دانشکده‌ی علوم انسانی

پایان نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته: فلسفه گرایش منطق

عنوان پایان نامه:

تحلیل منطقی فلسفی پارادوکس اسکولم

نام دانشجو:

منصوره کیمیاگری

استاد راهنما:

دکتر داود حسینی

استاد مشاور:

دکتر محمد باقری

آذر ماه سال ۱۳۹۴

بسم الله الرحمن الرحيم

تشکر و قدردانی

از همه‌ی کسانی که در نوشتن این پایان نامه به نحوی به من یاری نموده‌اند، سپاس‌گزارم:

پدر و مادرم که همواره با وجود گرمشان حمایت‌گر من بوده‌اند.

استاد راهنمایم که اگر راهنمایی و زحمات ایشان نبود، پایان نامه‌ای هم وجود نداشت.

استاد مشاورم که سوالاتم را با روی گشاده پاسخ‌گو بودند.

و دوستانم که در روزهای دشوار آرامش خاطر را به من هدیه کردند.

چکیده

ریاضی‌دانان هرروز با مجموعه‌های ناشمارا، مجموعه‌ی توانی، خوش‌ترتیبی، تناهی و ... سروکار دارند و با این تصور که این مفاهیم همان چیزهایی هستند که در ذهن دارند، کتاب‌ها و اثبات‌های ریاضی را می‌خوانند و می‌فهمند و درمورد آن‌ها صحبت می‌کنند. اما آیا این مفاهیم همان چیزهایی هستند که ریاضی‌دانان تصور می‌کنند؟ اولین‌بار اسکولم با بیان یک پارادوکس شک خود را به این موضوع ابراز کرد. بنابر قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین، نظریه مجموعه‌ها مدلی شمارا دارد. این مدل قضیه‌ی کانتور را که بیان می‌کند مجموعه‌ای ناشمارا وجود دارد برآورده می‌کند؛ ولی مدل شمارا دارای دامنه‌ای شامل شمارا عضو است. پس برای بیان وجود مجموعه‌ای ناشمارا مانند $\mathbb{R}$ تنها شمارا عضو داریم. این جملات به پارادوکس اسکولم مشهور شدند. بنابرین مجموعه‌ی ناشمارایمان در واقع شمارا به‌نظر می‌رسد. از زمانی که پارادوکس فهمیده شد تا به امروز بحث های زیادی در رد و تایید آن بوده است. گروهی تا آن‌جا پیش رفتند که ادعا کردند همه‌ی مجموعه‌ها شمارا هستند.

در این پایان نامه پرسش های مقابل بررسی شده‌اند: آیا مجموعه‌های ناشمارا واقعا وجود دارند؟ آیا پارادوکس اسکولم نشان می‌دهد که نظریه‌های مرتبه دوم برای مدل کردن کاربرد ریاضیات مناسب‌تر هستند؟ پارادوکس اسکولم درمورد درک ما از نظریه مجموعه‌ها و سمانتیک آن چه نتیجه‌ای دارد؟

خواهیم دید بهتر است درمورد وجود مجموعه‌های ناشمارا، موضع لاادری را برگزینیم، پارادوکس اسکولم نتیجه نمی‌دهد نظریه‌های مرتبه دوم برای مدل کردن کاربرد ریاضیات مناسب هستند و درمورد درک ما از نظریه مجموعه‌ها نتیجه‌ای نخواهد داشت.

واژه های کلیدی

پارادوکس اسکولم؛ نسبی‌گرایی؛ اسکولمی؛ ضداسکولمی

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه و کلیات طرح تحقیق

۱-۱ تعریف مسئله

پارادوکس اسکولم ظاهرا تعارضی بین قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین[۱] و قضیه‌ی مشهور کانتور[۲] است. بنابر قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین نظریه مجموعه‌ها[۳] مدلی شمارا دارد. این مدل قضیه‌ی کانتور را که بیان می‌کند مجموعه‌ای ناشمارا وجود دارد برآورده می‌کند[۴]؛ ولی مدل شمارا دارای دامنه‌ای شامل شمارا عضو است. پس برای بیان وجود مجموعه‌ای ناشمارا مانند $\mathbb{R}$ تنها شمارا عضو داریم. بنابرین مجموعه‌ی ناشمارایمان در واقع شمارا است.

عبارات بالا بدین‌رو "پارادوکس" نام می‌گیرند که گویا نتیجه‌ای تناقض‌آمیز از قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین است؛ گرچه این تناقض مانند پارادوکس راسل بنیاد افکن نیست. اسکولم آن را "بیانی متناقض نما" توصیف می‌کند (Skolem 1922, 295). او در مقاله‌اش در سال ۱۹۲۲ نشان داد پارادوکس اسکولم تناقضی در ریاضیات نیست؛ بااین‌حال بسیاری از فلاسفه آن را چالشی فلسفی می‌دانند.

نتیجه‌ای که نخستین بار اسکولم از پارادوکسش گرفت، نسبی بودن[۵] مفاهیم نظریه مجموعه‌ای مانند اندازه[۶] بود (Bays 2009, 12)؛ اما نسبی بودن از دیدگاه اسکولم به چه معنا است؟ مفهوم نسبی بودن را باید در تقابل با مفهوم جبری یا نظریه‌مدلی اصل‌بندی فهمید. مفهوم جبری یا نظریه‌مدلی اصل‌بندی به این معنا است که اصول‌موضوعه، مفاهیم پایه‌ای یک نظریه را مشخص یا حتی سربسته تعریف می‌کنند. درمورد نظریه مجموعه‌ها این ادعا درمورد مفاهیمی مانند مجموعه، عضویت و جهان نظریه مجموعه‌ای و ... است. با فرض گرفتن این مفهوم جبری از صورت‌بندی اصل‌موضوعی، اسکولم به‌وسیله‌ی قضیه‌ی لوونهایم اسکولم استدلال کرد که اصول‌موضوعه‌ی نظریه مجموعه‌ها زیربنای لازم برای معین کردن[۷] مفهومی مانند شمارایی را ندارند.

---

۱ این قضیه بیان می‌کند که اگر یک نظریه‌ی مرتبه اول مدل‌های نامتناهی داشته باشد، مدل‌هایی دارد که دامنه‌ی آن‌ها شمارا است.

۲این قضیه بیان می‌کند مجموعه‌ای ناشمارا وجود دارد.

۳ اصل‌بندی از نظریه مجموعه‌ها مانند ZFC یا هر صورت بندی دیگری.

۴ satisfy

5 relativity

6 cardinality

7 characterize

نظریه‌ها درباره‌ی پارادوکس اسکولم را می‌توان در چند دسته جای داد :

دیدگاه اول : پارادوکس منجر به نسبی‌گرایی درمورد مفاهیم پایه‌ای نظریه مجموعه‌ها از جمله شمارایی می‌شود. از دیدگاه مطلق مجموعه‌ی ناشمارا وجود ندارد. خود اسکولم، توماس، فاین و دیگر اسکولمی‌ها چنین نظری داشتند.

دیدگاه دوم: با نسبی‌گرایی اسکولمی‌ها مخالف هستند. افلاطون‌گرایان، مولر، رسنیک و بیز چنین نظری دارند. گروهی از این افراد می‌پذیرند که پارادوکس، ضعف منطق مرتبه اول است ولی باور دارند که در منطق مرتبه دوم حل می‌شود. شپیرو چنین نظری دارد.

کسانی مانند کلنک و مور نیز بحث افلاطون‌گرایان و اسکولمی‌ها را بی‌نتیجه می‌دانند و این مسئله را تصمیم‌ناپذیر می‌شمارند.

۱-۲ اهمیت و ضرورت مسئله

بسیاری از فیلسوفان پارادوکس اسکولم را چالشی فلسفی می‌دانند. نتایج فلسفی پارادوکس اسکولم مورد مطالعه‌ی بسیار قرارگرفته است. برای نمونه اینکه آیا به‌راستی جمله‌ی مرتبه اولی وجود دارد که بیان کند

"مجموعه‌های ناشمارا وجود دارند"؟ یا اینکه آیا ادعای اسکولمی‌ها مبنی بر اینکه تنها مجموعه‌های شمارا وجود دارند صادق است؟ و پرسش دیگر این‌که پارادوکس اسکولم درمورد درک ما از نظریه مجموعه‌ها و سمانتیک زبان نظریه مجموعه‌ها چه ادعایی دارد؟ به‌وضوح این پرسش‌ها از اهمیت فلسفی برخوردارند.

جنبه‌ی دیگری از اهمیت پارادوکس اسکولم این است که به ما کمک می‌کند تا محدودیت‌های منطق مرتبه اول را بشناسیم. زرملو ثابت کرد که این پارادوکس برای نظریه‌های مرتبه دوم پیش نمی‌آید.

کسانی مانند شپیرو (Shapiro 1985, 723-725)، بیز (Bays 2000, 57-58) و کلنک (Klenk 1976, 483) به پارادوکس‌های همانند پارادوکس اسکولم، مانند پارادوکس مجموعه‌ی توانی، آنالیز حقیقی و تناهی اشاره کرده‌اند. ما مشابه این پارادوکس را برای خوش ترتیبی حساب نیز صورت‌بندی کرده‌ایم. اینکه مشابه پارادوکس اسکولم در حساب ظاهر می‌شود، مسئله‌ای تأمل‌برانگیز است.

نتایج فلسفی‌ای که خود اسکولم از پارادوکس گرفت یعنی اینکه نظریه مجموعه‌ها نمی‌تواند اساس ریاضیات باشد و این ادعا که اصل‌بندی نظریه مجموعه‌ها موجب نسبی شدن مفاهیم نظریه مجموعه‌ای می‌شود، اهمیت مسئله را نشان می‌دهد.

۱-۳ مسائل

۱. آیا مجموعه‌های ناشمارا واقعا وجود دارند؟

۲. آیا پارادوکس اسکولم نشان می‌دهد که نظریه‌های مرتبه دوم برای مدل کردن کاربرد ریاضیات مناسب‌تر هستند؟

۳. پارادوکس اسکولم درمورد درک ما از نظریه مجموعه‌ها و سمانتیک آن چه نتیجه‌ای دارد؟

۱-۴ فرضیه‌ها

۱. سه دیدگاه در این مورد وجود دارد. موضع اسکولمی، ضداسکولمی و لاادری.

۲. پارادوکسی مشابه پارادوکس اسکولم برای نظریه‌های مرتبه دوم صورت‌بندی می‌شود.

۳. پارادوکس اسکولم به خوبی حل شده است.

۱-۵ تاریخچه

نخستین بار اسکولم این پارادوکس را در مقاله‌ای در سال ۱۹۲۲ ارائه داد. در این دهه پارادوکس مورد پذیرش گسترده قرار نگرفت چراکه ریاضی‌دانان هنوز در جستجوی اصل‌بندی مرتبه اولی از نظریه مجموعه‌ها که قاطع[8] باشد بودند و نظریه‌ی منطق مرتبه اول هنوز آن قدر رواج نداشت. فرانکل در سال ۱۹۲۸ هنوز آن را تناقض می‌نامید (Van Dalen and Ebbinghaus 2000, 147). در سال ۱۹۲۵ ون‌نیومن اصل‌بندی جدیدی از نظریه مجموعه‌ها (NBG) ارائه کرد و پس از مطالعه‌ی مدل‌های شمارای نظریه‌اش در تأیید نتایج اسکولم بیان کرد که هیچ اصل‌بندی قاطعی از نظریه مجموعه‌ها یا هر نظریه‌ای که مدلی نامتناهی داشته باشد، وجود ندارد. زرملو ابتدا پارادوکس اسکولم را تنها یک شوخی فریب آمیز نامید (Van Dalen and Ebbinghaus 2000, 148). ولی در سال ۱۹۲۹ بر ضد آن نوشت و از منطق مرتبه اول انتقاد کرد و منطق مرتبه دوم را برای مطالعه‌ی اصول‌موضوعه‌اش مناسب‌تر دانست(Kanamori 2000, 519).

[8] categorical

۱-۶ مرور فصل‌ها و روش

در فصل دوم به بیان صورت‌بندی‌های پارادوکس اسکولم شامل فرم کلاسیک ناشمارایی و پارادوکس‌های مشابه آن می‌پردازیم.

در فصل سوم نظریات درمورد پارادوکس اسکولم را بیان می‌کنیم و استدلال‌های اسکولمی‌ها و مخالفان آن‌ها و پاسخ‌ها به مخالفان را بیان می‌کنیم.

در فصل چهارم دیدگاه افرادی مانند زرملو و شپیرو را بررسی می‌کنیم که پارادوکس اسکولم را مشکل نظریه مجموعه‌های مرتبه اول می‌دانند و نظریه مجموعه‌های مرتبه دوم را راه حل آن در نظر می‌گیرند و سپس پارادوکسی مشابه پارادوکس اسکولم را برای منطق مرتبه دوم بیان می‌کنیم.

در فصل پنجم موضع بیز و راه حل او برای نسخه‌ی ساده و نسخه‌های پیچیده‌تر پارادوکس اسکولم را در سه حالت مدل متعدی، زیرمدل مقدماتی و تغییر دادن تعبیر عضویت بیان می‌کنیم.

مسائل با نگاه تحلیلی و به شیوه‌ی اصل‌موضوعی حل و بحث خواهند شد.

در این فصل خلاصه‌ای از طرحها، مسایل، اهداف، فرضیه‌ها و نتایج رساله را بیان کردیم. در فصل بعد صورت‌بندی فرم‌های مختلف پارادوکس اسکولم را بیان می‌کنیم.

فصل دوم

صورت‌بندی‌های پارادوکس اسکولم

در این فصل پارادوکس کلاسیک شمارایی و فرم‌های دیگر را تعریف می‌کنیم. پارادوکس اسکولم دارای دو فرم عام و خاص است. فرم عام آن را این‌گونه تعریف می‌کنیم که اگر به‌جای شمارایی ویژگی‌هایی مانند خوش ترتیبی یا اصل کمال را در آن قرار دهیم پارادوکس‌هایی مشابه پارادوکس اسکولم به دست می‌آیند. فرم خاص درمورد شمارایی است و آن را می‌توان در مدل‌های متعدی، مدل‌های معادل مقدماتی و با تغییر تعبیر عضویت در نظر گرفت.

۲-۱ تعریف

۲-۱-۱ فرم کلاسیک شمارایی

فرض کنید T یک اصل‌بندی مرتبه اول و استاندارد نظریه مجموعه‌ها مانند ZFC باشد. با فرض اینکه T مدل دارد، قضیه‌ی لوونهایم اسکولم ما را مطمئن می‌سازد که T یک مدل شمارا مانند M دارد. حال چون "x ناشمارا است" ∃x از T استنتاج می‌شود، $m1 \in M$ وجود دارد به‌طوری که M مدل " m1 ناشمارا است" باشد؛ گرچه چون M شمارا است، تنها شمارا $m \in M$ وجود دارد به‌طوری که M مدل

$m \in m1$ باشد. بنابرین ظاهرا در اینجا تناقضی ظاهری بین قضیه‌ی کانتور و قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین داریم. از نگاهی m1 ناشمارا است ولی از نگاهی دیگر m1 به‌وضوح شمارا است.(Bays 2009, 3)

۲-۱-۲ بقیه‌ی فرم‌ها

۲-۱-۲-۱ پارادوکس اسکولم درمورد اصل موضوع مجموعه‌ی توانی

فرض کنید M مدلی متعدی از ZFC باشد، بنابر قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین ZFC مدلی شمارا و متعدی مانند M_1 دارد. در این صورت بنابر اصل موضوع مجموعه‌ی توانی مجموعه‌ای شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه داریم:

$$M_1 \vDash \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \subseteq x \leftrightarrow z \in y)$$

پس به ازای هر x و هر z دلخواه مجموعه‌ای مانند m عضو M_1 وجود دارد به‌طوری که:

$$M_1 \vDash z \subseteq x \leftrightarrow z \in m$$

x را نامتناهی در نظر بگیرید، در این صورت تنها شمارا z وجود دارند به‌طوری‌که $M_1 \vDash z \in m$ بنابرین m شمارا است درحالی‌که بنابر قضیه‌ی کانتور مجموعه‌ی توانی یک مجموعه‌ی نامتناهی، ناشمارا است. (Bays 2009, 5)

مشابه این پارادوکس را در زبان مرتبه سوم صورت‌بندی می‌کنیم:

$$p.s3 : \forall X\, \exists \mathbb{Y}\, \forall Z\, [\mathbb{Y}Z \leftrightarrow \forall x\, (Zx \rightarrow Xx)]$$

جمله‌ی بالا جمله‌ای در زبان منطق مرتبه سوم است که بیان کننده‌ی این است که X دارای مجموعه‌ی توانی $\mathbb{Y}$ است. می‌توان این جمله را به زبان مرتبه دوم ترجمه کرد (Shapiro 1991, 137). اگر این جمله را p.s2 بنامیم می‌توان مدل هنکین $\mathcal{H}$ را در نظر گرفت به‌طوری که $\mathcal{H} \vDash p.s2$. بنابر قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین مدل هنکین شمارای $\mathcal{H}_1$ وجود دارد که $\mathcal{H}_1 \vDash p.s2$، گرچه دراین‌صورت اگر X را نامتناهی در نظر بگیریم مجموعه‌ی توانی یک مجموعه‌ی نامتناهی شمارا می‌شود.

۲-۲-۱-۲ پارادوکس اسکولم درمورد خوش ترتیبی حساب

فرض کنید $\mathcal{N}_2$ مدل استاندارد[۹] حساب مرتبه دوم PA2 باشد. اصل خوش ترتیبی در زبان حساب را در نظر بگیرید:

$$w.o : \quad \forall A\, [(A \neq \emptyset \wedge A \subseteq \omega) \rightarrow (\exists a\, (a \in A \wedge \forall x\, (x \in A \rightarrow a \leq x)]$$

$\mathcal{N}_2 \vDash w.o$ و همان طور که می‌دانیم $\mathcal{N}_2$ واقعا خوش ترتیب است. اگر دنباله‌ای نزولی مانند

$a_0 > a_1, a_1 > a_2, a_2 > a_3, \ldots$ از جملات را به زبان اضافه کنیم، چون هر تعداد متناهی از این جملات را به PA2 اضافه کنیم این توسیع مدل دارد، بنابر قضیه‌ی فشردگی مدل نااستاندارد $\mathcal{N}_2^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathcal{N}_2^* \vDash w.o$ ولی به دلیل شامل شدن این دنباله‌ی نزولی $\mathcal{N}_2^*$ واقعا خوش‌ترتیب نیست.

[۹] استاندارد در اینجا به معنای standard model به‌کار رفته است. چون مدلمان هنکین است، مجازیم از قضیه‌ی فشردگی استفاده کنیم.

تذکر: اگر $\mathcal{N}_1$ ساختار حساب مرتبه اول و $w.o.1 : \exists x\, \phi(x) \to \exists x\, (\phi(x) \wedge \forall y\, (\phi(y) \to x \le y)$ را در نظر بگیریم، بااینکه $\mathcal{N}_1{}^* \vDash w.o.1$ و $\mathcal{N}_1{}^*$ واقعا خوش ترتیب نیست ولی این تنها به دلیل طرح (schemma) بودن w.o.1 است و به ضعف مدلمان مربوط نمی‌شود. بنابرین صورتی از پارادوکس اسکولم نیست.

می‌توانیم این پارادوکس را در زبان مرتبه دوم این‌گونه صورت‌بندی کنیم:

$$w.o2 : \forall X\ \exists R\ [\ \forall x\ Rxx\ \wedge\ \forall x\ \forall y\ \forall z((Rxy\ \wedge\ Ryz) \to Rxz)\ \wedge\ \forall Y((\exists x\ Yx\ \wedge\ \forall x(Yx \to Xx)) \to \exists y(Yy \wedge \forall z\ (Yz \to (z=y \vee Ryz))))]$$

جمله‌ی بالا در زبان مرتبه دوم بیان‌کننده‌ی خوش‌ترتیبی دامنه تحت رابطه‌ی R است. فرض کنید $\wp$ مدلی هنکین و شمارا از w.o2 باشد. اگر جملات ... $a_0Ra_1, a_1Ra_2, a_2Ra_3,$ را به زبان اضافه کنیم، چون هر تعداد متناهی از این جملات را اضافه کنیم این توسیع مدل دارد، بنابر قضیه‌ی فشردگی مدل نااستاندارد $\wp_1$ وجوددارد به‌طوری‌که $\wp_1 \vDash w.o2$ ولی به دلیل شامل شدن این دنباله‌ی نزولی $\wp_1$ واقعا خوش‌ترتیب نیست.

۲-۱-۲-۳ پارادوکس اسکولم درمورد اصل کمال

فرض کنید $\mathcal{M}$ مدلی هنکین برای زبان ترتیب و اصل کمال باشد. ($\mathcal{M} \vDash LO$). در این صورت $\mathcal{M}$ مدلی برای اصل کمال است. ($\mathcal{M} \vDash a.c$)

$$a.c : \forall X\ \{\ \exists x\ \forall y\ (Xy \to y \le x) \to \exists x\ [\ \forall y\ (Xy \to y \le x) \wedge \forall z\ (\forall y\ (Xy \to y \le z) \to x \le z)]\}.$$

بنابر قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین LO مدلی شمارا مانند $\mathcal{M}_1$ دارد به‌طوری که $\mathcal{M}_1 \vDash LO$ و $\mathcal{M}_1 \vDash a.c$؛ گرچه $\mathcal{M}_1$ تنها شامل شمارا عدد عضو دامنه است و ممکن است سوپریمم زیرمجموعه‌ای شمارا از یک مجموعه‌ی ناشمارا با سوپریمم مجموعه‌ی ناشمارا متفاوت باشد. بنابرین x موردنظر سوپریمم واقعی X نیست.

تذکر: به همین ترتیب می‌توان پارادوکس را برای آنالیز حقیقی نوشت. کافی است $\mathcal{M}$ مدلی هنکین برای اصول‌موضوعه‌ی آنالیز باشد.

۲-۱-۲-۴ پارادوکس اسکولم درمورد تناهی

جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\Phi: \quad \exists X\, [\forall x\, Xx \wedge \forall y\, (y \subseteq x \rightarrow \sim\exists f\, (\forall x\, \forall y\, (fx=fy \rightarrow x=y) \wedge \forall x\, (Xx \rightarrow Xfx) \wedge \exists y\, (Xy \wedge \forall x\, (Xx \rightarrow fx \neq y))]$$

Φ در زبان مرتبه دوم بیان می‌کند که دامنه‌ی X متناهی است. برای Φ می‌توان مدل‌های متناهی با اندازه‌ی دلخواه فرض کرد؛ بنابرین طبق نتیجه‌ای از قضیه‌ی فشردگی Φ دارای مدلی نامتناهی است.فرض کنید $\mathfrak{A}$ مدلی نامتناهی از Φ باشد ($\mathfrak{A} \vDash \Phi$).گرچه می‌دانیم $\mathfrak{A}$ دارای دامنه‌ای نامتناهی است.همان طور که مشاهده می‌کنید در اینجا از قضیه لوونهایم اسکولم استفاده نشده است و تنها از قضیه‌ی فشردگی استفاده کرده‌ایم.

می‌توان این پارادوکس را در زبان نظریه‌مجموعه‌ها صورت‌بندی کرد:

$$\psi : \exists X\, [\forall x\, Xx \wedge (\exists n\, n \in \omega \rightarrow \exists f\, f(X) = n)]$$

جمله‌ی بالا بیان می‌کند دامنه‌ی تعبیر شیئی متناهی است. واضح است که برای ψ می‌توان مدل‌های متناهی به‌دلخواه بزرگ فرض کرد. بنابرین طبق نتیجه‌ای از قضیه‌ی فشردگی ψ دارای مدلی نامتناهی است.فرض کنید $\mathfrak{I}$ چنین مدلی باشد.در این صورت $\mathfrak{I} \vDash \psi$؛ گرچه دامنه‌ی $\mathfrak{I}$ نامتناهی است.

۲-۱-۲-۵ پارادوکس اسکولم و خوش‌بنیادی در نظریه مجموعه‌ها

اصل خوش‌بنیادی را در زبان نظریه مجموعه‌ها در نظر بگیرید:

$$w.f : \forall x\, [\, \exists y\, (y \in x) \rightarrow \exists y\, (y \in x \wedge \forall z\, (\sim(z \in y \wedge z \in x)))]$$

این اصل بیان می‌کند که عضویت خوش‌بنیاد است، یعنی هیچ مجموعه‌ای شامل دنباله‌ای نزولی نامتناهی از زنجیرهای عضویت تعریف پذیر مرتبه اول نیست.

به دلیل استفاده از تناهی در این فرم پارادوکس اسکولم برای آن مشابه فرم تناهی خواهد شد. به این صورت که اگر ثوابت $x_0, x_1, x_2, \ldots$ و اصول‌موضوعه‌ی $\ldots, x_1 \in x_0, x_2 \in x_1$ را به زبان اضافه کنیم، بنابر قضیه‌ی فشردگی چون هر زیرمجموعه‌ی متناهی از نظریه‌ی به دست آمده مدل دارد، این نظریه نیز مدل دارد؛ گرچه طبق تعریف این مدل خوش‌بنیاد نیست.

۲-۱-۲-۶ پارادوکس اسکولم درمورد رابطه‌ی نیایی

گاهی برای تعریف مجموعه‌ها از بستار مینیمال استفاده می‌شود. نمونه‌های کاربرد بستار مینیمال در ریاضیات و منطق فراوان به چشم می‌خورد. مثلا در منطق ریاضی فرمول‌های خوش‌ساخت و قضیه‌ها، بستار مینیمال مجموعه‌ی رشته‌ها و ... تعریف می‌شوند. تعریف ددکیند از اعداد طبیعی نیز یک بستار مینیمال است.

فرض کنید B (پایه) یک مجموعه و H گردایه ای از توابع یا اعداد یا روابط، M بستار مینیمال B تحت H است اگر M کوچک‌ترین مجموعه‌ی شامل B و بسته تحت اعضای H باشد. رابطه‌ی نیایی روشی برای صورت‌بندی مفهوم بستار مینیمال است که توسط فرگه معرفی شده است. به این صورت که y در بستار مینیمال B تحت R است اگر y در هر مجموعه‌ای که شامل B است و تحت R بسته است، باشد. به‌صورت صوری:

$$MC(x,Y,R) : \forall X\, [(\forall y\, (Yy \rightarrow Xy) \wedge \forall y\, \forall z\, ((Xy \wedge Ryz) \rightarrow Xz)) \rightarrow Xx].$$

عبارت زیر بیان کننده‌ی وجود بستار مینیمال و نمونه‌ای از اصل شمول مرتبه دوم است:

$$\exists Z\, \forall x\, (Zx \equiv MC(x,Y,R)).$$

رابطه‌ی نیایی را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

xR^*y ا ت ا دنباله‌ی متناهی $<x_0,\dots,x_n>$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $i = 0,\dots,n$ $x_0 = x$ و $x_n = y$.

R^* را یک رابطه‌ی نیایی می‌نامیم. به دلیل استفاده از تناهی در این فرم پارادوکس اسکولم برای این هم مشابه فرم تناهی خواهد شد.

۲-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری فصل دوم

در این فصل صورت بندی‌های فرم‌های مختلف پارادوکس اسکولم را بیان کردیم. این فرم‌ها در نظریه مجموعه‌ها، حساب، ساختار مرتب خطی چگال، آنالیز و منطق بودند. در فصل بعد مواضع مختلف به پارادوکس اسکولم کلاسیک را بررسی خواهیم کرد.

فصل سوم

اسکولمی و ضداسکولمی‌ها

شک‌گرایان اسکولمی جریانی اندک ولی مداوم میان منطق‌دانان و فلاسفه هستند که ادعاهای اسکولم را برهانی فلسفی می‌دانند و مستقل از هدف تعبیر کردن او، از آن استفاده می‌کنند. آن‌ها رویکرد جبری[۱۰] به اصول‌موضوعه را می‌پذیرند و بر این عقیده هستند که پارادوکس اسکولم نشان می‌دهد مفاهیم نظریه مجموعه‌ها با فرض پذیرفتن این رویکرد، واقعا نسبی هستند. و این تفسیر را به‌عنوان برهانی مستقل، برای نظریه مجموعه‌ها چالش برانگیز می‌دانند. در این فصل موضع اسکولم و شک‌گرایان اسکولمی، نقدهای ضداسکولمی‌ها به آنان و موضع لاادری به این مسئله را بیان می‌کنیم.

به‌طور کلی می‌توان اسکولمی‌ها را به دو دسته‌ی اسکولمی‌های قوی و اسکولمی‌های ضعیف تقسیم‌بندی کرد. به همین ترتیب برهان‌های اسکولمیسم در دو دسته قرار می‌گیرند (Resnik 1966).

۳-۱ اسکولمی‌های قوی

اسکولم، روبن گودستین و هائو ونگ را می‌توان از هواداران این موضع به‌شمار آورد. آن‌ها معتقدند هیچ نظریه‌ی مجموعه‌هایی قادر به تولید مجموعه‌ای که از دیدگاه مطلق ناشمارا باشد نیست(Resnik 1966, 426). یک مجموعه می‌تواند در یک دستگاه به دلیل وجود نداشتن تابع شمارش ناشمارا باشد، گرچه با خروج از دستگاه می‌توان برای آن تابع شمارش پیدا کرد. اسکولمی‌های قوی ادعا می‌کنند که هیچ مجموعه‌ی ناشمارایی از دیدگاه مطلق وجود ندارد. برای مثال، مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. به‌منظور اثبات شمارا بودن آن، اسکولمی باید معنای دقیق "از دیدگاهی مطلق" را توضیح دهد و نشان دهد بدین معنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی شمارا است.

۳-۱-۱ موضع اسکولم

[۱۰] رویکرد جبری یا نظریه‌مدلی اصول موضوعه بر آن است که اصول موضوعه مفاهیم پایه‌ای آن نظریه را مشخص می‌کنند. مثلاً درمورد نظریه مجموعه‌ها جهان نظریه مجموعه‌ای تنها مدلی برای اصول موضوعه‌ی نظریه مجموعه‌ها، مجموعه عضوی از جهان نظریه مجموعه‌ای می‌شود و عضویت تنها به رابطه‌ای اشاره می‌کند که برای تعبیر نماد "∈" استفاده می‌کند.

