

## 表現定理とグリーン関数 : 全無限グリーン関数による有限領域の弾性変形場の表現

その他のタイトル	Representation Theorem and Green ' s Function : Finite Domain Representation of Elastic Field in terms of Green ' s Function in Infinite Medium
著者	日下部 哲也, 亀 伸樹
雑誌名	地震 第2輯
巻	68
号	4
ページ	83-89
発行年	2015
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2261/00079299">http://hdl.handle.net/2261/00079299</a>

doi: info:doi/10.4294/zisin.68.83

## 解 説

# 表現定理とグリーン関数

—全無限グリーン関数による有限領域の弾性変形場の表現—

東京大学地震研究所\* 日下部哲也・亀 伸樹

## Representation Theorem and Green's Function

—Finite Domain Representation of Elastic Field in terms of  
Green's Function in Infinite Medium—

Tetsuya KUSAKABE and Nobuki KAME

Earthquake Research Institute, the University of Tokyo,  
1-1-1 Yayoi, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0032, Japan  
E-mail: kusaka@eri.u-tokyo.ac.jp

(Received June 18, 2015; Accepted September 1, 2015; published online on October 14, 2015)

### §1. はじめに

表現定理とグリーン関数は震源に起因する媒質中の変位場を記述する強力な数学的手法である。表現定理に基づく数値計算手法に境界要素法（境界積分方程式法）があり、地殻変動、波動伝播、また断層破壊など地震学の広い分野で用いられてきた [例えば, Okada (1992), Bonnet (1995), Tada (2009)]. 一般的に、ある領域を対象として指定された境界条件を満たす特定のグリーン関数を解析的に求めることは非常に困難であり、微分や積分を含まない閉じた形式でグリーン関数が得られているのは全無限・半無限均質等方弾性体などに限られる [例えば, Stokes (1849)]. 実際、数値計算においてはこれらの閉じた形式を用いる場合が多い。

近年、地表面や2層媒質境界面など不連続面で区切られた不均質媒質を考慮した断層破壊計算手法の定式化が提案され実現している [Ando and Okuyama (2010), Hok and Fukuyama (2011), Kame and Kusakabe (2012), Ohtani and Hirahara (2015)]. そこでは、全無限媒質のグリーン関数を表現定理に適用しながらも、これらの全無限ではない媒質の変位場が表現定理により厳密に記述される基本式を用いている。境界要素法は工学分野で機械部品 (例: ギアシャフト) など有限領域の弾性変形を全無限グ

リーン関数を用いて計算してきたことを振り返ってみれば、この基本式は確かに成り立つのであるが、教科書・論文等においては特に証明なしに定式化で用いられることが多い。

そこで本稿では、全無限グリーン関数を用いて任意の有限領域の変形場が近似を必要とせず完全に表現されることを示す。逆説的ではあるが、全無限グリーン関数を用いるが故に、表現定理が有限領域でも成り立つことが理解される。これは全無限グリーン関数は表現定理の積分核として特別な基本解として位置づけられ、領域の境界条件を指定して決定される特定のグリーン関数と区別して認識する必要性を際立たせる。またこの基本式は、数値計算プログラムの作成において、媒質の境界面の凹凸の形状に特別な注意を払うことなく、式通りに境界上の諸量の積分をすれば弾性変形場が正しく計算できることを保証する。

### §2. 全無限グリーン関数を用いた有限領域の表現定理

本稿では、無限媒質のグリーン関数で無限遠方である条件 (2.4 節) を満たすものを全無限グリーン関数と呼ぶことにする。媒質は不均質非等方であっても良い。我々の目標は、全無限グリーン関数  $G_{ij}^{\infty}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$  を用いて任意の有限領域 (体積  $V$ , 外側表面  $S$ , Fig. 1) の内部および外部の変位場が、 $V$  内の体積力  $f_i$  と  $S$  上のトラクシヨ

\* 〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1

ン  $T_i$  と変位  $u_i$  の観点から、以下の表現定理 (基本式: Eq. (1)) で表されることを証明することである。

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V f_i(\xi, \tau) G_{ni}^{\infty}(\mathbf{x}, t-\tau; \xi, 0) dV(\xi) \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S T_i(\mathbf{u}(\xi, \tau), \mathbf{n}) G_{ni}^{\infty}(\mathbf{x}, t-\tau; \xi, 0) dS(\xi) \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S u_i(\xi, \tau) n_j(\xi) c_{ijkl}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_l} \\ & G_{nk}^{\infty}(\mathbf{x}, t-\tau; \xi, 0) dS(\xi). \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}, t, \xi, \tau$  は受信点の位置と時刻、震源の位置と時刻、 $n_j$  は  $S$  の法線ベクトル、 $c_{ijkl}$  は弾性常数である。下添え字は特に言及しない限り 3 次元 ( $i, j, \dots = 1, 2, 3$ ) を考え、アインシュタインの和の規約を用いる。また、関数  $\zeta(\mathbf{x})$

$$\zeta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in V) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin V \cup S), \end{cases} \quad (2)$$

