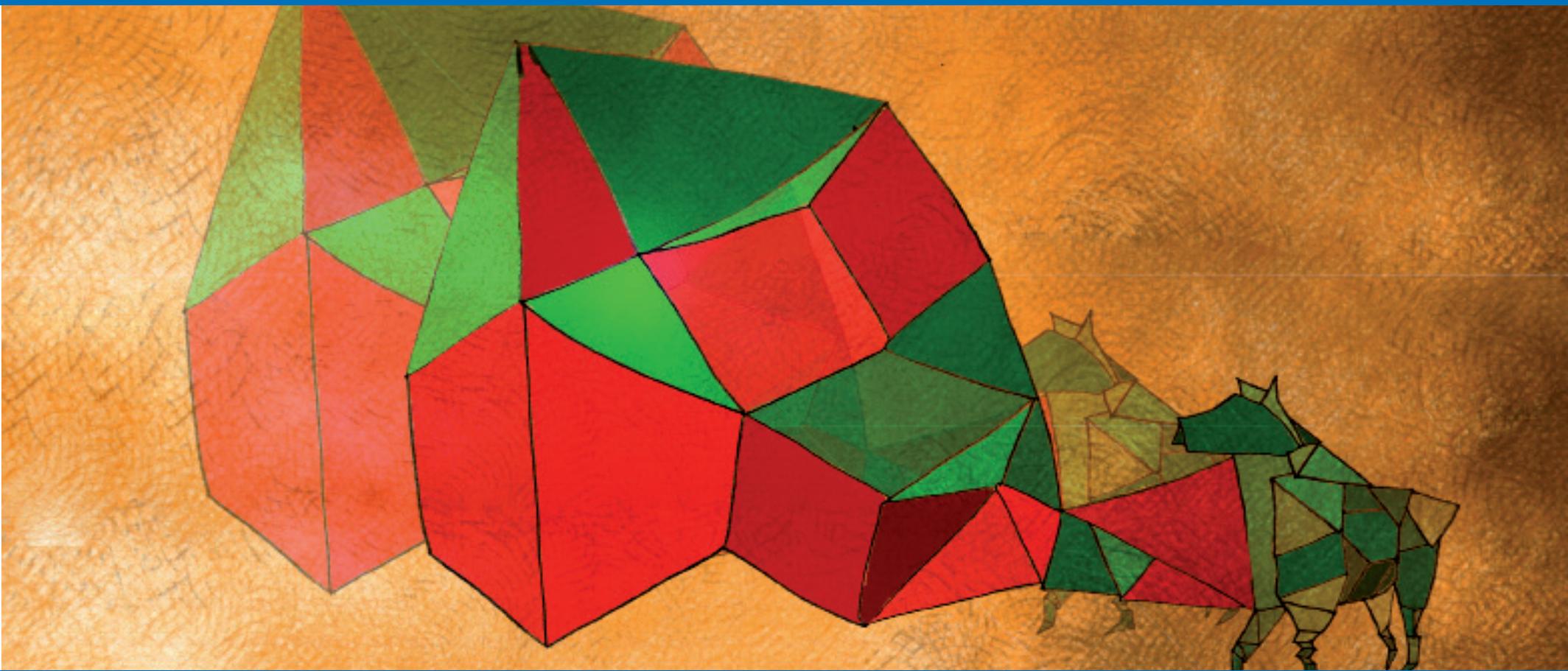


# APROXIMACIÓN DE LA GEOMETRÍA CON PLEGADO DE PAPEL GEOPAPIROFLEXIA

Javier Mauricio Jiménez Guevara

Instituto Técnico Industrial Piloto I.E.D

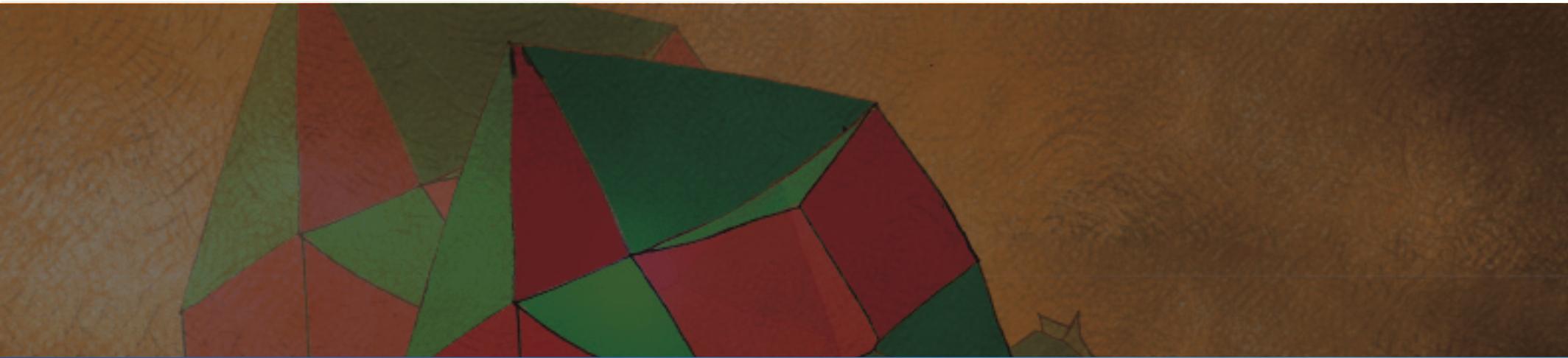


ALCALDÍA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.  
EDUCACIÓN

Instituto para la Investigación Educativa y el  
Desarrollo Pedagógico



GOBIERNO DE LA CIUDAD



## PÁGINA LEGAL

Samuel Moreno Rojas  
Alcalde Mayor de Bogotá

Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico, IDEP

Olmedo Vargas Hernández  
Director General

Luz Stella Olaya Rico  
Subdirectora Académica  
Jorge Alirio Ortega Cerón  
Subdirector Administrativo, financiero y de control interno  
Luisa Fernanda Acuña Beltrán  
Profesional Especializado Subdirección Académica  
Supervisora del Proyecto  
Andrea Bustamante Ramírez  
Profesional Subdirección Académica  
Giovanna Castiblanco Alvarez  
Juliana Cubides Martínez  
Darcy Milena Barrios Martínez  
Zulma Patricia Zuluaga  
Investigadoras Principales – Asesoría en la sistematización de las 18 experiencias pedagógicas

Coordinación editorial y audiovisual  
Ramiro Leguizamo Serna, Edilson Silva Liévano  
Editorial Sumasaberes Limitada

Ilustración  
Daniela del Pilar Albarracín Moreno, Lina Marcela Otálora Serna, Pedro Steven Villabón Lozano

Corrección de estilo  
Eduard Arriaga, Yamilet Angulo Noguera, Carlos Hernando Rico Sánchez, Edith Johana Barrero Santiago

Diseño gráfico y montaje  
Jhon E. Florez Rivera, Elkin Hernández Mendoza

Título  
*Aproximación de la geometría con plegado de papel geopapiroflexia*

Autor  
**Javier Mauricio Jiménez Guevara**

ISBN  
978-958-8066-73-8  
Avenida El Dorado No. 66 - 63  
Tels. (57 1) 324 1000 (57 1) 324 1000 Ext. 9012 / 9006  
www.idep.edu.co  
Bogotá D.C.  
IDEP- 2010



ALCALDÍA MAYOR  
DE BOGOTÁ D.C.  
EDUCACIÓN

Instituto para la Investigación Educativa y el  
Desarrollo Pedagógico



GOBIERNO DE LA CIUDAD

## PROLOGO

En la actualidad, diferentes instancias educativas y gubernamentales están interesadas en promover la sistematización como otra posible forma de hacer investigación. Considero que la intención de estas líneas de acción es impulsar a los docentes de las instituciones educativas a que escriban y reflexionen sobre su quehacer pedagógico, por tanto, a cualificar sus prácticas. También, la sistematización hace que sus actores se apropien más de su propuesta, la transformen, la ajusten y se den cuenta de los alcances pedagógicos que tiene y sobre todo se reconozcan como docentes investigadores e innovadores. Además, esta es una manera de rescatar de la memoria o de los recuerdos todo el saber cuasi empírico que habita en la mente de maestras y maestros y que proviene de las experiencias diarias de clases, cuando se tiene claro un enfoque y unos principios que orientan la acción. Por otra parte, todo proceso de sistematización ha de integrar una concepción investigativa del docente, un enfoque interpretativo de la evaluación y un vínculo constante entre la teoría y la práctica, de modo que el aula se convierta en laboratorio viviente de innovaciones, aprendizajes y saberes con un rigor flexible y consistente.

De ahí que ahora se haga público para que, en primera instancia, los docentes de cada institución, se enteren del trabajo, lo valoren y colaboren para hacerlo cada vez más pertinente y consistente; en segunda instancia, para que trascienda de los muros de cada aula y enriquezca las actuaciones de otros docentes en la región y en el país e incluso fuera de él.

Este trabajo de sistematización reunido en el libro: Aprendizaje de la geometría con plegado de papel. Geopapiroflexia, se inscribe en un enfoque constructivista y se apoya en el juego y en los aportes del modelo de Van Hiele para organizar y planear las actividades de la secuencia didáctica. Muestra que es posible mejorar los aprendizajes de algunos conceptos básicos de geometría a partir del plegado de papel y cómo a través de su uso los estudiantes empiezan a interesarse por la clase y a interactuar. De este modo, ellos comienzan a aprender los unos de los otros y en la clase se promueven actitudes y valores a favor de su formación.

Asimismo, da cuenta de un proceso investigativo retrospectivo y reflexivo sobre lo vivido por el autor al elaborar los talleres de plegado de papel. Es decir, presenta las consultas que hizo con respecto al saber disciplinar y los cambios que tuvo que hacer gracias a la implementación de estos en las clases con el fin de cualificar sus actuaciones en el aula. Es valiosa esta propuesta, precisamente, por esta actitud investigativa del docente. De hecho, en la in-



## DEDICATORIAS

terlocución con él y en la observación de sus prácticas a través de los documentos, se evidencia la apropiación teórica y el manejo de un enfoque con claridad y pertinencia.

Esta es una invitación para que los docentes utilicen otros recursos distintos al compás, la regla, transportadores y el computador en el trabajo con la geometría. Puesto que los estudiantes no los traen, el manejo de estos instrumentos no es el óptimo y se abandona con facilidad; si se trata del computador, generalmente la sala de informática está ocupada o no hay el número necesario de computadores. Por estas y otras razones, es importante que los docentes conozcan otros recursos, como el plegado de papel con el que se puede lograr en los estudiantes procesos de pensamiento inductivo o de otras modalidades y clases en las que, no sólo hay que escuchar atentamente para memorizar definiciones, propiedades y formas, sino que en las que, los estudiantes, a través de la manipulación del papel, construyen una geometría dinámica en todo el sentido.

En esta propuesta se destaca el rigor metodológico y el uso de estrategias concretas que responden a un enfoque teórico explícito coherente y articulador. El aprovechamiento de las experiencias de los estudiantes paso a paso revela un aprendizaje con sentido, pues el docente tiene claro el horizonte desde el que trabaja y las metas que persigue. De otro lado, bajo esta mirada, la geometría se aborda de una manera abierta y flexible que alcanza a tocarse con otras disciplinas y puede ayudar a consolidar una comprensión de lo espacial que luego puede favorecer el uso de instrumentos y de técnicas, pues la institución donde trabaja el autor tiene un énfasis técnico. Esto también favorece el aprendizaje significativo y el desarrollo de competencias.

Las matemáticas como la poesía elevan el pensamiento, brindan la posibilidad de soñar.

Javier M. Jiménez G.

A Luz Stella, Angela Paola, Mercedes, Idaly y Modesto.



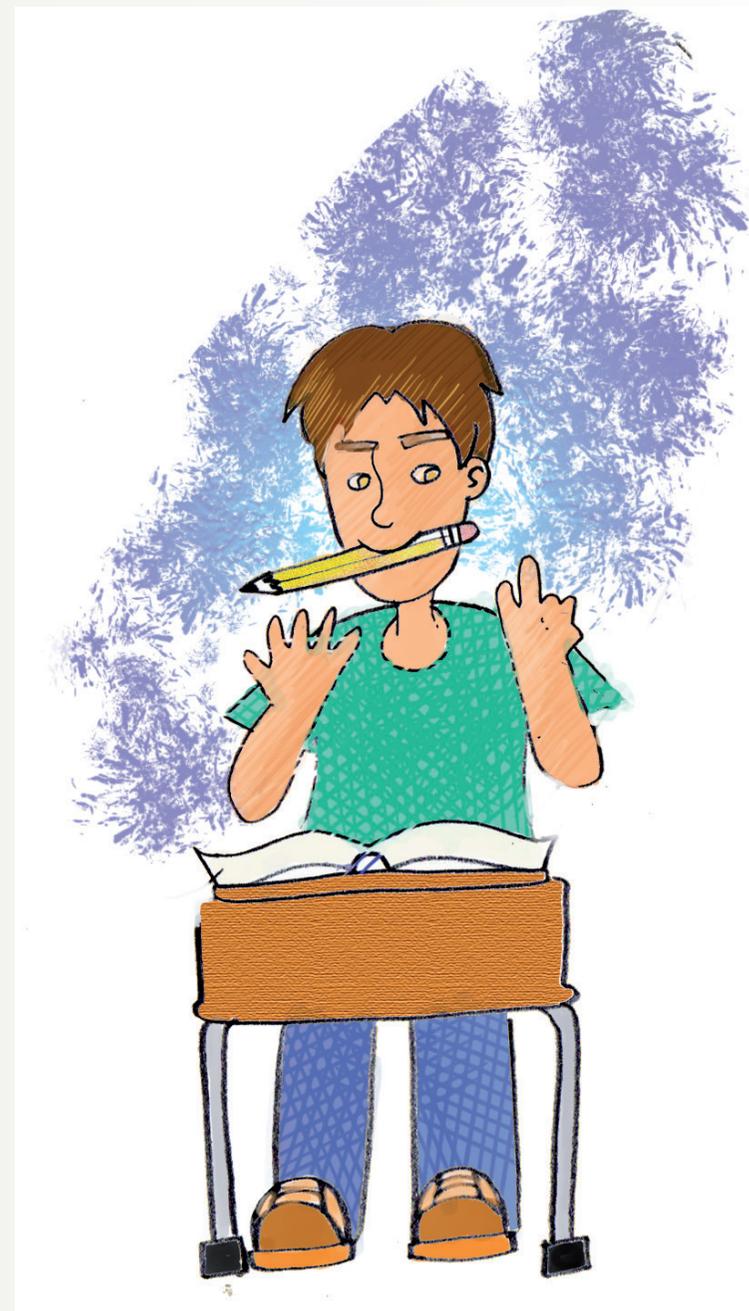
# ÍNDICE

PRESENTACIÓN	1
SISTEMATIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA	2
JUSTIFICACIÓN TEÓRICA DE LAS ACTIVIDADES	3
CONTEXTO	4
INTERVENCIÓN EN EL AULA	5
<i>Las clases de geometría empleando la regla y el compás.</i>	5.1
<i>Las clases de geometría empleando el plegado de papel.</i>	5.2
LAS ACTIVIDADES	6
<i>Representaciones y recursos.</i>	6.1
<i>Conceptos básicos: representación, apropiación del lenguaje y notación.</i>	6.2
<i>Construcciones geométricas: ligadas a la construcción del conocimiento geométrico.</i>	6.3
CONCLUSIONES	7
BIBLIOGRAFÍA	8



