

# Analisis Pengendalian Gerak Model Robot Keseimbangan Beroda Dua Menggunakan Pengendali Linear Quadratic Regulator (LQR)

Modestus Oliver Asali, Ferry Hadary, Bomo Wibowo Sanjaya  
Program Studi Teknik Elektro,  
Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik  
Universitas Tanjungpura  
e-mail : [modestus\\_oliver@yahoo.com](mailto:modestus_oliver@yahoo.com)

**Abstrak-** Perkembangan penelitian tentang robot mendapat kemajuan yang pesat beberapa dekade terakhir ini. Salah satu robot yang mendapat perhatian serius belakangan ini adalah robot penyeimbang beroda dua yang berfungsi sebagai kendaraan masa depan bagi manusia karena memiliki kelebihan dalam hal emisi dan manuvernya. Dalam penelitian ini dicari pengendali LQR terhadap suatu robot penyeimbang dengan dua roda sehingga dapat digerakkan ke arah yang diinginkan oleh pengguna tanpa terjatuh. Dari hasil penelitian, didapat bahwa metode LQR cukup handal dalam mengendalikan sistem seperti ini. Sistem dapat bergerak menyeimbangkan dirinya dalam waktu yang cukup singkat dan bergerak menuju arah yang diinginkan oleh operator.

**Kata kunci-**robot keseimbangan beroda dua, pengendali LQR, pengendalian gerak, kendali optimal

## 1. Pendahuluan

Di dunia modern saat ini, penelitian mengenai robot sangatlah banyak dan berkembang pesat. Penelitian-penelitian tersebut juga disertai dengan kemajuan teknologi yang terus menerus berkembang sehingga saat ini sudah banyak jenis robot yang diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu jenis robot yang cukup banyak mendapat perhatian adalah robot kendaraan yang akan dapat menyeimbangkan dirinya (*self-balancing*) hanya dengan dua aktuator yaitu roda disisi kanan dan sisi kiri nya.

Robot keseimbangan beroda dua ini merupakan pengembangan dari model pendulum terbalik (*inverted pendulum*) yang diletakkan di atas kereta beroda. Penelitian tentang robot keseimbangan telah mendapatkan perhatian selama beberapa dekade terakhir di sejumlah laboratorium robotika di seluruh dunia.

Dalam desain robot keseimbangan, tujuan yang ingin dicapai adalah untuk menempatkan penggunaanya ke atas suatu *platform* yang tidak

stabil. Oleh karena itu, perlu didesain suatu sistem kendali yang baik sehingga robot keseimbangan beroda dua ini akan bergerak sesuai perintah yang diberikan oleh pengguna.

Permasalahan dalam penelitian ini adalah kinematika dari sistem ini tidak stabil secara alamiahnya. Selain itu, sistem robot keseimbangan beroda dua ini sebenarnya berbeda dari sistem kereta dan *inverted pendulum* konvensional karena robot ini tidak lagi bekerja dengan daerah yang dibatasi oleh suatu rel tapi dapat bergerak bebas dimana motornya juga dipasang secara langsung pada badan dari sistem pendulum itu sendiri.

Oleh karena itu, suatu sistem kendali yang baik harus terus aktif diaplikasikan kepada roda secara terus menerus untuk mengarahkannya ke arah jatuhnya bagian atas robot sehingga robot dapat menyeimbangkan dirinya dalam keadaan tegak lurus terhadap permukaan bumi dan juga dapat dikendalikan untuk bergerak ke arah yang diinginkan oleh pengguna.

Berdasarkan uraian diatas akan dikaji model matematis dan masalah pengendalian gerak robot keseimbangan beroda dua kemudian dengan akan dicari pengendali LQR yang dapat diterapkan kedalam sistem. Dalam penelitian ini dipilih pengendali LQR karena kelebihanannya dalam mengendalikan sistem yang memiliki *multi-input multi-output* (MIMO) seperti ini dan kemudahan dalam melakukan implementasi dan analisisnya. Hasil yang didapat kemudian akan di simulasikan hasilnya ke dalam program MATLAB dengan menggunakan *simulink*. Diharapkan di masa mendatang penelitian ini dapat digunakan untuk pengembangan suatu kendaraan *self balancing scooter* untuk mewujudkan sistem navigasi yang mudah pada berbagai medan dan dapat melakukan manuver yang tidak bisa dilakukan robot dengan empat roda.

## 2. Teori Dasar

### 2.1 Robot Keseimbangan Beroda Dua

Robot keseimbangan merupakan robot yang dapat berdiri dengan seimbang

menggunakan dua roda sebagai tumpuan, sehingga robot tidak akan jatuh. Robot ini akan berusaha untuk berdiri dan menyeimbangkan dengan keadaan dengan cara bergerak maju atau undur untuk mendapatkan titik keseimbangan.<sup>[1]</sup>



Gambar 1. Contoh robot keseimbangan beroda dua

Sumber: <http://urbanwheels.co.nz/>

## 2.2 Mekanika Newton

### 2.2.1 Gerakan Translasi

Gerakan translasi adalah gerakan yang terjadi sepanjang suatu garis lurus. Hukum dasar yang mengatur gerakan translasi dari elemen sistem mekanika adalah hukum kedua Newton. Hukum kedua Newton menyatakan bahwa :

$$\sum F = m \cdot a \quad (2.1)$$

Dimana  $F$  menyatakan gaya yang bekerja pada benda,  $m$  menyatakan massa benda, dan  $a$  menyatakan percepatan benda.<sup>[2]</sup>

### 2.2.2 Gerakan Rotasi

Gerakan rotasi dinyatakan sebagai gerakan mengelilingi suatu sumbu tertentu. Analogi dari hukum kedua Newton yang mengatur persamaan gerak translasi, persamaan gerak untuk gerak rotasi dinyatakan oleh :

$$\sum \tau = J \cdot \alpha \quad (2.2)$$

Dimana  $\tau$  menyatakan torsi yang bekerja pada benda,  $J$  menyatakan momen inersia benda, dan  $\alpha$  menyatakan percepatan sudut benda.<sup>[3]</sup>

