

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ SPÉCIALISÉE EN DATA SCIENCE

Simulations N-Body de Halos de trous noirs primordiaux

Tallier, Elise

Award date:
2019

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

SIMULATIONS N-BODY DE HALOS DE TROUS NOIRS PRIMORDIAUX

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en « Sciences mathématiques à finalité spécialisée en Data Science »**

Elise TALLIER
Août 2019



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

SIMULATIONS N-BODY DE HALOS DE TROUS NOIRS PRIMORDIAUX

Promoteurs :

Anne-Sophie LIBERT

Sébastien CLESSE

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en « Sciences mathématiques à finalité spécialisée en Data Science »

Elise TALLIER

Août 2019

Remerciements

Les premières personnes que je souhaiterais remercier sont mes promoteurs, Anne-Sophie Libert et Sébastien Clesse, qui m'ont accompagnés durant un an et demi pour la rédaction de ce mémoire. Je voudrais remercier Anne-Sophie Libert pour sa minutie et son attention et j'aimerais remercier Sébastien Clesse pour sa patience et sa motivation lors des très nombreuses entrevues qui pouvaient parfois durer des heures.

Je voudrais également remercier l'ensemble des professeurs que j'ai pu rencontrer durant mes études. Ils ont forgé la mathématicienne que je suis aujourd'hui et ont permis de renforcer mon esprit critique.

Je tiens également à remercier tous les amis que j'ai pu rencontrer durant mes études, tant en mathématiques qu'ailleurs. Ils ont contribué énormément à la motivation nécessaire pour venir à bout de ces études.

Enfin, je remercie ma famille sans qui toute cette aventure aurait été impossible.

Abstract

La matière noire reste depuis des années un grand mystère. De quoi est-elle composée? Parmi les différentes hypothèses à propos de la composition de la matière noire, nous retrouvons les trous noirs primordiaux. Depuis la détection des ondes gravitationnelles, ceux-ci sont de nouveau un candidat sérieux à la matière noire dans l'Univers. Après la découverte d'un radio filament connecté au trou noir supermassif de notre galaxie, Sagittaire A^* , l'objectif de ce mémoire était de reproduire ce filament à l'aide de simulations à n corps réalisées avec le code Gadget-2. Après avoir obtenu une configuration de cluster plus stable, nous avons ajouté un trou noir supermassif afin d'observer l'influence de celui-ci et si une structure de type filament apparaissait. Après variation des paramètres, nous avons obtenu une structure de type filament mais n'avons pas pu conclure que les trous noirs primordiaux en étaient l'origine.

Dark matter remains a mystery for years. What is it made of? Among the different hypotheses about the composition of dark matter, we find primordial black holes. Since the detection of gravitational waves, they are again a serious candidate for dark matter in the Universe. After the discovery of a radio filament connected to the supermassive black hole of our galaxy, Sagittarius A^* , the objective of this memory was to reproduce this filament using N-Body simulations realised with the code Gadget-2. After obtaining a more stable cluster configuration, we added a supermassive black hole to observe the influence of this one and if a filament structure appeared. After variation of the parameters, we obtained a filament structure but could not conclude that the primordial black holes were the origin.

Table des matières

1	La piste des trous noirs	6
1.1	La matière noire	6
1.1.1	Les premières observations	6
1.1.2	Les hypothèses	8
1.1.3	Les récentes observations	9
1.2	Les trous noirs	12
1.2.1	Les trous noirs stellaires	13
1.2.2	Les trous noirs supermassifs	15
1.2.3	Les trous noirs primordiaux	16
1.2.4	Les observations	17
1.3	Les trous noirs primordiaux comme candidats à la matière noire	18
1.3.1	Les motivations	19
1.3.2	Les contraintes actuelles	19
1.3.3	Les tests sur l'hypothèse des trous noirs primordiaux	20
1.3.4	Les observations du centre galactique	21
1.4	Les objectifs	23
2	Le code Gadget-2	24
2.1	Le code	24
2.1.1	Les équations de base	25
2.1.2	Les forces gravitationnelles	27
2.1.3	le softening gravitationnel	29
2.1.4	L'intégration des équations	29
2.2	Le fonctionnement du code	31
2.3	L'installation du code	31

2.3.1	N-Genic	31
2.3.2	Gadget-2	32
2.4	La description des conditions initiales	35
2.4.1	Le fichier de conditions initiales de N-Genic	36
2.4.2	Le fichier de paramètres de Gadget-2	38
2.5	Le lancement d'une simulation	40
2.6	Les fichiers de sortie	41
3	Les simulations	45
3.1	La stabilisation du cluster	49
3.2	L'ajout d'un trou noir supermassif	55
3.3	La variation du paramètre d'impact	59
3.4	La variation de la vitesse	64
3.5	La variation de la taille du cluster	64
3.6	La synthèse et l'interprétation des résultats	66

Introduction

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à la cosmologie et plus particulièrement aux trous noirs primordiaux, à savoir des trous noirs créés juste après l'inflation. Ces objets cosmologiques seront décrits plus en détail dans le premier chapitre.

Après la découverte d'un radio filament connecté au trou noir supermassif de notre galaxie, Sagittaire A^* , l'objectif de ce mémoire est de reproduire ce filament à l'aide de simulations à n corps réalisées avec le code Gadget-2. Les simulations feront intervenir un cluster de trous noirs primordiaux et un trou noir supermassif, le but étant de démontrer que ce sont des trous noirs primordiaux qui créent ce filament.

De façon plus détaillée, nous commencerons par exposer la problématique de la matière noire. Nous citerons les différentes hypothèses concernant l'origine de cette matière noire avant de nous concentrer sur les trous noirs et plus particulièrement sur les trous noirs primordiaux. Nous présenterons les différentes motivations pour considérer les trous noirs primordiaux comme candidats à la matière noire (chapitre 1). Ensuite, nous présenterons le code Gadget-2. Nous présenterons les éléments importants du code, la façon d'installer le code, les conditions initiales, comment lancer une simulation et le format des fichiers de sortie (chapitre 2). Enfin, nous effectuerons des simulations à n corps à l'aide du code Gadget-2 afin de reproduire le radio filament connecté au trou noir galactique Sgr A^* (chapitre 3).

Chapitre 1

La piste des trous noirs

Dans ce chapitre, nous introduirons tout d'abord la problématique de la matière noire en présentant les premières observations, les différents candidats à la matière noire et les récentes observations. Avant d'introduire le cas particulier des trous noirs primordiaux comme candidats à la matière noire, nous étudierons les différents types de trous noirs : les trous noirs stellaires, les trous noirs supermassifs et les trous noirs primordiaux. Nous présenterons également les différentes façons de détecter ces derniers. Nous étudierons les différentes motivations et contraintes actuelles, ainsi que les observations qui permettront de tester l'hypothèse des trous noirs primordiaux. Nous aborderons également le sujet du centre galactique. Comme expliqué précédemment, de récentes observations montrent l'existence d'un radio filament dont l'origine est jusqu'à présent inconnue. Un des objectifs de ce mémoire sera d'étudier, à l'aide de simulations à n corps, si une population de trous noirs primordiaux proche du centre galactique peut être à l'origine de ce radio filament.

1.1 La matière noire

La densité de matière de notre Univers est composée à 85% d'une matière invisible et dont la nature et les propriétés sont à ce jour méconnues. Elle est appelée la *matière noire*. Depuis des décennies, les cosmologistes essaient de découvrir de quoi est constituée cette mystérieuse matière et de nombreuses hypothèses ont vu le jour. Nous verrons que les observations actuelles privilégient davantage les particularités de certaines hypothèses. Cette section est basée sur les ouvrages [1], [2] et [3].

1.1.1 Les premières observations

Dans les années 1930, un astronome américano-suisse, Fritz Zwicky, pointe le problème de matière manquante pour la première fois [4]. L'analyse des vitesses dans un amas de galaxies permet d'estimer la masse de cet amas. En observant la

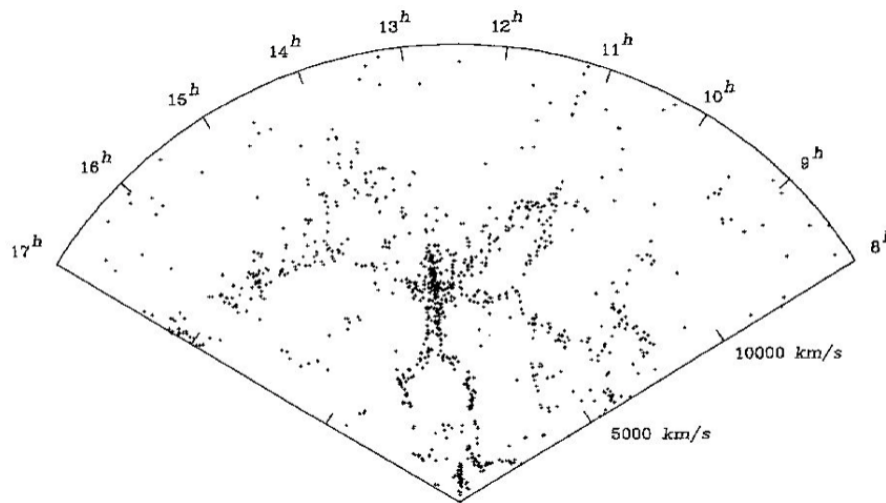


FIGURE 1.1 – Distribution des vitesses dans l’amas de Coma. Chaque point représente la vitesse et la position angulaire d’une galaxie. On localise les galaxies en fonction de leur décalage vers le rouge. Figure issue de [1].



FIGURE 1.2 – Gauche : Amas de Coma, Source : [8] ; Milieu : Amas de Virgo, Source : [9] ; Droite : Galaxie d’Andromède, Source : [10].

distribution des vitesses dans l’amas de Coma, Fritz Zwicky remarque que la masse estimée de cette façon est près de cent fois supérieure à celle visible, c’est-à-dire qu’il y a plus de matière que sa luminosité ne le suggère. Il conclut alors que l’amas doit contenir une grande quantité de matière qui explique le mouvement anormal des galaxies. A la FIGURE 1.1, nous pouvons observer la distribution des vitesses dans l’amas de Coma.

Par la suite, de nombreuses observations (voir FIGURE 1.2) confirment les observations de Zwicky. En 1936, Sinclair Smith trouve dans l’amas de Virgo des rapports de masses semblables [5]. En 1938, Horace Babcock observe la galaxie d’Andromède et calcule une masse bien supérieure à la masse visible [6]. Les mesures deviennent de plus en plus précises et dans les années 60, Vera Rubin et son équipe montrent que ce fait, observé sur seulement quelques galaxies, est plutôt général. En 1980, ils publient un article confirmant ce problème de masse pour 21 autres galaxies [7].

Les astronomes nomment cette matière manquante la matière noire. Selon [3], celle-ci agit comme un liant gravitationnel, assurant la cohésion des galaxies et des amas de galaxies entre elles. Elle apporte le supplément d'attraction empêchant les galaxies en rotation d'éjecter le gaz et les étoiles de leurs régions les plus externes.

La nature de la matière noire reste encore aujourd'hui un mystère mais nous pouvons cependant en donner certaines propriétés. Tout d'abord, la matière noire agit sur la dynamique des galaxies et a contribué à leur naissance. Grâce aux relevés des galaxies, la distribution de la matière dans l'Univers a pu être déterminée avec précision. Aussi, la matière noire agit comme une lentille gravitationnelle. Il s'agit d'un phénomène bien observé par les astronomes. En effet, la matière entraîne la courbure de l'espace et la déviation de la lumière des objets lointains. Les physiciens envisagent plusieurs candidats à la matière noire, comme nous le montrons à la section suivante.

1.1.2 Les hypothèses

La première hypothèse sur la matière noire a été mise en évidence en 1980. Il s'agit de l'hypothèse des MACHOs, *massive astrophysical compact halo objects*. L'ensemble des machos comprend les trous noirs, les planètes et les naines brunes, des étoiles trop peu massives pour déclencher des réactions de fusion de l'hydrogène. Ce sont donc des objets très compacts qui n'émettent pas ou peu de lumière, ce qui en fait de bons candidats pour la matière noire. Ces objets se situent dans le halo galactique et produiraient l'attraction gravitationnelle nécessaire pour expliquer le mouvement du gaz et des étoiles. Cependant, l'hypothèse des MACHOs a vite été abandonnée à partir des années 2000 suite à des recherches de microlentilles (une variante des lentilles gravitationnelles). Ces observations ne semblent pas rendre compte de l'abondance de trous noirs nécessaires pour expliquer la matière noire.

Une autre hypothèse a été évoquée. L'hypothèse des WIMPs, *weakly interactive particles*. Ces particules semblent être de bons candidats car ce sont des particules stables, massives et qui agissent très peu avec la matière. Prédites dans certaines extensions théoriques du modèle standard de la physique des particules, elles restent à ce jour indétectables et ce malgré de nombreuses recherches via des accélérateurs de particules ainsi que des expériences de détections directes et indirectes. D'autres particules hypothétiques (AXIONS,...) sont également considérées comme candidats à la matière noire.

Une explication alternative existe. L'existence de la matière noire repose sur des éléments d'origine gravitationnelle. En effet, le problème de matière manquante se base sur les observations du contenu de l'Univers. Dès lors, nous pouvons remettre

en question notre compréhension de la relation entre les masses et la gravitation. Supposons que la force de gravitation décroît moins vite avec la distance et que les courbes de rotation peuvent alors s'écrire sans introduire la matière noire. Cette dernière hypothèse, nommée MOND pour *Modified Newtonian Dynamics*, a été introduite par Milgrom en 1983.

Comme explicité dans [1], l'idée de cette hypothèse est la suivante : il existe une accélération limite, a_0 qui sépare les cas où $a \gg a_0$ et où $a \ll a_0$, représentant respectivement le régime des grandes accélérations et le régime des faibles accélérations. Dans le cas où $a \gg a_0$, la loi de Newton est vérifiée et

$$a = \frac{GM}{r^2},$$

et dans le cas où $a \ll a_0$, cette relation est remplacée par

$$\frac{a^2}{a_0} = \frac{GM}{r^2},$$

ce qui donne une loi en $1/r$. L'accélération a_0 est une constante fondamentale de la nature déterminée numériquement à 10^{-8} cm/s^2 , valeur proche de l'accélération obtenue en multipliant la vitesse de la lumière par la constante de Hubble. Cependant, cette hypothèse propose une modification de la loi de Newton alors que celle-ci découle de la relativité générale. Il est en outre controversé que les théories de MOND parviennent à vérifier certaines des observations récentes résumées dans la section suivante.

1.1.3 Les récentes observations

Une série d'observations semblent confirmer ou infirmer certaines des hypothèses évoquées ci-dessus. Dans cette section, nous parlerons notamment des vitesses et courbes de rotation des étoiles dans les galaxies, de l'Amas de la Balle, du fond cosmique micro-ondes et de la distribution des galaxies.

Vitesses et courbes de rotation des étoiles dans les galaxies

La courbe de rotation d'une galaxie est un graphe représentant la vitesse orbitale des étoiles ou du gaz dans la galaxie en fonction de leur distance au centre de la galaxie. Selon la théorie de Newton, à partir d'une distance faible du centre de la galaxie, la vitesse de rotation décroît. Cependant, ce n'est pas ce qui a réellement été observé. Les différentes vitesses ne décroissent pas rapidement et semblent se stabiliser. Nous observons cette différence de manière schématique à la FIGURE 1.3.

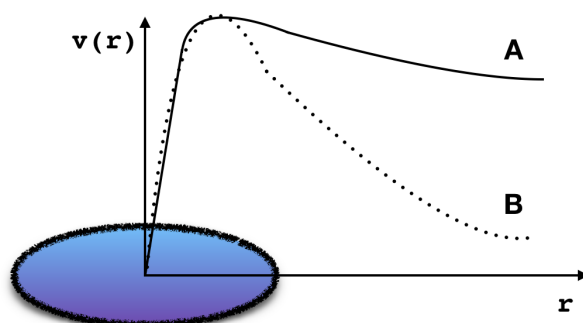


FIGURE 1.3 – Représentation des courbes de rotation des étoiles autour de leur galaxie. La courbe A est la courbe de rotation réellement observée et la courbe B est la courbe prévue par la théorie de Newton en l'absence de matière noire. Inspiré de [11].

Le problème de rotation des galaxies est donc la différence entre ces courbes, c'est-à-dire entre la courbe prédite par la théorie de Newton et celle représentant ce qui est réellement observé. Une manière d'expliquer cette différence est d'introduire la matière noire. Cependant, la théorie MOND introduite précédemment pourrait également justifier cette différence. En effet, en dessinant la courbe de rotation des galaxies selon cette théorie, on retrouve une courbe correspondant aux observations, comme montré dans [12].

Amas de la Balle

Située à près de 3,4 milliards d'années-lumière de nous, l'Amas de la Balle a été découvert en 1995. Les galaxies de l'Amas de la Balle sont visibles mais leurs masses représentent seulement une fraction de la masse des nuages de gaz chaud émettant des rayons X. Nous pouvons observer ces nuages présents en rouge à la FIGURE 1.4. Les deux sphères bleues représentent quant à elles la distribution de matière sombre, invisible. Celle-ci a été mise en évidence grâce à l'effet de lentille gravitationnelle sur les galaxies en arrière-plan [13]. Cette observation est compatible avec l'hypothèse selon laquelle la matière noire est constituée de particules comme les WIMPS ou les MACHOs. Cependant, elle semble rejeter l'hypothèse de gravité modifiée MOND.

Dans le cas particulier de cet amas, la distribution de gaz est décalée par rapport aux centres des puits de potentiel gravitationnel. Ceci peut facilement être expliqué dans le cas de la matière noire. En effet, lorsque deux amas de galaxies entrent en interaction, la matière noire et les galaxies ne rentrent pas en collision. Elles sont seulement freinées par leur attraction gravitationnelle. Par contre, les composantes de gaz émettant les rayons X entrent en collision, les laissant en arrière. En revanche,



FIGURE 1.4 – Amas de la Balle. La partie rouge représente la matière visible tandis que les deux sphères bleues représentent la matière invisible. Source : [14].

le décalage est plus difficilement explicable pour l'hypothèse de gravité modifiée, comme explicité dans [14].

Fond cosmique micro-ondes

Cette section est inspirée de [15].

En 1965, afin de découvrir l'origine du bruit de fond dans leur antenne radio, l'équipe des laboratoires AT&T (*American Telephone and Telegraph*) ont examiné le fond cosmique micro-ondes, affirmant la théorie du Big Bang qui établit le fait que l'Univers primordial était un plasma chaud et dense. L'expansion de l'Univers a ensuite refroidi ce fond cosmique micro-ondes, le rendant extrêmement froid en comparaison.

La théorie de l'inflation suggère une phase d'expansion accélérée de l'Univers dans les premiers moments après le Big Bang, déclenchant des fluctuations de densité qui, après inflation, déclenchent des ondes sonores. Ces ondes sonores se compressent alternativement, rendant les différentes régions de l'Univers inhomogènes. Le refroidissement de cet Univers durant la phase d'expansion a ensuite figé ces fluctuations de densité dans le fond cosmique micro-ondes.

En étudiant la fréquence de ces ondes, l'âge et la composition de l'Univers primordial ont pu être déterminés. En 1990, le satellite COBE, *Cosmic Background Explorer*, établit le spectre des radiations du fond cosmique micro-ondes. Les cosmologistes ont réussi à mesurer la proportion de matière noire dans l'Univers. En effet, la matière ordinaire seule ne pouvait pas causer ces fluctuations de densité.

Ces observations du fond cosmique micro-ondes vont à l'encontre de l'hypothèse des MACHOs comme candidats à la matière noire car ces éléments ne faisaient

pas partie de l'Univers primordial. Cependant, les hypothétiques trous noirs primordiaux pourraient être de bons candidats.

Distribution des galaxies

En observant le spectre de puissance de la matière qui reprend les propriétés statistiques de la distribution de la matière dans l'Univers, nous voyons que la matière semble se présenter comme des filaments. Selon [16], "Si la densité moyenne des galaxies est \bar{n}_{gal} , l'inhomogénéité fractionnaire peut être étendue en modes de Fourier k . Le spectre de puissance $P(k)$ est défini par

$$\langle \hat{\delta}(k)\hat{\delta}(k') \rangle = (2\pi)^3 P(k)\delta^3(k - k'),$$

où $\hat{\delta}(k)$ est la transformée de Fourier à 3 dimensions de $\delta(x)$ et où les crochets représentent une moyenne sur l'ensemble de la distribution."

Comme décrit dans [17], "À quantité de matière égale, le spectre de puissance des fluctuations va dépendre du rapport Ω_{b0}/Ω_{m0} entre la matière baryonique et la matière noire. En particulier quand la quantité relative des baryons augmente, des oscillations apparaissent dans le spectre des perturbations."

Nous avons donc vu les différentes hypothèses concernant l'origine de la matière noire. Grâce aux récentes observations étudiées dans cette section, certaines de ces hypothèses semblent être à rejeter. En effet, les hypothèses des WIMPs et MOND semblent incompatibles avec certaines de ces observations. Pour la suite, nous allons nous concentrer sur l'hypothèse des MACHOs et en particulier sur les trous noirs.

1.2 Les trous noirs

Comme [18] l'indique, les observations suggèrent deux types de population de trous noirs : les trous noirs stellaires dont la masse varie entre 5 et $50M_{\odot}$ et les trous noirs supermassifs dont la masse est de l'ordre de $10^6 - 10^9M_{\odot}$. Il existe aussi certaines spéculations sur les *trous noirs primordiaux*, des trous noirs qui se seraient formés moins d'une milliseconde après le big bang. L'existence d'une population de trous noirs de masse intermédiaire est encore débattue.

La récente détection des ondes gravitationnelles par les interféromètres Ligo et Virgo a suscité un regain d'intérêt pour les *trous noirs primordiaux* comme candidats à la matière noire, et donc pour l'hypothèse des MACHOs. Nous n'avons pas de preuve solide que les trous noirs primordiaux existent dans notre Univers mais ceux-ci semblent être une explication possible pour les phénomènes observés.

1.2.1 Les trous noirs stellaires

Nous verrons dans cette section que les spéculations sur les trous noirs ne sont pas récentes. En effet, ceux-ci ont été évoqués pour la première fois en 1915 dans la théorie de la relativité générale d'Einstein. Nous résumerons également le mécanisme de formation d'un trou noir suite à la mort d'une étoile. L'explication suivante est inspirée de [18].

L'existence des trous noirs

En se basant sur l'observation que la vitesse d'échappement

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

où M est la masse stellaire et R le rayon, est indépendante de la masse de la particule, John Mitchell et Jean Simon Laplace ont déduit à la fin des années 1700 que les corps célestes à la fois petits et massifs pouvaient devenir invisibles. Avec la théorie de la lumière de Newton, ceci peut également être appliqué à la lumière. En effet, la lumière ne peut pas échapper à l'étoile si la vitesse d'échappement dépasse la vitesse de la lumière

$$v_{esc} > c,$$

ce qui se produit lorsque

$$GM > \frac{c^2 R}{2}.$$

Cela signifie que les étoiles avec une masse suffisamment grande et un rayon suffisamment petit deviennent "sombres". Laplace va jusqu'à dire que ces objets existent en un nombre équivalent aux étoiles visibles.

