

FORMA ALTERNATIVA DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD BAJO LA RESTRICCIÓN DE DENSIDAD CONSTANTE

Ernesto D. Aguirre^a

^a *Ingeniero Mecánico y Aeronáutico, Córdoba, Argentina, ernestodaguirre@gmail.com*

Palabras Claves: Divergencia de la velocidad, número de mach, densidad, principio de conservación, gases, CFD.

Resumen. Uno de los postulados más indiscutidos de la mecánica de los fluidos, es que la incompresibilidad del fluido implica que la divergencia de la velocidad es nula. En este trabajo, se presentará una forma alternativa de la ecuación de continuidad para el caso especial de los gases que no depende del postulado anterior, sino que, bajo la restricción de densidad constante para el caso especial de los gases, la ecuación toma una forma alternativa. Se ha demostrado y aceptado en diferentes trabajos que se debe asumir la condición de compresibilidad de un gas a partir del umbral del número de Mach igual a 0,3. Esta forma alternativa, presenta un cambio en esta condición quedando explícita la relación entre la ecuación de continuidad y la naturaleza del fluido. La importancia de esta forma alternativa resulta en un cambio de la presentación del sistema de ecuaciones de Navier Stokes y permitiría mantener la evolución de la presión como una variable de estado junto con la velocidad. Este trabajo, versa sobre el modelado de esta ecuación para el flujo de gases y precede a su implementación en un programa de elementos finitos.

1 INTRODUCCIÓN

Los flujos de fluidos considerados incompresibles, se rigen por las ecuaciones de Navier – Stokes, con la restricción que la densidad es constante. Esto elimina un término de la ecuación de continuidad, y queda como consecuencia que la divergencia de la velocidad es nula.

Desde el punto de vista diferencial, y cuando las variaciones de velocidad son bajas o despreciables en una distancia infinitesimal, es suficientemente aceptable.

Sin embargo, cuando se integran las ecuaciones, el campo de velocidades puede contener grandes diferencias entre la máxima y la mínima velocidad, que hace necesario encontrar los límites adecuados para que el flujo se considere efectivamente incompresible.

Se acepta comúnmente, que se considera incompresible un fluido cuando se cumple la siguiente condición:

$$\frac{V^2}{a^2} \ll 1 \quad (1)$$

Un estudio más completo, se encuentran en (Bachelor 1967; Kundu & Cohen, 2002), sin embargo, obtener el valor límite de Mach menor que 0,3 no es tan evidente. Existen varios caminos, sin embargo aquí utilizaremos el análisis de las relaciones isoentrópicas para flujo compresible e isoentrópico, y verificar su diferencia con las ecuaciones de flujo incompresible para números de Mach muy bajos (Fox & McDonald, 1995; White, 2011; Bergadà Granyó, 2015).

Tomando la relación entre la presión de estancamiento y la presión, para un flujo compresible e isoentrópico, se tiene que cumplir la relación entre las mismas en función del número de Mach:

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \text{ con } M = \frac{V}{a} \wedge a^2 = k \frac{P}{\rho} = k RT \quad (2)$$

Siendo k el coeficiente isoentrópico, P_0 la presión de estancamiento, y P la presión del flujo a la velocidad M , para determinar el límite de $M = 0,3$; se debe poner en evidencia que (2), tiene relación con una ecuación que relacione presiones y velocidades en flujo incompresible. Esta ecuación no es otra que la ecuación de Bernoulli. Reescribiendo la (2) y Realizando una expansión del término entre paréntesis:

$$P_0 = P \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} = P \left(1 + \frac{k}{2} M^2 + \frac{k}{8} M^4 + \frac{k(2-k)}{48} M^6 + \dots\right) \quad (3)$$

Operando queda:

$$\begin{aligned} P_0 - P &= P \left(\frac{k}{2} M^2 + \frac{k}{8} M^4 + \frac{k(2-k)}{48} M^6 + \dots\right) = P \frac{k}{2} M^2 \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{(2-k)}{24} M^4 + \dots\right) \\ P_0 - P &= P \frac{k}{2} \frac{V^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{(2-k)}{24} M^4 + \dots\right) = P \frac{k}{2} \frac{\rho V^2}{k P} \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{(2-k)}{24} M^4 + \dots\right) \quad (4) \\ P_0 - P &= \frac{\rho V^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{(2-k)}{24} M^4 + \dots\right) \end{aligned}$$

Aquí, se observa que la diferencia con la ecuación de Bernoulli, difiere en el término entre paréntesis, por lo que si $M \rightarrow 0$, no hay diferencias, entre las presiones calculadas en flujo compresible como en flujo incompresible.

Reescribimos para poder graficar en función del número de Mach

$$\frac{P_0 - P}{a^2} = \frac{\rho}{2} M^2 \quad (5)$$

$$\frac{P_0 - P}{a^2} = \frac{\rho}{2} M^2 \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{(2-k)}{24} M^3 + \dots \right) \quad (6)$$

En la Figura 1, se presenta sus respectivas gráficas.

