MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Intégrale de Lebesgue : une approche récente

KECH, Fabienne; MOTTART, Patricia

Award date:
1987

Awarding institution:
Universite de Namur

Année académique: 1986-1987

INTEGRALE DE LEBESGUE:

UNE APPROCHE RECENTE

Fabienne KECH
et
Patricia MOTTART

Promoteur
Monsieur Dinu Wexler

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Faculté des Sciences
rue de Bruxelles 61,B-5000 NAMUR
Tel. 081-22.90.61 Telex 59222 facnam-b Telefax 081-23.03.91

Intégrale de Lebesgue : une approche récente.

KECH Fabienne
MOTTART Patricia

Résumé

Nous présentons une approche récente de l'intégrale de Lebesgue dûe à Kurzweil et développée par Henstock, Mawhin et McShane. Dans cette approche, l'intégrale de Lebesgue apparait dès le départ, comme un prolongement naturel de celle élémentaire de Riemann, évitant ainsi la rupture bien connue entre les présentations usuelles de ces deux intégrales.

Abstract

We present a recent approach of the Lebesgue integral due to Kurzweil and adapted by Henstock, Mawhin and McShane. In our opinion, this allows a more natural progression, without modification of definition, from the Riemann integral to the advanced and always difficult Lebesgue integral.

Mémoire de licence en Sciences Mathématiques

Juin 1987

Unité d'Equations différentielles et Mécanique

Promoteur : Prof.D.WEXLER.

Nous remercions Monsieur Dinu Wexler pour ses nombreux conseils et encouragements ainsi que messieurs Frank Callier et Joseph Winkin pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée.

Nous remercions nos parents pour nous avoir donné la possibilité de faire des études et pour nous avoir soutenues pendant toutes ces années.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE III

ETUDE DE L'INTEGRALE DE JAUGE

CHAPITRE IV

FONCTIONS MESURABLES ET ENSEMBLES MESURABLES

CHAPITRE V

EQUIVALENCE ENTRE L'INTEGRALE DE JAUGE ET L'INTEGRALE DE LEBESGUE

CONCLUSION

NOTE AU LECTEUR

Ce mémoire contient cinq chapitres numérotés par des chiffres romains et deux annexes A1, A2. Les théorèmes, lemmes et définitions sont numérotés dans l'ordre de leur apparition dans chaque section (par exemple théorème 2.3, définition 2.4). Dans le cadre de chaque section, les formules sont numérotées (1), (2), ... Une référence de la forme théorème II.3.4 renvoie au quatrième théorème de la troisième section du deuxième chapitre. Si la réference ne contient pas de chiffre romain, cela signifie qu'elle renvoie à un théorème ou une définition du même chapitre. Les démonstrations des théorèmes sont délimitées par le mot "démonstration" et par le signe ■.
La valeur absolue sera notée |.|.
On note respectivement les ensembles des naturels, des entiers et des réels par N, Z, R

L'introduction, la conclusion et les chapitres I, V ont été rédigés en commun, les chapitres II et IV par Fabienne Kech et le chapitre III par Patricia Mottart.

INTRODUCTION

L'importance de l'intégrale s'est accrue d'année en année, tant dans le domaine des mathématiques pures que dans les applications. Les progrès du vingtième siècle en théorie d'intégration, notamment l'intégrale de Lebesgue et ses extensions, se révélèrent fondamentaux pour le développement des probabilités et de l'analyse mathématique.

Dans les présentations usuelles de l'intégrale de Lebesgue, on construit d'abord la théorie de la mesure, ce qui engendre une rupture avec l'idée classique d'intégrale, perçue lors de la construction de l'intégrale de Cauchy ou de Riemann. Cette rupture est encore renforcée par le fait que, dans l'intégrale classique, les subdivisions sont effectuées sur l'axe de l'argument alors que dans l'intégrale de Lebesgue, elles sont réalisées sur l'axe des images.

Dans ce mémoire, nous présentons une approche récente de l'intégrale de Lebesgue due à E.J.McShane [1]. Elle apparaît, là, dès le départ, comme un prolongement naturel de celle élémentaire de Riemann. Une version antérieure de cette approche due à J.Kurzweil [2] et développée par R.Henstock [3] et J.Mawhin [4] conduit à l'intégrale de Perron (appelée dans [3], intégrale de Riemann complète) qui est plus générale que celle de Lebesgue et dont l'intérêt est plus limité. C'est pour cette raison que nous nous basons plutôt sur l'étude de McShane qui, elle, nous conduit directement à l'intégrale de Lebesgue sur R tout entier. Nous garderons pour cette intégrale l'appellation d'<u>intégrale de jauge</u>, introduite dans [1]. Cette construction permet d'obtenir l'intégrale de Lebesgue mais non l'intégrale abstraite de la théorie générale d'intégration.