در این بخش به بررسی دیدگاه‌های خود اسکولم پیرامون پارادوکس اسکولم و نظریه مجموعه‌ها می‌پردازیم. اسکولم در سال ۱۹۲۲ مقاله‌ای به نام "ملاحظاتی درمورد نظریه‌ی اصل‌موضوعی مجموعه‌ها"[11] منتشر کرد. در بخش اول این مقاله اسکولم می‌نویسد نظریه‌ی اصل‌موضوعی زرملو نمی‌تواند بنیادی[12] برای نظریه مجموعه‌ها باشد. در بخش دوم اثباتی ساده از نسخه‌ی عددی قضیه‌ی لوونهایم اسکولم ارائه می‌دهد (اگر یک مجموعه‌ی شمارا از گزاره‌های مرتبه اول سازگار باشد، مدلی در اعداد طبیعی دارد). او در ادامه متن مشهور درمورد پارادوکس اسکولم را می‌نویسد:

تا آن جا که من می‌دانم کسی تا کنون به این ویژگی عجیب[13] و متناقض نمایانه[14] توجه نکرده است. توسط اصول‌موضوعه می‌توان وجود اندازه‌های بزرگ‌تر، کلاس‌های اعداد بزرگ‌تر و ... را اثبات کرد. پس چگونه تمام دامنه‌ی B را می‌توان به‌وسیله‌ی اعداد صحیح مثبت متناهی شمرد؟ یافتن توضیح برای این مطلب دشوار نیست، در قالب اصول‌موضوعه "مجموعه" به معنای گردایه ای[15] دلخواه تعریف شده نیست؛ "مجموعه‌ها" چیزی جز اشیائی به هم مرتبط توسط روابطی که با اصول‌موضوعه بیان می‌شوند نیستند. پس اگر یک مجموعه‌ی M از دامنه‌ی B به معنای اصل‌موضوعی ناشمارا باشد، تناقضی نیست چراکه این تنها بدین معنا است که در B هیچ نگاشت یک به یک ϕ از M به Z_0 (دنباله‌ی اعداد زرملو) وجود ندارد. با این حال امکان شمردن همه‌ی اشیاء B و بنابرین عضوهای M، توسط اعداد صحیح مثبت، وجود دارد. البته چنین شمارشی نیز گردایه ای از اجزای مشخص است، گرچه این گردایه یک "مجموعه" نیست (یعنی در دامنه‌ی B قرار ندارد).

(Skolem 1922, 295)

اسکولم از قسمت سوم مقاله‌اش نتیجه می‌گیرد: اصل موضوع بندی کردن نظریه مجموعه‌ها منجر به نسبی شدن مفاهیم نظریه مجموعه‌ای می‌شود و این نسبیت درمورد هر اصل‌بندی [16] برقرار است. بناسراف اسکولم را این‌گونه تعبیر می‌کند: هر دستگاه شمارای A از اصول‌موضوعه‌ی مرتبه اول در صورت داشتن مدل، مدل شمارا دارد؛ حال با داشتن A و مدل شمارای M برای A گردایه‌هایی وجود دارند که توسط M معین نمی‌شوند[17]. بنابرین تعریف کردن "مجموعه" با ثابت نگه داشتن A معنای "مجموعه" را ثابت نگه نمی‌دارد.

---

[11] Some Remarks on Axiomatized Set Theory

[12] foundation
[13] peculiar
[14] paradoxical
[15] collection
[16] axiomatization
[17] Characterize

در قسمت ششم مقاله، اسکولم ادعا می‌کند اصول‌موضوعه‌ی دامنه را "به‌طور یکتا" مشخص نمی‌کنند. مثلا هم می‌توان مدل خوش‌بنیاد و هم مدل‌های غیر خوش‌بنیاد داشته باشیم.

در قسمت هفتم اسکولم به سه ادعای مهم زرملو حمله می‌کند. ادعاهای زرملو بدین شرح هستند:

۱. این وظیفه‌ی نظریه مجموعه‌ها است که بنیان ریاضیات باشد.

۲. اصل‌بندی راه نجات نظریه مجموعه‌ها است.

۳. مبنای این مبنا، اصول‌موضوعه‌ی زرملو است.

اسکولم برای هر سه مورد مثال نقض آورد و نتیجه گرفت نظریه مجموعه‌های اصل‌موضوعی نمی‌تواند بنیان ریاضیات باشد.

در فاصله‌ی سال‌های ۱۹۲۲ و ۱۹۴۱ نظر اسکولم درمورد ریاضیات شهودی[۱۸] و برهان‌های ضدتحویلی[۱۹] تغییر کرد؛ گرچه هنوز همه‌ی استدلال‌های نسبی بودن و عدم قاطعیت را قبول داشت. از نظر بناسراف دلیل تغییر دیدگاه‌های اسکولم مشخص نیست. شاید (Skolem 1929b) را بتوان نخستین مقاله‌ای دانست که تغییر دیدگاه‌های اسکولم را نشان می‌دهد. این مقاله با دو بخش "اثبات نسبی بودن نظریه مجموعه‌ای" و "اثبات نسبیت بدون استفاده از قضایای لوونهایم اسکولم" آغاز می‌شود؛ گرچه برخلاف (Skolem 1922) که مفاهیم نظریه‌ی "اصل‌موضوعی" مجموعه‌ها را نسبی می‌دانست، در این جا تنها مفاهیم نظریه مجموعه‌ها را نسبی می‌داند.

می‌توان دیدگاه او در این دوره را مشابه شکاکان دانست که بر آن بودند :

۱. مفاهیم نظریه مجموعه‌ها باید به‌صورت اصل‌موضوعی مرتبه اول ارائه شوند.

۲. بدین ترتیب نظریه مجموعه‌ها می‌تواند بنیادی کافی برای ریاضیات است.

توسط قضیه‌ی لوونهایم اسکولم نتیجه می‌شود:

۳. مفاهیم نظریه مجموعه‌ای و دیگر مفاهیم ریاضی که به دنبال آن تعریف می‌شوند نسبی هستند.

(Benacerraf 1985, 89-99)

۳-۱-۲ برهان‌های اسکولمی‌ها

[18] intuitive
[19] Anti-reductionist

در ادامه برهان‌های اسکولمی‌های قوی بدین منظور و نقدهای ضداسکولمی‌ها به آن‌ها را بیان می‌کنیم (Resnik 1966, 427-431):

۱. قضیه‌ی لوونهایم اسکولم

این قضیه نشان می‌دهد هر نظریه‌ی سازگار مدلی در دامنه‌ی اعداد طبیعی دارد.گودستین ادعا می‌کند می‌توان تعبیری از عضویت پیدا کرد که در آن همه‌ی مجموعه‌ها، اعداد طبیعی در نظر گرفته شوند. رسنیک در پاسخ به گودستین می‌نویسد قضیه‌ی لوونهایم اسکولم تنها نگاشتی بین هر نظریه‌ی سازگار و *عبارات* صادق نظریه اعداد فراهم می‌کند. اثبات‌های این قضیه تنها به این وابسته هستند که عبارات سازگار باشند و هیچ اطلاعاتی درمورد مدل آن‌ها در ساخت مدل اسکولمی استفاده نمی‌شود. نگاشت، مجموعه‌ها را به اعداد طبیعی نمی‌برد. در اینجا نمی‌توان از مجموعه حرف زد زیرا عضویت تعبیری نظریه اعدادی یافته است و عبارات نظریه مجموعه‌ها در نظریه اعداد ناپدید می‌شوند.

اکنون تأثیر هر دو نسخه‌ی قضیه‌ی لوونهایم اسکولم و تفاوت به‌کار بردن آن‌ها را در پارادوکس اسکولم بررسی می‌کنیم (McIntosh 1979, 316-324):

نسخه‌ای از قضیه‌ی لوونهایم اسکولم که در سال ۱۹۲۰ توسط اسکولم اثبات شد یک نتیجه‌ی نظریه‌مدلی محض است و بیان می‌کند اگر یک مجموعه‌ی شمارا از فرمول‌های مرتبه اول Σ مدلی نامتناهی داشته باشد، مدلی شمارا دارد. اثبات این قضیه نیازمند اصل انتخاب است. این نسخه را نسخه‌ی زیرمدل می‌نامیم. نسخه‌ای از قضیه‌ی لوونهایم اسکولم که در سال ۱۹۲۲ توسط اسکولم اثبات شد نسخه‌ی عددی نام دارد و بیان می‌کند اگر Σ مجموعه‌ی سازگاری از فرمول‌ها باشد، Σ مدلی شمارا خواهد داشت. اثبات این قضیه نیاز به اصل انتخاب ندارد. در مدل عددی روابط بر اعداد طبیعی تعابیر محمول‌های Σ هستند. اسکولم اظهارات خود درمورد نتایج قضیه‌ی لوونهایم اسکولم را درمورد این نسخه‌ی عددی لوونهایم اسکولم بیان می‌کند. برهانی که نشان می‌دهد قضیه‌ی لوونهایم اسکولم موجب نسبی شدن مفاهیمی مانند ناشمارایی می‌شود بدین شرح است:

نسخه‌ی زیرمدل قضیه‌ی لوونهایم اسکولم را در نظر بگیرید. بنابر آن مدل شمارای M' برای ZF وجود دارد که "$\in$" در آن "عضو بودن" تعبیر می‌شود. این مدل با فرض وجود یک مدل استاندارد (و ناشمارا) M برای ZF

(مثلا شامل همه‌ی مجموعه‌ها با درجه‌ی[20] کمتر از نخستین اندازه‌ی دسترس ناپذیر) که سپس توسط اصل انتخاب کوچک‌تر می‌شود، به دست می‌آید. M' زیرمدل مقدماتی M و هم ارز مقدماتی M است. یعنی برای هر جمله‌ی باز $\phi(x_1,...,x_n)$ از ZF یک n-تایی $<a_1,...,a_n>$ از عضوهای M'، $\phi(x_1,...,x_n)$ را برآورده می‌کند

[20] Rank

اگر و تنها اگر آن را در M برآورده کند. این می‌تواند شامل حالتی باشد که گرچه دامنه‌ی M' شمارا است، شامل مجموعه‌هایی است که ناشمارا هستند. برای اینکه زیرمدل M^* از M را که دارای دامنه‌ی شمارا و تنها مجموعه‌های شمارا باشد به دست آوریم باید از لم انقباض موستوسکی استفاده کنیم. نسبیت در اینجا از نظر اسکولم این‌گونه به نظر می‌رسد : ویژگی S که توسط فرمول مرتبه اول $F(x)$ از نظریه‌ی T بیان می‌شود نسبی است اگر و تنها اگر دو مدل M_1 و M_2 از T وجود داشته باشند به‌طوری که M_1 زیرمدل M_2 باشد و برای عضوی از دامنه‌ی هر دو مدل مانند a، a در M_1، $F(x)$ را برآورده کند و آن را در M_2 برآورده نکند. پس به نظر نسخه‌ی زیرمدل لوونهایم اسکولم نسبی بودن مفاهیم نظریه مجموعه‌ای را نشان می‌دهد؛ گرچه بیشتر فیلسوفان معتقدند که نسخه‌ی عددی لوونهایم اسکولم نشان دهنده‌ی نسبیت نیست، چراکه در آن ZF طوری تعبیر می‌شود که به مجموعه‌ها ربطی ندارد؛ با این حال اسکولم هم مجموعه را چیزی جز "اشیائی که توسط روابطی که اصول‌موضوعه بیان می‌کنند، مشخص شوند[۲۱]." نمی‌دانست.

فرض کنید P مدلی عددی باشد که دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ی اعداد صحیح است. فرض کنید E رابطه‌ای در P باشد که "$\in$" را تعبیر می‌کند. چون P مدل ZF است، عضوی از دامنه‌ی P اصل موضوع مجموعه‌ی تهی، $\exists y\ \forall x \sim Exy$ را برآورده می‌کند. آن را i_0 بنامید. طبق اصل موضوع مجموعه‌ی واحد $\exists y\ y = \{ i_0\}$، i_1 به دست می‌آید و ... . حداقل یکی از اعضای دامنه‌ی P اصل موضوع بی‌نهایت

$\exists x\ (E\ i_0x \wedge \forall y\ (Eyx \rightarrow E\{y\}x))$ را برآورده می‌کند. فرض کنید ω_p عددی باشد که آن را برآورده کند، توسط اصل موضوع مجموعه‌ی توانی $p(\omega_p)$ به دست می‌آید. بنابر قضیه‌ی کانتور داریم

$\sim\exists f\ [f : \omega_p \rightarrow p(\omega_p)]$. یعنی در P هیچ عددی نمی‌تواند $p(\omega_p)$ را بشمارد. پس $p(\omega_p)$ نسبت به p ناشمارا است چون تعریف مرتبه اول مربوطه را برآورده می‌کند. فرض کنید

$\{n$ در دامنه‌ی P است و $C = \{n|\ Enp(\omega_p)$. C شمارا است. فرض کنید f_0 تابع شمارنده‌ی C باشد. برهان اسکولم نشان می‌دهد $p(\omega_p)$ شمارا است.

می‌توان این نقد را بر این برهان وارد دانست که شمارایی یا ناشمارایی برای یک عدد معنی نمی‌دهد، پس برهان اسکولم کاذب است؛ چراکه دو نسخه‌ی زیرمدل و عددی را مخلوط می‌کند. این برهان را این‌گونه اصلاح میشود:

E' را توسیعی از E در نظر بگیرید که همه‌ی اصول‌موضوعه‌ی ZF را برآورده کند. پس نسخه‌ی عددی لوونهایم اسکولم نیز می‌تواند نسبیت نظریه مجموعه‌ای را نشان دهد.

[21] characterize

البته می‌توان اعتراض کرد که معلوم نیست این نوع از نسبیت مد نظر اسکولم بوده باشد. نسبیت موردنظر اسکولم این است که یک ویژگی در اینجا بدین معنی است که یک شی در مدلی دارای آن ویژگی و در مدلی بزرگ‌تر فاقد آن ویژگی باشد. پس به نظر می‌رسد نسخه‌ی زیرمدل برای تعریف نسبیت نظریه‌مدلی مناسب‌تر است.

۲. توسیع‌های شمارای دستگاه‌های استاندارد

اسکولمی می‌تواند ادعا کند هر دستگاه نظریه مجموعه‌ها را می‌توان به‌گونه‌ای تعمیم داد که مجموعه‌های ناشمارا شمارا شوند.گودستین می‌گوید در نهایت می‌توان سلسله مراتبی از دستگاه‌های سازگار به دست آورد که در آن دستگاه‌ها شامل مجموعه‌هایی باشند که نسبت به خود ناشمارا ولی نسبت به دستگاهی بالاتر شمارا شوند، زیرا هر دستگاه شامل جملات اثبات ناپذیری است که در دستگاه بالاتر اثبات می‌شود.گودستین می‌گوید نظریه‌ی اصل‌موضوعی مجموعه‌ها ناتمام است؛ گرچه این ناتمامیت با ناتمامیت گدل از این جهت متفاوت است که در ناتمامیت گدل هر دستگاه شامل همه‌ی دستگاه‌های پایین‌تر است، اما در مورد ناتمامیت گودستین اگر این‌گونه باشد یک مجموعه هم شمارا و هم ناشمارا می‌شود که این منجر به تناقض خواهد شد. برای جلوگیری از تناقض یا باید بپذیریم که انواع مختلفی از ناشمارایی وجود دارند و یا بپذیریم یک مجموعه در سلسله مراتب دستگاه‌ها این‌همان نیست. مثلا درمورد شمارایی مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی:

فرض کنید S یک دستگاه و نماد "R" نشان‌گر مجموعه‌ی *همه‌ی* اعداد حقیقی باشد. اگر S' توسیع شمارای S باشد، شامل نماد "R" است؛ گرچه R در S' شمارا است. اسکولمی‌ها ادعا می‌کنند این نشان می‌دهد از نگاهی مطلق به S' ، R شمارا است.

رسنیک به این برهان دو نقد وارد می‌داند: نخست اینکه اثبات شمارایی R در S' نیازمند اصل موضوع تحدید[۲۲] است، چون S' را به مجموعه‌های شمارا محدود می‌داند. پس اثبات شمارایی R سؤال برانگیز است.

دوم اینکه نمی‌توان اصل موضوع تحدید را بدون خطر تناقض به S افزود. به همین خاطر قبل از اینکه بتوان این اصل موضوع را اضافه کرد باید برای تعریف نوع جدیدی از شمارایی نمادهای S را تکمیل کنیم؛ گرچه این اشکال پیش می‌آید که مفهوم تابع و مفهوم مجموعه با رفتن ورای دستگاه تغییر می‌کند. در این صورت چه تضمینی وجود دارد که R در S و در S' این همان باشد؟ اسکولمی باید نشان دهد در این دو دستگاه با مجموعه‌ای این همان سر و کار داریم.

[22] limitation

۳. دستگاه ونگ Σ

این دستگاه زنجیره‌ای از دستگاه‌ها بر پایه‌ی یک نظریه‌ی ترتیب است. پایین‌ترین دستگاه یعنی Σ_0 شامل اشیاء مرتبه ۰ (اعداد) است. $\Sigma_۱$ شامل اشیاء مرتبه صفر به‌علاوه‌ی *مجموعه‌ی* اشیاء مرتبه صفر است و در حالت کلی Σ_{a+1} شامل اشیاء مرتبه a به‌علاوه‌ی *مجموعه‌ی* اشیاء مرتبه a است. می‌توان با در نظر گرفتن اعداد ترتیبی ترامتناهی دستگاه ونگ را توسیع داد. هر دستگاه Σ_a شامل مجموعه‌هایی است که نسبت به دستگاه Σ_a ناشمارا هستند ولی نسبت به Σ_{a+2} شمارا هستند. یعنی مجموعه‌هایی در Σ_a وجود دارند که هیچ تابع شمارشی از مرتبه‌ی a نمی‌تواند آن‌ها را بشمارد ولی توسط تابع شمارشی از مرتبه‌ی $a+2$ شمرده می‌شوند. پس این‌گونه می‌توان شمارایی و ناشمارایی نسبی را تعریف کرد و دستگاه ونگ معنای رضایت بخشی به آن‌ها می‌دهد. مجموعه‌ای از Σ ناشمارای نسبی است اگر برای حداقل یک a، ناشمارا$_a$ باشد. از طرف دیگر همه‌ی مجموعه‌های Σ از دیدی مطلق شمارا هستند، چون هر مجموعه‌ای که برای حداقل یک a، ناشمارا$_a$ باشد، شمارا$_{a+2}$ است. چون مراتب دستگاه ونگ انباشتی[23] هستند همه‌ی مجموعه‌ها از مراتب پایین‌تر در مراتب بالاتر دوباره ظاهر می‌شوند.

رسنیک در نقد سیستم ونگ می‌گوید اگر مسئله را در مورد اعداد حقیقی در نظر بگیریم Σ *همه‌ی* اعداد حقیقی را دربر ندارد بلکه برای هر a، تنها شامل زیرمجموعه‌هایی شمارا (یعنی برای هر a، اعداد حقیقی از مرتبه‌ی a) است. درواقع Σ از همان اول طوری طراحی شده است که شامل مجموعه‌های ناشمارا نباشد، چراکه به‌عنوان بنیادی برای نظریه مجموعه‌های محمولی[24] یا ساختی درنظرگرفته شده است. نظریه مجموعه‌های محمولی شامل مجموعه‌های ناشمارا نیست. به‌علاوه اسکولمی‌ها باید بتوانند درمورد مجموعه‌های ناشمارای مدنظر اغلب ریاضی‌دانان که در نظریه مجموعه‌های نامحمولی بحث می‌شوند، توضیح دهند. در این نظریه‌ها متغیرهای بسته بر *همه‌ی مجموعه‌ها* تعریف می‌شوند. هنگامی که اسکولمی بخواهد شمارایی این مجموعه‌ها را اثبات کند باید نوع جدیدی از شمارایی را تعریف کند که با شمارایی معمولی تفاوت دارد پس دو مشکل برای او پیش می‌آید: ۱) ممکن است مفهوم جدید شمارایی به مفاهیم معمول پایبند نباشد، مثلا همه‌ی مجموعه شمرده نشود. ۲) ممکن است مجموعه‌ای که می‌خواهد شمارایی آن را نشان دهد با مجموعه‌ی اصلی این‌همان نباشد.

در پاسخ توماس صورت‌بندی روشن‌تری از اسکولمیسم قوی ارائه می‌دهد: تمایز زبان شیئی/فرازبان را فرض کنید. برای راحتی زنجیره‌ی خوش ترتیب زبان‌های $L_1, L_2, \ldots, L_i, \ldots$ را در نظر بگیرید. برای هر L_i، L_{i+1} را فرازبان آن در نظر می‌گیریم که کمینه‌ی شرایط صدق[25] تارسکی برای L_i را داشته باشد. برای هر L_i دستگاه S_i را زیرمجموعه‌ای شمارای بازگشتی از صدق‌های آن زبان تعریف می‌کنیم. حالا می‌توانیم پارادوکس را توضیح دهیم:

---
[23] cumulative
[24] Predicate set theory
[25] Truth conditions

فرض کنید در S_i دلخواه، فرمی قوی از قضیه‌ی کانتور قابل اثبات باشد. در این صورت مجموعه‌ای ناشمارا مانند C در S_i وجود دارد. یعنی در اثبات قضیه‌ی کانتور در S_i نشان می‌دهیم فرض وجود تابعی یک به یک از C به اعداد طبیعی به تناقض می‌انجامد. توجه کنید که اثبات، تنها از توابعی از L_i استفاده کرده است که در S_i باشند. حال با انتقال به S_{i+1} و به کار بردن قضیه‌ی لوونهایم اسکولم، C شمارا می‌شود (اگر قضیه‌ی لوونهایم اسکولم در S_{i+1} نباشد، پارادوکس اسکولم پیش نمی‌آید). رسنیک این‌گونه موضع اسکولمی قوی را تعریف می‌کند: برای هر مجموعه‌ی C که در زبانی مانند L_i ناشمارا باشد، L_j ای وجود دارد که C در آن شمرده شود.

اشکال دیگر توماس به رسنیک این است که در استدلالش علیه اسکولمیسم قوی، نسخه‌ای قوی از واقع‌گرایی[26] را پیش فرض می‌گیرد. رسنیک از اصطلاح "مجموعه‌ی *همه‌ی* اعداد حقیقی" به‌خصوص در استدلال علیه دستگاه ونگ بسیار استفاده می‌کند و این ناشی از پیشینی[27] فرض گرفتن این مجموعه است. در صورتی می‌توان از یک مجموعه‌ی ناشمارای مطلق دفاع کرد که زبان روزمره را به‌عنوان فرازبان در نظر بگیریم و استدلال قطری کانتور را (در یکی از S_j ها) به کار بریم؛ گرچه در این صورت کاملا منطقی است که قضیه‌ی لوونهایم اسکولم هم در دستگاه قابل اثبات باشد. نتیجه‌ی داشتن قضیه‌ی لوونهایم اسکولم و قضیه‌ی کانتور در همان دستگاه (سطح یکسانی از زبان) با زبان شیئی یکسان پارادوکس اسکولم است. تنها هنگامی می‌توانیم مجموعه‌ای ناشمارا داشته باشیم که کاملا از دستگاهمان خارج شویم و این همان افلاطون گرایی[28] است.

۴. تعبیر فاین از اسکولمیسم

فاین تعبیری دیگر از اسکولمیسم مطرح می‌کند. این‌که دستگاه‌های صوری نظریه‌ی مجموعه‌ها دارای مدل‌های ناشمارای مورد نظر[29] [30]نیستند. توماس می‌گوید دلیل اسکولمی‌ها ازجمله فاین و ونگ برای این ادعا که مدل‌ها باید به‌صورت صوری تعین یابند[31]، این است که پارادوکس‌ها مانند پارادوکس اسکولم هنگامی پیش می‌آیند که ادبیات شهودی[32] را درمورد مجموعه‌ها مجاز بدانیم که برای تعین[33] مدل‌های ناشمارای غیرصوری نیاز است. یک دلیل دیگر این است که ضداسکولمی باید نشان دهدکه اسکولمیسم کاذب است، چراکه نمی‌تواند *اعداد حقیقی* را با اعداد طبیعی متناظر کند (Resnik 1966). وجود مجموعه‌ی غیرصوری معین غیرصوری معین‌شده‌ی *همه‌ی*

---

[26] realism
[27] a priori
[28] Platonism
[29] منظور از مدل مورد نظر یک نظریه مدل شهودی و آشنای آن نظریه است که با آن سروکار داریم. مثلاً مدل مورد نظر حساب، $<N, + , . ,' >$ به‌طوری‌که + و . و ' جمع و ضرب و تالی معمولی باشند.

[30] Intended model
[31] formally specified
[32] naïve talk
[33] specify

اعداد حقیقی قابل قبول نیست، چون همان وجود این مجموعه‌های ناشمارا است که مسئله‌ی ما است (Thomas 1971, 179).

۳-۱-۳ نقد ضداسکولمی‌ها

نقد رسنیک به سه بخش تقسیم می‌شود (Resnik 1969, 186-196):

۱. مفهوم مدل‌های غیرصوری معین شده اشتباه است.

به‌منظور دقیق‌تر کردن تمایز بین یک دستگاه صوری تعبیرنشده[۳۴] و مدل‌های گوناگون آن، ابتدا دو دستگاه صوری تعبیرنشده‌ی NBG (دستگاه ون نیومن-برنایز-گدل برای نظریه مجموعه‌ها) و دستگاه S (حساب پئانوی مرتبه اول) را در نظر می‌گیریم. دو نماد "NBG_f" و "S_f" را برای تأکید بر تعبیر نشده بودن این دو دستگاه صوری برمی‌گزینیم. هنگامی که بخواهیم به مدل‌های این دو دستگاه اشاره کنیم از اندیس دیگری استفاده خواهیم کرد. اسکولمی‌ها NBG_f را می‌پذیرند ولی مدل ناشمارای *مورد نظر* آن یعنی NBG_u را نمی‌پذیرند، چون توسط قضیه‌ی لوونهایم اسکولم می‌توان مدلی شمارا ساخت. NBG_u همان مدلی است که ریاضی‌دانان با آن کار می‌کنند. حتی اگر NBG_u را مدلی *غیر مورد نظر* بدانیم اسکولمی باز هم می‌گوید، مدلی شمارا دارد پس مجموعه‌هایش شمارا هستند و برای اجتناب از این، ضداسکولمی باید NBG_u را در فرازبانی *مورد نظر* مشخص کند که نیازمند استفاده از زبان طبیعی غیرصوری است، چون تنها نقطه‌ی شروع برای تعبیر دیگر زبان‌ها است و در اینجا است که اسکولمی‌ها به رسنیک اتهام افلاطون گرایی می‌زنند؛ گرچه رویه‌ی دیگر سکه‌ی پارادوکس اسکولم این است که بنابر قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به بالا اعداد طبیعی مدلی ناشمارا دارند، پس اعداد طبیعی هم که منبع مطمئن اسکولمی‌ها برای مدل‌های شمارا هستند و اسکولمی‌ها آن را غیرصوری معین شده می‌دانند به همین اعتراض دچار هستند. این حقیقت به‌تنهایی ردی بر اسکولمیسم است.

۲. NBG_f برای مدل داشتن نیازی به داشتن یک مدل مورد نظر ندارد.

اسکولمی‌ها معتقدند که فرض وجود NBG_u اشتباه است، چراکه مدل داشتن NBG_f مستلزم وجود آن نیست؛ گرچه می‌گویند با فرض مدل داشتن NBG_f، NBG_c (شمارا) حتما وجود دارد. رسنیک با اسکولمی‌ها مخالف است، چراکه عقیده دارد این دیدگاه برپایه‌ی درک نادرستی از نقش دستگاه‌های صوری است. دستگاه‌های صوری مخلوقات ریاضی منزوی نیستند. مدل‌های *مورد نظر* نقش پررنگی در استفاده از دستگاه‌های صوری بازی می‌کنند. دستگاه‌های صوری تنها وسیله‌ای برای بیان دامنه‌های ریاضی از پیش موجود هستند، نه برای خلق آن‌ها.[۳۵] درمورد

---

[34] uninterpreted

[۳۵] رسنیک ادعا می‌کند درمورد اینکه دامنه‌های ریاضی کشف شدنی یا خلق شدنی هستند و درمورد هستی شناسی ریاضیات موضعی خنثی دارد.

مجموعه‌ها اطلاعات بسیاری در ریاضیات غیرصوری[۳۶] شکل گرفته است که بدون نیاز به اصل موضوع یا دستگاه صوری خاصی فهمیده می‌شود. دستگاه‌های صوری در بنیاد نظریه مجموعه‌ها دو نقش اساسی ایفا می‌کنند:

۱. تدقیق زبان ریاضی غیرصوری ۲. فراهم آوردن زمینه‌ای دقیق برای اثبات‌های ریاضی و پیش‌گیری از پارادوکس‌ها.

رسنیک دستگاه صوریی را برای نظریه مجموعه‌ها مطلوب می‌داند که به مفهوم مجموعه‌ای که همه می‌شناسیم نزدیک باشد؛ گرچه تطبیق دقیق مفهوم مجموعه با دستگاه اصول‌موضوعه‌ی صوری مطلوب نیست

(چون اصول‌موضوعه‌ی نظریه مجموعه‌ها مشمول قضیه‌ی ناتمامیت گدل می‌شود، پس سازگاری اصول‌موضوعه را تنها می‌توان توسط یک استدلال غیرصوری تأیید کرد. از طرف دیگر ممکن است بخواهیم در آینده به اصول‌موضوعه‌ی نظریه مجموعه‌هایمان اضافه کنیم تا درصورت گسترش مفهوم مجموعه با آن هماهنگ شود.). مدل NBG_u این مقاصد را فراهم می‌آورد، درحالی‌که واضح است که NBG_c شهودمان را برآورده نمی‌کند.

۳. یک مدل شمارا به یک مدل ناشمارا ترجیح دارد.