# TRANSMEDIA

<http://geopapiroflexia.blogspot.com>



## PRESENTACIÓN

El aprendizaje de la geometría plana mediante el uso del plegado de papel como instrumento de construcción utilizado por niños y niñas entre 12 y 13 años de edad del Instituto Técnico Industrial Piloto (I.E.D.) -I.T.I.P., les permitió pasar de un modo de aprender estático a uno dinámico: el estático se refiere al empleo de la regla y el compás, mientras que el dinámico está determinado por la elaboración de construcciones mediante el plegado y perforado del papel. Esto no significa que la regla y el compás no posibiliten el aprendizaje de la geometría de modo dinámico sino que al parecer no son los instrumentos apropiados para los niveles de iniciación.

El uso de la regla y el compás en las tareas de geometría llevó a los estudiantes de grado sexto del I.T.I.P. a prescindir de dichos instrumentos, circunstancia que hizo que las construcciones las realizaran a mano alzada y, por tanto, se degenerarán, perdieran precisión y, por ello mismo, los condujeran a razonamientos erróneos. Mientras que el plegado de papel facilitó una representación nítida, más elaborada y ajustada a las representaciones mentales de algunos objetos geométricos y les estimuló el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico.

Además, la intervención o participación de los estudiantes en la clase se fortaleció con éste tipo de actividades, puesto que el empleo de una hoja (plano geométrico) por actividad, les dejaba comparar sus constructos mentales (esquemas, conceptos o representaciones) con las construcciones geométricas elaboradas por ellos sobre el papel. Así se afianzó la comprensión de los conceptos de forma más práctica.

Otros cambios se manifestaron en la actitud provechosa de la mayoría de niños y niñas frente al trabajo, ya que se empeñaron en desarrollar las actividades y exponer sus ideas. De este modo, se generó un ambiente de escucha.

Durante éste proceso, los docentes de grado sexto del I.T.I.P. encontraron que al formular y proponer actividades para las clases que emplean como recurso el plegado de papel, les exigía involucrarse con los niños y las niñas para que comprendieran y lograran comunicar sus percepciones a partir de sus propias construcciones geométricas. En este sentido, la relación pedagógica se transformó, por eso se atendió más al aprendizaje,

*pues la construcción conceptual desde su propia práctica la realizó el estudiante. El docente fue sólo un guía que no se impuso sino que escuchó.*

## INTRODUCCIÓN

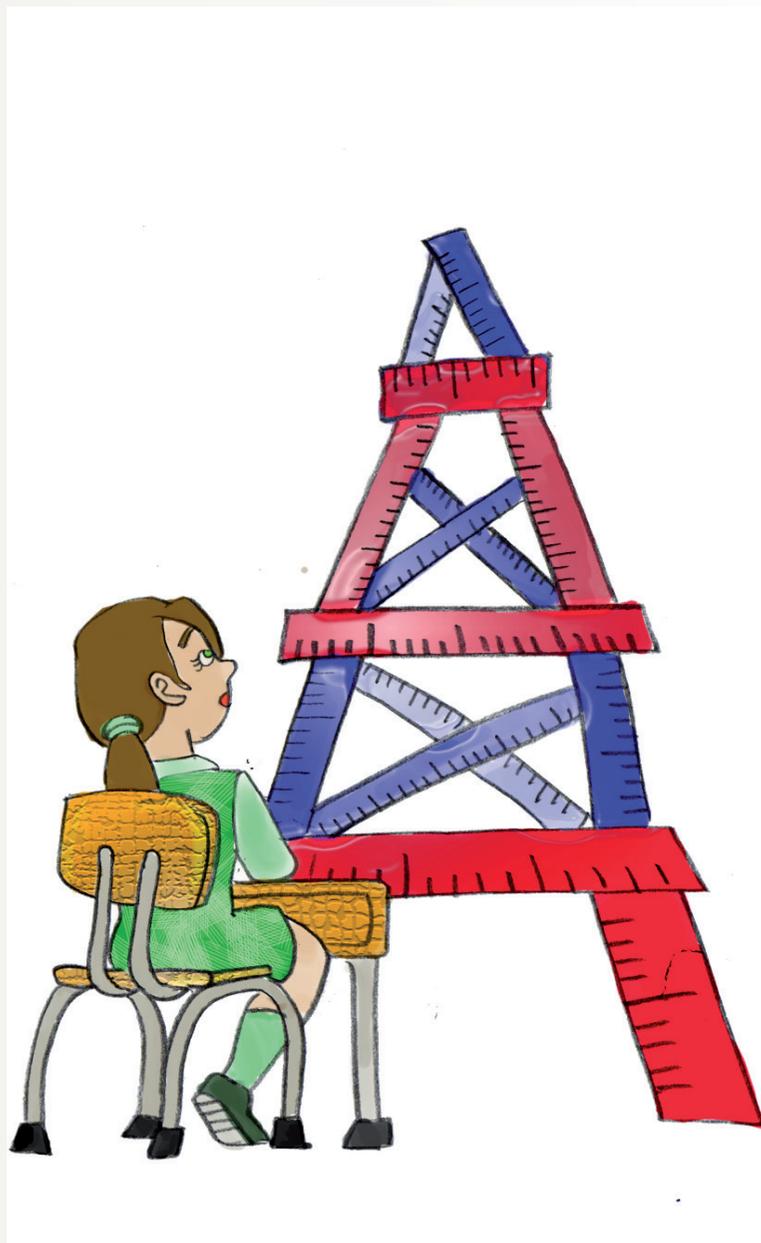
Este escrito corresponde a la sistematización de la experiencia Aprendizaje de la geometría con plegado de papel. Geopapiroflexia. El documento recoge el contexto en el que se ejecutó, los presupuestos teóricos y las prácticas de enseñanza de las matemáticas y específicamente de la geometría; contrasta el rol del docente y de los estudiantes en relación con las prácticas tradicionales de enseñanza y las prácticas que parten del aprendizaje de los estudiantes.

La reconstrucción de la experiencia de aula que se vivió al implementar una serie de actividades para la enseñanza de las nociones de la geometría plana, fue el resultado de un vínculo entre la teoría y la práctica. Esto dio lugar a la autocrítica del quehacer docente, la concientización sobre la necesidad de los cambios que se pueden llevar a cabo en la intervención que el docente hace en el aula.

La reflexión sobre algunos episodios acontecidos en el aula, reta al docente a modificar su acción. En este sentido, él también se convierte en objeto de estudio para mejorar sustancialmente sus prácticas de enseñanza.

Lo novedoso no es, en sí, la propuesta sino la actitud del docente frente a su desarrollo profesional; se intenta salir de la rutina, del repetir una temática y de exigir una lección aprendida por los estudiantes.

La importancia de este tipo de escritos radica en poder divulgar las propuestas que se ejecutan en el aula y que sirven como referencia para implementar otras. No busca ser una receta que se lee, se programa y se ejecuta; es un referente para comenzar o continuar reflexionando sobre las prácticas que enfatizan en el aprendizaje para mejorar la calidad de la educación.



## 1.- PREÁMBULO

La reflexión frecuente sobre las prácticas de enseñanza genera un cambio en la manera de aproximar a los niños y las niñas al conocimiento y, por lo tanto, en las actuaciones del docente al intervenir en el aula. De ahí que la exposición que se entrega en este documento es el resultado del análisis de las prácticas de enseñanza, a partir de la revisión del rol del docente y de los estudiantes en las clases de geometría, cuando se emplea como instrumento el papel y se intenta una interacción a partir de la participación activa. De esta manera se generan ambientes de escucha y de respeto por las ideas del otro.

## 2.- SISTEMATIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

Ciertos episodios que se viven en las instituciones educativas, como en el I.T.I.P Instituto Técnico Industrial Piloto, toman importancia dada su tendencia al cambio. En este caso, se manifiesta en el nuevo rol que asume el docente junto con sus estudiantes. Quienes se ocupan del cambio deben ser

conscientes de las alteraciones que se establecen en el aula, pero estos nuevos modos de interacción no deben quedar como un episodio de aula más, sino que deben trascender.

Para que se divulgue una experiencia en particular, es necesario recuperar el conocimiento construido por el docente en relación con otras prácticas y las teorías que lo alimentan. Es decir, sistematizar la práctica se alcanza a través de la praxis (reflexión sobre la acción) que lleva al desarrollo profesional del docente y al mejoramiento de la educación.

Lo anterior permite plantear la sistematización como “un proceso de recuperación e interpretación de las prácticas de los educadores en el que se busca explicitar los marcos conceptuales y teorías de acción en uso, descubrir los factores y dinámicas que determinan el curso y efectos de las mismas y extraer lecciones que permitan mejorarlas. Todo ello para contribuir a la construcción de conocimiento pedagógico teórico-práctico y a la calidad educativa, propiciando el desarrollo profesional del educador y el carácter transformador-innovador” (Federación Internacional de Fe y Alegría, 2007).



Para esta experiencia “Aproximación de la geometría con el plegado de papel”, la práctica se convierte en objeto de estudio. A su vez, se enfatiza en la crítica antes que en la descripción o narración de episodios ocurridos en el aula.

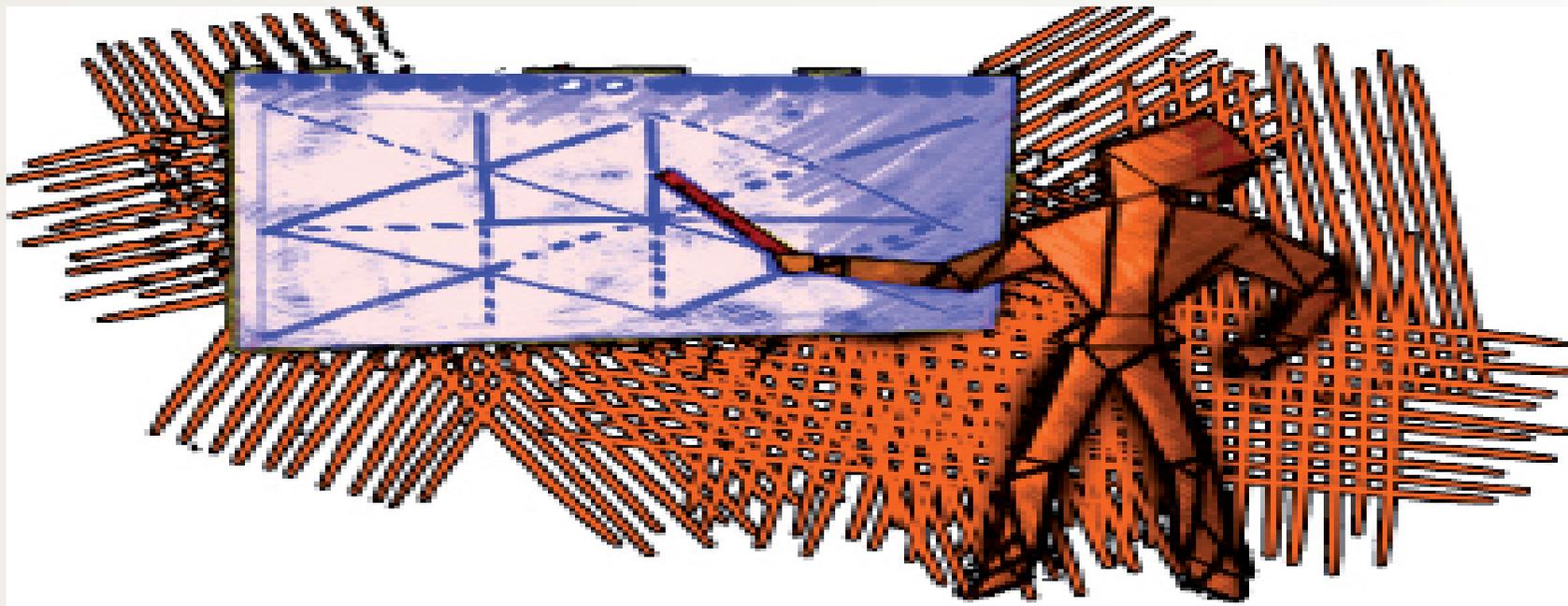
La reconstrucción de esta experiencia de aula se logró con la ayuda del I.D.E.P. (Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico) por medio de asesorías personalizadas, encuentros y conferencias relacionadas con la sistematización de experiencias. El discurso, fruto de las acciones emprendidas en esta experiencia, fue emergiendo en cada una de las siguientes etapas de la ruta propuesta para la sistematización: i.- identificación de las actividades y procesos que se sistematizan, ii.- disposición de las actividades según la práctica docente, iii.- análisis de las interrelaciones entre las actividades y los procesos, iv.- reconstrucción de la experiencia desde la identificación, disposición y análisis de las actividades y procesos, y v.- redacción del discurso. Éste es el que se presenta en este documento.