En 1915, Albert Einstein publie un article sur la relativité générale et l'équation du champ de celle-ci :

$$G_{ab} = 8\pi GT_{ab}.$$

Le tenseur G_{ab} contient de nombreux termes non linéaires. Dès lors, les équations d'Einstein constituent un ensemble compliqué de 10 équations, pour les 10 composantes de la métrique de l'espace-temps g_{ab} . Il était donc très difficile de trouver une solution exacte à ce problème en se basant sur le cas général. Un an après la publication d'Einstein, Karl Schwarzschild trouve la solution en se basant sur la symétrie sphérique. La métrique de l'espace-temps g_{ab} , décrivant la solution et écrite comme un élément ds^2 , est

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ab} dx^a dx^b \\ &= - \left(1 - \frac{G 2M}{c^2 r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{G 2M}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \end{aligned}$$

La métrique ci-dessus devient singulière en son *rayon de Schwarzschild*

$$r_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

La solution de Schwarzschild est rejetée de l'appréciation publique pendant près de 50 ans et ce pour trois grandes raisons. En effet, l'effondrement gravitationnel rendait les intéressés sceptiques, entre autres par le manque d'observations astronomiques, et la singularité du rayon de Schwarzschild était loin d'être comprise de tous. Cependant, cette métrique ne pose pas problème. En effet, il ne s'agit pas d'une singularité physique et donc d'une singularité gravitationnelle. Il s'agit d'une singularité mathématique pour la métrique classique de Schwarzschild.

Cette solution permet de rendre compte de l'existence de trous noirs. Il existe un champ gravitationnel au centre duquel se trouve une singularité gravitationnelle, c'est-à-dire une région de l'espace-temps où le champ gravitationnel devient infini. Nous savons désormais que les trous noirs existent, mais comment sont-ils créés ?

La mort d'une étoile

"Les trous noirs stellaires sont formés par des étoiles. Les étoiles, à la fin de leur « vie », connaissent des destins très différents dont la nature dépend de la masse initiale de l'étoile." [19]

Cette section est inspirée de [19]. La matière d'une étoile est composée en partie d'hydrogène et d'hélium. Dans la première partie de sa vie, l'étoile brûle son oxygène de façon à le transformer en hélium. La combustion de celui-ci est proportionnelle à la masse de l'étoile. Ainsi, pour une étoile de la masse du Soleil, la combustion prendra environ 10 milliards d'années. Une fois que tout l'hydrogène est consommé, l'hélium commence à être brûlé à son tour. C'est à ce moment que l'étoile se transforme en géante rouge. Ce qui se déroule ensuite dépend de la masse de l'étoile.

Lorsque l'étoile est peu massive, elle est incapable de brûler le carbone généré par la fusion de l'hélium. Par conséquent, le noyau de l'étoile se contracte créant une naine blanche. Celle-ci résiste à l'effondrement gravitationnel grâce à la pression de dégénérescence des électrons (pression à laquelle sont soumis les électrons). Les naines blanches ont une masse inférieure à 1.44 masses solaires (limite de Chandrasekhar) car autrement, la pression du gaz dégénéré ne peut faire face à la gravitation.

Les étoiles suffisamment massives que pour aller jusqu'à la fusion de l'hélium forment divers éléments jusqu'au Fer56, l'élément le plus stable s'accumulant au centre des étoiles. Ce noyau résiste également à la pression de dégénérescence des électrons mais s'effondre lorsque sa masse dépasse la limite de Chandrasekhar. Suite

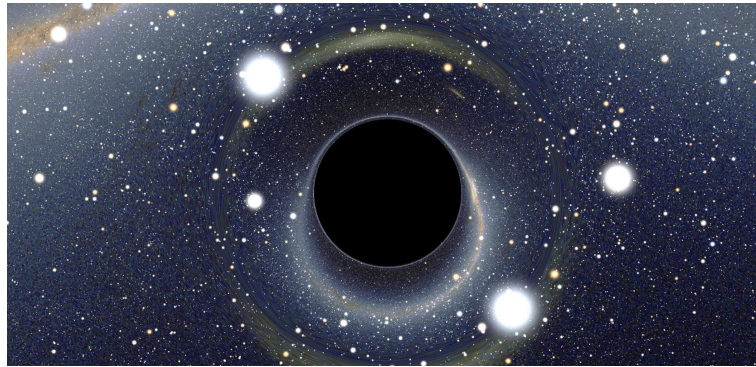


FIGURE 1.5 – La voûte céleste telle que la verrait un observateur situé près d'un trou noir devant le centre de notre galaxie. Source : [19].

à cet effondrement cassant les noyaux, les protons peuvent fusionner avec les électrons pour former des neutrons. L'ensemble des électrons, protons et neutrons peut alors résister à la force gravitationnelle grâce à la dégénérescence des nucléons et à l'interaction forte (responsable de la cohésion des noyaux atomiques). Dans ce cas, le noyau devient une étoile à neutrons.

Enfin, dans le cas où la masse du noyau Fer56 est supérieure à la limite d'Oppenheimer -Volkoff (entre 2.4 et 3.2 masses solaires), l'étoile devient un trou noir. En effet, la force gravitationnelle ne peut pas être compensée et l'étoile s'effondre en-dessous du rayon de Schwarzschild, rayon de l'horizon des événements du plus simple trou noir. L'image hypothétique d'un trou noir est montrée à la FIGURE 1.5

1.2.2 Les trous noirs supermassifs

Comme explicité dans [20] et [21], les trous noirs supermassifs sont des trous noirs géants dont la masse solaire peut aller d'un million à plusieurs milliards de masses solaires. Les trous noirs supermassifs se situent au coeur de la plupart des galaxies. Des recherches suggèrent qu'ils libèrent une immense quantité d'énergie en ingurgitant de la matière. Ils seraient à la source de la luminosité des quasars, les objets les plus brillants de l'Univers. Déterminer la façon dont les trous noirs ont réussi à engloutir autant de matière est une tâche plutôt compliquée pour les astronomes. Les quasars pourraient donc aider à les comprendre davantage.

L'hypothèse selon laquelle les trous noirs supermassifs sont devenus aussi grands en avalant d'énormes quantités de gaz s'avère difficile à expliquer. En effet, l'existence de trous noirs un milliard de fois plus massifs que le Soleil seulement 800 millions d'années après le Big Bang a été révélée. La plupart des astronomes pensent que les trous noirs supermassifs se seraient formés à partir de trous noirs de masse intermédiaire.

1.2.3 Les trous noirs primordiaux

Les *trous noirs primordiaux* sont d'hypothétiques trous noirs qui seraient nés dans les premiers instants de notre Univers, moins d'une seconde après le Big Bang. On appelle *inflation* la période suivant directement le Big Bang. Il s'agit d'une phase d'expansion accélérée de l'Univers, motivée par les observations du fond cosmique micro-ondes. Toutes les structures de l'Univers pourraient avoir comme origine des fluctuations quantiques microscopiques qui deviennent macroscopiques grâce à l'inflation. Des trous noirs primordiaux peuvent se former après l'inflation si ces fluctuations de densité atteignent une valeur critique ($\delta_{cr} \simeq 0.4$) permettant l'effondrement gravitationnel.

Selon certains modèles de formation, les trous noirs primordiaux se sont formés et se sont regroupés en amas à des temps plus tardifs. Chaque amas peut contenir des millions de trous noirs. Ils pourraient avoir aidé à la croissance des galaxies en fusionnant, en s'éparpillant et en absorbant le gaz et la poussière. Ils pourraient aussi être à l'origine des trous noirs supermassifs [3].

Selon [22], la distribution de masse des trous noirs primordiaux a été impactée par l'histoire thermique de l'Univers. Sur la FIGURE 1.6, nous observons des pics à 2 et $36 M_{\odot}$.

Les trous noirs primordiaux sont les trous noirs qui vont nous intéresser pour la suite du mémoire. Dans la section 1.3, nous montrerons que les trous noirs primordiaux sont de bons candidats à la matière noire. Les simulations que nous effec-

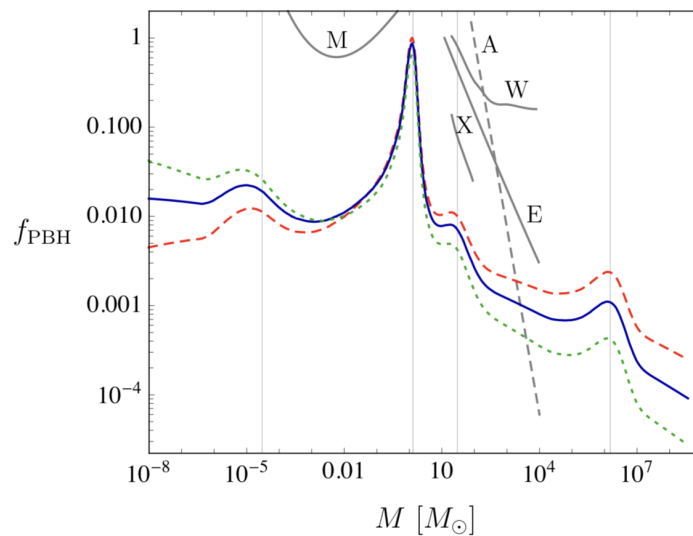


FIGURE 1.6 – Distribution de masse des trous noirs primordiaux. Figure issue de [22]

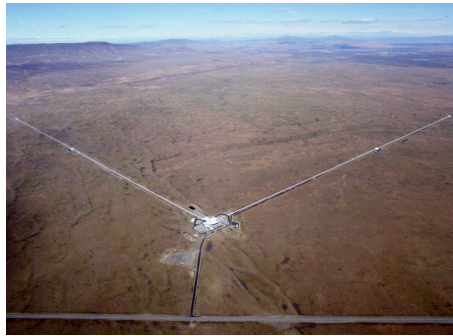


FIGURE 1.7 – L’interféromètre Ligo aux Etats-Unis. Source : [26].

tuerons porteront également sur les trous noirs primordiaux.

1.2.4 Les observations

Les trous noirs n’émettent pas de lumière, il est donc difficile de prouver leur existence par observation directe. Il existe cependant certains moyens pour les détecter. Le rayonnement X et les ondes gravitationnelles font partie de ces moyens de détection. D’une part, en spiralant, les atomes de gaz ionisés émettent des rayons X que nous pouvons détecter par les télescopes et satellites modernes [23].

D’autre part, lorsque deux trous noirs se rapprochent, ils peuvent entrer en collision et fusionner. La collision génère des ondes gravitationnelles, c’est-à-dire des petites variations de l’espace-temps. Ces ondes se propagent ensuite à la vitesse de la lumière jusqu’à atteindre notre planète. Sur Terre, les interféromètres comme Ligo et Virgo peuvent détecter ces oscillations de l’espace-temps. Ces interféromètres (interféromètres de Michelson) utilisent un rayon laser séparé en deux faisceaux. Les ondes gravitationnelles, en déformant l’espace-temps, déphasent les lasers et le déphasage produit une oscillation de la lumière sur un détecteur [24].

Comme expliqué dans [3], Ligo (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*, voir FIGURE 1.7), le complexe d’observation des ondes gravitationnelles aux Etats-Unis, a détecté, en septembre 2015, une onde gravitationnelle provenant de la fusion de deux trous noirs [25]. Ceci confirme les hypothèses sur les trous noirs de la théorie de la relativité générale d’Einstein. Se rapprochant en tournant l’un autour de l’autre il y a plus d’un milliard d’années, deux trous noirs ont fusionné. La collision résultante a été très violente et a modifié l’espace-temps, produisant des ondes gravitationnelles. C’est la première fois que des ondes gravitationnelles ont été détectées. Nous pouvons observer le signal de l’onde gravitationnelle GW150914 sur la FIGURE 1.8.

Ces détections suggèrent qu'il s'agit bien de trous noirs si nous considérons la vitesse et la minuscule séparation entre les deux corps. L'approximation de la séparation est proche de la taille caractéristique d'un trou noir, le rayon de Schwarzschild. En effet, les deux éléments étaient seulement à quelques dizaines de kilomètres l'un de l'autre et les trous noirs sont les seuls objets connus pour s'approcher sans fusionner [27].

Ces détections semblent donc être une motivation supplémentaire pour considérer les trous noirs primordiaux comme candidats à la matière noire. Cette découverte est tellement importante que les responsables de l'expérience ont reçu le prix Nobel de physique en octobre 2017. Dans la section suivante, nous expliquerons pourquoi ces observations prônent la théorie des trous noirs primordiaux comme candidats à la matière noire.

1.3 Les trous noirs primordiaux comme candidats à la matière noire

Comme son nom l'indique, nous testerons dans cette section l'hypothèse des trous noirs primordiaux comme candidats à la matière noire. Les premières personnes à proposer les trous noirs primordiaux sont Stephen Hawking, Bernard Carr et Georges Chapline dans les années 1970. Nous parlerons notamment de nos motivations envers ce candidat, des contraintes actuelles. Ensuite, nous étudierons la façon dont nous pouvons tester l'hypothèse des trous noirs primordiaux. Finalement, nous nous intéresserons au centre galactique et à la détection du radio filament. Cette section s'inspire de [3] et [28].

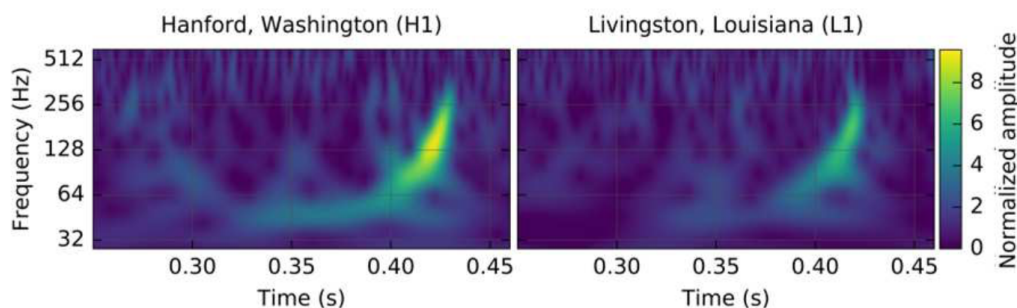


FIGURE 1.8 – L'onde gravitationnelle GW150914 détectée par les interféromètres Ligo Handford et Ligo Livingston. Source : [27].

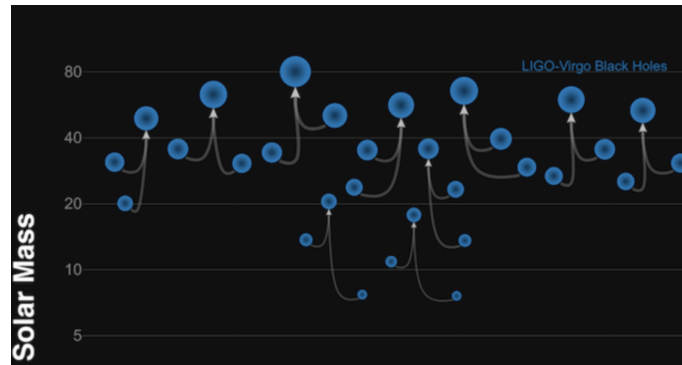


FIGURE 1.9 – Les fusions de trous noirs détectées par les interféromètres Ligo et Virgo. Source : [31]

1.3.1 Les motivations

Comme nous l'avons vu précédemment, les trous noirs primordiaux sont l'une des hypothèses sur la nature de la matière noire. La détection des ondes gravitationnelles suscite en effet un regain d'intérêt pour l'hypothèse des MACHOs et en particulier pour les trous noirs primordiaux. Ils pourraient constituer l'entièreté ou une partie de cette matière inconnue.

Les détections d'ondes gravitationnelles permettent également de montrer que la fusion de deux trous noirs n'est pas aussi rare qu'on ne le pensait. Les taux de fusion observés peuvent être expliqués si ces trous noirs ont une origine primordiale et constituent une fraction importante, voir la totalité de la matière noire (voir [29] et [30]). De plus, les masses sont relativement inattendues et les détections suggèrent des spins faibles incompatibles avec les modèles stellaires. Depuis 2016, Ligo et Virgo, l'équivalent italien, ont détecté 10 nouvelles ondes gravitationnelles résultant de la fusion de trous noirs (voir FIGURE 1.9). De nombreuses autres détections permettent d'établir une analyse plus profonde quant à l'origine primordiale de ces trous noirs.

1.3.2 Les contraintes actuelles

Une des contraintes concernant l'hypothèse des MACHOs à propos de l'effet de lentille gravitationnelle est que les trous noirs dont la masse solaire est inférieure à 10 masses solaires sont exclus des candidats à la matière noire. Or, avec l'hypothèse des trous noirs primordiaux, nous échappons au problème. En effet, la masse des trous noirs primordiaux peut varier énormément et donc être supérieure à 10 masses solaires. D'autre part, ils peuvent être regroupés en halos et la probabilité qu'un de ces halos provoque des effets de lentille gravitationnelle est inférieure à 1/1000. L'hypothèse des trous noirs primordiaux pourrait également expliquer cer-

taines observations.

Premièrement, elle pourrait régler le manque de galaxies naines censées être présentes autour des galaxies massives. Ceci pourrait être notamment dû au fait que ces galaxies naines sont peu lumineuses ou que les simulations ont surestimé le nombre de ces galaxies ou enfin qu'elles ont été absorbées par la matière noire. Les récentes simulations de l'Univers prédisent la présence de matière noire autour de ces galaxies. Dès lors, si les trous noirs primordiaux constituent la matière noire, ceux-ci engloutiraient la matière ordinaire dans les galaxies naines, ce qui expliquerait pourquoi elles sont invisibles.

Enfin, l'hypothèse des trous noirs primordiaux résoudrait le problème des trous noirs supermassifs. Ceux-ci ont une masse pouvant aller jusqu'à des milliards de masses solaires et le fait qu'ils résultent de l'effondrement gravitationnel d'une étoile est difficilement explicable en un temps si court (quelques centaines de millions d'années). Ils pourraient également expliquer les trous noirs situés, en termes de masses solaires, entre les trous noirs classiques et supermassifs.

D'autres contraintes existent. Premièrement, une façon de détecter les trous noirs primordiaux a été théorisée par Stephen Hawking, Bernard Carr et Georges Chapline en 1974 sous le nom de rayonnement de Hawking. Ils ont en effet prédit l'existence d'un grand nombre de petits trous noirs primordiaux dans le halo galactique de notre voie lactée. Ces trous noirs émettraient un rayonnement de Hawking inversement proportionnel à leur masse. Ces trous noirs s'évaporerait ensuite, créant une gigantesque explosion car ces émissions réduiraient leur masse. Si de tels trous noirs primordiaux ont été créés suite au Big Bang, nous devrions être capables d'observer les plus proches. Ensuite, si les trous noirs primordiaux de masse de l'ordre de 10^{20} kg avaient des abondances comparables à la matière noire, ceux-ci devraient être capturés dans des étoiles à neutrons, ce qui causerait leur destruction. Une limite sur l'abondance des trous noirs primordiaux peut donc être déterminée grâce à l'observation des étoiles à neutrons.

1.3.3 Les tests sur l'hypothèse des trous noirs primordiaux

Comme spécifié dans [3], différentes stratégies d'observations sont possibles :

- **La détection de nouvelles ondes gravitationnelles**

Comme nous l'avons vu, les interféromètres Ligo et Virgo sont capables de détecter les ondes gravitationnelles provenant de la fusion de trous noirs. Cependant, rien ne montre qu'il s'agisse bien de trous noirs primordiaux. Dès lors, la détection de trous noirs dont la masse est inférieure à la limite de Chandrasekhar justifierait l'origine primordiale de ces trous noirs car en-deça de

cette limite les étoiles ne peuvent pas produire de trou noir.

- **La découverte de nouvelles galaxies naines de luminosité ultrafaible**

En 2015, des dizaines de galaxies naines de luminosité ultrafaible ont été détectées dans le halo galactique. Si les trous noirs primordiaux constituent la matière noire, ceux-ci pourraient se retrouver dans ces galaxies naines et de futures observations pourraient nous permettre de détecter ces dernières.

- **La mesure des variations de position des étoiles**

Ensuite, nous pourrions détecter la présence des trous noirs plus massifs dans la voie lactée en détectant précisément la position des étoiles et des perturbations que les trous noirs exercent sur celles-ci. C'est ce que réalise la mission *Gaia*, gérée par l'ESA.

- **La cartographie de l'hydrogène neutre cosmique**

Le radiotélescope SKA pourrait également, dès 2020, cartographier les trous noirs primordiaux massifs. Comme évoqué précédemment, les trous noirs émettent un rayonnement X. Ce rayonnement ionise l'hydrogène neutre présent aux alentours et l'hydrogène produit un rayonnement dont la longueur d'onde est de 21 centimètres. Dès lors, en cartographiant le ciel à cette longueur d'onde, nous pourrions détecter les trous noirs primordiaux.

- **L'exploration du fond diffus cosmologique**

Enfin, le rayonnement X produit par les trous noirs primordiaux pourrait créer des distorsions du fond diffus cosmologique et les instruments futurs pourraient permettre de les détecter.

1.3.4 Les observations du centre galactique

Depuis 1974, nous connaissons l'existence d'un trou noir supermassif situé au centre de notre galaxie : Sagittaire A* (Sgr A*) [33]. De récentes observations suggèrent désormais l'existence d'un filament radio non-thermique (NTF pour non-thermal radio filament) connecté au trou noir galactique Sgr A* [34].

Le Very Large Array est un radiotélescope situé au Nouveau-Mexique, aux Etats-Unis. Il est formé de 27 antennes paraboliques identiques afin d'obtenir une résolution angulaire maximale d'environ 0.05 seconde d'arc.

Le Very Large Array a été utilisé pour étudier le filament radio non-thermique

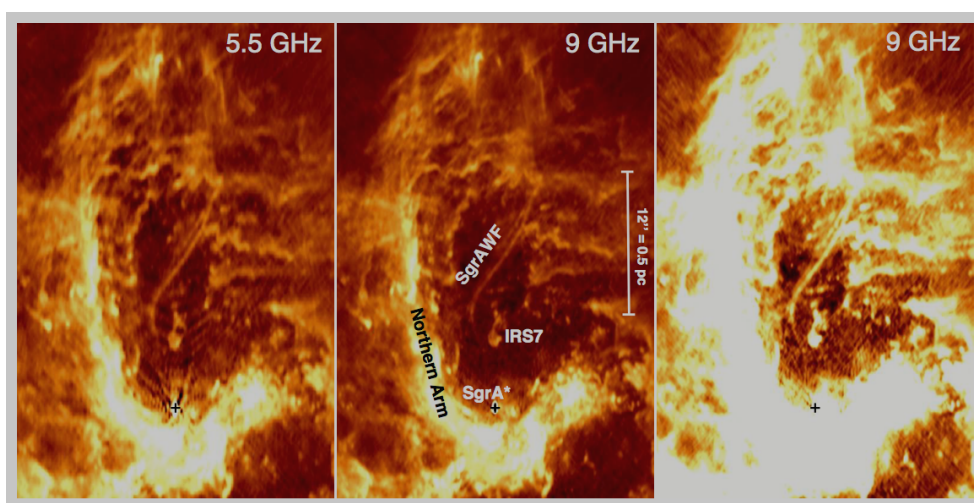


FIGURE 1.10 – Radiographies de la région nord de Sgr A*, montrant le filament SgrAWF. Le signe + marque la localisation de Sgr A*. La même échelle est utilisée pour chacune des images. Issue de [34].

près de Sagittaire A* et en obtenir des images beaucoup plus précises. Ce filament est désormais connu sous le nom de Sgr A West Filament (SgrAWF). Nous pouvons en observer des images sur la FIGURE 1.10.

Selon Mark Morris [32], responsable de l'étude : "Avec notre imagerie améliorée, nous pouvons maintenant suivre ce filament beaucoup plus près du trou noir au centre de la galaxie, et il est maintenant assez proche pour nous indiquer qu'il doit en être originaire. Cependant, nous avons encore beaucoup de travail à faire pour découvrir quelle est la vraie nature de ce filament."