اسکولمی‌ها می‌توانند بدون مخالفت با رویکرد کلی رسنیک درمورد نقش دستگاه‌های صوری با کاربرد آن به نظریه مجموعه‌ها مخالفت کنند، چون آن‌ها می‌توانند به دلیل نوع مفهوم مجموعه‌ای که رسنیک می‌پذیرد او را به افلاطون گرایی متهم کند. رسنیک ادعا می‌کند اسکولمی‌ها نمی‌توانند چنین نقدی بر او داشته باشند؛ مگر اینکه خود NBG_f را زیر سؤال ببرند: اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. می‌توان آن‌ها را به‌وسیله‌ی تابع تالی و صفر به بیان غیرفرمال معین کرد. اگر سعی کنیم اعداد طبیعی را تنها به‌وسیله‌ی یک صوری‌گرایی[۳۷] تعبیر نشده معین کنیم، همان طور که قبلا گفتیم به پارادوکس اسکولم دچار می‌شویم؛ گرچه می‌توان استدلال کرد که تجربه‌ی ما با اعداد طبیعی آن‌قدر وسیع است که معین کردن صوری محض آن غیرضروری است. به هر جهت S_f برای صوری کردن قواعد اثبات نظریه اعداد مناسب است. اثبات سازگاری این دستگاه به دستگاه قوی‌تری نیاز دارد؛ اما چون خطر تناقض برای آن وجود ندارد، اثبات سازگاری آن ضروری نیست. پس دیدگاه رسنیک به دستگاه‌های صوری، برای نظریه اعداد به‌خوبی کار می‌کند.

از طرف دیگر عامل‌هایی که دیدگاه رسنیک را درمورد نظریه اعداد تصدیق می‌کنند، درمورد نظریه مجموعه‌های ناشمارا صادق نیستند. مجموعه‌های ناشمارا در ریاضیات قدمت کمی دارند. عبارت "مجموعه‌ی ناشمارا" اصلا وضوح عبارت "عدد طبیعی" را ندارد. صرف وجود موضوع اسکولمیسم حاکی از همین امر است. به‌علاوه درمورد سازگاری هم نظریه‌ی مجموعه‌ها شباهتی به نظریه اعداد ندارد. چندین دستگاه صوری از نظریه

[36] Informal mathematics
[37] formalism

مجموعه‌ها متناقض بوده‌اند و نظریه‌مجموعه‌دانان درمورد اینکه دلیل این تناقض مجموعه‌های *ناشمارا* هستند، هم‌نظرند. علاوه بر این، این واقعیت که تقریبا همه‌ی ریاضیات کلاسیک را می‌توان بدون استفاده از مجموعه‌های ناشمارا ساخت، تأیید کننده‌ی این امر است. بنابرین در ابتدای امر ادبیات قوی‌ای علیه مجموعه‌های ناشمارا و مفهوم غیرصوری مجموعه‌ی رسنیک وجود دارد که بتوان برپایه‌ی آن مدل‌های شمارا را به مدل‌های ناشمارا ترجیح داد. البته باید توجه کرد که رسنیک برهان خود را بدون پیش فرض گرفتن هیچ گونه هستی شناسی خاصی درمورد مجموعه‌های ناشمارا ارائه می‌دهد. پس می‌توان آن را برهانی برضد پذیرفتن دستگاه‌های صوری قویی مانند NBG_f بدون ارتباط با هیچ مدل یا هستی‌شناسی خاصی دانست. مثلا درمورد مسئله‌ی سازگاری، اگر NBG_f ناسازگار باشد هم NBG_u رسنیک و هم NBG_c اسکولمی ناسازگار خواهند بود. پس استدلال اسکولمی هنگامی که رسنیک را به افلاطون گرایی متهم می‌کند، کار نمی‌کند. پس اگر پذیرش NBG_f توسط اسکولمی هنوز او را درگیر مسائل ریاضی مجموعه‌های ناشمارا کند، رد این مجموعه‌ها چه مزیتی برای او دارد؟ به نظر رسنیک تنها مزیت هستی شناسی کم جمعیت‌تر است.

اگر اسکولمی‌ها مدل شمارایشان را در اعداد طبیعی با قضیه‌ی لوونهایم اسکولم بدون اصل انتخاب به دست آورند محمول '$\in$' به رابطه‌ی ناآشنای عددی R تعبیر می‌شود و باید سازگاری NBG_f ($CON(NBG_f)$) را به اصول‌موضوعه‌ی S_f اضافه کنند؛ گرچه این توسیعی مصنوعی از نظریه اعداد است که از NBG_f قوی‌تر است. تنها انگیزه‌ی این توسیع و این دیدگاه این است که قضیه‌ی لوونهایم اسکولم سازگاری این دیدگاه را نشان می‌دهد و این معضلی جدی است.

اگر اسکولمی‌ها مدل شمارایشان را از نسخه‌ی معادل اصل انتخاب قضیه‌ی لوونهایم اسکولم به دست آورند، تنها تفاوت آن‌ها با مدل NBG_u محدود بودن دامنه‌ی متغیرشان است. دامنه‌ی متغیرهای رسنیک *همه‌ی مجموعه‌ها* و دامنه‌ی متغیرهای اسکولمی‌ها به مجموعه‌های دامنه‌ی D محدود است. در این صورت نمی‌توان مدل اسکولمی‌ها را به تصنعی بودن متهم کرد اما آن‌ها باید: ۱. فرازبانی غنی برای بحث درمورد NBG_f و مدل‌های آن و ۲. وجود مدلی برای NBG_f را توضیح دهند. ۱ ضروری است چراکه برای تمایز NBG_u و مدل اسکولمی باید D را معین کرد. یعنی فرازبان اسکولمی باید به اندازه‌ای قوی باشد که بتوان اثبات اسکولم را در آن نوشت. دلیل ضروری بودن ۲ برای اسکولمی این است که مولفه‌های تعریف‌کننده‌ی D به مدلی نامعین ارجاع می‌کنند که بر NBG_f مقدم است.

۳-۱-۴ پاسخ اسکولمی‌ها

ویلیام توماس درمورد رسنیک می‌گوید که او به‌جای اینکه خود اسکولمیسم را نفی کند، برهان طرفدار آن را نفی کرده است. پاسخ رسنیک به رد مدل‌های غیرصوری معین شده توسط اسکولمی‌ها این بود که بدون مدل‌های غیرصوری معین شده، اسکولمی‌ها نمی‌توانند از ادعای شمارایی مجموعه‌های صوری معین شده دفاع کنند. رسنیک باور داشت اسکولمی‌ها حتی درمورد اعداد طبیعی (منبع مطمئن آن‌ها برای دامنه‌ی مدل‌های شمارا)، نیز به مشکل برمی‌خورند. ادعای رسنیک برپایه‌ی عدم قاطعیت حساب مرتبه اول است. یعنی چون حساب مرتبه اول مدل‌های یک ریخت ندارد، می‌توان دو مدل از حساب با ساختارهای منطقی بسیار متفاوت داشت. پس رسنیک بر این پایه حکم می‌کند که شمارایی یک مجموعه، به طریق صوری محض متعین[38] نیست، چراکه متعین کردن شمارایی یک مجموعه، همان متعین کردن یک تابع شمارش از اعداد طبیعی به آن مجموعه است و رسنیک برپایه‌ای کاملا صوری استدلال می‌کند که نمی‌توان اعداد طبیعی را شناسایی کرد[39]. توماس به نقد رسنیک پاسخ می‌دهد که می‌توان فرض ضمنی رسنیک مبنی بر اینکه نظریه‌هایی که مدل‌هایمان را معین می‌کنند باید مرتبه اول باشند را رد کرد، چراکه اگر سورگذاری بر توابع را مجاز بدانیم، حساب پئانو قاطع می‌شود(Mendelson 1964, 116). رسنیک پاسخ می‌دهد که حتی با این وجود فرض‌های پئانو هم با "تفکیک‌ناپذیری عددی"[40] روبه‌رو هستیم، بدین معنی که اگر $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ دامنه‌ای برای مدل این فرض‌های پئانو باشد، $N' = \{a, 0, 1, 2, \dots\}$ برای a دلخواه نیز چنین است. رسنیک نتیجه می‌گیرد چون $N \neq N'$ پس اعداد طبیعی را نمی‌توان شناسایی کرد.[41]در این‌جا اسکولمی می‌تواند دو پاسخ دهد: می‌تواند به طور خاص برای شمارایی تعریفی صوری بدهد؛ یا می تواند مانند کواین اعداد طبیعی را هر مجموعه‌ی دلخواهی که قوانین حساب را برآورده می‌کند، بداند و در این صورت هردوی N و'N را می‌توان اعداد طبیعی (*the* natural numbers) در نظر گرفت.

حالا پاسخ اول اسکولمی بیش‌تر توضیح داده می‌شود. این ادعای رسنیک که اسکولمی‌ها نمی‌توانند به وجود مجموعه‌ی خاصی پایبند باشند، صادق است چراکه برای یک صوری‌گرا[42] توضیح وجود یک مجموعه، دشوار است. پس بهتر است اسکولمی در مقابل این اتهام رسنیک که اسکولمی‌ها را مقید به یک مجموعه‌ی متعالی اعداد طبیعی می‌داند پاسخ دهند. توماس پاسخ می‌دهد که هر نظریه‌ای از مجموعه‌ها باید شامل ایده‌های شهودی کانتور باشد و چنین نظریه‌ای سازگار خواهد بود. اسکولمی‌ها شمارایی با تعریف ددکیند را می‌پذیرند:

تعریف: مجموعه‌ی a ددکیند-نامتناهی در نظریه‌ی T است اگر و تنها اگر اینکه یک زیر مجموعه‌ی سره‌ی y از a موجود باشد و a به‌طور یک به یک به y نگاشته شود، قضیه‌ای از T باشد.

---

[38] established
[39] identify
[40] Numerical insegragativity
[41] در اینجا منظور از اعداد طبیعی همان اعداد طبیعی معروف (*the* natural numbers) است(Quine 1969, 44-45).
[42] formalist

تعریف: مجموعه‌ی a در T شماراست اگر و تنها اگر اینکه هر مجموعه‌ی ددکیند نامتناهی y به گونه‌ای باشد که a را به توان به‌طور یک به یک به y نگاشت، قضیه‌ای از T باشد.

تعریف دوم تعریفی کاملا صوری از شمارایی است. این تعاریف وجود "مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی" را پیش‌فرض نمی‌گیرند. پس اسکولمی‌ها به یک مجموعه‌ی متعالی اعداد طبیعی متعهد نمی‌شوند. به نظر می‌رسد قوت موضع اسکولمی این است که برآن است مجموعه‌ها یا ناشمارا هستند یا اگر در بستر یک نظریه در نظر گرفته شوند، شمارا خواهند بود.

برای صوری‌گرای متعصب یک مجموعه‌ی "مطلقا ناشمارا" مجموعه‌ای است که در هر دستگاه سازگار شمارا باشد. توماس می‌گوید قضیه‌ی لوونهایم اسکولم نشان می‌دهد بدین معنا مجموعه‌ی "مطلقا ناشمارا" وجود ندارد. دیدگاه افلاطونی رسنیک به او این توانایی را می‌دهد تا مجموعه‌ی "مطلقا ناشمارا" را به‌عنوان مجموعه‌ای که در هر نظریه‌ی صادقی ناشمارا است، بپذیرد. (Resnik 1969, 189-192). اسکولمی‌ها با این ادعا که برخی از نظریه‌های سازگار مدل‌هایی دارند که در فرانظریه‌های مشخصی ناشمارا هستند و استفاده‌ی رسنیک از این فرانظریه‌ها به‌عنوان مدل مورد نظر، مشکلی ندارند.

در مقابل قضیه‌ی لوونهایم اسکولم که سازگاری این ادعا که مجموعه‌های ناشمارای مطلق وجود ندارند را نشان می‌دهد، قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به بالا سازگاری این ادعا را نشان می‌دهد که نظریه‌های سازگار خاصی مدل‌هایی دارند که (نسبت به برخی نظریه‌ها) ناشمارا هستند. پس باید دید کدام یک از دو موضع بر دیگری ترجیح دارد. همان‌طور که بیان کردیم دلایل رسنیک برای ترجیح (افلاطون‌گرایانه‌ی) مجموعه‌های ناشمارای مطلق به دو دسته تقسیم می‌شوند: ۱.نقش دستگاه‌های صوری ۲.مشکلات تکنیکی اسکولمی‌ها

توماس درمورد دسته‌ی نخست از دلایل که فلسفی‌تر هستند می‌نویسد: رسنیک ادعا می‌کند تعبیری مورد نظر از NBG_f وجود دارد که دامنه‌ی آن ناشمارا است و به‌طور غیرصوری معین می‌شود. برای رسنیک نظریه مجموعه‌ها از نظر صوری‌سازی مانند مکانیک نیوتونی است. به نظر توماس مسئله این است که مدل مورد نظر نظریه مجموعه‌ها چیست. رسنیک به نظر ابتدا دامنه‌ی آن را اعداد حقیقی می‌دانست (Resnik 1966, 431) ؛ اما سپس به مدلی گرایش پیدا کرد که دامنه‌اش V (مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها) باشد. (Resnik 1969, 190-191) ولی در این صورت اگر NBG_f برای ایده‌های غیرصوری ما از ریاضیات کافی باشد، آن‌گاه این ادعای رسنیک مثال خوبی نبوده است، چون اینکه V وجود ندارد قضیه‌ی NBG_f است. در هر حال مسئله فقط یک مثال نیست. رسنیک می‌توانست NF کواین را انتخاب کند که V در آن وجود دارد. نکته این است که این نشان می‌دهد تنها خود نظریه مجموعه‌ها ویژگی‌های مجموعه را معین می‌کنند. بر این مبنا توماس ادعا می‌کند مجموعه‌ی

ناشمارا خارج از متن[43] یک نظریه مجموعه‌ها قابل فهم نیست، چون این یک مفهوم جدایی‌ناپذیر نظریه‌مجموعه‌ای است.

توماس می‌گوید اگر این ادعای رسنیک که دستگاه‌های صوری، تنها اشیای از پیش موجود ریاضی را صوری می‌کنند درست باشد، مانند این است که یک نظریه‌ی صوری برای ژنتیک سنتورها بنویسیم.

درمورد مشکلات تکنیکی اسکولمی که رسنیک ادعا می‌کند، توماس می‌گوید در مدل اسکولمی که از نسخه‌ی بدون اصل انتخاب قضیه‌ی لوونهایم اسکولم به دست می‌آید، اینکه تعبیر '∈' یک رابطه‌ی ناآشنای نظریه اعدادی باشد برای اسکولمی مشکلی ایجاد نمی‌کند، زیرا اسکولمی‌ها از همان ابتدا می‌گفتند محتوی مدل مورد نظر نظریه مجموعه‌ها واضح نیست. برای مدل اسکولمی که از نسخه‌ی معادل اصل انتخاب قضیه‌ی لوونهایم اسکولم به دست می‌آید، توماس معتقد است دلیلی ندارد که اگر '$CON(NBG_f)$' را به اصول‌موضوعه‌ی آن اضافه کنیم از NBG_f قوی‌تر باشد چون رسنیک هم سازگاری NBG_f را قبول دارد. پس صدق اصل موضوع '$CON(NBG_f)$' چیز جدیدی نیست. نیاز به فرازبانی غنی هم که بتوان درمورد NBG_f و مدل‌هایش بحث کرد پذیرفتنی است چراکه هنگامی که از سازگاری یک نظریه بحث می‌شود به نظریه‌ای قوی‌تر نیاز داریم. اسکولمی‌ها با رد مجموعه‌های ناشمارا مدل‌های ناشمارا را نیز رد می‌کنند، پس فرانظریه‌ای که بتواند به همه‌ی مدل‌های یک نظریه دلالت کند مشکلی ندارد. فرض وجود مدلی برای NBG_f (محتمل، ناشمارا) که رسنیک به آن ایراد می‌گیرد تنها حالتی از مسئله‌ی "تحویل هستی‌شناختی"[44] [45]است. یعنی اسکولمی فرض می‌کند NBG_u وجود دارد تا نشان دهد که تنها NBG_c وجود دارد.

توماس نتیجه می‌گیرد تیغ اکام به نفع اسکولمی‌ها حکم می‌کند (Thomas 1971, 179-186).

۳-۱-۵ نقد بناسراف

در این قسمت خلاصه‌ای از نقد ضداسکولمی بناسراف را بیان می‌کنیم (Benacerraf 1985, 85-115):

بناسراف معتقد است اگر تعبیرهای مورد نظرمان از اصول‌موضوعه را به آن‌ها اضافه کنیم استدلال‌های نسبیت مردود خواهند شد. تنها فهم نظریه‌مدلی اصول‌موضوعه‌ی یک نظریه دچار ادعاهای نسبی گرایانه‌ی اسکولم می‌شود.

[43] context
[44] Ontological reduction
[45] این مسئله می‌گوید هنگامی‌که ما همه‌ی یک جهان مشخص را نمی‌خواهیم، باید اشیاء زائد را مشخص کنیم.

در جایی دیگر بناسراف نسخه‌ای از پارادوکس اسکولم را که خود اسکولم مطرح کرده است دارای اشتباه فاحش و ساده می‌نامد:

در متن کلاسیک (Skolem 1922)، اسکولم توضیح می‌دهد چگونه یک مجموعه- مثل PZ_0 -به‌صورت اثبات پذیر"ناشمارا" ولی به دلیل داشتن یک مدل شمارا، "شمارا" می‌شود. این هسته‌ی استدلال نسبی بودن مفهوم اندازه است. M در مدل B ناشمارا ولی از موضعی بیرونی شمارا است. این استدلال صحیح نیست چون مفهوم "شمارایی" در آن مبهم است. در مدل B چیزی شمارا است، اگر عددی باشد که رابطه‌ی مشخصی("∈" در مدل) با عددی دیگر (تخصیص "Z_0" در B) داشته باشد. تعریف زیر را در نظر بگیرید:

$Den(x) =_{df} \exists f$ (f تابعی یک به یک با دامنه‌ی و برد x است.)

مجموعه‌ی M ناشمارا است اگر و تنها اگر چنین f ای وجود نداشته باشد. چون دامنه‌ی B شمارا است و چون M زیرمجموعه‌ای از آن است، فارق از هرچه نظریه بگوید، M شمارا است. در اینجا زرملو می‌تواند اعتراض کند چراکه این قسمت از برهان، استدلالی شهودی در نظریه مجموعه‌ها است که با B به‌عنوان یک مجموعه‌ی واقعی و با M به‌عنوان زیرمجموعه‌ی آن رفتار می‌کند. این در حالی است که او در آغاز فرض کرد که M یک عدد است؛ گرچه اکنون این‌گونه برداشت می‌شود که دارای "عضو" است و بدون این برداشت، کلمه‌ی "بنابرین"، که در متن اسکولم زیر آن را خط کشیده‌ایم، را نمی‌توان توجیه کرد. پس این استدلال اسکولم تنها یک ابهام پیچیده است.

بناسراف هم چنین اسکولم را متهم به این می‌داند که در هیچ‌کجا استدلالی برای این ادعا که تنها ساختارهای مرتبه اول، مهم و دارای معنای ریاضی هستند، نیاورده است.

دلیل شکست پارادوکس اسکولم و نسبی‌گرایی از نظر بناسراف این است که دلیلی ندارد با نظریه مجموعه‌ها نظریه مدلی رفتار کنیم. این بدین معنی نیست که نظریه مدل آن را مطالعه نکنیم. آنچه یک عبارت نظریه مجموعه‌ای بیان می‌کند می‌تواند به‌سادگی آنچه تحت همه‌ی مدل‌های کلاسیک این نظریه ثابت است نباشد. نظریه‌ی اصل‌موضوعی مجموعه‌ها در ریاضیات شهودی ریشه دارد.

۲-۳ دیدگاه اسکولمی ضعیف

این دیدگاه به‌صورت زیر صورت‌بندی می‌شود (Resnik 1966, 432):

۱) یا باید بپذیریم که مفاهیم نظریه مجموعه‌ای به‌خصوص ناشمارایی را نمی‌توان توسط اصول‌موضوعه مشخص کرد.
۲) یا باید به ناشمارایی نسبی و پذیرفتن شمارایی مطلق همه‌ی مجموعه‌ها تن دهیم.

بازسازی استدلال پشت این دیدگاه آسان نیست. پس از راسل مشخص کردن مفاهیم مجموعه‌ای توسط اصول‌موضوعه رایج شد. یعنی معنی اصطلاحات نظریه مجموعه‌ای را بیشتر از آنچه اصول‌موضوعه‌ی صوری مشخص می‌کنند، نمی‌دانستند. قضیه‌ی لوونهایم اسکولم نشان می‌دهد تعابیر غیرمورد نظر از این اصول‌موضوعه وجود دارند. می‌توان استدلال کرد که مدل‌های غیر مورد نظر را می‌توان از مدل‌های مورد نظر جدا کرد، پس اصول‌موضوعه می‌توانند مجموعه‌های ناشمارا را مشخص کنند؛ گرچه این برای اسکولمی به معنای وارد کردن شهود یا دانش غیر اصل‌موضوعی به نظریه مجموعه‌ها است. بنابرین در این نقطه قسمت اول دیدگاه خود را بیان می‌کند: اصول‌موضوعه نمی‌توانند مفاهیم نظریه مجموعه‌ای را مشخص کنند. بنابر صورت‌بندی موضع اسکولمی ضعیف اگر ۱ را نپذیریم، ۲ باید صادق باشد. درصورتی که کسی ۱ را نپذیرد با ۲ مواجه می‌شود. اما مشکل قسمت ۲ این است که معانی اصطلاحات "نسبی" و "مطلق" مبهم هستند. به‌منظور روشن کردن، رسنیک دو تعبیر از آن‌ها را بررسی می‌کند: اگر نسبی و مطلق را مانند دیدگاه اسکولمی قوی معنی کند، همان نقد وارد بر آن دیدگاه یعنی ناهمانی بین دستگاهی بر او وارد خواهد بود؛ بنابرین اگر بخواهیم قسمت دوم را با این تعبیر بپذیریم باید امکان معرفت غیراصل‌موضوعی به مجموعه را بپذیریم. تعبیر دوم این است که مجموعه را شیئی دلخواه بدانیم که اصول‌موضوعه‌ی نظریه مجموعه‌ها را برآورده می‌کند و چون می‌توان این مفهوم از مجموعه را شیئی از مدل اسکولم در نظر بگیرد، تنها مجموعه‌های شمارا وجود خواهند داشت. اسکولمی در اینجا فرض کرده است که اگر مدل‌های موردنظر نظریه مجموعه‌ها را مجاز ندانیم، تعبیرمان شمارا خواهد شد و از فرض وجود مدل‌های دیگر نظریه مجموعه‌ها به شمارا بودن همه‌ی مجموعه‌ها رسیده است؛ اما در این صورت دچار *پارادوکسی* دیگر خواهد شد: هر دستگاهی که حداقل یک مدل داشته باشد مدلی ناشمارا دارد. پس ممکن است کسی نتیجه بگیرد ساختن نظریه مجموعه‌هایی که تنها شامل مجموعه‌های شمارا باشد امکان پذیر نیست. چون اگر این نظریه سازگار باشد مدل‌های ناشمارا نیز دارد. به‌وضوح هر دو نتیجه گیری اشتباه است چون بین تعابیر مختلف می‌توان انتخاب کرد؛ اما زمینه‌ی انتخاب کردن باید از خود انتخاب مستقل باشد.

پس در نتیجه اسکولمی ضعیف موفق نمی‌شود که نشان دهد اگر ۱ کاذب باشد ۲ صادق است. اگر اسکولمی ضعیف موضعش را اصلاح کند و تنها قسمت ۱ دیدگاهش را بپذیرد یعنی تعابیر مورد نظر نظریه مجموعه‌ها را رد کند در این صورت این معادل این است که اصول‌موضوعه‌ی نظریه مجموعه‌ها مدل یکتایی ندارند که بدیهی است. رسنیک نتیجه می‌گیرد اگر *مجموعه‌ای* وجود داشته باشد باید نماد '$\in$' را تعبیر به رابطه‌ی عضویت کنیم و در این صورت هم مجموعه و هم مجموعه‌ی ناشمارا داریم.

۳-۳ موضع لاادری

اصلی‌ترین مدافع این موضع ویرجینیا کلنک است. او ادعا می‌کند در مورد اهمیت فلسفی قضیه‌ی لوونهایم اسکولم ابهام وجود دارد. کلنک ادعا می‌کند هیچ کدام از اسکولمی‌ها و ضداسکولمی‌ها موفق نمی‌شوند. اسکولمی‌ها نمی‌توانند نشان دهند که تنها مجموعه‌های شمارا وجود دارند و افلاطون‌گرایان موفق نمی‌شوند وجود مجموعه‌های ناشمارا را اثبات کنند. او عقیده دارد این مسئله تصمیم‌ناپذیر است؛ گرچه بحث دارای اهمیت فلسفی است چراکه فاقد اهمیت هستی‌شناسانه بودن قضیه‌ی لوونهایم اسکولم شواهد له نوعی دیدگاه صوری‌گرایی به ریاضیات را تقویت می‌کند. اسکولمی‌ها قضیه‌ی لوونهایم اسکولم را از نظر فلسفی بسیار مهم می‌دانند چراکه نشان می‌دهد مجموعه‌های ناشمارای مطلق وجود ندارند؛ گرچه چون ادعای آن‌ها در دستگاه صوری خاصی ثابت می‌شود تنها چیزی که نشان می‌دهند این است که این نظریه‌ی صوری آن‌قدر قوی نیست که بتواند تابع شمارش را تولید کند. از طرف دیگر افلاطون‌گرایان (ضداسکولمی‌ها) ادعا می‌کنند اهمیت هستی شناختی لوونهایم اسکولم کم است، چون مدل‌های اسکولمی شمارشی از مجموعه‌ها فراهم نمی‌آورند و تنها عبارات را به عباراتی درمورد اعداد می‌نگارند و مفهوم قابل قبولی از عضویت ارائه نمی‌دهند و این مدل‌ها رویه‌ی دیگر قضیه‌ی لوونهایم اسکولم یعنی قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به بالا را دست کم می‌گیرند که نشان می‌دهد هر نظریه با مدل نامتناهی دارای مدل‌های با اندازه‌های نامتناهی است.[۴۶] از نظر افلاطون گرا دلیلی ندارد مدل‌های شمارا را مهم‌تر از مدل‌های ناشمارا بدانیم. پس قضیه‌ی لوونهایم اسکولم در پاسخ به پرسش‌های هستی‌شناختی ما کمکی نمی‌کند.

کلنک ابتدا به بررسی دیدگاه اسکولمی می‌پردازد. یکی از اعتراض‌ها به موضع اسکولمی این است که مدل شمارا به دلیل تعبیر عضویت و مجموعه‌ها به اشیاء نظریه اعدادی، شهودی نیست. می‌توان در دفاع از اسکولمی پاسخ داد روش‌های مختلفی برای اثبات قضیه‌ی لوونهایم اسکولم وجود دارد. مثلا یک روش، ساختن مدل هنکین است که شهودی هم هست چراکه تنها جملات نظریه‌ی صوری را نشان می‌دهد؛ گرچه افلاطون‌گرایان این مدل را هم نمی‌پذیرند چراکه از نظر آن‌ها تنها مدلی قابل قبول است که دامنه‌اش مجموعه‌ی مجموعه‌ها و تعبیر عضویت نرمال باشد.

ادعای اسکولمی‌ها این است که فقط مجموعه‌های شمارا وجود دارند. پس اثبات وجود یک زیرمدل شمارا برای این ادعا کافی نیست، چون دامنه‌ی شمارای مدل اسکولمی زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی بزرگ‌تری است که وجود آن فرض شده است. پاسخ کلنک این است که این استدلال به فرم "وجود U ها را فرض می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر همه‌ی U ها مورد نیاز باشند، آن گاه همه‌ی U ها موردنیاز نیستند..." گرچه اسکولمی‌ها تنها نشان می‌دهند که

---

[۴۶] بناسراف در مقاله‌ی اسکولم و شکاکان این انتقاد را به اسکولمی ها وارد نمی‌داند و استفاده از قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به بالا را به نفع اسکولمی ها می‌شمارد، چراکه نشان می‌دهد مسئله‌ی نسبیت برای همه‌ی اندازه‌ها برقرار است.

همه‌ی مجموعه‌ی اصلی برای ساختن مدل لازم نیست. این نشان نمی‌دهد مجموعه‌ی اصلی وجود ندارد. حتی اگر این مشکل حل شود، استدلال اسکولمی‌ها مشکل جدی‌تری دارد: اسکولمی‌ها و افلاطون گراها به‌سادگی فرض می‌کنند زیرمدل، ویژگی‌های شهودی مجموعه‌ها و عضویت را حفظ می‌کند ولی این فرض مورد تردید است چراکه مثلا در نظریه اعداد برای رابطه‌ی $<$ برای اعداد طبیعی $\{<1,2>,<2,3>,\ldots\}$ شهودی است گرچه اگر رابطه را به دامنه‌ای دیگر مثل $\{2,4,8,16,..\}$ محدود کنیم، این رابطه $\{<2,4>,<2,8>,<4,8>,<2,16>,..\}$ بیشتر درمورد "شمرده شدن توسط $2x$" شهودی است. درمورد "$\in$" به همین ترتیب می‌توان شرایطی را در نظر گرفت که زیرمجموعه برای آن تعبیری شهودی‌تر باشد. پس با استفاده از اصل انتخاب نیز این مشکل حل نشده است. اسکولمی‌ها در اینجا ادعا می‌کنند نیازی به تعبیر شهودی "$\in$" وجود ندارد چراکه مفهوم مدل مورد نظر[47] برای نظریه مجموعه‌ها در نگاه اول واضح نیست. این پذیرفتنی نیست چراکه مدل‌های اسکولمی برای هر نظریه‌ی قابل صوری شدن وجود دارند. اسکولمی‌ها باید توضیح دهند چرا نظریه مجموعه‌ها تنها نظریه‌ای است که مبهم بودن چیستی مدل‌های استانداردش منجر به عقب نشینی به سمت مدل‌های نا استاندارد می‌شود. پس باید این را قبول کرد که مدل‌های شمارای نظریه مجموعه‌ها، مورد نظر نیستند و در این صورت فاقد وزن هستی‌شناختی هستند. این توسط قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به بالا تقویت می‌شود. (زیرنویس ۹ را در نقد این بیان ببینید). رسنیک و مایهیل نتیجه می‌گیرند نظریه مجموعه‌های صوری برای هر اندازه‌ی نامتناهی مدل دارد و آنچه قضیه‌ی لوونهایم اسکولم نشان می‌دهد آن نیست که مجموعه‌های ناشمارا وجود ندارند بلکه تنها این است که آن‌ها نمی‌توانند تنها توسط ساختار منطق مرتبه اول مشخص شوند. این نتیجه همان طور که در نقد توماس گفتیم برپایه‌ی این فرض است که مدلی به‌اندازه‌ی کافی غیرصوری برای نظریه مجموعه‌ها وجود دارد و اگر ضداسکولمی این ادعا را اثبات نکند اعتراض وی بی‌ارزش است. انگیزه‌ی این ادعا به نظر ضداسکولمی‌ها این است که ریاضیات صوری بستگی به "فهم غیرصوری جامعه‌ی ریاضی‌دانان" دارد. کلنک معتقد است تعبیر مفاهیم نظریه مجموعه‌ای مانند درک "درونی" ما از ادراک سبز بودن با یکدیگر متفاوت است. پس فکر درمورد اینکه مدل مورد نظر شهودی نظریه مجموعه‌ها کدام است، بیهوده است.