### 2.2.3 Hubungan Gerak Translasi dan Rotasi

Hubungan antara besaran gerak translasi dan rotasi diperlihatkan oleh tabel berikut :

Tabel 1. Hubungan gerak translasi dan rotasi

Gerak translasi	Gerak rotasi	Hubungan
gaya ( $F$ )	torsi ( $\tau$ )	$F = \tau \cdot r$
Gerak translasi perpindahan linear ( $s$ )	Gerak rotasi perpindahan Sudut ( $\theta$ )	Hubungan $s = \theta \cdot r$
kecepatan linear ( $v$ )	kecepatan sudut ( $\omega$ )	$v = \omega \cdot r$

percepatan linear ( $a$ )	percepatan sudut ( $\alpha$ )	$a = \alpha \cdot r$
---------------------------	-------------------------------	----------------------

dimana  $r$  adalah jari-jari lintasan rotasi.<sup>[3]</sup>

## 2.3 Dasar Sistem Kendali

Sistem kendali merupakan suatu sistem yang terdiri dari beberapa sub sistem yang berfungsi untuk mengendalikan suatu proses. Secara umum sistem kendali dibagi menjadi dua bagian besar yaitu sistem kendali lup terbuka dan sistem kendali lup tertutup. Sistem kendali lup terbuka adalah sistem yang hanya menggunakan pengendali dan aktuator untuk mencapai keluaran yang diinginkan. Sistem ini tidak mempunyai umpan balik. Kebalikannya, sistem kendali lup tertutup menggunakan pengukuran terhadap keluaran untuk dibandingkan dengan nilai keluaran yang diinginkan. Sistem seperti ini memiliki kelebihan dengan lebih tahan terhadap gangguan maupun perubahan parameter internal system.<sup>[4]</sup>

Berdasarkan teori kendali, sistem kendali dibagi menjadi dua bagian besar yaitu teori kendali konvensional dan teori kendali modern. Teori kendali konvensional adalah teori kendali yang menggunakan pendekatan hubungan masukan-keluaran berdasarkan fungsi alih (*transfer function*) yang pada umumnya tidak menghasilkan solusi yang optimal dan hanya dapat diaplikasikan pada sistem yang memiliki satu masukan dan satu keluaran. Sebaliknya, teori kendali modern memungkinkan untuk mengendalikan sistem yang memiliki beberapa masukan dan keluaran berdasarkan variabel keadaannya yang kondisinya linear maupun tidak linear dengan parameter yang konstan maupun yang berubah terhadap waktu.<sup>[5]</sup>

## 2.4 Respon dinamik keluaran sistem

Dalam berbicara mengenai sistem kendali, masalah yang menjadi pokok perhatian adalah :

- Kestabilan dan kemampuan sistem meredam gangguan. Sistem yang stabil mempunyai akar-akar persamaan karakteristik di sebelah kiri bidang  $s$ .
- Waktu tunda ( $td$ ) : waktu yang dibutuhkan oleh respon untuk mencapai  $\frac{1}{2}$  harga akhir pada saat lonjakan pertama.
- Waktu naik ( $tr$ ) : waktu yang dibutuhkan oleh respon untuk naik dari 10% menjadi 90%, 5% menjadi 95%, atau 0% menjadi 100% dari nilai

akhir. Untuk sistem orde dua kurang teredam (*underdamped*), biasanya digunakan waktu naik 0-100%, sedangkan untuk sistem redaman lebih (*overdamped*), biasanya digunakan waktunaik 10-90%. (Ogata, 1997:151)

- Waktu keadaan tunak (*ts*) : waktu yang dibutuhkan oleh respon untuk mencapai harga tertentu dan tetap dalam nilai akhir.
- *Maximum overshoot* (*Mp*) : harga puncak maksimum dari kurva respon yang diukur dari satu. Jika harga keadaan tunak respon tidak sama dengan satu, maka dapat digunakan persen *maximum overshoot*.
- Waktu puncak (*tp*) : waktu yang diperlukan sistem untuk mencapai lonjakan maksimum.
- Kesalahan keadaan tunak : nilai sinyal kesalahan yang merupakan selisih dari nilai referensi dengan nilai sebenarnya pada waktu tak terhingga.<sup>[6]</sup>

## 2.5 Representasi Ruang Keadaan

Untuk menganalisa suatu sistem, terlebih dahulu harus didapatkan persamaan (model matematika) dari sistem yang akan mewakili unjuk kerja dari sistem tersebut. Dari persamaan tersebut kemudaan akan direpresentasikan ke dalam persamaan ruang keadaan (*state space*).<sup>[5]</sup>

Persamaan dasar dari suatu representasi ruang keadaan adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.4)$$

Persamaan (2.3) disebut persamaan keadaan, dan persamaan (2.4) disebut persamaan keluaran dimana  $x(t)$  menyatakan nilai variabel keadaan (*state*) pada suatu waktu,  $A$  disebut matriks keadaan adalah suatu matriks berorde  $n \times n$ ,  $B$  disebut matriks masukan adalah suatu matriks berorde  $n \times r$ ,  $C$  disebut matriks keluaran adalah suatu matriks berode  $m \times n$ , dan  $D$  disebut matriks transmisi langsung adalah suatu matriks berorde  $m \times r$  dengan  $n$  adalah orde sistem yang menyatakan jumlah variabel keadaan,  $r$  menyatakan jumlah masukan, dan  $m$  menyatakan jumlah keluaran.