L'équipe de recherche affirme qu'il y aurait trois explications possibles à l'existence de SgrAWF. La première hypothèse nous dit qu'elle proviendrait du gaz entrant. Celui-ci produirait le filament en approchant vers l'horizon des événements, frontière à partir de laquelle la lumière ne peut s'échapper du trou noir. La deuxième hypothèse suggère qu'il s'agirait d'une corde cosmique, un objet hypothétique très mince transportant de la masse et des courants électriques. Etant trop proche du trou noir galactique, la corde cosmique aurait été capturée par celui-ci. La dernière hypothèse affirme que le positionnement de ces deux éléments serait une coïncidence et qu'il n'y aurait pas d'association entre eux.

D'après Mark R. Morris et al. [34], il y a des raisons de penser qu'il y a bien une association physique :

1. Le SgrAWF est le seul NTF connu à être projeté dans les alentours de Sgr A* ;
2. La fin de la partie la plus brillante du filament au point le plus proche de Sgr

A^* pointe directement vers Sgr A^* ;

3. Alors que la plupart des NTFs ont de grands rayons de courbure variant lentement, le SgrAWF est fortement courbé à un endroit.

Nous allons explorer une autre hypothèse : ce filament proviendrait d'un amas de trous noirs primordiaux, déformé par l'interaction gravitationnelle avec le trou noir supermassif.

1.4 Les objectifs

Les objectifs du mémoire sont de réaliser des simulations N-Body sur des halos de trous noirs primordiaux à l'aide du Code Gadget-2 et de vérifier la concordance de nos simulations avec des observations du filament près du centre galactique.

Les simulations numériques

Les simulations numériques cosmologiques sont un important et puissant outil pour comprendre l'Univers. De telles simulations permettent de comprendre plus en profondeur des processus qui se déroulent sur de longues échelles de temps, choses qui sont impossibles à observer réellement. Un outil important conçu dans ce but est le code Gadget-2 [35], un code réalisé afin de simuler des collisions de galaxies ou de structures primordiales de l'Univers. Celui-ci fait l'objet du chapitre 2.

Le centre galactique

Notre objectif principal est de déterminer s'il existe une relation physique entre le filament au centre galactique et un trou noir galactique. Dans le chapitre 3, nous allons insérer dans notre code des conditions similaires au milieu dans lequel se trouve le trou noir galactique et essayer de tirer des conclusions quant à la nature de ce filament radio non-thermique. Nous adapterons ensuite les différents paramètres de la simulation afin de voir si ceux-ci ont un impact quelconque sur le comportement de la simulation.

Plus précisément, nous enverrons un trou noir supermassif sur un cluster de trous noirs. Nous ferons ensuite varier le temps de la simulation, le paramètre d'impact (la distance entre le trou noir supermassif et le cluster), la vitesse du trou noir supermassif et la taille du cluster (et par conséquent la masse de celui-ci). Le but sera d'observer l'apparition d'un filament afin d'étayer notre hypothèse selon laquelle ce sont les trous noirs qui sont à l'origine de cet objet.

Chapitre 2

Le code Gadget-2

Gadget-2 est un code permettant de réaliser des simulations cosmologiques N-Body en utilisant le calcul parallèle. Il calcule les forces gravitationnelles à l'aide d'un algorithme hiérarchique en arbre. Le code peut être utilisé de plusieurs façons : sur des systèmes isolés, pour des simulations incluant l'expansion cosmologique de l'espace, avec ou non certaines limites périodiques. Dans tous les cas, Gadget-2 permet d'étudier l'évolution d'un système à plusieurs corps sans collisions et auto-gravitant [35].

Un autre code sera nécessaire à l'exécution de Gadget-2 : N-Genic. Ce code permet la création de conditions initiales cosmologiques en se basant sur l'approximation de Zeldovich, dans un format compatible avec Gadget-2. Le code a été écrit en 2003 par Volker Springel [36]. Dans ce mémoire, nous utiliserons une version modifiée par Markus Schmidt. Nous verrons son fonctionnement et celui de Gadget-2 dans les sections suivantes.

Dans ce chapitre, nous commençons par nous plonger dans le code Gadget-2 en présentant les équations de base, l'algorithme et l'intégrateur utilisés. Nous établissons également un plan général concernant le fonctionnement du code. Ensuite, nous expliquons la façon d'installer le code. Nous montrons comment installer N-Genic et Gadget-2 ainsi que tous les composants nécessaires à la compilation de ceux-ci. Après, nous décrivons les conditions initiales nécessaires pour N-Genic et Gadget-2. Enfin, nous indiquons la façon de lancer une simulation et décrivons les fichiers de sortie ainsi que le format utilisé.

2.1 Le code

Dans cette section, nous allons décrire les points essentiels du code de Gadget-2. En particulier, nous allons présenter les équations de base des simulations cosmolo-

giques, les algorithmes gravitationnels, l'intégration du temps ainsi que les stratégies de parallélisation. Les informations de cette section proviennent des articles [35] et [40].

2.1.1 Les équations de base

Commençons par décrire l'ensemble des équations de base étudiées dans les simulations cosmologiques pour la formation de structure. Ces équations décrivent la dynamique d'un composant sans collision (matière noire ou étoiles dans les galaxies) et d'un gaz idéal (baryons ordinaires, principalement hydrogène et hélium), tous deux à la fois couplés et soumis par gravité dans un espace en expansion. Nous nous concentrerons sur les formes discrétisées des équations présentées dans [35].

Dynamique sans collision

La limite du continuum de la matière noire sans interaction est décrite par l'équation de Boltzmann sans collision couplée à une équation de Poisson dans un univers en expansion. L'équation de Boltzmann est une équation de la théorie cinétique qui décrit l'évolution d'un gaz hors équilibre par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f - \nabla \phi \cdot \frac{df}{dv} = 0, \quad (2.1)$$

où f est la fonction de distribution et ϕ le potentiel gravitationnel. L'équation de Poisson est une équation aux dérivées partielles du second ordre décrite par

$$\Delta \phi = f. \quad (2.2)$$

Le problème étant de grande dimension, le meilleur moyen de résoudre ces équations est d'utiliser la méthode N-Body où la densité de l'espace de phase est échantillonnée avec un nombre fini N de particules. La méthode N-Body est une méthode consistant à résoudre les équations du mouvement de Newton de N corps interagissant gravitationnellement.

La dynamique de ces particules est décrite par l'Hamiltonien

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i a(t)^2} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{m_i m_j \varphi(x_i - x_j)}{a(t)}, \quad (2.3)$$

où φ est le potentiel d'interaction et $H = H(p_1, \dots, p_N, x_1, \dots, x_N, t)$. x_i sont des vecteurs de coordonnées comobiles et où les moments canoniques correspondants sont donnés par

$$p_i = a^2 m_i \dot{x}_i. \quad (2.4)$$

La dépendance en temps de l'Hamiltonien découle de l'évolution $a(t)$ du facteur d'échelle donné par le modèle de Friedmann-Lemaître. Les équations de Friedmann-Lemaître correspondent aux équations de la relativité générale écrites dans le contexte d'un modèle cosmologique homogène et isotrope. Les deux équations composant ce modèle s'écrivent

$$3 \left(\frac{H^2}{2} + \frac{K}{a^2} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \rho \quad (2.5)$$

et

$$-2 \frac{\dot{H}}{c^2} - 3 \frac{H^2}{c^2} - \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4} P. \quad (2.6)$$

où H est le taux d'expansion, K la courbure spatiale, a le facteur d'échelle à la densité d'énergie ρ et P la pression.

Si on suppose avoir des conditions frontières périodiques pour un cube de taille L^3 , le potentiel d'interaction $\varphi(x)$ est solution de

$$\nabla^2 \varphi(x) = 4\pi G \left[-\frac{1}{L^3} + \sum_n \tilde{\delta}(x - nL) \right] \quad (2.7)$$

où la somme sur $n = (n_1, n_2, n_3)$ s'étend sur tous les triplets d'entiers et $\tilde{\delta}(x)$ représente la fonction δ de Dirac.

Dans ce cas, la densité moyenne est soustraite. La solution correspond donc au potentiel particulier, où la dynamique du système est gouvernée par

$$\nabla^2 \varphi(x) = 4\pi G [\rho(x) - \bar{\rho}]. \quad (2.8)$$

Pour notre système de particules discrétisé, le potentiel particulier est défini par

$$\phi(x) = \sum_i m_i \varphi(x - x_i). \quad (2.9)$$

La distribution de densité de la particule est une δ -fonction de Dirac convoluée avec une graine de softening gravitationnel normalisé à l'échelle comobile ϵ . Pour ça, nous utilisons la graine spline utilisée dans l'hydrodynamique des particules lissées et nous posons $\tilde{\delta}(x) = W(|x|, 2.8\epsilon)$ où $W(r)$ est défini par

$$W(r, h) = \frac{8}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{r}{h}\right)^2 + 6 \left(\frac{r}{h}\right)^3, & 0 \leq \frac{r}{h} \leq \frac{1}{2}, \\ 2 \left(1 - \frac{r}{h}\right)^3, & \frac{1}{2} \leq \frac{r}{h} \leq 1, \\ 0, & \frac{r}{h} > 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Pour ce choix, le potentiel newtonien d'un point de masse avec un décalage par rapport à 0 dans un espace non-périodique est $-\frac{Gm}{\epsilon}$.

Si nous le désirons, nous pouvons simplifier l'espace newtonien en posant $a(t) = 1$, de manière à faire disparaître la dépendance en temps de l'Hamiltonien.

Pour les limites du vide, le potentiel d'interaction simplifié à la forme habituelle newtonienne, c'est-à-dire, pour des points de masse, le potentiel d'interaction est donné par

$$\varphi(x) = -G/|x|, \quad (2.11)$$

modifié par le softening pour les petites séparations.

Notons finalement, que pour n'importe quel type de conditions frontières, un calcul des forces complet implique une double somme, ce qui résulte à une mise à l'échelle N^2 des coûts de calcul. Cela met en évidence le fait que la gravité a une grande portée. En effet, chaque particule interagit avec toutes les autres, rendant les solutions à grande précision pour les forces gravitationnelles très coûteuses pour un grand N [35].

2.1.2 Les forces gravitationnelles

La gravité est la force qui permet la formation de l'ensemble des objets cosmologiques de l'Univers. Notre objectif est de calculer les forces gravitationnelles auxquelles est soumise chaque paire de particules. La force gravitationnelle \vec{F}_i exercée sur une particule i est donnée par

$$\vec{F}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (2.12)$$

où G est la constante gravitationnelle, m_i sont les masses des particules et \vec{r}_i sont les coordonnées des particules.

L'algorithme en arbre

L'algorithme en arbre est un développement en série. L'idée est de grouper les particules distantes en cellules plus grandes pour permettre à leur gravité d'être calculée par une seule force multipolaire.

L'algorithme en arbre utilisé est l'algorithme de Barnes-Hut. Un noeud racine cubique est utilisé pour considérer l'ensemble de la distribution de masse. Ce noeud

est divisé en huit noeuds filles dont la longueur est la moitié de celle du noeud racine. Ce processus est répété jusqu'à ce qu'on arrive à un noeud feuille contenant des particules uniques.

Afin de calculer les forces, il faut ensuite effectuer une force sur l'arbre. On démarre du noeud racine et une décision est prise. On prend une décision en fonction de la précision du résultat du développement en série. Si l'on considère que la précision est suffisante, ce qui est souvent le cas pour de petites particules distantes, la force multipolaire est utilisée et la marche le long de cette branche se termine. Si par contre la précision n'est pas suffisante, le noeud "s'ouvre" et les noeuds filles sont considérés à leur tour.

Le résultat final de l'algorithme en arbre est généralement une approximation de la force réelle. L'erreur peut cependant être contrôlée grâce à un critère d'ouverture des noeuds. En effet, une meilleure précision sera obtenue en marchant sur les niveaux inférieurs. L'algorithme Barnes-Hut est un oct-tree. Il s'agit d'un arbre moins profond qu'un arbre binaire. Nous avons donc une consommation moindre de mémoire car moins de noeuds sont nécessaires pour un nombre N de particules.

La méthode TreePM

Dans la version de Gadget-2, il est possible de remplacer l'algorithme en arbre par une méthode hybride consistant en un mélange de la méthode de maillage de particules (*particle mesh*) et de l'algorithme en arbre. Il s'agit de la méthode TreePM.

Le potentiel de l'équation (2.9) est divisé, dans l'espace de Fourier, en une partie à longue distance et une partie à courte distance selon

$$\phi_k = \phi_k^{long} + \phi_k^{short}. \quad (2.13)$$

La partie à longue distance,

$$\phi_k^{long} = \phi_k \exp(-k^2 r_s^2), \quad (2.14)$$

où r_s décrit l'échelle spatiale de la force divisée qui peut être calculée par des méthodes de Fourier basées sur le maillage. Des transformées de Fourier discrètes sont réalisées sur le maillage et sont ensuite multipliées par une fonction de Green.

La partie à courte distance peut être résolue dans une espace réel en notant que pour $r_s \ll L$, la solution de l'équation (2.9) est

$$\phi^{short}(x) = -G \sum_i \frac{m_i}{r_i} \operatorname{erfc} \left(\frac{r_i}{2r_s} \right) \quad (2.15)$$

où $r_i = \min(|x - r_i - nL|)$ est la plus petite distance d'une particule i au point x et $erfc$ est la fonction d'erreur complémentaire. La partie short-range est calculée à partir de l'algorithme en arbre classique.

2.1.3 le softening gravitationnel

Cette section est tirée de [40]. La force gravitationnelle diverge lorsque $r \rightarrow 0$. En effet, si deux particules se rencontrent, la force gravitationnelle peut devenir très grande car les deux particules échangent de l'énergie. Pour éviter ceci, l'équation (2.12) est modifiée pour de petites distances, faisant intervenir un coefficient de longueur de softening ϵ . L'équation devient

$$\vec{F}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{Gm_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 + \epsilon^2)^{3/2}}. \quad (2.16)$$

2.1.4 L'intégration des équations

Afin d'éviter les erreurs d'intégration qui peuvent causer un changement de l'orbite, nous pouvons introduire des intégrateurs symplectiques qui vont limiter la perte d'énergie du système. En effet, l'utilisation d'intégrateurs symplectiques permet de borner l'erreur d'intégration, contrairement aux intégrateurs classiques avec lesquels l'erreur d'intégration aurait tendance à diverger. A condition que chaque étape de l'intégration soit formulée comme une transformation canonique, la structure Hamiltonienne du système peut être préservée. Un tel schéma d'intégration est appelé un schéma symplectique car les transformations canoniques laissent invariante la forme symplectique.

L'évolution de chaque particule est décrite par ces équations différentielles ordinaires

$$\dot{\vec{x}}_i = \vec{v}_i \quad (2.17)$$

$$\dot{\vec{v}}_i = \vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m_i} \quad (2.18)$$

Le temps est discrétisé en intervalles

$$\Delta t = \min \left[\Delta t_{max}, \sqrt{\frac{2\eta\epsilon}{|\vec{a}|}} \right]. \quad (2.19)$$

Le pas de temps maximum Δt_{max} , le paramètre de précision η et la longueur de softening ϵ peuvent être modifiés dans le fichier de paramètres.

Les équations (2.17) et (2.18) sont résolues en utilisant l'intégrateur *leapfrog*. Cette méthode met à jour \vec{x}_i et \vec{v}_i à l'aide d'opérateurs *kick* et *drift*. Ces opérateurs sont définis de la façon suivante :

$$D_t(\Delta t) = \begin{cases} p_i \mapsto p_i \\ x_i \mapsto x_i + \frac{p_i}{m_i} \int_t^{t+\Delta t} \frac{dt}{a^2} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$K_t(\Delta t) = \begin{cases} p_i \mapsto p_i \\ x_i \mapsto x_i + f_i \int_t^{t+\Delta t} \frac{dt}{a} \end{cases} \quad (2.21)$$

où

$$f_i = - \sum_j m_i m_j \frac{\partial \phi(x_{ij})}{\partial x_i} \quad (2.22)$$

est la force sur la particule i .

Ces deux opérateurs sont des opérateurs symplectiques. Un schéma d'intégration peut maintenant être dérivé. On peut par exemple approximer l'opérateur de l'évolution $U(\Delta t)$ pour un intervalle Δt par

$$\tilde{U}(\Delta t) = D\left(\frac{\Delta t}{2}\right) K(\Delta t) D\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad (2.23)$$

ou

$$\tilde{U}(\Delta t) = K\left(\frac{\Delta t}{2}\right) D(\Delta t) K\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad (2.24)$$

qui correspondent respectivement aux intégrateurs leapfrog drift-kick-drift (DKD) et kick-drift-kick (KDK). Ces intégrateurs sont des intégrateurs symplectiques.

Comme la partie potentielle de l'Hamiltonien n'est pas séparable, c'est-à-dire ne peut pas être exprimée en une partie dépendant uniquement des moments et une partie dépendant uniquement des positions, une intégration immédiate est impossible. Pour régler ce problème, nous pouvons séparer le potentiel entre deux parties : une partie à court terme et une partie à long terme. Cela mène à un Hamiltonien de la forme

$$H = H_{kin} + H_{sr} + H_{lr} \quad (2.25)$$

Le schéma d'intégration utilisé par Gadget-2 pour intégrer des simulations exécutées avec l'algorithme TreePM est

$$\tilde{U}(\Delta t) = K_{lr} \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \times \left[K_{lr} \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) D \left(\frac{\Delta t}{m} \right) K_{sr} \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) \right]^m K_{lr} \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \quad (2.26)$$

où m est un entier positif.

2.2 Le fonctionnement du code

Dans cette section, nous allons décrire le fonctionnement du code Gadget-2.

Le code commence avec la fonction `begrun()` effectuant l'initialisation de la simulation. Premièrement, le fichier de paramètres est défini, ensuite apparaissent des routines définissant les unités, les fichiers lisant les conditions initiales et les fichiers de redémarrage sont dès lors appelés et de la mémoire auxiliaire est allouée.

Le code exécute ensuite la fonction `run()`, fonction contenant la boucle effectuant la simulation principale, itérant sur des pas de temps simples. La boucle s'arrête lorsque la limite du temps cpu est atteinte, quand un fichier stop est trouvé dans le répertoire de sortie ou quand la simulation s'arrête car nous arrivons à `TimeMax`.

2.3 L'installation du code

Dans cette section, nous listons les différentes étapes nécessaires à l'installation de Gadget-2. Nous installons le code sur le cluster Lemaitre3 hébergé à l'Université Catholique de Louvain. Il dispose de 80 noeuds de calcul avec deux processeurs Intel SkyLake 5118 à 12 coeurs 2,3 GHz et 95 Go de RAM, ce qui correspond à 3970 Mo/coeur. Tout cela le rend adapté pour des calculs massifs en parallèle [37].

Initialement, l'installation était prévue sur le cluster Hercules. Cependant, des problèmes d'incompatibilité concernant les différents packages utilisés nous ont conduit à Lemaitre3, beaucoup plus simple d'utilisation pour le chargement de ces packages.

2.3.1 N-Genic

Dans le répertoire contenant le code N-Genic, il faut effectuer les commandes suivantes dans le terminal :

```
module load GCC
module load GSL
module load FFTW
module load HDF5/1.8.19-intel-2017b
module load OpenMPI
```

Une fois ces commandes effectuées, il faut se rendre dans le dossier GadgetReader et effectuer un make. Après, il faut retourner dans le dossier principal et effectuer une nouvelle fois un make.

2.3.2 Gadget-2

L'installation de Gadget-2 est légèrement plus complexe. Il va falloir installer préalablement différents modules indispensables pour Gadget-2. Simplement charger les modules comme précédemment n'est pas pertinent car Gadget-2 nécessite des versions bien précises de ces différents modules. Des versions trop anciennes ou trop neuves de ceux-ci pourraient engendrer des erreurs. Les différents modules à installer sont les suivants : hdf5-1.6.5, fftw-2.1.5 et gsl-2.4.

Commençons par **hdf5-1.6.5**. Une fois le module téléchargé et placé dans le même répertoire que Gadget-2, nous créons un fichier appelé, dans notre cas, `compile.sh`. Ce fichier se présente de la façon suivante.

```
#!/bin/bash

module load OpenMPI
make clean
CC=$(which mpicc) ./configure -prefix=$PWD
make
make check
make install
```

Nous effectuons ensuite, dans le terminal, les deux commandes suivantes. La première permet de rendre le fichier précédent exécutable et la deuxième permet de l'exécuter.

```
chmod +x compile.sh
./compile.sh
```

Ensuite, passons à l'installation de **fftw-2.1.5**. L'installation est très similaire à **hdf5-1.6.5**. De la même façon, il faut créer un fichier `compile.sh`, constitué de la façon suivante.

```
#!/bin/bash

module load OpenMPI
make clean
./configure -prefix=$PWD/double -enable-type-prefix
-enable-mpi
make
make check
make install

make clean
./configure -prefix=$PWD/single -enable-float
-enable-type-prefix -enable-mpi
make
make check
make install
```

Ensuite, dans le terminal, il suffit d'effectuer, comme précédemment, les deux commandes permettant de rendre le fichier exécutable et d'exécuter le fichier.

Finalement, afin d'installer **gsl-2.4**, il faut une dernière fois créer un fichier `compile.sh`, constitué de la façon suivante.

```
#!/bin/bash

module load OpenMPI
make clean
./configure -prefix=$PWD -enable-type-prefix -enable-mpi make
make check
make install
```

De nouveau, il faut rendre ce fichier exécutable et l'exécuter.

Les modules nécessaires à Gadget-2 sont dès lors installés. Pour finaliser l'installation, il faut se rendre dans le répertoire de Gadget-2 et exécuter les deux commandes suivantes.


```
module load GCC
module load OpenMPI
```

Ensuite, il faut se rendre dans le Makefile de Gadget-2 et changer les chemins vers les modules qui viennent d'être installés. La partie "Select some default" doit être écrite de la façon suivante :

```
CC = mpicc # sets the C-compiler
OPTIMIZE = -O2 -Wall -g # sets optimization and warning flags
#MPICHLIB = -lmpich
MPICHLIB =
```

En ce qui concerne "Select target computer", nous devons sélectionner le Syste-
type suivant.

```
SYSTYPE="MPA"
```

Après, la partie "Adjust settings for target computer" doit être écrite comme ceci.

```
ifeq ($(SYSTYPE), "MPA")
CC = mpicc
OPTIMIZE = -O3 -Wall
GSL_INCL = -I/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/gsl-2.4/include
GSL_LIBS = -L/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/gsl-2.4/lib -Wl, "-R
/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/gsl-2.4/lib"
FFTW_INCL= -I/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/fftw-2.1.5/single/include
FFTW_LIBS= -L/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/fftw-2.1.5/single/lib
MPICHLIB =
HDF5INCL = -I/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/hdf5-1.6.5/include
HDF5LIB = -L/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/hdf5-1.6.5/lib -lhdf5 -lz -Wl, "-R
/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/hdf5-1.6.5/lib"
#HDF5INCL = -I/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/hdf5-1.6.5/include
#HDF5LIB = -lhdf5 -lz
#HDF5LIB = -L/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/hdf5-1.6.5/lib
endif
```

En ce qui concerne les options, seules celles présentes ci-dessous doivent être consi-
dérées pour la compilation du code.

```

OPT += -DUNEQUALSOFTENINGS
OPT += -DPEANOHILBERT
OPT += -DWALLCLOCK
OPT += -DPMGRID=128
OPT += -DSYNCHRONIZATION
OPT += -DHAVE_HDF5

```

Regardons la signification de chacune des options sélectionnées [38].