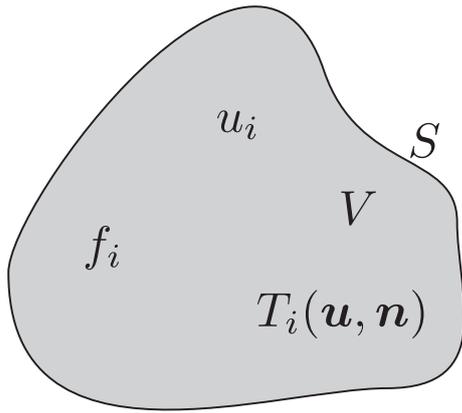


Fig. 1. A finite elastic body of interest with volume  $V$  surrounded by external surface  $S$ .

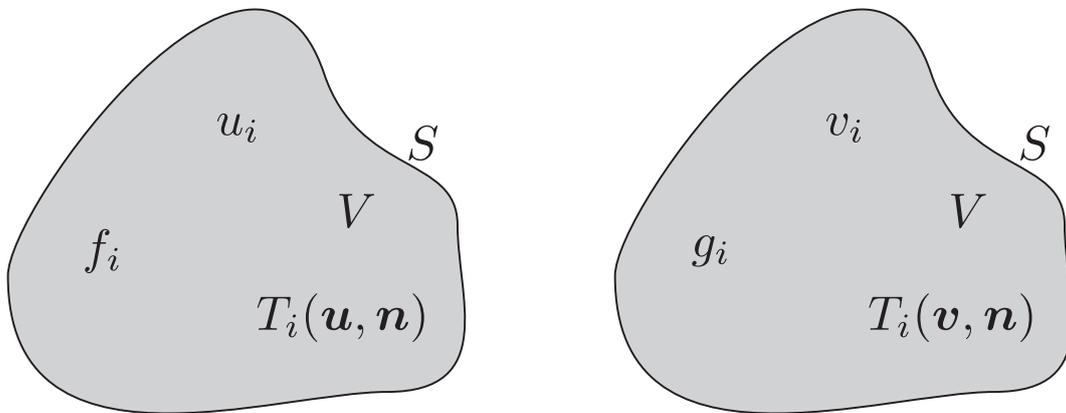


Fig. 2. Two (different) sets of field variables  $(u_i, T_i(\mathbf{u}, \mathbf{n}), f_i)$  and  $(v_i, T_i(\mathbf{v}, \mathbf{n}), g_i)$  satisfying the same equation of motion in the same finite domain.

を用いて基本式の左辺の受信点位置  $\mathbf{x}$  を領域外側を含む拡張した形で示す。これはグリーン関数の選択 ( $G_{ij}^{\infty}$  など) に依存せず、数値計算において重要な意味を持つ (2.5 節)。Eq. (1) で表現される内部変位場は、 $V$  内の体積力と境界条件により  $S$  上に発生した震源による変位場の重ね合わせであると解釈することができる。

以下において我々は、地震学の教科書「Quantitative Seismology」[Aki and Richards (1980, 2002, 2004)] における関連する「相反定理」、「グリーン関数の導入」、「表現定理」の解説に従い、今回、特に  $G_{ij}^{\infty}$  を用いる場合との相違を強調していくことにする (この教科書において均質等方全無限媒質のグリーン関数が導出されている)。地震震源を表す内部表面  $\Sigma$  に関しては、その導入は教科書と同様の手順でできるので、ここでは外部表面に含めてしまうことにする。

## 2.1 相反定理

まず最初に、相反定理を「Quantitative Seismology」[Aki and Richards (1980, 2002, 2004)] に従い概観する。ある有限領域の弾性体の運動方程式を満たす二組の異なる変位場を考える (Fig. 2)。体積力  $f_i$ 、 $S$  上の変位場  $\mathbf{u}$  に関する境界条件、および  $V$  全体にわたる初期条件が引き起こす変位場  $u_i$  によりトラクション  $T_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  が生じ、体積力  $g_i$ 、 $S$  上の変位場  $\mathbf{v}$  に関する境界条件、および  $V$  全体にわたる初期条件が引き起こす変位場  $v_i$  によりトラクション  $T_i(\mathbf{v}, \mathbf{n})$  を生じるとする。すなわちそれぞれの初期条件の下、 $u_i$  と  $v_i$  は、同一領域の全く同じ運動方程式を満たし

$$\rho \ddot{u}_i = (c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + f_i, \quad \rho \ddot{v}_i = (c_{ijkl} v_{k,l})_{,j} + g_i, \quad (3)$$

となる。以下、ドットは時間偏微分  $\dot{h} = \partial h / \partial t$  を表し、コンマの後の下添え字は空間偏微分  $h_{,j} = \partial h / \partial x_j$  を表す。空間偏微分については文脈に応じて震源座標と受信点座標を明示的に区別する。Eq. (3) より、以下のスカラー方

程式 (Betti の定理) が導かれる.

