

MECANICA CELESTE

COMUNICACIONES

Sobre la determinación de fuerzas no gravitatorias que actúan sobre los cometas

P. E. ZADUNAISKY

Instituto Torcuato Di Tella, Buenos Aires y Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata

Abstract: Some recent investigations on the existence and nature of "non-gravitational" forces acting on comets have required the application of a good deal of high precision numerical procedures. In this paper these procedures are examined critically; special attention is given to cases where some difficulties may appear when the comet makes a close approach either to a planet or to the sun.

1. Introducción

En tiempos recientes se han hecho importantes progresos en el estudio de las irregularidades en el movimiento de los cometas, los que evidencian la existencia de fuerzas no gravitatorias que actúan sobre ellos. B. G. Marsden ⁽¹⁾, siguiendo la teoría de F. L. Whipple sobre la naturaleza física del núcleo de los cometas y el origen de dichas fuerzas, introduce éstas en las ecuaciones de movimiento bajo la forma

$$F = A \exp(B\tau) \cdot \exp(-r^2/C) r^{-\alpha}$$

donde τ es el tiempo desde la época inicial de osculación y r el radio vector heliocéntrico. Las constantes A , B , C , α se determinan conjuntamente con un sistema de elementos osculadores de la órbita por un proceso de corrección diferencial utilizando observaciones de varios retornos del cometa simultáneamente. De esta manera ha logrado representar el movimiento de numerosos cometas; sin embargo en algunos casos, particularmente en el de los cometas P/Schaumasse, P/Perrine-Mrkos, aparecen todavía considerables errores sistemáticos en los residuos.

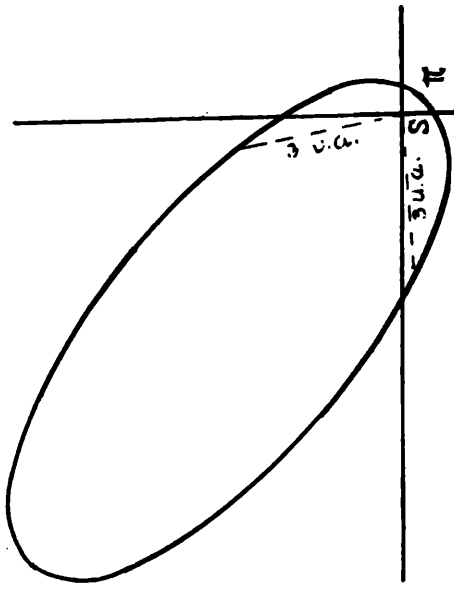
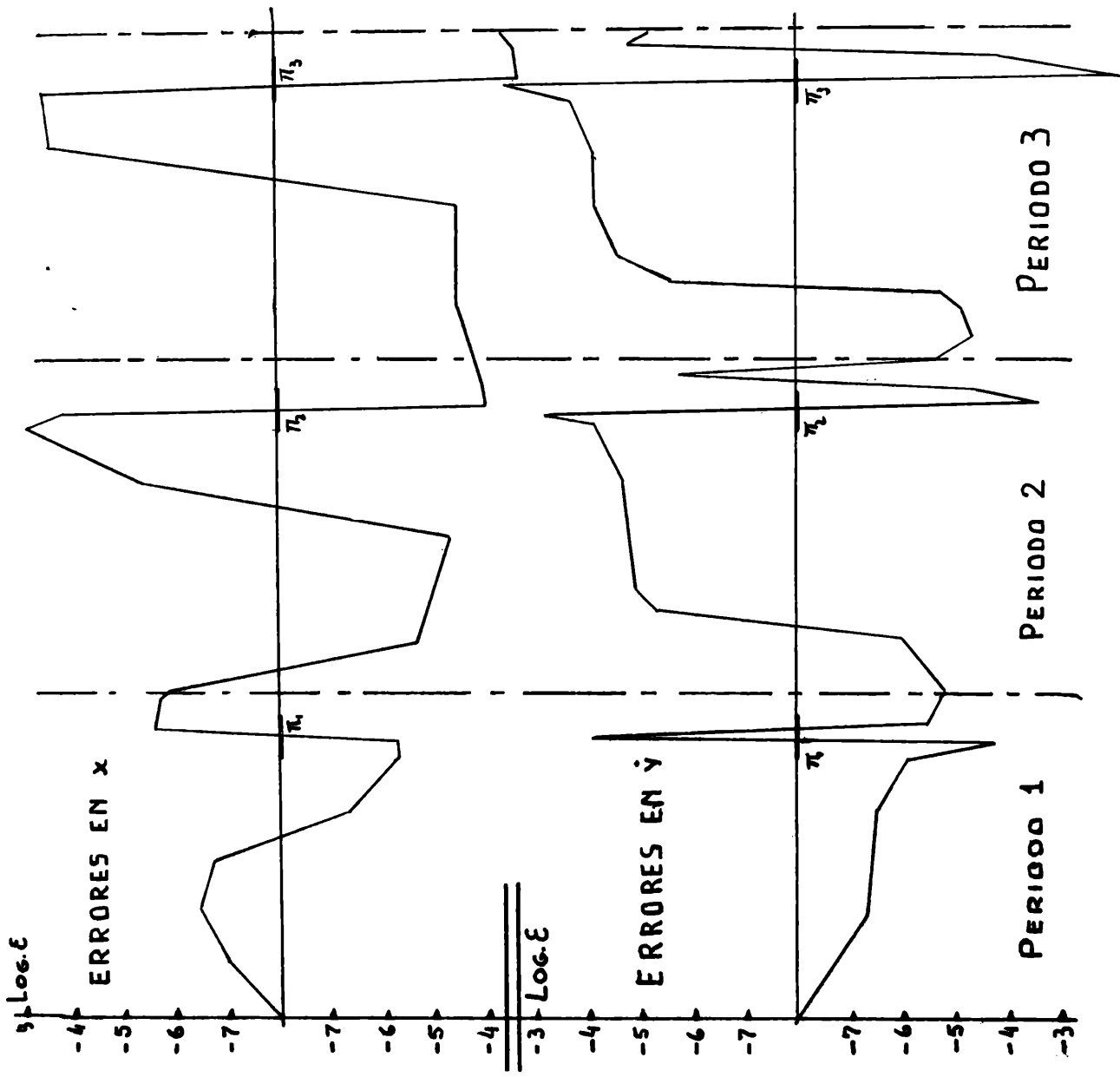
Nuestra hipótesis es la de que estas anomalías se originan en gran parte en los procedimientos de cálculo. En un paso del cometa muy próximo al sol o a algún planeta,