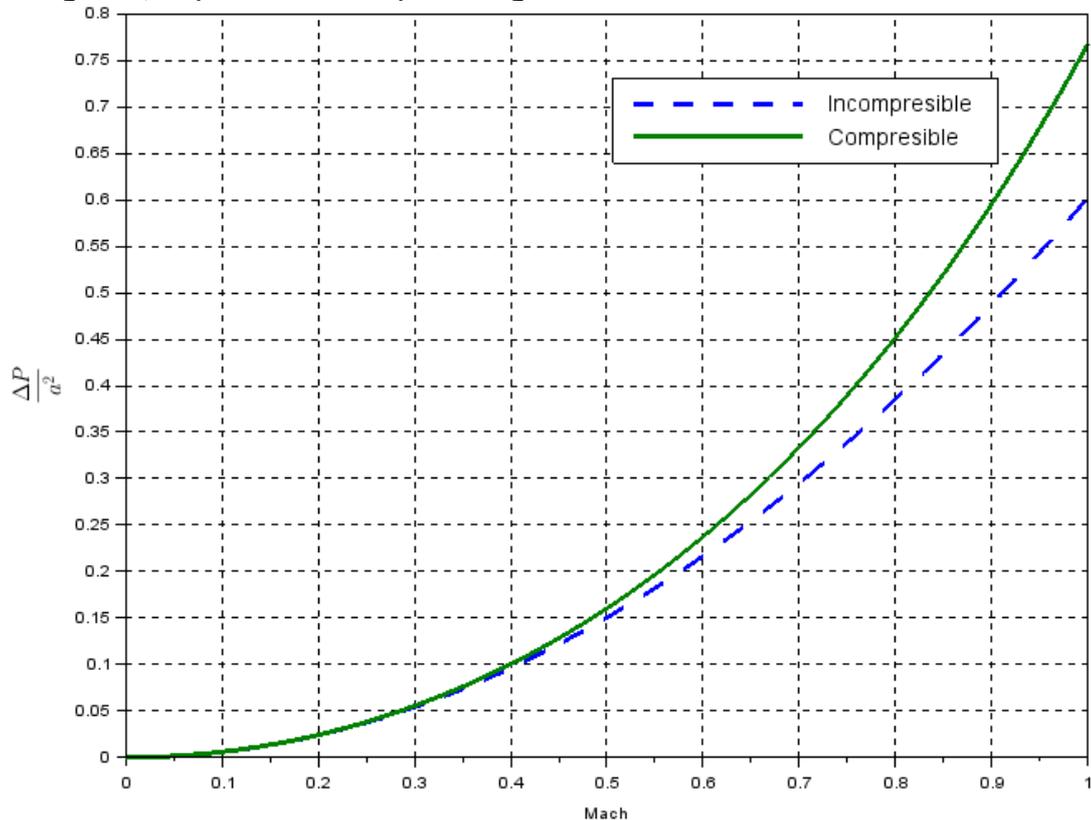


Figura 1

Para que las presiones calculadas con ecuaciones para flujo incompresible, difieran en un 2% de las calculadas con ecuaciones de flujo compresible, como máximo, el máximo número de Mach debe ser 0,2828; es decir casi 0,3. Este valor es consistente con las diferentes aproximaciones teóricas para un flujo incompresible, isoentrópico.

Finalmente, se tiene un límite más práctico para los problemas de ingeniería y no tan estricto en el sentido físico planteado por los distintos autores (Bachelor, 1967; Kundu & Cohen, 2002; Landau & Lifschitz, 1985; White, 2011; Anderson, 1995).

Hasta aquí nada nuevo se ha dicho, sin embargo, algunos problemas que se plantean al resolver las ecuaciones de Navier – Stokes, para flujo incompresible. Utilizando programas de cálculo numérico para flujo compresible, se puede llegar a resolver casos en los cuales el número de Mach es de 0,2; sin embargo esto se realiza a costa de un tiempo prolongado para alcanzar la convergencia. Al presentarse las ecuaciones de Navier – Stokes, para flujo incompresible, la condición de densidad constante, presenta a la ecuación de continuidad como divergencia de la velocidad nula, y además se encuentra inalterable en el tiempo, lo que implica que esta condición debe satisfacerse en cada instante. Como consecuencia además, desacopla la ecuación de la energía, por lo que no se posee otra ecuación que pueda relacionar la temperatura, las presiones y las velocidades, lo que hace que el sistema sea inestable (Anderson 1995).

En el presente trabajo se empieza a abordar un estudio de varios años, que se inicio

estudiando modelos de turbulencia. Durante el derrotero se hallaron inconsistencias de modelo e infinidad de formulaciones y modelos matemáticos para suplirlas. Con cada nuevo escollo, se propone una nueva formulación para saltarlo. Ante ese camino, se estimó conveniente detener el estudio y volver a las bases con una nueva mirada: cuestionarlo todo desde el principio. Por ello, el primer problema que el autor, decide dilucidar por enésima vez siguiendo a los autores clásicos de mecánica de los fluidos, es la ecuación de continuidad o principio de conservación de la masa.

2 PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA MASA

Tomando un elemento infinitesimal, bajo una descripción del campo de movimiento de forma euleriana, como se presenta en la Figura 1, de lados dx , dy y dz .

Sobre éste elemento, que se llamará cubito, se indicarán los flujos que entran y salen a través de las superficies del mismo, para estudiar el balance másico.

Los flujos elementales son graficados como se muestra en la Figura 2. De esta manera el balance de flujo en las direcciones cartesianas resultan en los siguientes:

Flujo neto en x :

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dydz - (\rho u) dydz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz \quad (7)$$

Flujo neto en y :

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx dz - (\rho v) dx dz = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz \quad (8)$$

Flujo neto en z :

$$\left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right] dx dy - (\rho w) dx dy = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz \quad (9)$$

Como por principio de conservación de la masa, de estos resultados se deduce que existe un flujo másico positivo que abandona el cubito, dentro del mismo debería haber una variación de la masa, la cual es representada por la variación temporal de la densidad, es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (10)$$