$$\begin{aligned}
& \int_V (f_i(\xi) - \rho \ddot{u}_i(\xi)) v_i(\xi) dV(\xi) \\
& + \int_S T_i(\mathbf{u}(\xi), \mathbf{n}) v_i(\xi) dS(\xi) \\
& = \int_V (g_i(\xi) - \rho \ddot{v}_i(\xi)) u_i(\xi) dV(\xi) \\
& + \int_S T_i(\mathbf{v}(\xi), \mathbf{n}) u_i(\xi) dS(\xi). \quad (4)
\end{aligned}$$

ここで,  $T_i(\mathbf{u}(\xi), \mathbf{n}) = c_{ijkl}(\xi) n_j(\xi) u_{k,l}(\xi)$  であり, 弾性常数は不均質非等方媒質中のものであっても良い. すなわち, Betti の定理は不均質非等方媒質中で成り立つ.

Betti の定理は, 異なる時刻の変位場  $t_1 = \tau$  における  $u_i$  と  $t_2 = t - \tau$  における  $v_i$  に対して成り立つ. ある時刻  $t_0$  より前に  $V$  全体にわたり静的過去の初期条件

$$u_i(\xi) = v_i(\xi) = 0, \quad \dot{u}_i(\xi) = \dot{v}_i(\xi) = 0, \quad (5)$$

を持つ場合に, 時刻  $\tau$  での積分をとると以下のスカラー方程式 (相反定理) が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V [u_i(\xi, \tau) g_i(\xi, t - \tau) \\
& - v_i(\xi, t - \tau) f_i(\xi, \tau)] dV(\xi) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S [v_i(\xi, t - \tau) T_i(\mathbf{u}(\xi, \tau), \mathbf{n}) \\
& - u_i(\xi, \tau) T_i(\mathbf{v}(\xi, t - \tau), \mathbf{n})] dS(\xi). \quad (6)
\end{aligned}$$

相反定理は,  $V$  全体にわたる変位場を, それを引き起こした体積力および生じたトラクションと直接的に結びつける. 導出には, 不均質非等方性媒質の同一領域の同じ運動方程式を満たすこと (Eq. (3)), 同一の静的過去の初期条件を満たすこと (Eq. (5)), 発散定理, および熱力学的考察から結論される弾性常数の対称性  $c_{ijkl} = c_{klij}$  [Aki and Richards (1980, 2002, 2004)] を用いた. 境界条件と体積力は, 二組の変位場に対して, 全く独立にとることができることに注意する.

以下では, 相反定理におけるこの二組の異なる変位場に対してそれぞれに体積力と境界条件を指定することにより有用な関係式 (グリーン関数の時空間相反性, および表現定理) を導いていく.

## 2.2 グリーン関数

ここでは, 「Quantitative Seismology」 [Aki and Richards (1980, 2002, 2004)] に従いグリーン関数を導入し, グリーン関数において「震源と受信点の空間相反性」が成り立つための条件を確認する. 2.3 節にて行う「表現定理」の導出において, この「グリーン関数の相反性」を利用する.

グリーン関数は, 局所化した位置  $\mathbf{x} = \xi$  と時間  $t = \tau$  に  $n$  方向に作用する特別な体積力  $f_i(\mathbf{x}, t) = \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t - \tau)$  が引き起こす変位場である. 一般的な位置と時間  $(\mathbf{x}, t)$  における変位場の  $i$  成分は  $G_{in}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$  で表される. グリーン関数は以下の運動方程式を満たす.

$$\rho \ddot{G}_{in} = (c_{ijkl} G_{kn,l})_{,j} + \delta_{in} \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(t - \tau). \quad (7)$$

ここで  $G_{in}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau)$  は  $V$  全体で静的過去の初期条件を満たしているとする.  $G_{in}$  を決定するには, 更に  $S$  における境界条件を指定する必要がある. 本稿では全無限グリーン関数を, 無限媒質中において無限遠である境界条件 (2.4 節) を満たすものと定義する. 全無限グリーン関数は, 表現定理において領域の取り方に依存せずに用いることの出来る積分核として特別な位置づけにあることが 2.4 節にて示される. これは「基本解 (主要解)」とも呼ばれ [例えば, 小林 (2000), 大谷 (2012)], 特定の領域と特定の境界条件から決定されるグリーン関数と区別される.

相反定理における二組の異なる変位場として, 体積力の異なるグリーン関数を考える (Fig. 3). 境界条件が時間に依存しない場合,

$$G_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) = G_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0), \quad (8)$$

が成り立ち, 応答は時間差だけに依存する. 次に,  $f_i(\xi, \tau) = \delta_{in} \delta(\xi - \xi_1) \delta(\tau')$ ,  $u_i(\xi, \tau) = G_{in}(\xi, \tau'; \xi_1, 0)$ ,  $g_i(\xi, \tau) = \delta_{in} \delta(\xi - \xi_2) \delta(\tau')$  および  $v_i(\xi, \tau) = G_{in}(\xi, \tau'; \xi_2, 0)$  を選ぶ.