## 2.6 Keterkendalian sistem

Syarat dari suatu sistem dapat dikendalikan adalah jika dimungkinkan untuk mendapatkan suatu vektor kendali  $u(t)$  yang dalam waktu berhingga dapat membawa sistem tersebut dari suatu kondisi awal  $x_{(0)}$  ke kondisi lain  $x_{(f)}$ .<sup>[6]</sup>

Suatu sistem yang memiliki persamaan ruang keadaan sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5)$$

memiliki matriks keterkendalian:

$$Pc = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{(n-1)}B] \quad (2.6)$$

Agar sistem dapat dikendalikan maka matriks keterkendalian  $Pc$  harus memenuhi kriteria sebagai berikut:

- Tidak ada kolom yang merupakan kelipatan kolom lainnya
- Nilai determinan tidak sama dengan nol.<sup>[6]</sup>

## 2.7 Konsep Sistem Kendali Optimal Menggunakan Metode Linear Quadratic Regulator (LQR)

Asumsikan sebuah sistem dengan persamaan (2.5) dimana  $x$  adalah vektor keadaan ( $n$ -vektor),  $u$  adalah vektor kendali ( $r$ -vektor),  $A$  adalah matriks konstan berorde  $n \times n$ , dan  $B$  adalah matriks konstan berorde  $n \times r$ . Dalam mendesain suatu sistem kendali, kita sering tertarik dalam memilih vektor kendali  $u(t)$  sehingga indeks performasinya diminimalkan. Dapat dibuktikan bahwa sebuah indeks performansi kuadratis, dimana batas-batas integrasi nya adalah 0 dan  $\infty$  seperti pada persamaan:

$$J = \int_0^{\infty} L(x, u) dt \quad (2.7)$$

dimana  $L(x, u)$  adalah fungsi kuadratis atau fungsi hermitian dari  $x$  dan  $u$  akan menghasilkan suatu hukum kendali linear yaitu:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.8)$$

dimana  $K$  adalah matriks berorde  $r \times n$ , atau

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Oleh karena itu, desain dari sistem kendali optimal dan sistem regulator optimal berdasarkan indeks performansi kuadratis seperti diatas tergantung dari penentuan nilai elemen-elemen dari matriks  $K$ . Dalam mendesain suatu sistem kendali berdasarkan minimisasi dari indeks performansi kuadratis kita perlu untuk menyelesaikan persamaan aljabar Riccati. Program Matlab mempunyai perintah `lqr` yang dapat memberikan solusi dari persamaan aljabar Riccati waktu kontinyu dan menentukan nilai penguatan matriks umpan balik optimal.

Berikut ini, diasumsikan persoalan untuk menentukan nilai vektor kendali optimal  $u(t)$  untuk sistem yang dinyatakan dalam persamaan (2.5) dan indeks performasinya diberikan oleh persamaan:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.10)$$

dimana  $Q$  adalah matriks definit positif (atau semidefinit positif),  $R$  adalah matriks definit positif, dan  $u$  tidak dibatasi. Tujuan utama dari sistem kendali optimal adalah untuk meminimalkan indeks performansinya sehingga sistem menjadi stabil. Dari banyak pendekatan yang berbeda untuk menemukan solusi dari permasalahan seperti ini, salah satu pendekatan yang ada adalah dengan menggunakan metode ke dua Liapunov. [6]

## 2.8 Penentuan Nilai Matriks $Q$ , $R$ , dan $K$ untuk Metode Kendali LQR

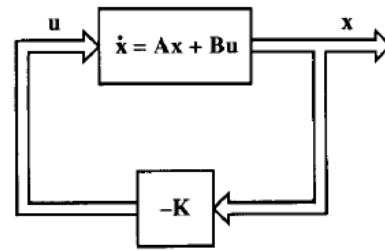
Salah satu kelebihan dari pengendali LQR dibanding metode kendali modern lainnya adalah kemudahan dalam proses *tuning* nya. Dengan metode kendali modern lainnya yang kebanyakan berbasis pada pengaturan letak akar sistem, tidaklah mudah untuk mendapatkan pemahaman mengenai apa yang akan terjadi dari letak akar yang berbeda-beda.

Pada pengendali LQR, performa dari sistem akan ditentukan oleh nilai dari matriks  $Q$  dan  $R$  yang mempengaruhi tingkat prioritas dari sinyal kendali dan sinyal kesalahan. Karena hal ini jarang diberikan secara eksplisit, matriks  $Q$  dan  $R$  ini dianggap sebagai parameter desain. [7]

Berdasarkan sistem yang ditentukan seperti persamaan (2.5) tentukan nilai matriks  $K$  dari persamaan vektor kendali optimal (2.8) sehingga persamaan indeks performansi (2.10) diminimalkan. Pada persamaan (2.10),  $Q$  adalah matriks simetris definit positif (atau semidefinit positif) berorde  $n \times n$ ,  $R$  adalah matriks simetris definit positif berorde  $r \times r$ . Perlu dicatat bahwa ruas kanan dari persamaan indeks performansi (2.10) mempengaruhi pengeluaran untuk vektor kendali dan energi. Matriks  $Q$  dan  $R$  menentukan nilai kepentingan relatif dari kesalahan (*error*) dan pengeluaran dari energi. [6]

Selanjutnya dapat dilihat bahwa hukum kendali linear yang diberikan oleh persamaan (2.8) adalah hukum kendali optimal. Jadi, jika nilai elemen yang tidak diketahui dari matriks  $K$  ditentukan sambil meminimalkan indeks performansi, maka persamaan (2.8) adalah optimal untuk semua keadaan awal  $x(0)$ .

Diagram blok yang menunjukkan konfigurasi sistem kendali optimal ditunjukkan pada gambar dibawah ini:



Gambar 2. Diagram blok sistem kendali optimal

Sumber : (Ogata, 1997:920)

Secara singkat, langkah-langkah desain dari metode kendali LQR dapat dirumuskan sebagai berikut:

- Selesaikan persamaan:
$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.11)$$
 untuk mendapatkan nilai matriks  $P$  (jika nilai definit positif matriks  $P$  ada). Beberapa sistem mungkin tidak mempunyai matriks  $P$  definit positif untuk memecahkan persamaan diatas, yang berarti sistemnya tidak stabil dan tidak dapat dikendalikan.

- Substitusikan nilai matriks  $P$  ke persamaan
$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.12)$$
 Hasil nilai matriks  $K$  yang didapat adalah nilai matriks optimalnya.

