\top (\mathcal{L}^\alpha(\mathbf{L}^\alpha) - \mathbf{L}^\alpha - \Psi(\mathbf{L}^\alpha)^\top \Upsilon(\mathbf{L}^\alpha)^{-1} \Psi(\mathbf{L}^\alpha)) x_k + \alpha \text{tr}\{\mathbf{L}^\alpha \sigma_u \sigma_u^\top\} \right) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=0}^T \alpha^k \left(-x_k^\top C_1^\top C_1 x_k + \alpha \text{tr}\{\mathbf{L}^\alpha \sigma_u \sigma_u^\top\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Multiplique a identidade (5.78) por (-1) e, logo após, adicione a quantidade $\alpha \text{tr}\{\mathbf{L}^\alpha \sigma_u \sigma_u^\top\}$ a ambos os lados da igualdade para obter

$$\mathcal{E}_\infty^{\alpha, T}(z(\cdot)) = E \left\{ \sum_{k=0}^T \alpha^k [\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2] \right\} = E \left[\mathbf{V}_0^\alpha - \alpha^T \mathbf{V}_T^\alpha + \sum_{k=0}^T \alpha^{k+1} \text{tr}\{\mathbf{L}^\alpha \sigma_u \sigma_u^\top\} \right]. \quad (5.79)$$

Tomando o limite sobre $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ na expressão anterior, e sabendo que $\text{tr}\{\mathbf{L}^\alpha \sigma_u \sigma_u^\top\}$ não depende explicitamente do estágio k do processo, usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue (Proposição 2.4) é de fácil verificação que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} E \left\{ \sum_{k=0}^T \alpha^k \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} = T \text{tr}\{\mathbf{L}^1 \sigma_u \sigma_u^\top\} + E[\mathbf{V}^1(x_0) - \mathbf{V}^1(x_T)] \quad (5.80)$$

em que $\mathbf{V}^1(x) = \|x\|_L^2$ com $\mathbf{L} = \mathbf{L}^1$ solução da equação tipo Riccati (5.43). Tome o limite superior em T na expressão em (5.80) de forma a obter,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \sum_{k=0}^T \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} = E[\mathbf{V}^1(x_0) - \mathbf{V}^1(x_T)] + \text{tr}\{\mathbf{L} \sigma_u \sigma_u^\top\} \quad (5.81)$$

e uma vez que x_0 é dado, então $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[\mathbf{V}^1(x_0)] = 0$. A finitude da medida descrita pelo lado esquerdo de (5.81) e a observabilidade do sistema (Definição 3.3) permite concluir que a saída $z(\cdot)$ tem acesso a toda energia interna do sistema. Nestes termos o sistema $\hat{\Theta}_{ctr}$ é estocasticamente estável (Definição 3.2), e

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\mathbf{V}^1(x_0) - \mathbf{V}^1(x_T) \right] + \text{tr}\{\mathbf{L} \sigma_u \sigma_u^\top\} \\ = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbf{V}^1(x_0) + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[-\mathbf{V}^1(x_T) \right] + \text{tr}\{\mathbf{L} \sigma_u \sigma_u^\top\} \\ = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[-\mathbf{V}^1(x_T) \right] + \text{tr}\{\mathbf{L} \sigma_u \sigma_u^\top\} \end{aligned} \quad (5.82)$$

em que, a estabilidade estocástica permite escrever ainda,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[-\mathbf{V}^1(x_T) \right] + \text{tr}\{\mathbf{L} \sigma_u \sigma_u^\top\} = \text{tr}\{\mathbf{L} \sigma_u \sigma_u^\top\} - \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[\mathbf{V}^1(x_T) \right] \leq \text{tr}\{\mathbf{L} \sigma_u \sigma_u^\top\}. \quad (5.83)$$

Agora, a igualdade (5.77) e o teorema Tauberiano permitem escrever

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) E \left\{ \sum_{k=0}^T \alpha^k \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left\{ \sum_{k=0}^T \left[\|z(k)\|^2 - \gamma^2 \|v(k)\|^2 \right] \right\} \quad (5.84)$$

o qual, juntamente com (5.82) e (5.83) permite concluir que a igualdade estrita em (4.13) ocorrerá se $\mathcal{E}_2^1(z(\cdot)) < \infty$.

□

5.2.4 Norma \mathcal{H}_∞ a longo prazo: Controle assintótico

Agora, relembre a função valor (5.66) referente ao problema de norma descontada H_∞ . Para alguma matriz $U \in S^{n+}$ considere também a identidade

$$\Phi^\alpha(U) = -\Psi(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \Psi(U) - \left\{ \Sigma(U) - \Gamma(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \Psi(U) \right\}^\top \Delta(U)^{-1} \left\{ \cdot \right\}. \quad (5.85)$$

Isto feito, o Lema 4.1 conclui o caráter crescente e convergente das soluções da equação tipo Riccati (5.68) a medida em que $\alpha \rightarrow 1$. Considere ainda a Proposição 4.2.

Tendo sido demonstrado o Teorema 4.2, este referente ao problema de norma H_2 a longo prazo, enuncia-se aqui um corolário que estabelece um resultado análogo para o caso de norma H_∞ em regiões assintóticas.