- **DUNEQUALSOFTENINGS** : L'option permet d'utiliser des particules avec différentes longueurs de softening gravitationnel.
- **DPEANOHILBERT** : Le code peut amener les particules à l'ordre de Peano-Hilbert après chaque décomposition de domaine. Cela améliore la performance.
- **DWALLCLOCK** : Un timer est utilisé afin que le code puisse mesurer la consommation en temps présente dans le fichier de sortie cpu.
- **DPMGRID=128** : L'option permet l'utilisation de la méthode TreePM : la force long-range est calculée avec un algorithme PM et la force short-range avec l'arbre. Le nombre 128 indique la taille de l'arbre, qui doit obligatoirement être une puissance de 2.
- **DSYNCHRONIZATION** : Avec cette option, les particules ne peuvent augmenter leur pas de temps que si celui-ci correspond au pas de temps suivant.
- **DHAVE_HDF5** : L'option permet au code d'être compilé avec des entrées et sorties en format HDF5 (explication dans la section 2.4.)

Enfin, pour que la compilation s'exécute sans problème, il est peut-être nécessaire de modifier le `.bash_profile` du répertoire source et d'ajouter les lignes suivantes.

```

PATH=$PATH :$HOME/MasterThesis/hdf5-1.6.5/lib
LD_LIBRARY_PATH=/home/unamur/URMaC/username/MasterThesis/hdf5-1.6.5/lib :$LD_LIBRARY_PATH

export LD_LIBRARY_PATH
export PATH

```

2.4 La description des conditions initiales

Comme énoncé dans la section précédente, nous disposons, dans Gadget-2, d'un fichier de paramètres qui dépend d'un fichier de conditions initiales. Gadget-2 dispose de fichiers de conditions initiales pré-établis mais dans notre cas, nous voulons utiliser N-Genic afin de générer nous-même des conditions initiales. Dans cette section, nous allons décrire le fichier de conditions initiales de N-Genic et le fichier de paramètres de Gadget-2.

2.4.1 Le fichier de conditions initiales de N-Genic

Le fichier de conditions initiales de N-Genic requiert un certain nombre de paramètres. Ce fichier se situe dans le répertoire `inputfiles` et est nommé `ngenicInput.param`. Nous retrouvons les paramètres suivants (les paramètres concernant le nombre de particules sont facultatifs) :

- Graine aléatoire
- Taille de la box de simulation
- Nombre de particules de matière noire froide
- Nombre de halos d'étoiles (Bulge, type 3)
- Nombre de clusters d'étoiles (type 4)
- Nombre de trous noirs supermassifs (type 2)
- Densité de matière totale (en $z = 0$)
- Constante cosmologique (en $z = 0$)
- Densité de baryon (en $z = 0$)
- Paramètre de Hubble
- Redshift de départ
- Unité de longueur de la sortie
- Unité de masse de la sortie
- Unité de vitesse de la sortie
- Format de sortie du fichier de conditions initiales généré

Pour le lancement de notre première simulation, nous initialisons ces paramètres avec les valeurs suivantes des paramètres.

```

#==Required parameters==
#Random seed
Seed = 234524562

#Box size of simulation
Box = 50

#Base-filename of output files
FileBase = outTest
#Directory for storing output files
OutputDir = testdata/

#Number of particles #CDM (type 1)
NCDM = 10000

#Stars in the halo (Bulge, type 3)
NHaloStars = 1

```

```

#Total matter density (at z=0)
Omega = 0
#Cosmological constant (at z=0)
OmegaLambda = 0
#Baryon density (at z=0)
OmegaBaryon = 0
#Hubble parameter (may be used for power spec parameterization)
HubbleParam = 1
#Starting redshift
Redshift = 1

#Defines length unit of output (en cm/h)
UnitLength_in_cm = 3.085678e18
#Defines mass unit of output (en g/cm)
UnitMass_in_g = 1.989e33
#Defines velocity unit of output (en cm/sec)
UnitVelocity_in_cm_per_s = 1e5

#==Optional Parameters==
#Output format of ICs : 1 and 2 correspond to Gadget format 1 and
2, 3 is HDF5 and 4 is BigFile.
ICFormat = 3
NumFiles = 1

```

Avec N-Genic, nous générons donc un fichier de conditions initiales simulant l'interaction entre 10 000 particules de matière noire froide et une étoile. Les particules de matière noire froide correspondent à notre cluster de trous noirs et l'étoile à notre trou noir supermassif, étoile à laquelle nous donnerons la masse d'un trou noir supermassif. Les positions, vitesses et masses doivent être changées dans le fichier `main.cpp` de N-Genic. Nous générons ce fichier de conditions initiales dans le format HDF5. Le type HDF, *Hierarchical Data Format*, est un ensemble de formats de fichiers conçu pour sauvegarder et structurer des fichiers contenant énormément de données.

Afin de générer le fichier de conditions initiales, il suffit d'exécuter N-Genic avec la commande suivante.

```
./N-GenIC inputfiles/ngenicInput.param
```

Le fichier de conditions initiales est donc généré dans le répertoire `testdata` sous le nom `outTest.hdf5`.

2.4.2 Le fichier de paramètres de Gadget-2

Nous allons maintenant utiliser le fichier de conditions initiales généré précédemment par N-Genic pour initialiser le fichier de paramètres de Gadget-2 (voir la seconde ligne du fichier). Ce dernier doit être créé et placé dans le répertoire `parameterfiles`. Il est nommé, dans notre cas, `blackholes.param`.

```
% Relevant files
InitCondFile /path/S-Genic/testdata/outTest
OutputDir sim/
EnergyFile energy.txt
InfoFile info.txt
TimingsFile timings.txt
CpuFile cpu.txt
RestartFile restart
SnapshotFileBase snapshot
OutputListFilename parameterfiles/outputs_blackholes.txt

% CPU time-limit
TimeLimitCPU 1200 %36000 % = 10 hours
ResubmitOn 0
ResubmitCommand my-scriptfile

% Code options
ICFormat 3
SnapFormat 3
ComovingIntegrationOn 0

TypeOfTimestepCriterion 0
OutputListOn 0
PeriodicBoundariesOn 0

% Characteristics of run
TimeBegin 0.0 % Begin of the simulation
TimeMax 3000 % End of the simulation

% Output frequency
TimeBetSnapshot 1
TimeOfFirstSnapshot 0
CpuTimeBetRestartFile 36000.0 ; here in seconds
TimeBetStatistics 0.05
NumFilesPerSnapshot 1
NumFilesWrittenInParallel 1
```

```
% Accuracy of time integration
ErrTolIntAccuracy 0.025
CourantFac 0.15
MaxSizeTimestep 10000
MinSizeTimestep 0.0

% Tree algorithm, force accuracy, domain update frequency
ErrTolTheta 0.5
TypeOfOpeningCriterion 1
ErrTolForceAcc 0.005
TreeDomainUpdateFrequency 0.1

% Memory allocation
PartAllocFactor 1.5
TreeAllocFactor 0.7
BufferSize 500 % in MByte

% System of units
UnitLength_in_cm 3.085678e18 ; 1.0 pc
UnitMass_in_g 1.989e33 ; 1.0 solar masses
UnitVelocity_in_cm_per_s 1e5 ; 1 km/sec
GravityConstantInternal 0

% Softening lengths
MinGasHsm1Fractional 0.25
SofteningGas 0
SofteningHalo 0.01
SofteningDisk 0
SofteningBulge 0.1
SofteningStars 0
SofteningBndry 0
SofteningGasMaxPhys 0
SofteningHaloMaxPhys 0.01
SofteningDiskMaxPhys 0
SofteningBulgeMaxPhys 0.1
SofteningStarsMaxPhys 0
SofteningBndryMaxPhys 0
MaxRMSDisplacementFac 0.2

% Further parameters of SPH
DesNumNgb 50
MaxNumNgbDeviation 2
ArtBulkViscConst 0.8
InitGasTemp 0 % always ignored if set to 0
MinGasTemp 0
```

```
% Constants for cosmological simulations
Omega0 0
OmegaLambda 0
OmegaBaryon 0
HubbleParam 1.0
BoxSize 0
```

La signification de chacune des variables ci-dessus se trouve à l'annexe A. Pour nos simulations, nous avons conservé les valeurs des différents paramètres proposés par défaut.

2.5 Le lancement d'une simulation

Dans un premier temps, afin de nous familiariser avec le code, nous voulons lancer une simulation entre le cluster de trous noirs et une étoile.. Pour ce faire, nous disposons du fichier de conditions initiales généré par N-Genic. Il est nécessaire de se rendre dans le répertoire `parameterfiles` et d'indiquer, dans le fichier nommé `blackholes.param`, le bon chemin vers ce fichier. Il faut modifier la ligne `InitCondFile` de la façon suivante.

```
InitCondFile path/S-Genic/testdata/outTest
```

Ensuite, nous devons créer un fichier afin de pouvoir lancer la simulation avec ces données initiales sur le cluster `lemaitre3`. Il s'agit, dans notre cas, d'un fichier nommé `simulation.sh` présenté de la façon suivante.

```
#!/bin/bash
#
#SBATCH -job-name=test
#SBATCH -output=res.txt
#
#SBATCH -ntasks=2
#SBATCH -time=01 :00 :00
#SBATCH -mem-per-cpu=2000
#SBATCH -partition=batch,debug

mpirun -np 2 ./Gadget2 parameterfiles/blackholes.param
```

La ligne intitulée `job-name=test` indique que le nom du job lancé sur le cluster est appelé `test`. La ligne intitulée `output=res.txt` indique la présence du fichier de sortie nommé `res.txt`. Nous trouvons dans ce fichier tout ce qui se note habituellement sur le terminal. La ligne intitulée `ntasks=2` indique que deux noeuds du cluster ont été utilisés pour lancer la simulation. La ligne intitulée `time=10 :00 :00` indique que le temps maximal de simulation est de dix heures. Si la simulation n'est pas terminée, elle s'arrêtera quand même au bout de 10 heures. Ensuite, la ligne intitulée `mem-per-cpu=2000` indique la mémoire allouée par CPU. Enfin, la dernière ligne est la ligne lançant la simulation avec le programme `Gadget-2` et le fichier de paramètres `blackholes.param`.

Le lancement de la simulation nécessite la présence d'un dossier présent préalablement et nommé `sim`. Enfin, il suffit d'effectuer la commande suivante dans le terminal pour lancer la simulation.

```
sbatch simulation.sbatch
```

2.6 Les fichiers de sortie

Après exécution complète de la simulation, nous voyons apparaître, dans le dossier créé, les fichiers résultant de la simulation. Les fichiers créés sont

- `res.txt`
- `parameters-usedvalues`
- `info.txt`
- `timings.txt`
- `cpu.txt`
- `energy.txt`
- des fichiers `restart` numérotés
- des fichiers `snapshot` numérotés.

Le fichier `res.txt` nous indique également la bonne exécution du code. Le fichier `parameters-usedvalues` fait simplement une synthèse des paramètres choisis pour la simulation. La description des fichiers ci-dessus est basée sur le guide d'utilisation [38] et se trouve en annexe B.

Les sorties d'une simulation avec `Gadget-2` qui vont nous intéresser sont les fichiers "snapshot". Il s'agit de fichiers reprenant les informations sur l'état du système à certains temps. Le code fonctionnant en parallèle, il écrit l'output dans différents fichiers, chacun étant écrit par un groupe de processeurs. Chaque aperçu est constitué de k fichiers, où k est déterminé par `NumFilesPerSnapshot`. Lorsque $k > 1$, les

#	ID du bloc	Identifiant HDF5	Contenu du bloc
1	HEAD		En-tête
2	POS	Coordinates	Positions
3	VEL	Velocities	Vitesses
4	ID	ParticleIDs	ID des particules
5	MASS	Masses	Masses (seulement pour les types de particules ayant une masse variable)
6	U	InternalEnergy	Energie interne par unité de masse (seulement pour les particules SPH)
7	RHO	Density	Densité (seulement pour les particules SPH)
8	HSML	SmoothingLength	Longueur de smoothing SPH h (seulement pour les particules SPH)
9	POT	Potential	Potentiel gravitationnel des particules (seulement quand l'option est activée dans le Makefile)
10	ACCE	Acceleration	Accélération des particules (seulement quand l'option est activée dans le Makefile)
11	ENDT	RateOfChangeOfEntropy	Taux de changement de la fonction d'entropie des particules de SPH (seulement quand l'option est activée dans le Makefile)
12	TSTP	TimeStep	Pas de temps des particules (seulement quand l'option est activée dans le Makefile)

FIGURE 2.1 – Description des blocs du format HDF5 [38].

noms des fichiers sont `snapshot_XXX.Y` où `XXX` correspond au nombre d'aperçus et `Y` correspond au numéro du fichier. Pour $k = 1$, les noms de fichiers ont juste la forme `snapshot_XXX`.

Dans le format par défaut de Gadget-2, les données sont organisées en blocs, chacun contenant une certaine information à propos des particules (coordonnées, vitesses,...). Les différents blocs sont présentés dans le tableau de la FIGURE 2.1. Le premier bloc reprend les informations globales à propos d'une particule. Dans chaque bloc, les particules sont ordonnées par type, c'est-à-dire type 0 pour "Gas", type 1 pour "Halo" jusque type 5 pour "Bndry". Chaque particule possède également un ID afin de pouvoir être tracée entre les différents outputs.

Si le format HDF5 est sélectionné, Gadget-2 stocke les fichiers `snapshot` en plusieurs groupes de données, organisés de la façon suivante. Dans notre cas, ces fichiers seront lus à l'aide de Matlab.

```
/Header  
/Type0/Positions  
/Type0/Velocities  
/Type0/IDs  
...  
/Type1/Positions  
/Type1/Velocities  
...
```

Prenons un exemple concret. Nous voulons voir de quoi est constitué le fichier `snapshot_500.hdf5` de notre neuvième simulation. Pour cela, nous devons effectuer la commande suivante dans Matlab.

```
h5disp('Simulations/sim9/snapshot_500.hdf5') ;
```

Nous obtenons le résultat de la FIGURE 2.2. Grâce à cette commande, nous obtenons une vue de la structure générale du fichier. Nous voyons qu'en plus de l'en-tête, nous retrouvons deux types de particules. Nous verrons dans le chapitre 3 que le type 1 correspond au cluster de trous noirs et que le type 2 correspond au trou noir supermassif. Ensuite, pour chaque type, nous retrouvons plusieurs ensembles de données : coordonnées, masses, Ids et vitesses. Nous pouvons accéder à ces données grâce à la commande `h5read` de Matlab. En effet, si nous exécutons la commande ci-dessous, nous stockerons les coordonnées de toutes les particules de type 1 dans la variable `data`.

```
data = h5read('Simulations/sim9/snapshot_500.hdf5', '/PartType1/Coordinates') ;
```

Dans le chapitre suivant, nous utiliserons le code Gadget-2 afin de réaliser les simulations de trous noirs primordiaux désirées. Nous utiliserons également N-Genic afin de générer les fichiers de conditions initiales.

```

HDF5 snapshot_500.hdf5
Group '/'
  Group '/Header'
    Attributes:
      'NumPart_ThisFile': 0 10000 0 1 0 0
      'NumPart_Total': 0 10000 0 1 0 0
      'NumPart_Total_HighWord': 0 0 0 0 0 0
      'MassTable': 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
      'Time': 499.999998
      'Redshift': 0.000000
      'BoxSize': 0.000000
      'NumFilesPerSnapshot': 1
      'Omega0': 0.000000
      'OmegaLambda': 0.000000
      'HubbleParam': 1.000000
      'Flag_Sfr': 0
      'Flag_Cooling': 0
      'Flag_StellarAge': 0
      'Flag_Metals': 0
      'Flag_Feedback': 0
      'Flag_Entropy_ICs': 0 0 0 0 0 0
  Group '/PartType1'
    Dataset 'Coordinates'
      Size: 3x10000
      MaxSize: 3x10000
      Datatype: H5T_IEEE_F32LE (single)
      ChunkSize: []
      Filters: none
      FillValue: 0.000000
    Dataset 'Masses'
      Size: 10000
      MaxSize: 10000
      Datatype: H5T_IEEE_F32LE (single)
      ChunkSize: []
      Filters: none
      FillValue: 0.000000
    Dataset 'ParticleIDs'
      Size: 10000
      MaxSize: 10000
      Datatype: H5T_STD_U32LE (uint32)
      ChunkSize: []
      Filters: none
      FillValue: 0
    Dataset 'Velocities'
      Size: 3x10000
      MaxSize: 3x10000
      Datatype: H5T_IEEE_F32LE (single)
      ChunkSize: []
      Filters: none
      FillValue: 0.000000
  Group '/PartType3'
    Dataset 'Coordinates'
      Size: 3x1
      MaxSize: 3x1
      Datatype: H5T_IEEE_F32LE (single)
      ChunkSize: []
      Filters: none
      FillValue: 0.000000
    Dataset 'Masses'
      Size: 1
      MaxSize: 1
      Datatype: H5T_IEEE_F32LE (single)
      ChunkSize: []
      Filters: none
      FillValue: 0.000000
    Dataset 'ParticleIDs'
      Size: 1
      MaxSize: 1
      Datatype: H5T_STD_U32LE (uint32)
      ChunkSize: []
      Filters: none
      FillValue: 0
    Dataset 'Velocities'
      Size: 3x1
      MaxSize: 3x1
      Datatype: H5T_IEEE_F32LE (single)
      ChunkSize: []
      Filters: none
      FillValue: 0.000000

```

FIGURE 2.2 – Lecture d'un fichier sous format HDF5 par Matlab

Chapitre 3

Les simulations

Comme expliqué dans le premier chapitre, l'objectif du mémoire est de déterminer si le radio filament détecté par les observations peut provenir d'une interaction entre le trou noir supermassif galactique et un ensemble de trous noirs primordiaux. Nous souhaitons donc voir si une structure de ce type apparaît dans nos simulations et dans quelles conditions. Nous pensons qu'une structure de ce type pourrait apparaître à cause des forces de marée induites par le trou noir supermassif sur le cluster.

Les premières simulations ont montré une instabilité du cluster de trous noirs. La taille augmente rapidement lors de la simulation (voir sur la FIGURE 3.4). Cette observation est une première chose que nous avons apprise. Nous pensons que l'instabilité est due à un processus de type réchauffement dynamique similaire au processus qui tendrait à étendre les galaxies naines faiblement lumineuses [39]. Dans ce processus, les trous noirs primordiaux acquièrent une énergie cinétique importante lors de rencontres proches. Nous pouvons évaluer la stabilité d'un système de corps en interaction grâce au temps de relaxation. Nous reviendrons dans l'interprétation de ce phénomène dans la section 3.5.

Nous allons tenter d'obtenir un cluster stable grâce à différentes approches. La première tentative consiste à ajouter un trou noir plus massif au centre du cluster. En effet, un trou noir plus massif induirait un potentiel gravitationnel supplémentaire empêchant l'expansion du cluster. Afin de réduire le temps de relaxation associé à ce processus (voir section 3.5), la deuxième tentative consiste à réduire le nombre de trous noirs présents dans le cluster. Pour la troisième tentative, afin de vérifier que l'expansion du cluster n'est pas due à des vitesses initialement trop importantes, nous allons assigner une distribution de vitesse nulle à l'ensemble du cluster. Enfin, pour la quatrième tentative, nous allons augmenter la valeur de R_S c'est-à-dire la largeur du profil radial de la distribution spatiale des trous noirs

Après avoir obtenu une configuration plus stable, nous nous baserons sur ces

paramètres et ajouterons le trou noir supermassif galactique. Nous donnerons au trou noir supermassif une vitesse et une position initiales déterminées, sur le cluster de trous noirs primordiaux, situé au centre du repère. Nous pourrions ainsi observer l'influence de ce trou noir supermassif.

Ensuite, nous allons étudier les effets de la variation des différents paramètres afin de déterminer si l'on peut obtenir une configuration de type filament. Nous allons tout d'abord faire varier la position initiale du trou noir supermassif (et par conséquent la distance entre le cluster et le trou noir supermassif). Ensuite, nous modifierons la vitesse initiale du trou noir supermassif. Enfin, nous augmenterons le nombre de trous noirs primordiaux présents dans le cluster. Une représentation schématique de la simulation se trouve à la FIGURE 3.1.

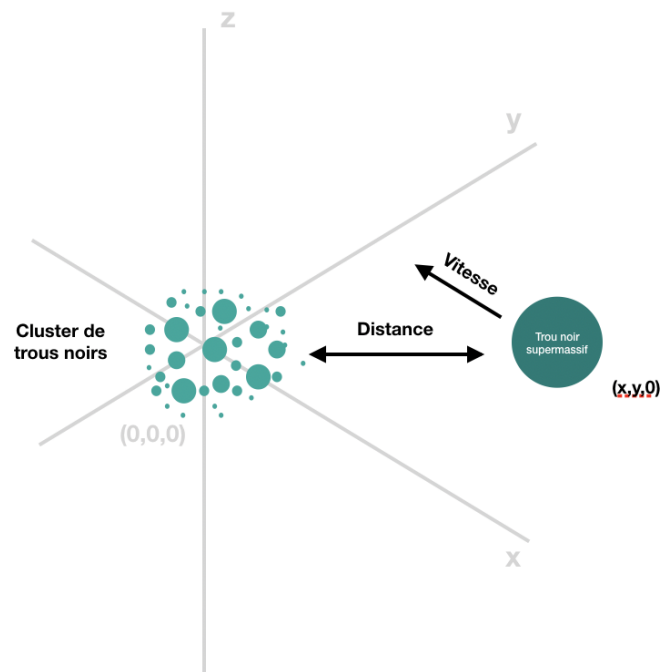


FIGURE 3.1 – Représentation schématique de la simulation. Le cluster de trous noirs primordiaux est situé au centre du repère et une vitesse et position initiale est déterminée pour le trou noir supermassif.

Pour Gadget-2, les unités de longueur, de masse et de vitesse sont définies comme suit :

- L'unité de longueur est le parsec. Un parsec correspond à $3.085678e18$ cm.
- L'unité de masse est la masse solaire. Une masse solaire correspond à $1.989e33g$.
- L'unité de vitesse est le km/s.
- L'unité de temps est l'année.

Toutes les quantités utilisées doivent donc être converties dans les unités adéquates.

Distribution de masse

Dans toutes nos simulations, la distribution de masse du cluster de trous noirs primordiaux suit une loi normale $\text{Log-}\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où

- $\mu = 2$
- $\sigma = 0.3$.

La distribution log-normale de la densité de trous noirs primordiaux est utilisée dans un précédent travail [40] par

$$\rho_{PBH}(m_{PBH}) = \frac{\rho_{PBH,0}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-\log_{10}^2(m_{PBH}/\mu_{PBH})}{2\sigma^2}\right) \quad (3.1)$$

et peut être observée sur la FIGURE 3.2.

Une distribution ad-hoc pourrait toutefois être une bonne approximation pour différents modèles de trous noirs primordiaux, en particulier pour le pic dans les distributions impactées par l'histoire thermique de l'univers [22].

Profil de densité

Selon [40], la densité des halos de matière noire suit un profil universel et symétriquement sphérique appelé le profil Navarro-Frenk-White (NFW)

$$\rho(r) = \frac{\rho_S}{\frac{r}{r_S} \left(1 + \frac{r}{r_S}\right)} \quad (3.2)$$

où ρ_S est la densité caractéristique et r_S est le rayon de l'échelle du profil de densité. Le terme universel signifie que la forme du profil de densité ne dépend pas de la masse du halo de matière noire. Pour de petits rayons ($r \rightarrow 0$), $\rho \propto r^{-1}$ et pour de grands rayons ($r \gg r_S$), $\rho \propto r^{-3}$. Le profil NFW diverge en $r = 0$ et la masse selon un rayon r n'est pas bornée pour $r \rightarrow \infty$, le profil est donc coupé à un rayon r_{max} .