Terdapat pendekatan alternatif cara untuk menentukan nilai dari matriks kendali umpan balik optimal. Langkah-langkah desain berdasarkan pendekatan alternatif tersebut adalah:

- Tentukan nilai matriks  $P$  yang memenuhi persamaan:
$$(A - BK)^T P + P (A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (2.13)$$
 sebagai fungsi dari  $K$ .

- Substitusikan nilai matriks  $P$  tersebut kedalam persamaan
$$J = x^T(0) P x(0) \quad (2.14)$$
 Sehingga nilai indeks performansinya menjadi fungsi dari  $K$ .

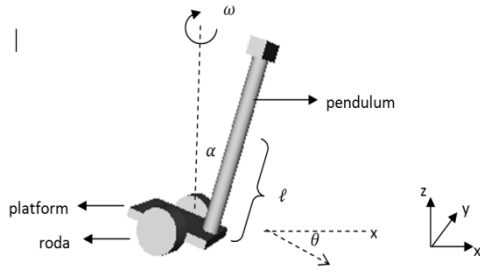
- Tentukan nilai elemen-elemen dari matriks  $K$  sehingga nilai indeks performansi  $J$  diminimalkan. Minimisasi dari nilai  $J$  untuk elemen  $k_{ij}$  dari matriks  $K$  dapat dilakukan dengan mengatur nilai  $\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} = 0$ . [6]

## 3. Metode Penelitian

### 3.1 Model dan Parameter Sistem

Dalam penelitian ini akan digunakan suatu model robot keseimbangan beroda dua dimana setelah dilakukan studi literatur dan diskusi dengan berbagai pihak, ditentukan model dan

parameter yang akan dipakai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3. Model sistem robot keseimbangan beroda dua  
Sumber : (Li, 2013: 38)

Dari model diatas ditentukan parameter-parameter sistem sebagai berikut:

Tabel 2. Daftar parameter sistem

Simbol	Parameter Plant	Satuan
$F_l, F_r$	Gaya yang bekerja pada roda kiri dan roda kanan	N
$H_l, H_r$	Gaya gesek yang bekerja pada roda kiri dan roda kanan	N
$\tau_l, \tau_r$	Torsi yang dihasilkan oleh aktuator roda kiri dan kanan	N/m
$\theta_l, \theta_r$	Sudut perpindahan dari roda kiri dan kanan	rad
$X_l, X_r$	Perpindahan roda kiri dan kanan sepanjang sumbu x	m
$\alpha$	Sudut kemiringan dari pendulum terhadap sumbu z	rad
$\theta$	Arah hadap pendulum terhadap sumbu x	rad
$M_w$	Massa roda	Kg
$I_w$	Momen inersia roda terhadap sumbu y	Kgm <sup>2</sup>
$r$	Jari-jari roda	m
$m$	Massa pendulum	Kg
$g$	Konstanta percepatan gravitasi	m/s <sup>2</sup>
$\ell$	Jarak dari titik pusat koordinat O ke pusat massa pendulum	m
$d$	Jarak antara roda kiri dan kanan sepanjang sumbu y	m
$M$	Massa platform	Kg
$I_M$	Momen inersia platform terhadap sumbu y	Kgm <sup>2</sup>
$I_p$	Momen inersia pendulum dan platform terhadap sumbu z	Kgm <sup>2</sup>

Simbol	Parameter Plant	Satuan
$F_p$	Gaya yang bekerja antara pendulum dan platform sepanjang sumbu x	N
$M_p$	Torsi yang bekerja antara pendulum dan platform terhadap sumbu y	N/m
$v$	Kecepatan linear sistem terhadap sumbu x	m/s
$\omega$	Kecepatan rotasi sistem terhadap sumbu z	rad / s
$\beta$	Sudut kemiringan lantai	rad

Sumber : (Li, 2013: 52)

### 3.2 Model Matematika Sistem

Dengan menggunakan model dan parameter diatas akan di analisis dinamika sistem. Berdasarkan kutipan dari [8] dengan asumsi tidak ada selip antara roda dan lantai akan didapat persamaan pada roda kiri sebagai berikut :

$$\sum \tau = I_w \cdot \ddot{\theta}_l = (F_l - H_l) \cdot r \quad (3.1)$$

$$\sum F = M_w \cdot \ddot{x}_l = H_l - F_l \quad (3.2)$$

Dengan cara yang sama kita dapatkan persamaan pada roda kanan sebagai berikut :

$$\sum \tau = I_w \cdot \ddot{\theta}_r = (F_r - H_r) \cdot r \quad (3.3)$$

$$\sum F = M_w \cdot \ddot{x}_r = H_r - F_r \quad (3.4)$$

Setelah itu ditinjau gaya yang bekerja pada pendulum terhadap sumbu x . Ada 3 buah besaran yang bekerja pada pendulum yang mengakibatkan adanya gaya pada sumbu x yaitu:

- Percepatan pendulum sepanjang sumbu x
- Percepatan rotasi pendulum terhadap sudut  $\alpha$
- Gaya sentripetal yang mengarah ke titik O karena rotasi pendulum

Dari ketiga besaran diatas akan didapat persamaan total gaya yang bekerja antara pendulum dan sumbu x yaitu:

$$F_p = m \cdot l \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} + m \cdot \ddot{x} - m \cdot l \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \alpha \quad (3.5)$$

Berikutnya ditinjau torsi yang bekerja pada sistem terhadap titik pusat koordinat O. Ada 3 buah besaran yang bekerja pada pendulum yang mengakibatkan adanya torsi terhadap titik O yaitu:

- Percepatan rotasi pendulum terhadap sudut  $\alpha$
- Percepatan pendulum sepanjang sumbu x
- Gaya berat karena percepatan gravitasi

Dari ketiga besaran diatas akan didapat persamaan total torsi yang bekerja pada sistem terhadap titik O yaitu:

$$M_p = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} + m \cdot l \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{x} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha \quad (3.6)$$