斉次境界条件 ( $S_1$  上で  $G_{in} = G_{im} = 0$ ,  $S_2$  上で  $T_i(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = c_{ijkl} G_{kn,l} n_j = 0$  かつ  $T_i(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = c_{ijkl} G_{km,l} n_j = 0$ ,  $S_1 + S_2 = S$ ) を満たす場合, これらを相反定理 (Eq. (6)) に代入すると, 左辺の積分がデルタ関数の性質で外れ, 右辺の表面積分項が 0 になる. これより以下の式を得る.

$$G_{nm}(\xi_2, t; \xi_1, 0) = G_{mn}(\xi_1, t; \xi_2, 0). \quad (9)$$

これがグリーン関数の空間の相反性である. これは, 次節における「第一の表現定理」の導出では用いず, その次の「基本的な表現定理」の導出で用いる.

## 2.3 表現定理

我々は, 変位場  $\mathbf{u}$  に関する特定の境界条件と特定の体積力  $f_i$  により引き起こされる変位場  $u_i$  の表現を導きたい. これは, 相反定理における二組の異なる変位場として, 一方の変位場に  $u_i$  を, もう一方の変位場にグリーン関数を用いることにより実現される (Fig. 4). 相反定理に体積力  $g_i(\xi, \tau) = \delta_{in} \delta(\xi - \mathbf{x}) \delta(\tau')$  と対応する解  $v_i(\xi, \tau) = G_{in}(\xi, \tau'; \mathbf{x}, 0)$  を代入すると「第一の表現定理」が導かれる.

$$\zeta(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}, t) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V f_i(\xi, \tau) G_{in}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) dV(\xi)$$

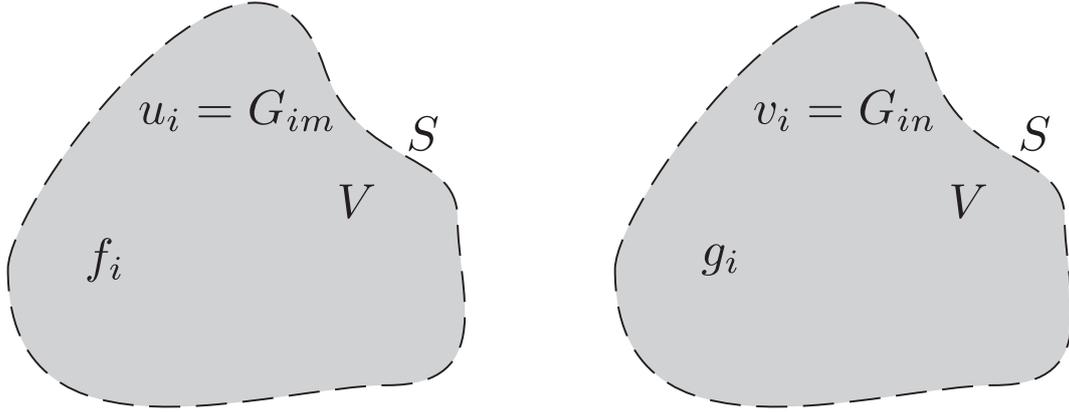


Fig. 3. Two specific sets of Green's functions,  $u_i(\xi, \tau) = G_{im}(\xi, \tau; \xi_1, 0)$  for  $f_i(\xi, \tau) = \delta_{im} \delta(\xi - \xi_1) \delta(\tau)$  and  $v_i(\xi, \tau) = G_{in}(\xi, \tau; \xi_2, 0)$  for  $g_i(\xi, \tau) = \delta_{in} \delta(\xi - \xi_2) \delta(\tau)$ . On the external surfaces, they satisfy the same homogeneous boundary condition (indicated with dashed lines) necessary for the spatial reciprocity of Green's function.

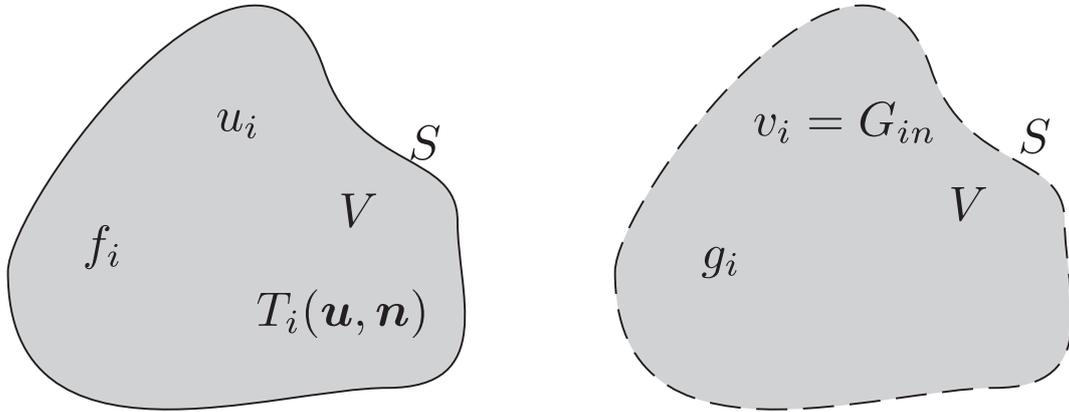


Fig. 4. Two sets of field variables chosen for the representation theorem. One is for a general field ( $u_i, T_i(\mathbf{u}, \mathbf{n}), f_i$ ) with an arbitrary boundary condition and the other is for a Green's function  $v_i(\xi, \tau) = G_{in}(\xi, \tau; \mathbf{x}, 0)$  for  $g_i(\xi, \tau) = \delta_{in} \delta(\xi - \mathbf{x}) \delta(\tau)$  satisfying homogeneous boundary condition (indicated with a dashed line).