### 3.- JUSTIFICACIÓN TEÓRICA DE LAS ACTIVIDADES

El desarrollo de esta experiencia se encuentra enmarcado en principios aportados por el constructivismo, el modelo de Van Hiele y el juego.

Los niños y las niñas como sujetos cognoscentes construyen el conocimiento. Esto consiente la idea de que cada niño o niña construye sus propios conocimientos y no los puede tomar contruidos de otros. Sin embargo, el proceso de construcción de conocimiento aunque es individual, también, es intersubjetivo e interactivo, es decir, al niño o a la niña, al relacionarse con otros niños o niñas, se le facilita la construcción del conocimiento que cada uno tiene que realizar por sí mismo, siempre y cuando participe activamente en este proceso. Por esto, es importante para esta experiencia que los estudiantes interactúen, se relacionen y participen; en este caso, el estudio de las matemáticas y en especial de la geometría es el pretexto para que lo hagan.

Ahora bien, la intervención e interacción de cada niño o niña están determinadas por sus esquemas mentales (o unidades de conocimiento) (Delval,



1997, p.15-33). Estos se evidencian cuando los aplican en ciertas situaciones, de aquí que si dos niños realizan una serie de acciones de manera semejante, estarían empleando el mismo esquema, de lo contrario estarían utilizando esquemas diferentes.

Cuando un niño o niña encuentra un problema es porque no tiene un esquema dispuesto para solucionarlo y se hace necesario modificar alguno de los esquemas que posee para resolverlo. Por tal razón, **la construcción de conocimiento** está relacionada con una continua transformación de esquemas, en la que se tienen en cuenta tanto los esquemas prácticos como los abstractos.



### Nivel 2: Análisis o descriptivo:

Algunos **esquemas prácticos** relacionados con las matemáticas son **clasificar, contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar**, ya que permiten actuar materialmente sobre la realidad. Los otros esquemas son los **abstractos** que permiten operar conceptos (propiedades comunes de una clase de objetos o situaciones) y originar las **representaciones mentales** (compuestas por conceptos acoplados de manera determinada). Las relacionadas con las matemáticas reciben el nombre de procesos matemáticos, se centran en **representar simbólicamente, desarrollar algoritmos, generalizar, conjeturar, justificar, probar y axiomatizar**.

La aplicación de un esquema por parte de los niños o las niñas sobre una situación, bien sea práctica o abstracta, conlleva un encadenamiento entre el esquema y la situación. Cuando se hace consciente constituye el conocimiento del niño o de la niña sobre la situación.

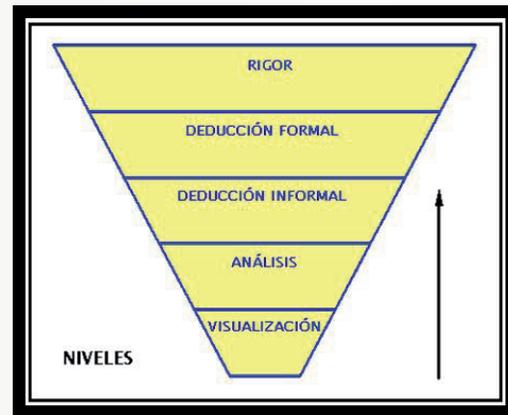
La **construcción del conocimiento** matemático y específicamente el geométrico de cada niño o niña, se puede caracterizar por niveles, éstos son **estructuras de conocimiento** y corresponden a aquello que tienen de común muchos esquemas. Llega el momento en que los niños y las niñas aplican ciertos esquemas mentales porque poseen una estructura y mediante ella se pueden ubicar en alguno de los niveles. Estos niveles fueron el resultado del estudio doctoral de los esposos Van Hiele.

En seguida se describen las estructuras de conocimiento según el nivel:

**Nivel 1: Reconocimiento, visualización o familiarización:** los estudiantes tienen facilidad para reconocer lo icónico; encadenan un esquema mental (imagen mental) con un dibujo o figura. Es decir, identifican figuras específicas por su apariencia global y además pueden reproducirla; reconocen triángulos, cuadrados, rombos, paralelogramos, círculos por su forma, pero no identifican explícitamente las propiedades de estas figuras.

**Nivel 2: Análisis descriptivo:** los estudiantes establecen conceptos para ciertos objetos geométricos que están en posibilidad de describir. Dicho de otro modo, comienzan a descomponer (analizar) las figuras y a citar sus propiedades, aprenden la terminología técnica apropiada para detallarlas, pero no relacionan las figuras ni sus propiedades.

**Nivel 3: Ordenamiento, clasificación o deducción informal:** Los estudiantes establecen relaciones



entre conceptos geométricos y obtienen de este modo representaciones mentales. Estas representaciones se identifican cuando disponen de manera lógica las propiedades de las figuras e infiere otras por medio de cadenas cortas de deducción. Además, distinguen las relaciones entre las figuras, es decir, las caracterizan, por ejemplo, la inclusión de clases.

**Nivel 4:** Deducción formal o deducción: los estudiantes establecen **representaciones mentales** más complejas, es decir, comprenden un sistema geométrico donde involucran términos (primitivos y definidos), axiomas y teoremas. También, comienzan a desarrollar secuencias más largas de deducción (demostración deductiva) y entienden el significado de la deducción. Todo esto si, por ejemplo, existe un dominio de la geometría euclidiana.

**Nivel 5: Rigor:** los estudiantes establecen **representaciones mentales** netamente abstractas y están en posibilidad de desarrollar tareas en una variedad de sistemas geométricos donde emplean el método axiomático deductivo. Están en posibilidad de comparar diferentes sistemas geométricos, la geometría euclidiana con las no euclidianas.

Ahora, para que un niño o niña avance de nivel en nivel, ha de hacerlo progresivamente, es decir, debe pasar por todos los niveles y en ese orden. Cada nivel se corresponde con una **estructura mental** determinada; con sus esquemas mentales, conceptos y representaciones mentales.

Es evidente que la intención de **aprender geometría mediante el plegado de papel** está orientada a desarrollar el pensamiento espacial de los niños y las niñas; esto supone la construcción y la manipulación de los conceptos de los objetos del espacio, a través de **procesos matemáticos establecidos**, específicamente geométricos. En este sentido, esta propuesta de Van Hiele ayuda a sistematizar esta experiencia.

Aquí el interés se centra en el cómo enseñar, qué actividades se van a aplicar, qué orden deben tener las actividades y qué recursos son necesarios y pertinentes para el desarrollo de las actividades. Es decir, cuál es el plan que se va a considerar para que los niños y las niñas construyan su conocimiento geométrico.

Para que se consolide la ruta es importante resaltar: **i.- La secuencia general** que se va a seguir en cada nivel, que según el modelo de Van Hiele se denominan fases, **II. el nivel que se quiere alcanzar**, junto con los conceptos geométricos que se van a construir y **iii.- los recursos que se van a emplear.**

**I.** En esta experiencia en particular, **aproximación de la geometría mediante el plegado de papel**, se tiene en cuenta la secuencia general correspondientes a las fases, aunque no se tomaron de manera estricta se describen a continuación:

**Fase 1: Interrogación / Información:** el docente y los estudiantes entablan conversaciones en las que se hacen observaciones, se establecen objetivos, se plantean preguntas y se introduce el vocabulario y/o la notación específica. En esta etapa, el propósito del docente es aprender qué esquemas mentales aplica el niño o la niña (conocimiento previo). Esto se hace para valorar la pertinencia de las actividades que se van a desarrollar.

**Fase 2: Orientación dirigida:** los estudiantes exploran los conceptos geométricos mediante materiales que el docente ha organizado. Esas actividades buscan revelar las estructuras de conocimiento de los estudiantes. Las actividades deben involucrar acciones breves, diseñadas para conseguir respuestas específicas.

**Fase 3: Explicación / Explicitación:** luego de transformar sus esquemas mentales y relacionarlos con otros esquemas, los estudiantes intentan comunicar los conceptos y las representaciones mentales obtenidas. Es decir, construyen sobre sus conocimientos previos y expresan e intercambian sus resultados mediante la estructuración de las relaciones exploradas. El papel del docente consiste en ayudarlos en el empleo adecuado del lenguaje y de la notación convenida.

**Fase 4: Orientación libre:** en esta etapa se busca que los estudiantes apliquen los nuevos esquemas mentales obtenidos; por tal razón, al docente le corresponde proponer a los estudiantes tareas más complejas.

**Fase 5: Integración:** los estudiantes automatizan los nuevos esquemas y los pueden aplicar en tareas relacionadas, obteniendo de este modo una estructura de conocimiento desarrollada. Al finalizar esta fase, la nueva estructura de conocimiento reemplaza la anterior y los estudiantes están preparados para iniciar las fases de aprendizaje en el siguiente nivel.

ii.- La experiencia intenta provocar el paso del nivel de **reconocimiento, visualización** o familiarización al **nivel de análisis o descriptivo**. Los conceptos que se abordan son: punto, recta, plano, estar entre, segmento, transportar y trasladar segmentos, semiplano, rayo o semirrecta, ángulo, puntos colineales y puntos no colineales, rectas secantes, rectas paralelas, rectas perpendiculares, punto medio de un segmento, bisectriz de un ángulo, mediatriz de un segmento, ángulos consecutivos, ángulos convexos y cóncavos, y triángulos.

iii.- El principal **recurso** que se emplea en esta experiencia es **el papel**. El cual se pliega y se perfora, algunos pensarían en la papiroflexia, sin embargo, el objetivo no es elaborar figuras de animales o de cosas plegando hojas de papel, sino retomar algunos elementos que ofrece la papiroflexia para llevar a cabo un trabajo académico e iniciar a los niños y las niñas en el estudio de la **geometría plana**. Aunque, la papiroflexia como juego tenga fama de distraer a los estudiantes en el trabajo académico, las actividades para esta experiencia se diseñaron pensando en el beneficio que se puede obtener de este recurso para construir conceptos y relaciones geométricas.

Es oportuno resaltar las relaciones que hay entre el juego y las matemáticas. Para quienes están involucrados en el estudio de estos temas encontrarán rápidamente que ambos campos se caracterizan por ser entreteni-

dos, tienen reglas rigurosamente obligatorias, tienen un fin en sí mismo y exigen la participación activa y voluntaria de quien participa. Con este enfoque, la geometría como dominio matemático es un juego que, enmarcado en esta experiencia, se materializa con el plegado de papel, es decir, se representa gráficamente plegando y/o perforando un trozo de papel.

Al entrar en la especificidad, la geometría tiene sus piezas o fichas (términos primitivos, términos definidos y axiomas) con sus reglas establecidas por la lógica (reglas de inferencia) y su finalidad es la de desplegar las propiedades y relaciones que coexisten entre las piezas o fichas. Llega de este modo a conjeturas que, luego de emplear el método axiomático deductivo, tomarán el estatus de teoremas. En la transición de la conjetura al teorema, se encuentra la riqueza de los distintos movimientos que se pueden efectuar con las piezas o fichas, lo que resulta muy entretenido y exigente.



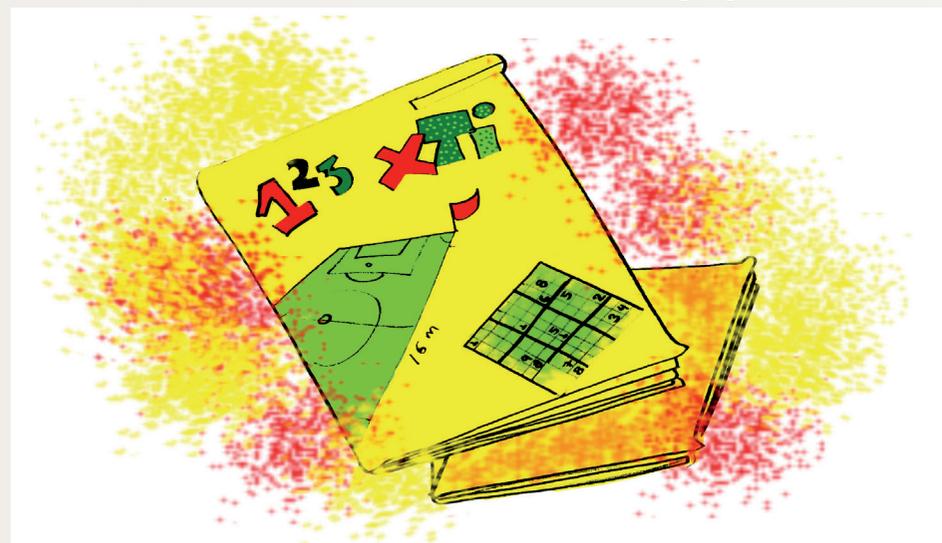
Sobre este aspecto, De Guzmán, 1984, p.10-14 afirma: “la matemática... es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema”.

Para el caso de los niños y las niñas, en los primeros niveles, el juego básico está vinculado a reconocer las primeras piezas o fichas y algunas relaciones elementales entre éstas. Este juego se desarrolla en el aula de clase con unas reglas específicas que se han denominado postulados; éstos son obligatorios para realizar construcciones geométricas mediante el recurso del plegado.

Quien se incluye en el juego y lleva a cabo sus exploraciones, llega a ciertas conclusiones con las cuales tiene la posibilidad de generar conversaciones que lo conducen a confrontar y a debatir desde la perspectiva que presenta. Las declaraciones aportadas por los estudiantes y guiadas por el docente permiten el perfeccionamiento o ajuste de los conceptos geométricos y de las representaciones mentales (procesos matemáticos) de cada participante. En esta práctica tiene lugar la construcción del conocimiento en particular, del geométrico.