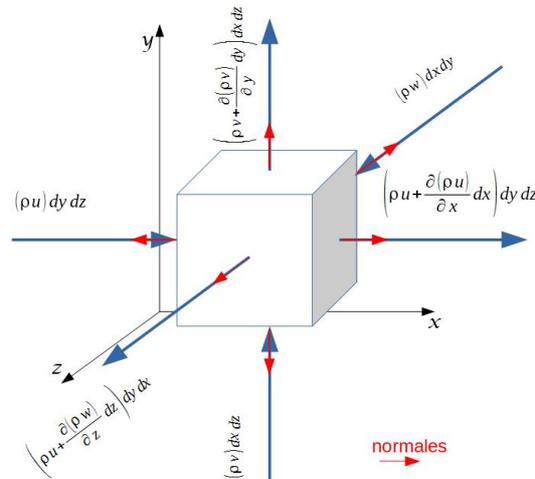


Figura 2: Elemento Diferencial con los flujos de entrada y salida

Como el principio de conservación de masa, implica balance nulo, la ecuación queda:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz = -\frac{\partial(\rho)}{\partial t} dx dy dz \quad (11)$$

Reordenando

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz = 0 \quad (12)$$

Aplicando las reglas de la derivación y utilizando la definición de derivada sustancial, se puede demostrar que la ecuación (2.6) es:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (13)$$

Si ρ es constante, queda demostrado que:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (14)$$

$$\rho \nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (15)$$

Que es la expresión clásica y tradicional del principio de conservación de la masa.

2.1 Un problema clásico

Como problema clásico a resolver en mecánica de los fluidos, se tiene el cálculo de la fuerza que se ejerce sobre la salida del “pico” de una manguera de bomberos (boquilla o tobera), en función de la variación de la cantidad de movimiento. Utilizando el principio de conservación de la masa, se calculan las velocidades de entrada y de salida, de la misma. Se toma como fluido el agua. Un fluido, que es incompresible en términos realmente prácticos.

El problema se esquematiza en una tobera convergente para gases o para líquidos, en la Figura 3, donde faltan las condiciones de presiones. Aquí se tiene el primer obstáculo.

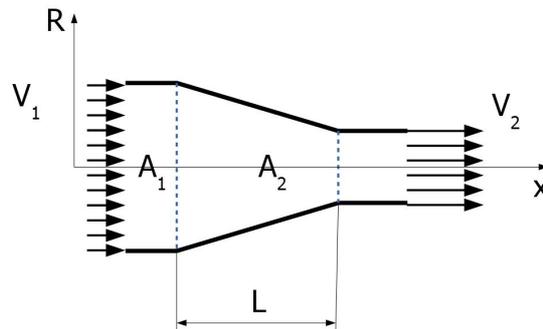


Figura 3: Tobera Convergente.

Es evidente que no se cumple el principio de conservación de la masa tal como fuera enunciado anteriormente en la (15), por lo cual, debemos interpretar en que consiste la divergencia de la velocidad.

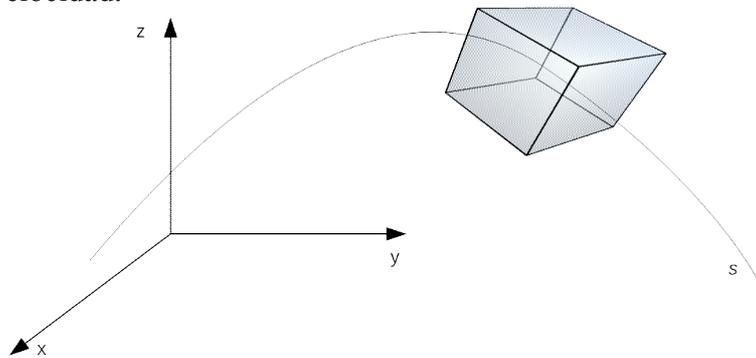


Figura 4: Elemento de fluido en una trayectoria s.

Tomando un volumen elemental tal como se muestra la Figura 4, que se desplace por una trayectoria s , se asume que es lo suficientemente pequeño para que su cantidad de masa se mantenga constante. Entonces la masa se puede expresar como:

$$m = \rho \mathcal{V} = cte \quad (16)$$

con $\mathcal{V} = \text{Volumen}$

Por lo tanto la derivada sustancial de la masa se puede expresar como:

$$\frac{D m}{D t} = \frac{D(\rho \mathcal{V})}{D t} = \mathcal{V} \frac{D \rho}{D t} + \rho \frac{D \mathcal{V}}{D t} = 0 \quad (17)$$

de la ecuación (13), se despeja el término de la derivada sustancial de la densidad, y reemplazando en la (17), queda

$$-\mathcal{V} \rho \nabla \vec{V} + \rho \frac{D \mathcal{V}}{D t} = 0 \quad (18)$$

Despejando el término de la divergencia de la velocidad

$$\nabla \vec{V} = \frac{\rho}{\rho \mathcal{V}} \frac{D \mathcal{V}}{D t} = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D \mathcal{V}}{D t} \quad (19)$$

Queda entonces

$$\nabla \vec{V} = \frac{1}{V} \frac{D V}{D t} \quad (20)$$

Al mismo resultado se puede llegar haciendo un análisis de un volumen elemental lineal deformándose en la dirección longitudinal (Kundu 2002), como también se puede tomar una análisis integral de una pequeña fracción de masa (Anderson 1995) y se llega al mismo resultado.

Por lo tanto, una misma expresión, no puede tener dos significados físicos diferentes. Esto implica, que la derivada sustancial de la densidad, debe ser igual a cero, sin embargo existen relaciones entre la densidad y las variables de estado relacionadas de la sustancia fluida, que determinan que la derivada sustancial sea igual a cero. Es decir, debemos explicitar cómo se hace nula la derivada de la densidad, o en su defecto, que aún siendo constante la densidad, entran en juego las otras variables de estado que compensan la variación sustancial del volumen en el tiempo por unidad de volumen, es decir nuestro punto de partida es la ecuación (13) y la ecuación (14).