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S T_i(\mathbf{u}(\xi, \tau), \mathbf{n}) G_{in}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) dS(\xi) \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S u_i(\xi, \tau) n_j(\xi) c_{ijki}(\xi) \\
 & \frac{\partial}{\partial \xi_i} G_{kn}(\xi, t - \tau; \mathbf{x}, 0) dS(\xi). \quad (10)
 \end{aligned}$$

ここで受信点の境界外側への拡張  $\zeta(\mathbf{x})$  はデルタ関数の性質

$$\int_V h(\xi, \tau) \delta(\mathbf{x} - \xi) dV(\xi) = \begin{cases} h(\mathbf{x}, \tau) & (\mathbf{x} \in V) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin V \cup S), \end{cases}$$

を考慮することにより得られる。これは、表現定理で表現した変位場は領域外側では常に数学的に0となることを意味する。Fig. 4に示したような領域の場合、 $\mathbf{x} \notin V \cup S$ に体積力を置くとそこには媒質がなくグリーン関数は

0になり、Eq. (10)が成り立つのは自明のように思えるが、この後に考えるように全無限グリーン関数を用いてグリーン関数の応答が0にならない場合においてもこの式が成り立つことに注意が必要である。

もし、グリーン関数がS上で斉次境界条件を満たす場合 (Fig. 3)には、空間の相反性 (Eq. (9))を用いて震源と受信点の座標を交換することができ、その結果、物理的解釈が容易なS上での  $u_i$  と  $T_i$  をグリーン関数  $G_{in}(\mathbf{x}, t; \xi, 0)$  とその空間微分で畳み込み積分する形での我々の見慣れた「基本的な表現定理」 (Eq. (11)) が得られる。

$$\zeta(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}, t) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V f_i(\xi, \tau) G_{in}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) dV(\xi)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S T_i(\mathbf{u}(\xi, \tau), \mathbf{n}) G_{ni}(\mathbf{x}, t-\tau; \xi, 0) dS(\xi) \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S u_i(\xi, \tau) n_j(\xi) c_{ijk}(\xi) \\
 & \quad \frac{\partial}{\partial \xi_l} G_{nk}(\mathbf{x}, t-\tau; \xi, 0) dS(\xi). \tag{11}
 \end{aligned}$$

さて、有限領域の解きたい問題の変位場  $\mathbf{u}$  に関する境界条件と、表現定理で選択するグリーン関数の変位場  $\mathbf{v}$  に関する境界条件は、独立に考えることができる。教科書「Quantitative Seismology」[Aki and Richards (1980, 2002, 2004)] での変位場  $\mathbf{v}$  に関する境界条件の選択は興味深い。もし、グリーン関数の境界条件を固定変位にとった場合、有限領域の特定の境界条件に対応する変位場は、

$$\begin{aligned}
 \zeta(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}, t) = & \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V f_i(\xi, \tau) G_{ni}^{rigid}(\mathbf{x}, t-\tau; \xi, 0) dV(\xi) \\
 & - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S u_i(\xi, \tau) n_j(\xi) c_{ijk}(\xi) \\
 & \quad \frac{\partial}{\partial \xi_l} G_{nk}^{rigid}(\mathbf{x}, t-\tau; \xi, 0) dS(\xi), \tag{12}
 \end{aligned}$$

で表現される。ここで地球を考えてみよう。「有限領域の特定の境界条件」として地球は「自由表面」を持つが、地球の変位場を表現する際に「固定変位境界条件のグリーン関数」を選んでも良いことを意味する。我々は、グリーン関数にも半ば無意識に自由表面境界条件を持つものを選ぼうとするがその必要はない。また、一般的に有限領域の特定の境界条件は斉次であるとは限らず、グ

リーン関数の境界条件を特定の問題と一致させた場合には空間の相反性 (Eq. (9)) を満たすとは限らない。空間の相反性がなりたたない場合には「基本的な表現定理」が有効でないことに注意が必要である。

### 2.4 基本解としての全無限グリーン関数

一般的に、任意の有限領域において斉次境界条件（固定変位、自由表面、あるいはそれらの混合）を満たすグリーン関数を求めることは、それ自体困難な問題である。そこで、全無限グリーン関数の有限領域への適用を検討する。均質等方媒質の場合には、全無限グリーン関数は閉じた形の解析解が存在し、実用上大変有用である。閉じた形のグリーン関数は、それをを用いて有限領域の物理的応答を頭の中で定性的に模擬することができ問題の見通しが良くなるという利点もある。