Jika ditinjau total gaya dan torsi yang bekerja pada platform dan titik O maka akan didapat persamaan:

$$M \cdot \ddot{x} = F_l + F_r + F_p \quad (3.7)$$

$$I_m \cdot \ddot{\alpha} = -M_p \quad (3.8)$$

Sementara itu keseimbangan torsi yang bekerja pada platform dan pendulum terhadap sumbu z memberikan persamaan:

$$I_p \cdot \ddot{\theta} = d \cdot (F_l - F_r) \quad (3.9)$$

Sekarang ditinjau lagi persamaan gerak pada roda kiri dan kanan, akan didapat :

$$\theta_l = \frac{x_l}{r} \quad (3.10)$$

$$\theta_r = \frac{x_r}{r} \quad (3.11)$$

Dengan mengurangi persamaan (3.10) dengan persamaan (3.11) akan didapat:

$$\theta_l - \theta_r = \frac{x_l - x_r}{r} \quad (3.12)$$

Dengan mengurangi persamaan (3.1) dan (3.2) dengan persamaan (3.3) dan (3.4) akan didapat:

$$I_\omega \cdot (\ddot{\theta}_l - \ddot{\theta}_r) = \tau_l - \tau_r - (H_l - H_r) \cdot r \quad (3.13)$$

$$M_W \cdot (\ddot{x}_l - \ddot{x}_r) = H_l - H_r - (F_l - F_r) \quad (3.14)$$

Dari hubungan antara orientasi sistem terhadap sumbu z dengan perpindahan roda sepanjang sumbu x didapat:

$$\theta = \frac{x_l - x_r}{d} \quad (3.15)$$

Dari persamaan (3.15) didapat:

$$\ddot{\theta}_l - \ddot{\theta}_r = \ddot{\theta} \cdot \frac{d}{r} \quad (3.16)$$

$$\ddot{x}_l - \ddot{x}_r = d \cdot \ddot{\theta} \quad (3.17)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.16) dan (3.17) ke persamaan (3.13) dan (3.14) akan didapat:

$$I_\omega \cdot \frac{d}{r} \cdot \ddot{\theta} = \tau_l - \tau_r - (H_l - H_r) \cdot r \quad (3.18)$$

$$M_W \cdot d \cdot \ddot{\theta} = H_l - H_r - (F_l - F_r) \quad (3.19)$$

Dengan membagi kedua ruas pada persamaan (3.61) dengan  $r$  akan didapat

$$I_\omega \cdot \frac{d}{r^2} \cdot \ddot{\theta} = \frac{\tau_l - \tau_r}{r} - (H_l - H_r) \quad (3.20)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.19) dan (3.20) akan didapat:

$$\left(\frac{I_\omega}{r^2} + M_W\right) \cdot d \cdot \ddot{\theta} = \frac{\tau_l - \tau_r}{r} - (F_l - F_r) \quad (3.21)$$

Dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan (3.21) dengan  $d$  akan didapat:

$$\left(\frac{I_\omega}{r^2} + M_W\right) \cdot d^2 \cdot \ddot{\theta} = d \cdot \left(\frac{\tau_l - \tau_r}{r}\right) - d \cdot (F_l - F_r) \quad (3.22)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.22) dan persamaan (3.9) akan didapat:

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{r \cdot (I_p + \left(\frac{I_\omega}{r^2} + M_W\right) \cdot d^2)} \cdot (\tau_l - \tau_r) \quad (3.23)$$

Persamaan (3.12) dapat ditulis juga sebagai berikut:

$$\theta_l + \theta_r = \frac{x_l + x_r}{r} \quad (3.24)$$

Hubungan antara perpindahan dari sistem terhadap perpindahan roda sepanjang sumbu x diberikan oleh persamaan sebagai berikut:

$$x = \frac{x_l + x_r}{2} \quad (3.25)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.1) dan (3.2) dengan persamaan (3.3) dan (3.4) akan didapat:

$$I_\omega \cdot (\ddot{\theta}_l + \ddot{\theta}_r) = \tau_l + \tau_r - (H_l + H_r) \cdot r \quad (3.26)$$

$$M_W \cdot (\ddot{x}_l + \ddot{x}_r) = H_l + H_r - (F_l + F_r) \quad (3.27)$$

Dari persamaan (3.24) dan (3.25) didapat:

$$(\ddot{\theta}_l + \ddot{\theta}_r) = 2 \cdot \frac{\ddot{x}}{r} \quad (3.28)$$

$$(\ddot{x}_l + \ddot{x}_r) = 2 \cdot \ddot{x} \quad (3.29)$$

Substitusikan persamaan (3.28) dan (3.29) ke dalam persamaan (3.26) dan (3.27) akan didapat:

$$2 \cdot \frac{I_\omega}{r} \cdot \ddot{x} = \tau_l + \tau_r - (H_l + H_r) \cdot r \quad (3.30)$$

$$2 \cdot M_W \cdot \ddot{x} = H_l + H_r - (F_l + F_r) \quad (3.31)$$

Dengan membagi kedua ruas persamaan (3.30) dengan  $r$  kemudian menjumlahkannya dengan persamaan (3.31) akan didapat:

$$\left(\frac{I_\omega}{r^2} + M_W\right) \cdot 2 \cdot \ddot{x} = \frac{\tau_l + \tau_r}{r} - (F_l + F_r) \quad (3.32)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (3.7) ke persamaan (3.5) akan didapat:

$$(M - m) \cdot \ddot{x} - m \cdot l \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} + m \cdot l \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \alpha = F_l + F_r \quad (3.33)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.32) dan persamaan (3.33) akan didapat:

$$-m \cdot l \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} + \left(M - m + 2 \cdot \left(\frac{I_\omega}{r^2} + M_W\right)\right) \cdot \ddot{x} = -m \cdot l \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin \alpha + \frac{\tau_l + \tau_r}{r} \quad (3.34)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (3.6) dengan persamaan (3.8) akan didapat:

$$(m \cdot l^2 + I_M) \cdot \ddot{\alpha} + m \cdot l \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha \quad (3.35)$$