#### 4.- CONTEXTO

Durante el primer semestre del año 2005 al orientar la asignatura “Didáctica de la geometría” de V semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas -LEBEM- de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, comencé a reflexionar sobre los recursos que permitieran iniciar



el estudio de la geometría en Educación Básica. Esto me llevó a contrastar lo que tradicionalmente se ha enseñado en la geometría, mediante el empleo de la regla y el compás y además a considerar para tal fin el software Cabri y el plegado de papel entre otros.

Para el segundo semestre de ese año se contaba con un material impreso para abordar el estudio de la geometría a través del plegado de papel que fue diseñado para esta asignatura. Luego, desarrollado en los tres semestres siguientes por los estudiantes de la LEBEM, me permitió hacer ciertos ajustes a las actividades propuestas en este material.

Paralelamente, la docente María Concepción Rueda Romero, en un Programa de Formación para Docentes --PFPD--, retomó la geometría, consideró la posibilidad de enseñarla a través del origami y planteó actividades para desarrollarlas con estudiantes de educación básica.

Es así como en el año 2007 se implementan algunas de las actividades propuestas en los dos trabajos, con el fin de aproximar a los estudiantes de grado sexto al estudio de la geometría en el I.T.I.P. Esto se ha realizado durante los dos últimos años en este grado.

El I.T.I.P. es una institución educativa del Distrito, de modalidad técnica industrial, cuya misión está soportada en la pluriculturalidad que integra el conocimiento, el afecto, la comunicación significativa, lo ético, lo estético, lo técnico y lo tecnológico, para despertar el respeto y el amor por el entorno que permitan una convivencia pacífica en la que se privilegien los derechos humanos y el mejoramiento de la calidad de vida. En esta perspectiva, uno de los principios del proyecto educativo institucional (P.E.I.) que regula la formación “Itipista”, es el de “formar para la vida a través de la educación técnica: para los integrantes de la comunidad educativa significa, que tanto docentes como estudiantes y personal de apoyo dentro de la institución están en permanente aprendizaje. Que el colegio, a través de todas las áreas del conocimiento encamina su labor en los cuatro principios de la educación para el futuro: el aprender a aprender, el aprender a ser, el aprender a ser, el aprender a hacer y el aprender a convivir”.

El I.T.I.P. cuenta con talleres de dibujo técnico, de sistemas, de mecánica industrial, de mecánica automotriz, de ebanistería y de modelería, de electricidad y electrónica, de metalistería y fundición. Estos son espacios académicos en los que aplicar pensamiento espacial es fundamental, puesto que los estudiantes deben estar en posibilidad de utilizar conceptos de tipo geométrico para modelar y resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios.

La importancia que adquiere la geometría en el desarrollo intelectual de un estudiante en la sociedad actual, la determina la aplicación que tiene este dominio matemático en los avances tecnológicos ligados a las ingenierías, al diseño, a la arquitectura y a las ciencias básicas. En estas áreas de conocimiento están presentes las exigencias de la manipulación, de las representaciones bidimensionales y tridimensionales. Aquí se vislumbra el valor que posee la enseñanza de la geometría en el I.T.I.P. dada su modalidad de carácter técnico industrial.

Por otro lado, están las necesidades detectadas en el I.T.I.P. con relación al aprendizaje de la geometría. Existen confusiones en el momento de abordar la geometría, puesto que se restringe a ciertos aspectos que culturalmente se han establecido. La pretensión de esta experiencia de algún modo ha sido no caer en el tipo de situaciones que se describen a continuación:

i.- Olvido de las relaciones entre objetos geométricos y de conceptos básicos: al parecer, en un principio se ignoraba el estudio de la geometría en los currículos de matemáticas o se dejaba como última opción para abordarla. Esto se refleja en los ejes temáticos atendidos por las experiencias presentadas en el VII Foro Educativo Distrital: “**Las Matemáticas. Mucho Más Que Cuatro Operaciones**” llevado a cabo entre el 19 y 20 de junio de 2002; “El estudio de la geometría se asume como uno de los ámbitos que requieren recuperar el interés de parte de docentes y estudiantes; el grupo de experiencias hace explícito el descuido al que se ha visto sometido en los últimos años este ámbito de la formación matemática, debido principalmente al auge que han tenido los sistemas numéricos y la teoría de conjuntos.

Las experiencias que toman como problema central la enseñanza y el aprendizaje de la geometría hacen referencia también a los resultados de los estudiantes en las Pruebas de competencias básicas en las que se han revelado las dificultades en el razonamiento espacial y geométrico” (Secretaría de Educación Distrital, 2002, p.85).

Ahora, al considerar las experiencias presentadas en el foro educativo, se encuentra en las conclusiones y sugerencias que al analizar los documentos: “son escasas las experiencias que hacen alusión a la apropiación de los conceptos básicos de la ciencia matemática como un asunto que realmente convoca el interés investigativo e innovador de los grupos de docentes. Es como si en ocasiones se considerara que la labor de la escuela, en educación matemática, fuera de crear espacios y ambientes en los que los conceptos, ya aprendidos, se aplican en un contexto de argumentación y de creación. Pero el proceso de apropiación de tales conceptos no se menciona, no se hace alusión a él, como si se tratara de una labor que no le compete a la escuela... En algunas experiencias se menciona que cuando los estudiantes tienen dificultades con los conceptos deben consultarlos por su cuenta, por ejemplo, con sus padres” (Secretaría de Educación Distrital, 2002, p.89-90). De aquí se puede inferir que en el momento de enseñar matemáticas, y específicamente geometría, se supone que los estudiantes comprendían ciertos conceptos básicos y si no era así debían hacerlo por cuenta propia.

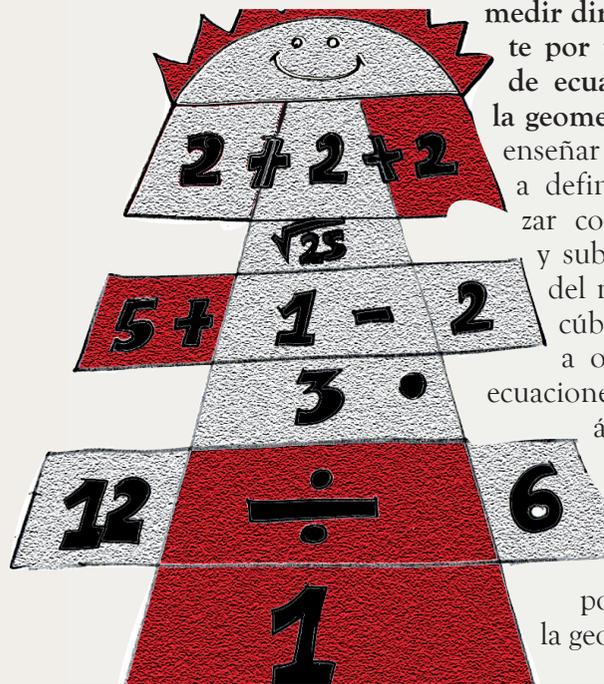
Lo anterior se puede explicar porque entre los docentes de matemáticas “no hay una elección que se pueda considerar unánime acerca del tema con el que se debe iniciar el estudio de geometría” (Andrade, Perry, Guacaneme & Fernández, 2003, p.34); a diferencia de otros dominios matemáticos en los que sí es posible establecerlos con relativa claridad, como la aritmética que se inicia con las operaciones entre números naturales o su orden y el álgebra que se comienza con los números fraccionarios.



Para la geometría, por ejemplo, se sugiere tener en cuenta las relaciones entre objetos geométricos que no se pueden dejar de lado y que extraídas del trabajo de David Hilbert conciernen a (Hilbert, 1953): estar en (incidencia), por ejemplo, posiciones relativas de un punto y una recta, posiciones relativas de una recta y un plano; estar entre (orden), por ejemplo, la posición que tiene un punto con relación a otros en una recta; congruencia (movimiento-coincidencia), por ejemplo, superponer figuras para comparar sus formas y tamaños; continuidad (denso), por ejemplo, ubicar los puntos posibles en un plano, en una recta y entre dos puntos; paralelismo, por ejemplo, trazar rectas secantes (perpendiculares y oblicuas) y no secantes.

Entre los conceptos básicos se pueden considerar los que corresponden a las relaciones entre los objetos geométricos y el infinito, por ejemplo, trazar las rectas posibles que pasen por un punto y el empleo de esquemas mentales relacionados con la clasificación; por ejemplo, emplear algunas definiciones para incluir las figuras que cumplen con los criterios allí expuestos y excluir las que no los cumplen, estableciendo así dos categorías y; con las transformaciones geométricas, por ejemplo, trasladar, reflejar y girar figuras.

## II. Priorizar las magnitudes (longitud, amplitud, área y volumen) para



medir directamente o indirectamente por medio de cálculos a través de ecuaciones. Aritmetización de la geometría: el énfasis a la hora de enseñar geometría se circunscribía a definir y mostrar figuras, realizar conversiones entre múltiplos y submúltiplos del metro lineal, del metro cuadrado y del metro cúbico o de un sistema métrico a otro; además, el empleo de ecuaciones para hallar perímetros, áreas y volúmenes, es decir, se convirtió en un trabajo sencillamente aritmético. Esto se ha venido dando, por lo menos en Bogotá, porque para “la enseñanza de la geometría, hay [temas] conside-

rados por una buena proporción de los profesores como las magnitudes y su medición, ángulos, polígonos regulares e irregulares y su congruencia, triángulos, cuadriláteros, circunferencias, traslaciones en el plano...” (Andrade, Perry, Guacaneme & Fernández, 2003, p.34).

En cuanto al conocimiento matemático “estas acciones no generan nuevos conocimientos, porque se trabaja en forma mecánica sin necesidad de tomar decisiones ni validarlas. Estas se reducen a una aplicación rutinaria de algo que se propone en dominios que no tienen nexos con otros conocimientos. En síntesis, estas actividades no dan lugar al desarrollo del razonamiento, entendido como la capacidad de establecer relaciones entre conceptos o información conocida, argumentar con razones fundadas acerca de una propiedad, relación o situación” (Samper, Camargo, & Leguizamón, 2003, p.18).

**III. El abandono de la generalización en el que se dejan de lado los métodos de razonamiento tanto deductivo como inductivo:** en las pocas oportunidades que se les da a los estudiantes de educación básica para que argumenten de manera detallada sus conjeturas, ellos se limitan a contestar lo que creen el profesor quiere escuchar, recitan las definiciones o teoremas, no razonan sino que simplemente, buscan recordar lo que se expuso en las clases. Esta situación suprime toda posibilidad para que el estudiante emplee cualquier método para explicar o argumentar sus conclusiones, bien sea mediante el uso del método deductivo o el método inductivo.

**IV. El trabajo individualizado de los niños y las niñas:** un ambiente que lleve al estudiante a observar al docente para captar modelos de algoritmos o una serie de figuras con sus correspondientes nombres o una cadena de definiciones con sus ejemplos, los conduce a consignar en sus cuadernos esa información, para luego aplicarla en los ejercicios o preguntas que se le consulten, lo que les exige memorizar y reproducir esa información. Esto es un trabajo que el estudiante, aunque esté acompañado, lo hace en solitario.

Ahora bien, el trabajo en grupo en el aula durante las clases de matemáticas, dado este ambiente, también es un trabajo individualizado; los estudiantes se limitan a esperar quién resuelve determinada situación para copiarla simplemente. Esta situación no permite la interacción de los estudiantes para contrastar métodos o argumentos, simplemente porque estos son únicos y los toman del profesor. Lo único que pueden hacer es revisar si la respuesta es correcta o incorrecta.

Luego de haber reflexionado sobre la problemática que hay en torno a la enseñanza de la geometría y evidenciadas las necesidades, es importante considerar también las sugerencias propuestas en los resultados de la cuarta aplicación de las pruebas de la evaluación de competencias básicas: “Para fortalecer el trabajo en geometría deben proponerse diversas tareas usando diferentes materiales: construir y analizar modelos de sólidos y formas, usar dobleces de papel, dibujo e interpretación de variadas clases de esquemas; realizar actividades para desarrollar el pensamiento visual. Se considera de suma importancia la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad concreta y en la imaginación y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio, la comunicación y expresión de información espacial plasmada en el espacio bidimensional y la realización e interpretación del dibujo elaborado en perspectiva” (Secretaría de Educación Distrital, 2000).

## 5.- INTERVENCIÓN EN EL AULA

Bosquejada la problemática y las necesidades en el aprendizaje de la geometría, se describe en seguida de una manera detallada la práctica docente durante dos momentos: cuando se trabajaba con regla y compás, en el que el estudiante es quien recibe una serie de instrucciones para ejecutarlas y cuando se emplea el plegado de papel en el que el estudiante construye su conocimiento geométrico. Esto no significa que al utilizar la regla y el compás el estudiante no pueda construir conocimiento, sino que al parecer el manejo de estos instrumentos no son los adecuados para estudiantes en este nivel.

### 5.1. Las clases de geometría con el uso de la regla y el compás

**5.1.1. Actividades:** El esquema general o típico de la práctica docente en el aula en este primer momento se puede describir como las “actividades a través de las cuales se desarrolla la clase, como la presentación del contenido, la resolución individual de ejercicios y la solución de dudas por parte del profesor” (Andrade, Perry, Guacaneme & Fernández, 2003, p.17).