puede ocurrir una importante acumulación de errores de truncamiento en la integración numérica de las ecuaciones de movimiento. Luego estos errores se reflejan y pueden aparecer considerablemente amplificados en el proceso de corrección diferencial. En las secciones siguientes examinamos en orden estos procesos numéricos.

2. Integración numérica de las ecuaciones de movimiento

Como ejemplo típico de una órbita cometaria, hemos considerado el siguiente, de un cometa hipotético perturbado sólo por la atracción de Júpiter y cuya órbita periódica tiene los parámetros que se indican en la figura. Para la integración numérica de las ecuaciones de movimiento hemos usado el método de Runge-Kutta-Gill, controlando siempre la magnitud del paso de integración para mantener el error de truncamiento local inferior a 10^{-8} y empleando 9 cifras significativas. Para la estimación de los errores totales acumulados a lo largo del proceso de integración hemos aplicado un método que habíamos desarrollado anteriormente ⁽²⁾; de los resultados obtenidos se indican en la figura los correspondientes a una de las coordenadas cartesianas heliocéntricas del cometa y a una de las componentes de la velocidad.

Se observa claramente cómo los errores tienen una variación oscilante, lo que se debe a que tanto la órbita como el método de integración empleados son estables. Hemos calculado tres períodos completos del movimiento y la amplitud de los errores acumulados supera notablemente a la de los errores locales tolerados, especialmente en las regiones vecinas ($r < 3 \text{ U.A.}$) a los pasos por el perihelio. Estos errores aparecen como perturbaciones en las ecuaciones de condición en las que se basa el proceso de corrección diferencial. En las siguientes secciones veremos cómo estas perturbaciones pueden afectar a dicho proceso, que esencialmente es inestable y puede amplificar el efecto de las mismas.