Betti の定理が「不均質非等方性媒質の共通する領域の同じ運動方程式を満たす」ことしか要求していなかったことを思い出そう。これを満たすように特定の問題の解きたい有限領域  $V$  を、全無限媒質  $V^\infty$  の部分集合にとる (Fig. 5)。こうすれば、相反定理は二組の変位場  $u_i$  と  $v_i = G_{ij}^\infty$  に対して有限領域  $V$  内で相変わらず成り立つ。一方、グリーン関数を決定する無限領域の表面  $S^\infty$  は無限遠に飛ぶ。

無限媒質グリーン関数は、 $S^\infty$  上でのある意味「斉次」な境界条件を満たすものとして定義される。ある意味「斉次」とは、以下の Eq. (13) と Eq. (14) の  $S^\infty$  の表面積分項の寄与の合計が0になることである。そしてこの条件は空間の相反性が成り立つ必要十分条件である。この条件を満たす  $G_{ij}^\infty$  は空間の相反性が成り立ち、「基本的」

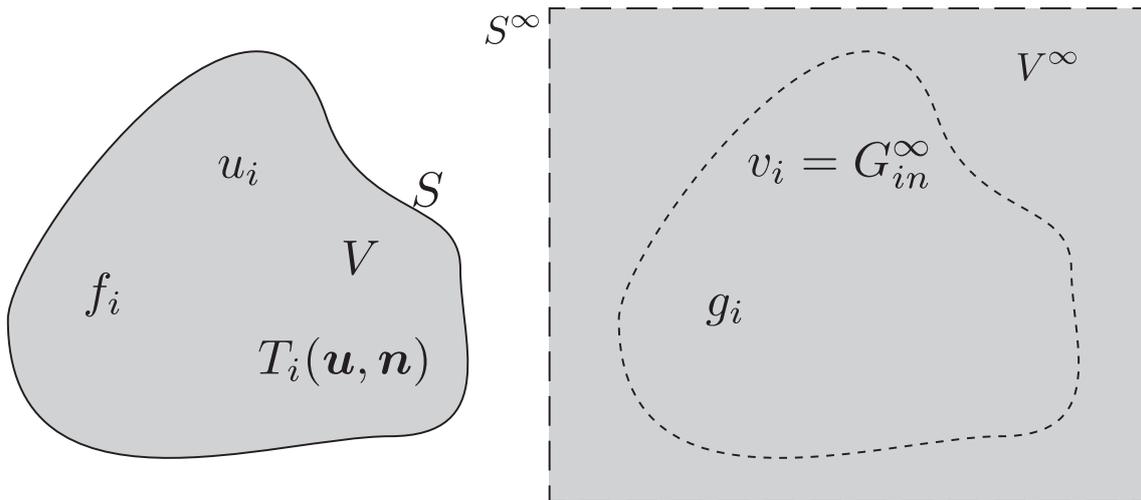


Fig. 5. A finite elastic body of interest (left) is included in an unbounded medium (right). A set of general field variables in the finite domain (left) and that of specific Green's function  $v_i(\xi, \tau) = G_{in}^\infty(\xi, \tau; \mathbf{x}, 0)$  for  $g_i(\xi, \tau) = \delta_{in} \delta(\xi - \mathbf{x}) \delta(\tau)$  in the infinite domain (right) are considered for our basic representation theorem.