El contenido que se presentaba a los estudiantes en las clases de geometría está referido a los conceptos básicos tales como: punto, recta, segmento, rayo o semirrecta, plano, semiplano, ángulo, rectas secantes, rectas paralelas, rectas perpendiculares, punto medio de un segmento, bisectriz de un ángulo,

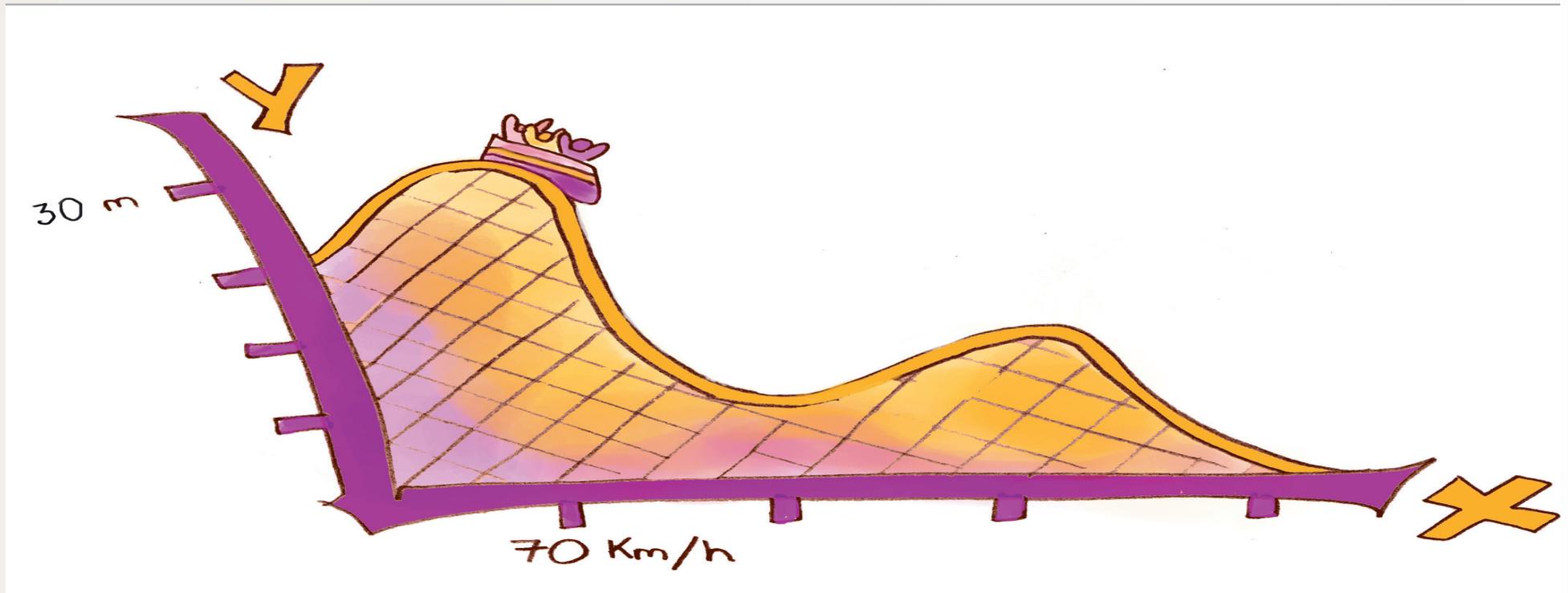
mediatriz de un segmento, clasificación de los ángulos y triángulos, y a sus construcciones.

La resolución de ejercicios se enmarca en una serie de preguntas que los estudiantes debían contestar y las instrucciones que debían seguir para construir con regla y compás ciertos conceptos. Las dudas se resolvían diciendo sí o no, puesto que la consulta representativa era si estaba bien lo respuesta o lo construido.

### 5.1.2. Rasgos de las actividades:

Las actividades que se llevaban al aula eran las propuestas por los libros de texto. El docente las coordinaba y determinaba el tiempo requerido para el desarrollo según la extensión del ejercicio aportado por el libro de texto. La actividad cambiaba en el instante en que se debía





llevar a cabo alguna construcción de un concepto geométrico con regla y compás; se dictaban paso a paso las instrucciones y se iban ejecutando junto con los estudiantes.

Así, se percibe que el énfasis que se hacía estaba dado por el desarrollo de destrezas relacionadas con la memoria y la manipulación de la regla y el compás; los estudiantes debían llevar sus apuntes de las explicaciones, de los ejercicios realizados y las construcciones con regla y compás.

Adicionalmente, las actividades propuestas en clase y las tareas tenían como propósito la obtención de respuestas, la memorización, la concentración, el orden y el cumplimiento por parte de los estudiantes. Bajo esta intención, el quehacer del docente estaba centrado en la revisión del avance de los contenidos tratados en clase y de la consulta de información relacionada con esos contenidos.

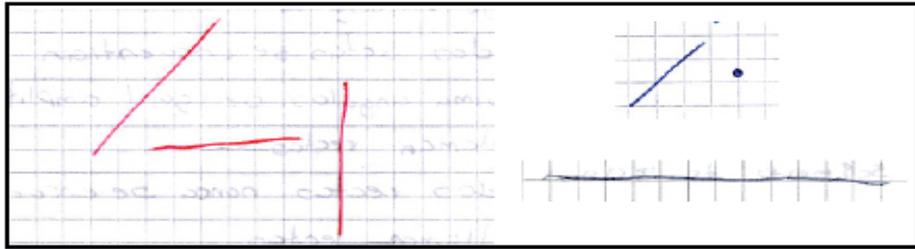
En síntesis, el docente realiza una exposición en la que las propiedades, definiciones e instrucciones para realizar alguna representación (construcción geométrica con regla y compás) de los conceptos son únicas y están

predeterminadas en los textos escolares, mientras que el estudiante escucha y observa pasivamente. Cuando es necesario recurre a su memoria para usar las mismas palabras del profesor y así en el momento requerido declarar que identifica las figuras con su nombre, enuncia la definición de un objeto geométrico dado, emplea los símbolos apropiados y enuncia las propiedades de las figuras.

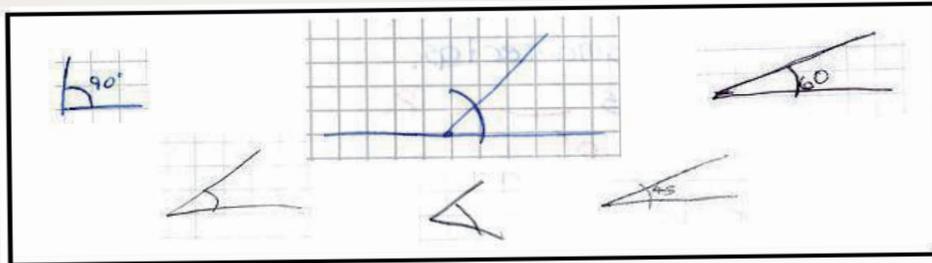
Con esto se observó que la clase de geometría no estaba siendo aprovechada por los estudiantes de grado sexto porque lo que memorizaban era para aplicarlo a corto plazo y el empleo de los instrumentos para las construcciones geométricas (regla y compás) muy pronto las dejaban de lado; no las llevaban a la clase y si las tenían no las usaban, entonces comenzaron a realizar las construcciones a mano alzada desfigurándolas, por tanto llegaban a razonamientos equivocados.

A continuación se presentan algunas de las construcciones elaboradas por estudiantes de grado sexto en las cuales se prescinde de la regla y el compás:

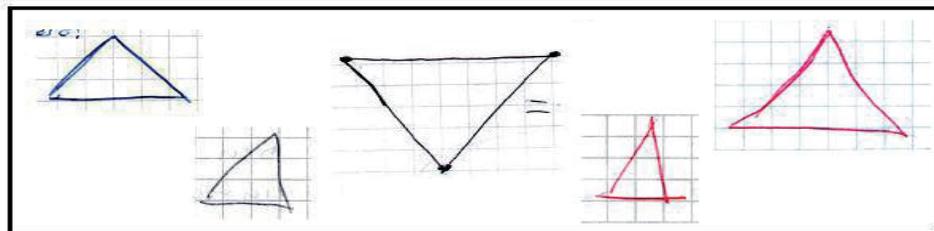
### Rectas



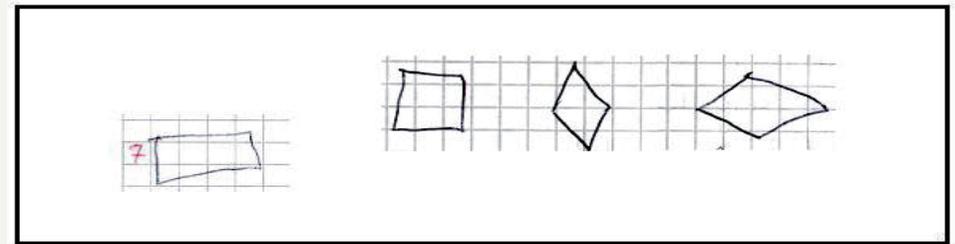
### Ángulos



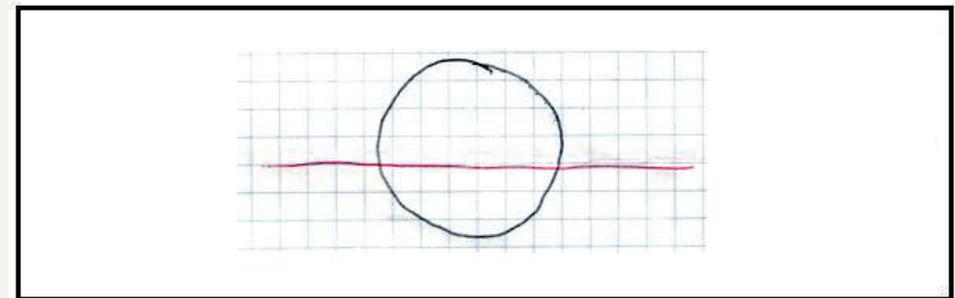
### Triángulos



### Cuadriláteros



### Recta secante a una circunferencia



Aquí se encuentran dos situaciones: primero el estudiante no está acostumbrado a llevar consigo los instrumentos para las clases y segundo el empleo de la regla y el compás restringe a los estudiantes porque aun no tienen desarrollada suficientemente la motricidad para manipular estos instrumentos. Esto se debe a que no han estado muy familiarizados con su uso, por tal motivo, los empiezan a utilizar con un alto grado de dificultad.

Con este panorama, se hace indispensable que los docentes emprendan rumbos distintos en los que modifiquen sus prácticas. Así, se ven obligados a buscar recursos para que los niños y niñas construyan conocimiento geométrico.

### 5.2. Las clases de geometría empleando el plegado de papel

Para esta experiencia en particular, en el I.T.I.P. se empieza con la implementación de ciertas actividades en las clases de matemáticas. En ellas, el aprendizaje de la geometría plana se lleva a cabo mediante el uso del plegado de papel como instrumento de construcción.

**5.2.1. Actividades:** Se desarrollan en tres momentos: En el primero, se dan a conocer los recursos, en el segundo, se construyen los conceptos geométricos y en el tercero, se relacionan los conceptos construidos. Estos momentos no se dan de manera lineal, se pueden dar simultáneamente.

En el primer momento se les presenta a los niños y las niñas los objetivos, el material con el que se van a desarrollar las actividades, los postulados (las reglas del juego) y las representaciones de punto, recta y plano.

En el segundo momento, el docente comienza cada una de las actividades con las instrucciones y luego las ejecuta junto con los estudiantes. De esto resulta una construcción en el papel que es descrita por los estudiantes, guiados por el docente. El docente, al finalizar, da el nombre que recibe lo que se resalta en la construcción, es decir, **se construyen entre todos definiciones** y se enuncia la notación.



En el tercer momento, dados ciertos conceptos construidos en las clases, se identifican a través del plegado y el perforado de papel, algunas relaciones geométricas que se denominan **proposiciones**.



**5.2.2. Rasgos de las actividades:** Las actividades llevadas a la clase son las propuestas en el material impreso diseñado para esta experiencia y corresponden a una guía para el docente; este material impreso no es entregado a los estudiantes. El docente es quien coordina la clase y el tiempo está determinado por el avance de los estudiantes en cada actividad realizada en aula.



Se hace énfasis sobre la construcción y comprensión de los conceptos básicos de la geometría plana, empleando como implemento el papel para plegarlo y perforarlo. Se proponen situaciones que motiven acuerdos de significados y de constructos mentales, a partir de las representaciones que se logran desde del plegado. Otra situación que se persigue se basa en la construcción de significados de modo activo, en la que se emplean diferentes formas para referirse a un concepto para que simultáneamente sean apropiadas por los estudiantes. Así pues, entre los procesos matemáticos que se desarrollan, está el de comunicar ideas relativas a la geometría plana, llevar a cabo conexiones entre conceptos geométricos y el empleo del método inductivo para construir conocimiento geométrico.

La intención de las actividades está centrada en la obtención de frases cortas, producidas por los estudiantes, unas referidas a definiciones y otras referidas a ciertas relaciones entre objetos geométricos y que reciben el nombre de proposiciones o conjeturas geométricas. Estas expresiones, en una estructura mental más sofisticada, tomarán la categoría de axioma o teorema.

En consecuencia, las conclusiones de las actividades no se pueden dar si no existe una interacción del docente con los estudiantes; en esta experiencia se procura que sea de modo dialógico. Esto significa que en las interacciones se intenta que los estudiantes se comuniquen entre sí y con el docente para llegar a acuerdos. Tanto la comunicación oral como la escrita son un vínculo entre la lengua materna y la notación matemática (geométrica), que debe ganar en concisión a través de la discusión por parte de quienes integran la clase en una confrontación de las ideas de un estudiante con las de sus compañeros y luego con las expuestas por el docente. Los aportes individuales al ser puestos en consideración ante quienes participan activamente en la clase son analizados y contrastados, deben llevar a perfeccionar o ajustar los conceptos y los procesos matemáticos, es decir, debe llevar a los estudiantes a construir conocimiento matemático.

## 6.- LAS ACTIVIDADES

Las actividades que se presentan y las reflexiones que se exponen en torno a éstas son el resultado de la formulación e implementación de las mismas en el aula de clase.