Corolário 5.2 (Controle assintótico em norma H_∞ a longo prazo) *Seja $\gamma > 0$ e $\alpha = 1$ em (5.68). Se $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L} \in S^{n+}$ é solução única definida positiva de (5.68) e o par (C_1, \mathcal{L}^1) é observável, então o sistema $\hat{\Theta}_{ctr}$ é estocasticamente estável e sua norma H_∞ para o problema de CMLP, sobre regiões assintóticas, é dada por*

$$\begin{aligned} \|\hat{\Theta}_{ctr}\|_\infty = & \text{tr}\{\mathbf{L}(\sigma_u \sigma_u^\top)\} - \frac{1}{4}(\mathbf{r}^\alpha \cdot s_x)^\top \sigma \Upsilon(\mathbf{L})^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}^\alpha \cdot s_x) \\ & - \frac{1}{4} \left\{ \Omega(\mathbf{L}) - \Gamma(\mathbf{L})^\top \Upsilon(\mathbf{L})^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}^\alpha \cdot s_x) \right\}^\top \Delta(\mathbf{L})^{-1} \left\{ \cdot \right\} \end{aligned} \quad (5.86)$$

com $\Omega(\mathbf{L}) = \mathcal{W}_{u_d}(\mathbf{L}) \cdot s_u + B^\top (\mathbf{r}^\alpha \cdot s_x)$ e $s_x = \mathcal{S}(x)$.

Prova Substituindo a função valor (4.65) por (5.66) a demonstração segue de maneira análoga ao Teorema 4.2.

□

Nota 5.9 *Atente que a norma H_∞ é obtida para um estado inicial nulo e, por intermédio do Lema 5.4, note que o computo da solução matricial $U \in S^{n+}$ em (5.68) e do vetor \mathbf{r}^α em (5.69) servem de etapas necessárias à obtenção do escalar $l^\alpha \geq 0$.*

Seja então a desigualdade:

$$\begin{aligned} e = & \text{tr}\{U(\sigma_u \sigma_u^\top)\} - \frac{\alpha}{4}(\mathbf{r}^\alpha \cdot s_x)^\top \sigma \Upsilon(U)^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}^\alpha \cdot s_x) \\ & - \frac{\alpha}{4} \left\{ \Omega(U) - \Gamma(U)^\top \Upsilon(U)^{-1} \sigma^\top (\mathbf{r}^\alpha \cdot s_x) \right\}^\top \Delta(U)^{-1} \left\{ \cdot \right\} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.87)$$

para algum $s_x = \mathcal{S}(x)$. A busca de um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma H_∞ do sistema $\hat{\Theta}_{ctr}$ pode ser realizada com o auxílio do algoritmo abaixo. Este permite proceder em uma busca sistemática por um $\gamma > 0$ com o objetivo de que a desigualdade em (5.87) se torne igualdade estrita, isto é, o escalar l^α em (5.70) se anule.

Pseudocódigo 5.1 Aproximação para a norma H_∞

Inicialização: Fornecer um critério de erro $\delta > 0$

1: Fornecer $\gamma > 0$;

2: Verificar a existência de soluções $U \in S^{n+}$, r^α e l^α que satisfaçam o Lema 5.4;

2.1: Se Lema 5.4 é satisfeito: verificar se a igualdade em (5.87) é atendida com erro e tal que $0 \leq e \leq \delta$;

2.1.1: Se $0 \leq e \leq \delta$: Então γ é solução com precisão δ ;

2.1.2: Se $e > \delta$: Voltar ao passo **1** e fornecer γ menor;

3: Se Lema 5.4 não é satisfeito : Voltar ao passo **1** e fornecer γ maior;

Assim, a cada $\gamma > 0$ fornecido se faz necessário reavaliar a existência dos coeficientes da função valor em (5.66) e recalcular (5.87). Desta forma o menor γ admissível, isto é, o menor escalar em \mathbb{R}_+ tal que (5.68) é passível de solução (ou equivalentemente o menor γ tal que o Lema 5.4 é satisfeito), é uma medida de robustez para sistemas CSVIU.

6 Experimento Numérico

A capacidade de atenuar a energia do sinal de saída $y(\cdot)$ do processo controlado (1.1) é considerada para três abordagens de controladores: controle CSVIU, controle Escalonado e controle Robusto. A Seção 6.1 se encarrega de explicitar a metodologia utilizada a fim de obter os controladores Escalonado e Robusto, enquanto que Seção 6.2 apresenta os resultados obtidos via simulação de Monte Carlo de três exemplos de sistemas incertos controlados.

Recorde o problema de controle CSVIU em norma H_2 a longo prazo. Este é solucionado na Seção 4.3.3. Como discutido na Seção 4.2, em comparação com o critério de norma descontada, o computo da norma a longo prazo é bem mais significativo para o modelo dinâmico (2.28). Isto porque o modelo de sistema estudado apresenta, desde sua concepção, entrada de perturbação de natureza persistente, o que torna o critério de custo médio a longo prazo a escolha mais adequada a fim de mensurar em norma o desempenho do sistema.

Devido à evolução dos procedimentos numéricos e ao grande avanço da capacidade de processamento computacional, problemas de controle de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas, cada vez mais complexos são hoje tratados. Nesse cenário, destacam-se as técnicas de otimização baseadas em programação semidefinida, sobretudo as formuladas em termos de *Desigualdades Matriciais Lineares* (em inglês, Linear Matrix Inequalities — LMIs) (LEMAIRE *et al.*, 2019). Dito isto, aqui objetiva-se comparar numericamente o custo operacional do controlador CSVIU em norma H_2 a longo prazo em relação ao custo de um controlador Robusto (independente dos parâmetros variantes no tempo) e um controlador Escalonado (dependente de parâmetros), ambos por realimentação de estados obtidos via LMIs. Os controladores robusto e escalonado foram projetados para um sistema linear a tempo discreto afetado por parâmetros variantes no tempo e sujeito a perturbação estocástica.