ELEMENTOS OSCULADORES

- a = 5.20 u.a.
- P = 11.86 años
- q = 0.45 u.a.
- e = 0.91

ERRORES LOCALES

- Redondeo : 10^{-9}
- Truncamiento : 10^{-8}

η₁₅

3. Proceso de corrección diferencial

3.1. Convergencia y estimación de los errores

En el proceso usual de corrección diferencial se trata de resolver un sistema de ecuaciones no lineales de la forma $f_i(a_1, a_2, \dots, a_k) = y_i$ donde a_1, a_2, \dots, a_k son parámetros a determinar en modo de satisfacer las observaciones y_i según el criterio de cuadrados mínimos. El sistema se linealiza asumiendo que se conoce una solución aproximada

$$A_0 = [(a_1)_0, (a_2)_0, \dots, (a_k)_0]$$

y resolviendo el sistema lineal $M \cdot \Delta A = B$ donde M es la matriz jacobiana $(\partial f_i / \partial a_j)$ de n filas y k columnas; ΔA es el vector de las correcciones de los parámetros y B es el vector de los residuos. La solución por cuadrados mínimos es

$$\Delta A = N^{-1} M^T B = (M^T M)^{-1} M^T B$$

donde $N = M^T M$ es la matriz normal y M^T es la transpuesta de M . A partir de una primera aproximación A_0 supuesta conocida, el proceso puede reiterarse en base a las fórmulas

$$A_{r+1} = \phi(A_r) \\ \phi(A_r) = A_r + N^{-1}(A_r) M^T(A_r) B(A_r)$$

En el lenguaje del Análisis Funcional este proceso equivale a la búsqueda de un "punto fijo" de la función $\phi(A)$. Cuando existe una "constante α de Lipschitz" tal que $0 < \alpha < 1$, el proceso converge hacia una solución A^* y existe una acotación superior del error en A_r de la forma

$$\|A^* - A_r\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|A_r - A_{r-1}\|$$

Por lo tanto el factor α juega un papel decisivo en la precisión y rapidez de convergencia del proceso de corrección diferencial.

Anteriormente hemos estudiado este problema y hemos hallado ^[10], (ver también ⁽²⁾) que α puede expresarse aproximadamente por la fórmula

$$\alpha = \|N^{-1}(A_r)\| \cdot \|\Omega(A_r)\| \cdot \|B(A_r)\|$$

El primer factor es la norma de la inversa de la matriz normal y por tanto mide su grado de singularidad; de este aspecto nos ocuparemos en la sección siguiente. El segundo factor es la norma de la matriz cuyos elementos se definen por la expresión

$$\Omega_{pq} = \max_i (\partial^2 f_i / \partial a_p \partial a_q)$$

que evidentemente se reduce a cero si las funciones f_i son lineales; luego este factor mide la influencia de los términos no lineales de f_i que en el proceso de linearización se han despreciado. El tercer factor es la suma de los cuadrados de los residuos, que se trata de minimizar y cuya magnitud depende tanto de una elección adecuada de las funciones f_i como de la buena cualidad de las observaciones.

3.2. Estabilidad numérica del proceso

Hemos indicado anteriormente que el factor $\|N^{-1}\|$ que aparece en la expresión del parámetro α mide el grado de singularidad de la matriz normal del sistema lineal. En los cálculos usuales se admite implícitamente que la matriz M (de n filas y k columnas) tiene rango $r = k$, es decir que todas las columnas son linealmente independientes. En

ese caso la matriz $N = M^T M$ no es singular y la solución por cuadrados mínimos requiere el cálculo de la matriz $(M^T M)^{-1} M^T$ que se denomina la pseudo-inversa o inversa generalizada de la matriz M y usualmente se indica con el símbolo M^+ . Cuando el rango r de M es menor que k la matriz normal es singular pero igualmente se pueden obtener dos tipos diferentes de soluciones de cuadrados mínimos del modo siguiente ^{(3), (5)}. Para simplificar la notación escribimos el sistema lineal en la forma $Ax = b$, donde A es una matriz de n filas y k columnas y x y b son vectores de k y n dimensiones respectivamente. Si el rango de A es $r < k$, dicha matriz se puede particionar en la forma (B, \bar{B}) donde B es una matriz formada por las r columnas independientes de A y \bar{B} está formada por las $k-r$ columnas de A linealmente dependientes de las anteriores. La matriz normal $(B^T B)$ ahora no es singular y la pseudo-inversa de B es $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$. Entonces se puede demostrar que poniendo $C = B^+ A$ se obtiene como pseudo-inversa de A la matriz $A^+ = C^T (C C^T)^{-1} B^+$ y que el vector $x_m = A^+ b$ satisface la condición de cuadrados mínimos y tiene módulo mínimo. Por otra parte se demuestra que si se forma la matriz

$$A^* = \begin{pmatrix} B^+ \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde las primeras r filas constituyen la matriz B^+ y las restantes $k-r$ filas son nulas, el vector $x_b = A^* b$ también satisface la condición de cuadrados mínimos y tiene a lo sumo r componentes no nulos. x_m se denomina una solución aproximada *mínima* y x_b una solución aproximada *básica*.