Dari penurunan persamaan-persamaan diatas didapat 3 persamaan dinamik sistem yaitu persamaan (3.23), persamaan (3.34), dan persamaan (3.35). Dengan menganggap daerah kerja sistem berada pada sudut  $\alpha$  dan  $\theta$  yang kecil ( $\dot{\alpha} = \alpha \approx 0$ ;  $\sin \alpha \approx \alpha$ ;  $\cos \alpha \approx 1$ ), 2 persamaan dinamik sistem diatas dapat dilinearakan menjadi:

$$-m \cdot l \cdot \ddot{\alpha} + \left(M - m + 2 \cdot \left(\frac{I_\omega}{r^2} + M_W\right)\right) \cdot \ddot{x} = \frac{\tau_l + \tau_r}{r} \quad (3.36)$$

$$(m \cdot l^2 + I_M) \cdot \ddot{\alpha} + m \cdot l \cdot \ddot{x} = -m \cdot g \cdot l \cdot \alpha \quad (3.37)$$

Dengan melakukan eliminasi dan substitusi pada persamaan (3.37) dan (3.38) akan didapat 2 persamaan dinamis :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{a}{r \cdot (a^2 + b \cdot c)} \tau_l - \frac{a}{r \cdot (a^2 + b \cdot c)} \tau_r - \frac{a \cdot b \cdot g}{(a^2 + b \cdot c)} \alpha \quad (3.38)$$

$$\ddot{x} = -\frac{a^2 \cdot g}{(a^2 + b \cdot c)} \alpha + \frac{c}{r \cdot (a^2 + b \cdot c)} \tau_l + \frac{c}{r \cdot (a^2 + b \cdot c)} \tau_r \quad (3.39)$$

dimana :

$$a = m \cdot l \quad (3.40)$$

$$b = \left( M - m + 2 \cdot \left( \frac{I_\omega}{r^2} + M_W \right) \right) \quad (3.41)$$

$$c = (m \cdot l^2 + I_M) \quad (3.42)$$

Dari persamaan (3.38) dan (3.39) dengan memilih variabel keadaan dari sistem yaitu :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ v \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

dan memilih input dari sistem yaitu  $\tau_l$  dan  $\tau_r$  akan didapat representasi umum model *statespace* dari sistem baik pada bidang datar ataupun dengan sudut kemiringan sebesar  $\beta$  yaitu:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ v \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_l \\ \tau_r \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

dimana:

$$a_{21} = - \frac{m \cdot l \cdot g \left( M - m + 2 \cdot \left( \frac{I_\omega}{r^2} + M_W \right) \right)}{m^2 \cdot l^2 + \left( \left( M - m + 2 \cdot \left( \frac{I_\omega}{r^2} + M_W \right) \right) \cdot (m \cdot l^2 + I_M) \right)} \quad (3.45)$$

$$a_{31} = - \frac{m^2 \cdot l^2 \cdot g}{m^2 \cdot l^2 + \left( \left( M - m + 2 \cdot \left( \frac{I_\omega}{r^2} + M_W \right) \right) \cdot (m \cdot l^2 + I_M) \right)} \quad (3.46)$$

$$b_{21} = - \frac{m \cdot l}{r \cdot \left( m^2 \cdot l^2 + \left( \left( M - m + 2 \cdot \left( \frac{I_\omega}{r^2} + M_W \right) \right) \cdot (m \cdot l^2 + I_M) \right) \right)} \quad (3.47)$$

$$b_{22} = - \frac{m \cdot l}{r \cdot \left( m^2 \cdot l^2 + \left( \left( M - m + 2 \cdot \left( \frac{I_\omega}{r^2} + M_W \right) \right) \cdot (m \cdot l^2 + I_M) \right) \right)} \quad (3.48)$$

$$b_{31} = \frac{m \cdot l^2 + I_M}{r \cdot \left( m^2 \cdot l^2 + \left( \left( M - m + 2 \cdot \left( \frac{I_\omega}{r^2} + M_W \right) \right) \cdot (m \cdot l^2 + I_M) \right) \right)} \quad (3.49)$$

$$b_{32} = \frac{m \cdot l^2 + I_M}{r \cdot \left( m^2 \cdot l^2 + \left( \left( M - m + 2 \cdot \left( \frac{I_\omega}{r^2} + M_W \right) \right) \cdot (m \cdot l^2 + I_M) \right) \right)} \quad (3.50)$$

$$b_{51} = \frac{d}{r \cdot \left( I_P + d^2 \cdot \left( M_W + \frac{I_\omega}{r^2} \right) \right)} \quad (3.51)$$

$$b_{52} = - \frac{d}{r \cdot \left( I_P + d^2 \cdot \left( M_W + \frac{I_\omega}{r^2} \right) \right)} \quad (3.52)$$

Dengan mengasumsikan massa platform = 5 Kg, massa pendulum = 70 Kg, massa roda = 1 Kg, jarak pusat massa pendulum ke platform = 1 m, konstanta percepatan gravitasi = 9,8 m/s<sup>2</sup>, jari-jari roda = 0,25 m, panjang platform = 0,5 m, lebar platform = 0,3 m, dan tinggi

platform = 0,05 m maka akan didapat persamaan *state space* sistem sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 76,2755 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -86,1175 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ v \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,5021 & -0,5021 \\ 0,5024 & 0,5024 \\ 0 & 0 \\ 0,8961 & -0,8961 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_l \\ \tau_r \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

dimana berdasarkan <sup>[9]</sup> nilai  $I_w$  dihitung dengan persamaan

$$\frac{\text{Massa roda} \cdot (\text{diameter roda})^2}{8}, \quad (3.54)$$

$I_m$  dihitung dengan persamaan

$$\frac{\text{Massa platform} \cdot (\text{lebar platform}^2 + \text{tinggi platform}^2)}{12}, \quad (3.55)$$

dan  $I_p$  dihitung dari persamaan momen inersia platform yaitu

$$\frac{\text{Massa platform} \cdot (\text{lebar platform}^2 + \text{panjang platform}^2)}{12} \quad (3.56)$$

dijumlahkan dengan momen inersia rata-rata dari tubuh manusia yaitu sebesar 1,7152. <sup>[10]</sup>