Mediciones realizadas en una aeronave en vuelo (Lenschow 2007) demuestran que el valor de $\nabla V \approx \pm 10^{-8}$, valor inferior a otras estimaciones (Bachelor 1967). El hecho que el valor de la divergencia de la velocidad no es nula, aunque se trate de valores muy bajos, indican que existen otros procesos que están en juego que llevan a que ésta, los equilibre. A partir de la ecuación de los gases perfectos, se va a demostrar que hay otro equilibrio que se ha pasado por alto, y que responde a la naturaleza del fluido y restringe a las variables del flujo del mismo. Nuevamente se insistirá, en que este trabajo está circunscripto sólo a los gases, y cuando se haga referencia a fluidos y flujos, se tratará de flujo de gases. Las constantes que se utilizan, son las relativas al aire, como caso de aplicación para obtener algunos números que ayudan a la comprensión.

3 LA DENSIDAD EN LOS GASES

En este trabajo se tomará para demostrar lo afirmado al final del párrafo anterior, a los gases, y como ecuación de compatibilidad, aquella que se usa habitualmente, la ecuación de los gases perfectos, que relaciona a la densidad con la presión y la temperatura. La misma se la reescribirá para evidenciar que la densidad, es función de la temperatura y de la presión.

$$\rho = \frac{P}{R T} \quad (21)$$

3.1 Derivada Sustancial de la densidad

A partir de esta ecuación, se puede hacer la derivada sustancial, teniendo en mente que la densidad permanece constante, pero la presión y la temperatura no. Es decir, la relación presión temperatura, es la que asegura la constancia de la densidad, por lo tanto, mientras varíen en la proporción de la ecuación (21), la densidad seguirá siendo constante aunque tanto la presión como la temperatura, quedan ligadas entre sí.

Tomando la (21) y reemplazando en la (14)

$$\frac{D \rho}{D t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho = \frac{\partial \left(\frac{P}{R T} \right)}{\partial t} + \vec{v} \nabla \left(\frac{P}{R T} \right) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{P}{RT} \right)}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{T \frac{\partial P}{\partial t} - P \frac{\partial T}{\partial t}}{T^2} = \frac{1}{RT} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{P}{RT^2} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23)$$

$$\vec{v} \nabla \left(\frac{P}{RT} \right) = \frac{1}{R} \frac{T \vec{v} \nabla P - P \vec{v} \nabla T}{T^2} = \frac{1}{RT} \vec{v} \nabla P - \frac{P}{RT^2} \vec{v} \nabla T$$

Agrupando los términos de presión y temperatura, y tomando en cuenta la (3.1), ya que ρ es constante

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left(\frac{1}{RT} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{RT} \vec{v} \nabla P \right) - \left(\frac{\rho}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho}{T} \vec{v} \nabla T \right) = \frac{1}{RT} \frac{DP}{Dt} - \frac{\rho}{T} \frac{DT}{Dt} = 0$$

consecuentemente, si ρ es constante

$$\frac{DP}{Dt} = \rho R \frac{DT}{Dt} \quad (24)$$

Por lo tanto, la restricción de densidad constante, implica en primer lugar la variación de la presión con la temperatura, y en segundo lugar, que sin importar el régimen de flujo; ya que no se ha hecho ninguna consideración sobre el número de Reynolds; implica que la ecuación de la energía, no puede desacoplarse del resto del sistema de ecuaciones de Navier – Stokes.

Es decir, se deben resolver simultáneamente las ecuaciones de cantidad de movimiento, principio de conservación bajo esta nueva forma y la ecuación de la energía, cualquiera sea el régimen de flujo bajo la restricción de densidad constante o flujo incompresible.

Tomando en consideración al aire como gas, su densidad a 20° y el valor de R, se puede calcular la relación entre ambas derivadas, así

$$\rho_{20} = 1,20 \left[\frac{kg}{m^3} \right] \quad R = 287 \left[\frac{J}{kg \ K} \right] \quad (25)$$

$$\frac{DP}{Dt} \simeq 345 \frac{DT}{Dt} \left[\frac{Pa}{K} \right]$$

Esto implica que una variación de la temperatura es amplificada casi 350 veces para producir un cambio de una unidad en la presión, o mejor dicho de otra manera, la variación de un pascal implica un cambio en la temperatura unas 350 veces menor, estamos hablando de milésimas de grados. Es decir, si la restricción de incompresibilidad se pretende utilizar, se deben utilizar todas las ecuaciones, y desacoplar la ecuación de la energía no es una opción.

3.2 Compatibilidad con la ecuación de la estática de los fluidos

Es posible demostrar que este resultado, no depende en general de la velocidad, aunque la misma está presente a través de la derivada sustancial.

Se puede partir directamente de las ecuaciones de los gases perfectos, y obtener el mismo resultado, o partir del principio de conservación de la masa, como de la ecuación (24) y alcanzar el mismo resultado. Si se parte de ésta ecuación, las hipótesis a aplicar son que las velocidades son extremadamente bajas y que se trata de un campo estratificado. Que tanto la temperatura como la presión, varían con la componente z.