Les applications de l'intégrale de Lebesgue font appel à ses propriétés bien plus qu'à sa construction. Il en est de même pour l'intégrale de jauge. Nous ne verrons donc pas d'exemples d'utilisation de cette intégrale.

Le chapitre I est consacré à la construction de l'intégrale de jauge comme prolongement de l'intégrale de celle de Riemann.
Dans le chapitre II, nous établissons les propriétés de base de l'intégrale de jauge.
Le chapitre III présente d'autres propriétés très importantes telles que les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée.
Les fonctions et les ensembles mesurables au sens de jauge sont étudiés au chapitre IV.
Ceci nous permettra de présenter, au chapitre V, une démonstration directe de l'égalité entre l'intégrale de jauge et celle de Lebesgue. Ce chapitre a nécessité plus de recherches personnelles, car nous avons préféré ne pas suivre la démarche proposée par E.J.McShane [1], qui nous aurait entraînés dans des développements assez poussés de la théorie générale de la mesure.
Dans la conclusion, seront soulignés les avantages et les inconvénients de l'intégrale de jauge par rapport à l'intégrale classique de Lebesgue. Enfin, nous ouvrirons la voie vers l'intégrale de jauge dans un espace à plusieurs dimensions, en donnant les principales étapes pour atteindre le théorème de Fubini.

CHAPITRE 1

CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE DE JAUGE

Le concept d'intègrale est apparu en rapport avec la nécessité de calculer des aires et des volumes. Ceci implique une notion de mesure que nous précisons dès à présent.

§1. Mesure d'intervalles

La mesure des intervalles de la forme $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$, $[a,b]$, où $a,b \in R$, $a \leq b$, est définie comme étant leur longueur $b - a$. On la note m. Si l'intervalle A est non borné, $m(A) = +\infty$ et si A est réduit à un point ou est vide, $m(A) = 0$.

Nous avons choisi de regrouper dans ce paragraphe quelques propriétés immédiates de la mesure d'intervalles. La mesure d'un ensemble quelconque sera introduite au paragraphe 10 du chapitre III comme intégrale de la fonction caractéristique de l'ensemble.

Lemme 1.1

Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des intervalles disjoints deux à deux et $B_1, \ldots, B_n$ des intervalles, non nécessairement disjoints, tels que l'union des B_j, $j = 1, \ldots, n$, contienne l'union des A_i, $i = 1, \ldots, k$, alors

$$m(A_1) + \ldots + m(A_k) \leq m(B_1) + \ldots + m(B_n).$$

Démonstration:

Etant données $c_1, \ldots, c_m$ les extrémités de tous les intervalles $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_n$, rangées par ordre croissant, nous définissons l'intervalle $C_j =]c_j, c_{j+1}]$, ($j = 1, \ldots, m-1$). Ces intervalles sont disjoints deux à deux et $\neq \emptyset$.

Les extrémités d'un intervalle A_i, $i = 1, \ldots, k$, sont deux nombres c_p, c_q et les intervalles C_r dont l'intérieur est inclus dans A_i sont $C_p, \ldots, C_{q-1}$. Alors,

$$m(A_i) = c_q - c_p$$

$$= (c_{p+1} - c_p) + (c_{p+2} - c_{p+1}) + \ldots + (c_q - c_{q-1})$$

$$= m(C_q) + m(C_{p+1}) + \ldots + m(C_{q-1})$$

$$= \sum_{h \in N, \, \overset{\circ}{C}_h \subset A_i} [m(C_h)]$$

Par un raisonnement similaire, si B_j est l'un des intervalles $B_1, \ldots, B_n$ d'extrémités $c_{p'}$, $c_{q'}$, alors

$$m(B_j) = \sum_{h \in N, \, \overset{\circ}{C}_h \subset B_j} [m(C_h)]$$

Et donc,

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{k} m(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \Big[\sum_{h \in N, \, \overset{\circ}{C}_h \subset A_i} m(C_h)\Big]$$

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} m(B_j) = \sum_{j=1}^{n} \Big[\sum_{h \in N, \, \overset{\circ}{C}_h \subset B_j} m(C_h)\Big]$$

Si l'un des $C_1, \ldots, C_{m-1}$ dont l'intérieur est contenu dans l'un des A_i, chaque point intérieur de C_h est au moins dans un des B_j (car $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \subset B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$). L'origine de ce B_j ne peut être plus grande que c_h. De même, son extrémité ne peut être plus petite que c_{h+1}. Donc, l'intervalle $]c_h, c_{h+1}[$ est contenu dans B_j. On en déduit que $m(C_h)$ est l'un des nombres du membre de droite de (2).