6.1 Definição do problema

Admita a modelagem de sistemas pouco conhecidos cuja evolução dos dois estados existentes ($x \in \mathbb{R}^2$) seja representada por uma equação dinâmica sujeita a entrada de controle escalar ($u \in \mathbb{R}$), dada pela equação estocástica a diferenças,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \sigma\omega(k) \quad (6.1)$$

em que $\omega(\cdot)$ é distúrbio da natureza modelado como um vetor de “ruído branco”. Sejam as matrizes dinâmicas e do controlador para três possíveis sistemas pouco conhecidos,

$$A = \rho \begin{bmatrix} 0.42 & -0.17 \\ 0.14 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{0.3}I_2, \quad (6.2)$$

$$A = \rho \begin{bmatrix} 0.27 & 0.35 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.73 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma = 0.25I_2, \quad (6.3)$$

$$A = \rho \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ -0.37 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma = 0.37I_2, \quad (6.4)$$

com ρ constante.

Ainda devido a condição de incerteza sobre o sistema considerado, admita que não seja possível obter informações adicionais necessárias para uma modelagem matemática mais precisa. Nestas circunstâncias, a abordagem CSVIU propõe que a melhor alternativa é representar a evolução temporal do mesmo através do modelo dinâmico em (1.1). Para tanto, defina as matrizes da síntese CSVIU como:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0.75 \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.19 \end{bmatrix}, \quad \bar{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0.23 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ \sigma_u &= 2.5 \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.29 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_u = 2.5 \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

as quais estão diretamente relacionadas com o nível da incerteza sobre o mesmo.

Agora, tratando do controle de sistemas incertos, é certo que modelos paramétricos são úteis na descrição da dinâmica de sistemas lineares afetados por incertezas variantes ao longo do tempo, assim como para representar sistemas não lineares em termos de uma família de modelos lineares. Em especial, a análise e síntese de controladores para sistemas Lineares com Parâmetros Variantes do tempo (LPV) tem recebido bastante atenção na área de controle. Nos sistemas LPV, os parâmetros considerados incertos definem a variação da dinâmica do sistema e são, em geral, desconhecidos, porém são medidos ou estimados em tempo real (De CAIGNY *et al.*, 2010, p. 362). Tal abordagem tem sido investigada por mais de duas décadas, devido a ampla gama de aplicações em que esta abordagem está inserida. Dentre o ferramental numérico desenvolvido a fim de obter controladores para sistemas LPV, métodos baseados em otimização via LMIs são utilizados com bastante frequência, e a síntese de controladores robustos e escalonados em termos de parâmetros variantes no tempo têm sido os principais cenários explorados, vide (MONTAGNER *et al.*, 2005), (De CAIGNY *et al.*, 2010), (De CAIGNY *et al.*, 2012) e (ROSA *et al.*, 2018).

Considere a seguinte equação dinâmica sujeita a ruído branco aditivo a fim de representar as incertezas do sistema em (6.1),

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + E(\theta_k)\omega_0(k) \quad (6.6)$$

e em equiparação ao processo CSVIU controlado descrito em (2.28), tem-se

$$E(\theta_k) = [(X_0 + X_1\theta_{1k} + X_2\theta_{2k}) \quad (U_0 + U_1\theta_{3k}) \quad \sigma] \in \mathbb{R}^{2 \times 2 + 1 + 2}, \quad (6.7)$$

com,

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta_{1k} \leq \bar{\theta}_1, \quad 0 \leq \theta_{2k} \leq \bar{\theta}_2, \quad 0 \leq \theta_{3k} \leq \bar{\theta}_3, \quad X_0 = \sigma_x, \quad U_0 = \sigma_u, \quad U_1 = \bar{\sigma}_u, \\ X_1 = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x^{11} & 0 \\ \bar{\sigma}_x^{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}_x^{12} \\ 0 & \bar{\sigma}_x^{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ademais, $\omega_0(\cdot)$, $\sigma_x, \bar{\sigma}_x$, σ_u e $\bar{\sigma}_u$ são definidos tais como em (4.42) e $\bar{\sigma}_x^{ij}$ é o elemento ij da matriz $\bar{\sigma}_x$. Os escalares $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ e $\bar{\theta}_3$ representam limitantes superiores para os parâmetros incertos θ_{1k} , θ_{2k} e θ_{3k} .

A modelagem dinâmica descrita por (6.6) servirá à síntese de uma lei de controle robusta estática e de um controlador escalonado. Em termos gerais, um controlador robusto é projetado para atuar dentro de uma faixa predeterminada de incerteza dos parâmetros do modelo, fornecendo um controle linear e invariante no tempo. Por sua vez, a obtenção de um controlador escalonado consiste em definir uma família de sistemas e determinar uma função polinomial em termos dos parâmetros variantes no tempo. Esta será recalculada a cada instante de tempo ajustando-se ao modelo dinâmico do sistema de acordo com o valor assumido pela tripla $\theta_k = (\theta_{1k}, \theta_{2k}, \theta_{3k})$ para $k \geq 0$.