رسنیک معتقد بود در سطح غیرصوری، نظریه اعداد با نظریه مجموعه‌ها متفاوت نیست چراکه ما کاربرد عبارات نظریه اعداد را می‌دانیم و می‌توانیم از آن‌ها استفاده کنیم ولی کلنک اعتراض می‌کند که کاربرد عبارات ربط زیادی به نوع مدلی که دارا هستند ندارد و آموختن نظریه مجموعه‌ها به معنای آموختن این است که هر فرمول را در جای درستش قرار دهیم. پس استفاده از کاربرد هم برای توضیح ریاضیات غیرصوری به افلاطون‌گرا کمکی نمی‌کند. پس از نظر کلنک، رسنیک موفق نمی‌شود نشان دهد که دیدگاهش از نظر هستی شناختی خنثی است.

---

[47] intended

اینکه چگونه می‌توان تفاوت‌های ریاضیات شهودی و غیرشهودی را توضیح داد معلوم نیست. ریاضیات شهودی شامل زبان روزمره‌ی ماست که بی‌دقت و ناسازگار است. پس می‌توان این رابطه را رابطه‌ی میان دو زبان دانست که یکی سازگار و دقیق‌تر از دیگری است. ولی در این صورت نمی‌توان تصور کرد که ریاضیات پیش صوری قدرت خاصی برای بیان معنی شهودی مفاهیم ریاضی چون "ناشمارایی" داشته باشد. حتی اگر زبان طبیعی را یک زبان مرتبه دوم در نظر بگیریم مفهوم "مجموعه" در یک زبان صوری بهتر بیان می‌شود. پس تلاش برای روشن کردن مفهوم مدل مورد نظر مغلوب است.

قضیه‌ی لوونهایم اسکولم باعث می‌شود از نگاه صوری چیستی مجموعه را درک نکنیم و از طرف دیگر به دلیل مسائل ذکر شده، شهود غیرصوری ما نیز زیر سؤال می‌رود. پس شاید نتیجه این باشد که مجموعه‌ها و اعداد تنها آن چیزی هستند که اصول‌موضوعه به ما می‌گویند و هر مجموعه‌ای که این اصول را برآورده کند مدلی برای نظریه مجموعه‌ها است. بنابرین پس از بررسی دو تلاش ناکام افلاطون‌گرایان می‌توانیم به تأیید نتیجه‌های صورت‌گرایانه بپردازیم: نتایج نشان می‌دهند درنظرگرفتن ریاضیات به‌عنوان یک علم توصیفی با مشکلات زیادی مواجه می‌شود. ریاضیات مانند منطق یک نظریه درمورد اشیا نیست بلکه درمورد همه‌ی اشیا صحبت می‌کند.

دلیل اینکه بسیاری سریع صوری‌گرایی را رد می‌کنند این است که ریاضیات را به علائم بی‌معنی تبدیل می‌کند؛ گرچه این نقد به صوری‌گرایی بر پایه‌ی این فرض است که معنا همان مدلول است ولی دلیلی ندارد این را به‌عنوان نظریه معنای ریاضیات بپذیریم. به نظر کلنک مناسب‌ترین نظریه‌ی معنی برای ریاضی به کاربرد[48] آن برمی‌گردد. ممکن است اعتراض شود که با پذیرفتن اینکه دستگاه صوری تنها چیزی است که وجود دارد جایی برای بخش مهمی از ریاضیات یعنی تحلیل مفاهیم شهودی باقی نماند، گرچه ادعای کلنک این نبوده است که ریاضیات شهودی وجود ندارد بلکه این‌که ریاضیات شهودی با هستی شناسی ارتباطی ندارد. (Klenk 1976)

در این بخش دیدیم کلنک با کنار هم قرار دادن استدلال‌های اسکولمی و ضداسکولمی‌ها نشان می‌دهد این‌دو به تکافو ادله می‌رسند. پس درمورد اینکه مجموعه‌های ناشمارا وجود دارند یا خیر بهتر است موضع لاادری را برگزینیم.

۴-۳ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری فصل سوم

در این فصل مواضع اسکولمی‌های قوی و ضعیف، برهان‌هایشان (قضیه‌ی لوونهایم اسکولم، توسیع‌های شمارای سیتم‌های استاندارد و دستگاه ونگ) و نقدهای ضداسکولمی‌ها بر برهان‌ها را بیان کردیم. با کنار هم دیدن برهان‌ها، نقدها و پاسخ‌ها دیدیم که اسکولمی و ضداسکولمی‌ها به تکافو ادله می‌رسند. سپس در همین راستا موضع

[48] practice

لاادراگرایی کلنک را بیان کردیم و این موضع را بر دو موضع اسکولمی و ضداسکولمی‌ها رجحان دادیم. در فصل بعدی راه‌حل نظریه‌های مرتبه دوم را برای پارادوکس‌های اسکولم بررسی می‌کنیم.

فصل چهارم

پارادوکس اسکولم و منطق مرتبه دوم

در این فصل دیدگاه افرادی مانند شپیرو را بررسی می‌کنیم که پارادوکس اسکولم را مشکل نظریه مجموعه‌های مرتبه اول می‌دانند و نظریه مجموعه‌های مرتبه دوم را راه حل آن در نظر می‌گیرند. سپس پارادوکسی مشابه پارادوکس اسکولم را برای منطق مرتبه دوم بیان می‌کنیم.

۴-۱ نظریه‌های مرتبه اول چه مشکلی دارند؟

در این بخش مشکل عدم قاطعیت نظریه‌های مرتبه اول بررسی می‌شود. (Shapiro 1991, 110-115) یک دستگاه اصل‌موضوعی قاطع است اگر و تنها اگر هر دو مدلش یک‌ریخت باشند.[۴۹] قضیه‌ی لوونهایم اسکولم نشان می‌دهد هیچ مجموعه ای از جملات یک زبان مرتبه اول نمی‌تواند یک توصیف قاطع از یک ساختار نامتناهی باشد. نظریه‌های مرتبه اول معمول مانند حساب، آنالیز و نظریه مجموعه‌ها توسط جایگزین کردن اصول‌موضوعه‌ی مرتبه دوم با طرح‌های اصل‌موضوعی[۵۰] به دست می‌آیند. قدرت استنتاجی Z2 از ZFC مرتبه اول کمی بیشتر است، گرچه تفاوت سمانتیکی زیادی بین آن‌ها وجود دارد. به دلیل برقرار بودن قضیه‌های لوونهایم اسکولم و فشردگی در نسخه‌های مرتبه اول، مدل‌هایی ناشمارا برای حساب مرتبه اول و مدل‌هایی شمارا برای آنالیز و نظریه مجموعه‌های مرتبه اول وجود دارند. پیرو مونتاگ (۱۹۶۵)، مدل‌های نظریه‌های مرتبه دوم استاندارد و مدل هر نظریه‌ی مرتبه اول که مدل نظریه‌ی مرتبه دوم متناظر نباشد، نااستاندارد نامیده می‌شوند.

مجموعه‌های فرمول‌های مرتبه اول زیر مدل نااستاندارد دارند:

AR-1: { Φ در زبان حساب مرتبه اول است و $\vDash AR \rightarrow \Phi$ }

AN-1: { Φ در زبان آنالیز مرتبه اول است و $\vDash AN \rightarrow \Phi$ }

Z2-1: { Φ در زبان ZFC مرتبه اول است و $\vDash Z2 \rightarrow \Phi$ }

---

[۴۹] برای مطالعه‌ی بیشتر درمورد نقش قاطعیت در تاریخ ریاضی و منطق به Corcoran 1980 مراجعه کنید.

[50] Axiom schema

AR-1 مجموعه‌ی صدق‌های مرتبه اول حساب، AN-1 مجموعه‌ی صدق‌های مرتبه اول آنالیز و Z2-1 مجموعه‌ی فرمول‌های مرتبه اول ارضا پذیر در همه‌ی مرتبه‌های[۵۱] دسترس ناپذیر هستند.

حال دلیل شکست قضیه‌های قاطعیت مرتبه اول بررسی می‌شود. اصول‌موضوعه‌ی مرتبه دوم استقرا، کمال و جایگزینی در مورد هر زیرمجموعه‌ای از دامنه، حتی اگر در زبان نباشد، به کار می‌روند؛ گرچه طرح‌های اصل‌موضوعی تنها درمورد مجموعه‌های تعریف پذیر توسط فرمول‌ها به کار می‌روند. اثبات‌های قاطعیت نظریه‌های مرتبه دوم با مدل‌های "دلخواه" نظریه آغاز می‌شوند، زیرمجموعه‌های مشخصی از دامنه تعیین می‌گردند و اصل موضوع مرتبه دوم مناسب درمورد آن‌ها استفاده می‌شود. برای تعیین وجود زیرمجموعه‌ها یا روابط مربوطه از سطحی ابتدایی از نظریه مجموعه‌ها استفاده می‌شود؛ اما اگر $M = < d , I >$ را مدل یکی از نظریه‌های مرتبه اول در نظر بگیریم، برای به کار بردن یک طرح اصل‌موضوعی درمورد زیرمجموعه‌ی p از d، ابتدا باید مطمئن شویم فرمولی در زبان مرتبه اول وجود دارد که p را در مدل M "تعریف کند". یعنی به فرمولی مانند $\Phi(x)$ و نگاشتی مانند s بر M نیاز است به‌طوری که برای همه‌ی نگاشت‌های S' که همه‌جا به‌جز شاید در x یکسان هستند، $M,S' \vDash \Phi(x)$ اگر و تنها اگر S' یکی از اعضای p را به x اختصاص دهد. در این صورت و فقط در این صورت نمونه‌ای از طرح می‌تواند باشد که درمورد p استفاده شود. چنین مجموعه‌ی p که این شرط را برآورده کند، M-تعریف پذیر[۵۲] مرتبه اول نامیده می‌شود. به‌طور مشابه، می‌توان تابع یا رابطه‌ی M-تعریف پذیر مرتبه اول را تعریف کرد. هر نظریه‌ی مرتبه اول که توسط یک طرح اصل‌موضوعی صورت‌بندی می‌شود مستلزم این است که برای هر مدل M، اصل مربوطه (استقرا، کمال یا جایگزینی) درمورد هر زیرمجموعه یا تابع تعریف پذیر مرتبه اول دامنه به کار رود و این اصل‌ها نمی‌توانند درمورد هر زیرمجموعه‌ای از دامنه به کار روند. پس قضیه‌های قاطعیت در حالات مرتبه اول شکست می‌خورند، چون ممکن است زیرمجموعه‌های مشخصی از دامنه که در فرانظریه ساخته شده‌اند، تعریف پذیر مرتبه اول نباشند.

مثلا می‌توان مشاهده کرد در ZFC مرتبه اول اصل موضوع خوش‌بنیادی، تنها مانع زنجیره‌های نزولی عضویت که تعریف پذیر مرتبه اول هستند، می‌شود. می‌توان تحقیق کرد که هر ساختار خوش‌بنیاد که اصل هم مصداقی[۵۳] را برآورده کند با یک مجموعه‌ی متعدی (تحت عضویت) یک‌ریخت است.(Shapiro 1991, 112) پس بحث مدل‌های خوش‌بنیاد نظریه مجموعه‌ها را می‌توان به مدل‌های مجموعه‌ای[۵۴] متعدی (ساختارهایی که دامنه‌ی آن‌ها یک مجموعه است و به $\in$ رابطه‌ی عضویت معمولی نسبت داده می‌شود.) فروکاست. بنابرین اگر ZFC مرتبه اول مدلی خوش‌بنیاد داشته باشد، مدلی متعدی دارد. از قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین نتیجه می‌شود که

51 rank
52 M-definable
53 Axiom of extensionality
54 Set models

زیرمجموعه‌ی شمارای $d' \subseteq d$ وجود دارد که یک مدل مجموعه‌ای است. مجموعه‌ی d' می‌تواند عضوهای ناشمارا داشته باشد. با این وجود ثابت می‌شود مجموعه‌ی متعدی m وجود دارد که با d' یک‌ریخت است و این m هم یک مدل مجموعه‌ای و هر عضو m شمارا است. (Shapiro 1991, 112)

فرض کنید C عبارت قضیه‌ی کانتور باشد. چون C یک قضیه از ZFC مرتبه اول است، $m \vDash C$؛ گرچه همان‌طور که بیان کردیم خود m و عضوهایش شمارا هستند. این دوباره پارادوکس اسکولم است. برخی مشاهدات برای رفع این ابهام کافی هستند. فرض کنید ω مجموعه‌ی اردینال های متناهی باشد. می‌توان نشان داد

$\omega \in m$.(Shapiro 1991, 114). فرض کنید $S(y)$ فرمولی باشد که بیان کند $y \subseteq \omega$ (یعنی هر عضو y یک اردینال متناهی است.) و فرض کنید $O(z , x)$ فرمولی باشد که بیان کند که z تابعی از ω بر روی x است. اصل موضوع مجموعه‌ی توانی مستلزم $\exists x\, \forall y\, (y \in x \equiv S(y))$ و قضیه‌ی کانتور $\forall x\, [\, \forall y\, (y \in x \equiv S(y)) \rightarrow \sim\exists z\, O(z , x)]$ است. m هر دوی این جملات را برآورده می‌کند. چون هر عضو m شمارا است، به‌وضوح مجموعه‌ی توانی ω نمی‌تواند عضوی از m باشد؛ گرچه نگاشت s وجود دارد به‌طوری که

$m,s \vDash \forall y\, (y \in x \equiv S(y))$. فرض کنید p مجموعه‌ای باشد که توسط s به متغیر x نسبت داده می‌شود. آن گاه p "نقش مجموعه‌ی توانی ω را در m بازی می‌کند." و شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های ω نیست. در واقع p تنها شامل همه‌ی زیرمجموعه‌هایی از ω است که در m باشند. این مجموعه شمارا است. پس فرض کنید f هر تابعی از ω به p باشد، بنابر قضیه‌ی کانتور برای همان نگاشت s داریم $m,s \vDash \sim\exists O(z , x)$. یعنی "$p$ شمارا نیست" توسط m ارضا می‌شود؛ گرچه این تنها بدین معنا است که توابعی مانند f در m نیستند. در مجموع، مجموعه‌ی p در واقع شمارا است گرچه هیچ تابعی از ω بر روی p عضو m نیست، یا چنین تابعی m-تعریف پذیر مرتبه اول نیست. هرچند تناقضی حاصل نشده است، واضح است که m یک مدل مورد نظر نظریه مجموعه‌ها نیست. اصل موضوع مجموعه‌ی توانی یک جمله‌ی مرتبه اول است:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \equiv \forall w\, (w \in z \rightarrow w \in x))$$

این اصل، وجود مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه را نشان می‌دهد؛ گرچه برد متغیرها (مانند همه‌ی متغیرهای مرتبه اول) بر عضوهای مدل است. پس اصل موضوع مجموعه‌ی توانی تنها وجود یک مجموعه از همه‌ی زیرمجموعه‌های ω را نشان می‌دهد که وجود آن‌ها در مدل m توسط اصول‌موضوعه تأیید می‌شوند و تعریف پذیر مرتبه اول هستند. در برخی حالات تعداد آن‌ها شمارا است. به نظر شپیرو اسکولم نتایج رادیکالی از ملاحظاتی مانند بالا درمورد طبیعت اندازه گرفت.

علاوه بر ملاحظات بالا نتیجه‌های زیر بیان می‌کنند قضایای فشردگی و لوونهایم اسکولم در ساختار استاندارد منطق مرتبه دوم برقرار نیستند.

نتیجه ۴-۱. قضیه‌ی فشردگی در منطق مرتبه دوم با مدل استاندارد نقض می‌شود.

نتیجه ۴-۲. قضایای لوونهایم اسکولم برای منطق مرتبه دوم با مدل استاندارد برقرار نیستند.

پس پارادوکس اسکولم در مدل استاندارد منطق مرتبه دوم پیش نمی‌آید. با این حال قضایای بالا در منطق مرتبه دوم با مدل هنکین برقرار هستند.

۴-۲ زبان‌های مرتبه دوم و کاربرد[55] ریاضیات

منطق مرتبه اول و منطق مرتبه دوم تفاوت‌های ژرفی دارند. همان‌طور که بیان شد در منطق مرتبه اول قضیه‌های تمامیت گدل، فشردگی (که نتیجه‌ی تمامیت است.)، لوونهایم اسکولم رو به پایین و بالا صادق است؛ اما هیچ مجموعه‌ای از جملات مرتبه اول که مدل نامتناهی داشته باشد، نمی‌تواند قاطع باشد. از طرف دیگر، منطق مرتبه دوم ناتمام است، فشرده نیست و قضیه‌های لوونهایم اسکولم در آن برقرار نیستند ولی مجموعه‌های قاطع بسیاری (با مدل‌های نامتناهی) دارد.

در این قسمت دیدگاه شپیرو درمورد عدم کفایت منطق مرتبه اول را در صوری کردن کاربرد ریاضیات بیان می‌کنیم. شپیرو با زرملو،هیلبرت و برنیس درمورد این‌که هیچ زبان مرتبه اولی برای اصل‌موضوع بندی کردن شاخه‌هایی از ریاضیات مانند حساب، آنالیز و نظریه‌مجموعه‌ها که "مدل‌هایی موردنظر" دارند، کافی نیست، هم‌قول است. به علاوه شپیرو معتقد است هر زبانی که فاقد متغیرهای مرتبه دوم باشد، برای این منظور کافی نیست. چراکه سمانتیک زبان مرتبه اول برای سمانتیک پیش‌صوری[56] کاربرد ریاضیات کافی نیست. می‌توان مشاهده کرد زبان مرتبه دوم با سمانتیک هنکین هم بسیاری از نقایص سمانتیک مرتبه اول را دارد. از نظر شپیرو ارجاع به محمولات یا زیرمجموعه‌های دامنه برای رسیدن به سمانتیک کاربرد ریاضی، ضروری است. پس منطق زیربنای ریاضیات (حداقل) مرتبه دوم است.

یک هدف اصلی دستگاه اصل‌موضوعی ریاضیات، صوری کردن کاربرد آن است. هدف دیگر آن رسیدن به قاطعیت است.

۴-۲-۱ دیدگاه مایهیل

[55] practice
[56] preformal

جان مایهیل برخلاف اسکولم تمایز بین ساختارها و زبان‌های صوری توصیف‌کننده‌ی آن‌ها را می‌پذیرد اما ادعا می‌کند که قضیه‌های لوونهایم اسکولم نشان‌دهنده‌ی عدم کفایت صوری‌سازی[۵۷] هستند. قسمتی از نقش دستگاه اصل موضوعی ایجاد امکان توصیف و برقراری ارتباط[۵۸] به منظور مطالعه‌ی یک ساختار است و توصیف و برقراری ارتباط درمورد یک ساختار هنگامی ممکن است که آن دستگاه اصل موضوعی، ساختار را یکتا معین کند. مایهیل نتیجه می‌گیرد ریاضی‌دانان نمی‌توانند از شهودهای اولیه‌ای که تعبیر موردنظر دستگاه اصل موضوعی را معین می‌کند، رهایی یابند.

صوری‌گرایی به ما کمک می‌کند هنگامی که خواستیم، بتوانیم نظرمان را عوض کنیم. پارادوکس اسکولم به ما گوشزد می‌کند که شهودمان را فراموش نکنیم. اگر این تحلیل درست باشد، توانایی ما برای استفاده از یک صوری‌گرایی برای درک کردن دیگران محدود است. حتی اگر دو ریاضی‌دان درمورد یک دستگاه اصل موضوعی توافق داشته باشند نمی‌توانند مطمئن باشند هردو در ذهن، یک تعبیر (حتی یک‌ریخت) از آن دارند. مایهیل می‌نویسد به نظر هیچ معنای صوریی برای اطمینان از اینکه مفهوم عضویت برای همه‌ی ما یکسان است وجود ندارد. هیچ تعداد از عبارات صوری وجود ندارند که بنابر آن‌ها دو نفر قبول کنند نظریه مجموعه‌های ادراک شده‌ی یکی، از دید دیگری شمارا نیست. قضیه‌ی لوونهایم اسکولم به ما می‌آموزد که ارتباط صوری درمورد ریاضیات، یک جامعه‌ی غیرصوری از ادراک را پیش‌فرض می‌گیرد.

هردوی اسکولم و مایهیل محدودیت صوری‌سازی و زبان‌های صوری را قبول دارند. آن‌دو مناسب بودن صوری‌سازی‌های *مرتبه اول* را برای نشان دادن کاربرد ریاضیات رد می‌کنند. درمورد حساب و آنالیز حقیقی و مختلط بین ریاضی‌دانان، توافق وجود دارد که با یک مدل خاص سروکار دارند؛ ولی درمورد نظریه مجموعه‌ها تنها گروهی از ریاضی‌دانان در این مورد توافق دارند. همه‌ی ریاضی دانان در ذهن تعبیر یکسان یا نهایتا یک‌ریخت از ریاضیات دارند. سوالی که به ذهن می‌رسد این است که چگونه این ساختارها مورد ادراک قرار می‌گیرند و درمورد آن‌ها ارتباط برقرار می‌شود؟ بسیاری از فلاسفه مانند مایهیل و گدل بر این باورند که برخی از ساختارها توسط چیزی به‌نام قوه‌ی شهود[۵۹] درک می‌شوند. حتی با فرض وجود این قوه هم مسائل به‌طور کامل حل نمی‌شوند. در بهترین حالت قوه‌ی شهود تنها می‌تواند توضیح دهد که چگونه یک ریاضی‌دان مدل اعداد طبیعی را ادراک می‌کند و آن را به زبان صوری یا غیرصوری توضیح دهد.

یک سوال دیگر این‌که چگونه یک ریاضی‌دان می‌تواند بداند ریاضی‌دان دیگر در حال توصیف چه ساختاری است؟ دومی هم قوه‌ی شهود دارد؛ ولی شاید بتواند بسیاری از ساختارهای دیگر مثلا مدل نااستاندارد حساب را

---

57 formalization
58 communication
59 Faculty of intuition

شهود کند. این دوباره مسئله‌ی ارتباط است. منظور مایهیل این است که نشان دهد زبان‌های صوری (مرتبه اول) برای ارتباط، کفایت ندارند. این‌که بتوان درمورد ساختارهای ریاضی ارتباط برقرار کرد یک "جامعه‌ی ادراکی غیرصوری" خاص را پیش‌فرض می‌گیرد. این موضوع اهمیت مسئله را بیشتر نشان می‌دهد؛ اما مسئله را حل نمی‌کند. می‌توان برای توضیح دادن مسئله‌ی ارتباط ساختارها یک قوه‌ی تلپاتی بین ریاضی‌دانان فرض کرد؛ اما اگر این قوه هم نباشد همه‌ی ارتباطات به‌وسیله‌ی زبان صورت می‌گیرد. در این جا است که اهمیت قاطعیت روشن می‌شود.

ریاضی‌دانان مختلف "ساختار اعداد طبیعی"، "ساختار آنالیز حقیقی" و "ساختار آنالیز مختلط" را یکسان (یک‌ریخت) ادراک می‌کنند. این یعنی آن‌ها موفق می‌شوند در این مورد ارتباط برقرار کنند. پس زبان *غیرصوری* ریاضیات برای تضمین این ارتباط کافی است. هدف اصول موضوعه‌ی صوری، مدل کردن کاربرد ریاضیات است و هدف کاربرد ریاضیات توصیف و ارتباط درمورد ساختارها است. شپیرو نتیجه می‌گیرد که زبان و سمانتیک صوری‌سازی باید برای تضمین این ارتباط کفایت داشته باشد. به عبارت دیگر، زبان صوری‌سازی باید قاطعیت را مجاز بداند. نتیجه می‌شود که دستگاه اصول موضوعه‌ی مرتبه اول ناکافی است.

مونتاگ (۱۹۶۵) نیز همین نتیجه را می‌گیرد.(Montague 1965) او نشان می‌دهد مدل‌های استاندارد حساب و آنالیز یا حتی نظریه مجموعه‌ها می‌توانند مدل نظریه‌ی مرتبه دوم متناظر باشند. پس می‌توان ادعا کرد زبان‌های مرتبه دوم برای توصیف و ارتباط درمورد این ساختارها کافی هستند. می‌توان این ادعا را به چالش کشید. مثلا می‌توان اعتراض کرد که این ادعا درمورد قدرت بیانی زبان‌های مرتبه دوم پیش‌فرض می‌گیرد که سورهای مرتبه دوم در تعاریف باید مبهم نباشند؛ در حالی‌که اگر T یک نظریه‌ی مرتبه دوم، D مدل آن و d دامنه‌ی مدل باشد ممکن است دو ریاضی‌دان در صورتی‌که دو "مجموعه‌ی توانی" متفاوت از d در ذهن داشته باشند، درمورد اینکه D مدل T است توافق نداشته باشند. این را باید در نظر بگیریم که برای فهم سورهای مرتبه دوم یک نظریه، لازم نیست سلسله مراتب نظریه مجموعه‌ای[۶۰] را بفهمیم. باید بین مفهوم "منطقی" از مجموعه و مفهوم "تکرار شونده"[61] آن تمایز قائل شویم. مفهوم "تکرار شونده" مجموعه به سلسله مراتب نظریه مجموعه‌ای برمی‌گردد؛ ولی مفهوم "منطقی"[۶۲] مجموعه به یک دامنه‌ی ثابت برمی‌گردد (عمل‌گر مجموعه توانی را نداریم.) و این اصلا مبهم نیست.

[60] Set theoretic hierarchy
[61] iterative
[62] logical

در آخر شپیرو ادعا می‌کند که اینکه "همه‌ی زیرمجموعه‌های منطقی" بدون ابهام فهمیده می‌شوند، مستلزم این است که تنها وقتی یک ریاضی‌دان این عبارت را در ارتباط با یک دامنه استفاده کند، شنوندگان او منظورش را *یکسان* بفهمند.(Shapiro 1985, 719-722)

۴-۲-۲ دستگاه اصول موضوعه‌ی مرتبه اول

در این قسمت عدم کفایت دستگاه اصول موضوعه‌ی مرتبه اول شاخه‌های مختلف ریاضیات بررسی می‌شود.

به‌نظر می‌رسد تناهی مفهومی واضح و غیرمبهم باشد. هنگامی که یک ریاضی‌دان بگوید یک دامنه متناهی است شنوندگانش مقصود او را می‌فهمند. پس یک زبان که کاربرد ریاضیات را صوری می‌کند باید بتواند این ویژگی را بیان کند؛ اما هیچ زبان مرتبه اولی نمی‌تواند.

شپیرو ادعا می کند این ویژگی از نظریه‌های مرتبه اول مانند حساب، آنالیز و نظریه مجموعه‌ها که اصول موضوعه‌ی مرتبه دوم استقرا، کمال و جایگزینی را می‌توان به صورت طرح اصل موضوعی در آن‌ها داشت به نوعی تصنعی[۶۳] است و به کاربرد ریاضیات نزدیک نیست. چراکه ریاضی‌دانان از حساب، آنالیز و نظریه مجموعه‌ها یک مدل مورد نظر در ذهن دارند. آن‌ها طرح‌های اصل موضوعی را باور می‌کنند یا می‌پذیرند تنها چون اصول موضوعه‌ی مرتبه دوم را در ذهن دارند. مثلا یک ریاضی‌دان هنگامی‌که دلیل پذیرفتن یک نمونه از طرح اصل موضوعی کمال از او پرسیده شود می‌گوید "چون یک اصل موضوع، فرم طرح کمال را دارد آن را می‌پذیرم.". در ضمن اگر ادعا شود که اصول موضوعه‌ی مرتبه اول تعهدات هستی‌شناختی[۶۴] مقبول‌تری نسبت به مرتبه دوم دارند، هرچند وضوح آن‌ها کم‌تر است می‌توان پاسخ داد که اگر طرح اصل موضوعی مرتبه اول را قبول کنیم باید درمورد هر نمونه‌ی آن طرح توجیه بیاوریم که این برای بی‌نهایت نمونه غیرممکن است. از طرف دیگر یک ریاضی‌دان نمی تواند ادعا کند که چون طرح اصل موضوعی نتیجه‌ی منطقی یک اصل موضوع مرتبه دوم است آن را قبول کرده است. چون هنگامی‌که آن را به دلیل تعهدات هستی‌شناختی رد کرد، دیگر نمی‌تواند به عنوان یک مقدمه برای توجیه طرح اصل موضوعی مرتبه اول از آن استفاده کند. پس برای توجیه یک طرح اصل موضوعی نیاز به برهان دیگری هستیم. حالا ملاحظاتی درمورد مقایسه‌ی نسخه‌های استاندارد حساب، آنالیز و نظریه مجموعه‌ها با همتای مرتبه دومشان بیان می‌کنیم:

---

[63] artificial
[64] Ontological commitments

چون دستگاه‌های اصل موضوعی مرتبه دومی که شناختیم شامل طرح‌های اصل موضوعی نیستند، نظریه‌های مرتبه دوم به نوعی از نمادهای غیرمنطقی، مستقل هستند.

نظریه اعداد و آنالیز مرتبه اول بااستفاده از طرح‌های اصل موضوعی کاملا جدا از هم به‌نظر می‌رسند. این در حالی است که کاربرد آن‌ها این‌گونه نشان نمی‌دهد. مصداق این کاربرد تکنیک "مدل کردن"[۶۵] است. می‌توان اعداد طبیعی را در نظریه مجموعه‌ها تعریف کرد.