Índice de las versiones de los materiales impresos para docentes		
Conceptos abordados en el taller ORIGAMI – PLEGADO DE PAPEL (2005 – 2007)	Conceptos abordados en el taller GEOMETRÍA CON PLEGADO DE PAPEL (2008)	Conceptos abordados en el taller GEOMETRÍA CON PLEGADO DE PAPEL (2009)
<p>Postulados: 8.</p> <p>ACTIVIDAD 1: Representación del punto, la recta y el plano.</p> <p>ACTIVIDAD 2: Representación del semiplano.</p> <p>ACTIVIDAD 3: Interestancia – Estar entre.</p> <p>ACTIVIDAD 4: Subconjuntos de la recta.</p> <p>ACTIVIDAD 5: Rayos - Ángulos.</p> <p>ACTIVIDAD 6: Rectas secantes.</p> <p>ACTIVIDAD 7: Euler en el plano. Con gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD 8: Bisectriz.</p> <p>ACTIVIDAD 9: Puntos colineales y puntos no colineales. Con gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD 10: Punto medio de un segmento.</p> <p>ACTIVIDAD 11: Mediatriz.</p> <p>ACTIVIDAD 12: Rectas paralelas y perpendiculares. Con gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD 13: Trasladar segmentos. Con gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD 14: Triángulos: Equilátero e isósceles. Con gráfico.</p>	<p>Postulados: 8.</p> <p>ACTIVIDAD I: Representación del punto, la recta y el plano. Se agrega gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD II: Representación del semiplano. Se implementa notación. Se agregan instrucciones para emplear lápices de colores.</p> <p>ACTIVIDAD III: Interestancia – Estar entre.</p> <p>ACTIVIDAD IV: Subconjuntos de la recta. Se agrega gráfico. Se agregan instrucciones para emplear lápices de colores.</p> <p>ACTIVIDAD V: Rayos - Ángulos.</p> <p>ACTIVIDAD VI: Rectas secantes.</p> <p>ACTIVIDAD VII: Euler en el plano. Se aumenta de tamaño el gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD VIII: Bisectriz. Se implementa notación.</p> <p>ACTIVIDAD IX: Puntos colineales y puntos no colineales. Continúa el mismo gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD X: Punto medio de un segmento.</p> <p>ACTIVIDAD XI: Mediatriz. Se implementa notación.</p> <p>ACTIVIDAD XII: Rectas paralelas y perpendiculares. Se cambia el gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD XIII: Transportar y trasladar segmentos. Se cambian los gráficos.</p> <p>ACTIVIDAD XIV: Triángulos. Se introducen las instrucciones para construir un triángulo en general y para los triángulos; escaleno, isósceles, equilátero, rectángulo y se plantean preguntas. Se eliminan las instrucciones aportadas en el taller (2005-2007).</p>	<p>Se agregan actividades para ampliar conceptos y aclarar otros.</p> <p>Se cambian de orden algunas actividades.</p> <p>Postulados: Se agrega uno relacionado con figuras y congruencia.</p> <p>ACTIVIDAD I: Representación del punto, la recta y el plano. Con gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD II: Subconjuntos de la recta. Con gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD III: Interestancia – Estar entre.</p> <p>ACTIVIDAD IV: Transportar y trasladar segmentos. Con gráficos.</p> <p>ACTIVIDAD V: Representación del semiplano.</p> <p>ACTIVIDAD VI: Rayos - Ángulos. Se modificaron las instrucciones.</p> <p>ACTIVIDAD VII: Puntos colineales y puntos no colineales. Con gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD VIII: Euler en el plano. Con gráfico.</p> <p>ACTIVIDAD IX: Rectas secantes.</p> <p>ACTIVIDAD X: Rectas paralelas y perpendiculares. Con gráfico explicativo paso a paso para las rectas perpendiculares. Se agregan instrucciones para construir rectas paralelas.</p> <p>ACTIVIDAD XI: Punto medio de un segmento.</p> <p>ACTIVIDAD XII: Bisectriz.</p> <p>ACTIVIDAD XIII: Mediatriz.</p> <p>ACTIVIDAD XIV: Ángulos Consecutivos.</p> <p>ACTIVIDAD XV: Ángulos convexos y cóncavos.</p> <p>ACTIVIDAD XVI: Triángulos. Se introducen las instrucciones para construir un triángulo en general y para los triángulos; escaleno, isósceles, equilátero, rectángulo y se plantean preguntas. Se eliminan las instrucciones aportadas en el taller (2005-2007).</p>





### Actividades elaboradas por los estudiantes

Además, se expone el modo de utilizar el papel como plano geométrico (hoja circular o irregular), para trazar rectas (plegar) y ubicar puntos (perforar). Aquí se tienen en cuenta los postulados para el desarrollo de las actividades, plegando y perforando (ver material impreso).

Se sugiere que la hoja de papel sea blanca y de forma irregular o circular para que el estudiante no se limite a cuatro modos de ver los objetos geométricos, como en el caso de las hojas rectangulares o cuadrículadas, sino que los estudiantes tengan la posibilidad de tomar la hoja de cualquier modo e identificar las construcciones sin restringir la relación con una sola imagen. Es decir, que no tengan como referencia la representación canónica (la que siempre se presenta en los textos) de la construcción.

REPRESENTACIONES		
PLANO	RECTA	PUNTO
		

En este momento, fue oportuno indagar sobre las ideas que los estudiantes tenían de punto y recta. Lo manifestado por los niños y las niñas se puede clasificar en dos categorías que permiten sospechar que los estudiantes se encuentran en el nivel 1 (reconocimiento, visualización o familiarización):

A. El término descrito a partir de su representación:

PUNTO	RECTA
<ul style="list-style-type: none"> <li>Un punto es una marca fina del lápiz la cual deja en el papel, tiene forma de circunferencia, es de cualquier tamaño.</li> <li>Un punto realmente no se puede definir, pero es una pequeña cantidad de tinta, es redondo.</li> <li>Un punto es redondo y pequeño.</li> <li>Un punto es redondo, es negro por dentro.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Una recta esta formada por miles de puntos unidos.</li> <li>Es la unión de puntos.</li> <li>Es la unión de dos puntos.</li> <li>Es derecha por donde pasan puntos alineados.</li> <li>Es una línea que marca una parte del plano.</li> <li>Una línea que pasa sobre un plano, es derecha y es infinita.</li> </ul>

B.- El término descrito a partir de su uso:

PUNTO	RECTA
<ul style="list-style-type: none"> <li>Un punto es donde se puede comenzar a realizar una recta o cualquier clase de cosa por medio de ese punto.</li> <li>Es una marca que se utiliza en cualquier tipo de planos (.)</li> <li>Un punto se utiliza para dividir rectas.</li> <li>Un punto es un círculo que simboliza la mitad de algo.</li> <li>Son redondos y pequeños, separan frases, es un signo de puntuación, cuando leen son tres seguidos y continua.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Es una línea que puede pasar por un punto o mas, forma figuras como cuadrados, triángulos etc.</li> </ul>

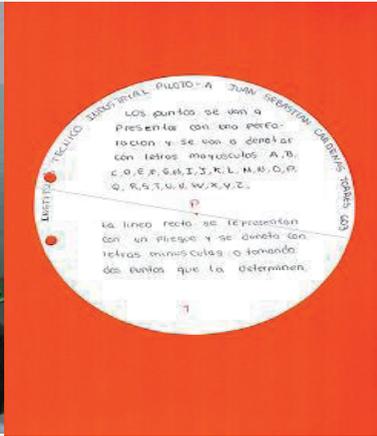
En seguida de realizar una serie de preguntas para que los estudiantes compararan sus ideas, se les presentaron algunas que se encuentran en las notas de pie de página del libro I de los Elementos de Euclides (Euclides, 1991, p.189-191); sin la pretensión de elegir una sino que los niños y las niñas siguieran comparando para que construyeran su propio concepto.

PUNTO	RECTA
<ul style="list-style-type: none"> <li>Los pitagóricos indicaban la unidad geométrica.</li> <li>Significaba originalmente marca o puntuación.</li> <li>Tenía el significado de signo, señal y otros asociados.</li> <li>Aristóteles: El punto es el límite de la línea.</li> <li>Alejandro de Afrodisia: Los elementos primeros del plano son las líneas, y de las líneas los puntos.</li> <li>Euclides: un punto es lo que no tiene partes. Recogiendo la idea de punto como aquello que es indivisible en partes. (átomo).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La de un hilo tenso.</li> <li>La de un rayo de luz.</li> <li>La de un eje o lugar de los puntos que se mantienen inmóviles en un cuerpo fusiforme suspendido por ambos extremos.</li> <li>Aristóteles: La línea es el límite de la superficie.</li> <li>Arquímedes: La recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos.</li> <li>Euclides: 1. Una línea es una longitud sin anchura. 2. Los extremos de una línea son puntos. 3. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.</li> </ul>

## 6.2. Conceptos básicos: Representación, apropiación del lenguaje y la notación

El desarrollo de las actividades propuestas dirige a los estudiantes a dos tipos de desenlace: los que se identifican con un término o palabra (definición) y los que describen una relación entre elementos geométricos. En este aparte se explorarán las primeras y en el aparte (5.3.), las segundas.

Las actividades presentan instrucciones a partir de las cuales los estudiantes, junto con el docente, elaboran las construcciones; las instrucciones están vinculadas a las características o cualidades específicas de conceptos geométricos. Las características se fueron revisando con los estudiantes con el propósito de recogerlas con un término o palabra, y se obtuvieron así las definiciones. Es importante resaltar que el nombre o denominación se aporta después de enumerar las características que lo constituyen.



### ACTIVIDAD I: Representación del punto, la recta y el plano

Después de estudiar las nociones primitivas (punto, recta y plano), en esta actividad se ejemplificaron; el docente ilustró la notación y el modo de representar cada noción primitiva.

**PUNTO:** Se representa con una perforación.

Se acostumbra a denotar los puntos con letras mayúsculas tales como: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

**RECTA:** La línea recta se representa con un pliegue.

Las rectas se denotan con letras minúsculas tales como: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z.

**PLANO:** Se representa con una hoja.

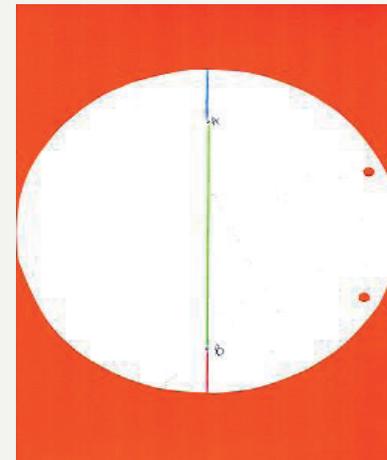
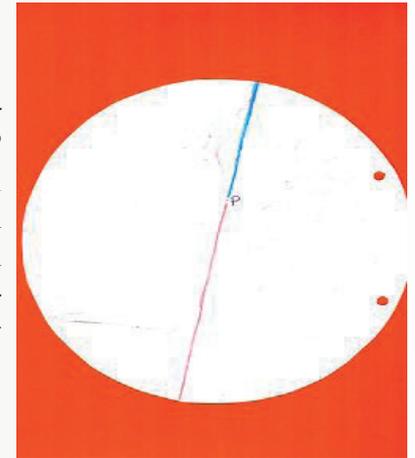
Cada plano se denota con una letra griega en negrilla  $\alpha$  (alpha),  $\beta$  (beta),  $\gamma$  (gamma),  $\theta$  (theta),  $\Omega$  (omega),  $\epsilon$  (épsilon),...

### ACTIVIDAD II: Subconjuntos de la recta

En esta actividad se realizan las construcciones y a cada porción de la recta, resaltada con un color, se le asigna el nombre. Esta es una tarea en la que se busca que los estudiantes identifiquen las partes en que queda dividida o seccionada la recta. En el momento de preguntar por los nombres que recibían estas partes o secciones de la recta, ningún estudiante contestó, pero sí iden-

tificaron las partes coloreadas e incluso, guiados por el docente, incluyeron los puntos entre las partes de la recta.

Para el primer caso, los estudiantes señalaron los dos colores y dijeron que el punto P determinaba dos partes sobre la recta. Con la intervención del docente localizaron el tercer subconjunto unitario; el punto P para esta construcción en particular. A las secciones resaltadas con color rojo y con color azul se les dio el nombre de semirrectas.



Para el segundo caso, algunos estudiantes señalaron los tres colores y dijeron que en tres partes. Aquí con la intervención de otros estudiantes y del docente, los demás estudiantes localizaron los subconjuntos unitarios; los puntos A y B para esta construcción en particular. A las secciones resaltadas con color rojo y con color azul se les dio el nombre de semirrectas y a la resaltada con color verde el de segmento de recta.

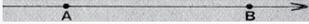
Ahora, de las definiciones ilustradas en la siguiente tabla y obtenidas de libros de texto para los subconjuntos de la recta, semirrecta y rayo; se optó por las primeras (Garriga & Garrido, 1972, p.122-123) para el diseño de las instrucciones de esta actividad.

SEMIRRECTA	RAYO
1.- Sobre una recta, cada uno de los lados de un punto se llama <b>semirrecta</b> . Se dice: un punto sobre una recta divide a la recta en tres subconjuntos: el <b>punto</b> y las dos <b>semirrectas</b> .	1.- Un rayo es la unión de una semirrecta con su extremo.
2.- A una figura semejante al rayo, pero que no tiene origen, se denomina semirrecta se denota por $\overleftrightarrow{AB}$ y se lee "semirrecta AB"... Esta definición puede expresarse simbólicamente de la manera siguiente $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \{X/A-B-X\}$	2.- Dados dos puntos A y B, se llama rayo a la reunión del segmento $\overline{AB}$ y el conjunto de puntos "más allá" de B. Esta definición puede expresarse simbólicamente de la manera siguiente: $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X/A-B-X\}$
3.- Un <b>rayo</b> o <b>semirrecta</b> es la porción de la línea que cae a un lado de un punto e incluye al punto. Por ejemplo, en la figura la semirrecta $\overrightarrow{CD}$ comienza en el punto C y atraviesa D. El punto inicial de la recta se llama <b>origen</b> .	
4.- Es cada una de las partes en que queda dividida una recta por un punto que está sobre ella... En este texto la palabra rayo y semirrecta son sinónimos.	

La definición escogida obliga a quien realiza la actividad, a analizar la recta e identificar los elementos geométricos que la componen. Las segundas definiciones (De la Cruz, 1978, p.197-198), aunque tienen los mismos fundamentos, se definen en el orden contrario, esto dificulta el proceso que se pretendía trazar. Mientras que la tercera (Villagómez, 1998) y cuarta definición (Cardona, Cardozo, López, Posada & Ramírez, 1996, p.16) no dan lugar a un análisis donde se descomponga y se recomponga la recta en sus elementos.