Seja o sistema discreto LPV abaixo,

$$\hat{G} := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + E(\theta_k)\omega_0(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \quad x(0) = x \end{cases} \quad (6.9)$$

com $y(\cdot)$ a saída e $x(0) = x_0$ fornecido a priori. Uma solução ao problema de projetar um controlador escalonado em norma H_2 para o sistema em (6.9) é dada em termos de um conjunto finito de LMIs pelo Teorema 9 em (De CAIGNY *et al.*, 2010) e a síntese de um ganho robusto de controle é feita tal como descrita na Seção 5.4 do artigo citado. Usualmente, a solução de um problema de otimização formulado via LMIs é subdividida em dois passos principais:

- I. Uma interface capaz de analisar as condições LMI's programadas é usada, por exemplo o YALMIP (LÖFBERG, 2004) em conjunto com a ferramenta Robust LMI Parser* (AGULHARI *et al.*, 2016);
- II. Um resolvidor LMI é aplicado a fim de encontrar a solução, por exemplo SeDuMi (STURM, 1999).

As LMIs foram programadas e obtidas conforme os passos I. e II. descritos acima. O controle CSVIU, por sua vez, foi programado considerando uma interpolação linear que conecta a solução de controle ótimo assintótica — dado no Lema 4.4 — à região de inação global na qual o controle ótimo é $u^*(x) = 0, \forall x \in \mathcal{R}^0$. Esta estratégia de aproximação para o controle ótimo CSVIU foi estudada em (NEREU, 2018, p. 49-52).

Seja ainda $y = I_2x + [1 \ 0]^\top u$ a saída em (4.42) e (6.9). Se o limite

$$\mathcal{E}_2(y(\cdot)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_x \left[\sum_{k=0}^T \|y(k)\|^2 \right] \quad (6.10)$$

existe, então o valor da norma a longo prazo do sistema não dependerá do estado inicial do mesmo. O controlador CSVIU assim como as condições LMIs foram implementados em Matlab, e a síntese de cada controlador foi realizada tendo por critério de minimização a norma H_2 em (6.10).

Para todas as simulações adotou-se o estado inicial $x_0 = [0 \ 0]^\top$ e um total de 500 realizações de Monte Carlo, as mesmas foram realizadas com o auxílio de um computador i5-2.90 GHz com 4Gb de memória RAM. Os escalares $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ e $\bar{\theta}_3$ foram estimados a partir da simulação de Monte Carlo do processo controlado (2.28) em que, para algum vetor de estados $x(k) = [x_{1_k} \ x_{2_k}]^\top$ e entrada de controle $u(k)$ no estágio $k \geq 0$ (com $0 < k \leq T$ para algum $T > 0$), tem-se que

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= \max_k |x_{1_k}|, \\ \bar{\theta}_2 &= \max_k |x_{2_k}|, \\ \bar{\theta}_3 &= \max_k |u(k)|. \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.2 Resultados

Defina o *Ganho Percentual* (GP) por:

$$GP := \left(\frac{\mathcal{E}_2(y(\cdot))_{Rob./Esc.}}{\mathcal{E}_2(y(\cdot))_{CSVIU}} - 1 \right) \times 100, \quad (6.12)$$

*Pacote de ferramentas voltado para a comunidade de controle desenvolvido para funcionar juntamente com YALMIP a fim de facilitar a implementação de condições LMI's dependentes de parâmetros.

em que $\mathcal{E}_2(y(\cdot))_{Rob./Esc.}$ representa o desempenho em norma do sistema (4.42) tendo em mente a abordagem de controle Robusta ou Escalonada, enquanto que $\mathcal{E}_2(y(\cdot))_{CSVIU}$ indica o desempenho em norma do mesmo sistema considerando a abordagem de controle CSVIU.

Para as matrizes A , B e σ do sistema (4.42) definidas em (6.2), (6.3) e (6.4) as respectivas Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3 fornecem o desempenho em norma obtido por cada controlador considerado. Também apresentam o GP do desempenho do controle CSVIU com relação ao desempenho dos controladores robusto e escalonado aplicados à dinâmica (2.28). Note que o escalar ρ incrementa o *Raio Espectral* $\lambda(\rho A)$ da matriz dinâmica ρA .

ρ $\lambda(\rho A)$		1.07	1.14	1.21	1.28	1.35	1.42	1.49
Norma	Controle CSVIU	1.7693	1.7585	1.7539	1.7478	1.7533	1.7462	1.7558
	Controle Escalonado	2.2010	2.1178	2.0220	2.0401	2.0798	2.0785	2.0634
	Controle Robusto	2.9150	2.9966	2.8406	2.6280	2.6230	2.5568	2.5080
GP	CSVIU \times Escalonado	24.40	20.43	15.29	16.72	18.62	19.03	17.51
	CSVIU \times Robusto	64.75	70.41	61.96	50.36	49.60	46.42	42.84

Tabela 6.1 – Norma H_2 e GP de desempenho do controlador CSVIU (com relação aos controladores Escalonado e Robusto) para o sistema representado pelas matrizes em (6.2).