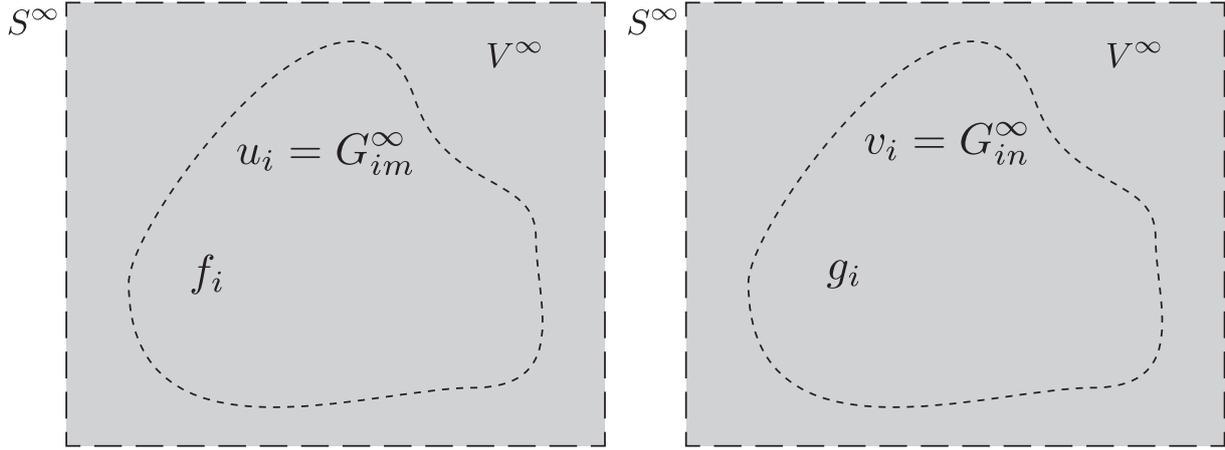


Fig. 6. Two specific sets of Green's functions  $u_i(\xi, \tau) = G_{im}^\infty(\xi, \tau; \xi_1, 0)$  for  $f_i(\xi, \tau) = \delta_{im} \delta(\xi - \xi_1) \delta(\tau)$  and  $v_i(\xi, \tau) = G_{in}^\infty(\xi, \tau; \xi_2, 0)$  for  $g_i(\xi, \tau) = \delta_{in} \delta(\xi - \xi_2) \delta(\tau)$  in the same infinite domain satisfying a certain boundary condition on external surface  $S^\infty$  at infinity. They are considered for the spatial reciprocity of Green's function in an infinite domain.

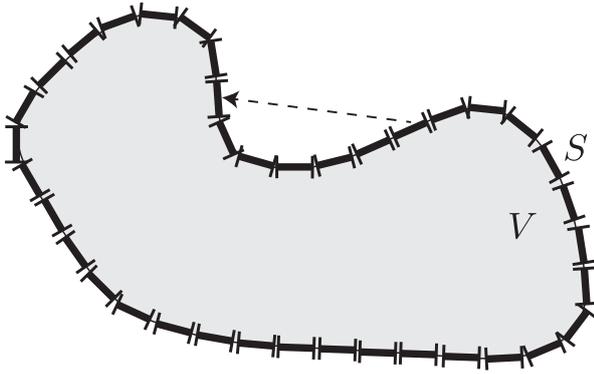


Fig. 7. A finite elastic body with volume  $V$  surrounded by concave surface  $S$ . The surface is decomposed into finite elements in the boundary element method or the boundary integral equation method.

な表現定理 (Eq. (11)) において  $G_{ij}^\infty$  に差し変えることで、基本式 (Eq. (1)) が導かれることになる。この条件と無限グリーン関数の空間相反性との間の関係について以下に見てみよう。

無限領域における異なる二組の体積力と対応するグリーン関数  $f_i(\xi, \tau) = \delta_{im} \delta(\xi - \xi_1) \delta(\tau)$ ,  $u_i(\xi, \tau) = G_{im}^\infty(\xi, \tau; \xi_1, 0)$  と  $g_i(\xi, \tau) = \delta_{in} \delta(\xi - \xi_2) \delta(\tau)$ ,  $v_i(\xi, \tau) = G_{in}^\infty(\xi, \tau; \xi_2, 0)$  を相反定理に代入する (Fig. 6) と、

$$\int_0^t d\tau \int_{S^\infty} c_{ijkl} G_{km,l}^\infty(\xi, \tau; \xi_1, 0) G_{im}^\infty(\xi, t - \tau; \xi_2, 0) n_j(\xi) dS(\xi) + G_{mn}^\infty(\xi_1, t; \xi_2, 0) \\ \int_0^t d\tau \int_{S^\infty} c_{ijkl} G_{kn,l}^\infty(\xi, t - \tau; \xi_2, 0) G_{im}^\infty(\xi, t; \xi_1, 0)$$

$$n_j(\xi) dS(\xi) + G_{nm}^\infty(\xi_2, t; \xi_1, 0), \quad (13)$$

となる。ここで  $S^\infty$  を  $R = |\xi| \rightarrow \infty$  とする大球面にとる (2次元問題の場合は大きな円にとる)。動的問題の場合、特異なことを考えない限り無限遠からの反射波はなく無限遠での変位は有限時間内では0になる。すなわち、グリーン関数の相反性が成り立つ。

静的な問題の場合、空間相反性が成り立つ必要十分条件は、以下に現れる表面積分の寄与の合計が0になることである。

$$\int_{S^\infty} c_{ijkl} G_{km,l}^\infty(\xi; \xi_1) G_{im}^\infty(\xi; \xi_2) n_j dS(\xi) + G_{mn}^\infty(\xi_1; \xi_2) \\ \int_{S^\infty} c_{ijkl} G_{kn,l}^\infty(\xi; \xi_2) G_{im}^\infty(\xi; \xi_1) n_j dS(\xi) + G_{nm}^\infty(\xi_2; \xi_1). \quad (14)$$

静的な場合の無限均質等方弾性体の閉じた形の解 [例えば、小林 (2000)] を見てみると、 $G_{mn}(\xi_1; \xi_2)$  は確かに空間相反性になりたっており、その場合、Eq. (14) より、積分の寄与の合計は0になる (3次元の場合には両辺の積分はそれぞれ単独に0になり、2次元の場合には両辺の積分の寄与の合計が0になる)。