Les A_i étant disjoints deux à deux, aucun C_h ne peut apparaître deux fois dans le membre de droite de (1), mais il doit apparaître au moins une fois (peut-être plus) dans le membre de droite de (2). On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{k} \Big[\sum_{h \in N, \, \overset{\circ}{C}_h \subset A_i} m(C_h)\Big] \leq \sum_{j=1}^{n} \Big[\sum_{h \in N, \, \overset{\circ}{C}_h \subset B_j} m(C_h)\Big]$$

et donc, $m(A_1) + \ldots + m(A_k) \leq m(B_1) + \ldots + m(B_n)$.

■

De ce lemme suit un corollaire qui n'est rien d'autre que la propriété d'additivité de la mesure m.

Corollaire 1.2

> Si $A_1, \ldots, A_k$ sont des intervalles disjoints deux à deux dont l'union est un intervalle A, alors
>
> $m(A) = m(A_1) + \ldots + m(A_k)$.

Démonstration:

Nous appliquons le lemme 1.1 avec $n = 1$ et $B_1 = A$ et nous obtenons que $m(A) \geq m(A_1) + \ldots + m(A_k)$. Nous l'appliquons, à nouveau, avec l'ensemble $\{A_1, \ldots, A_k\}$ remplacé par $\{A\}$ et l'ensemble $\{B_1, \ldots, B_n\}$ remplacé par $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Nous obtenons alors que $m(A_1) + \ldots + m(A_k) \geq m(A)$. Les deux inégalités impliquent $m(A) = m(A_1) + \ldots + m(A_k)$.

■

Le lemme suivant nous permettra de prouver la régularité de la mesure m.

Lemme 1.3

Soit A un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$.

i) Si c est un nombre tel que $c > m(A)$, il existe un intervalle ouvert à gauche G de mesure inférieure à c et dont l'intérieur G^o contient l'adhérence $\overline{A}$ de A.

ii) Si c est un nombre tel que $c < m(A)$, il existe un intervalle borné, ouvert à gauche F de mesure inférieure à c dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur A^o de A.

Démonstration:

Si c est supérieur à $m(A)$, $m(A)$ doit être finie. Nous choisissons un $\varepsilon > 0$ tel que $2\varepsilon < c - m(A)$. Nous définissons l'intervalle G comme $]a - \varepsilon, b + \varepsilon]$, où a et b sont les extérmités de A. La mesure de G vaut $b - a + 2\varepsilon$ et $b - a + 2\varepsilon < b - a + c - m(A)$. Comme $b - a$ est la mesure de A, la mesure de G est inférieure à c. Par définition de G, nous avons que G contient $\overline{A}$.
i) est donc prouvé.

Si A est de mesure nulle, nous choisissons F comme étant l'ensemble vide. Dans ce cas, l'adhérence de F est le vide qui est inclus dans tout ensemble et, en particulier, dans A^o. Si la mesure de A est strictement positive, nous choisissons un point e intérieur à A. Nous distinguons deux cas.
Primo, la mesure de A est infinie, alors soit son extrémité est $+\infty$ et dans ce cas, nous prenons $F =]e, e + c + 1[$; soit son origine est $-\infty$, nous prenons alors $F =]e - c - 1, e]$. Dans chaque cas, $\overline{F}$ est contenu dans A^o et $m(F) = c + 1$ qui est supérieur à c.
Secondo, si A est de mesure finie, ses extrémités a et b sont des nombres finis. Nous choisissons

$\varepsilon = (m(A) - c) / 3$ qui est positif. Nous prenons $F =]a + \varepsilon , b - \varepsilon]$. Son adhérence $[a + \varepsilon , b - \varepsilon]$ est contenue dans l'intérieur de A et la mesure de F vaut $(b - a) - 2\varepsilon$, elle est donc supérieure à c. Ainsi, nous avons prouvé ii).

∎

<u>Définition 1.4</u>

Une mesure est dite <u>régulière</u> si les quatre conditions suivantes sont vérifiées:

i) m est définie pour chaque intervalle A ouvert à gauche de R, $0 \leq m(A) \leq \infty$ et $m(A)$ est finie si A est borné;

ii) m est additive;

iii) pour chaque intervalle A de R borné, ouvert à gauche et chaque nombre $c > m(A)$, il existe un intervalle ouvert à gauche G tel que A est inclus dans G^o et $m(G) < c$;

iv) pour chaque intervalle A de R ouvert à gauche et chaque nombre $c < m(A)$, il existe un intervalle borné ouvert à gauche F tel que son adhérence $\overline{F}$ est contenue dans A et $m(F) > c$.