O, aplicar álgebra, que es lo que se realizará en este caso. La (24) puede reescribirse de la siguiente forma

$$\frac{DP}{Dt} - \rho R \frac{DT}{Dt} = 0 \quad (26)$$

Las hipótesis que deben aplicarse, es que el flujo es estacionario y las variables de estado sólo dependen de la componente vertical, es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = 0 & \quad \wedge \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \\ P = P(z) & \quad \wedge \quad T = T(z) \end{aligned} \quad (27)$$

Aplicando la primera de las condiciones expresadas en (27), de constancia en el tiempo, la (26) queda:

$$\vec{V} \nabla P - \rho R \vec{V} \nabla T = 0 \quad (28)$$

Aplicando álgebra vectorial,

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot (\nabla P - \rho R \nabla T) &= 0 \\ \vec{V} = 0 \vee (\nabla P - \rho R \nabla T) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Se puede suponer que las velocidades son muy bajas, o en todo caso, es interesante pensar que cualquiera sea el campo de velocidades existentes, la relación de los gases perfectos y la restricción de densidad constante se cumpla. Por lo tanto de la última expresión de la (29), y aplicando la segunda condición de la (27), esto da:

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \rho R \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

La ecuación de la estática de los fluidos es:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (31)$$

Despejando e igualando:

$$\rho R \frac{\partial T}{\partial z} = -\rho g \quad (32)$$

Finalmente

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{R} \simeq -0,0341695 \left[\frac{^{\circ}\text{K}}{\text{m}} \right] \quad (33)$$

Resultado que difiere de la pendiente conocida para la temperatura, $-0,0065[^{\circ}\text{K}/\text{m}]$.

Es decir, la pendiente térmica con la altura, es un 20% aproximadamente, del valor que tendría en caso de que el aire sea incompresible.

Los experimentos confirman, y aún los cálculos, que si entre dos puntos existe muy poca altura, la hipótesis de ρ constante y de condiciones isotérmicas, producen resultados de escaso error y gran utilidad práctica en la resolución de problemas.

4 LAS ECUACIONES DE NAVIER – STOKES EN EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

4.1 Ecuaciones de Navier – Stokes

Para expresarse con mayor comodidad, a partir de este punto se utilizará notación indicial para compactar las expresiones, pero mantener de manera evidente, las restricciones de densidad constantes y cómo se relacionan en las ecuaciones de Navier – Stokes y afectan al sistema de ecuaciones resultante, al aplicar el método de elementos finitos.

También, las ecuaciones de Navier – Stokes se expresarán para el caso bidimensional y estacionario (Aguirre & Rosas 2001).

El sistema, para el caso de fluido incompresible, se escribe de la manera clásica:

$$\rho \left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \rho g_j - \frac{\partial P}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$
(34)

En cual, como la densidad no aparece en la ecuación de continuidad, se deduce directamente que la ecuación de la energía se encuentra desacoplada, y que el campo de temperaturas, puede obtenerse posteriormente de resolver los campos de presión y de velocidades.

Sin embargo al implementarse numéricamente, el sistema no converge fácilmente, y es necesario aplicar métodos complementarios que aseguren su convergencia, como por ejemplo el esquema de corrección de la presión (Patankar & Spalding, 1972; Anderson 1995).

4.2 Nueva formulación de las ecuaciones de Navier – Stokes para un gas incompresible

La ecuación (26) se escribe en este caso como:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u_i \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho R \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0$$
(35)

Sin embargo, de acuerdo a lo expuesto en la sección 3, el sistema debería escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u_i \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho R \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \rho g_j - \frac{\partial P}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right) + \Phi$$
(36)

O, reteniéndose el término que contiene a la divergencia de la velocidad

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u_i \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho R \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \rho g_j - \frac{\partial P}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right) + \Phi$$
(37)

En ambos sistemas de ecuaciones, se incluye la ecuación de la energía, ya que como se establece a partir de la (26), la variación de la temperatura es necesaria para cumplir la condición de compatibilidad de los gases, y en consecuencia, la ecuación de la energía no puede estar desacoplada de las ecuaciones de conservación de masa ni de la variación de la cantidad de movimiento.

5 FORMULACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS DE LAS ECUACIONES DE NAVIER – STOKES

5.1 Método de elementos finitos usando elementos de 4 y 8 nodos

Aquí a partir de las ecuaciones anteriores se pretende mostrar la diferencia en utilizar la forma clásica de la ecuación del principio de conservación, y la que se propuesta en este trabajo.

Para ello se trabajará en ecuaciones bidimensionales y estacionarias, con la finalidad de hacer más sencillo el ejemplo. La variación en el tiempo, en general es posible realizarla de una manera simple utilizando una derivada de Euler en avance o un método multipaso como Adam – Bashforth, que no explicitaremos aquí.

La formulación en elementos finitos, entonces se expresa como

$$\int_{\Omega} [\text{Funcion de Peso} \times \text{Ecuación Diferencial}] d\omega = 0$$

Siendo Ω el dominio discreto de evaluación del problema, y ω el dominio elemental. Utilizando, la ecuación que corresponde a la dirección de las “x”,

$$\int_{\Omega} W_k \left[\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - F_x - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] d\omega = 0$$

Con el modelo de elemento de 8 nodos para las variables de velocidad, y cumpliendo con la condición de divergencia estable ([Gunzburger 1989](#)), las funciones de forma para la presión son de un grado menor que las funciones asociadas a la velocidad, que conducen a utilizar sobre elementos de 4 nodos cuyos vértices coinciden con el anterior. Las funciones de forma asociadas a las variables son:

$$u = \sum_{i=1}^{n=8} N_i(x, y) u_i \quad , \quad v = \sum_{i=1}^{n=8} N_i(x, y) v_i \quad , \quad P = \sum_{i=1}^{m=4} M_i(x, y) P_i$$