## 2.5 領域外側に拡張された表現定理の意味するもの

最後に、領域外側に拡張した表現定理 (Eq. (1)) をどう数理的に理解するのかという問題を考える。我々は、不連続面で区切られた不均質媒質中の動的破壊を取り扱えるように拡張された境界積分方程式法 [Kame and Kusakabe (2012)] を用いて、下向きに凹んだ表面地形をモデル化する場合 (Fig. 7) に全無限グリーン関数を使う

と、一見した所、物理的に破綻しているように感じた。

全無限グリーン関数は問題とする領域の変位場とは由来が別の変位場である。問題とする Fig. 7 の領域に Eq. (1) を適用した場合、全無限グリーン関数を用いるが故に、媒質の存在しない外部においても直達波の存在を示すように見える。実際、境界積分方程式法の数値計算コードの内部表現では、Fig. 7 の矢印が示す 2 要素間の相互作用は全無限グリーン関数から計算され確かに直達波が届いている。これは一体どういうことであろうか？

Eq. (1) が意味するのは、境界面に沿って全ての要素からの全無限グリーン関数の寄与を合計すれば、外部できれいに打ち消し合い 0 になることが数理的に保証されるということなのである。従って、地表面が下向きに凹であれ上向きに凸であれ、表現定理に基づく定式化では、境界要素間の相互作用を全無限グリーン関数により評価し、それらを境界面上で足し算（積分）するだけで良いことを意味している。実際、数値計算において変位の評価点を問題とする領域の外側を取った場合、個々の要素からの寄与は値を持つ（直達波が存在する）が、全ての要素からの寄与の合計は確かに 0 となった。表現定理とグリーン関数の持つ数理的構造に感服するばかりである。

### §3. まとめ

本稿では、全無限グリーン関数を用いて任意の有限領域の変形場が近似を必要とせず完全に表現されることを示した。全無限グリーン関数は、相反性がなりたつように無限遠方での境界条件が設定されている。これを利用して、無限媒質中に埋め込まれた任意の有限領域においても震源と受信点の交換が可能になり、基本式 Eq. (1) が成り立つことが示された。全無限グリーン関数は任意の有限領域に対する表現定理において常に積分核を構成でき、その意味で特別な存在（基本解）であると言える。このことは領域の境界条件を指定して決定される特定のグリーン関数と区別して認識する必要性を際立たせる。

またこの基本式は、数値計算プログラムの作成において、媒質の境界面の凹凸の形状に特別な注意を払うことなく、式通りに境界上の諸量の積分をすれば弾性変形場が正しく計算できることを保証する。

### 謝 辞

平野史朗氏との議論は大変有用でした。本稿の改訂にあたり、査読者の橋間昭徳氏および編集委員の木村尚紀氏のコメントは非常に有意義でした。記して感謝いたします。本研究は JSPS 科研費 #25-7419 (T.K.), #21107007 (N.K.), および文部科学省による「博士課程教育リーディングプログラム」(T.K.), 「災害の軽減に貢献するための地震火山観測研究計画」(N.K.) の助成を受けました。

### 文 献

- Aki, K. and P. G. Richards, 1980, *Quantitative Seismology*, 1st ed., Freeman, New York, 24-30 pp.
- Aki, K. and P. G. Richards, 2002, *Quantitative Seismology*, 2nd ed., University Science Books, Sausalito, 24-30 pp.
- 安芸敬一・P.G. リチャーズ, 2004, 地震学 定量的アプローチ, 上西幸司・亀伸樹・青地秀雄 訳, 古今書院, 30-38 pp.
- Ando, R. and S. Okuyama, 2010, Deep roots of upper plate faults and earthquake generation illuminated by volcanism, *Geophys. Res. Lett.*, **37**, L10308, doi:10.1029/2010GL042956
- Bonnet, M., 1995, *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*, Wiley, West Sussex, 151-208 pp.
- Hok, S. and E. Fukuyama, 2011, A new BIEM for rupture dynamics in half-space and its application to the 2008 Iwate-Miyagi Nariku earthquake, *Geophys. J. Int.*, **184**, 301-324, doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04835.x
- Kame, N. and T. Kusakabe, 2012, Proposal of extended boundary integral equation method for rupture dynamics interacting with medium interfaces, *J. Appl. Mech.*, **79**, doi:10.1115/1.4005899
- 小林昭一, 2000, 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 40-47.
- Ohtani, M. and K. Hirahara, 2015, Effect of the Earth's surface topography on quasi-dynamic earthquake cycles, *Geophys. J. Int.*, **203**, doi:10.1093/gji/ggv187
- 大谷俊介, 2012, 物理数学の応用技法, プレアデス出版, 187-200.
- Okada, Y., 1992, Internal deformation due to shear and tensile faults in a half space, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **82**, 1018-1040.
- Stokes, G. G., 1849, On the dynamical theory of diffraction, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **9**, 1-62.
- Tada, T., 2009, *Boundary Integral Equation Methods for Earthquake Rupture Dynamics*, in "Fault-Zone Properties and Earthquake Rupture Dynamics", ed. by E. Fukuyama, Academic Press, Burlington, 217-267.