Las matrices B y $(B^T B)^{-1}$ se determinan por un proceso recursivo que permite al mismo tiempo determinar las columnas de A que son linealmente independientes. Todo el proceso puede realizarse también por filas en lugar de columnas. Si el sistema $Ax = b$ representa un modelo lineal de un proceso físico, el análisis por columnas de una indicación de si los parámetros a_1, a_2, \dots, a_k han sido bien elegidos en el sentido de que no existen fuertes correlaciones entre ellos y algunos al menos sean redundantes. Por otra parte el análisis por filas va indicando la influencia que cada nueva ecuación de condición, es decir cada nueva observación, tiene en el modelo.

Todas estas consideraciones son válidas en la medida que se admita que el rango r de A está claramente determinado. Esta determinación a veces puede hacerse difícil debido a los inevitables errores de redondeo en los cálculos numéricos. En este caso el proceso de selección de columnas o filas descrito anteriormente puede no ser suficiente pues si bien la matriz normal $(B^T B)$ resulta no singular puede ser "casi" singular. En ese caso un error en A o en b producido por ejemplo por las causas descritas en la sección 2 puede ser considerablemente amplificado en el proceso de corrección diferencial. Entonces el proceso de selección de columnas o filas debe completarse en modo de obtener una pseudo-inversa que reduzca dicha amplificación al mínimo posible. Esto puede hacerse sistemáticamente y para los detalles del proceso se puede ver el N° 4 de la bibliografía.

4. Conclusiones

Hemos mostrado cómo el proceso de integración numérica de las ecuaciones de movimiento puede introducir en las ecuaciones de condición perturbaciones que pueden ser pequeñas pero no despreciables. Estas perturbaciones a su vez pueden amplificarse considerablemente en el proceso de corrección diferencial. Consideramos que ésta es una explicación plausible para las anomalías que se presentan en el cálculo de aquellos cometas que registran pasos muy próximos al Sol o a algún planeta. Las conclusiones que se obtengan acerca de las fuerzas no gravitatorias que actúan sobre los cometas no pueden considerarse como definitivas si no se ha hecho un análisis de los errores sistemáticos de cálculo para eliminarlos o al menos obtener una estimación correcta de ellos.

Nos proponemos realizar en el próximo futuro una serie sistemática de experimentos numéricos con órbitas y modelos de cometas típicos aplicando las técnicas resumidas en el presente informe.

- (1) Marsden, B. G., A. J. 73, 1968.
Marsden, B. G., A. J. 74, 1969.
Marsden, B. G., A. J. 75, 1970.
- (2) Pereyra, V., Siam Journal Num. Anal. 4, 1967.
- (3) Pereyra, V. y Rosen, J. B., Stanford Un CS 13, 1964.
- (4) Pereyra, V., Aequationes Mathematicas 2, 1969.
- (5) Rosen J. B., J. Soc. Indust. Appl Math., 12, 1964.
- (6) Zadunaisky, P. E., Proc. I.A.U. Symp. N° 25, 1964.
- (7) Zadunaisky, P. E., Proc. Symp. on "Periodic Orbits Resonance and Stability", S. Paulo, Brasil, 1969 (Reidel Publ. Co.).
- (8) Zadunaisky, P. E., y Pereyra, V., Proc. Internat. Federation Inform. Processing Symposium, N. York, 1965, Vol. 2.

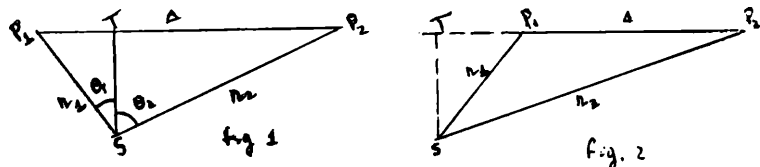
On a new form the main part of the disturbing function in the three-body problem

C. A. ALTAVISTA

Observatorio Astronómico, La Plata

Abstract: A new form for the disturbing function is given in terms of the heliocentric distances r_1 and r_2 and two auxiliary angles θ_1 and θ_2 . An outline is given for obtaining expressions of these angles in terms of known quantities.