تعبیر مورد نظر از ZFC یک مجموعه‌ی تکرار شونده نیست. چون سلسله مراتب[۶۶] نظریه مجموعه‌ها نمی‌تواند عضو خودش باشد. پس اگر گردایه‌های مجاز را با مجموعه‌ها یک‌ریخت بدانیم درمورد درنظر گرفتن ZFC مرتبه دوم به‌عنوان یک نظریه درمورد سلسله مراتب نظریه مجموعه‌ای دچار مشکل می‌شویم. برای نظریه مجموعه‌دانان متداول است که حتی در زبان غیرصوری از سلسله مراتب نظریه مجموعه‌ای صحبت کنند. برای مثال مفهوم مطلق بودن یک فرمول $\Phi(x)$ در ساختار M با دامنه‌ی d این‌گونه تعریف می‌شود که برای هر

$x \in d$، $M \vDash \Phi(x)$ اگر و تنها اگر $\Phi(x)$ در سلسله مراتب نظریه مجموعه‌ای برقرار باشد. به علاوه اگر برای توصیف سلسله مراتب نظریه مجموعه‌ای از ZFC مرتبه دوم استفاده کنیم، تناقضی پیش نمی‌آید.

قضیه: $M = <d , E>$ یک مدل ZFC مرتبه دوم است اگر و تنها اگر کاردینال دسترس‌ناپذیر κ وجود داشته باشد به‌طوری‌که M با V_κ یک‌ریخت باشد. می‌توان نتیجه گرفت که نظریه‌ی مرتبه دوم، جهان نظریه مجموعه‌ای را از هر جنبه‌ای به جز "اندازه‌ی" کلاس مجوعه‌ها معین کند. به همین دلیل وستون(۱۹۷۶) نظریه مجموعه‌های مرتبه دوم را "تقریبا قاطع" می‌نامد.

هر مدل ZFC مرتبه دوم یک مدل ZFC مرتبه اول است. اگر $M = <d , E>$ یک مدل مرتبه اول به جز آن‌ها باشد (یعنی M با کاردینال دسترس‌ناپذیر یک‌ریخت نباشد.) M به‌وضوح نااستاندارد است. سه امکان وجود دارد. اول رابطه‌ی E خوش‌بنیاد نباشد. در این‌صورت M استاندارد نیست. دوم M تحت زیرمجموعه‌های عضوهایش بسته نباشد. مدل‌های استاندارد باید شامل زیرمجموعه‌های اعضا باشند. سوم، M اصل موضوع جایگزینی را برآورده نکند(Shapiro 1985,.714-730)

۴-۳ زبان‌های میانی و پارادوکس اسکولم

65 modelling
66 hierarchy

در این بخش به بررسی این سوال پرداخته می‌شود که آیا ممکن است زبان‌های بین منطق مرتبه اول و دوم (زبان‌های "میانی"[۶۷]) بتوانند نقص‌های منطق مرتبه اول را حل کنند؟ از بین سه زبان میانی –زبان‌های نامتناهی[۶۸]، ω-زبان‌ها[۶۹] و نسخه‌های متغیر آزاد زبان‌های مرتبه دوم تنها سومی موفق می‌شود کاربرد ریاضیات را شامل شود. می‌توان مشاهده کرد اغلب نقص‌های زبان‌های مرتبه اول را می‌توان به هر زبانی که سمانتیک فشرده داشته باشد تعمیم داد. در این صورت تمامیت را نیز نداریم.

زبان‌های نامتناهی[۷۰] نمی‌توانند ارتباط را حفظ کنند؛ چون برای برقراری یک ارتباط لازم است یک جمله قابل بیان و نوشته شدن در یک زمان متناهی و با حروفی متناهی باشد.

گزینه‌ی بهتر ω-زبان‌ها هستند. فرض کنید Σ مجموعه‌ای دلخواه از نمادها باشد. در این صورت Σ^* مجموعه‌ی همه‌ی کلمات متناهی بر Σ است. هر کلمه‌ی متناهی دارای طولی برابر یک عدد طبیعی است. اگر w کلمه‌ای با طول n باشد، w را می‌توان به عنوان تابعی از $\{0,1,\ldots,n\text{-}1\} \to \Sigma$ در نظر گرفت. ω-کلمه‌ها را می‌توان به عنوان تابعی از $\mathbb{N} \to \Sigma$ در نظر گرفت. مجموعه‌ی همه‌ی کلمات نامتناهی بر Σ با Σ^ω نشان داده می‌شود. یک ω – زبان L بر Σ یک زیرمجموعه از Σ^ω است. ω-زبان‌ها شامل دو نوع سور می‌شوند. یکی روی دامنه‌ی مورد نظر و دیگری بر اعداد طبیعی (Barwise 1977, 42-44). باید در هر تعبیر دامنه‌ی "متغیرهای طبیعی" با اعداد طبیعی" یک‌ریخت باشد. در چنین زبان‌هایی توابع و متغیرهای طبیعی را می‌توان با بازگشت اولیه معرفی کرد. می‌توان نشان داد ω-زبان‌های مرتبه اول شامل همه‌ی نقص‌های زبان‌های مرتبه اول که بیان کردیم نیستند. برای مثال می‌توانند بستار مینیمال را معین کنند. اما خوش‌بنیادی در این زبان معین نمی‌شود. چون می‌توان ω-مدل‌هایی از ZFC یافت که خوش‌بنیاد نباشند. ω-زبان‌ها می‌توانند برای هر فرمول $\Phi(x)$ که تنها x در آن آزاد است بیان کند که مقدار Φ متناهی است. اگر نماد تابعی جدید f را (از اعداد طبیعی به دامنه) معرفی کنیم، آن‌گاه جمله‌ی

$$\forall n\, [\exists x\, (\Phi(x) \wedge \forall m < n\, (x \neq fm)) \to \Phi(fn) \wedge \forall m < n\, (fm \neq fn)] \wedge \exists n\, (\sim\Phi(fn) \vee \exists m < n (fn = fm))$$

توسط تعبیرهای بقیه‌ی نظریه که در آن Φ متناهی است، ارضا می‌شود.

می‌توان مقادیر نامتناهی و شمارای $\Phi(x)$ را نیز در این زبان‌ها بیان کرد. اگر g و h نمادهای تابعی جدید باشند، آن‌گاه جمله‌های

[67] intermediate
[68] Infinitary languages
[69] ω-languages

[۷۰] زبان‌هایی که شامل فرمول‌های نامتناهی باشند.

$\forall n\, \forall m\, (\Phi(gn) \wedge (m \neq n \rightarrow gn \neq gm))$ و $\forall x\, (\Phi(x) \rightarrow\ \exists n(hn = x))$

تنها به‌وسیله‌ی همه و تنها همه‌ی تعبیرهای بقیه‌ی نظریه که در آن مقدار Φ نامتناهی و شمارا است ارضا می‌شود. اما نمی‌توان دیگر اندازه‌ها را در این زبان‌ها بیان کرد، چراکه نسخه‌ی سمانتیکی قضیه‌ی لوونهایم اسکولم درمورد این زبان‌ها صدق می‌کند: برای یک ω-زبان (شمارا)، هر ساختاری که دامنه‌اش نامتناهی باشد یک زیرساختار معادل مقدماتی با آن دارد. اما قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به بالا درمورد ω-زبان‌ها صدق نمی‌کند. می‌توان دستگاه‌های اصل‌موضوعی قاطع از برخی ساختارهای شمارا داشت. به سادگی می‌توان اعداد طبیعی را تا حد یک‌ریختی در یک ω-زبان مرتبه اول داشت. حتی نظریه‌ی آنالیز حقیقی که در ω-زبان‌ها صورت‌بندی شود نسبت به نظریه‌ی آنالیز مرتبه اول بهتر است. ω-زبان‌هایی که متغیرهایی با دامنه‌ی شامل توابع از اعداد طبیعی به دامنه‌ی مورد نظر دارند، کاستی‌های بالا را ندارند و حتی می‌توانند نظریه مجموعه‌ها را طوری معین کنند که هر مدل آن خوش‌بنیاد و تحت زیرمجموعه‌های شمارا بسته باشد. مهمترین کاستی ω-زبان‌ها این است که اعداد طبیعی را پیش‌فرض می‌گیرند. بنابرین نمی‌توانند ساختار اعداد طبیعی را معین کنند. جذابیت آن‌ها این است که با مطالعه‌ی این زبان‌ها می‌توان فهمید کدام ساختارها به‌وسیله‌ی اعداد طبیعی معین می‌شوند. پس این زبان برای کسی که یک دستگاه اصل موضوعی قاطع حساب را پذیرفته است اما نسبت به دیگر دامنه‌ها شکاک است، مفید است.

آخرین زبان میانی، زبانی است که تنها شامل متغیرهای آزاد مرتبه دوم است. چنین زبانی مانند L از یک زبان مرتبه اول با اضافه کردن متغیرهای محمولی (آزاد) ... $X, Y,$ و متغیرهای ۱-تایی (آزاد) ... $f, g,$ و اصلاح قواعد ساخت متناظر بدست می‌آید. یک فرمول از زبان توسیع‌یافته‌ی L جمله نامیده می‌شود اگر هیچ متغیر آزاد مرتبه اولی نداشته باشد. اگر $\Phi(x_1, ..., x_n, f_1, ..., f_n)$ یک جمله باشد که متغیرهای مرتبه دوم آن مشخص شده‌اند و M یک تعبیر با دامنه‌ی d باشد، $M \vDash \Phi$ اگر M،Φ را تحت هر تخصیص از زیرمجموعه‌های d به متغیرهای x_i و توابع بر d به متغیرهای f_i برآورده کند. پس با Φ مانند یک فرمول، تنها با سورهای عمومی رفتار می‌شود (معادل با $\forall x_1 ... \forall x_n\, \forall f_1 ... \forall f_n\, \Phi$). چنین زبان‌هایی را زبان‌های مرتبه دوم فروکاسته (تقلیل‌یافته) می‌نامیم. زبان‌های مرتبه دوم فروکاسته با زبان‌های مرتبه دوم تفاوت‌های زیادی دارند، از جمله:

۱. تنها سورگذاری مجاز سور عمومی ابتدا است. یعنی سورهای عمومی که حوزه‌ی آن‌ها کل فرمول باشد.

۲. زبان‌های مرتبه دوم فروکاسته شامل متغیرهای تابعی یا محمولی n-تایی برای $n > 1$ نیستند.

۳. زبان‌های مرتبه دوم فروکاسته شامل ثابت‌های تابعی یا محمولی n-تایی برای $n > 1$ نیستند.[۷۱]

---

[۷۱] برای مطالعه‌ی بیشتر درمورد زبان‌های مشابه به Corcoran (1980, 192ff) مراجعه کنید.

مشاهده می‌شود دستگاه‌های مرتبه دوم فروکاسته هیچ‌یک از کاستی‌های دستگاه‌های مرتبه اول را ندارند. بستار مینیمال، تناهی و خوش‌بنیادی دستگاه‌های اصل‌موضوعی حساب، آنالیز حقیقی و نظریه مجموعه‌ها تنها مستلزم سورگذاری عمومی ابتدا هستند. جریانی وجود دارد که ادعا می‌کند زبان‌های مرتبه دوم فروکاسته برای نشان دادن کاربرد ریاضیات کافی هستند. اما (Kreisel 1961) ادعا می‌کند دستگاه‌های اصل‌موضوعی مرتبه سوم برای کفایت صورت‌بندی شاخه‌های ریاضیات نیاز است. شپیرو زبان‌های مرتبه دوم فروکاسته را یک "کران پایین" و نه کوچکترین کران زبان‌ها برای صورت‌بندی نظریه‌های ریاضی می‌داند.

یک جایگزین ممکن برای زبان‌های مرتبه دوم، صورت‌بندی نظریه‌های ریاضی در زبان نظریه مجموعه‌های مرتبه اول است. در حالت کلی برای هر نظریه‌ی T که در یک زبان مرتبه دوم به وسیله‌ی تعداد متناهی اصل موضوع صورت‌بندی شود، یک فرمول $T(x)$ از نظریه مجموعه‌های مرتبه اول وجود دارد که معادل است با "x مدل T است.". هر جمله‌ی Φ از زبان T را می‌توان به جمله‌ی $\Phi' = \forall x\, (T(x) \rightarrow \Phi_x)$ در زبان نظریه مجموعه‌ها ترجمه کرد که Φ_x از Φ به‌وسیله‌ی جایگزین کردن همه‌ی متغیرهای محمولی توسط متغیرهایی که دامنه‌ی آن‌ها زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی x است بدست می‌آید.

پس اگر Φ یک جمله در زبان T باشد، آن‌گاه Φ' یک جمله‌ی نظریه مجموعه‌ای معادل با "Φ در همه‌ی مدل‌های (نظریه مجموعه‌ای) T صادق است." می‌شود، چون سلسله مراتب نظریه مجموعه‌ای معمولا سمانتیک‌های زبان‌های مرتبه دوم را شامل می‌شود، Φ' معادل با "Φ نتیجه‌ی سمانتیکی T است" می‌شود. هم‌چنین تحت شرایط عادی باتوجه به قدرت نسبی دستگاه‌های استنتاجی می‌توان یک اثبات از Φ در T را به یک اثبات از Φ' در نظریه مجموعه‌ها ترجمه کرد. یعنی با توجه به زبان شیئی[72] اثبات‌ها، نظریه مجموعه‌های مرتبه اول می‌تواند هرچه نظریه مجموعه‌های مرتبه دوم انجام می‌دهد (حتی بیشتر)، انجام دهد. مفاهیم و همه‌ی ویژگی‌هایی که بیان کردیم را می‌توان در نظریه مجموعه‌های مرتبه اول معین کرد. برای مثال اگر b یک مجموعه و c یک مجموعه از توابع باشد، آن‌گاه "x بستار مینیمال b تحت عضوهای c است." را می‌توان به‌وسیله‌ی فرمول زیر معین کرد:

$$MC(b, c, x): \forall y\, ([b \subseteq y \wedge \forall z\, \forall s\, \forall w\, (z \in y \wedge s \in c \wedge \langle z, w\rangle \in s \rightarrow w \in y)] \rightarrow x \in y).$$

توجه کنید که $\forall b\, \forall c\, \exists! y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow MC(b, c, x))$ یک قضیه‌ی نظریه مجموعه‌ها است. یعنی اینکه برای هر b و c یک بستار مینیمال یکتای b تحت c وجود دارد، اثبات‌پذیر است. پس ممکن است به نظر برسد زبان‌های مرتبه اول، دوباره زنده شده‌اند؛ اما شپیرو می‌گوید هیچ صورت‌بندی از شاخه‌های ریاضیات در نظریه مجموعه‌های مرتبه اول کاربرد ریاضیات را نشان نمی‌دهد. برای یک دستگاه اصل موضوعی تنها نشان دادن

[72] Object language

قضیه‌های صحیح کافی نیست، درست بودن سمانتیک نیز نیاز است. برای این ادعا بسته به اینکه زبان پیش‌زمینه‌ی نظریه مجموعه‌های مرتبه اول تعبیرشده یا تعبیرنشده درنظر گرفته شود می‌توان استدلال کرد. اگر زبان را تعبیرشده در نظر بگیریم جملات بالا صوری و غیرواقعی به‌نظر می‌رسند و درمورد همه‌ی سمانتیک به‌کار نمی‌آیند. اگر زبان نظریه مجموعه‌ها را تعبیرشده درنظر بگیریم و M تعبیر موردنظر باشد، آن‌گاه این پرسش باقی می‌ماند که چگونه M فهمیده می‌شود و درمورد آن ارتباط برقرار می‌شود. به‌علاوه واضح است که پیش‌فرض‌های نظریه مجموعه‌های تعبیرشده از پیش‌فرض‌های سمانتیک‌های زبان‌های مرتبه دوم بیشتر هستند. برای مثال فرمول $N(x)$ از نظریه مجموعه‌ها را درنظر بگیرید که بیان کند "x مدل اعداد طبیعی است.". از این‌که حساب مرتبه دوم قاطع متناظر یک قضیه از نظریه مجموعه‌ها به فرم

$\forall x \forall y\,(N(x) \wedge N(y) \rightarrow$ (x و y یکریخت هستند)) نتیجه می‌شود برای هر مدل M از نظریه مجموعه‌های پیش‌زمینه، اگر a و b در دامنه‌ی M و $M \vDash N(a)$ و $M \vDash N(b)$، آن‌گاه $M \vDash$ (a و b یک‌ریخت هستند).)به بیان دیگر قضیه‌ی بالا مستلزم این است که در یک مدل از نظریه مجموعه‌ها، هر دو مجموعه‌ای که $N(x)$ را ارضا کنند (در آن مدل) یک‌ریخت باشند؛ نه هردو در یک مدل از نظریه مجموعه‌ها. به‌وسیله‌ی فشردگی نتیجه می‌شود اگر نظریه مجموعه‌ها سازگار باشد مدلی مانند M' با عضو b (از دامنه) وجود دارد، به‌طوری‌که $M' \vDash N(b)$؛ اما گردایه‌ی عضوهای M' از b با اعداد طبیعی یک‌ریخت نیست. این یک حالت از پارادوکس اسکولم است. پس صورت‌بندی نظریه‌های ریاضی دریک نظریه مجموعه‌های تعبیرنشده‌ی مرتبه اول تعابیری که موردنظر یا استاندارد نیستند را حذف نمی‌کند. چنین تعابیری در تعبیرهای نااستاندارد یا غیرموردنظر نظریه مجموعه‌های پیش‌زمینه اتفاق می‌افتند. پس شپیرو با اسکولم درمورد اینکه نتیجه، یک نسبیت گریزناپذیر همه‌ی مفاهیم ریاضی است، موافق است. با این حال او باور دارد چنین نسبیتی کاربرد ریاضی را بازتاب نمی‌دهد. درمورد حالتی که زبان پیش‌زمینه‌ی نظریه مجموعه‌ها تعبیرشده درنظر گرفته شود، مانند ω-زبان‌ها که این مشکل را داشتند که درک اعداد طبیعی را پیش‌فرض می‌گرفتند، این بیان که ساختار P به‌وسیله‌ی زبان نظریه مجموعه‌های تعبیر شده معین می‌شود مانند این است که بگوییم P را می‌توان تا حد M معین کرد. پس این مسئله که خود M را چگونه بفهمیم باز هم باقی می‌ماند و این دشوارتر از یافتن پاسخ این مسئله است که چگونه ساختار اعداد طبیعی و اعداد حقیقی و ... فهمیده می‌شوند یا درمورد آن‌ها ارتباط برقرار می‌شود. ممکن است پاسخ داده شود نیازی به معین کردن ساختار M نیست. کافیست M را یک مدل دل‌خواه از نظریه مجموعه‌های پیش‌زمینه درنظر بگیریم. اما واقعا هر مدل دل‌خواهی را نمی‌توان درنظر گرفت. M باید یک مدل استاندارد از نظریه مجموعه‌ها باشد تا دیگر مفاهیم وساختارها را به‌درستی معین کند. M حداقل باید خوش‌بنیاد و تحت زیرمجموعه‌های عضوهایش بسته باشد؛ ولی همان‌طور که می‌دانیم این‌ها مفاهیم مرتبه اول نیستند.

شپیرو پیش‌فرض‌های یک نظریه‌ای که در زبان مرتبه دوم صورت‌بندی می‌شود را با پیش‌فرض‌های همان نظریه که در زبان نظریه مجموعه‌های تعبیرشده صورت‌بندی می‌شود مقایسه می‌کند:

یک نظریه که در زبانی مرتبه دوم صورت‌بندی می‌شود، حداقل یک مدل را پیش‌فرض می‌گیرد. چون اگر یک نظریه مدل نداشته باشد هیچ موضوع ممکنی ندارد. تصور کسی که به مطالعه‌ی چیزی باور دارد که تعبیری ندارد سخت است. پس حساب یک ساختار شمارا با تابع تالی، آنالیز حقیقی یک میدان مرتب کامل از اندازه‌ی $2^{\aleph_0}$ و نظریه مجموعه‌ها یک سلسله مراتب به اندازه‌ی یک اندازه‌ی (حداقل) دسترس‌ناپذیر پیش‌فرض می‌گیرند. شپیرو مانند کواین برآن است که تعهدات هستی‌شناختی یک نظریه مقدار متغیرهایش هستند، پس نسخه‌ی مرتبه دوم یک نظریه‌ی T پیش‌فرض‌هایی بیش‌تر از نسخه‌های مرتبه اول دارد. نکته‌ی مهم این است که صورت‌بندی مرتبه دوم T تنها زیرمجموعه‌ها و توابع و روابط بر یک دامنه‌ای را که قبلا پیش‌فرض گرفته شده است، پیش‌فرض می‌گیرد. یک نظریه‌ی مرتبه دوم بدون نظریه مجموعه‌ها سلسله مراتب نظریه مجموعه‌ای را پیش‌فرض نمی‌گیرد. بنابرین پیش‌فرض‌های صورت‌بندی T در یک زبان تعبیرشده‌ی نظریه مجموعه‌ها خیلی بیش‌تر از پیش‌فرض‌های صورت‌بندی T در یک زبان مرتبه دوم است. فرض کنید M تعبیر داده شده‌ی نظریه مجموعه‌های پیش‌زمینه و d دامنه‌ی M باشد. هر عضو d با پذیرش تعبیرشده بودن زبان پیش‌زمینه پیش‌فرض، گرفته می‌شود. اگر مدل‌های استاندارد T نامتناهی باشند، آن‌گاه برای این‌که دامنه‌ی d برای T کافی باشد، باید شامل مجموعه‌ی نامتناهی c باشد. نظریه‌ی پیش‌زمینه شامل اصل موضوع (یا قضیه‌ی) مجموعه توانی است. پس تعهدات هستی‌شناختی نظریه مجموعه‌ای آن شامل مجموعه‌ی توانی c، مجموعه‌ی مجموعه‌ی توانی c و ... است. این فرآیند را تا بی‌نهایت می‌توان ادامه داد. در هر حال این پیش‌فرض‌ها بیش‌تر از حد نیاز در حساب، آنالیز حقیقی یا هر نظریه‌ی بدون نظریه مجموعه‌ها است. البته با وجود پیش‌فرض‌های بیش‌تر استفاده از یک زبان نظریه‌های پیش‌زمینه برای صورت‌بندی نظریه‌های ریاضی فوایدی هم دارد. مهم‌ترین فایده‌ی آن این است که برنامه‌ی نظریه مجموعه‌ای یک "بنیان" یکتا برای همه (یا بیش‌تر) ریاضیات فراهم می‌کند. این می‌تواند رابطه‌ی درونی شاخه‌های مختلف ریاضی را توضیح دهد و یک سمانتیک متداول برای شاخه‌های مختلف پیش‌فرض بگیرد. هنگامی‌که بنیان یک‌شکل باشد پیش‌فرض‌ها یک‌شکل هستند و شپیرو می‌گوید این مسئله‌ای غیرطبیعی است. به صورت غیرصوری پیش‌فرض‌های حساب کم‌تر از آنالیز حقیقی است چراکه حساب تنها به یک مجموعه‌ی شمارا (و به‌علاوه‌ی شاید زیرمجموعه‌های آن) تعهد دارد؛ ولی آنالیز به یک پیوستگی ناشمارا (و شاید زیرمجموعه‌های آن) تعهد دارد. میل به توجه به پیش‌فرض‌ها را در کارهای برخی ریاضی‌دانان به طور سربسته می‌توان دید و این میل در برنامه‌ی فراهم آوردن نظریه‌های جداگانه‌ی (مرتبه دوم) هر شاخه مشخص است.(Kriesel 1967, 151).

البته این‌که یک سمانتیک متداول برای زبان‌های گوناگون مرتبه دوم وجود دارد مورد پذیرش است؛ اما این نتیجه نمی دهد که این سمانتیک، پیش‌فرض‌ها و تعهدات مهمی دارد که به‌صورت یکسان درمورد هر نظریه‌ای

که در یک زبان مرتبه دوم صورت‌بندی می‌شود، به‌کار می‌رود. در هر صورت فرانظریه یا سمانتیک متداول زبان‌های مرتبه دوم از نظریه مجموعه‌های استاندارد مانند ZFC ضعیف‌تر است.

نتیجه‌ی اصلی این است که یک صورت‌بندی کافی از چنین شاخه‌های ریاضیات مانند حساب، آنالیز حقیقی و نظریه مجموعه‌ها باید (حداقل) شامل یک زبان مرتبه دوم باشد. شپیرو پیشنهاد می‌دهد منطق طبیعی پشت این شاخه‌ها (حداقل) مرتبه دوم است. در سال‌های اخیر تحقیقاتی برای نشان دادن این‌که منطق مرتبه دوم منطق نیست انجام شده است. برهان‌های آن‌ها معمولا برپایه‌ی پیش‌فرض‌های هستی‌شناختی منطق مرتبه دوم یا ویژگی‌های سمانتیکی نامناسب مانند ناتمامیت و نافشرده بودن آن است. شپیرو ادعا می‌کند داشتن منطقی فشرده با پیش‌فرض‌های کم‌تر مطلوب نیست. از نظر شپیرو هدف منطق مطالعه و نوشتن استنتاج‌های درست است. چون نمی‌توان استنتاج‌های منطق مرتبه دوم را به‌وسیله‌ی منطق مرتبه اول نوشت. پس منطق ریاضیات نمی‌تواند مرتبه اول باشد. پس شپیرو پیشنهاد می‌کند پیش‌فرض‌های منطق مرتبه دوم را باید بپذیریم.

تفاوت اصلی بین زبان مرتبه اول و دوم این است که L_2 متغیرهایی دارد که دامنه‌ی آن‌ها زیرمجموعه‌ی دامنه است، توابعی از دامنه به دامنه و ... . پس یک تعبیر L_1 تنها عضوهای دامنه را پیش‌فرض می‌گیرد، درحالی‌که L_2 زیرمجموعه‌ها، توابع و روابط را بر همان دامنه پیش‌فرض می‌گیرد. نتیجه‌ی نهایی شپیرو این است که به جای حذف زبان و منطق‌های مرتبه دوم تمایز بین ریاضیات و منطق ریاضیات را حذف کنیم. (Shapiro 1985, 730-739)

4-4 قضایای مشابه لوونهایم اسکولم

فرض کنید K مجموعه‌ای از ترم‌های غیرمنطقی و LK زبانی شامل L1K (زبان مرتبه اول) و سمانتیکی شامل مدل‌های =L1K باشد. تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

عدد لوونهایم برای LK :

کوچک‌ترین اندازه‌ی κ به‌طوری که برای هر فرمول ϕ از LK، اگر ϕ قابل ارضا شدن باشد، آن گاه ϕ مدلی دارد که دامنه‌اش حداکثر از اندازه‌ی κ است.

عدد لوونهایم مجموعه برای LK :

کوچک‌ترین اندازه‌ی κ به‌طوری که برای هر مجموعه‌ی Γ از فرمول‌های LK، اگر مدلی (و تناظری) وجود داشته باشد که هر عضو Γ را برآورده کند، آن گاه مدلی (و تناظری) وجود دارد که دامنه‌اش حداکثر اندازه‌ی κ دارد که هر عضو Γ را برآورده می‌کند.

عدد هانف برای LK :

کوچک‌ترین اندازه‌ی κ به‌طوری که برای هر فرمول ϕ از LK، اگر ϕ مدلی داشته باشد که دامنه‌اش حداقل از اندازه‌ی κ باشد، آن گاه هیچ کران بالایی بر مدل‌های κ نیست؛ به عبارت دیگر اگر ϕ مدلی از اندازه‌ی κ یا بزرگ‌تر داشته باشد، آن گاه برای هر اندازه‌ی δ، ϕ مدلی دارد که دامنه‌اش از اندازه‌ی حداقل δ است.

عدد هانف مجموعه برای LK :

کوچک‌ترین اندازه‌ی κ به‌طوری که برای هر مجموعه‌ی Γ از فرمول‌های LK، اگر مدلی (و تناظری) وجود داشته باشد که دامنه‌اش حداقل از اندازه‌ی κ باشد و هر عضو Γ را برآورده کند، آن گاه برای هر اندازه‌ی δ، مدلی (و تناظری) وجود دارد که دامنه‌اش حداقل اندازه‌ی δ دارد و هر عضو Γ را برآورده می‌کند.

قضیه: اگر گردایه ای از فرمول‌های LK تشکیل یک مجموعه دهند (نه یک کلاس سره) ، آن گاه LK دارای عدد لوونهایم، عدد لوونهایم مجموعه، عدد هانف و عدد هانف مجموعه است.

اثبات.

برای هر فرمول ϕ از LK، $L(\phi)$ را اندازه‌ی کوچک‌ترین مدل ϕ در نظر می‌گیریم به شرطی که ϕ قابل ارضا شدن باشد و در غیر این صورت تهی باشد. $H(\phi)$ را کوچک‌ترین کران بالای اندازه‌های مدل‌های ϕ در نظر می‌گیریم به شرطی که چنین کرانی وجود داشته باشد و در غیر این صورت $H(\phi)$ تهی باشد.به‌طور مشابه، برای هر مجموعه‌ی Γ از فرمول‌های LK، $L(\Gamma)$ را اندازه‌ی کوچک‌ترین مدل Γ در نظر می‌گیریم به شرطی که Γ قابل ارضا شدن باشد و $H(\Gamma)$ را کوچک‌ترین کران بالای اندازه‌های مدل‌های Γ در نظر بگیرید به شرطی که چنین کرانی وجود داشته باشد. در این صورت عدد لوونهایم LK کوچک‌ترین کران بالای

$\{L(\phi) \mid$ فرمول LK است. $\phi\}$، عدد لوونهایم مجموعه کوچک‌ترین کران بالای

$\{L(\Gamma) \mid$ مجموعه‌ای از فرمول‌های LK است. $\Gamma\}$، عدد هانف LK کوچک‌ترین اندازه‌ی اکیدا بزرگ‌تر از هر عضو $\{H(\phi) \mid$ فرمول LK است. $\phi\}$ و عدد هانف مجموعه‌ی LK کوچک‌ترین اندازه‌ی اکیدا بزرگ‌تر از هر عضو

$\{H(\Gamma) \mid$ مجموعه‌ای از فرمول‌های LK است. $\Gamma\}$ است. ■

اثبات این قضیه مستلزم استفاده‌ی نامحمولی از اصل موضوع جایگزینی است و به تمام ZFC نیاز دارد.