### 3.3 Uji Keterkendalian Sistem

Dari persamaan (3.53) untuk keadaan sistem bekerja pada bidang datar, berdasarkan persamaan (2.6) akan didapat persamaan matriks keterkendalian sistem ( $Pc$ ) sebagai berikut:

$$Pc = [B|AB|A^2B|A^3B|A^4B] \quad (3.57)$$

Sehingga nilai matriks  $Pc$  adalah:

$$Pc = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0005 & -0,0005 & 0 & 0 \\ -0,0005 & -0,0005 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0005 & 0,0005 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0009 & -0,0009 & 0 & 0 \\ 0,0009 & -0,0009 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0383 & -0,0383 & 0 & 0 \\ -0,0383 & -0,0383 & 0 & 0 & -2,9214 & 0 \\ 0,0432 & 0,0432 & 0 & 0 & 0 & 3,2984 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,9214 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,2984 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Karena tidak ada kolom yang merupakan kelipatan kolom lainnya maka dapat disimpulkan sistem ini terkendali.

Kode program 1. Uji keterkendalian sistem dengan program Matlab

```

1 A = [0 1 0 0 0; 76.2755 0 0
      0 0; -86.1175 0 0 0 0; 0 0 0
      0 1; 0 0 0 0 0];
2 B = [0 0; -0.5021 -0.5021;
      0.5024 0.5024; 0 0; 0.8961
      0.8961];
3 Pc = [B A*B A^2*B A^3*B
        A^4*B];
4 rank (Pc)

```

ans =  
5

Karena nilai *rank* matriks keterkendalian *Pc* adalah 5 atau tidak kurang dari orde sistem, maka dapat dikatakan sistem robot keseimbangan beroda dua ini adalah sistem yang terkendali.

### 3.4 Menentukan Nilai Matriks K

Dengan menggunakan program Matlab akan digunakan perintah LQR untuk mendapatkan nilai matriks umpan balik *K* untuk metode kendali LQR. Dalam keadaan standar dipilih matriks *Q* dan matriks *R* keduanya adalah matriks identitas dengan orde  $n \times n$  dan  $r \times r$ .

Kode program 2. Mencari nilai matriks *K* dengan program Matlab

```

1 %Penentuan nilai matriks Q dan R
2 Q = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0
      0; 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 1];
3 R = [1 0; 0 1];
4 %Mencari nilai K, P, dan E
5 [K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)

```

K =

-153.4209	-16.8006	0.7071		
0.7071	1.1354			
-153.4209	-16.8006	0.7071	-	
0.7071	-1.1354			

P =

1.0e+003 *				
2.6989	0.2818	-0.0238	-	
0.0000	0.0000			
0.2818	0.0432	0.0098	-	
0.0000	-0.0000			
-0.0238	0.0098	0.0112	-	
0.0000	-0.0000			
-0.0000	-0.0000	-0.0000		
0.0016	0.0008			
0.0000	-0.0000	-0.0000		
0.0008	0.0013			

E =

-9.2799	
-8.2119	

```

-0.0913
-1.0174 + 0.4818i
-1.0174 - 0.4818i

```

## 4. Hasil dan Pembahasan

### 4.1 Nilai Matriks K dan Akar Persamaan Sistem

Tujuan dari optimasi dengan menggunakan metode LQR adalah mendapatkan nilai matriks umpan balik *K* optimal, yang mampu meminimumkan indeks performansi *J*. Perhitungan ini dilakukan dengan cara memasukkan persamaan aljabar Riccati yang telah diturunkan pada bab sebelumnya.

Matriks pembobotan *Q* dan *R* ditentukan secara sembarang, dengan syarat seperti yang telah dijelaskan sebelumnya. Dari persamaan aljabar Riccati tersebut, akan dapat diketahui matriks *P* yang ingin dicari. Matriks *P* adalah matrik solusi dari persamaan aljabar Riccati (2.11). Jika nilai-nilai matrik *P* telah diketahui, kemudian disubstitusikan ke persamaan (2.12) sehingga dapat diketahui nilai matriks umpan balik optimal *K* yang meminimumkan indeks performansi *J*.

Dikarenakan besarnya orde sistem, pada perhitungan nilai vektor kendali optimal *K*, dibutuhkan bantuan program komputer dalam hal ini digunakan paket program Matlab versi 7.9.0.529. Melalui perhitungan dengan menggunakan paket program Matlab ini dapat diketahui nilai umpan balik optimal *K* sistem berdasarkan model sistem yang didefinisikan.

Setelah dicoba beberapa nilai matriks *Q* dan *R*, didapat bahwa kinerja pengendali terbaik dalam mengendalikan kemiringan pendulum ( $\alpha$ ) dan orientasi robot ( $\theta$ ) didapat dengan menggunakan matriks  $Q =$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Pada}$$

nilai ini didapat nilai matriks  $K^T =$

$$\begin{bmatrix} -153.4625 & -153.4625 \\ -16.8037 & -16.8037 \\ 0.7071 & 0.7071 \\ 2.2361 & -2.2361 \\ 1.7307 & -1.7307 \end{bmatrix} \text{ dan nilai akar-akar}$$

sistem dan pengendali =

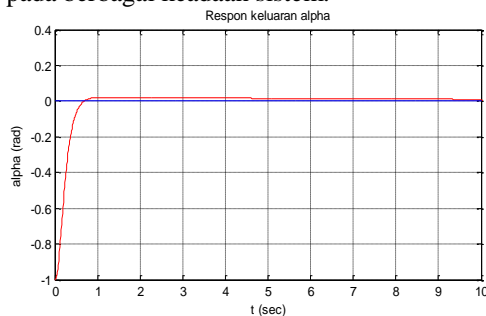
$$\begin{bmatrix} -9.2666 \\ -8.2269 \\ -0.0912 \\ -1.5509 + 1.2658i \\ -1.5509 - 1.2658i \end{bmatrix}.$$

### 4.2 Respon Dinamik Keluaran Sistem

Ada dua keluaran sistem yang berusaha untuk dikendalikan dan dilihat hasilnya yaitu