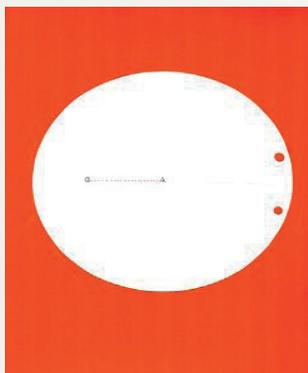
### ACTIVIDAD III: Interestancia-Estar entre

Para el tercer subconjunto de la recta, segmento de recta, se tienen las siguientes definiciones tomadas de libros de textos, tanto universitarios como escolares:

SEGMENTO DE RECTA	
1. Dados los puntos A y B sobre una recta a, damos el nombre de segmento a la parte de recta comprendida entre A y B. Los puntos entre A y B se llaman puntos en el segmento o puntos interiores al segmento AB. Los puntos A y B reciben el nombre de puntos extremos del segmento. Los restantes puntos en la recta se llaman puntos exteriores del segmento. 2. El conjunto ** se conoce como segmento de extremos A y B. Entre sus puntos están A y B; de los restantes, se dice que están situados entre A y B. El orden en que se nombren los extremos es indiferente, de manera que, en tanto que conjuntos, se tiene ...  ** : semirrecta cerrada de origen A a la que pertenece B.	3. Cuando es necesario considerar todos los puntos de una recta ordenados en un sentido determinado, se le agrega una flecha tal como indica la figura siguiente:  Si sobre una recta así ordenada se determinan dos puntos A y B, queda dividida en tres porciones: el conjunto de los infinitos puntos anteriores al punto A, el conjunto de los infinitos puntos comprendidos entre A y B, y el conjunto de los infinitos puntos posteriores al punto B. La porción comprendida entre A y B, cuya longitud podemos medir con una regla graduada, se denomina segmento... 4. Llámese segmento de recta, ó más sencillamente recta, a la porción de recta indefinida comprendida entre dos puntos determinados... La recta es la menor distancia entre dos puntos; por lo tanto la recta es menor que cualquier otra línea que tenga los mismos extremos...

Se eligió la primera (Guerrero, 2002, p.17) para el diseño de las instrucciones de la actividad puesto que le facilita al estudiante identificar los componentes de aquello que se quiere construir y que se denomina segmento de recta. También, fue pertinente abordar la segunda definición aportada (Raya, Rider & Rubio, 2007, p.22), pero se debe hacer un trabajo anterior relacionado con operaciones entre conjuntos para aplicarlas a conjuntos de puntos y resaltar la sección de recta "común" a dos rayos, mediante el empleo de lápices de colores. La tercera (Hurtado, 1970, p.4-5) requiere de un estudio previo sobre orden y sentido, sin embargo, esta definición facilitó el diseño de la actividad II; aunque solamente se consideraron tres de los cinco subconjuntos.

La cuarta (Bruño, 1962, p.8) se presta para confusión porque denomina segmento de recta de modo abreviado como recta. Sin embargo, si se toma la definición no como recta sino como segmento, se puede pensar en una actividad en la que previamente se desarrolle un trabajo desde el concepto “distancia” entre objetos geométricos; pero para esto se debe revisar también el concepto de “perpendicularidad”.



Del desarrollo de esta actividad los estudiantes concluyeron lo siguiente:

¿Qué entiende por segmento de recta?	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Que entre dos puntos en el centro hay otros puntos.</li> <li>• Una línea que tiene punto de inicio y punto final que se saca de una recta.</li> <li>• Es el pedazo de recta que está entre dos puntos.</li> <li>• Es una línea que va de un punto a otro.</li> <li>• Es un territorio de la recta del plano que tiene dos puntos o más de extremo y adentro hay más puntos.</li> <li>• Es una recta con dos puntos, se denota con un vínculo en la parte superior.</li> <li>• Una línea de puntos que está dentro de esos puntos.</li> <li>• Una recta en la cual se ubican dos puntos y entre ellos más.</li> <li>• Es poner los puntos por ejemplo P y R, entre P y R hay un segmento.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Donde pasan infinitos puntos.</li> <li>• Una forma de una recta.</li> <li>• Una línea que pasa por puntos y que va solo hacia un lado.</li> <li>• Una recta con 2 o más puntos para crear un segmento.</li> <li>• La mitad de una recta hasta un punto.</li> <li>• Conformadas por longitudes.</li> <li>• Las rectas que pasan sobre puntos.</li> <li>• Una línea que separa grupos.</li> <li>• Cuando hay perforaciones y que una recta pase por las perforaciones.</li> <li>• Donde se colocan diferentes perforaciones.</li> <li>• Un grupo de vocales.</li> </ul>

Se vislumbra que los estudiantes utilizan palabras sofisticadas para describir lo que corresponde al concepto construido de “segmento de recta”. No obstante se encuentran estudiantes que buscan adivinar la respuesta mediante el uso de las palabras mencionadas en clase, mientras que otros se limitan a detallar la representación física (nivel de visualización).

#### ACTIVIDAD IV: Transportar y trasladar segmentos

En esta actividad se busca que los estudiantes puedan comparar segmentos y se introduce el concepto de **congruencia de segmentos**.

#### ACTIVIDAD V: Representación del semiplano

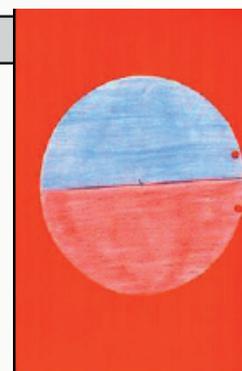
De las siguientes definiciones sobre **semiplano** transcritas de textos escolares,

se adoptó la segunda (Garriga & Garrido, 1972, p.122) para el diseño de las instrucciones de la actividad, aunque se tomaron elementos de la primera (Barnett & Uribe, 1996, p.231) y tercera definición (Hurtado, 1970, p.6). En la primera y la segunda definición, cada semiplano no incluye la recta o no se hace explícito, mientras que en la tercera el semiplano está compuesto por la unión de la recta y los puntos situados a uno de los lados de la recta. Está última definición es a la que se pretendía guiar a los niños y las niñas durante el desarrollo de esta actividad.

SEMIPLANO	
<p>1. Según vimos..., un punto divide la recta en dos semirrectas. En forma similar, una recta divide al plano en dos semiplanos... La recta se llama arista de cada semiplano.</p> <p>2. Sobre un plano, cada uno de los lados de una recta se llama <b>semiplano</b>. Se dice: Una recta sobre un plano divide al plano en tres conjuntos: la recta y los dos <b>semiplanos</b>.</p>	<p>3. Una línea recta divide al plano que la contiene en dos porciones o semiplanos. Un semiplano es el conjunto de los infinitos puntos situados a un lado de la recta y el otro semiplano es el conjunto de los infinitos puntos situados al otro lado de la recta. Los puntos de la recta son los únicos puntos comunes que tienen los dos semiplanos.</p>

Ellos concluyeron lo siguiente:

Los estudiantes debían contestar con una frase:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Un semiplano es la mitad de un plano dividido por una recta.</li> <li>• Es una clase de plano rellena de puntos y en el plano puede haber [tres] 3 el de arriba, la recta y el de abajo.</li> <li>• Es una parte dividida del plano completo. Es decir si pasamos una recta en el plano hay dos semiplanos, uno a cada lado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Una línea que forma tres conjuntos.</li> <li>• Es un pedazo de plano.</li> <li>• Es una línea que va por un plano.</li> <li>• Donde tres conjuntos se denotan con diferentes colores.</li> <li>• Donde se colorea de color rojo y azul.</li> <li>• Es una hoja plana.</li> <li>• Doblar la hoja por la mitad.</li> </ul>

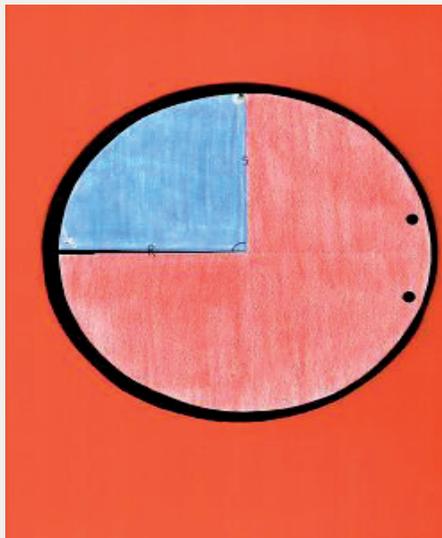


Es evidente que los estudiantes se remiten a la construcción elaborada por ellos mismos para concluir. En este instante el docente debe intervenir para guiarlos en el paso de las relaciones concretas a las abstractas.

## ACTIVIDAD VI: Rayos-Ángulos

Esta actividad está diseñada con el propósito de que los niños y las niñas con la interacción del docente, le asignen nombres a los subconjuntos de la recta, específicamente semirrecta y rayo, y encuentren diferencia entre éstos.

Además, descompongan en partes el plano e identifiquen las dos regiones que se determinan, los rayos que se van a llamar lados del ángulo y el vértice de los ángulos que se forman.



Las actividades IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV y XVI, a modo de las descritas anteriormente, se diseñaron teniendo en cuenta varios libros, tales como enciclopedias generales, enciclopedias temáticas, textos universitarios y textos escolares. Este tipo de consulta permitió profundizar en cada concepto para contribuir con actividades en un orden específico, a fin de mantener cierto rigor que permitiera continuar sobre una línea lógico-deductiva aceptable. Por ésta razón, la elección de las definiciones que se tomaron de los libros se hizo de manera caprichosa.

En cuanto a la diversidad de definiciones para un solo concepto es importante afirmar que se debe elegir una o sintetizar algunas de éstas, para llevarla al aula y no todas porque se prestaría para confundir a los estudiantes; si se introduce alguna es porque se aborda en la discusión o se deja a manera de comentario. De lo contrario, no se podría seguir un desarrollo de modo lógico-deductivo.

Con plegado de papel se tienen avances en lo siguiente: se ejecutan más construcciones en el mismo tiempo que cuando se trabajaba con regla y compás, es decir, se abordan más conceptos en el mismo tiempo destinado para estudiar las nociones básicas de la geometría plana, los estudiantes no se confunden con tantos trazos y el docente puede interactuar con el grupo y quienes lo integran también.

ÁNGULO	
1. Un ángulo es la unión de dos rayos que tienen su extremo en común. El extremo común se llama vértice y los rayos que lo forman lados.	3. Un ángulo se puede considerar también como un conjunto de semirrectas que tienen el mismo origen, cuando se supone engendrado por la rotación de una semirrecta, en la siguiente forma: Si una semirrecta de origen O, se gira sobre el plano, alrededor de su origen, desde la posición inicial OA hasta la posición final OB, girando en el sentido indicado... engendra el ángulo AOB.
2. Angulo es la porción del plano limitada por dos semirrectas que tienen un origen común.	

La definición de ángulo que se asume para esta actividad es una síntesis entre la primera (Caro, Obonaga & Pérez, 1987, p.237) y la segunda (Hurtado, 1970, p.10): ángulo es la porción del plano limitada por dos rayos que tienen un origen común. El origen común se llama vértice y los rayos que lo forman lados. La tercera definición (Hurtado, 1970, p.10-11) difiere de las anteriores porque emplea los conceptos giro y “barrido” para definir ángulo de forma cinética.

### 6.3. Construcciones geométricas: Ligadas a la construcción del conocimiento geométrico

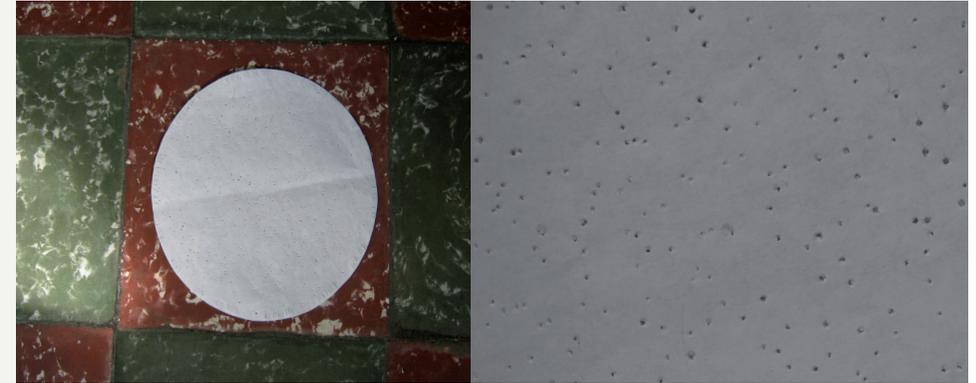
#### ACTIVIDAD I: Representación del punto, la recta y el plano

Las relaciones que los estudiantes debían establecer en esta actividad eran dos:

En un plano, “por cada punto pasan infinitas rectas” (Pastor & Adam, 1965, p.6).

De lo cual concluyeron:

Los estudiantes debían contestar con una frase:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es 10.</li> <li>• Máximo 100 pero son infinitas las que se trazan.</li> <li>• Sobre el punto pasan infinitas rectas.</li> <li>• Infinito pues ya se sabe que el punto va a infinito.</li> <li>• Por un punto pueden pasar infinitas rectas.</li> <li>• El número máximo que puede pasar por ese punto es infinito porque podemos pasar muchas rectas por ese punto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Por el éste punto pasan demasiadas rectas, quiere decir que es infinita.</li> <li>• Se puede pasar 1 sola recta máxima.</li> <li>• No hay número máximo de rectas, las rectas son infinitas. Por un punto pasan infinitas rectas.</li> <li>• De un punto pueden salir infinitas rectas.</li> <li>• El número que pasa es infinito porque es un plano infinito y hay rectas infinitas.</li> </ul>



“Un plano es un conjunto de infinitos puntos” (Hurtado, 1970, p.2).