1. — Let be given three point masses $m_0(S)$, the Sun, $m_1(P_1)$ and $m_2(P_2)$ the planets. Let r_1 and $r_2 > r_1$, be the heliocentric distances of P_1 and P_2 . Writing Δ for the mutual distance P_1P_2 , and taking in figs. 1 and 2 ST perpendicular to P_1P_2



Figs. 1 and 2 show two possible configurations of the three-body problem, excluded the collinear case.

it is easily seen from triangles STP_1 and STP_2 that:

$$P_2T - P_1T = \frac{r_2^2 - r_1^2}{\Delta}$$

from which we obtain:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r_2^2} \frac{P_2T - P_1T}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

It is evident that:

$$P_1T = r_1 \sin \theta_1, \quad P_2T = r_2 \sin \theta_2$$

2. — In order to put angles θ_1 and θ_2 in terms of orbital elements, let us take the projections of the orbits on the celestial sphere (fig. 3).

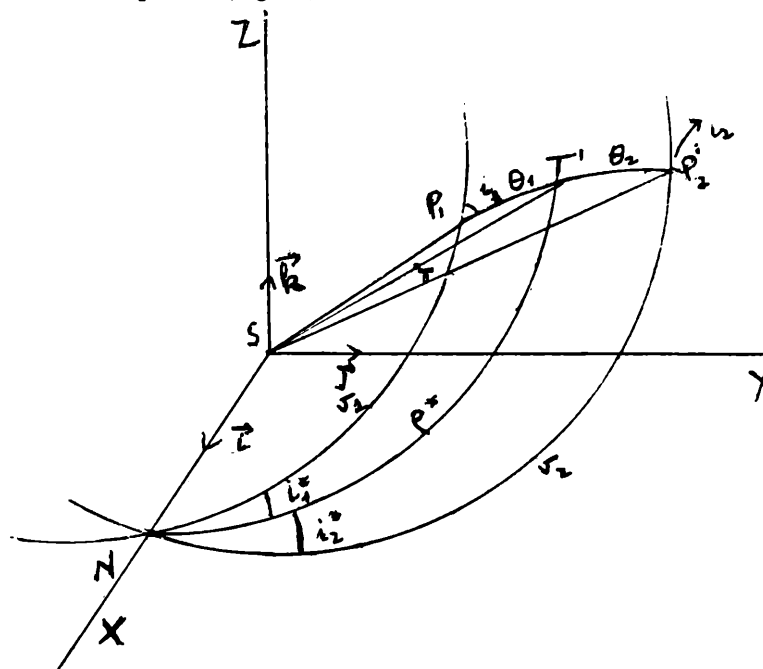


Fig. 3 — The set XYZ is centered in the Sun, the X axis being nodal line of the orbital planes of P_1 and P_2 .

Let T' be the projection of T on the Celestial Sphere. We shall consider the great circle passing through N and T' , upon which the auxiliary quantity ϱ^* will be computed. We indicate with i_1^* and i_2^* resp. the variable angles between the great circle and the orbital planes of P_1 and P_2 ; i_1 and i_2 are resp. the inclinations of the moving plane SP_1P_2 with respect to these same planes. We suppose that approximate values of the orbital elements of both planets are known. Then, variable quantities can be determined in a first approximation by means of keplerian elements of P_1 and P_2 .

From spherical triangles $T'NP_1$ and $T'NP_2$ we get:

- 1) a) $\cos \theta_1 = \cos v_1 \cos \varrho^* + \sin v_1 \sin \varrho^* \cos i_1^*$
b) $\cos \theta_2 = \cos v_2 \cos \varrho^* + \sin v_2 \sin \varrho^* \cos i_2^*$
- 2) a) $\sin i_1^* \sin \varrho^* = \sin i_1 \sin \theta_1$
b) $\sin i_2^* \sin \varrho^* = \sin i_2 \sin \theta_2$
- 3) a) $\sin \varrho^* \cos i_1^* = \cos \theta_1 \sin v_1 - \sin \theta_1 \cos v_1 \cos (180^\circ - i_1)$
b) $\sin \varrho^* \cos i_2^* = \cos \theta_2 \sin v_2 - \sin \theta_2 \cos v_2 \cos (180^\circ - i_2)$