Nous obtenons la masse du halo $m_{halo}(r)$ de rayon r en intégrant sur $\rho(r)$:

$$m_{halo}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' = 4\pi \rho_S r_S^3 \left(\ln\left(\frac{r_S + r}{r_S}\right) - \frac{r}{r_S + r} \right). \quad (3.3)$$

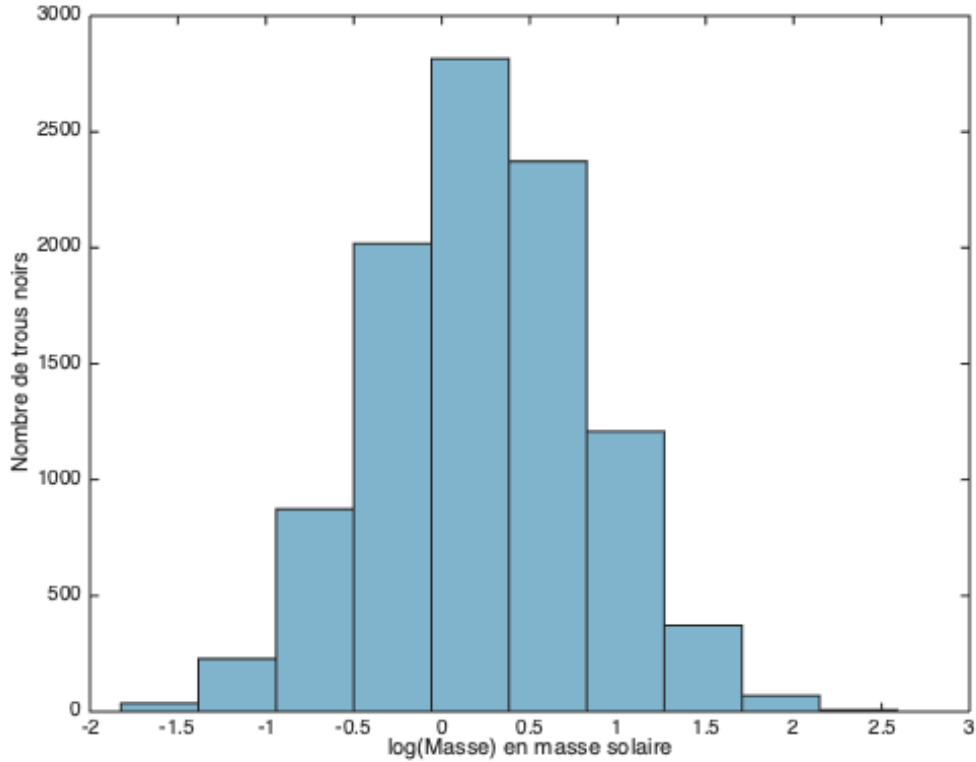


FIGURE 3.2 – Distribution de masse du cluster une loi log-normale $Log-\mathcal{N}(2.0, 0.09)$ (voir équation 3.1).

Profil de vitesse

Nous suivrons la référence [40] et avons adopté une distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann comme le halo de matière est un système sans collision. Chaque composante de vitesse est normalement distribuée selon $\mu = 0$ et $\sigma > 0$. Comme la dispersion de vitesse est isotropique (càd $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$), la vitesse moyenne au carré est donnée par

$$\langle v^2 \rangle = \sigma_{3d}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3\sigma^2, \quad (3.4)$$

où σ_{3d} et σ sont les dispersions de vitesse tri- et unidimensionnelles.

Pour un système en équilibre, la dispersion de vitesse peut être estimée à l'aide du théorème du viriel

$$\langle E_{kin} \rangle = -\frac{\langle E_{pot} \rangle}{2}. \quad (3.5)$$

L'énergie cinétique moyenne de chaque particule est

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} m \sigma^2, \quad (3.6)$$

où m est la masse de la particule et σ est la dispersion de vitesse unidimensionnelle. L'énergie potentielle moyenne est

$$\langle E_{pot} \rangle = -\frac{GM_{vir}m}{r_{max}} \quad (3.7)$$

où G est la constante gravitationnelle, M_{vir} la masse du viriel et r_{200} le rayon du viriel.

Par conséquent, la dispersion de vitesse unidimensionnelle est donnée par

$$3\sigma^2 = \frac{GM_{vir}}{R_{max}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{GM}{3R_{max}}}. \quad (3.8)$$

3.1 La stabilisation du cluster

Pour notre première simulation, nous allons simuler l'évolution d'un cluster de 10 000 trous noirs primordiaux. Nous choisissons une valeur de 0.1 pour R_S et de 10 pour R_{max} afin d'obtenir un cluster de taille réaliste, c'est-à-dire d'environ 20 parsec. Nous retrouvons le récapitulatif des conditions initiales dans le tableau ci-dessous.

Conditions initiales	
R_S	0.1
R_{max}	10
Nombre de trous noirs	10 000

Observons le cluster de trous noirs primordiaux au temps $t = 0$ années sur la FIGURE 3.3. Nous pouvons voir que le cluster mesure bien quelque parsec comme désiré. Observons ensuite l'évolution du cluster aux temps $t = 31, 7$ années, $t = 158, 5$ années et $t = 317$ années sur la FIGURE 3.4.

Le cluster explose très vite. Il passe en effet d'un rayon d'une dizaine de parsec à plus de 1000 parsec en 317 années. Nous voyons donc que le cluster n'est pas du

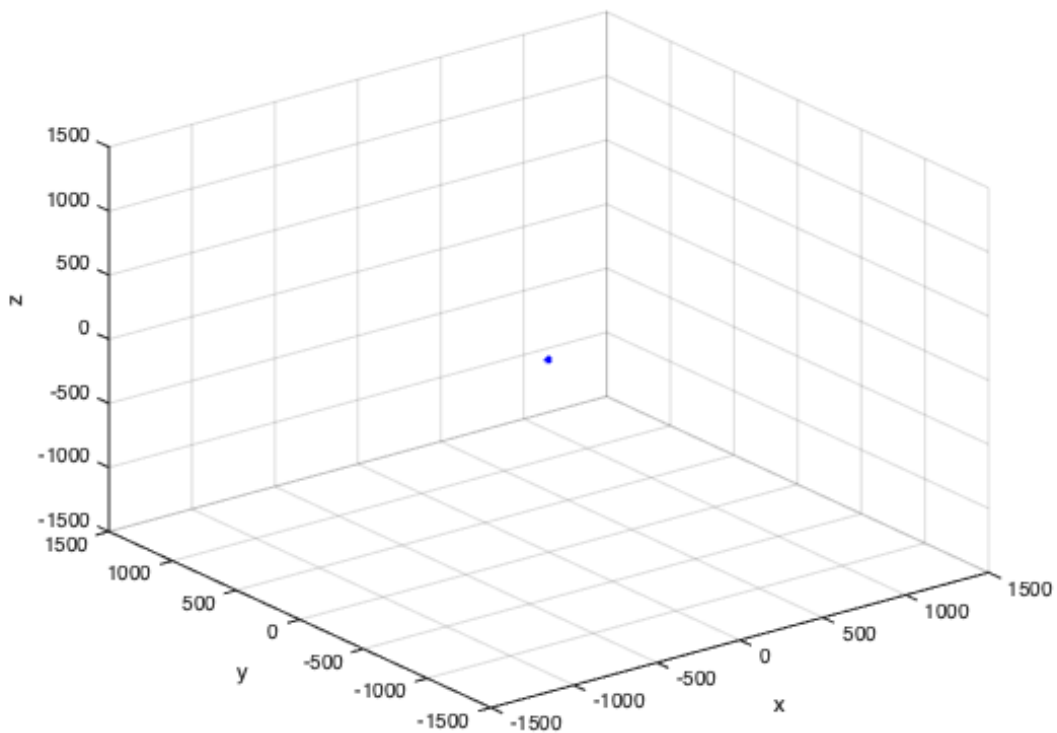


FIGURE 3.3 – Simulation d’un cluster de 10 000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$. Simulation au temps $t = 0$ années

tout stable. Dans un premier temps, nous allons tenter de stabiliser ce cluster.

La première tentative pour stabiliser le cluster de trous noirs primordiaux est d’ajouter un trou noir plus massif au centre du cluster. Nous choisissons un trou noir d’une masse de $10M_{\odot}$. Nous retrouvons un récapitulatif des conditions initiales ci-dessous.

Conditions initiales	
R_S	0.1
R_{max}	10
Nombre de trous noirs	10 001
Masse du trou noir supplémentaire	$10M_{\odot}$

La situation initiale étant très semblable au cas précédent, nous allons directement analyser la façon dont le cluster évolue. Nous reprenons les temps analysés précédemment, à savoir les temps $t = 31,7$ années, $t = 158,5$ années et $t = 317$

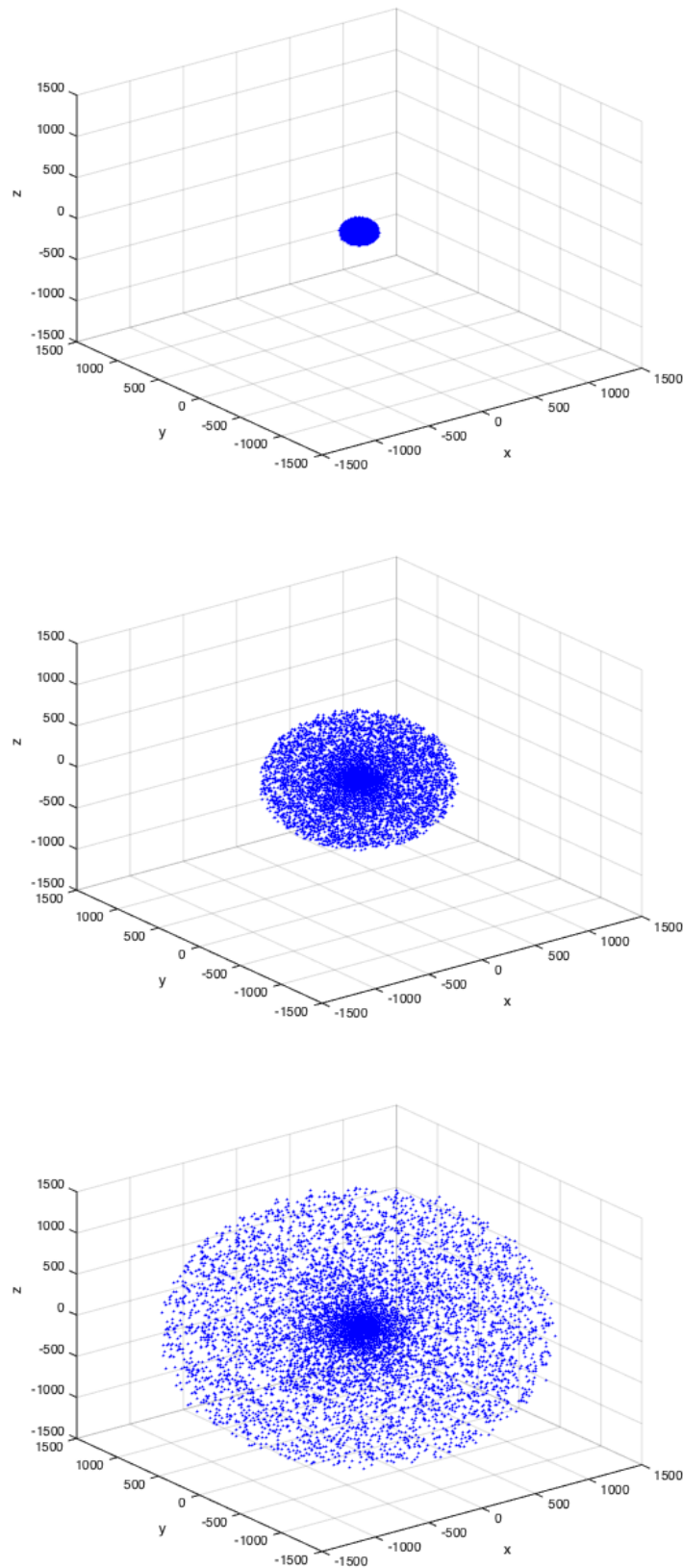


FIGURE 3.4 – Simulation d'un cluster de 10 000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$. Simulation aux temps $t = 31,7$ années, $t = 158,5$ années et $t = 317$ années

années sur la FIGURE 3.5.

Nous pouvons voir que le trou noir plus massif ne stabilise pas le cluster. Au contraire, le cluster explose encore plus que dans le cas précédent.

La deuxième tentative pour stabiliser le cluster de trous noirs primordiaux est de réduire le nombre de trous noirs présents dans le cluster. Nous allons effectuer une simulation avec un cluster de 1000 trous noirs primordiaux. Nous retrouvons le récapitulatif des conditions initiales dans le tableau ci-dessous.

Conditions initiales	
R_S	0.1
R_{max}	10
Nombre de trous noirs	1000

Observons l'évolution du cluster sur la FIGURE 3.6. Nous analysons les temps $t = 31,7$ années, $t = 158,5$ années et $t = 317$ années. Dans ce cas-ci, nous voyons que le cluster explose beaucoup moins. En effet, dans la simulation avec le cluster de 10 000 trous noirs, le rayon du cluster augmentait jusqu'à une taille 150 fois plus grande après 317 années. Avec 1000 trous noirs, le rayon augmente jusqu'à 15 fois la taille initiale du cluster. Nous pouvons donc conclure que l'expansion du cluster est proportionnelle au nombre de trous noirs présents dans le cluster.

La troisième tentative pour stabiliser le cluster de trous noirs primordiaux est d'assigner une distribution de vitesse nulle à ce cluster. Pour cela, nous devons modifier le fichier `profile.cpp`. Il suffit de remplacer le retour de la fonction `NFWProfile : :getVelocityDispersion1D` qui définit le profil de vitesse par 0 comme présenté ci-dessous. Nous retrouvons le récapitulatif des conditions initiales dans le tableau ci-dessous.

```
double NFWProfile : :getVelocityDispersion1D(double radius){
const double rhoC = 1.359878466467978e-07 ; // in M_sun
// factor (M_Sun * G / pc)
const double MSun_G_div_parsec = 4301.0785911 ; //G = 6.67408 ×
10-11 ; //const double parsec = 3.08567758149137 ;
if(simpleVelocityProfile) {
// simple calculation with virial theorem
return 0 ; // km/s
} else {...}
}
```

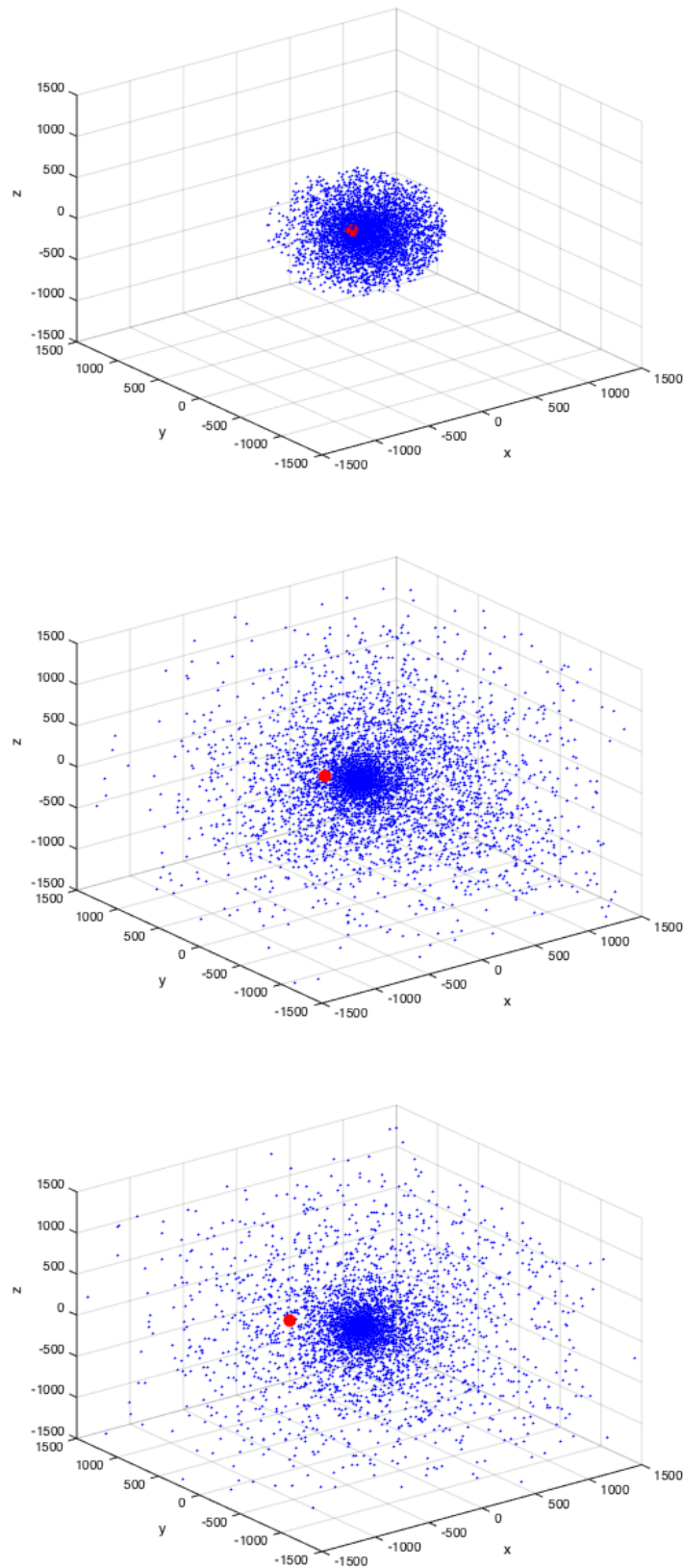


FIGURE 3.5 – Simulation d'un cluster de 10 000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$ et ajout d'un trou noir primordial de $10 M_{\odot}$ au centre du cluster (en rouge). Simulation aux temps $t = 31,7$ années, $t = 158,5$ années et $t = 317$ années

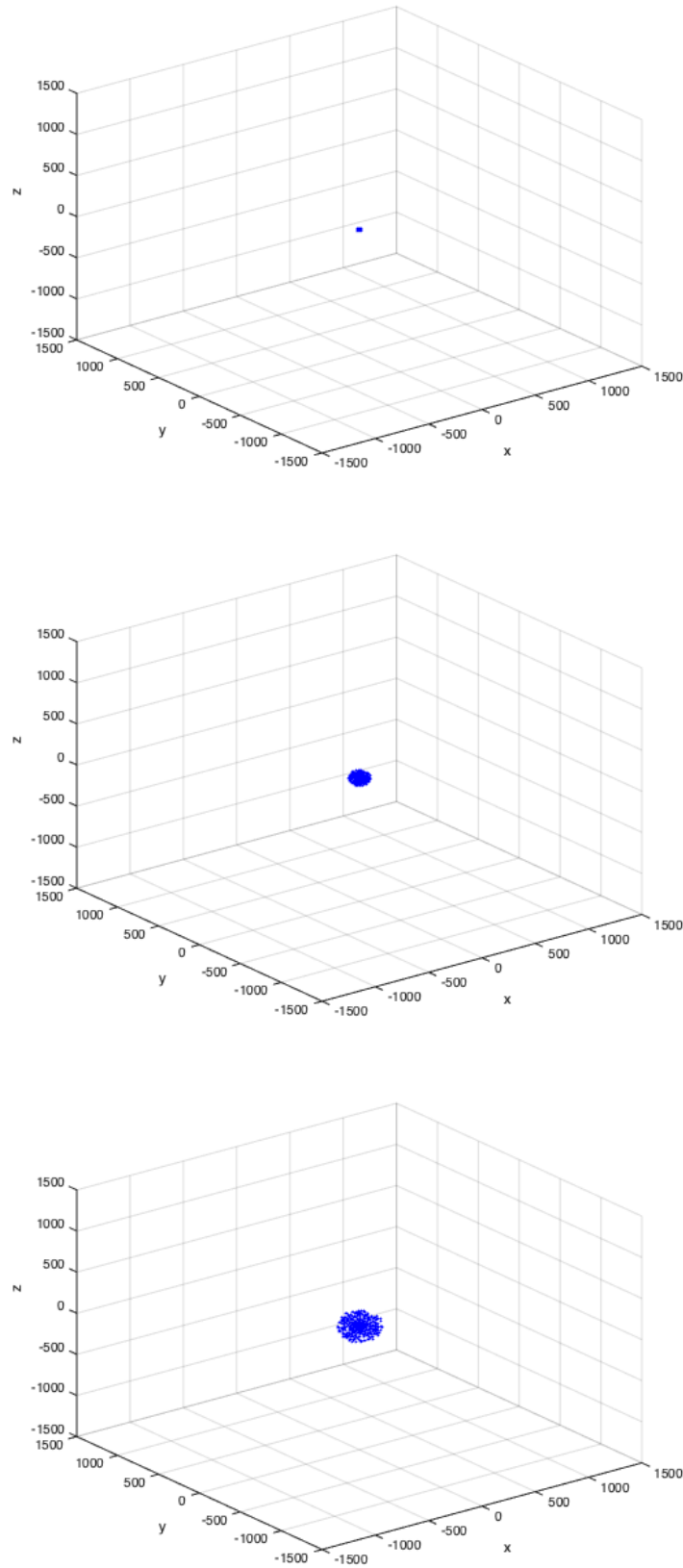


FIGURE 3.6 – Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$. Simulation aux temps $t = 31,7$ années, $t = 158,5$ années et $t = 317$ années

Conditions initiales	
R_S	0.1
R_{max}	10
Nombre de trous noirs	10 000

Observons l'évolution du cluster sur la FIGURE 3.7. Nous analysons les temps $t = 31,7$ années, $t = 158,5$ années et $t = 317$ années. Nous pouvons voir que le cluster n'est pas stabilisé en assignant une distribution de vitesse nulle. En comparant avec la FIGURE 3.4, nous observons que cette modification n'a aucun effet sur l'évolution du cluster.

Notre quatrième et dernière tentative est d'augmenter la valeur de la variable R_S . Nous choisissons une valeur de 5. Nous retrouvons le récapitulatif des conditions initiales dans le tableau ci-dessous.

Conditions initiales	
R_S	5
R_{max}	10
Nombre de trous noirs	10 000

Nous pouvons analyser l'évolution du cluster sur la FIGURE 3.8. Nous analysons les temps $t = 31,7$ années, $t = 158,5$ années et $t = 317$ années. Nous pouvons voir qu'augmenter ce paramètre stabilise de manière significative le cluster. Désormais, le rayon du cluster est multiplié par 10 en 317 années, contrairement au premier cas où le rayon était multiplié par 100.

Nous voyons donc qu'ajouter un trou noir ou assigner une distribution de vitesse initiale nulle ne stabilise pas le cluster de trous noirs primordiaux. Cependant, réduire le nombre de trous noirs primordiaux présents dans le cluster et augmenter la valeur de R_S stabilise ce cluster de manière significative. Dans la section suivante, nous allons donc nous servir de cette conclusion pour partir d'un cluster de trous noirs qui soit le plus stable possible. A ce cluster, nous allons ajouter un trou noir supermassif dont la masse est celle de celui se trouvant dans notre galaxie, le trou noir Sagittaire A*.

3.2 L'ajout d'un trou noir supermassif

Dans cette section, nous allons nous placer dans des conditions similaires au cas où le radio-filament apparaît, connecté au trou noir supermassif Sagittaire A*.