De lo cual concluyeron:

Los estudiantes debían contestar con una frase:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Infinitos.</li> <li>• Un plano tiene infinitos puntos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Un plano esta formado por miles de puntos.</li> </ul>

Obsérvese que hay estudiantes que se restringen a lo concreto de la construcción; esto permite pensar que cualquier tipo de material para enseñar limita el estudio de la geometría. Aquí el docente debe buscar, a través del diálogo, la abstracción de aquello que se está representando físicamente. Además, se encuentra que los niños y las niñas intentan adivinar la frase recapitulando las explicaciones del docente.

#### ACTIVIDAD V: Representación del semiplano

La relación que los estudiantes debían establecer en esta actividad era:

“Por dos puntos A y B pasa una línea recta y solamente una” (Ochoa, Romero & Villarraga, 2003, p.2).

De lo cual concluyeron:

Los estudiantes debían contestar con una frase:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sobre dos puntos pasa una recta.</li> <li>• Por dos puntos puede pasar una recta.</li> <li>• En dos puntos solo cabe [una] 1 sola recta.</li> <li>• Una recta para hacer un segmento.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Por esos dos puntos se pueden trazar [tres] 3 rectas.</li> <li>• [Una] 1 recta solamente se puede plegar.</li> <li>• Por dos perforaciones pasa una recta.</li> </ul>

Es evidente que los niños y las niñas se encuentran en la estructura de conocimiento que corresponde al nivel 1 (Reconocimiento, visualización o familiarización): los objetos geométricos son reconocidos por su apariencia física; los reconocen por su dibujo, emplean frases que describen la apariencia física y nombran sus elementos mediante cualidades no geométricas (el color y los recursos para representar).

Para finalizar con la descripción de las actividades diseñadas para esta experiencia, se plantearon dos: VII (Puntos colineales y puntos no colineales) y VIII (Euler en el plano) para que los estudiantes recocieran regularidades numéricas. Estas actividades sugieren un tipo de análisis que involucra otros dominios matemáticos, sin embargo, es pertinente realizar actividades con los niños y las niñas para que vinculen la geometría con la aritmética y se promueva la búsqueda de regularidades numéricas.

## CONCLUSIONES

Culturalmente la enseñanza ha estado motivada por la comunicación de datos, conocimientos, reseñas, saberes y resultados de procesos que otros pensaron y, como lo diría Estanislao Zuleta: “la educación, tal como ella existe en la actualidad, reprime el pensamiento... no enseña ni permite pensar”. Por su puesto, el aprendizaje de las matemáticas no se escapa de este hecho, puesto que una clase de matemáticas comúnmente tiene la siguiente estructura: revisión de la tarea asignada, aclaración de dudas, explicación del tema (el profesor expone las definiciones y la respectiva simbología), exposición de ejemplos ilustrativos (se dictan y ejecutan los pasos para realizar construcciones) y formulación de la nueva tarea. En este contexto, “saber significa entonces simplemente repetir” (Zuleta, 1985, p.22) y con este esquema denominado práctica tradicional de enseñanza, los docentes hacen un mal favor a los estudiantes, les ahorramos “la angustia de pensar.”

En el caso de la geometría, las prácticas tradicionales de enseñanza se caracterizan, además de lo expuesto anteriormente, por el olvido de las relaciones entre objetos geométricos y conceptos básicos, por la prioridad que se le da a las magnitudes, por el abandono de la generalización que provoca que se dejen de lado los métodos de razonamiento tanto deductivo como inductivo, y por el trabajo individualista de los niños y las niñas.

El cambio de esta práctica tradicional de enseñanza se logra a través de replantear el papel que desempeñan los profesores en la sociedad, es decir, de su actuar con responsabilidad, compromiso y ética. Lo que conduce a que se asuma, entre otras cosas, una actitud de permanente búsqueda de alternativas para enseñar y desarrollar de manera significativa el aprendizaje de la geometría. Así mismo, para contribuir en mejorar la formación no sólo intelectual sino también social de los estudiantes, dado que en las clases se promueven espacios en los que los participantes interactúan y son protagonistas de sus aprendizajes, aportan sus percepciones y enriquecen sus constructos mentales de manera dialógica. En síntesis, se reclama por un cambio en la manera de proceder como docentes, con el fin de beneficiar a niños y niñas del I.T.I.P.

Por ello, el docente mínimamente tiene el deber de analizar lo que se enseña y cómo se enseña, por tal razón, se revisaron algunos recursos didácticos que posibilitan la enseñanza de la geometría, entre estos se adoptó el plegado de papel. Posteriormente, se inició la implementación de unas actividades que se fueron acondicionando para que los estudiantes construyeran los conceptos geométricos. Una característica a resaltar es que el nombre de las relaciones y objetos geométricos se aportaban al final, esto tenía lugar después del análisis y de la puesta en común de las ideas de quienes participaron en las clases. Lo anterior también provocó cambios en las actuaciones de los docentes y de los estudiantes en cada una de las sesiones de clase.

Ya que en el momento de diseñar las actividades para el aprendizaje de la geometría, mediante el plegado de papel, se pensó introducirlas con el juego. Así se permitiría un mejor acercamiento de los niños y las niñas a la geometría. Además, la intención de las actividades fue involucrar activamente a niños y niñas en el estudio de esta rama de las matemáticas para que también avanzaran en procesos de comunicación al argumentar sus razonamientos. A partir del constructivismo, del juego y del modelo de Van Hiele se desarrolló el trabajo con los estudiantes desde la enseñanza de las matemáticas y específicamente a partir de la enseñanza de la geometría.

Los estudiantes realizaron las construcciones con una hoja (plano geométrico) por actividad, lo que les permitió vincular sus constructos mentales con las representaciones geométricas elaboradas por ellos. Es de resaltar que en el desarrollo de esta experiencia la intervención o participación de los niños y niñas en la clase se fortaleció a tal punto que hasta los que generalmente no se interesaban en la clase se involucraron, pues se contagiaron de aquellos que expresaban sus conclusiones o resultados y buscaban la manera de decir lo que encontraban.

Entonces se observó en la mayoría de los estudiantes un cambio de actitud frente a la clase: ahora se escuchaban los unos a los otros, entre todos buscaban negociar y llegar a acuerdos sobre las maneras como percibían los objetos geométricos, como también sobre las normas de convivencia de la clase. Lo anterior condujo a que ellos obtuvieran rápidamente resultados positivos,

aspecto que los motivó a responder activamente a las cuestiones presentadas en las clases, a repensar sus propias respuestas y a confirmar sus sospechas a partir de las dadas por sus compañeros, dieron importancia a la duda y a reconocer al otro como un interlocutor válido.

Por otro lado, al revisar las respuestas que enunciaron los estudiantes se evidenció que ellos aún se encuentran en la estructura de conocimiento que corresponde al nivel 1 (reconocimiento, visualización o familiarización). Se vislumbra que el empleo del plegado es pertinente para que avancen al nivel 2 (Análisis o descriptivo) porque este tipo de material se presta para resaltar con perforaciones y lápices de colores ciertas propiedades de los objetos geométricos representados por este medio y analizar, a través de la descomposición y la recomposición, la construcción elaborada.

Estos comportamientos y propuestas, retan al docente pues debe promover que los estudiantes se ayuden mutuamente en la comprensión de los conceptos geométricos (identifiquen y relacionen), enuncien preguntas, elaboren conclusiones. En fin, para que se genere un ambiente propicio para la comunicación de ideas mediante el uso, de ser posible, de un lenguaje matemático.

Por tanto, un aspecto importante para la experiencia tiene que ver con las interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante.

a.- En la primera relación el docente tiene como intención fortalecer una actitud positiva hacia la geometría a través de un juego estructurado cuyo implemento es el papel. El docente también debe participar en el juego para guiar a los niños y las niñas hacia la construcción de conocimiento de tipo geométrico. Además, se debe involucrar en el juego, cuestionar y promover actividades que desafíen el pensamiento de cada estudiante; en esta interacción se promueve la discusión, en ella, el docente amplía el tema, introduce notaciones y, lo más importante, permite que el niño o la niña participen ilustrando sus ideas.

b.- En la relación estudiante-estudiante los niños y las niñas, luego de concluir sobre algún aspecto de la geometría, lo explican; así se propicia la discusión para que cada estudiante contraste sus ideas, las compruebe o rectifique.

Para esto se hace indispensable la interlocución (hablar-escuchar) entre todos los actores de la clase y de esta manera permitir la construcción de conocimiento de modo cooperativo.

Sin embargo, este proceso permitió vislumbrar lo que hace falta incorporar a la experiencia: i.- otras oportunidades para discutir, a partir de “buenas preguntas”, es decir, que lleven a los estudiantes a pensar, a asumir nuevos retos, ii.- mantener en los estudiantes un espíritu reflexivo y iii.- vincular la geometría con otras ciencias y artes.

Estas conclusiones son el resultado de la sistematización de la experiencia “Aprendizaje de la geometría con plegado de papel”, que les sirvió para recuperar una serie de episodios que dan cuenta de las interacciones dadas en ciertas prácticas de la clase. La reconstrucción ayudó a hacer explícito el vínculo que existe entre la teoría y la práctica, para producir conocimiento que transforme las prácticas de enseñanza.

Con el presente documento se espera que los docentes de matemáticas puedan rescatar elementos de manera crítica para enriquecer los procesos que se desarrollan en las instituciones educativas y se abra la posibilidad de mejorar la calidad de la educación.

## BIBLIOGRAFÍA

Alsina, Claudi; Burgués, Carme y Fortuny, Joseph M<sup>a</sup>. (1988). Materiales para construir la geometría. Madrid: Síntesis.

Alsina, Claudi; Burgués, Carme y Fortuny Joseph M<sup>a</sup>. (1995). Invitación a la didáctica de la geometría. Madrid: Ed: Síntesis.

Andrade, Luisa; Perry, Patricia; Guacaneme, Edgar y Fernández, Felipe. (2003). Rutas pedagógicas en matemáticas: ¿Azar o construcción? Bogotá: IDEP.

Barnett, Raymond A. y Uribe C, Julio A. (1996). Algebra y geometría 1. Bogotá: Ed. McGRAW-HILL.

Bruño, G.M. (1962). Geometría (antiguo curso superior). 10<sup>a</sup> edición. Ed. Bedout.

Cardona, Oscar; Cardozo, Claudia; Lopez, Guillermo; Posada, Ricardo y Ramírez, Elmer. (1996). Geometría Básica. Universidad Pontificia Bolivariana. Ciencia Básica.

Caro M, Víctor E; Obonaga G, Edgar y Perez A, Jorge A. (1987). Matemática I: aritmética y geometría. Ed. PIME.

De Guzmán, 1984, p.10-14. Artículo “juegos matemáticos en la enseñanza” publicado en Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas Santa Cruz de Tenerife.

De La Cruz S., Máximo. (1978). Matemática moderna I: Educación Media. Colombia: Bogotá. Ed. didáctica Ltda.

Euclides. (1991). Los elementos. Traducida por María Luisa Puertas Castaño. España: Editorial Gredos.

Federación Internacional de Fe y Alegría. (2007). Propuestas para la sistematización de experiencias educativas y la formación de los educadores de Fe y Alegría (mimeografiado).

Garriga R, Francisco y Garrido T, José L. (1972). Serie MATEMÁTICA MODERNA I. Bogotá: Ed. NORMA.

Guerrero G, Ana B. (2002). Geometría en el plano y en el espacio. Bogotá: Universidad Nacional. Facultad de Ciencias: Notas de clase.

Hilbert, David. (1953). Fundamentos de la geometría. Madrid: publicaciones del instituto “Jorge Juan” de matemáticas.

Rodrigo, María José y Arnay, José. (compiladores) (1997). La construcción

del conocimiento escolar: Temas de Psicología. Tesis sobre el constructivismo. España, Ed. Paidós.

Hurtado A, Pompilio. (1970). Geometría primera parte. Curso de Matemáticas para 3o. de Bachillerato. Colombia. Bogotá. Ed. Instituto de Matemáticas.

Ochoa, C; Romero, M y Villarraga, L. (2003). Nociones de geometría con plegado. Colombia: Bogotá. Grupo Editorial Criterio.

Pastor, Rey y Adam, Puig. (1965). Elementos de geometría racional: Tomo 1.- Geometría plana. España, Madrid.

Raya Andrés, Rider Alfonso, y Rubio Rafael. (2007). Algebra y geometría lineal. Barcelona: Ed. Reverte.

Samper, Carmen; Camargo, Leonor y Leguizamón, Cecilia. (2003). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. Bogotá: ASOCOLME.

Secretaría De Educación Distrital. (2000). Resultados: Evaluación de Competencias Básicas en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias Naturales, Cuarta Aplicación. Bogotá, Unibiblos.

Secretaría De Educación Distrital - VII Foro Educativo Distrital: “Las Matemáticas Mucho Más Que Cuatro Operaciones”. (2002). Serie diálogos: memorias. Bogotá.

Villagómez, Hugo. (1998). Matemáticas básicas: Álgebra, trigonometría y geometría analítica. México: Compañía Editorial Continental.

Zuleta, Estanislao. (1985). Educación y Democracia: un campo de combate. Bogotá: corporación Tercer Milenio.

XX



# AUTOR

**Javier Mauricio Jiménez Guevara**

[javiermauricioj@gmail.com](mailto:javiermauricioj@gmail.com)

Nació en Bogotá, Colombia en 1972. Terminó estudios de pregrado en la Universidad de Cundinamarca en Fusagasugá, donde obtuvo el título de Licenciado en Matemáticas y Física.

Adelantó estudios de posgrado en las universidades Pontificia Universidad Javeriana y Universidad Francisco José de Caldas, donde obtuvo los títulos de Especialista en Docencia de las matemáticas en la primera y Especialista en Educación Matemática en la segunda. Estuvo vinculado laboralmente a la Universidad Antonio Nariño. Actualmente es docente de planta del Distrito en el I.E.D. Instituto Técnico Industrial Piloto y docente con vinculación especial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Coautor de la serie Glifos para educación básica y media.