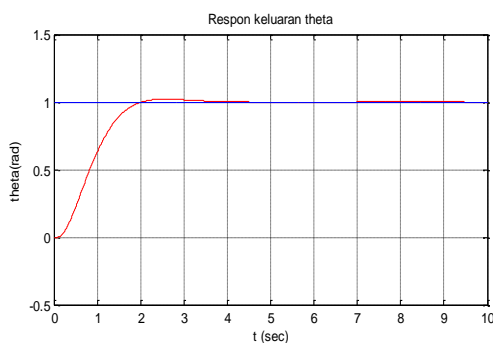


sudut kemiringan pendulum ( $\alpha$ ) dan orientasi robot ( $\theta$ ). Untuk melihat respon dinamik keluaran sistem dari sudut kemiringan pendulum, diambil respon sistem pada keadaan awal sudut kemiringan pendulum =  $-1$  rad sementara untuk melihat respon dinamik keluaran sistem dari orientasi robot, sistem akan diberi sudut referensi sebesar 1 rad. Respon dinamik keluaran sistem diambil selama 10 detik pertama, dengan waktu *sampling* sebesar 0,01 detik. Berikut ini ditampilkan respon dinamik keluaran sistem pada berbagai keadaan sistem.



Gambar 4. Respon keluaran  $\alpha$  pada keadaan normal

Dari gambar 4, dapat diamati pada keadaan sistem normal yaitu mengasumsikan massa platform = 5 Kg, massa pendulum = 70 Kg, massa roda = 1 Kg, jarak pusat massa pendulum ke platform = 1 m, konstanta percepatan gravitasi =  $9,8 \text{ m/s}^2$ , jari-jari roda = 0,25 m, panjang platform = 0,5 m, lebar platform = 0,3 m, dan tinggi platform = 0,05 m maka akan memiliki keluaran waktu tunda = 0,23 detik, waktu naik = 0,39 detik, waktu keadaan tunak = 2,23 detik, *maximum overshoot* = 0,0216 rad, waktu puncak = 1,21 detik dan kesalahan keadaan tunak = 0 rad untuk keluaran sudut kemiringan pendulum ( $\alpha$ ).



Gambar 5. Respon keluaran  $\theta$  pada keadaan normal

Sementara itu, dari gambar 5 dapat dilihat untuk keluaran orientasi robot ( $\theta$ ) memiliki keluaran waktu tunda = 0,85 detik, waktu naik

= 1,42 detik, waktu keadaan tunak 2 % = 2,76 detik, *maximum overshoot* = 2,13 %, waktu puncak = 2,54 detik dan kesalahan keadaan tunak = 0 %.

## 5. Kesimpulan

Dari hasil keseluruhan hasil analisa yang telah dilakukan pada skripsi ini, maka dapat disimpulkan bahwa penerapan pengendali LQR terhadap pengendalian gerak model robot keseimbangan beroda dua dapat dilakukan dengan baik. Dengan melihat hasil simulasi yang telah dilakukan, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil simulasi dengan kerja pengendali LQR pada sistem, ditemukan respon keluaran yang relatif cepat juga kesalahan keadaan tunak yang kecil dan dapat ditoleransi.
2. Pengaruh pengendalian optimal dengan metode kendali LQR pada sistem robot keseimbangan beroda dua memberikan respon waktu yang lebih cepat juga kesalahan keadaan tunak yang lebih kecil dibanding sistem tanpa pengendali. Selain itu, pengendali ini juga mampu mengendalikan sistem ketika diberikan gangguan pada sistem tersebut.
3. Pengendali mampu mengendalikan sistem jika diberikan gangguan pengurangan massa dari yang diasumsikan dalam perhitungan, akan tetapi apabila diberikan gangguan penambahan massa, maka pengendali tidak akan mampu mengendalikan sistem.
4. Apabila diberikan gangguan berubah bidang menanjak atau menurun maka pengendali masih mampu mengendalikan keseimbangan sistem akan tetapi terdapat nilai kesalahan keadaan tunak yang cukup besar.

## Referensi

- [1] Amirullah,dkk. 2016,Januari. *Robot Keseimbangan dengan Roda Dua yang Membawa Beban.* (online). [http://ayurahayuuniversitassriwijaya.blogspot.co.id/2016/01/jurnal-robot-sistem-komputer-unsri\\_6.html](http://ayurahayuuniversitassriwijaya.blogspot.co.id/2016/01/jurnal-robot-sistem-komputer-unsri_6.html). Diakses: 01 November 2016.
- [2] Morin, David. 2008. *Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions.* Cambridge University Press : New York.

- [3] Young, Hugh D., dan Freedman, Roger A. 2007. *University Physics with Modern Physics (12<sup>th</sup> edition)*. Pearson Adisson-Wesley : San Fransisco.
- [4] Dorf, Richard C., dan Bishop, Robert H. 2011. *Modern Control System Twelfth Edition*. Prentice Hall : New Jersey.
- [5] Anggraini,Novi. 2005. “Desain Kontroler Menggunakan Metode Linear Quadratic Regulator (LQR) untuk Pengontrolan Suhu Uap pada Solar Boiler Once Through Mode”. *Skripsi*. Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik, Universitas Brawijaya Malang.
- [6] Ogata, Katsuhiko. 1997. *Modern Control Engineering Third Edition*. Prentice Hall : New Jersey.
- [7] Arvidsson, Mikael., dan Karlsson, Jonas. 2012. *Design, Construction and Verification of a Self-balancing Vehicle*. Chalmers University of Technology, Department of Signals and Systems. <http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/163640.pdf>.
- [8] Li, Zhijun.; Yang, Chenguang., dan Fan, Liping. 2013. *Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems*. London : Springer.
- [9] Castro, Arnaldo. 2012. “Modelling and Dynamic Analysis of A Two-Wheeled Inverted-Pendulum”. *Tesis*. School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology.
- [10] Aerospace Medical Research Laboratory. 1975, March. *Investigation of the Inertial Properties of the Human Body*. November 1, 2016. <http://www.dtic.mil/get-tr-doc/pdf?AD=ADA016485>.