عدد لوونهایم برای L2K و زبان‌های مرتبه بالاتر مانند قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین و عدد هانف مانند قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به بالا برای L1K عمل می‌کند. چراکه به‌سادگی مشاهده می‌شود عدد هانف، عدد هانف مجموعه و عدد لوونهایم =L1k (و L1K) مرتبه اول همگی $\aleph_0$ هستند و عدد لوونهایم مجموعه‌ی =L1k بیشینه‌ی $\aleph_0$ و اندازه‌ی K است. این اعداد همان مقادیری هستند که در L1k به ازای آن‌ها قضایای لوونهایم اسکولم برقرار هستند. بنابرین چون طبق قضیه‌ی ۵٫۳٫۱ برای L2K یا زبان‌های مرتبه‌ی بالاتر این اعداد وجود دارند پس مشابه قضیه لوونهایم اسکولم را می‌توان برای زبان مرتبه دوم داشت.[۷۳] ویژگی داشتن اعداد هانف و لوونهایم نتیجه‌ی مستقیم قدرت بیانی زبان‌های مرتبه دوم است.

می‌توانیم پارادوکسی مشابه پارادوکس اسکولم را برای این زبان‌ها تعریف کنیم؛ بدین‌صورت‌که برای اندازه‌ای بزرگ‌تر از عدد لوونهایم L2K می‌توان مدلی یافت که اندازه‌ی آن عدد لوونهایم L2K باشد و آن مدل جمله‌ی "مجموعه‌ای با اندازه‌ی بزرگ‌تر از عدد لوونهایم L2K وجود دارد." را برآورده کند. می‌توان با رفتن به نظریه مجموعه‌های مرتبه بالاتر این پارادوکس را حل کرد؛ ولی برای نظریه مجموعه‌های مرتبه سوم نیز می‌توان همانند این پارادوکس را نوشت. این روند را می‌توان تا ابد ادامه داد. در این روند برای نظریه مجموعه‌های مرتبه‌ی nام، اندازه‌های بزرگ جدیدی وجود دارند که مدلی نااستاندارد خواهند داشت. گرچه ثابت می‌شود که منطق مرتبه‌ی سوم و بالاتر به‌معنایی تحویل‌پذیر به منطق مرتبه دوم هستند؛ ولی این تحویل کامل نیست. وجود این پارادوکس مشابه نتیجه می‌دهد شپیرو نمی‌تواند از پارادوکس اسکولم برای نشان دادن این‌که ساختارهای مرتبه دوم استاندارد بهترین گزینه برای مدل کردن کاربرد ریاضیات هستند، استفاده کند. شپیرو می‌تواند در دفاع از خود ادعا کند که این پارادوکس‌ها به‌اندازه‌ی پارادوکس کلاسیک مرتبه اول ارزش فلسفی ندارد؛ چراکه اندازه‌های بزرگ در مقایسه با ناشمارایی فرم کلاسیک در کاربرد ریاضیات کمتر نقش دارند. ما احساس می‌کنیم درمورد شمارایی و ناشمارایی شهود بیشتری داریم. گرچه اعداد لوونهایم و هانف L2K اندازه‌های بزرگ هستند و ما درمورد این اندازه‌ها شهودی نداریم. می‌توانیم به شپیرو این نقد را وارد کنیم که کاربرد ریاضیات بی‌تغییر باقی نمی‌ماند. ممکن است روزی اندازه‌های بزرگ هم مانند دیگر اندازه‌ها در کاربرد ریاضیات بااهمیت شوند و دراین‌صورت این پارادوکس‌های مشابه به‌هیچ‌وجه بی‌ارزش نیستند. پس منطق مرتبه دوم نمی‌تواند راه‌حل بی‌نقصی برای پارادوکس اسکولم باشد و هنوز نیاز به راه‌حلی برای ریشه‌کن کردن آن احساس می‌کنیم. چنین راه‌حلی باید پارادوکس را در همان منطق مرتبه

[۷۳] این اعداد برای زبان مرتبه دوم اندازه های بزرگ هستند. این اندازه ها از اولین اندازه دسترس ناپذیر و اولین اندازه ماهلو بزرگتر و متعلق به قلمرو اندازه های خیلی بزرگ هستند. بنابرین از اولین اندازه اندازه پذیر نیز بزرگ‌ترهستند. عدد لوونهایم زبان L2 کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی همه‌ی اندازه های مینیمال موضعی است.

اول حل کند(Shapiro 1991, 147-157). بیز ادعا می‌کند چنین راه‌حلی ارائه کرده است. در فصل بعدی آن را بیان می‌کنیم.

۵-۴ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری فصل چهارم

در این فصل دیدگاه افرادی را بیان کردیم که پارادوکس اسکولم را مشکل نظریه مجموعه‌های مرتبه اول می‌دانند و نظریه مجموعه‌های مرتبه دوم را راه حل آن در نظر می‌گیرند. مشکلاتی که عدم قاطعیت نظریه‌های مرتبه اول برای قدرت بیانی آن‌ها پیش می‌آورد را بررسی کردیم. نشان دادیم فرم کلاسیک پارادوکس اسکولم در نظریه مجموعه‌های مرتبه دوم پیش نمی‌آید. سپس پارادوکسی مشابه پارادوکس اسکولم را برای نظریه مجموعه‌های مرتبه دوم بیان کردیم و نشان دادیم نظریه‌های مرتبه دوم موفق به حل این فرم‌های پارادوکس نمی‌شوند. این نشان می‌دهد شپیرو نمی‌تواند از پارادوکس اسکولم برای نشان دادن این‌که ساختارهای مرتبه دوم استاندارد بهترین گزینه برای مدل کردن کاربرد ریاضیات هستند، استفاده کند.

فصل پنجم

بر ضد وجود پارادوکس اسکولم

در این فصل دیدگاه تیموتی بیز را بیان می‌کنیم که معتقد است پارادوکس اسکولم برای نظریه مجموعه‌های مرتبه اول هم چالش نیست. تفاوت دیدگاه بیز و شپیرو این است که شپیرو پارادوکس اسکولم و پارادوکس‌های مشابه آن را چالش نظریه‌های مرتبه اول تلقی می‌کند؛ گرچه بیز راه حل خود را در همان نظریه‌های مرتبه اول ارائه می‌دهد. (Bays 2000,4-40)

۵-۱ راه حل‌ها

۵-۱-۱ صورت‌بندی یک فرم ساده

بیز ابتدا یک فرم ساده از پارادوکس اسکولم را صورت‌بندی می‌کند:

۱. M یک مدل شمارای ZFC است.

۲. $\Omega(x)$ بیان می‌کند که "x ناشمارا است."

۳. $M \vDash \Omega[m^*]$

∴ ۴. m^* ناشمارا است.

۵. اگر M شمارا باشد آنگاه هر $m \in M$ شمارا است.

∴ ۶. m^* شمارا است.

در این فرم صدق مقدمات ۲ و ۵ و اعتبار استنتاج 1-3 سؤال برانگیز است. به نظر می‌رسد منظور ازینکه عضو $m^* \in M$ شمارا است این باشد که $\{x \mid M \vDash x \in m^*\}$ شمارا است. دلیل این در(Bays 2000, 4-11) به‌طور مفصل بحث شده است. پس می‌توان فرمی صحیح‌تر از پارادوکس ارائه کرد:

۱. M یک مدل شمارای ZFC است.

۲. $\Omega(x)$ بیان می‌کند که "x ناشمارا است."

۳. $M \vDash \Omega[m^*]$

$\therefore$ ۴. $\{x \mid M \vDash x \in_M m^*\}$ ناشمارا است.

۵. اگر M شمارا باشد آنگاه $\{x \mid M \vDash x \in_M m^*\}$ شمارا است.

$\therefore$ ۶. $\{x \mid M \vDash x \in_M m^*\}$ شمارا است.

به‌وضوح مقدمات ۱، ۳ و ۵ صادق هستند و استنتاج از ۱-۳ و ۵ به ۶ معتبر است. تنها باید صدق مقدمه‌ی ۲ و اعتبار استنتاج ۱-۳ به ۴ را بررسی کنیم.

اگر بخواهیم استنتاج ۱-۳ به ۴ معتبر باشد "بیان می‌کند" در مقدمه‌ی ۲ باید به‌قدری قوی باشد که شرط لازم زیر را برآورده کند:

(t) $\forall m\ m \in M\ [\ M \vDash \Omega[m] \Rightarrow$ ناشمارا است. $\{x \mid x \in_M m\}]$

این یک شرط کمینه است. دلایل قوی مبنی بر اینکه هیچ تعبیر ممکنی از "بیان می‌کند" نمی‌تواند هم از (t) حمایت کند و هم صادق باشد وجود دارند. چراکه همین که (t) به پارادوکس اسکولم منجر می‌شود برای رد کردنش کافی است. پس باید بررسی کنیم چرا به نظر می‌رسد که $\Omega(x)$ می‌گوید x ناشمارا است.

۵-۱-۲ قلب پارادوکس

می‌توان به‌جای مقدمه‌ی ۲ در برهان A یعنی "x ناشمارا است." معادل منطقی‌اش را نوشت. یعنی عبارتی که تنها از "مساوی است با"، "عضو ... است"، "اگر ... آن گاه" استفاده کند. با جایگزین کردن نمادهای ثوابت منطقی در این عبارت طولانی به چیزی می‌رسیم که آن را $\Omega_E(x)$[۱] می‌نامیم. $\Omega_E(x)$ یک عبارت کاملا زبانی است. از طرف دیگر می‌توانیم ناشمارایی را در یک مدل خاص در نظر بگیریم و به $\Omega(x)$ یک معناشناسی نظریه مدلی اختصاص دهیم، در این صورت برای مدل داده شده‌ی M این خوانش از $\Omega(x)$ را $\Omega_M(x)$[۲] نام‌گذاری می‌کنیم.

ابتدا نشان می‌دهیم اگر $\Omega(x)$ را $\Omega_E(x)$ در نظر بگیریم، مقدمه‌ی ۲ برهان A صادق می‌شود. سپس نشان می‌دهیم مقدمه‌ی ۳ معادل این است که $\Omega_M(x)$ صادق باشد و پس از آن با استفاده از این دو، پیش فرض فلسفی کلیدی پارادوکس اسکولم که همان رابطه‌ی بین معنای $\Omega_E(x)$ و $\Omega_M(x)$ است، به دست می‌آید:

---

[۱] E مخفف plain English است.
[۲] M مخفف Model theoretic است.

برای ادعای اولمان اگر "بیان می‌کند" را معادل بودن منطقی بدانیم، با توجه به اینکه "x ناشمارا است" و $\Omega_E(x)$ معادل تابع صدقی هستند با کمی چشم پوشی درمورد انتخاب کردن معادل‌های منطقی می‌توانیم در نظر بگیریم $\Omega_E(x)$ و "x ناشمارا است." یک چیز را بیان می‌کنند.

درمورد مقدمه‌ی ۳ استدلال A می‌توان نشان داد تناظری کامل بین شرایط صدق $\Omega_M(x)$ و $M \vDash \Omega(x)$ وجود دارد چراکه دامنه‌ی سورها در $\Omega_M(x)$ دامنه‌ی M در نظر گرفته می‌شوند و نماد عضویت در $\Omega_M(x)$ به معنای $\in_M$ است. برای هر عضو m از M

$\Omega_M(m) \Leftrightarrow M \vDash \Omega[m]$ صادق است.

با استفاده از معادل بودن $\Omega_M(x)$ و $M \vDash \Omega(x)$ و اینکه $\Omega_E(x)$ "بیان می‌کند" x ناشمارا است شرط (t) را بازنویسی می‌کنیم:

$$(t') \qquad \forall m\ m \in M\ [\Omega_M(m) \Rightarrow \Omega_E(\{x \mid x \in_M m\})].$$

(t') زمینه ساز پارادوکس اسکولم و رابطه‌ی بین $\Omega_E(x)$ و $\Omega_M(x)$ را نشان می‌دهد. به‌سادگی می‌توان نشان داد (t') شرط لازم و کافی صدق استدلال A و پیش‌فرض فلسفی کلیدی پارادوکس اسکولم است. (Bays 2000, 16-20)

۳-۱-۵ حل پارادوکس

بیز صدق (t') را بررسی می‌کند و برای نسخه‌ای از پارادوکس اسکولم در ۵-۱-۱ راه حلی ارائه می‌کند. به نظر می‌رسد دلیل اینکه (t') در ظاهر درست به نظر می‌رسد این است که $M \vDash ZFC$ چراکه اگر (t') را به مدل‌های دلخواه تعمیم دهیم مدل‌های بسیاری برای زبان نظریه مجموعه‌ها وجود دارند که شامل اشیائی به‌جز مجموعه‌ها هستند و به‌سادگی می‌توان برای این تعمیم مثال نقض پیدا کرد؛ گرچه متأسفانه اینکه M مدل ZFC است به‌تنهایی برای صدق (t') کافی نیست چراکه اگر تضعیف زیر از (t') را در نظر بگیریم،

$$(t'_{ZFC}) \quad \forall N\ [\ N \vDash ZFC \Rightarrow \forall n \in N\ [\ \Omega_N(n) \Rightarrow \Omega_E(\{x \mid x \in_N n\})]$$

اگر N مدلی شمارا برای ZFC باشد و اگر $n^* \in N$ باشد به‌طوری که $N \vDash \Omega[n^*]$ آنگاه $\Omega_N(n^*)$ صادق و $\Omega_E(\{n \mid n \in_N n\})$ کاذب است و در نتیجه (t'_{ZFC}) کاذب است. این مثال نشان می‌دهد (t') کاذب است. چون (t') یک شرط لازم برای همه‌ی نسخه‌های استدلال A است پس همه‌ی آن‌ها کاذب هستند. این حلی برای نسخه‌ی ذکر شده‌ی پارادوکس اسکولم است. تنها نکته‌ای که باقی می‌ماند این است که طرفداران پارادوکس

اسکولم به‌راحتی این استدلال را نمی‌پذیرند. پس باید توضیح داده شود که دقیقا چرا (t’) کاذب است. در این خصوص می‌توان دو دلیل ذکر کرد. نخست اینکه یک تفاوت بین سمانتیک $\Omega_E(x)$ و $\Omega_M(x)$ این است که سمانتیک $\Omega_E(x)$، سمانتیک زبان روزمره است که نوعی معنا است و در متن موجهاتی رفتار مشخص خود را دارد و تمایز بین دو معادل تابع صدقی را تشخیص می‌دهد، برعکس سمانتیک $\Omega_M(x)$ سمانتیک نظریه‌ی مدل است، کاملا مصداقی است و در متن موجهاتی رفتار متفاوتی دارد و نمی‌تواند تمایز دو جمله‌ی معادل تابع صدقی را تشخیص دهد. دوم اینکه $\Omega_E(x)$ و $\Omega_M(x)$ تمایزهای کاملا مصداقی در تعبیر نمادهایی که در آن‌ها به کار می‌روند دارند. سمانتیک $\Omega_E(x)$، نماد "$\in$" را این گونه تعبیر می‌کند:

E-$\in$: ”$x \in y$“ صادق است ا ت ا y مجموعه و x عضوی از y باشد.

و گرچه درمورد سمانتیک $\Omega_M(x)$:

M-$\in$: ”$x \in y$“ صادق است ا ت ا <x,y> عضو i_m باشد که i_m تابع تعبیر برای M است.

هیچ دلیلی وجود ندارد که این دو رابطه هم مصداق باشند. $\in_M$ می‌تواند برای گربه‌های خانگی هم تعریف شود!

مورد دیگر ”$\exists x$“ است که سمانتیک $\Omega_E(x)$ آن را "مجموعه‌ی xای وجود دارد به‌طوری که ..." تعبیر می‌کند، گرچه سمانتیک $\Omega_M(x)$ آن را توسط عبارت بازگشتی زیر تعبیر می‌کند:

$M \vDash \exists x\ \phi(x) \Leftrightarrow$ وجود دارد به‌طوری که $m \in M$

$$M \vDash \phi[m]$$

چون دامنه‌ی M نمی‌تواند جهان نظریه مجموعه‌ها باشد (M مدلی شمارا است.) پس این یک تفاوت سمانتیکی است. این تفاوت موجب ایجاد تفاوت‌های بسیاری بین $\Omega_E(x)$ و $\Omega_M(x)$ می‌گردد چون دو نماد ”$\exists x$“ و ”$\in$“ به دفعات زیادی در $\Omega_E(x)$ و $\Omega_M(x)$ به کار رفته‌اند؛ گرچه اینکه دقیقا تفاوت سمانتیکی در کدام یک از این نمادها موجب کذب (t’) می‌شود مسئله‌ی پیچیده‌ای است. (Bays 2000, 20-30)

۵-۱-۴ نسخه‌های پیچیده‌تر پارادوکس اسکولم

در اینجا سعی می‌کنیم با به کار بردن ریاضیات پیچیده‌تر، $\Omega_M(x)$ را به $\Omega_E(x)$ نزدیک‌تر کنیم. در این صورت به نسخه‌ای پیچیده‌تر از استدلال A می‌رسیم:

با استفاده از قضایای $T_1,\ldots,T_j$ مدل M به دست می‌آید به‌طوری که:

۱. M مدلی شمارا از ZFC است که دارای ویژگی‌های $P_1,\ldots,P_k$ است.

۲. $\Omega_E(x)$ بیان می‌کند "x ناشمارا است."

۳. $M \vDash \Omega[m^*]$

∴ ۴. $\{x \mid x \in_M m^*\}$ ناشمارا است.

۵. اگر M شمارا باشد و $m \in M$، آن گاه $\{x \mid x \in_M m\}$ نیز شمارا است.

∴ ۶. $\{x \mid x \in_M m^*\}$ شمارا است.

در این صورت شرط لازم و کافی صحت استدلال X

$$(t'_X) \qquad \forall m \in M\ [\Omega_M(m) \Rightarrow \Omega_E(\{x \mid x \in_M m\})].$$

است. در اینجا هم با دو برهان می‌توانیم نشان دهیم که (t'_X) کاذب است. اول اینکه خود m^* مثال نقضی برای (t'_X) می‌شود و دوم اینکه همین‌که (t'_X) زمینه‌ساز پارادوکس اسکولم است کذب آن را نشان می‌دهد؛ گرچه در اینجا باید به دو جنبه‌ی فلسفی جالب توجه استدلال‌هایی چون (X) توجه کنیم:

۱. نقش دقیق قضایای $T_1,\ldots,T_j$ و ویژگی‌های $P_1,\ldots,P_k$ در درست به نظر رسیدن (t'_X)، و

۲. اختلاف $\Omega_E(x)$ و $\Omega_M(x)$ با وجود حضور $P_1,\ldots,P_k$.

لازم به ذکر است در اینجا نظریه مجموعه‌های پیش فرض، ZFC + "اندازه‌ی دسترس ناپذیر κ وجود دارد." است.

۵-۱-۴-۱ تعدی

مدل M متعدی است اگر دامنه‌اش متعدی باشد (یعنی همه‌ی اعضای M مجموعه باشند و هر عضو از یک عضو M عضوی از M شود.) و عضویت در M همان عضویت حقیقی محدود به دامنه‌ی M باشد.

یک روش آسان برای به دست آوردن یک مدل متعدی ZFC توسط یک اندازه‌ی دسترس ناپذیر مانند κ است که $<V_\kappa, \in> \vDash ZFC$. نهایتا توسط لم فروریختگی موستووسکی[۱] مدل متعدی M که با N یک ریخت است، به دست می‌آید. از اینکه M و N معادل مقدماتی می‌شوند به دست می‌آید $M \vDash ZFC$. نسخه‌ای از

[۱] این لم به ما اجازه می‌دهد با داشتن هر مدل خوش بنیاد- یعنی هر مدلی که شامل $\in$-زنجیره‌ی نزولی نامتناهی نباشد-مدلی متعدی و یک ریخت با آن پیدا کنیم.

پارادوکس اسکولم که در این حالت به دست می‌آید را استدلال (T) می‌نامیم. چون M متعدی است به‌جای $\{y|\ y \in_M x\}$ از $\{y \mid y \in x\}$ استفاده می‌کنیم و این موجب می‌شود ناشمارایی طبیعی‌تر به نظر برسد. هم‌چنین استفاده از یک مدل متعدی مقداری از تفاوت سمانتیکی $\Omega_E(x)$ و $\Omega_M(x)$ کم می‌کند چراکه تعبیر "$\in$" برای M همان تعبیرش در زبان روزمره است. در واقع می‌توان نشان داد مدل M درمورد بسیاری چیزهای دیگر درست فکر می‌کند. رابطه‌ی R را برای مدل‌های متعدی مطلق می‌نامیم اگر فرمولی مانند $\Psi^R(x)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر مدل متعدی $N \vDash ZFC$ و هر $n^* \in N$:

$R \Leftrightarrow \Psi_E^R(n^*) \Leftrightarrow \Psi_N^R(n^*) \Leftrightarrow N \vDash \Psi^R(n^*).$ برای n^* برقرار باشد.

بنابر تعریف مدل‌های متعدی رابطه‌ی "عضو چیزی بودن" برای مدل‌های متعدی مطلق است. می‌توان نشان داد روابط زیر هم مطلق هستند:

- f یک تابع است؛ f پوشا است؛ f ۱-۱ است؛ f تناظر 1-1 و پوشا است.
- $x = \mathrm{Domain}(f)$ ؛ $x = \mathrm{Range}(f)$
- x متناهی است؛ x نامتناهی است؛x یک عدد ترتیبی است ؛ x یک عدد ترتیبی حدی است ؛ $x = \omega$.

در این جا سؤال این است که چرا این نتیجه درمورد $\Omega_M(x)$ و $\Omega_E(x)$ برقرار نمی‌شود. به‌راحتی می‌توان دید که این تفاوت به "$\exists x$" برمی گردد. تعدی حتی به ما اجازه می‌دهد بفهمیم کدام نمونه‌ی "$\exists x$" موجب تفاوت $\Omega_M(x)$ و $\Omega_E(x)$ می‌شود. مطلق بودن روابطی که ذکر کردیم موجب می‌شود "f تناظری ۱-۱ و پوشا بین x و ω است." هم مطلق شود. یعنی فرمول $\psi(f,x)$ در زبان نظریه مجموعه‌ها وجود دارد به‌طوری که برای هر $N \vDash ZFC$ متعدی و هر $n_1, n_2 \in N$

$\psi_E(n_1,n_2) \Leftrightarrow \psi_N(n_1,n_2)$ $\Leftrightarrow n_1$ تناظری ۱-۱ و پوشا بین n_2 و ω است.

داریم:

$$\Omega(x) \equiv_{df} \exists f\, \psi(f,x)$$

می‌دانیم $\Omega_M(x)$ و$\Omega_E(x)$ نماد "$\in$" را یکسان تعبیر می‌کنند و مطلق بودن $\psi(f,x)$ نتیجه می‌دهد $\psi_E(f,x)$ و $\psi_M(f,x)$ معادل هستند. پس سور بیرونی تنها دلیل کذب (t'_m) است. می‌دانیم $x = m^*$ مثال نقضی برای کذب (t'_M) $(\Omega_M(m^*) \Rightarrow \Omega_E(m^*))$ است. واضح است که:

۱. برای هر مجموعه‌ی f، $\psi_E(f,m^*)$ صادق است اگر و تنها اگر f تناظر ۱-۱ و پوشایی بین m^* و ψ باشد.

۲. برای هر $f \in M$، $\psi_E(f,m^*)$ صادق است ا ت ا $\psi_M(f,m^*)$ صادق باشد.

به‌علاوه این واقعیت که M شمارا است مستلزم شمارایی $\{ m \in M \mid m \in m^*\}$ می‌شود، یعنی واقعا تناظر $f^* : m^* \rightarrow \omega$ وجود دارد. این‌ها ربط سور بیرونی $\Omega(x)$ به کذب (t'_M) را نشان می‌دهند. چون تناظر

$f^* : m^* \rightarrow \omega$ واقعا وجود دارد و دامنه‌ی سور بیرونی $\Omega_E(m^*)$ جهان مجموعه‌ها است f^* را پیدا می‌کند و این سور "تشخیص می‌دهد" که $\psi_E(f,m^*)$ صادق است. در نتیجه $\Omega_E(m^*)$ کاذب می‌شود. برعکس، f^* یا هر تابع دیگر بین m^* و ω در دامنه‌ی M نیست. پس سور $\Omega_M(m^*)$، f ای که برای آن $\psi_M(f,m^*)$ صادق باشد پیدا نمی‌کند. پس $\Omega_M(m^*)$ صادق می‌شود. به بیان ساده‌تر می‌توان $\Omega_E(m^*)$ و $\Omega_M(m^*)$ را به ترتیب این گونه بازنویسی کرد:

(۱) f ای در جهان نظریه مجموعه‌ها وجود ندارد به‌طوری که $f : m^* \rightarrow \omega$ تناظر ۱-۱ و پوشا باشد.

(۲) $f \in M$ وجود ندارد به‌طوری که $f : m^* \rightarrow \omega$ تناظر ۱-۱ و پوشا باشد.

چون m^* واقعا شماراست تناظری میان m^* و ω وجود دارد پس (۱) کاذب می‌شود؛ گرچه (۲) کاذب نیست چراکه f مورد نظر در دامنه‌ی M یافت نمی‌شود. پس (t'_M) کاذب است.

۵-۱-۴-۲ مقدماتی بودن[1]

شاید تا اینجا تصور کنید که همه‌ی نسخه‌های پارادوکس اسکولم مشابه استدلال (T) حل می‌شوند، گرچه بااینکه تا وقتی M شمارا است تفسیر سورهای بیرونی $\Omega_E(x)$ (به ازای حداقل یک مجموعه) و $\Omega_M(x)$ (به ازای حداقل یک مجموعه در M) متفاوت است. سورهای بیرونی برای توضیح کامل پارادوکس اسکولم کافی نیستند. اکنون مدلی را بررسی می‌کنیم که در آن "توضیح" کذب (t'_M) گرچه به تعبیر سورها برمی‌گردد، مستلزم تعبیر سورهای بیرونی نیست. فرض کنید κ یک اندازه‌ی دسترس ناپذیر باشد و M یک زیرمدل مقدماتی شمارای V_κ باشد: ۱. به‌وضوح M یک مدل شمارای ZFC است و ۲. برای هر $\psi(x^*)$ در زبان نظریه مجموعه‌ها و هر

$$m^* \in M ،\ M \vDash \psi[m^*] \Leftrightarrow V_\kappa \vDash \psi[m^*]$$

ویژگی ۲ از این نظر جالب است که به درست به نظر رسیدن (t'_M) کمک می‌کند. در این مورد می‌توان گفت اول، اینکه M زیرمدل مقدماتی یک مدل متعدی است ما را مطمئن می‌کند که M شامل همه‌ی ویژگی‌های مطلق که در قسمت قبل بیان کردیم است. پس اگر $R(x^*)$ یک ویژگی مطلق برای مدل‌های متعدی باشد و

[1] Elementarity

$\Psi_E^R(x^*)$ فرمول شاهد مطلق بودنش باشد، آن‌گاه برای هر $m^* \in M$،

$R \Leftrightarrow \Psi_E^R(m^*) \Leftrightarrow V_\kappa \vDash \Psi^R[m^*] \Leftrightarrow \Psi_M^R(m^*)$ برای m^* برقرار است. (k)

دو دو شرطی اول از مطلق بودن R و دو شرطی سوم از اینکه $M \prec V_\kappa$ و دو شرطی آخر از تعریف $\vDash$ نتیجه گرفته می‌شود. دوم، اینکه κ دسترس ناپذیر است به ما اطمینان می‌دهد که ویژگی ناشمارا بودن برای V_κ مطلق است. یعنی برای هر $n \in V_\kappa$

$n \Leftrightarrow \Omega_E(n) \Leftrightarrow V_\kappa \vDash \Omega[n]$ ناشمارا است.

هنگامی که این موضوع را با نکته‌ی قبل ترکیب کنیم درمورد M به دست می‌آید: برای هر $m \in M$

$m \Leftrightarrow \Omega_E(m) \Leftrightarrow \Omega_M(m)$ ناشمارا است.

پس M ناشمارایی را درست می‌فهمد. این که M یک زیرمدل مقدماتی V_κ است همراه بااینکه "ناشمارا بودن" برای V_κ مطلق است به ما اطمینان می‌دهد که " ناشمارا بودن برای M نیز مطلق است." گرچه چرا این موضوع (t'_M) را به‌طور بدیهی صادق نمی‌کند؟ در این مورد دو نکته می‌توان گفت: اول، فرض کنید m^* عضوی از M باشد به‌طوری که $M \vDash \Omega[m^*]$. در اینجا برخلاف حالت متعدی، $m^* \neq \{m \mid m \in_M m^*\}$. (اگرچه هر $m' \in m^* \cap M$ در $\{m \mid m \in_M m^*\}$ است، تعدادی (ناشمارا!) $m' \in m^* \setminus M$ و بنابرین در $m^* \setminus \{m \mid m \in_M m^*\}$ وجود دارند.) پس دلیلی ندارد که فکر کنیم $\Omega_E(\{m \mid m \in_M m^*\})$ و $\Omega_E(m^*)$ معادل باشد و (t'_M) از دوشرطی‌های پاراگراف قبل به دست بیاید. باید ذکر کنیم که تفاوت بین $\Omega_M(m^*)$ و $\Omega_E(\{m \mid m \in_M m^*\})$ را نمی‌توان توسط تعبیرهای متفاوت سور وجودی بیرونی در $\Omega(x)$ توضیح داد. مطمئنا سورها در $\Omega_E(x)$ دامنه‌ی وسیع‌تری نسبت به $\Omega_M(x)$ دارند و برخی (ناشمارا !) از اشیا در این دامنه‌ی وسیع‌تر تناظرهای ۱-۱ و پوشا بین $\{m \mid m \in_M m^*\}$ و ω هستند؛ گرچه این چیزی نیست که تفاوت بین $\Omega_M(m^*)$ و $\Omega_E(\{m \mid m \in_M m^*\})$ را توضیح دهد. برای تحقیق این امر باید دلیلمان برای تصور اینکه سور بیرونی $\Omega(x)$ می‌تواند این تفاوت را توضیح دهد دوباره بررسی می‌کنیم: به ازای حداقل یک تابع خاص f (یا کلاسی از توابع $\mathfrak{T}$) که دارای ویژگی‌های زیر باشند:

۱. f در دامنه‌ی سور بیرونی $\Omega_E(\{m \mid m \in_M m^*\})$ قرار دارد.

۲. f در دامنه‌ی سور بیرونی $\Omega_M(m^*)$ قرار ندارد.

۳. $\Psi_E(f,\{m \mid m \in_M m^*\}$ صادق است.

۴. اگر f عضوی از M می‌بود، آن گاه $\Psi_M (f,m^*)$ درست بود.