Luego las ecuación, ya debilitada y expresada para un elemento, indicado aquí con el supraindice e , denotando Ω para el dominio elemental y Γ para el contorno elemental ([Taylor & Hughes, 1981](#); [Aguirre & Rosas, 2001](#)), se expresa de la siguiente manera

$$\sum_1^{n^e} \left[\int_{\Omega^e} \left[\rho N_k \left(N_i \tilde{u}_i \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + N_k N_i \tilde{v}_i \frac{\partial N_l}{\partial x} u_j \right) + N_k \frac{\partial M_l}{\partial x} P_l - N_k F_x - \mu \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_l}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_l}{\partial y} u_j \right) \right] d\Omega^e \right] =$$

$$- \int_{\Gamma^e} \mu \left(N_k \frac{\partial N_l}{\partial n} u_j + N_k \frac{\partial u_j}{\partial n} \right) d\Gamma^e$$

Donde se han realizado algunas simplificaciones de notación para no extenderse sobre la conformación. La tilde (\sim) en las variables u y v , indica que se trata de un valor estimado que se va iterando, j indica el nodo, i la ecuación centrada en el nodo i , k para las funciones de peso, l para las funciones de forma de la presión. No se presentará las transformaciones necesarias del elemento maestro al elemento físico, ya que se pretende solo poner en evidencia el cambio en la formulación. La ecuación de continuidad para flujo incompresible de la forma habitual queda:

$$\sum_1^{n^e} \int_{\Omega^e} M_l \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) d\Omega^e = 0$$

La matriz elemental se transforma de esta manera en:

$$\begin{bmatrix} A_{e,1}^1+B_{e,1}^1 & C1_{e,1}^1 & 0 & A_{e,2}^1+B_{e,2}^1 & 0 & \dots & 0 \\ D1_{e,1}^1 & 0 & D2_{e,1}^1 & D1_{e,2}^1 & D2_{e,2}^1 & \dots & D2_{e,8}^1 \\ 0 & C2_{e,1}^1 & A_{e,1}^1+B_{e,1}^1 & 0 & A_{e,2}^1+B_{e,2}^1 & \dots & A_{e,8}^1+B_{e,8}^1 \\ A_{e,1}^2+B_{e,1}^2 & C1_{e,1}^2 & 0 & A_{e,2}^2+B_{e,2}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C2_{e,1}^2 & A_{e,1}^2+B_{e,1}^2 & 0 & A_{e,2}^2+B_{e,2}^2 & \dots & A_{e,8}^2+B_{e,8}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & C2_{e,1}^8 & A_{e,1}^8+B_{e,1}^8 & 0 & A_{e,2}^8+B_{e,2}^8 & \dots & A_{e,8}^8+B_{e,8}^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ p_1^n \\ v_1^n \\ u_2^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_8^n \end{bmatrix}$$

Donde los coeficientes de la matriz se expresan de la siguiente manera:

$$A_{e,j}^n = \rho \int_{\Omega^e} \left(N_k \tilde{u} \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_k \tilde{v} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega^e \quad B_{e,j}^n = \mu \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega^e$$

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n=8} N_i \tilde{u}_i \quad \tilde{v} = \sum_{i=1}^{n=8} N_i \tilde{v}_i$$

$$C1_{e,j}^n = \int_{\Omega^e} N_k \frac{\partial M_l}{\partial x} d\Omega^e \quad C2_{e,j}^n = \int_{\Omega^e} N_k \frac{\partial M_l}{\partial y} d\Omega^e$$

$$D1_{e,j}^n = \int_{\Omega^e} M_l \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e \quad D2_{e,j}^n = \int_{\Omega^e} M_l \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega^e$$

Se puede observar en la matriz elemental que en elemento (2,2) es cero. Estos ceros, aportan a la diagonal principal, haciendo al sistema sparse, aún más inestable.

5.2 Matriz Elemental con la nueva formulación

Con la nueva formulación de la ecuación de continuidad propuesta, se deben incluir nuevos términos y coeficientes en la matriz elemental, eligiendo cuáles son las funciones de forma que deberían ser utilizadas para la temperatura. Además se incluye la ecuación de la energía, con el coeficiente que multiplica a la temperatura. Esto se traduce en la siguiente forma

$$\begin{array}{cccccccc|cccc}
 A_{e,1}^1+B_{e,1}^1 & C1_{e,1}^1 & 0 & 0 & A_{e,2}^1+B_{e,2}^1 & 0 & \cdots & 0 & A_{e,8}^1+B_{e,8}^1 & 0 & u_1^n \\
 D1_{e,1}^1 & F_{e,1}^1 & D2_{e,1}^1 & G_{e,1}^1 & D1_{e,2}^1 & D2_{e,2}^1 & \cdots & G_{e,7}^1 & D1_{e,8}^1 & D2_{e,8}^1 & P_1^n \\
 0 & C2_{e,1}^1 & A_{e,1}^1+B_{e,1}^1 & 0 & 0 & A_{e,2}^1+B_{e,2}^1 & \cdots & 0 & 0 & A_{e,8}^1+B_{e,8}^1 & v_1^n \\
 0 & 0 & 0 & E_{e,1}^1 & 0 & 0 & \cdots & E_{e,7}^1 & 0 & 0 & T_1^n \\
 A_{e,1}^2+B_{e,1}^2 & C1_{e,1}^2 & 0 & 0 & A_{e,2}^2+B_{e,2}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & u_2^n \\
 0 & C2_{e,1}^2 & A_{e,1}^2+B_{e,1}^2 & 0 & 0 & A_{e,2}^2+B_{e,2}^2 & \cdots & 0 & A_{e,8}^2+B_{e,8}^2 & 0 & v_2^n \\
 \vdots & \vdots \\
 A_{e,1}^7+B_{e,1}^7 & C1_{e,1}^7 & 0 & 0 & A_{e,2}^7+B_{e,2}^7 & 0 & \cdots & 0 & A_{e,8}^7+B_{e,8}^7 & 0 & u_7^n \\
 D1_{e,1}^7 & F_{e,1}^7 & D2_{e,1}^7 & G_{e,1}^7 & D1_{e,2}^7 & D2_{e,2}^7 & \cdots & G_{e,7}^7 & D1_{e,8}^7 & D2_{e,8}^7 & P_7^n \\
 0 & C2_{e,1}^7 & A_{e,1}^7+B_{e,1}^7 & 0 & 0 & A_{e,2}^7+B_{e,2}^7 & \cdots & 0 & 0 & A_{e,8}^7+B_{e,8}^7 & v_7^n \\
 0 & 0 & 0 & E_{e,1}^7 & 0 & 0 & \cdots & E_{e,7}^7 & 0 & 0 & T_7^n \\
 A_{e,1}^8+B_{e,1}^8 & C1_{e,1}^8 & 0 & 0 & A_{e,2}^8+B_{e,2}^8 & 0 & \cdots & 0 & A_{e,8}^8+B_{e,8}^8 & 0 & u_8^n \\
 0 & C2_{e,1}^8 & A_{e,1}^8+B_{e,1}^8 & 0 & 0 & A_{e,2}^8+B_{e,2}^8 & \cdots & 0 & 0 & A_{e,8}^8+B_{e,8}^8 & v_8^n
 \end{array}$$