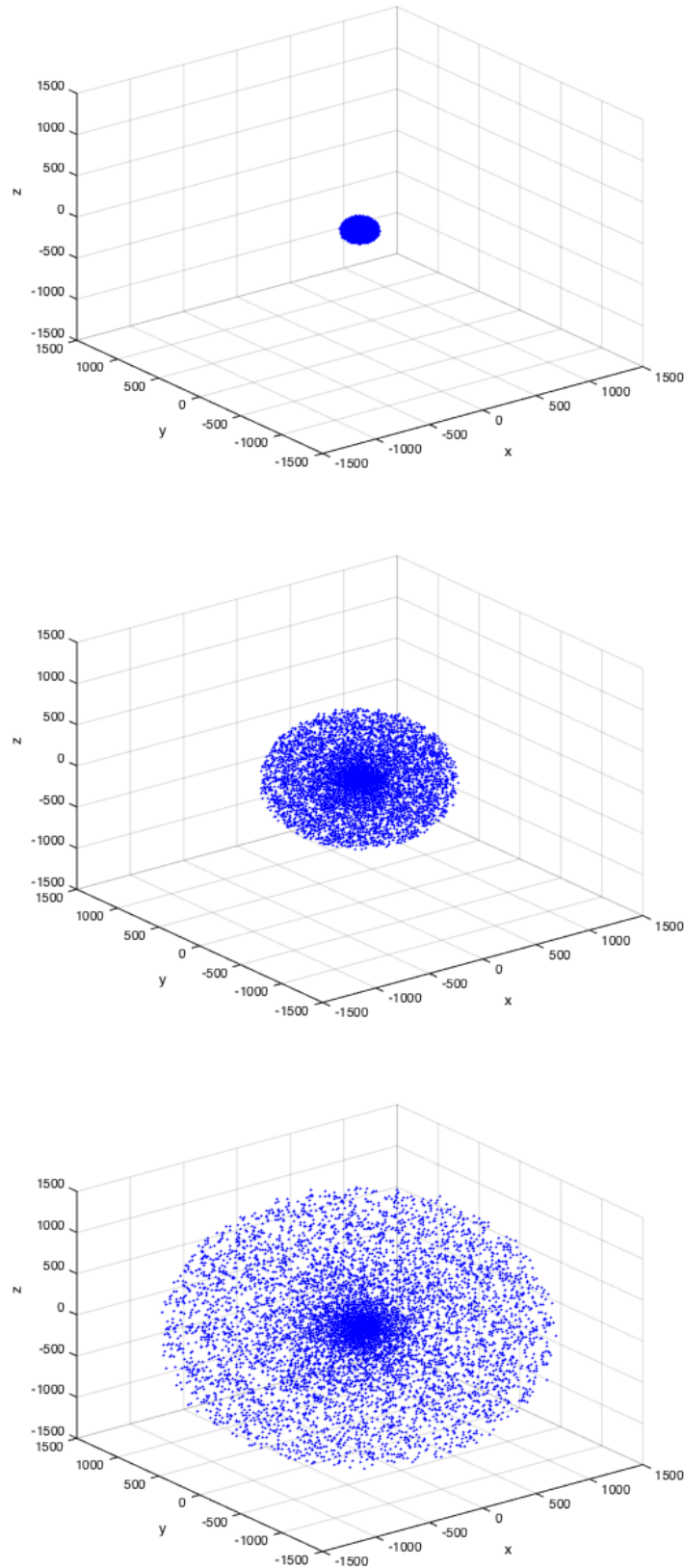


FIGURE 3.7 – Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$. Distribution de vitesse du cluster nulle. Simulation aux temps $t = 31,7$ années, $t = 158,5$ années et $t = 317$ années

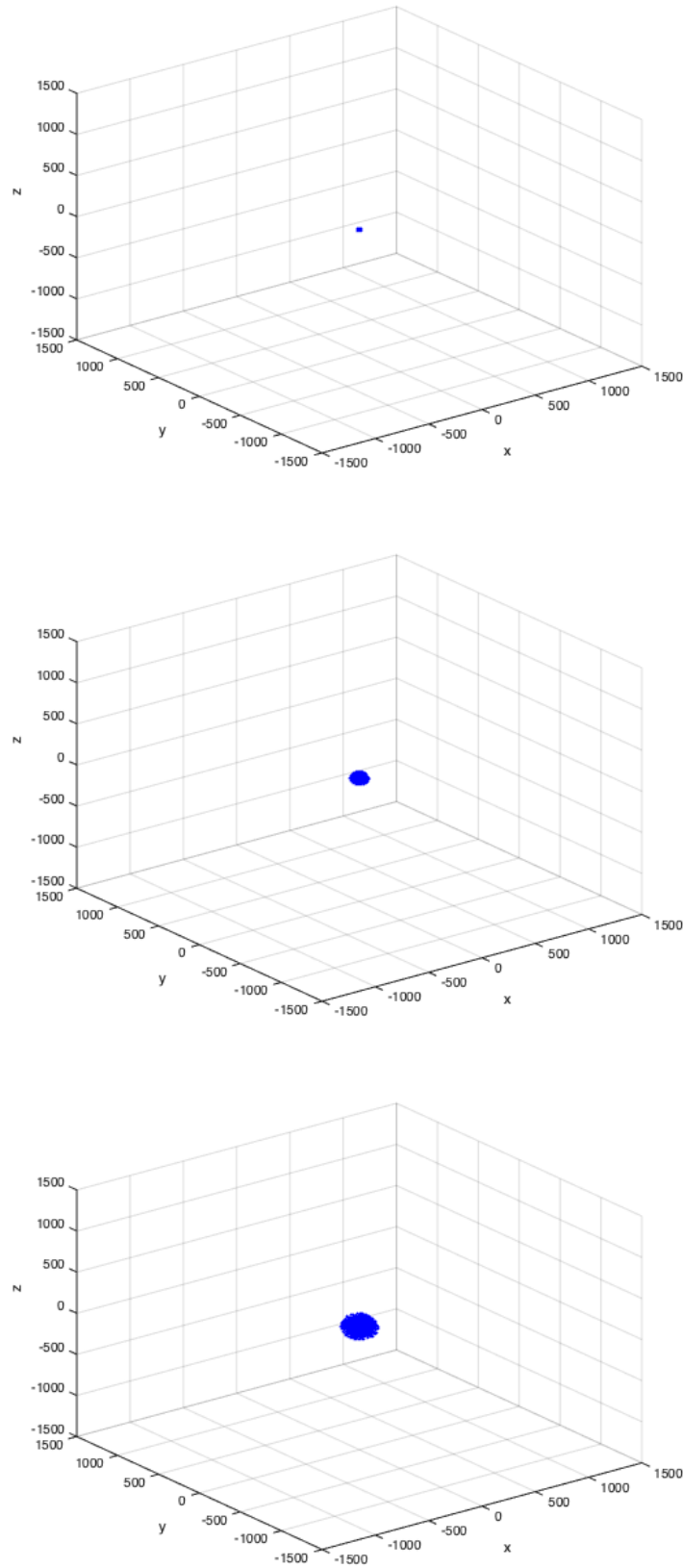


FIGURE 3.8 – Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$. Simulation aux temps $t = 31,7$ années, $t = 158,5$ années et $t = 317$ années

Le but est de faire apparaître un filament semblable à celui observé dans notre galaxie. Nous allons donc effectuer une simulation avec un cluster de 1000 trous noirs primordiaux et un trou noir supermassif d'une masse de $4.31 \times 10^6 M_{\odot}$. Pour la position du trou noir supermassif, nous choisissons des valeurs de 1000 et 300 parsec pour les composantes en x et y respectivement. Pour sa vitesse, nous choisissons une vitesse arbitraire de 10 km/s. Nous retrouvons un récapitulatif des conditions initiales ci-dessous.

Conditions initiales	
R_S	5
R_{max}	10
Nombre de trous noirs	1000
Nombre de trous noirs supermassifs	1
Masse du trou noir supermassif	$4.31 \times 10^6 M_{\odot}$
Position du trou noir supermassif	(1000,300,0)
Vitesse du trou noir supermassif	(-10,0,0)

Pour initialiser ces paramètres, nous devons modifier le fichier `main.cpp` de N-Genic. Nous modifions le bout de code, présenté initialement ci-dessous, concernant le type des étoiles.

1

```
// stars in the halo (type 3 / BULGE)
const double starMass = 1000000 ; // * M_Sun
ProfilePositionGenerator : :SpatialBinningParameters star_Binning
= { 0, 20, R_max, 15, 80 } ;
ProfilePositionGenerator *StarProfileGen = new
ProfilePositionGenerator(npart[BULGE_TYPE], starMass, nfwProfile,
star_Binning, Seed+35754534, posOffset) ;
Generators Star_Generators = { StarProfileGen,
new FixedMassGenerator(starMass),
new GaussianVelocityGenerator(StarProfileGen->getBinVector(),
nfwProfile, Seed+345, velOffset) } ;
```

Les modifications apportées à ce bout de code afin de changer les paramètres sont ajoutées dans le cadre ci-dessous. Tout d'abord, afin de changer la masse du

1. Pour des raisons de facilité d'implémentation, nous avons utilisé les variables liées aux étoiles pour implémenter le trou noir supermassif.

trou noir supermassif, nous devons modifier la valeur de la variable `starMass`. Ensuite, afin de changer la position et la vitesse, nous devons créer deux nouvelles variables `posOffsetStar` et `velOffsetStar` et remplacer `posOffset` et `velOffset` par `posOffsetStar` et `velOffsetStar` respectivement dans `ProfilePositionGenerator` `*StarProfileGen` et `Generators Star_Generators`.

```
// stars in the halo (type 3 / BULGE)
double posOffsetStar[3] = {2.4926,3.9204,0};
double velOffsetStar[3] = {-10,0,0};
const double starMass = 1000000; // * M_Sun
ProfilePositionGenerator : :SpatialBinningParameters star_Binning
= { 0, 20, R_max, 15, 80 };
ProfilePositionGenerator *StarProfileGen = new
ProfilePositionGenerator(npart[BULGE_TYPE], starMass, nfwProfile,
star_Binning, Seed+35754534, posOffsetStar);
Generators Star_Generators = { StarProfileGen,
new FixedMassGenerator(starMass),
new GaussianVelocityGenerator(StarProfileGen->getBinVector(),
nfwProfile, Seed+345, velOffsetStar) };
```

Observons tout d'abord la situation initiale de la simulation, c'est-à-dire la simulation au temps $t = 0$ années sur la FIGURE 3.9. Au temps $t = 0$ années, le trou noir supermassif est situé à une distance de 1044.031 parsec.

Nous pouvons ensuite voir comment la situation évolue aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années sur la FIGURE 3.10. Nous observons que la taille du cluster augmente tandis que le trou noir supermassif passe à côté de celui-ci. Cependant, le trou noir supermassif ne semble pas avoir une quelconque influence sur le cluster de trous noirs primordiaux.

Nous en avons conclu que le trou noir supermassif passe trop loin du cluster que pour pouvoir le déformer et impacter sa trajectoire de manière significative. La prochaine étape des simulations va donc consister à réduire cette distance.

3.3 La variation du paramètre d'impact

Dans cette section, nous allons réduire la composante en y de la position du trou noir supermassif afin que celui-ci passe plus près du cluster de trous noirs primordiaux. Nous réduisons donc le paramètre d'impact. Pour cette nouvelle simulation, nous choisissons une position de (1000, 30, 0), la composante en y ayant été divisée par 10. Les autres paramètres restent inchangés. Nous retrouvons un récapitulatif des conditions initiales ci-dessous.

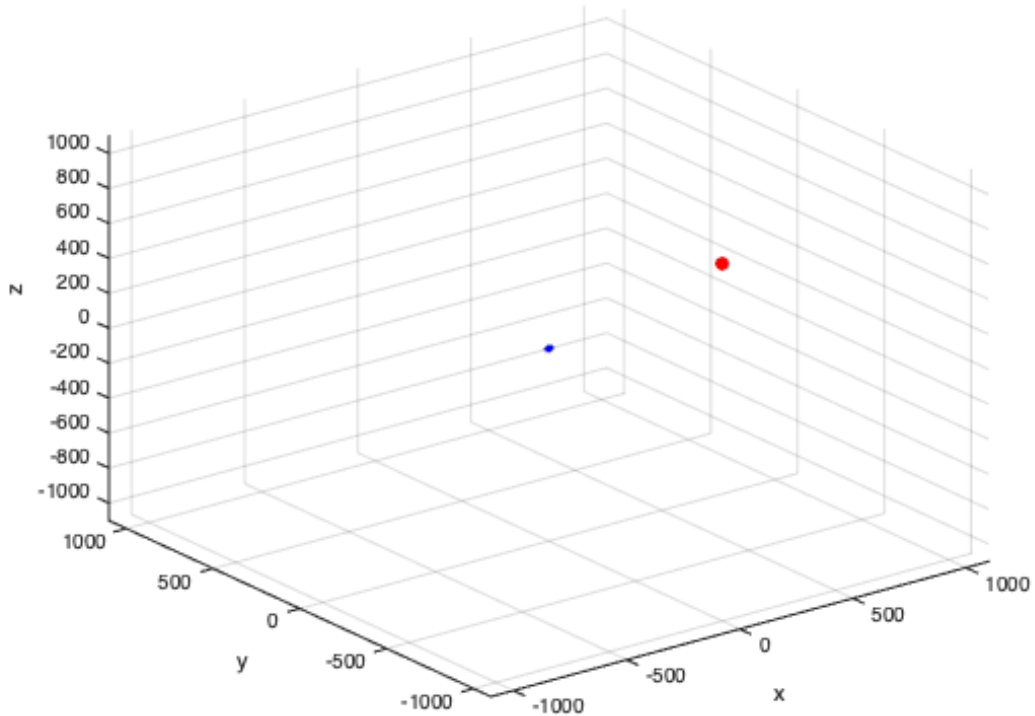


FIGURE 3.9 – Simulation d’un cluster de 1000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d’un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1044.031 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation au temps $t = 0$ années

Conditions initiales	
R_S	5
R_{max}	10
Nombre de trous noirs	1000
Nombre de trous noirs supermassifs	1
Masse du trou noir supermassif	$4.31 \times 10^6 M_\odot$
Position du trou noir supermassif	(1000,30,0)
Vitesse du trou noir supermassif	(-10,0,0)

La situation initiale de la simulation, c’est-à-dire la simulation au temps $t = 0$ années, peut être visualisée sur la FIGURE 3.11. Au temps $t = 0$ années, le trou noir supermassif est situé à une distance de 1000.45 parsec.

Nous pouvons ensuite voir comment la situation évolue aux temps $t = 1585$

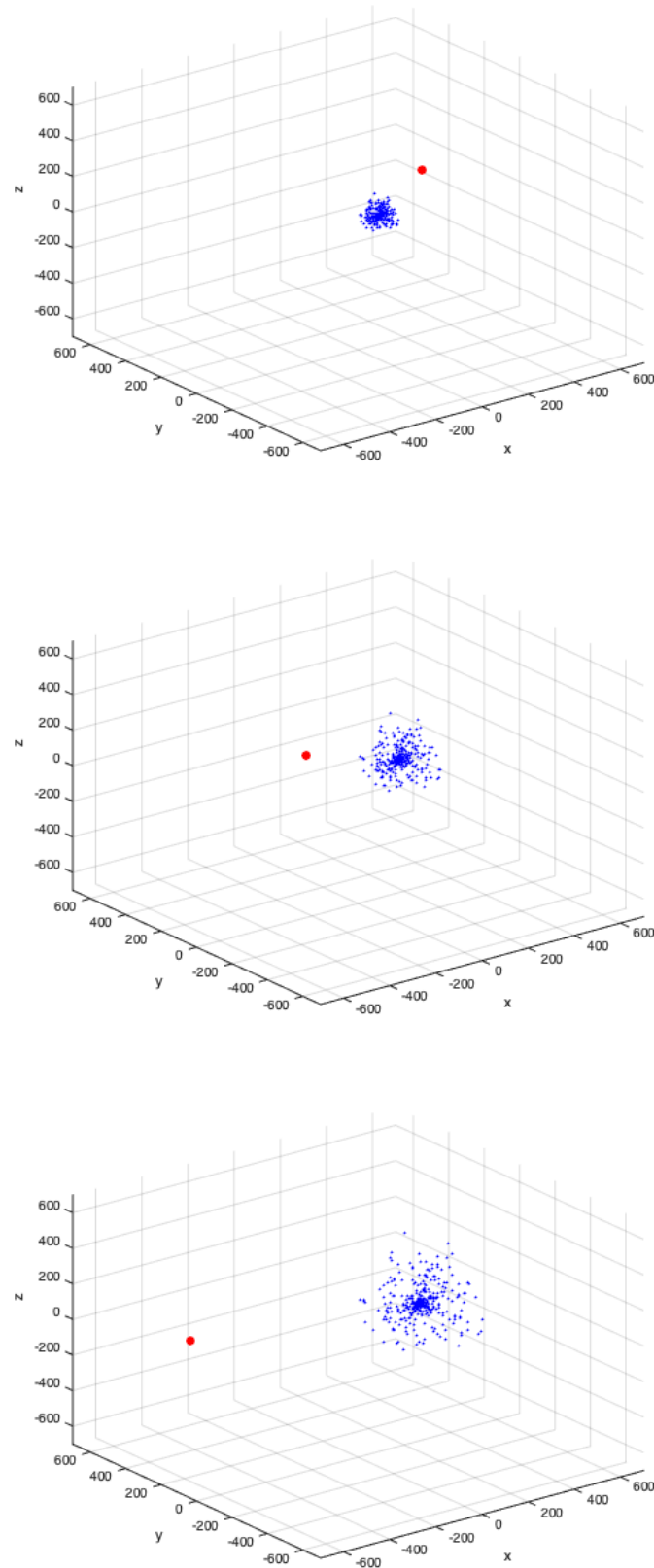


FIGURE 3.10 – Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d'un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1044.031 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années

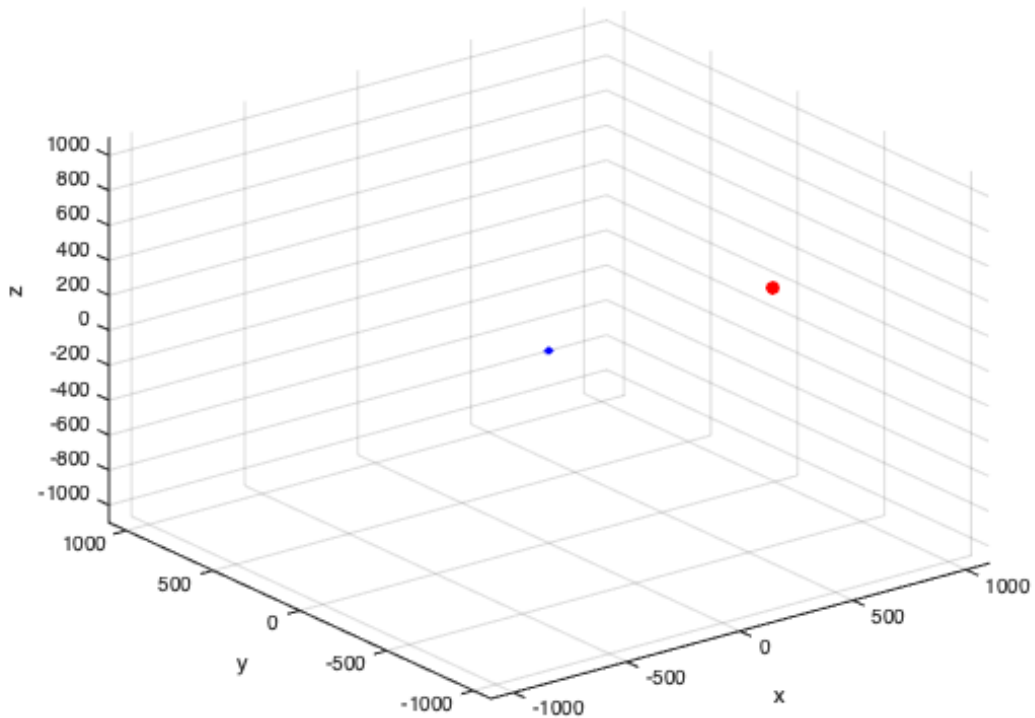


FIGURE 3.11 – Simulation d’un cluster de 1000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d’un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1000.45 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation au temps $t = 0$ années

années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années sur la FIGURE 3.12. Comme précédemment, nous observons que la taille du cluster augmente au fur et à mesure que le temps augmente. Après $t = 3170$ années, le cluster de trous noirs primordiaux se distord au passage du trou noir supermassif. Nous pouvons voir qu’un filament commence à apparaître.

Maintenant que ce filament commence à apparaître, nous cherchons à amplifier ce phénomène. Dans la prochaine section, nous allons donc augmenter la vitesse du trou noir supermassif afin d’observer si cela a une influence sur l’évolution du cluster de trous noirs primordiaux.

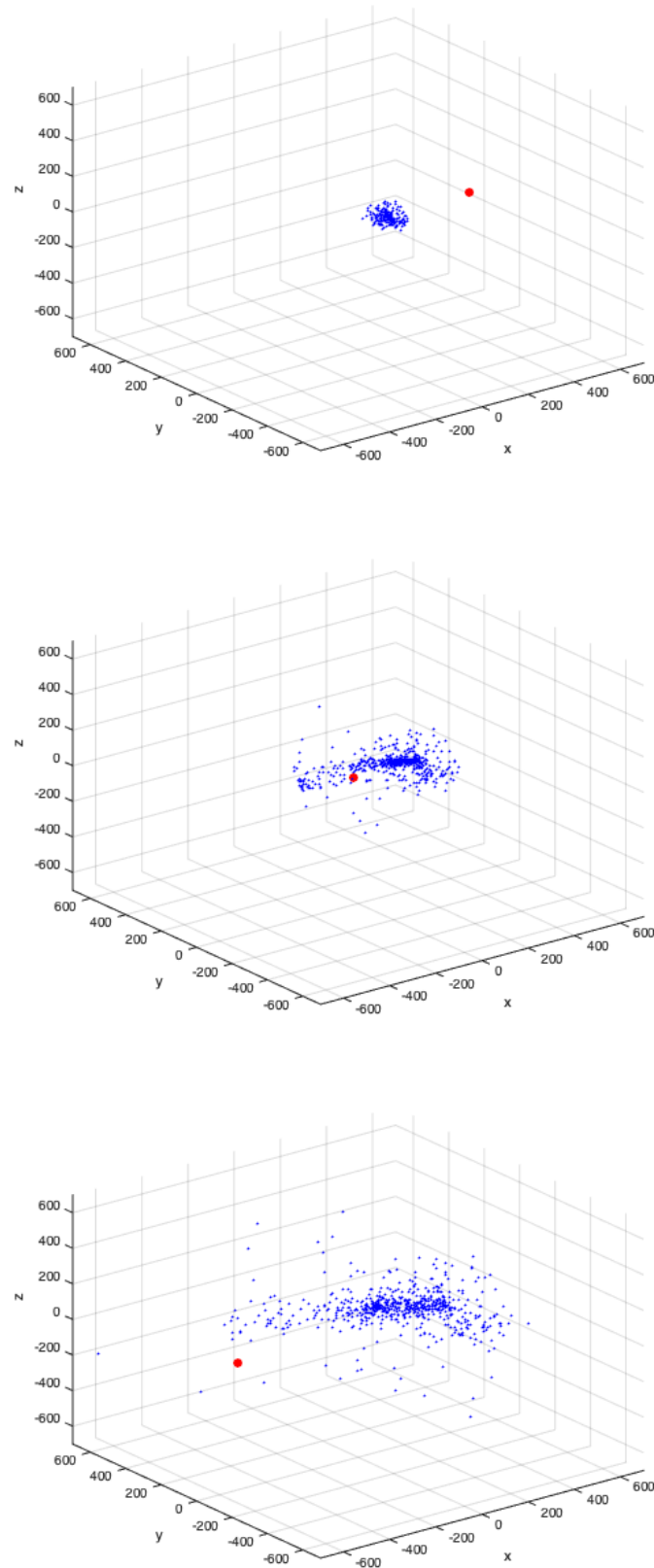


FIGURE 3.12 – Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d'un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1000.45 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années

3.4 La variation de la vitesse

Dans cette section, nous allons donc augmenter la vitesse du trou noir supermassif et la fixer à 50 km/s. Nous gardons la position initiale du trou noir supermassif de la section précédente et les autres paramètres restent inchangés. Nous retrouvons un récapitulatif des conditions initiales ci-dessous.