پس می‌توان استدلال کرد که اگر سور بیرونی $\Omega_M(m^*)$ می‌توانست درمورد f بداند، $\Omega_E(\{m \mid m \in_M m^*\})$ و $\Omega_M(m^*)$ معادل می‌شوند.بنابرین می‌توان نتیجه گرفت که تفاوت در تعبیر سورهای بیرونی

$\Omega_E(\{m \mid m \in_M m^*\})$ و $\Omega_M(m^*)$ کذب (t'_M) را توضیح دهد. هرچند، درمورد M، یافتن اینکه این f نمایانگر چه چیزی است، مشکل است. از یک طرف، می‌توانیم در پی تناظر $f : m^* \to \omega$ باشیم. با استفاده از ویژگی‌های مطلق بودن M، f می‌تواند ویژگی ۴ را داشته باشد گرچه متأسفانه چنین تابعی نمی‌تواند ویژگی ۳ را داشته باشد. حتی بدتر، می‌توان به‌آسانی نشان داد که چنین f ای وجود ندارد!

می‌دانیم $\Omega_M(m^*) \Leftrightarrow m^*$ ناشمارا است.

پس این واقعیت که $M \vDash \Omega[m^*]$ به ما اطمینان می‌دهد که تناظر $f : m^* \to \omega$ وجود ندارد. این نکته همراه با این واقعیت که چنین f ای ویژگی ۳ را ارضا نمی‌کند نشان می‌دهد در پی چنین f ای بودن اشتباه است. از طرف دیگر می‌توانیم در پی تناظر $f : \{m \mid m \in_M m^*\} \to \omega$ باشیم. یافتن چنین تابعی آسان است و ویژگی‌های 1-3 را دارد گرچه دلیلی ندارد ویژگی ۴ را داشته باشد. چراکه ویژگی‌های مطلق بودن که باعث درست به نظر رسیدن (t'_M) می‌شدند نتیجه می‌دهند برای هر $f : \{m \mid m \in_M m^*\} \to \omega$ ،

$$\Psi_M (f,m^*) \Leftrightarrow m^* = \{m \mid m \in_M m^*\}$$

بنابرین به نظر می‌رسد اینکه $m^* \neq \{m \mid m \in_M m^*\}$ نتیجه می‌دهد $\Psi_M (f,m^*)$ حتی اگر f عضوی از M باشد صادق نیست. اگر این درست باشد به دنبال $f : \{m \mid m \in_M m^*\} \to \omega$ مانند دنبال $f : m^* \to \omega$ اشتباه است. پس در هیچ حالتی نمی‌توانیم تابع f ای که تأیید کننده‌ی این ادعا باشد که تفاوت‌های بین $\Omega_E(\{m \mid m \in_M m^*\})$ و $\Omega_M(m^*)$ توسط تعابیر متفاوت سور بیرونی $\Omega(x)$ به دست آید، پیدا کنیم. البته تفاوت‌های بین $\Omega_E(\{m \mid m \in_M m^*\})$ و $\Omega_M(m^*)$ توسط تعابیر متفاوتی که این جملات به سورهایشان می‌دهند توضیح داده می‌شود (چون $\Omega_M(x)$ و $\Omega_E(x)$ درمورد تعابیر دیگر نمادهای $\Omega(x)$ یعنی "$\in$"،"" و "$\to$" یکسان هستند.) گرچه سورهای موردنظر در فرمول $\Psi (f,x)$ هستند و در آغاز فرمول‌های $\Omega_M(x)$ و $\Omega_E(x)$ نیستند.

۳-۴-۱-۵ عضویت

در این قسمت هم مثالی می‌زنیم که نشان دهد همه‌ی نمونه‌های پارادوکس اسکولم توسط سورهای بیرونی تفسیر نمی‌شود. فرض کنید N مدلی متعدی و شمارا از ZFC باشد و m^* عضوی از N باشد به‌طوری که

$N \vDash \Omega[m^*]$ و n^* عضو دلخواهی از N باشد به‌طوری که $\mathrm{Rank}(n^*) > \mathrm{Rank}(m^*) + \omega$ باشد. با استفاده از این واقعیت که m^* شمارا است می‌توان تابع ۱-۱ و پوشای $f : m^* \rightarrow \omega$ را تعریف کرد و هم چنین

$\sigma: N \rightarrow (N\backslash\{n^*\}) \cup \{f\}$ و مقادیر σ به‌ازای $n \neq n^*$ برابر با n و به‌ازای $n=n^*$ برابر f باشند.

با استفاده از σ، مدل جدید M را تعریف می‌کنیم به‌طوری که $\mathrm{Domain}(M) = (N\backslash\{n^*\}) \cup \{f\}$ و σ

یک یکریختی بین N و M است. درمورد M داریم: اول، به دلیل یکریختی M و N، M یک مدل شمارای ZFC است. دوم، چون $\sigma : N \rightarrow M$ یک یکریختی است، $M \vDash \Omega[m^*]$ و سوم، اینکه M شمارا است نشان می‌دهد تناظر $f^* : m^* \rightarrow \omega$ وجود دارد به‌طوری‌که $f^* \notin M$. (چون ناشمارا تناظر بین m^* و ω وجود دارد که در دامنه‌ی شمارای M قرار ندارند.) چهارم، اینکه $f \in M$ بدین معناست که M حداقل دارای یک تابع شاهد برای شمارا بودنش است. هرچند ممکن است آن را تشخیص ندهند. نشان می‌دهیم کذب (t'_M) در اینجا نه به دلیل تعابیر متفاوت سور بیرونی وجودی $\Omega(x)$، بلکه به دلیل تعابیر متفاوت "∈" در $\Psi(f,x)$ است. ابتدا چون

$M \vDash \Omega[m^*]$، $\Psi_M(f,m^*)$ باید کاذب باشد. برعکس، چون f تناظری بین m^* و ω است $\Psi_E(f,m^*)$ صادق است. این‌ها به‌علاوه‌ی اینکه $\Omega_M(x)$ و $\Omega_E(x)$ درمورد f می‌دانیم (f در دامنه‌ی سورهای $\Omega_M(x)$ و $\Omega_E(x)$ است) نتیجه می‌دهد هر تفاوت بین $\Omega_M(x)$ و $\Omega_E(x)$ باید در $\Psi(f,m^*)$ باشد. حال $\Psi(f,x)$ را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم:

$$\Psi(f,x) \equiv_{df} \forall x \in f\,[\, x \in m^* \times \omega \,] \wedge \forall x \in m^*\, \exists! y \in \omega\,[\, \langle x,y \rangle \in f] \wedge \forall y \in \omega\, \exists! x \in m^* [\, \langle x,y \rangle \in f \,]$$

بسیاری از زیرفرمول‌های این فرمول را می‌توان با $\Psi_E(f,m^*)$ و $\Psi_M(f,m^*)$ تعبیر کرد. این زیرفرمول‌ها بین V و M مطلق هستند. در حالت خاص، برای هر مجموعه‌ی S

1. $s \in m^* \Leftrightarrow M \vDash s \in m^*$

2. $s \in \omega \Leftrightarrow M \vDash s \in \omega$

3. $s \in m^* \times \omega \Leftrightarrow M \vDash s \in m^* \times \omega$

4. $[(s'' \in \omega, S' \in m^*) \Rightarrow (s = \langle s_1,s_2 \rangle)] \Leftrightarrow M \vDash s = \langle s_1,s_2 \rangle$

نهایتا مشاهده می‌کنیم که هر $s \in m^* \cup \omega \cup m^* \times \omega \cup n^*$ در دامنه‌ی سورهای هر دوی $\Psi_E(f,m^*)$ و $\Psi_M(f,m^*)$ است.[۱] پس تنها تفاوتی که $\Psi_E(f,m^*)$ و $\Psi_M(f,m^*)$ می‌توانند داشته باشند تعبیر آن‌ها از

---

[۱] برای مشاهده‌ی جزئیات بیشتر راه‌حل این حالت به(Bays 2000, 40-47) مراجعه کنید.

“$x \in f$” است. به دلیل این‌که تنها تفاوت است، می‌تواند تفاوت صدق Ψ_E (f,m*) و Ψ_M (f,m*) را توضیح دهد.

۵-۲ راه حل بقیه‌ی فرم‌ها

۵-۲-۱ پارادوکس اسکولم برای اصل موضوع مجموعه توانی

اکنون راه حل بیز را برای یک فرم دیگر از پارادوکس صورت‌بندی می‌کنیم:

فرض کنید M مدلی متعدی و شمارا از ZFC باشد.*x را مجموعه‌ای دلخواه و نامتناهی در نظر بگیرید. در این صورت می‌توانیم مشابه استدلال T را بنویسیم:

۱. M مدلی شمارا و متعدی از ZFC است.

۲. $\Omega_E(P_x)$ بیان می‌کند "P مجموعه‌ی توانی x است."

۳. $M \vDash \Omega[P_{x^*}]$

∴ ۴. $\{p \mid p \in_M P_{x^*}\}$ مجموعه‌ی توانی *x است.

۵. اگر M شمارا باشد و $P_{x^*} \in M$ ، آن‌گاه $\{p \mid p \in_M P_{x^*}\}$ شمارا است. پس $\{p \mid p \in_M P_{x^*}\}$ مجموعه‌ی توانی *x نیست.

۶∴. $\{p \mid p \in_M P_{x^*}\}$ مجموعه‌ی توانی *x نیست.

حل:

(t'_T) به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$(t'_T) \quad \forall x \in M\, [\Omega_M(P_x) \Rightarrow \Omega_E(\{p \mid p \in_M P_x\})].$$

برای اینکه نشان دهیم (t'_T) کاذب است مانند قبل باید نشان دهیم $\Omega_M(P_x)$ و $\Omega_E(\{p \mid p \in_M P_x\})$ تفاوت سمانتیکی دارند. مانند ۴,۲,۴,۱ چون M متعدی است رابطه‌ی عضویت یک مدل متعدی همان رابطه‌ی عضویت معمولی است. پس طبق تعریف، رابطه‌ی $\subseteq$ نیز همان رابطه‌ی زیرمجموعه‌ی معمولی می‌شود. همان‌طور که قبلا بیان کردیم مدل‌های متعدی، بسیاری از مفاهیم را "می‌دانند". پس تفاوت سمانتیکی $\Omega_M(P_x)$ و $\Omega_E(P_x)$ باید

در سور بیرونی فرمول $\forall z\ (z \subseteq x \leftrightarrow z \in P_x)$ باشد. قسمتی از این فرمول که شامل سور نیست برای مدل متعدی مطلق می‌شود و آن را با $\psi(x,z)$ نشان می‌دهیم.$\psi\ (x,z)$ بیان می‌کند $z \subseteq x$ است اگر و تنها اگر $z \in P_x$ باشد.

پس $\Omega(P_x) \equiv_{df} \forall z\ \psi(x,z)$.

مطلق بودن $\psi\ (x,z)$ نتیجه می‌دهد $\psi_E\ (x,z)$ و $\psi_M\ (x,z)$ معادل هستند. پس سور بیرونی تنها دلیل کذب (t'_T) است. چراکه :

۱. برای هر مجموعه‌ی z، $\psi_E\ (x,z)$ صادق است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی x، عضوی از P_x باشد.

۲. برای هر $z \in M$، $\psi_E\ (x,z)$ صادق است اگر و تنها اگر $\psi_M\ (x,z)$ صادق باشد.

دامنه‌ی سور بیرونی $\Omega_E(P_x)$ جهان مجموعه‌ها است. پس سور $\forall$ همه‌ی زیرمجموعه‌های x را می‌بیند و سور، درستی $\psi_E\ (x,z)$ را تشخیص می‌دهد. پس $\Omega_E(P_x)$ صادق می‌شود. برعکس، می‌توان z ای مثال زد که در دامنه‌ی M نباشد چراکه M شمارا است. پس سور در $\Omega_M(P_x)$ موفق به تشخیص بعضی از z ها که برای آن‌ها $\psi_M\ (x,z)$ صادق باشد، نمی‌شود. بنابرین $\Omega_M(P_x)$ کاذب است.

۵-۳ دو اعتراض فلسفی به راه حل بیز

در این بخش نقدهایی که به راه حل بیز شده‌اند را بیان می‌کنیم:

۵-۳-۱ زیاده گویی خام[1]

یک اعتراض به راه حل بیز این است که $\Omega_E(x)$ را دارای سمانتیک معین فرض می‌کند. زیرفرمول‌های آن مانند "مجموعه‌ی x وجود دارد به‌طوری که ..."، "x عضو y است." و ... فرض می‌گیرند که به عضویت واقعی دلالت دارند. در این صورت اینکه راه حل بیز قابل فهم بودن ریاضیات روزمره درمورد مجموعه‌ها، کلاس‌ها، عضو بودن یا نبودن و مجموعه‌های شمارا و ناشمارا را فرض می‌گیرد. این اعتراض به هر راه حلی از پارادوکس اسکولم که با نظریه مجموعه‌های کلاسیک آغاز کند و پس از آن بر ضد پارادوکس اسکولم استفاده کند وارد است.

[1] Naïve prattle

همان طور که در فصل سوم گفتیم اینکه در حل پارادوکس اسکولم مقدار زیادی از ریاضیات شهودی را فرض کنیم "افلاطون گرایی" نامیده می‌شود و در فصل دوم برهان‌های کلنک و توماس را به‌طور مفصل برعلیه این موضع بررسی کردیم.

اعتراضی دیگر به ریاضیات شهودی از آن کریسپین رایت است. رایت به پیروی از مایکل دامت استدلال می‌کند که اهمیت ترم‌های زبان معمولی را باید از طریق کاربرد این زبان فهمید. به قول ویتگنشتاین "معنی از کاربرد فراتر نمی‌رود." معلوم نیست زبان نظریه مجموعه‌ها (چه صوری و چه غیرصوری) بتواند آن قدر غنی باشد که یک تعبیر یکتا برای زبان غیرصوری به دست دهد.

حال راه دیگری را برای زیر سؤال بردن تعین سمانتیک $\Omega_E(x)$ بررسی می‌کنیم که برخلاف دیگر استدلال‌ها مستلزم شکاکیت در مورد زبان ریاضیات نیست، بلکه تنها مستلزم نگرانی‌هایی تاریخی درمورد زبان نظریه مجموعه‌ها است. مثلا نظریه مجموعه‌ها به اینکه "در تناقض به دنیا آمده است" معروف است. پارادوکس‌های راسل، کونیگ، ریچارد و بورالی-فورتی مشهورترین تناقض‌های کاربردی شهودی نظریه مجموعه‌ها است. این تناقض‌ها موجب می‌شوند به راه حل‌های پارادوکس اسکولم که به زبان معمولی ریاضی درمورد "همه‌ی مجموعه‌ها" و یا مجموعه‌های "واقعا ناشمارا" حرف می‌زنند شک کنیم. دوم، پاسخ به این تناقض‌ها اغلب مستلزم پذیرش نسخه‌های رقیب و در بسیاری موارد ناسازگار از نظریه مجموعه‌ها است. مثلا راسل نظریه‌ی انواع را پذیرفت. برخی نظریه مجموعه دان ها اصل‌بندی زرملو از نظریه مجموعه‌ها را پذیرفتند در حالی که برخی دیگر اصول‌موضوعه‌ی کواین یا ونگ را پذیرفتند. این که همه‌ی این نظریه‌ها به‌عنوان توضیحی از درک شهودی ما از نظریه مجموعه‌ها آغاز می‌کنند و به نقطه‌های کاملا متفاوتی می‌رسند می‌تواند به این رهنمون شود که مفهوم معین "زبان روزمره‌ای" از مجموعه وجود ندارد. سوم، حتی درصورت همراه شدن با اکثریت و پذیرفتن اصل‌بندی زرملو، این واقعیت که این صورت‌بندی بسیاری از مسائل پایه‌ای درمورد جهان نظریه مجموعه‌ها را تصمیم‌ناپذیر باقی می‌گذارد، نگرانی‌هایی درمورد تعین زبان نظریه مجموعه‌ها ایجاد می‌کند. مثلا اینکه ZFC نمی‌تواند معین کند که آیا همه‌ی مجموعه‌ها "ساخت پذیر" هستند (صحت اصل موضوع V=L) درمورد درک ما از مفهوم "همه‌ی مجموعه‌ها" نگرانی ایجاد می‌کند. یا مثلا ZFC نمی‌تواند به سؤالات اساسی درمورد "نهایت" جهان نظریه مجموعه‌ای پاسخ دهد و در آخر این که ZFC سؤالات درمورد اندازه را باز باقی می‌گذارد که این تعین صحبت روزمره درمورد مطلق بودن اندازه را زیر سؤال می‌برد.

پس در نتیجه اینکه بتوانیم پارادوکس اسکولم را تنها با این فرض که جملاتی مانند $\Omega_E(x)$ دارای سمانتیک معینی هستند و می‌توان با استفاده از تحلیلی صریح از این سمانتیک ها پارادوکس را حل کنیم ناپخته به نظر می‌رسد.

تذکر. همانند دانستن پارادوکس در نظریه مجموعه‌ها ودیگر نظریه‌ها مانند حساب با منطق اشتباه است. منطق مانند نظریه مجموعه‌ها یا حساب، مدل استاندارد یا نااستاندارد ندارد. به کاربردن اصطلاح *تعبیر منطق* کاذب است. هر چیزی می‌تواند به‌درستی تعبیری از آن باشد. پس پارادوکس‌های اسکولمی که برای منطق نوشتیم ارزش فلسفی ندارند.

ارزش فلسفی فرم خوش‌ترتیبی پارادوکس اسکولم نظریه اعداد با پارادوکس‌های اسکولم نظریه مجموعه‌ها برابر است؛ گرچه بیز می‌گوید ریاضی‌دانان ارزش فلسفی پارادوکس اسکولم کلاسیک را بیشتر از بقیه‌ی فرم‌ها مانند تناهی می‌دانند. بخشی از دلیل این ادعا این است که برهان‌های ضد ریاضیات شهودی که در بالا بیان شد بیشتر بر تاریخ نظریه مجموعه‌ها تمرکز دارند، نه بر کل تاریخ ریاضیات. برای نمونه به سادگی می‌توان نشان داد هیچ گردایه‌ی جملاتی مانند Γ وجود ندارد به‌طوری‌که برای هر مدل M،

$M \vDash \Gamma \iff$ M متناهی است.

به طور مشابه، هر اصل‌بندی از نظریه مجموعه‌ها را که درنظربگیریم نشان دادن این‌که هیچ فرمولی مانند $\Omega_f(x)$ وجود ندارد به‌طوری‌که برای هر $M \vDash \Gamma$ و هر $m^* \in M$

$M \vDash \Omega_f(m^*) \iff$ $\{m \in M | M \vDash m \in m^*\}$ متناهی است.

نیز دشوار نیست؛ اما خود بیز پاسخ می‌دهد هنگامی‌که نگرانی‌ها درمورد پارادوکس اسکولم از استدلال‌های کلی برضد تعین[1] زبان ریاضیات سرچشمه بگیرند، این نگرانی‌ها می‌توانند علاوه بر "شمارایی" شامل فرم‌های دیگر مانند "تناهی" نیز شوند. دلیل دیگر مهم‌تر بودن فرم کلاسیک از دیدگاه بیز این است که به‌راحتی می‌توان بین "تناهی" به معنای شهودی و معنایی که به‌وسیله‌ی فرمولی مانند $\Omega_f(x)$ به‌دست می‌آید، تمایز گذاشت. چون درمورد معنای شهودی و روزمره‌ی "متناهی" شکی نداریم که با آن آغاز کنیم و درمورد آن بحث کنیم؛ ولی درمورد شمارایی این‌گونه نیست. "شمارایی" مفهومی مربوط به پارادایم نظریه مجموعه‌ای است و استدلالی که بیان کردیم نگرانی‌هایی درمورد تعین نظریه مجموعه‌های "شهودی" برمی‌انگیزد. بیز به فرم‌های غیرکلاسیک پارادوکس اسکولم به‌جای پارادوکس، معما[2] می‌گوید. می‌توانیم به استدلال بیز این نقد را وارد کنیم که فرم تناهی نیز مانند فرم کلاسیک ظاهرا تناقض دو قضیه را نشان می‌دهد. پارادوکس اسکولم کلاسیک تناقض قضیه‌ی کانتور و قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین و فرم تناهی تناقض گزاره‌ی متناهی بودن دامنه و قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به بالا، خوش‌ترتیبی تناقض قضیه‌ی WO و قضیه‌ی فشردگی رو به بالا است. از طرف دیگر خوش ترتیبی نیز مفهومی وابسته به پارادایم حساب است.

---

[1] determinacy
[2] puzzle

۵-۳-۲ پاسخ بیز

نخستین و کم‌رضایت‌بخش‌ترین راه این است که به هر یک از استدلال‌های پیشین تک‌تک جواب دهیم. برای مثال می‌توان جریان تاریخی مقابلی مثال زد که نظریه مجموعه‌ها از منظر آن پایدارتر به نظر برسد یا مثلا به کلنک این نقد را وارد کنیم که رابطه‌ی بین ریاضیات صوری و شهودی را اشتباه فهمیده است یا استدلال کنیم که پیش فرض‌های رایت اشتباه است.

پاسخی رضایت بخش تر آن است که برای نظریه مجموعه‌های زبان روزمره سمانتیکی دقیق تهیه کنیم. بدین منظور باید اول رویکردی روشن درمورد آنچه جهان نظریه مجموعه‌ای از آن تشکیل شده است یعنی هستی شناسی و متافیزیک روشنی برای نظریه مجموعه‌ها ارائه شود و سپس باید توضیح داده شود چگونه عبارات زبان روزمره مانند "همه‌ی مجموعه‌ها" و "عضو چیزی بودن" به این جهان مربوط می‌شوند؛ گرچه پیچیدگی این راه حل نشان گر این است که لازم نیست همه‌ی این‌ها را به دست آوریم فقط برای اینکه پارادوکس اسکولم را حل کنیم.

این ما را به پاسخ سوم می‌رساند. به نظر بیز، لازم نیست به آن استدلال‌ها پاسخ دهیم چراکه نکته‌ی مهم پارادوکس اسکولم این بود که ناسازگاری در روش‌های متعارف و روزمره‌ی درک نظریه‌ی مجموعه‌ها را نشان می‌داد. به عبارت دیگر نشان می‌داد بین درک متعارف قضیه‌ی کانتور و نمونه‌هایی از قضایای لوونهایم-اسکولم تعارض وجود دارد. چون نمی‌توان قضایای لوونهایم-اسکولم را زیر سؤال برد پس باید از گفتگوی متعارف درمورد "مجموعه‌های مطلقا ناشمارا" اجتناب کرد. ترتیب استدلال این گونه است که با درکی متعارف درمورد قضیه‌ی کانتور آغاز می‌کند و می‌فهمد شهود ابتدایی ما سؤال بر انگیز است پس نتیجه می‌گیرد باید از نظریه مجموعه‌های زبان روزمره اجتناب کنیم.

استدلال زیاده گویی خام ترتیب استدلال قبلی را عوض می‌کند. یعنی به‌جای شروع با پارادوکس اسکولم و استفاده از آن برای اینکه نشان دهد نظریه مجموعه‌های روزمره مشکل دارد، با رد نظریه مجموعه‌های روزمره آغاز می‌کند و از این برای تقویت کردن پارادوکس اسکولم بهره می‌برد.

پارادوکس اسکولم $\Leftarrow$ نظریه مجموعه‌های روزمره قابل قبول نیست.

استدلال‌های گوناگون $\Leftarrow$ نظریه مجموعه‌های روزمره قابل قبول نیست.

$\Leftarrow$ پارادوکس اسکولم کار می‌کند.

⇐ نظریه مجموعه‌های زبان روزمره قابل قبول نیست.

به‌وضوح استدلال دوم به‌اندازه‌ی استدلال اول مؤثر نیست. پس استدلال زیاده گویی شهودی پارادوکس اسکولم را زائد نشان می‌دهد و هم چنین به نظر می‌رسد مستلزم این است که قبل از این که بتوانیم، ملزم باشیم همه‌ی مسائل نظریه مجموعه‌های روزمره را حل کنیم. پس به پیشنهاد بیز این نقد را کنار می‌گذاریم.

برای حل پارادوکس اسکولم تنها نیاز است که نشان دهیم بین نظریه مجموعه‌های روزمره و قضایای لوونهایم-اسکولم تعارضی وجود ندارد و برای نشان دادن آن می‌توانیم هر قدر که نیاز داشته باشیم از نظریه مجموعه‌های روزمره استفاده کنیم. نیازی نیست ابتدا از این نظریه مجموعه‌ها دفاع کنیم یا به نقدهای آن پاسخ بگوییم. تا زمانی که قضایای لوونهایم-اسکولم با نظریه مجموعه‌هایمان دچار تناقض نمی‌شوند، هر آن چه برای حل پارادوکس اسکولم لازم بوده است را انجام داده‌ایم.

۵-۳-۳ اصول‌موضوعه و محتوای ریاضی

دومین اعتراض به راه حل بیز این است که به دلایل تاریخی و فلسفی، محتوای سمانتیکی نظریه مجموعه‌های زبان روزمره با نظریه مدل مرتبه اول این همان است و این نتیجه می‌دهد سمانتیک $\Omega_E(x)$ و $\Omega_M(x)$ یکسان است در نتیجه (t'_M) صادق می‌شود و استدلال (A) درست است.

بیز نشان می‌دهد قسمت اول این استدلال صادق نیست.

۵-۳-۳-۱ اصول‌موضوعه و تعاریف ضمنی

دو نوع دلیل برای این ادعا که سمانتیک $\Omega_E(x)$ بتواند به نظریه مدل مربوط شود می‌توان در نظر گرفت که هر دو مستلزم نقشی هستند که اصول‌موضوعه در صوری کردن و وضوح بخشیدن به مفاهیم ریاضی بازی می‌کنند. دلیل اول مستلزم بررسی این نقش از دیدگاهی تاریخی است. مثلا اصل‌بندی زرملو پاسخی به اثبات کونیگ مبنی بر اینکه مجموعه‌ی اعداد حقیقی نمی‌تواند خوش ترتیب شود، بود یا اصل‌بندی کواین به‌منظور این بود که نشان دهد مجموعه‌ای جهانی وجود دارد. نقشی که ZFC در شکل دادن به مفهوم مجموعه دارد گواهی دیگر بر این مدعا است.

دقت مفاهیم ریاضی را می‌توان به استفاده از اصل‌بندی در ریاضیات نسبت داد چراکه با اصول‌موضوعه به مفاهیم پایه‌ای و قواعد وضوح می‌بخشیم و برای مفاهیم کمتر پایه‌ای دستگاه، نماد گذاری تعریف می‌کنیم. دستگاه استانداردی برای اثبات طراحی می‌کنیم و روشی برای پیدا کردن خطاهای استدلال معرفی می‌کنیم.

این موضوع که نظریه مجموعه‌ها یک دستگاه دقیق ریاضی است به نظر به ما اطمینان می‌بخشد که عباراتی مانند "مجموعه" و "عضویت" توسط اصول‌موضوعه فهمیده می‌شوند. پس اصول‌موضوعه باید محتوای حقیقی زبان نظریه مجموعه‌ها را نشان دهند.

این استدلال تضادی بین نظریه مجموعه‌های اصل‌موضوعی و نظریه مجموعه‌های روزمره نشان نمی‌دهد. در واقع اگر استدلال‌ها درست باشند، نشان می‌دهند بحث‌های روزمره درمورد مجموعه‌ها تنها مخفف عبارات صوری و پیچیده‌ی نظریه مجموعه‌های اصل‌موضوعی است.

۵-۳-۳-۲ چرا نظریه مدل؟

به اینکه بتوانیم از این ادعا که اصول‌موضوعه تشکیل دهنده‌ی تصورات روزمره‌ی ما از مجموعه‌ها هستند به این برسیم که در حقیقت نظریه‌ی مدل این اصول‌موضوعه است که نقش تشکیل دادن مفاهیم را برعهده دارد این دو نقد وارد است:

نخست، اگر استدلال‌هایی که به نفع این هستند که اصول‌موضوعه مفاهیمی مانند "مجموعه" را معین می‌کنند را بررسی کنیم در می‌یابیم این استدلال‌ها بیشتر با ویژگی‌های نظریه اثباتی اصول‌موضوعه سروکار دارند، نه ویژگی‌های نظریه مدلی. مثلا با نگاه به آنچه ZFC می‌تواند یا نمی‌تواند اثبات کند که متوجه می‌شویم ZFC پارادوکس‌های راسل، کونیگ و بورالی-فورتی را تولید نمی‌کنند. هم چنین ویژگی‌های نظریه اثباتی اصول‌موضوعه هستند که دقت ریاضی را توضیح می‌دهند. به عبارت دیگر تنها این فرض که اصول‌موضوعه در معین کردن محتوای مفاهیمی مانند "مجموعه" نقش دارند نشان نمی‌دهد که فرآیند نظریه مدلی خاصی هست که توسط آن این تعیین انجام می‌گیرد. پس حتی باید درمورد اینکه نقش اصول‌موضوعه در ریاضیات پشتیبان پارادوکس اسکولم است، شکاک شویم.

دوم، حتی اگر اصول‌موضوعه محتوای نظریه مجموعه‌ها را از طریق نظریه مدلشان تعیین کند دلیلی ندارد فکر کنیم نظریه مدل *مرتبه اول* آن‌ها است که این کار را می‌کند.

پس به‌نظر می‌رسد اسکولمی‌ها نمی‌توانند از پارادوکس اسکولم نتیجه بگیرند که مجموعه‌های ناشمارا واقعا وجود ندارند و برای این ادعای خود باید برهان دیگری ارائه دهند. به‌تازگی یک ریاضی‌دان به نام جوئل همکینز مفهومی از نظریه مجموعه‌ها ارائه کرده است که به موضع اسکولمی‌ها شباهت بسیاری دارد (هرچند به نظر انگیزه‌های همکینز به خود نظریه مجموعه‌ها برمی‌گردد؛ نه به مواضع فلسفی پیشین). او ادعا می‌کند همین‌طورکه

نظریه‌مجموعه‌دانان هرروز روش‌های قدرت‌مندتری (مانند فورسینگ[1]و نشاندن در کاردینال‌های بزرگ[2]) برای ساختن و مقایسه‌ی مدل‌های مختلف نظریه مجموعه‌ها به‌کارمی‌برند، تمایل آن‌ها به موردنظر و استاندارد دانستن یک مدل کم‌تر می‌شود. جریان نظریه مجموعه‌ها به‌جای به‌سمت یک مدل برتر رفتن، به‌سمت مقایسه‌ی مدل‌های مختلف پیش رفته است. همکینز نتیجه می‌گیرد نظریه‌مجموعه‌دانان باید مفهوم چندجهانی از نظریه مجموعه‌ها را بپذیرند. مفهومی که بنابر آن هیچ مدلی از نظریه مجموعه‌ها بر دیگری برتری ندارد و هدف نظریه مجموعه‌ها تنها مطالعه‌ی روابط مدل‌های مختلف از نظریه‌مجموعه‌ها است.