Donde se ha remarcado la submatriz que corresponde a los nodos 1 y 2 locales del elemento. Aquí se observa que la matriz elemental tiene todos los elementos de su diagonal principal no nulos, lo que conduce a una matriz global de diagonal dominante, probablemente definida positiva.

Los nuevos coeficientes son los que corresponden a la ecuación de la energía, ya convenientemente debilitada y la que corresponde a los términos de la ecuación de continuidad, que corresponden a las variables de presión y temperatura.

La temperatura, es mapeada con las mismas funciones que la presión, para mantener la proporcionalidad con la ecuación (21), y a su vez que sus derivadas varíen también lo sean. Esto, sin embargo, no es necesario.

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{l=1}^{m=4} M_l T_l \\
 F_{e,j}^n &= \int_{\Omega^e} N_k \left(\tilde{u} \frac{\partial M_l}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial M_l}{\partial y} \right) d\Omega^e \\
 G_{e,j}^n &= \rho R \int_{\Omega^e} N_k \left(\tilde{u} \frac{\partial M_l}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial M_l}{\partial y} \right) d\Omega^e \\
 E_{e,j}^n &= \int_{\Omega^e} \left[\rho c_v M_k \left(\tilde{u} \frac{\partial M_l}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial M_l}{\partial y} \right) - K \left(\frac{\partial M_k}{\partial x} \frac{\partial M_l}{\partial x} + \frac{\partial M_k}{\partial y} \frac{\partial M_l}{\partial y} \right) \right] d\Omega^e
 \end{aligned}$$

El lado derecho del sistema de ecuaciones, se obtiene de la manera conocida. Aquí cabe destacar dos temas importantes, el primero con respecto a la viscosidad μ , que se considera constante, pero que en realidad, si se aplica la ecuación de la energía, debería imponerse un modelo con la Ley de Sutherland.

El segundo tema, tiene que ver con la función de transferencia de Rayleigh, ésta puede utilizarse evaluando posteriormente, a partir de los valores del campo de velocidades, o por el contrario, imponerla en el sistema de ecuaciones, tal que varíe junto con los valores de la velocidad.

La única ventaja de este última posibilidad, radica en que el campo de velocidades queda vinculado al campo de temperaturas, de esta manera, todas las variables se encuentran relacionadas por la fuerte restricción que, para los gases, impone la condición de densidad constante.

6 CONCLUSIONES

Como se ha presentado en las secciones anteriores, el cambio en la ecuación de continuidad, bajo la restricción de densidad constante, mejora el perfil de la matriz elemental en el método de elementos finitos, y evita la posibilidad de se ubiquen ceros en la diagonal principal de la matriz ensamblada.

Sin embargo, poco se ha dicho del importante cambio en el sistema de ecuaciones de Navier – Stokes que esto representa.

Se demostró en la sección 3, que la ecuación de la energía no puede ser desacoplada del sistema de ecuaciones. También, que con el cambio de la densidad por su equivalencia a través de ecuación de los gases perfectos, se encuentra una fuerte vinculación entre la temperatura y la presión, aún cuando el campo de velocidades sea solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$).

La técnica de corrección de presión, extensamente utilizada tanto en flujo incompresible como compresible, fue desarrollada para flujos parabólicos (Patankar & Spalding, 1972), y allí explícitamente, los autores justifican y demuestran que la presión ajustarse hasta cumplir con la ecuación de continuidad local y posteriormente el campo debe asegurar el cumplimiento en todo el dominio.

En esta nueva presentación, ya está incorporada la presión a la ecuación de continuidad, por lo que el campo de presiones obtenido, deberá cumplir con ésta, aunque su variación se deba principalmente a los cambios de temperaturas.

También puede observarse de cómo quedan las ecuaciones. Si, la densidad es estrictamente constante, la presión solo depende de la temperatura (ecuación de continuidad), sin embargo la temperatura, si se consideran los esfuerzos viscosos, depende de las variaciones de velocidad (ecuación de la energía), y finalmente las no-linealidades de las componentes de la velocidad se ajustan débilmente por las variaciones de presión.