ρ $\lambda(\rho A)$		1.07	1.14	1.21	1.28	1.35	1.42	1.49
Norma	Controle CSVIU	1.3626	1.3730	1.3952	1.4213	1.4628	1.4930	1.5380
	Controle Escalonado	1.6739	1.6973	1.7130	1.7693	1.8170	1.8692	1.9518
	Controle Robusto	1.8710	1.8931	1.8996	1.9208	1.9526	1.9860	2.0374
GP	CSVIU \times Escalonado	22.85	23.62	22.78	24.48	24.21	25.20	26.90
	CSVIU \times Robusto	37.31	37.88	36.15	35.14	33.48	33.02	32.47

Tabela 6.2 – Norma H_2 e GP de desempenho do controlador CSVIU (com relação aos controladores Escalonado e Robusto) para o sistema representado pelas matrizes em (6.3).

ρ $\lambda(\rho A)$		1.07	1.14	1.21	1.28	1.35	1.42	1.49
Norma	Controle CSVIU	1.7363	1.8124	1.8961	1.9967	2.1316	2.2699	2.4427
	Controle Escalonado	2.1478	2.2813	2.4463	2.6162	2.8124	2.9889	3.1768
	Controle Robusto	2.3730	2.4559	2.5716	2.7053	2.8739	3.0837	3.3112
GP	CSVIU \times Escalonado	23.70	25.87	29.02	31.03	31.94	31.67	30.05
	CSVIU \times Robusto	36.67	35.50	35.63	35.49	34.82	35.86	35.55

Tabela 6.3 – Norma H_2 e GP de desempenho do controlador CSVIU (com relação aos controladores Escalonado e Robusto) para o sistema representado pelas matrizes em (6.4).

A Tabela 6.4 fornece uma medida do custo computacional necessário ao emprego das três abordagens de controle sobre os respectivos sistemas propostos.

	Sistema		
	(6.2)	(6.3)	(6.4)
CSVIU	191.43	190.66	193.60
Escalonado	894.34	876.90	866.89
Robusto	13.13	13.86	12.69

Tabela 6.4 – Tempo computacional médio das simulações (em segundos).

No quesito de tempo computacional, o controlador Robusto alcançou um desempenho excepcional comparado aos controladores CSVIU e Escalonado. Um dos causadores deste fato é a necessidade de solucionar um problema sub diferencial[†] a cada instante k do processo CSVIU, o que acarreta num incremento do custo computacional. No entanto, verifica-se por intermédio das Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3 que o ganho de desempenho em norma do CSVIU foi bem maior com relação ao Robusto para todos os casos investigados. Este resultado é um indicativo de que, apesar da lei de controle robusta ter se mostrado a mais conveniente ao controle de sistemas cuja mudança de estados ocorre em curtos intervalos de tempo, a mesma não foi capaz de atenuar a energia do processo tal como o fizeram o controlador CSVIU e o controlador Escalonado. Por sua vez, o controle Escalonado exigiu um alto custo computacional o que pode tornar sua implementação impraticável em sistemas maiores.

Os GPs fornecidos nas Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3 permitem concluir que o controlador CSVIU foi mais eficiente em atenuar a energia do sistema. Isto ocorre porque a síntese do mesmo tem em consideração que os termos ruidosos da equação dinâmica (2.28) dependem do valor absoluto do estado e do controle. Em outras palavras, o projeto de controle CSVIU leva em consideração o aumento da incerteza do sistema com relação a variação dos estados e controle, propriedade intrínseca ao modelo CSVIU. Porém, tal perspectiva de representação da incerteza não é refletida nos projetos dos controladores Robusto e Escalonado. Estes foram sintetizados a partir do modelo de sistema linear com incerteza paramétrica (6.9) e não se beneficiam da informação de que seus parâmetros desconhecidos θ_{1_k} , θ_{2_k} , e θ_{3_k} são equivalentes ao módulo das variáveis de estados x_1 , x_2 e controle u no instante k . Logo, ao serem acoplados ao processo (2.28) não demonstraram a mesma capacidade em reagir contra não linearidades advindas da flutuação destas variáveis.

[†]Vide Seção 2.4, pág. 22.

7 Conclusão

As formas de se considerar distúrbios e erros de modelagem é assunto de grande importância na pesquisa de sistemas incertos. Em Teoria do Controle, notoriamente esta temática tem recebido bastante atenção ao longo dos últimos 40 anos, consistindo em um dos aspectos motivacionais deste mestrado.

Uma outra questão tão importante quanto e comumente abordada em relação a sistemas incertos é: como estimar o nível de desempenho do sistema? Para tanto, a introdução da noção de normas no estudo de sinais e sistemas permite mensurar o desempenho e robustez do sistema de controle. Usualmente, a norma apropriada depende da situação com a qual o projetista estará lidando, estando associada de alguma maneira com a energia do erro de regulação da saída do sistema. O desenvolvimento de normas para sistemas determinísticos é assunto de discussão em uma variedade de estudos na literatura de controle a qual já se estende por mais de três décadas, fazendo com que esta temática adquira um grau mais elevado de maturidade em comparação ao estudo de normas para sistemas estocásticos. Aqui, trata-se a classe de sistemas incertos submetidos a incerteza modelada como perturbação do tipo estocástica, e neste sentido, o leitor é apresentado ao modelo de sistema estocástico CSVIU e seus principais aspectos no contexto de sistemas incertos. Pontua-se que as noções de estabilidade α -estocástica e estabilidade estocástica são distintas da noção de estabilidade quase certa, esta última adotada para o modelo CSVIU em (Do VAL; SOUTO, 2017) e (PEDROSA *et al.*, 2019). Porém, apesar de mais restritivas, estas noções se adéquam perfeitamente ao problema de norma em estudo, permitindo que haja uma conexão entre a finitude da norma e a estabilidade do sistema por meio da noção de observabilidade aqui desenvolvida. Especificamente, por intermédio dos princípios da α -observabilidade e observabilidade ($\alpha = 1$) é estabelecido um vínculo entre a finitude das medidas de energia descontada (2.76), (2.81) e não descontada (2.79), (2.82) e a estabilidade do sistema nos sentidos das Definições 3.1 e 3.2 respectivamente.