مفهوم چندجهانی به مفهوم جبری اصل‌بندی وابسته است. همکینز انگیزه‌ی دیدگاهش را کاربرد ریاضیات می‌داند. به این معنا که چندجهانی می‌تواند مفهوم جبری اصل‌بندی را به روش درستی معین کند. منظور همکینز این نیست که چون توسیع‌های فورسینگ ممکن هستند نسبی‌گرایی نظریه‌مجموعه‌ای صحیح است بلکه چون این توسیع‌ها *طبیعی* هستند نسبی‌گرایی توجیه می‌شود.

مفهوم چندجهانی به همان نتایج اسکولمیسم سنتی می‌رسد. فرض کنید a مجموعه‌ای در مدل M باشد (M جایی در چندجهانی است). آن‌گاه M توسیع فورسینگ مانند M[G] دارد که در آن a شمارا است. این توضیحی طبیعی برای ادعای اسکولمی‌ها مبنی‌بر اینکه "هر مجموعه از دیدگاهی شمارا است." فراهم می‌کند.

به‌طورمشابه تمایل اسکولمی‌ها به شمارایی این‌گونه توضیح داده می‌شود که اگر a در مدل M شمارا باشد، آن‌گاه در همه‌ی توسیع‌های مدل شمارا می‌ماند. در مقابل مجموعه‌های ناشمارا را همیشه می‌توان با رفتن به توسیع فورسینگ مناسبی شمارا کرد.[۳] (Hamkins 2012,416-449)

۴-۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری فصل پنجم

در این فصل راه حل بیز را برای فرم‌های ساده و پیچیده‌تر پارادوکس اسکولم، نقدهای وارد شده بر آن و پاسخ‌های قانع‌کننده‌ی بیز به آن‌ها را بیان کردیم. سپس راه حل او را به فرم مجموعه‌توانی تعمیم دادیم. به‌نظر می‌رسد اسکولمی‌ها برای ادعاهای خود باید برهانی به‌غیر از پارادوکس اسکولم پیدا کنند. دیدگاه همکینز را

[1] forcing
[2] large carginal embeddings

[۳] برای نقد این دیدگاه Koellner 2013 را ببینید.

می‌توان نمونه‌ای برای این تلاش دانست. ارزش فلسفی فرم‌های مختلف پارادوکس را باهم مقایسه کردیم و به این نتیجه رسیدیم که ارزش فلسفی فرم‌های مختلف پارادوکس باهم برابر هستند.

جمع‌بندی و نگاهی به آینده

در آغاز این رساله دو نوع فرم از پارادوکس اسکولم را معرفی کردیم. فرم کلاسیک پارادوکس اسکولم درمورد مدل نااستاندارد ناشمارایی نظریه مجموعه‌ها و فرم‌های دیگر درمورد دیگر مفاهیم مانند خوش ترتیبی حساب و ... هستند. با سه مسئله‌ی اصلی روبه‌رو بودیم. نخست، اینکه آیا مجموعه‌های ناشمارا واقعا وجود دارند؟ در ارتباط با این مسئله دیدگاه اسکولمیسم و دیدگاه‌های مخالف آن را شرح دادیم و دیدیم صرف این نوع بحث به تکافو ادله می‌رسد و این مسئله به‌نظر تصمیم‌ناپذیر است. پس در این مورد موضع لاادری به‌نظر موجه‌تر می‌آید. دومین مسئله این بود که آیا پارادوکس اسکولم نشان می‌دهد که نظریه‌های مرتبه دوم برای مدل کردن کاربرد ریاضیات مناسب‌تر هستند؟ دیدیم مدل استاندارد فرم کلاسیک پارادوکس و بسیاری از دیگر فرم‌های مشابه را حل می‌کند اما پارادوکس‌های مشابهی برای این ساختارها صورت‌بندی کردیم و نشان دادیم نمی‌توان از پارادوکس اسکولم نتیجه گرفت که این ساختارها نیز برای نشان دادن کاربرد ریاضیات مناسب هستند. مسئله‌ی سوم اینکه پارادوکس اسکولم درمورد درک ما از نظریه مجموعه‌ها و سمانتیک زبان نظریه مجموعه‌ها چه نتیجه‌ای دارد؟ در این راستا راه‌حل بیز را بیان کردیم. او ادعا می‌کند فرم کلاسیک را در همان نظریه مجموعه‌های مرتبه اول حل کرده است و راه‌حل او قابل تعمیم به دیگر فرم‌های همانند است. در این راستا، راه‌حل بیز را برای پارادوکس مجموعه‌ی توانی تعمیم دادیم. نقدهای موجود و پاسخ‌های قانع‌کننده‌ی بیز به آن‌ها را بیان کردیم. به‌نظر می‌رسد اسکولمی‌ها نمی‌توانند از پارادوکس اسکولم نتیجه بگیرند که مجموعه‌های ناشمارا واقعا وجود ندارند و برای این ادعای خود باید برهان دیگری ارائه دهند.

این پژوهش تنها درمورد ادعاهای نسبی‌گرایانه‌ی اسکولم و هواداران او است. جنبه‌های دیگری از ادعاهای اسکولم مانند این‌که نظریه مجموعه‌ها نمی‌تواند بنیادی برای ریاضیات باشد موضوعی باز برای ادامه‌ی پژوهش است. مسئله‌ی دیگری که جای مطالعه‌ی بیشتری دارد موضع همکینز و تلاش‌های مشابه آن است.

منابع و مآخذ

1) Barwise J., 1977. An introduction to first-order logic. *Handbook of mathematical logic*. editor), North-Holland, Amsterdam, pp. 5-46

2) Bays, T., 2000. Reflections on Skolem's paradox (Doctoral dissertation, UCLA).

3) Bays, T., 2006. The mathematics of Skolem’s paradox. *Philosophy of Logic*, pp.485-518.

4) Bays, T., 2009. Skolem's Paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.)

5) Benacerraf, P. and Wright, C., 1985. Skolem and the Skeptic. *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes*, pp.85-137.

6) Cellucci, C., 1970. Skolem's Paradox and Platonism. *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía*, pp.43-54.

7) Church, A., 1996. *Introduction to mathematical logic* (Vol. 13). Princeton University Press.

8) Corcoran, j., 1980. Categoricity. *History and Philosophy of Logic* (vol. 1), pp. 187-207.

9) Drake, F.R., 1974. *Set theory: An introduction to large cardinals* (Vol. 76). North-Holland.

10) Feferman, S., 1977. Theories of finite type related to mathematical practice. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 90*, pp.913-971.

11) Fine, A., 1968. Quantification over the real numbers. *philosophical studies 19*, pp.27-31.

12) Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y. and Levy, A., 1973. Foundations of set theory. Elsevier.

13) George, A., 1985. Skolem and the Löwenheim-Skolem Theorem: A case study of the philosophical significance of mathematical results. *History and Philosophy of Logic, 6(1)*, pp.75-89.

14) Goodman, N., 1972. Problems and Projects (Bobbs-Merrill, Indianapolis). *GoodmanProblems and Projects1972*.

15) Hamkins, J., 2011. The Set-Theoretic Multiverse: A Natural Context for Set Theory. *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science 19*, pp. 37–55.

16) Hamkins, J., 2012. The set-theoretic multiverse. *Review of Symbolic Logic*

5, pp. 416-449.

17) Hilbert, D., 1902. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(10), pp.437-479.

18) Hrbacek, K. and Jech, T., 1999. *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded*. Crc Press.

19) Jech, T., 2013. *Set theory*. Springer Science & Business Media.

20) Kleene, S., 1967. *Mathematical Logic*. New York: John Wiley & Sons.

21) Klenk, V., 1976. Intended models and the Löwenheim-Skolem theorem. *Journal of Philosophical Logic, 5(4)*, pp.475-489.

22) Koellner, P., 2013. Hamkins on the Multiverse. *Unpublished, May*.

23) Kreisel, G., 1967. *Informal rigour and completeness proofs, Problems in the philosophy of mathematics*, (I. Lakatos, editor). North-Holland, Amsterdam, pp. 138-186.

24) McIntosh C., 1979. Skolems Criticism of Set theory. *Nous 13,* pp. 313-334.

25) Mendelson, E., 2009. *Introduction to mathematical logic*. CRC press.

26) Montague, R.I.C.H.A.R.D., 1965. *Set theory and higher-order logic, Formal systems and recursive functions, J. Crossley and M. Dummett.*

27) Muller, F.A., 2005. Deflating skolem. *Synthese, 143(3)*, pp.223-253.

28) Myhill, J., 1951. On the ontological significance of the Lowenheim-Skolem theorem. *Academic freedom, logic and religion (M. White, editor), American Philosophical Society*, pp. 57-70.

29) Resnik, M.D., 1966. On Skolem's paradox. *The Journal of Philosophy*, pp.425-438.

30) Resnik, M.D., 1969. More on Skolem's Paradox. *Noûs*, pp.185-196.

31) Shapiro, S., 1985. Second-order languages and mathematical practice. *The Journal of symbolic logic, 50(03)*, pp.714-742.

32) Shapiro, S., 1991. *Foundations without foundationalism: A case for second-order logic*. Oxford: Clarendon Press.

33) Skolem, T., 1922. Some Remarks on Axiomitized Set Theory. *in van Heijenoort 1967*, pp. 290–301.

34) Skolem, T., 1955. A Critical Remark on Foundational Research. *in Skolem 1970*, pp. 581–586.

35) Skolem, T., 1970. *Selected Works in Logic*, Oslo: Uiversitetsforlaget.

36) Thomas, W.J., 1968. Platonism and the skolem paradox. *Analysis, 28(6)*, pp.193-196.

37) Thomas, W.J., 1971. On behalf of the skolemite. *Analysis, 31(6)*, pp.177-186.

38) Van Dalen, D., 1994. *Logic and structure*. Berlin: Springer.

39) Van Dalen, D. and Ebbinghaus, H.D., 2000. Zermelo and the Skolem paradox. *Bulletin of Symbolic Logic, 6(02)*, pp.145-161.

40) Wang, H., 1954. The formalization of mathematics. *The Journal of Symbolic Logic, 19(04)*, pp.241-266.

41) Weston, T., 1976. Kreisel, the continuum hypothesis and second order set theory. *Journal of Philosophical Logic, 5(2)*, pp.281-298.

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

Absolute	مطلق
Analysis	آنالیز
Ancesteral relation	رابطه‌ی نیایی
Anti skolemite	ضداسکولمی
A priori	پیشینی
Arithmetic	حساب
Axiomatization	اصل‌بندی
Basic	پایه
Cardinal	عدد اصلی
Categorical	قاطع
Cantor diagonal lemma	لم قطری کانتور
Characterize	معین کردن
Concept	مفهوم

Consistent	سازگار
Context	متن
Contradiction	تناقض
Compactness	فشردگی
Completeness	تمامیت
Countable	شمارا
Cumulative	انباشتی
Enumerating function	تابع شمارش
Extension	بستار
Finiteness	تناهی
First order	مرتبه اول
Formal	صوری
Formalism	صوری‌گرایی
Formalization	صوری‌سازی
Foundation	بنیاد
Godel incompleteness	ناتمامیت گدل
Infinite	نامتناهی

Informal mathematics	ریاضیات غیرصوری
Intended model	مدل موردنظر
Interpretation	تعبیر
Intuitive	شهودی
iterative	تکرار شونده
Isomorph	یک‌ریخت
Lowenheim skolem theorem	قضیه‌ی لوونهایم اسکولم
Minimal closure	بستار مینیمال
Model	مدل، ساختار
meta language	فرازبان
Naïve	خام
object language	زبان شیئی
Ontology	هستی‌شناسی
Order	ترتیب
Ordinal	عدد ترتیبی
Platonist	افلاطون‌گرا
power set	مجموعه توانی

Predicative	محمولی
Paradox	پارادوکس
Practice of mathematics	کاربرد ریاضیات
predicate set theory	نظریه مجموعه‌های محمولی
Puzzle	معما
Rank	رتبه
Realism	واقع‌گرایی
Relativism	نسبی‌گرایی
Satisfy	برآورده کردن
skolem’s paradox	پارادوکس اسکولم
Skolemism	اسکولم‌گرایی
Skolemite	اسکولمی
Specify	معین کردن، مشخص کردن
Standard	استاندارد
Transcendental	متعالی
Transitive	متعدی

Uncountable	ناشمارا
wang’s system	دستگاه ونگ
well ordering	خوش‌ترتیبی
well foundedness	خوش‌بنیادی

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

استاندارد	Standard
اسکولم‌گرایی	Skolemism
اسکولمی	Skolemite
اصل‌بندی	Axiomatization
افلاطون‌گرا	platonist
انباشتی	cumulative
آنالیز	Analysis
برآورده کردن	satisfy
بستار	Extension
بستار مینیمال	Minimal closure
بنیاد	Foundation
پارادوکس	paradox
پارادوکس اسکولم	skolem’s paradox
پایه	Basic
پیشینی	A priori

Enumerating function	تابع شمارش
order	ترتیب
Interpretation	تعبیر
iterative	تکرار شونده
Completeness	تمامیت
Contradiction	تناقض
finiteness	تناهی
arithmetic	حساب
Naïve	خام
well foundedness	خوش‌بنیادی
well ordering	خوش‌ترتیبی
wang’s system	دستگاه ونگ
Ancesteral relation	رابطه‌ی نیایی
rank	رتبه
Informal mathematics	ریاضیات غیرصوری
object language	زبان شیئی
Consistent	سازگار
Countable	شمارا
Intuitive	شهودی

Formal	صوری
Formalization	صوری‌سازی
Formalism	صوری‌گرایی
Anti skolemite	ضداسکولمی
cardinal	عدد اصلی
ordinal	عدد ترتیبی
meta language	فرازبان
Compactness	فشردگی
Categorical	قاطع
Lowenheim skolem theorem	قضیه‌ی لوونهایم اسکولم
Practice of mathematics	کاربرد ریاضیات
Cantor diagonal lemma	لم قطری کانتور
Transcendental	متعالی
Transitive	متعدی
context	متن
power set	مجموعه توانی
predicative	محمولی
Intended model	مدل موردنظر

model	مدل، ساختار
First order	مرتبه اول
Absolute	مطلق
puzzle	معما
characterize	معین کردن
specify	معین کردن، مشخص کردن
concept	مفهوم
Godel incompleteness	ناتمامیت گدل
Uncountable	ناشمارا
infinite	نامتناهی
relativism	نسبی‌گرایی
predicate set theory	نظریه مجموعه‌های محمولی
realism	واقع‌گرایی
Ontology	هستی‌شناسی
Isomorph	یک‌ریخت

پیوست الف

نظریه مجموعه‌های مرتبه اول

اصول‌موضوعه

اصل موضوع وجود: مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضوی ندارد.

$$\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$$

اصل موضوع توسیع: اگر هر عضو از x عضوی از y و هر عضو از y عضوی از x باشد، آن گاه $x = y$.

$$\forall x\ \forall y\ [\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$$

قالب اصل موضوع شمول: فرض کنید $P(x)$ خاصیتی از x باشد. برای هر مجموعه‌ی A مجموعه‌ی B وجود دارد به‌طوری که $x \in B$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $P(x)$ صادق باشد.

$$\forall A\ \exists B\ \forall x\ [x \in B \leftrightarrow (\ x \in A \wedge P(x))]$$

اصل موضوع زوج: برای هر A و B، مجموعه‌ی C وجود دارد به‌طوری که $x \in C$ اگر و تنها اگر $x = A$ یا $x = B$.

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall u(\ u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

اصل موضوع اجتماع: برای هر مجموعه‌ی S مجموعه‌ی U موجود است به‌طوری که $x \in U$ اگر و تنها اگر به ازای $A \in S$یی، داشته باشیم $x \in A$.

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ [z \in y \leftrightarrow \exists u\ (z \in u \wedge u \in x)]$$

اصل موضوع مجموعه‌ی توانی: برای هر مجموعه‌ی S، مجموعه‌ی P موجود است به‌طوری که $X \in P$ اگر و تنها اگر $X \subseteq S$.

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow z \in x)$$

اصل موضوع انتخاب: برای هر دستگاه از مجموعه‌ها یک تابع انتخاب وجود دارد.

تعاریف مورد نیاز از نظریه مجموعه‌ها

تعریف. دو مجموعه‌ی A و B را هم‌توان (یا دارای یک اندازه) نامند اگر تابع یک به یک و پوشای f با دامنه‌ی A و برد B موجود باشد. در این حالت می‌نویسیم $|A| = |B|$.

تعریف. اندازه‌ی A کمتر یا مساوی عدد اصلی B است (که با نماد $|A| \leq |B|$ نشان داده می‌شود.) اگر نگاشتی یک به یک از A به B موجود باشد.

فرض. مجموعه‌هایی به نام اندازه‌ها موجودند با این ویژگی که به ازای هر مجموعه‌ی X عدد اصلی منحصر به فردی مانند $|X|$ (اندازه یا عدد اصلی X) موجود است و به‌علاوه مجموعه‌های X و Y هم توانند اگر و تنها اگر $|X|$ برابر $|Y|$ باشد. در واقع اندازه‌ی "نماینده‌ی" منحصر به فرد برای هر رده از مجموعه‌های دو به دو هم توان است.

تعریف. مجموعه‌ی W را با رابطه‌ی $<$ خوش ترتیب می‌نامیم هرگاه

الف) $(W,<)$ مجموعه‌ی مرتب خطی باشد.

ب) هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی W کوچک‌ترین عضو داشته باشد.

تعریف. مجموعه‌ی T متعدی نامیده می‌شود هرگاه هر عضو از T زیرمجموعه‌ی T باشد.

تعریف. مجموعه‌ی α اردینال (عدد ترتیبی) نامیده می‌شود در صورتی که

الف) α متعدی باشد.

ب) α با رابطه‌ی $\in_\alpha$ خوش ترتیب باشد.

تعریف. کاردینال نامتناهی κ را تکین می‌نامند هرگاه دنباله‌ی ترامتناهی صعودی مانند $<\alpha_\upsilon \mid \nu \leq N>$ از اعداد ترتیبی $\alpha_\upsilon \leq \kappa$ موجود باشد به‌طوری‌که طول آن N یک عدد ترتیبی حدی کوچک‌تر از κ باشد و

$\kappa = \lim_{\nu \to N} \alpha_\upsilon$. عدد اصلی نامتناهیی که تکین نیست، منظم می‌نامند.

تعریف. عدد اصلی ناشمارای $\aleph_\alpha$ را دسترس‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه عدد اصلی حدی و منظم باشد.

پیوست ب

نظریه مدل

قضایای مورد نیاز از نظریه مدل

قضیه‌ی فشردگی. Γ یک مدل دارد $\Leftrightarrow$ هر زیرمجموعه‌ی متناهی Δ از Γ مدل داشته باشد.

قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به پایین. فرض کنید Γ مجموعه‌ای از جملات در زبانی با اندازه‌ی κ باشد و $\kappa < \lambda$. اگر Γ مدلی با اندازه‌ی λ داشته باشد، آن گاه Γ مدلی با اندازه‌ی κ' دارد که $\kappa \leq \kappa' < \lambda$.

قضیه‌ی لوونهایم اسکولم رو به بالا. فرض کنید Γ دارای زبان L با اندازه‌ی κ باشد و $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\Gamma)$ با اندازه‌ی $\lambda \geq \kappa$. برای هر $\mu > \lambda$، Γ مدلی با اندازه‌ی μ دارد.

نتیجه. حساب پئانو مدل‌های نا استاندارد دارد.

نتیجه. اگر Γ مدل‌های متناهی دلخواه داشته باشد، Γ مدلی نامتناهی دارد.

تعاریف مورد نیاز از نظریه مدل

تعریف. $\mathfrak{A}$ تحویلی از $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ بسط $\mathfrak{A}$) است اگر $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|$ و همه‌ی روابط، توابع و ثوابت $\mathfrak{A}$ روابط، توابع و ثوابت $\mathfrak{B}$ باشند.

تعریف. یک ساختار دنباله‌ی مرتب $<A ; R_1 , \dots , R_n ; F_1 , \dots , F_m ; \{c_i | i \in I\}>$، که A یک مجموعه‌ی ناتهی است. $R_1 , \dots , R_n$ روابطی بر A، $F_1 , \dots , F_m$ توابعی بر A و c_i $(i \in I)$ ها عضوهای A هستند.

تعریف. دو ساختار $\mathfrak{A} = <A ; P_i^A \; i \in I ; F_j^A \; j \in J ; \{c_k | k \in K\}>$

و $\mathfrak{B} = <B ; P_i^B \; i \in I ; F_j^B \; j \in J ; \{c'_k | k \in K\}>$ را یک‌ریخت می‌گوییم هرگاه تابعی مانند f وجود داشته باشد، به‌طوری که

$f: A \rightarrow B$ و برای هر P_i، $<a_1 , \dots , a_n> \in P_i^A$ اگر و تنها اگر $<f(a_1) , \dots , f(a_n)> \in P_i^B$ و برای هر F_j، $f(F_j^A(a_1, \dots , a_n)) = F_j^B(f(a_1), \dots , f(a_n))$ و $f(c_k) = c'_k$.

تعریف. $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ معادل مقدماتی هستند اگر برای هر جمله‌ی σ از L، $\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$.

نماد گذاری. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

تعریف. $\mathfrak{A}$ را زیرمدل $\mathfrak{B}$ می‌نامیم اگر $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$، $P_i^{\mathfrak{B}} \cap |\mathfrak{A}|^n = P_i^{\mathfrak{A}}$.

تعریف. $\mathfrak{A}$ را زیرمدل مقدماتی $\mathfrak{B}$ می‌نامیم اگر $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ و برای هر $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ در L و $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$

$$\mathfrak{B} \models \varphi(a^*_1, \dots, a^*_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(a^*_1, \dots, a^*_n)$$

نماد گذاری. $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.

نتیجه. $\mathfrak{A} < \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

پیوست ج

معرفی منطق مرتبه دوم

ابتدا مختصرا منطق مرتبه دوم را معرفی می‌کنیم:

زبان

(۱) متغیرهای فردی: $x_0, x_1, x_2, \ldots,$

(۲) ثابت‌های فردی: $c_0, c_1, c_2, \ldots,$

(۳) متغیرهای محمولی n-تایی: $X_0, X_1, X_2, \ldots,$

(۴)ثابت‌های محمولی n-تایی: $\perp, P_0^n, P_1^n, P_2^n, \ldots,$

(۵) رابطه‌ها: $\wedge, \rightarrow, \vee, , \leftrightarrow, \exists, \forall, \ldots,$

(۶) نشانه‌ها: . , (,)

فرمول‌ها با استقرا به‌صورت زیر ساخته می‌شوند:

(۱) $X_0^i, P_0^i, \perp \in FORM$

(۲)برای $n>0$ ، $X^n(t_1,\ldots,t_n) \in FORM$, $P^n(t_1,\ldots,t_n) \in FORM$

(۳) FORM تحت رابط‌های گزاره‌ای بسته است.

(۴) FORM تحت سورهای مرتبه اول و مرتبه دوم بسته است.

تعریف. ساختار مرتبه دوم دنباله‌ای مانند $\mathfrak{A} = <A, A^*, c^*, R^*>$ است که

$$A^* = <A_n | n \in \mathbb{N}> , c^* = \{c_i | i,n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$$

$$R^* = <R_i^n | i,n \in \mathbb{N}\}, A_n \subseteq P(A^n), R_i^n \in A_n .$$

برای تعریف اعتبار در منطق مرتبه دو باید مانند منطق مرتبه اول عمل کرد.

تعریف. (۱) اگر $I = 1$ ، $\mathfrak{A} \vDash \bar{I}$

(۲) اگر $<i_1,\dots,i_n> \in I^n$ ، $\mathfrak{A} \vDash \bar{I}^n(\bar{\imath}_1,\dots,\bar{\imath}_n)$

(۳) روابط گزاره‌ای مشابه منطق مرتبه اول تعبیر می‌شوند.

(۴) اگر برای هر $i \in A$ $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\bar{\imath})$ ، $\mathfrak{A} \vDash \forall x\, \varphi(x)$

اگر برای بعضی $i \in A$ $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\bar{\imath})$ ، $\mathfrak{A} \vDash \exists x\, \varphi(x)$

(۵) اگر برای هر $I^n \in A_n$ $\mathfrak{A} \vDash \varphi(I^n)$ ، $\mathfrak{A} \vDash \forall X^n\, \varphi(X^n)$

اگر برای بعضی $I^n \in A_n$ $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\bar{I}^n)$ ، $\mathfrak{A} \vDash \exists X^n\, \varphi(X^n)$

تعریف. اصل شمول: $\exists X^n\, \forall x_1\, x_2 \dots x_n\, [\, \varphi(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow X^n(x_1,\dots,x_n)]$

در صورتی که X^n در φ آزاد نباشد.

تعریف. ساختار مرتبه دوم $\mathfrak{A}$ یک مدل هنکین است اگر اصل شمول در $\mathfrak{A}$ معتبر باشد.

ساختار مرتبه دوم $\mathfrak{A}$ یک مدل استاندارد است اگر برای هر n ، $A_n = P(A^n)$.

قضیه‌ی تمامیت. منطق مرتبه دوم نسبت به مدل هنکین تمام است گرچه نسبت به مدل استاندارد ناتمام است.

قضیه. حساب مرتبه دوم قاطع است.

نتیجه. نقض لم وجود مدل:

در مدل استاندارد مجموعه فرمول‌های سازگاری هست که مدل ندارد.

نتیجه. دستگاه اثباتی منطق مرتبه دوم نسبت به مدل استاندارد ناتمام است.

نتیجه. قضیه‌ی فشردگی در منطق مرتبه دوم با مدل استاندارد[1] نقض می‌شود.

نتیجه. قضایای لوونهایم اسکولم برای منطق مرتبه دوم با مدل استاندارد برقرار نیستند. پس ظاهرا پارادوکس اسکولم با مدل استاندارد منطق مرتبه دوم پیش نمی‌آید.

قضایای بالا در منطق مرتبه دوم با مدل هنکین برقرار هستند.

1

پیوست د

کاردینال‌های بزرگ

تعریف. فرض کنید S مجموعه‌ی غیرتهی باشد. منظور از یک پالایه روی S عبارت است از یک گردایه‌ی مانند F از زیرمجموعه‌های S به‌قسمی‌که در شرایط زیر صدق می‌کند.

الف) $S \in F$ و $\emptyset \notin F$.

ب) اگر $X \in F$ و $Y \in F$، آن‌گاه $X \cap Y \in F$.

ج) اگر $X \in F$ و $X \subseteq Y \subseteq S$، آن‌گاه $Y \in F$.

تعریف. پالایه‌ی U روی S را فراپالایه می‌نامند هرگاه برای هر $X \subseteq S$، یا $X \in U$ یا $S - X \in U$.

تعریف. فرض کنید S مجموعه‌ی غیرتهی باشد. منظور از یک اندازه‌ی (احتمالی σ-جمعی غیربدیهی) روی S عبارت است از تابع $\mu: \wp(S) \to [0,1]$ به‌قسمی که

الف) $\mu(\emptyset) = 0$ و $\mu(S) = 1$.

ب) اگر $X \subseteq Y$، آن‌گاه $\mu(X) \leq \mu(Y)$.

ج) اگر X و Y از هم مجزا باشند، آن‌گاه $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.

د) برای هر $a \in S$، $\mu(\{a\}) = 0$.

ه) اگر $\{X_n\}^{\infty}_{n=0}$، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای S باشند، آن‌گاه

$\mu(\cup^{\infty}_{n=0} X_n) = \Sigma^{\infty}_{n=0} \mu(X_n)$.

قضیه. اگر یک اندازه روی $2^{\aleph_0}$ موجود باشد، آن‌گاه فرض پیوستار نقض می‌شود.

با اندکی تغییر در اثبات قضیه‌ی بالا نتیجه‌ی زیر بدست می‌آید.

قضیه. اگر یک اندازه روی مجموعه‌ی S موجود باشد، آن‌گاه کاردینالی مانند $\kappa \leq |S|$ موجود است که ضعیفا دسترس‌ناپذیر است.

نتیجه. اگر یک اندازه روی $2^{\aleph_0}$ موجود باشد، آن‌گاه کاردینال ضعیفا دسترس‌ناپذیر κ موجود است به قسمی که $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

Abstract

Mathematicians use uncountable sets, power sets, well ordering, finiteness and … every day. They think these notions are really what they think about them and with this in mind they write proofs using this concepts and comminucate about them. But, are these concepts actually what they think they are? In 1922, Skolem expressed uncertainty about this. By downward lowenheim skolem theorem, an axiomatization of set theory has a countable model (if set theory has any). but, as this model is countable, it has only a countable domain. So, we fail to have uncountable sets and our uncountable sets are infact countable. This is known as skolem's paradox. The philosophical implications of Skolem's paradox have received much study.

In this thesis I want to answer the fallowing questions: (1) Are there really uncountable sets? (2) Does Skolem's paradoxes conclude that standard second-order structers are more suitable for showing mathematical practice? (3) If anything, what does Skolem's paradox say about our understanding of Set theory and its semantics?

We will see that It's better to choose to be agnostic about uncountable set's existence and that Skolem's paradoxes do not conclude that standard second-order structers are more suitable for showing mathematical practice and Skolem's paradoxes say nothing about our understanding of Set theory and its semantics.

Keywords

Skolem paradox, relativism, skolemite,anti skolemite

T.M.U.

Skolem's Paradox, a logical philosophical analysis

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the

Requirements for the Degree of Master of Art (M.A) in

Philosophy

Department of Logic

Faculty of Humanities

Tarbiat Modares University

By:

Mansooreh Kimiagari

Supervisor:

Dr. Davood Hosseini

Advisor:

Dr. Mohammad bagheri

December 2015