La complejidad de resolver las ecuaciones de Navier – Stokes (Storti & Nigro, 2007), en flujo incompresible se puede resumir citando las siguientes situaciones:

- a) La presión no tiene historia, por lo que el estado del sistema y su evolución depende puramente de la velocidad. Se toma a la presión como un multiplicador de Lagrange asociado.
- b) Se interpreta que las ecuaciones son no-locales, es decir el conjunto salvando las distancias, todo el dominio del flujo se debería deformar como un sólido elástico.
- c) La ecuación de la energía está desacoplada de la ecuación de continuidad y de la ecuación de la cantidad de movimiento. Por ello la temperatura se puede calcular posteriormente.

Sin embargo, esto ya ha cambiado para el caso de los gases, al introducir la nueva versión de la ecuación de continuidad, es necesario incorporar la ecuación de la energía. Desde la teoría de cinética molecular, tomando en cuenta, que la presión y la temperatura dependen del valor de agitación térmica de conjunto y su número de choques, y que al velocidad del campo de movimiento es varios órdenes menor que la velocidad media molecular, se puede inferir, que resultaría lógico que existiera dependencia mutua entre las presiones y las temperaturas mientras los valores máximos de velocidades del conjunto de moléculas sean bajas y por ello el acoplamiento entre el campo de velocidad y los correspondientes a las presiones y temperaturas, sea débil.

Esto último no quiere decir que la influencia de la temperatura sea despreciable, sino que en las ecuaciones se encuentra débilmente vinculadas, y esto lleva al error de suponerlas despreciables. No lo son en absoluto. Se puede calcular, utilizando la ecuación de Bernoulli, entre dos puntos de una línea de corriente con igual altura geométrica, y donde además la velocidad en uno de sus puntos es cero, si la temperatura variase en un grado kelvin, la velocidad en el otro punto sería igual a 24 m/s aproximadamente. Es decir, una variación de

un grado de temperatura implica una gran cantidad de energía cinética. Implica grandes variaciones del campo de velocidades, y éstas no se encuentran reflejadas en el sistema de ecuaciones de Navier – Stokes para flujo incompresible tradicional. La presión no tiene determinada su variación y difícilmente puede acompañar al campo de velocidades a menos que se utilicen técnicas como la corrección de presión.

Una última observación puede hacerse desde la ecuación de la energía, si ambos lados de la igualdad se dividen por ρR y tomando en cuenta que son ds constantes, se puede reescribir la ecuación de la energía como:

$$\begin{aligned} \frac{\rho c_v}{\rho R} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) &= \frac{K}{\rho R} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right) + \frac{\Phi}{\rho R} \\ \rho c_v \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T}{\rho R} \right) + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{T}{\rho R} \right) \right] &= K \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{T}{\rho R} \right) \right] + \Phi' \\ \rho c_v \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) &= K \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} \right) + \Phi' \end{aligned} \quad (38)$$

La última ecuación de la (38), se puede utilizar con el sistema original de Navier – Stokes incompresible (34), sólo adicionando ésta ecuación. Nótese que el último término del segundo miembro Φ' , es prácticamente 300 veces menor que el término correspondiente a la función de disipación Φ , que ya de por sí es un término pequeño. Nuevamente tenemos una ecuación para la variación temporal de la presión, y que es muy similar a la ecuación de corrección de la presión. Finalmente, se vuelve a hacer hincapié en que pequeñas variaciones de temperaturas, provocan grandes variaciones de presión.

Finalmente, en este trabajo, que se expone sólo la parte matemática, ya que el autor se halla realizando las pruebas numéricas con los casos de benchmark y además se está elaborando una ecuación más apropiada para cualquier tipo de fluido.

REFERENCES

- Aguirre, Ernesto D. y Rosas, Daniel F., *Solución de las ecuaciones de Navier – Stokes simplificadas, discretizadas por el método de los elementos finitos empleando Matlab*, Universidad Nacional de Córdoba, 2001.
- Anderson, J. D. Jr., *Computational Fluid Dynamics*, McGraw Hill, Inc., Singapore, 1995.
- Bachelor, G. K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press 1967.
- Bergadà Granyó, Josep M., *Mecánica de Fluidos. Breve Introducción teórica con problemas resueltos*, Iniciativa Digital Politécnica de la UPC, 2015.
- Fox, Robert W.; McDonald, Alan T., *Introducción a la mecánica de fluidos*, 2ª edición en español McGraw Hill/ Interamericana de México, S. A. de C. V., 1995.
- Gunzburger, Max D., *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows. A Guide to Theory, Practice, and Algorithms*, Academic Press, Inc., London, England, 1989.
- Kundu, Pijush K.; Cohen, Ira M., *Fluid Mechanics*, Academic Press, San Diego, USA, 2002.
- Landau, L. D.; Lifshitz, E. M., *Curso de Física Teórica Volumen 6 Mecánica de los Fluidos*, Editorial Reverté S. A., Sevilla, España, 1985.
- Lenschow, Donald H., *Divergence and Vorticity from aircraft air motion measurements*, Journal of atmospheric and oceanic technology Vol 25, pp 2062 – 2072, 2007.
- Nigro, Norberto; Storti, Mario, *Métodos Numéricos en Fenómenos de Transporte*, Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería 2007.
- Patankar, S. V.; Spalding, D. B., *A calculation for heat, mass and momentum transfer in three*

dimensional parabolic flows, Journal Heat Mass Transfer Vol. 15, pp 1787 – 1806, Pergamon Press 1972.

Taylor, C.; Hughes, T. G., *Finite Element Programming of the Navier–Stokes Equations*, Pineridge Press Ltd. West Cross, Swansea, 1981.

White, Frank, *Fluid Mechanics 7th edition*, McGraw Hill, NY, USA, 2011.