O problema de controle CSVIU em norma descontada é solucionado com base na técnica de Programação Dinâmica (PD), e ao tomar o limite da série telescópica em (4.2) a função valor do problema é dada por sua convergência, adotando-se ainda estado inicial nulo obtém-se o valor desejado para a norma. Por sua vez, o problema de controle em norma não descontada exige um ferramental matemático mais elaborado em que, em adicional aos resultados obtidos para o caso descontado, um teorema Tauberiano permite avaliar quando a norma a longo prazo existe, tornando-a passível de ser computada. Importante destacar ainda que a análise de norma H_∞ demonstrou um nível maior de

complexidade quanto a sua caracterização para sistemas CSVIU. Principalmente devido a introdução de uma segunda variável que, além de exercer influência sobre o sistema, se contrapõe completamente ao objetivo do controlador em estabilizar o sistema. Também, para o caso de norma H_∞ se faz necessário uma descrição mais elaborada da estatística do vetor aleatório r_0 em (5.21), caso contrário, a norma H_∞ não estará bem determinada sobre região de inação global. Tal dificuldade não ocorre ao se tratar o caso de norma H_2 . Aqui, adota-se $\sigma_x = 0$ na equação dinâmica (1.1) o que possibilita a solução do problema de controle CSVIU em norma H_∞ sem este inconveniente.

Com relação aos testes numéricos, conclui-se que o controle escalonado demandou um alto custo computacional, enquanto que o robusto, apesar de exigir bem menos recursos de processamento, possui um desempenho em norma inferior aos demais controladores. O controlador CSVIU então se sobressai como uma proposta alternativa voltada para sistemas incertos pouco conhecidos que demande um nível de precaução considerável. Isto é, sistemas incertos que demandem uma lei de controle cautelosa.

Perspectivas de Trabalhos Futuras

- Desenvolver e motivar condições mais gerais de estabilidade para sistemas CSVIU. A hipótese de observabilidade conforme a Definição 3.3 sugere por si só a existência de soluções respectivamente estacionária e limitada para as equações (3.11a) e (3.12), conduzindo às noções de estabilidade pretendidas. O que ocorrerá porém se não admitirmos a observabilidade como hipótese inicial? Em outros termos, dado que a solução estacionária da equação tipo Lyapunov (3.11a) existe propõe-se estudar sobre quais condições (3.12) admitirá solução limitada em norma ($\|r_0\|^2 < \infty$) de forma que se possa concluir a estabilidade do sistema;
- Estudar a possibilidade de enfraquecer a condição de Observabilidade da modelagem CSVIU para Detetabilidade CSVIU;
- Descrever estatisticamente o comportamento do vetor aleatório r_0 em (5.21), de forma a possibilitar a solução do problema de controle em norma H_∞ para a dinâmica CSVIU de ordem completa.

Trabalho originado desta Dissertação (aceito para apresentação):

- CAMPOS, D.S. and do VAL, J.B.R.; Observability Notions for CSVIU and Stability in Connection with Some Norms. American Control Conference - ACC, 2020.

Referências

- AGULHARI, C. M.; FELIPE, A.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. *The Robust LMI Parser: A Toolbox to Construct LMI Conditions for Uncertain Systems*. 3. ed. Campinas, BR: FEEC - UNICAMP, 2016. Citado na página 109.
- ALIYU, M. *Nonlinear H_∞ -Control, Hamiltonian Systems and Hamilton-Jacobi Equations*. 1. ed. Boca Raton, US: CRC Press, 2011. Citado na página 48.
- ARAPOSTATHIS, A.; BOKAR, V. S.; FERNÁNDEZ-GAUCHERAND, E.; GHOSH, M. K.; MARCUS, S. I. Discrete-time Controlled Markov Process with Average Cost Criterion: A Survey. *SIAM J. Control and Optimization*, v. 31, p. 282–344, 1993. Citado na página 65.
- ATKISON, K.; HAN, W. *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. New York - USA: Springer: Texts in Applied Mathematics, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 24.
- BARBAZELLI, R. C. *Estudo de Funções de Lyapunov para Estabilidade de Sistemas de Potência*. Dissertação de mestrado — Universidade Estadual Paulista, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Ilha Solteira - SP, 2005. Citado na página 38.
- BAŞAR, T.; BERNHARD, P. *H_∞ - Optimal Control and Related Minimax Design Problems, A Dynamic Game Approach*. New York, USA: Springer, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 45, 49 e 50.
- BELLMAN, R. E. *Dynamic Programming*. Princeton, New Jersey: Princeton University press, 1957. Citado na página 24.
- BELLMAN, R. E. Dynamic Programming. *Science*, v. 153, p. 34–37, 1966. Citado na página 24.
- BERNHARD, P.; GAITSGORY, V.; POURTALLIER, O. (Ed.). *Advances in Dynamic Games and Their Applications, Analytical and Numerical Developments*. Boston, USA: Birkhäuser, 2000. Citado na página 48.
- BORWEIN, J. M.; NOLL, D. Second Order Differentiability of Convex Functions in Banach Spaces. *Transaction of the American Mathematical Society*, v. 342, p. 43–81, 1994. Citado na página 27.
- CABRAL, M. A. P. *Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue*. Rio de Janeiro, RJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2016. Citado na página 30.
- COLANERI, P.; GEROMEL, J. C.; LOCATELLI, A. *Control Theory and Design: An RH2 and RH Viewpoint*. San Diego, California: Academic Press, 1997. Citado na página 46.
- CORLESS, M.; LEITMANN, G. Deterministic Control of Uncertain Systems. *IIASA Conference Sopron, Hungary*, 1986. Citado na página 16.
- DAMM, T.; BENNER, P.; HAUTH, J. Computing the stochastic H_∞ -norm. *arXiv e-prints*, p. 1–9, 2017. Citado na página 16.