Conditions initiales	
R_S	5
R_{max}	10
Nombre de trous noirs	1000
Nombre de trous noirs supermassifs	1
Masse du trou noir supermassif	$4.31 \times 10^6 M_\odot$
Position du trou noir supermassif	(1000,30,0)
Vitesse du trou noir supermassif	(-50,0,0)

Pour ce cas de figure, la situation initiale est donc identique à celle de la FIGURE 3.11. Observons la façon dont la situation évolue aux temps $t = 317$ années, $t = 634$ années et $t = 951$ années sur la FIGURE 3.13.

Dans ce cas-ci, le cluster de trous noirs primordiaux ne comporte aucune distorsion. En effet, le trou noir supermassif passe trop rapidement et n'a donc pas le temps d'induire des moments de force suffisants pour distordre le cluster.

Pour la dernière simulation, nous allons donc revenir à la vitesse définie précédemment et augmenter le nombre de trous noirs présents dans le cluster afin de voir si la distorsion observée sur la FIGURE 3.12 est amplifiée.

3.5 La variation de la taille du cluster

Dans cette section, nous allons doubler le nombre de trous noirs primordiaux présents dans le cluster. Tous les autres paramètres restent inchangés. Nous retrouvons un récapitulatif des conditions initiales ci-dessous.

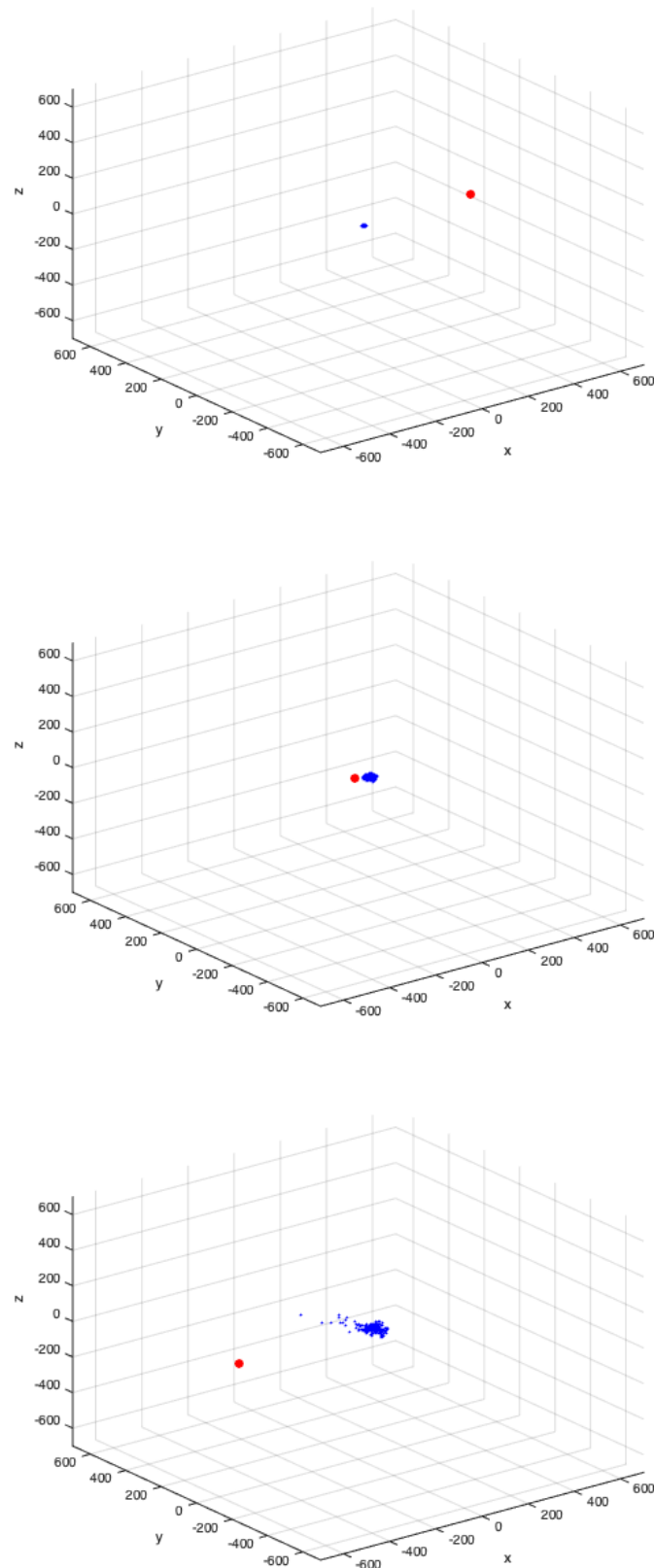


FIGURE 3.13 – Simulation d’un cluster de 1000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d’un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1000.45 parsec et dont la vitesse initiale est de -50 km/. Simulation aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années

Conditions initiales	
R_S	5
R_{max}	10
Nombre de trous noirs	2000
Nombre de trous noirs supermassifs	1
Masse du trou noir supermassif	$4.31 \times 10^6 M_\odot$
Position du trou noir supermassif	(1000,30,0)
Vitesse du trou noir supermassif	(-10,0,0)

La situation initiale étant quasiment identique à celle de la FIGURE 3.11, observons l'évolution de la situation aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années sur la FIGURE 3.14.

Dans ce cas-ci, nous voyons que le cluster de trous noirs primordiaux commence à se distordre dès les premiers instants de la simulation. Après le temps $t = 3170$ années, un filament apparaît beaucoup plus clairement que sur la FIGURE 3.12. Nous avons donc trouvé des paramètres permettant de faire apparaître une structure de type filament.

3.6 La synthèse et l'interprétation des résultats

Faisons une synthèse des résultats obtenus en fonction des différents paramètres utilisés.

Tout d'abord, nous avons tenté de stabiliser le cluster de trous noirs primordiaux. Initialement, ce cluster comportait 10 000 trous noirs primordiaux et les valeurs de R_S et R_{max} étaient de respectivement 0.1 et 10. Le cluster n'était pas du tout stable.

- **Ajout d'un trou noir de $10M_\odot$ au centre du repère** : il n'y a aucun effet sur la stabilité.
- **Réduction du nombre de trous noirs primordiaux à 1000** : le cluster devient plus stable.
- **Assignment d'une distribution de vitesse nulle** : il n'y a aucun effet sur la stabilité.

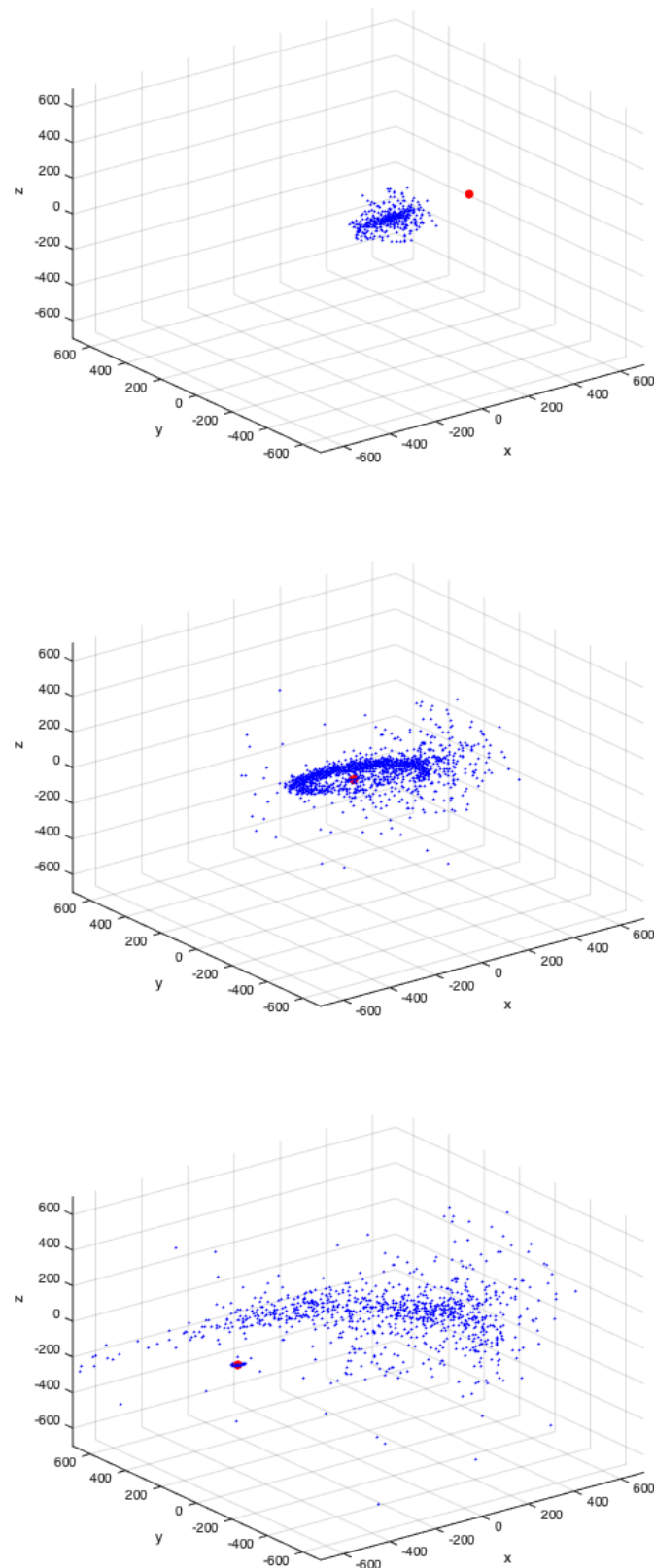


FIGURE 3.14 – Simulation d'un cluster de 2000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d'un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1000.45 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années

- **Nouvelles valeurs de R_S à 5** : le cluster devient plus stable.

Comme énoncé précédemment, nous pouvons évaluer la stabilité d'un système de corps en interaction grâce au temps de relaxation ([?])

$$t_{relax}(r) = \frac{N}{8 \ln N} \frac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}},$$

où N est le nombre de trous noirs primordiaux et M la masse du cluster. il s'agit du temps pour que cela devienne stable.

Quand nous évaluons cela pour 10 000 trous noirs primordiaux et un rayon de 1 parsec, nous obtenons un temps de relaxation de 20 millions d'années, c'est-à-dire plus que le temps de la simulation. Il aurait fallu faire tourner la simulation sur 20 millions d'années pour avoir un cluster qui devienne stable.

Pour avoir un cluster stable, il est donc logique que nous ayons dû diminuer le nombre de trous noirs primordiaux. La diminution du nombre de trous noirs a permis de diminuer le temps de relaxation et a contribué à rendre le cluster plus stable. Nous pensons toutefois qu'il est nécessaire d'effectuer d'autres investigations pour comprendre le processus de réchauffement dynamique.

Ensuite, nous avons gardé les deux paramètres qui permettaient de stabiliser le cluster, à savoir un cluster de 1000 trous noirs primordiaux et une valeur de 5 pour R_S , et avons ajouté un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ situé à la position initiale (1000, 300, 0) et dont la vitesse initiale était $(-10, 0, 0)$. Il n'y avait aucun phénomène significatif à observer. Analysons les changements effectués ci-dessous.

- **Position initiale du trou noir supermassif à (1000, 30, 0)** : un léger filament apparaît.
- **Position initiale du trou noir supermassif à (1000, 30, 0) et vitesse initiale à $(-50, 0, 0)$** : il ne se passe rien de significatif.
- **Cluster de 2000 trous noirs primordiaux et position initiale du trou noir supermassif à (1000, 30, 0)** : un filament apparaît distinctement

Nous avons observé une structure de type filament mais nous remarquons que le cluster passe à travers le trou noir supermassif et ne présente pas une trajectoire hyperbolique autour de celui-ci. D'autre part, nous ne sommes pas parvenus

à obtenir une structure de type filament de taille inférieure à 100 parsec. Ceci rend l'explication de l'observation du radio filament à l'aide de trous noirs primordiaux relativement peu plausible. La raison principale est l'instabilité d'un cluster de trous noirs primordiaux de cette taille, que nous avons mis en évidence grâce aux simulations.

Conclusion

Depuis la détection des ondes gravitationnelles, les trous noirs primordiaux sont de nouveau un candidat sérieux à la matière noire dans l'Univers. Ce modèle peut passer les contraintes actuelles si une fraction importante des trous noirs primordiaux sont regroupés en clusters. Nous nous sommes intéressés à l'impact que pourrait avoir l'un de ces clusters proche du centre galactique, en particulier nous souhaitons déterminer si les forces de marée induites sur le cluster par le trou noir supermassif peuvent induire la formation d'un radio filament comme celui observé récemment dans [34].

Dans ce mémoire, nous avons utilisé le code Gadget-2 afin d'effectuer des simulations à n corps représentant un cluster de trous noirs primordiaux dont la trajectoire passe à proximité du trou noir supermassif Sgr A^* de notre galaxie. Après une variation des paramètres et environ 80 simulations, nous avons réussi à trouver un cas dont la visualisation ressemblait à un filament. Cependant, nous avons observé grâce aux simulations que des clusters de trous noirs primordiaux de taille inférieure au parsec sont dynamiquement instables. La taille du filament obtenue ne correspond donc pas à la taille du radio filament observée. Il serait intéressant de continuer à travailler sur ces simulations, continuer à faire varier les paramètres afin d'obtenir une visualisation plus proche de l'observation du radio filament connecté à Sgr A^* .

En perspective de ce travail, des études plus poussées, tant analytiques que numériques, pourraient être menées sur :

- Le processus de réchauffement dynamique de clusters de trous noirs primordiaux de petites tailles (inférieur au parsec).
- La stabilité de l'intégrateur symplectique utilisé par Gadget-2.
- Les clusters de trous noirs primordiaux de petites masses ($10^{-15} M_{\odot}$).
- Le spectre émis par l'accrétion de matière autour des trous noirs primordiaux et sa compatibilité avec l'émission du radio filament observé au centre galactique.

Table des figures

1.1	Distribution des vitesses dans l'amas de Coma. Chaque point représente la vitesse et la position angulaire d'une galaxie. On localise les galaxies en fonction de leur décalage vers le rouge. Figure issue de [1].	7
1.2	Gauche : Amas de Coma, Source : [8] ; Milieu : Amas de Virgo, Source : [9] ; Droite : Galaxie d'Andromède, Source : [10].	7
1.3	Représentation des courbes de rotation des étoiles autour de leur galaxie. La courbe A est la courbe de rotation réellement observée et la courbe B est la courbe prévue par la théorie de Newton en l'absence de matière noire. Inspiré de [11].	10
1.4	Amas de la Balle. La partie rouge représente la matière visible tandis que les deux sphères bleues représentent la matière invisible. Source : [14].	11
1.5	La voûte céleste telle que la verrait un observateur situé près d'un trou noir devant le centre de notre galaxie. Source : [19].	15
1.6	Distribution de masse des trous noirs primordiaux. Figure issue de [22]	16
1.7	L'interféromètre Ligo aux Etats-Unis. Source : [26].	17
1.8	L'onde gravitationnelle GW150914 détectée par les interféromètres Ligo Handford et Ligo Livingston. Source : [27].	18
1.9	Les fusions de trous noirs détectées par les interféromètres Ligo et Virgo. Source : [31]	19
1.10	Radiographies de la région nord de Sgr A*, montrant le filament SgrAWF. Le signe + marque la localisation de Sgr A*. La même échelle est utilisée pour chacune des images. Issue de [34].	22
2.1	Description des blocs du format HDF5 [38].	42
2.2	Lecture d'un fichier sous format HDF5 par Matlab	44
3.1	Représentation schématique de la simulation. Le cluster de trous noirs primordiaux est situé au centre du repère et une vitesse et position initiale est déterminée pour le trou noir supermassif.	46

3.2	Distribution de masse du cluster une loi log-normale $Log-\mathcal{N}(2.0, 0.09)$ (voir équation 3.1).	48
3.3	Simulation d'un cluster de 10 000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$. Simulation au temps $t = 0$ années	50
3.4	Simulation d'un cluster de 10 000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$. Simulation aux temps $t = 31, 7$ années, $t = 158, 5$ années et $t = 317$ années	51
3.5	Simulation d'un cluster de 10 000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$ et ajout d'un trou noir primordial de $10 M_{\odot}$ au centre du cluster (en rouge). Simulation aux temps $t = 31, 7$ années, $t = 158, 5$ années et $t = 317$ années	53
3.6	Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$. Simulation aux temps $t = 31, 7$ années, $t = 158, 5$ années et $t = 317$ années	54
3.7	Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 0.1$ et $R_{max} = 10$. Distribution de vitesse du cluster nulle. Simulation aux temps $t = 31, 7$ années, $t = 158, 5$ années et $t = 317$ années	56
3.8	Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$. Simulation aux temps $t = 31, 7$ années, $t = 158, 5$ années et $t = 317$ années	57
3.9	Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d'un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_{\odot}$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1044.031 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation au temps $t = 0$ années	60
3.10	Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d'un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_{\odot}$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1044.031 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années	61
3.11	Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primoridiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d'un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_{\odot}$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1000.45 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation au temps $t = 0$ années	62

- 3.12 Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d'un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1000.45 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années . . 63
- 3.13 Simulation d'un cluster de 1000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d'un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1000.45 parsec et dont la vitesse initiale est de -50 km/. Simulation aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années . . 65
- 3.14 Simulation d'un cluster de 2000 trous noirs primordiaux situé au centre du repère dont $R_S = 5$ et $R_{max} = 10$ et d'un trou noir supermassif de $4.31 \times 10^6 M_\odot$ (en rouge) situé à une distance initiale de 1000.45 parsec et dont la vitesse initiale est de -10 km/. Simulation aux temps $t = 1585$ années, $t = 3170$ années et $t = 4755$ années . . 67

Bibliographie

- [1] Richard Taillet, *La matière noire*,
http://lapth.cnrs.fr/pg-nomin/taillet/dossier_matiere_noire, 20 mars 2018
- [2] Françoise Combes, *La matière noire dans l'Univers*,
<https://journals.openedition.org/lettre-cdf/2067>, 20 mars 2018
- [3] Sébastien Clesse et Juan García Bellido, *Matière Noire, la piste des trous noirs*,
Pour la Sciences, vol.484 2018, p.26-33
- [4] Fritz Zwicky, *On the Redshift of Spectral lines thourgh interstellar space*, PNAS,
vol.15 1929, p.773-779
- [5] Sinclair Smith, *The Mass of the Virgo Cluster*, Astrophysical Journal, vol. 83, 1936,
p.23-30
- [6] Horace Babcock, *The rotation of the Andromeda Nebula*, Lick Observatory bulletin,
vol. 498, 1939, p.41-51
- [7] Rubin, V. C., et al., *Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/*, Astrophysical Journal, Part 1, vol. 238, 1980, p. 471-487
- [8] Wikipédia, *Amas de la Chevelure de Bérénice*,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Amas_de_la_Chevelure_de_Bérénice, 28 avril 2018
- [9] Wikipédia, *Amas de la Vierge*,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Amas_de_la_Vierge, 28 avril 2018
- [10] Wikipédia, *Galaxie d'Andromède*,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Galaxie_d%27Andromède, 28 avril 2018
- [11] Wikipédia, *Courbe de rotation des galaxies*,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_de_rotation_des_galaxies, 6 mai 2018
- [12] Sean Bailly, *Les galaxies spirales défient la matière noire*,
<https://www.pourlascience.fr/sd/astrophysique/les-galaxies-spirales-defient-la-matiere-noire-12433.php>, 6 mai 2018
- [13] Douglas Clowe et al., *A direct empirical proof of the existence of dark matter*,
Astrophys.J.648 :L109-L113,2006
- [14] Robert Nemiroff, *La matière de l'amas de la Balle*,
http://www.cidehom.com/apod.php?_date=060824, 29 avril 2018

- [15] Wayne Hu et Martin White, *The Cosmic Symphony*, Scientific American, vol.290, 2004, p.44-53
- [16] Sébastien Clesse, *Hybrid Inflation : Multi-field Dynamics and Cosmological Constraints*, Thèse, 2011
- [17] Patrick Peter and Jean-Philippe Uzan, *Primordial Cosmology*, Oxford University Press, 2013
- [18] Thomas W. Baumgarte, *Black Holes : from Speculations to Observations*, Albert Einstein International Conference, vol. 861, issue 1, 2006
- [19] Loïc Villain, *Formation d'un trou noir stellaire*, Futura Sciences,
<https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/astronomie-trou-noir-dossier-introductif-4/page/3/>, 22 avril 2018
- [20] Charles Q. Choi, *Oldest Supermassive Black Hole Found from Universe's Infancy*, Scientific American,
<https://www.scientificamerican.com/article/oldest-supermassive-black-hole-found-from-universe-s-infancy/>, 23 avril 2018
- [21] Yasemin Saplakoglu, *Zeroing In on How Supermassive Black Holes Formed*, Scientific American,
<https://www.scientificamerican.com/article/zeroing-in-on-how-supermassive-black-holes-formed1/>, 23 avril 2018
- [22] Bernard Carr, Sébastien Clesse, Juan Garcia-Bellido et Florian Kuhnel, *Cosmic Conundra Explained by Thermal History and Primordial Black Holes*, 2019
- [23] Wikipédia, *Observation et détection des trous noirs*,
https://fr.wikipedia.org/wiki/Observation_et_d%C3%A9tection_des_trous_noirs#Rayonnement_X, 6 mai 2018
- [24] Laurent Sacco, *Ondes gravitationnelles : la détection par Virgo et Ligo localise le trou noir binaire*,
<https://www.futura-sciences.com/sciences/actualites/onde-gravitationnelle-ondes-gravitationnelles-detection-virgo-ligo-localise-trou-noir-binaire-11916/>, 25 avril 2018
- [25] Kathy Svitil et al., *LIGO Opens New Window on the Universe with Observation of Gravitational Waves from Colliding Black Holes*,
<https://www.ligo.caltech.edu/page/press-release-gw150914>, 25 avril 2018
- [26] Lisa : Observatoire Spatial d'ondes gravitationnelles, Centre National d'études Spatiales,
<https://jeunes.cnes.fr/fr/lisa-pathfinder-observatoire-spatial-dondes-gravitationnelles>, 25 avril 2018
- [27] LIGO Open Science Center,
https://www.ligo.caltech.edu/system/media_files/binaries/301/original/detection-science-summary.pdf?1455157973, 15 mai 2018
- [28] Wikipédia, *Primordial Black Hole*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Primordial_black_hole, 15 mai 2018

- [29] Bird et al., *Did LIGO detect dark matter ?*, Physical Review Letters, Vol. 116, Mars 2017, p.142-147
- [30] Sébastien Clesse et Juan Garcia-Bellido, *The clustering of massive Primordial Black Holes as Dark Matter : measuring their mass distribution with Advanced LIGO*, Physics of the Dark Universe, Vol 15, 2016
- [31] LIGO Laboratory , *LIGO and Virgo Announce Four New Gravitational-Wave Detections*,
<https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20181203> 7 juillet 2019
- [32] Guru Med, *Un long et mystérieux filament s'étend vers le trou noir au centre de notre galaxie*,
<http://www.gurumed.org/2017/12/27/long-mystrieux-filament-stend-vers-trou-noir-centre-de-galaxie/>, 8 avril 2018
- [33] Balick, B. ; Brown, R. L., *Intense sub-arcsecond structure in the galactic center*, Astrophysical Journal, vol. 194, 1974, p. 265-270
- [34] Mark R. Morris, et al., *A non-thermal radio filament connected to the galactic black hole ?*, The Astrophysical Journal Letters, Vol. 850, Number 2, 2017
- [35] Volker Springel, *The Cosmological simulation code GADGET-2*, 2005
- [36] Volker Springel, *GADGET-2*, <https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/gadget/>, 10 avril 2019
- [37] Céci, *Lemaitre3*, <http://www.ceci-hpc.be/clusters.html#lemaitre3>, 12 avril 2019
- [38] Volker Springel, *User guide for GADGET-2*, <https://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/gadget/users-guide.pdf>, 2005
- [39] Sébastien Clesse et Juan Garcia-Bellido, *Seven Hints for Primordial Black Hole Dark Matter*, , Physics of the Dark Universe, Vol 22, 2018, p.137-146
- [40] Markus Schmidt, *N-Body Simulations of Primordial Black Hole Halos*, Thesis, 2017

Annexe A

Conditions initiales de Gadget-2

Cette annexe est traduite de [38].