- De CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R.; PERES, P. L. D.; SWEVERS, J. Gain-scheduled \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems. *IET Control Theory Appl.*, v. 4, p. 362–380, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 107 e 108.
- De CAIGNY, J.; CAMINO, J. F.; OLIVEIRA, R.; PERES, P. L. D.; SWEVERS, J. Gain-scheduled dynamic output feedback control for discrete-time LPV systems. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, p. 535–558, 2012. Citado na página 107.
- Do VAL, J. B. R.; SOUTO, R. F. Modeling and control of stochastic systems with poorly known dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, p. 4467–4482, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 112.
- DOCKNER, E. J.; JØRGENSEN, S.; LONG, N. V.; SORGER, G. *Differential games in economics and management science*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000. Citado na página 48.
- DRAGAN, V.; MOROZAN, T.; STOICA, A. M. *Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems*. New York, USA: Springer, 2000. Citado na página 47.
- EL BOUHTOURI, A.; HINRICSEN, D.; PRITCHARD, A. J. H_∞ -Type Control for Discrete-time Stochastic Systems. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, v. 9, p. 923–948, 1999. Citado na página 16.
- FIANI, R. *Teoria dos Jogos, Com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais*. Rio de Janeiro, Brasil: Campus, 2006. Citado na página 49.
- GERSHON, E.; U., S. H_∞ output-feedback of discrete-time systems with state-multiplicative noise. *Automatica*, v. 44, p. 574–579, 2008. Citado na página 16.
- GHAOUI, L. E. State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities. *Systems & Control Letters*, v. 24, p. 223–228, 1995. Citado na página 16.
- GROSSMAN, J.; GROSSMAN, M.; KATZ, R. *The first systems of weighted differential and integral calculus*. Rockport, Massachusetts - USA: Archimedes Foundation, 1980. Citado na página 40.
- GROTE, J. D. (Ed.). *The Theory and Application of Differential Games*. Coventry, England: Springer, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Warwick, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- HERNÁNDEZ-LERMA, O.; LASSERRE, J. B. *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria*. New York, USA: Springer-Verlag, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 65.
- HERNÁNDEZ-LERMA, O.; PRIETO-RUMEAU, T. The vanishing discount approach to average reward optimality: the strongly and the weakly continuous cases. *Morfismos*, v. 12, p. 1–15, 2008. Citado na página 65.
- HINRICHSSEN, D.; PRITCHARD, A. J. Stochastic H_∞ . *SIAM J. Control and Optimization*, v. 36, p. 1504–1538, 1998. Citado na página 17.

- HLENKA, V. *Principais Propriedades de Funções Convexas*. Relatório de Iniciação Científica — Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Matemática Aplicada, Curitiba - PR, 2006. Citado na página 28.
- HOU, T.; ZHANG, W.; MA, H. Finite Horizon H_2/H_∞ Control for Discrete-Time Stochastic Systems With Markovian Jumps and Multiplicative Noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, p. 1185–1191, 2010. Citado na página 16.
- HUANG, Y.; ZHANG, W.; ZHANG, H. Infinite Horizon LQ Control for Discrete-Time Stochastic Systems. *6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, v. 1, p. 252–256, 2006. Citado na página 16.
- HUNTER, J. K.; NACHTERGAELE, B. *Applied Analysis*. Davis, USA: Department of Mathematics, University of California, 2000. Citado na página 21.
- JEFFREY, A. M.; X., X.; CRAIG, I. K. When to initiate HIV therapy: a control theoretic approach. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 50, p. 1213–1220, 2003. Citado na página 17.
- JØRGENSEN, S.; ZACCOUR, G. *Differential Games in Marketing*. Kluwer, Deventer: Springer, 2004. Citado na página 48.
- KOREVAAR, J. *Tauberian Theory: A Century of Developments*. Berlin: Springer, 2004. Citado na página 66.
- KUSTER, E. G. *H-infinity Norm Calculation via State Space Formulation*. Dissertação de mestrado — Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg - Virginia, 2012. Citado na página 43.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. Porto Alegre - RS: Bookman, 2007. Citado na página 42.
- LEMAIRE, A. A.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Método Iterativo Baseado em LMIs para Estabilização por Realimentação de Saída de Sistemas Lineares Incertos Positivos Contínuos no Tempo. *SBAI*, 2019. Citado na página 106.
- LEW, A.; MAUCH, H. *Dynamic Programming, A Computational Tool*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2007. Citado na página 25.
- LIMA, E. L. *Curso de análise , vol. 1*. Rio de Janeiro, Brasil: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016. Citado na página 30.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, p. 284–289, 2004. Citado na página 109.
- MARINO, S.; HOGUE, I. B.; RAY, C. J.; KIRCHNER, D. E. A methodology for performing global uncertainty and sensitivity analysis in systems biology. *Journal of Theoretical Biology*, v. 254, p. 178–196, 2008. Citado na página 17.
- MATUSU, R.; PROKOP, R.; PEKAR, L. Parametric and Unstructured approach to uncertainty modelling and robust stability analysis. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 5, p. 1011–1018, 2011. Citado na página 16.

- MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R.; LEITE, V.; PERES, P. L. D. Gain scheduled state feedback control of discrete systems with time-varying uncertainties: An LMI approach. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 4305–4310, 2005. Citado na página 107.
- NEREU, J. C. *Métodos de Aproximação do Controle Ótimo para Sistemas CVIU a Tempo Discreto*. Dissertação de mestrado — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC, Campinas - SP, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 25, 31, 36, 38 e 109.
- O'DONOGHUE, B.; WANG, Y.; BOYD, S. Min-Max Approximate Dynamic Programming. *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design (CACSD)*, p. 424–431, 2011. Citado na página 25.
- ONATSKI, A.; STOCK, J. H. Robust monetary policy under model uncertainty in a small model of the U.S. economy. *Macroeconomic Dynamics*, v. 6, p. 85–110, 2002. Citado na página 17.
- PAIVA, F. A. d. S. *Métodos de Subgradientes em Otimização Não Suave para Problemas de Porte Enorme*. Dissertação de mestrado — Universidade Estadual de Campinas, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, Campinas - SP, 2015. Citado na página 29.
- PEDROSA, F. C.; NEREU, J. C.; do VAL, J. B. R. Stochastic optimal control of systems for which control variation increases uncertainty: A contribution to the discrete time case. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC), Banff*, p. 2279–2284, 2017. Citado na página 31.
- PEDROSA, F. C.; NEREU, J. C.; do Val, J. B. R. When Control and State Variations Increase Uncertainty: Modeling and Stochastic Control in Discrete Time. *Automatica (Accepted for publication)*, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 31, 38, 39, 52 e 112.
- PEDROSA, F. d. C. *Modelagem e controle de sistemas CVIU a tempo discreto*. Dissertação de mestrado — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC, Campinas - SP, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 29, 31, 33 e 35.
- PETERSEN, I. R.; TEMPO, R. Robust control of uncertain systems: Classical results and recent developments. *Automatica*, v. 50, p. 1315–1335, 2014. Citado na página 16.
- PLASMANS, J.; ENGWERDA, J.; AARLE, B. v.; BARTOLOMEO, G. d.; MICHALAK, T. *Dynamic Modeling of Monetary and Fiscal Cooperation Among Nations*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2006. Citado na página 48.
- RAMI, M. A.; CHEN, X.; ZHOU, X. Y. Discrete-time Indefinite LQ Control with State and Control Dependent Noises. *Journal of Global Optimization*, v. 23, p. 245–265, 2002. Citado na página 16.
- ROCKAFELLAR, R. T. Second-order Convex Analysis. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, v. 1, p. 1–16, 1999. Citado na página 28.
- ROSA, T. E.; MORAIS, C. F.; OLIVEIRA, R.; PERES, P. L. D.; SWEVER, J. New robust LMI synthesis conditions for mixed H_2/H_∞ gain-scheduled reduced-order DOF

- control of discrete-time LPV systems. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, p. 6122–6145, 2018. Citado na página 107.
- RUFFINO, P. R. C. *Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos*. Campinas, São Paulo: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2009. Citado na página 46.
- SILVA, V. L.; do VAL, J. B. R.; SOUTO, R. F. A Stochastic Approach for Robustness: a H_2 -norm comparison. *IEEE - Annual Conference on Decision and Control(CDC)*, p. 1094–1099, 2017. Citado na página 31.
- SOONG, T. T. *Differential Equations in Science and Engineering*. New York, USA: Academic Press, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 60.
- STOORVOGEL, A. A. *The H_∞ control problem: a state space approach*. New York, USA: Printece-Hall, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 45.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, p. 625–653, 1999. Citado na página 109.
- SZNADJER, R.; FILAR, J. A. Some comments on a theorem of Hardy and Littlewood. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 75, p. 201–208, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 66.
- TOIVONEN, H. *Lecture Notes on Robust Control by State-space Methods*. Department of Chemical Engineering at Åbo Akademi University - Finland: Åbo Akademi University, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 44.
- VANLIER, J. *Uncertainty analysis in systems biology*. Tese de Doutorado — Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven - The Netherlands, 2014. Citado na página 17.
- WESTERHOFF, H. V.; PALSSON, B. O. The evolution of molecular biology into systems biology. *nature biotechnology*, v. 22, p. 1249–1252, 2004. Citado na página 17.
- ZABCZYK, J. *Mathematical Control Theory: An Introduction*. Boston, USA: Birkhäuser, 1995. Citado na página 57.
- ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of Robust Control*. Upper Saddle River - New Jersey: Prentice Hall, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 46.