Noms et formats de fichiers

- **OutputDir** : Chemin du répertoire qui contient tous les outputs générés par la simulation (fichiers de capture d'écran, de redémarrage, d'analyse). Le répertoire doit préalablement exister.
- **SnapshotFileBase** : Le nom du fichier de capture d'écran est dérivant de ce string en ajoutant un underscore et le nombre associé est dans un format à 3 chiffres.
- **SnapFormat** : Flag spécifiant le format de fichier utilisé pour écrire les fichiers de capture d'écran. La valeur 1 sélectionne le format de fichier standard de Gadget-2, la valeur 2 sélectionne une variante plus pratique de ce format binaire et la valeur 3 sélectionne le format HDF5.
- **NumFilesPerSnapshot** : Le code peut distribuer chaque capture d'écran sur plusieurs fichiers. Cela mène à des fichiers plus faciles à gérer pour de très grandes simulations. Cela augmente également la vitesse car ces fichiers peuvent être écrits en parallèle. Le nombre de processeurs doit être égal ou plus grand que `NumFilesPerSnapshot`, car chaque fichier de capture d'écran contient les données d'un groupe de processeurs. La vitesse est optimale si le nombre de processeurs est égal ou est un multiple de `NumFilesPerSnapshot` et si `NumFilesWrittenInParallel` est égal à `NumFilesPerSnapshot` ou à une de ses subdivisions. Avec `NumFilesPerSnapshot=1`, il est possible d'écrire toutes les données dans un seul fichier de capture d'écran.
- **InitCondFile** : Chemin vers le fichier de conditions initiales.
- **ICFormat** : Flag qui sélectionne le format de fichier des conditions initiales.
- **RestartFile** : Nom de fichier de base pour les fichiers de redémarrage.
- **InfoFile** : Nom du fichier contenant une liste de tous les pas de temps. base pour les fichiers de redémarrage.
- **TimingsFile** : Nom du fichier log mesurant différents aspects de la performance du calcul des forces gravitationnelles pour chaque pas de temps.
- **CpuFile** : Fichier log qui garde une trace de la consommation cpu cumulative

des différentes parties du code. A chaque pas de temps, une ligne est ajoutée à ce fichier.

- **EnergyFile** : Nom du fichier reprenant des informations à propos de statistiques sur l'énergie globale de la simulation. Observer la conservation d'énergie peut parfois être une bonne approximation de la précision de l'intégration du temps. Comme calculer l'énergie gravitationnelle requiert du temps CPU supplémentaire, l'option `COMPUTE_POTENTIEL_ENERGY` du Makefile doit être sélectionnée.

Limite de temps CPU et options de redémarrage

- **TimeLimitCPU** : Limite du temps CPU pour l'exécution actuelle en secondes. Cette valeur doit correspondre à la limite du cluster. L'exécution s'arrêtera automatiquement et écrira un fichier de redémarrage si 85% du temps a été consommé. Les 15% restants garantissent qu'il y a toujours assez de temps pour finir le pas de temps actuel et écrire le fichier de redémarrage.
- **CpuTimeBetRestartFile** : Quantité maximum du temps CPU qui peut être utilisée par le code avant d'écrire un nouveau fichier de redémarrage.

Paramètres spécifiques à la simulation

- **Timebegin** : Initialise la variable de temps de la simulation lorsqu'on commence une exécution.
- **TimeMax** : Marque la fin de la simulation. La simulation s'exécutera jusqu'à ce point et écrira ensuite un fichier de redémarrage et un fichier de capture d'écran correspondant à ce temps.
- **ComovingIntegrationOn** : Flag permettant l'intégration comoving dans un univers en expansion. Lorsque le flag est à 0, le code utilise la physique Newtonienne avec du vide ou des conditions frontières périodiques. Temps, positions, vitesses et masses sont mesurées dans le système d'unités spécifié. Si le flag est à 1, l'intégration est réalisée dans un univers en expansion, en utilisant le modèle cosmologique spécifié par Ω_{matter} , Ω_{Lambda} , etc.

Paramètres cosmologiques

- **HubbleParam** : Valeur de la constante de Hubble dans les unités $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Uniquement utilisé dans les intégrations cosmologiques lorsque les conversions en unités cgs sont nécessaires.
- **Ω_{matter}** : Paramètre de densité de matière cosmologique dans les unités de la densité critique en $z = 0$. Uniquement pour l'intégration comoving.
- **Ω_{Lambda}** : Densité d'énergie du vide cosmologique (constante cosmologique) dans les unités de la densité critique en $z = 0$. Uniquement pour l'intégration comoving. Pour un univers géométriquement plat : $\Omega_{\text{matter}} + \Omega_{\text{Lambda}} = 1$. Pour des simulations dans un espace Newtonien, le paramètre doit être initialisé à 0.
- **Ω_{baryon}** : Densité Baryon dans les unités de la densité critique en $z = 0$.

Allocation de mémoire

- **BufferSize** : Spécifier la taille (en MByte) d'un tampon de communication polyvalent utilisé par le code dans différentes parties des algorithmes parallèles.
- **PartAllocFactor** : Chaque processeur alloue de l'espace pour `PartAllocFactor` fois le nombre moyen de particules par processeur. Ce nombre doit être plus grand que 1 pour permettre à la simulation d'atteindre un bon équilibre entre travail et chargement dans la décomposition de domaine. Il est bon d'avoir un nombre aussi grand que la mémoire disponible par processeur mais les valeurs excédant 3 n'améliorent plus la performance. Pour une valeur de 1, le code ne sera plus capable de réussir la décomposition de domaine, sauf si un seul CPU est utilisé.
- **TreeAllocFactor** : Pour construire l'arbre BH pour N particules, quelque chose de plus petit que N noeuds internes de l'arbre sont nécessaires pour des distributions normales de particules. Cette valeur établit le nombre de noeuds internes alloués dans les unités du nombre de particules.

Précision de la force gravitationnelle

- **TypeOfOpeningCriterion** : Sélectionne le type de critère d'ouverture de cellule utilisé dans les arbres pour le calcul des forces gravitationnelles. Une valeur de 0 résulte dans le standard Barnes & Hut, alors qu'une valeur de 1 sélectionne un critère relatif qui tente de limiter l'erreur de troncature absolue de l'expansion pour chaque interaction de particules.
- **ErrTolTheta** : Il s'agit du critère de précision (l'angle d'ouverture θ) de l'algorithme en arbre si le critère BH est utilisé. Si `TypeOfOpeningCriterion` = 1, θ et le critère BH sont seulement utilisés pour le premier calcul de force.
- **ErrTolForceAcc** : Contrôle la précision du critère d'ouverture relative.

Précision de l'intégration du temps

- **MaxSizeTimestep** : Paramètre établissant le pas de temps maximum qu'une particule peut faire. Il doit être fixé à une valeur sensible dans le but d'éviter de trop larges pas de temps pour des particules avec de petites accélérations. Habituellement, un petit pourcentage jusqu'à une dizaine de pourcents du temps donne une précision suffisante.
- **MinSizeTimestep** : Si une particule requiert un pas de temps plus petit que la valeur spécifiée, la simulation se termine avec un message d'erreur. Cela permet d'éviter que des simulations continuent alors que les pas de temps ont chuté.
- **TreeDomainUpdateFrequency** : Comme une décomposition de domaine et une construction d'arbre ne sont pas nécessairement effectuées à chaque pas de temps, ce paramètre détermine la fréquence de ceux-ci.
- **MaxRMSDisplacementFac** : Définit une limite supplémentaire sur le pas de temps pour un pas PM lorsque la méthode TreePM est utilisée.

Sortie des fichiers de capture d'écran

- **OutputListOn** : Une valeur de 1 signifie que les temps de sortie sont dans le fichier spécifié par `OutputListFilename` .
- **OutputListFilename** : Spécifie le nom d'un fichier contenant une liste des temps de sortie désirés.
- **TimeOfFirstSnapshot** : Sélectionne le temps pour la première capture d'écran si `OutputListOn=0`.
- **TimeBetSnapshot** : Une fois qu'une capture d'écran a été écrite, le temps pour la prochaine capture est obtenu en additionnant `TimeBetSnapshot` à `TimeOfFirstSnapshot` ou en multipliant `TimeOfFirstSnapshot` avec `TimeBetSnapshot` .
- **TimeBetStatistics** : Détermine l'intervalle de temps entre deux calculs de l'énergie potentielle totale du système. L'information est ensuite écrite dans le fichier `EnergyFile`
- **NumFilesWrittenInParallel** : Détermine le nombre de fichiers écrits simultanément par le code en générant les fichiers de captures d'écran ou en écrivant les fichiers de redémarrage.

Système d'unités

- **UnitVelocity_in_cm_per_s** : Etablit l'unité de vitesse interne en cm/sec. Mettre ce paramètre à $1e5$ initialise l'unité de vitesse en km/sec.
- **UnitLength_in_cm** : Etablit l'unité de longueur interne en cm/h où $H_0 = 100 h k m s^{-1} M p c^{-1}$. Le choix de $3.085678e21$ initialise l'unité à $1.0 k p c / h$.
- **UnitMass_in_g** : Etablit l'unité de masse interne en g/h où $H_0 = 100 h k m s^{-1} M p c^{-1}$. Le choix de $1.989e43$ initialise l'unité à $10^{10} M_{\odot} / h$.
- **GravityConstantInternal** : La valeur numérique de la constante gravitationnelle G dépend des unités internes choisies. Lorsque ce paramètre est initialisé à 0, le code calcule la valeur correspondant à la valeur physique pour nous.

Paramètres SPH

- **DesNumNgb** : Nombre désiré de voisins de smoothing SPH. Normalement, le nombre effectif de voisins reste constant, proche de cette valeur.
- **MaxNumNgbDeviation** : Variation autorisée du nombre de voisins autour de la valeur `DesNumNgb`.
- **ArtBulkViscCons** : Etablit la valeur du paramètre de viscosité artificielle α_{visc} utilisé par le code.
- **CourantFac** : Initialise la valeur du paramètre Courant utilisé dans la détermination du pas de temps hydrodynamique des particules SPH.
- **InitGasTemp** : Il s'agit de la température de gaz initiale en Kelvin quand les conditions initiales sont lues.
- **MinGasTemp** : La température de gaz minimum autorisée en Kelvin.
- **MinGasHsmlFractional** : Paramètre établissant la longueur de smoothing SPH minimum autorisée dans les unités de la longueur de softening gravitationnel des particules de gaz.

Softening gravitationnel

Les noms "Gas", "Halo", "Disk", "Bulge", "Stars" et "Bndry" sont des noms arbitraires, réfléchissant le fait que Gadget-2 est un code permettant l'étude des collisions de galaxies.

- **SofteningGas** : Spécifie le softening (comoving) pour le premier groupe de particules.
- **SofteningHalo** : Spécifie le softening (comoving) pour le second groupe de particules.
- **SofteningDisk** : Spécifie le softening (comoving) pour le troisième groupe de particules.
- **SofteningBulge** : Spécifie le softening (comoving) pour le quatrième groupe de particules.
- **SofteningStars** : Spécifie le softening (comoving) pour le cinquième groupe de particules.
- **SofteningBndry** : Spécifie le softening (comoving) pour le sixième groupe de particules.
- **SofteningGasMaxPhys** : Spécifie le softening maximum physique pour le premier groupe de particules.
- **SofteningHaloMaxPhys** : Spécifie le softening maximum physique pour le second groupe de particules.
- **SofteningDiskMaxPhys** : Spécifie le softening maximum physique pour le troisième groupe de particules.
- **SofteningBulgeMaxPhys** : Spécifie le softening maximum physique pour le quatrième groupe de particules.
- **SofteningStarsMaxPhys** : Spécifie le softening maximum physique pour le cinquième groupe de particules.
- **SofteningBndryMaxPhys** : Spécifie le softening maximum physique pour le sixième groupe de particules.

Annexe B

Description des fichiers de sortie

Cette annexe est tirée de [38].

Tout d'abord, analysons le fichier `info.txt`. Dans ce fichier, nous retrouvons simplement une liste des pas de temps utilisés. Le premier nombre identifie tous les pas de temps tandis que la valeur indiquée après "Time" indique le temps de simulation actuel. La valeur "Systemstep" donne quant à elle la différence de temps par rapport au pas précédent. Pour les intégrations cosmologiques, l'output indique également le redshift ainsi que le "Systemstep", sous forme logarithmique dans "Dloga". Nous pouvons observer un morceau de l'output ci-dessous.

```
Begin Step 636, Time : 0.487717, Redshift : 1.05037, Systemstep : 0.000724494, Dloga : 0.00148658
Begin Step 637, Time : 0.488443, Redshift : 1.04732, Systemstep : 0.000725571, Dloga : 0.00148658
Begin Step 638, Time : 0.489169, Redshift : 1.04428, Systemstep : 0.000726651, Dloga : 0.00148658
Begin Step 639, Time : 0.489897, Redshift : 1.04125, Systemstep : 0.000727732, Dloga : 0.00148658
Begin Step 640, Time : 0.490626, Redshift : 1.03821, Systemstep : 0.000728814, Dloga : 0.00148658
```

Ensuite, analysons le fichier `timings.txt`. Dans ce fichier, nous retrouvons toutes les statistiques concernant les performances du calcul des forces gravitationnelles par l'algorithme en arbre, qui est la partie principale du temps de calcul dans une simulation. Nous retrouvons une partie de l'output ci-dessous.

La première ligne d'un bloc nous indique l'itération en question, le temps de simulation et le pas de temps actuel. Pour la deuxième ligne, `Nf` donne le nombre de particules ayant reçu un calcul de force dans le pas de temps actuel et `total-Nf`, donne le nombre total de calculs de force effectués depuis le début de la simulation. Pour la troisième ligne, `work-load balance` indique le rapport entre charge et travail dans l'arbre actuel, c'est-à-dire le plus long temps requis de tous les processeurs divisé par le temps moyen.

```

Step= 482 t= 1.29199 dt= 0.00292969
Nf= 10992 total-Nf= 0016981370
work-load balance : 1.10997 max=0.618782 avg=0.557475 PEO=0.618782
particle-load balance : 1.02133
max. nodes : 15202, filled : 0.422278
part/sec=9858.74 | 8881.96 ia/part=1004.71 (0)

Step= 483 t= 1.29492 dt= 0.00292969
Nf= 60000 total-Nf= 0017041370
work-load balance : 1.01677 max=2.51368 avg=2.47221 PEO=2.43074
particle-load balance : 1.02133
max. nodes : 15202, filled : 0.422278
part/sec=12134.9 | 11934.7 ia/part=805.744 (0)

```

La variable `max` est le temps maximum en secondes passé pour la marche de l'arbre, parmi tous les processeurs. Enfin, `avg` nous donne la moyenne et `PEO`, le temps pour le processeur 0. Pour la quatrième ligne, `particle-load balance` donne le nombre maximum de particules par processeur divisé par le nombre moyen, c'est-à-dire la mesure du déséquilibre de la mémoire. Concernant l'avant-dernière ligne, `max. nodes` nous donne le nombre de noeuds internes de l'arbre utilisés parmi les groupes de processeurs et `filled` indique cette dernière quantité normalisée par le nombre total de noeuds d'arbres alloués. Cette dernière valeur donne donc la fraction de l'arbre qui est remplie. Finalement, pour la dernière ligne, `part/sec` mesure la vitesse de la force en termes de calcul de force par processeur par seconde. Le premier nombre indique la vitesse qui serait atteinte pour un parfait équilibre charge-travail et le deuxième nous indique la vitesse réelle. Celle-ci est en effet toujours inférieure au premier nombre de par le déséquilibre charge-travail. Enfin, `ia/part` donne le nombre moyen d'interactions entre particules et noeuds requises pour calculer la force de chaque particule active.

Ensuite, analysons le fichier `cpu.txt` qui nous donne certaines statistiques à propos de la consommation CPU totale, mesurée dans différentes parties du code. L'output se présente de la façon suivante.

```

Step 13121, Time : 0.168501, CPUs : 2
44000.01 32984.59 6496.83 52.40 1318.17 2744.38 ...
Step 13122, Time : 0.168504, CPUs : 2
44001.11 32985.30 6497.01 52.40 1318.17 2744.59 ...

```

Pour chaque pas de temps (indiqué par le premier nombre), nous avons le temps de la simulation ainsi que le nombre de CPU utilisés. Nous avons également une deuxième ligne indiquant tout d'abord la consommation totale cumulée de CPU (en secondes). Les autres nombres nous donnent des mesures prises dans différentes parties du code, correspondant aux différents éléments suivants (dans cet ordre). La liste complète peut être retrouvée dans [38].

Annexe C

Codes Matlab

HDF5READ.m

Cette fonction permet de lire les coordonnées des particules depuis un fichier snapshot et de tracer la simulation à un temps donné.

```
1 clear all
2 clc
3 pwd
4
5
6 sim = 39;
7 snapshot = '010';
8 star = false; %indique si un trou noir supermassif est ajoute
9 echelle = 1500;
10
11 path = sprintf('Simulations/sim%d/snapshot_%s.hdf5',sim,snapshot)
12
13 data = h5read(path,'PartType1/Coordinates');
14 k = length(data)
15
16 if (star == true)
17     dataStar = h5read(path,'PartType3/Coordinates');
18 end
19
20 x1 = data(1,1:k);
21 y1 = data(2,1:k);
22 z1 = data(3,1:k);
23
24 if (star == true)
25     x2 = dataStar(1,1);
26     y2 = dataStar(2,1);
27     z2 = dataStar(3,1);
```

```

28 end
29
30 scatter3(x1,y1,z1,2,'b')
31 axis([-echelle echelle -echelle echelle -echelle echelle])
32 xlabel('x')
33 ylabel('y')
34 zlabel('z')
35 if (star == true)
36     hold on
37     scatter3(x2,y2,z2,50,'r','filled')
38 end

```

Masses.m

Cette fonction permet de lire les masses des particules depuis un fichier snapshot et de tracer l'histogramme de ces masses.

```

1 clear all
2 clc
3 pwd
4
5 sim = 66;
6 snapshot = '000';
7 star = true; %indique si un trou noir supermassif est ajoute
8
9 path = sprintf('Simulations/sim%d/snapshot_%s.hdf5',sim,snapshot)
10
11
12 %calcul de la masse du cluster
13 masses = h5read(path,'PartType1/Masses');
14 k = length(masses)
15 sumMass = 0
16 for i = 1:k
17     sumMass = sumMass + masses(i)
18 end
19
20 %distribution de masse du cluster
21
22 hist(log(masses))
23 h = findobj(gca,'Type','patch');
24 h.FaceColor = [0.5 0.7 0.8];
25 title('Distribution de masse du cluster ')
26 xlabel('log(Masse) en masse solaire')
27 ylabel('Nombre de trous noirs')

```

```
28
29
30 %masse du trou noir supermassif
31 if (star == true)
32     masses2 = h5read(path,'PartType3/Masses');
33 end
```

Visualisation.m

Cette fonction permet de créer une vidéo représentant l'évolution de la simulation.

```
1 clear all
2 clc
3 close all
4
5 %Chargement des coordonnees
6
7 snap=300;
8 sim = 63;
9 echelle = 700;
10 star = true;
11
12
13 if (snap >=9)
14     n1 = 9;
15 else
16     n1 = snap;
17 end
18
19 for i=1:n1
20
21     path = sprintf('Simulations/sim%d/snapshot_00%d.hdf5',sim,i)
22     data = h5read(path,'PartType1/Coordinates');
23     len = length(data);
24     if (star == true)
25         dataStar = h5read(path,'PartType3/Coordinates');
26     end
27
28     x1(i,:) = data(1,1:len);
29     y1(i,:) = data(2,1:len);
30     z1(i,:) = data(3,1:len);
31
32     if (star == true)
```

```
33     x2(i,:) = dataStar(1,1);
34     y2(i,:) = dataStar(2,1);
35     z2(i,:) = dataStar(3,1);
36 end
37
38 end
39
40 if (snap >=99)
41     n2 = 99;
42 else
43     n2 = snap;
44 end
45
46 for i=10:n2
47
48     path = sprintf('Simulations/sim%d/snapshot_%d.hdf5',sim,i)
49     data = h5read(path,'PartType1/Coordinates');
50     len = length(data);
51     if (star == true)
52         dataStar = h5read(path,'PartType3/Coordinates');
53     end
54
55     x1(i,:) = data(1,1:len);
56     y1(i,:) = data(2,1:len);
57     z1(i,:) = data(3,1:len);
58     if (star == true)
59         x2(i,:) = dataStar(1,1);
60         y2(i,:) = dataStar(2,1);
61         z2(i,:) = dataStar(3,1);
62     end
63 end
64
65 n3=snap;
66
67 for i=100:n3
68
69     path = sprintf('Simulations/sim%d/snapshot_%d.hdf5',sim,i)
70     data = h5read(path,'PartType1/Coordinates');
71     len = length(data);
72     if (star == true)
73         dataStar = h5read(path,'PartType3/Coordinates');
74     end
75
76     x1(i,:) = data(1,1:len);
77     y1(i,:) = data(2,1:len);
78     z1(i,:) = data(3,1:len);
```

```
79
80     if (star == true)
81         x2(i,:) = dataStar(1,1);
82         y2(i,:) = dataStar(2,1);
83         z2(i,:) = dataStar(3,1);
84     end
85 end
86
87 %Visualisation
88
89 figure
90
91 if (star == true)
92     for k=1:snap
93         h1=scatter3(x1(k,:),y1(k,:),z1(k,:),2,'b');
94         hold on
95         h2=scatter3(x2(k,:),y2(k,:),z2(k,:),100,'r','filled');
96         title(['Iteration : ',num2str(k)])
97         axis([-echelle echelle -echelle echelle -echelle
98              echelle])
99         xlabel('x')
100        ylabel('y')
101        zlabel('z')
102        pause(1)
103        if (k ~= snap)
104            delete(h1)
105            delete(h2)
106        end
107    end
108 else
109     for k=1:snap
110         scatter3(x1(k,:),y1(k,:),z1(k,:),2,'b');
111         title(['Iteration : ',num2str(k)])
112         xlabel('x')
113         ylabel('y')
114         zlabel('z')
115         axis([-echelle echelle -echelle echelle -echelle
116              echelle])
117         pause(1)
118     end
119 end
```