Il est clair que la mesure d'intervalle définie en début de ce paragraphe est régulière.
Pour éviter certains problèmes dans les opérations sur l'infini, nous prenons la convention:

$0.\infty = \infty.0 = 0$.

§2. Intégrale de Riemann, intégrale de Perron

Une des intégrales les plus connues et utiles de l'analyse est, sans aucun doute, l'intégrale de Riemann. Rappelons sa définition.

<u>Définition 2.1</u>

Une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite <u>Riemann intégrable sur $[a,b]$</u> s'il existe un nombre I tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ ayant la propriété que pour chaque subdivision Δ de $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_n = b ,$$

de norme inférieure ou égale à δ et pour chaque choix de points $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$, on a

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) - I \right| < \varepsilon ,$$

où la norme de la subdivision

$$\nu(\Delta) = \sup_{j=1,\dots,n}(x_j - x_{j-1}).$$

On note l'intégrale de f par $\int_a^b f(x)\,dx$

Mais le domaine d'application de cette intégrale et de ses propriétés est assez restreint. En effet, en ce qui concerne le passage à la limite sous le signe somme pour l'intégrale de Riemann, on connaît la propriété suivante:

<u>Théorème 2.2</u>

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si chaque f_n est continue et si f_n converge vers f uniformément, alors

i) f est Riemann intégrable; et

ii) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

(Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons à [6].)
Or, souvent, on est amené à passer à la limite sous le signe intégrale dans des conditions plus faibles; notamment, on voudrait renoncer à la convergence uniforme de la suite (f_n). Ceci n'est pas possible dans le cadre de l'intégrale classique de Riemann mais ce l'est pour l'intégrale de Lebesgue. (cfr les théorèmes bien connus de convergence monotone et de convergence dominée.)

Un autre aspect trop restrictif de l'intégrale de Riemann est lié à la réduction d'une intégrale multiple à des intégrales itérées.

Enfin, nous sommes également assez limités en ce qui concerne la classe des fonctions Riemann intégrables. A ce sujet, on connaît le théorème suivant:

Une fonction réelle bornée f, définie sur [a,b] est Riemann intégrable si et seulement si elle est continue hors un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

(cfr [7])

De nombreuses fonctions de l'analyse ne se trouvent donc pas dans la classe des fonctions Riemann intégrables.

Un autre inconvénient moyen de l'intégrale de Riemann consiste dans le fait que les espaces L^p associés à l'intégrale de Riemann ne sont pas complets.

Tous ces inconvénients peuvent être éliminés par l'utilisation de l'intégrale de Lebesgue.
Malheureusement, dans les présentations usuelles, celle-ci n'apparaît pas ,dès le départ, comme un

prolongement de celle classique de Riemann. En effet, on construit d'abord la mesure des ensembles et ensuite, pour construire l'intégrale, on fait une partition sur l'axe des images et non sur le domaine d'intégration comme dans l'intégrale de Riemann.

Une approche récente due à Kurzweil et développée par Henstock, Mawhin et Mcshane aboutit aux définitions de l'intégrale de Perron et de celle de Lebesgue comme prolongement naturel de celle de Riemann. Avant de développer l'intégrale de Lebesgue, présentons une brève idée de la construction de celle de Perron. Pour ce faire, introduisons quelques nouvelles notions.

Définition2.3

On appelle P-jauge sur $[a,b]$ toute application δ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 2.4

On appelle partition P-δ-fine de l'intervalle borné $[a,b]$ tout ensemble $\pi = \{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_n, A_n)\}$ où

- les A_i sont des intervalles ouverts à gauche, disjoints deux à deux de la forme $]a_i, b_i]$ dont l'union vaut $[a,b]$
- δ est une P-jauge sur $[a,b]$
- les $\bar{x}_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, et $A_i \subset \,]\bar{x}_i - \delta(\bar{x}_i), \bar{x}_i + \delta(\bar{x}_i)[$.

Remarque : Nous parlons de P-jauge et de partition P-δ-fine afin de ne pas les confondre avec la jauge et la partition γ-fine qui interviendront plus tard.

Définition 2.5

On appelle somme de Riemann correspondant à f et à π le réel noté $S(\pi;f)$ et défini par

$$S(\pi;f) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, m(A_i).$$

Nous pouvons, à présent, définir l'intégrale de Perron.

Définition 2.6

Une fonction f de $[a,b]$ dans R est dite Perron intégrable sur $[a,b]$ s'il existe un nombre I tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une P-jauge δ sur $[a,b]$ telle que, quelle que soit la partition P-δ-fine π de $[a,b]$,

$$| S(\pi;f) - I | < \varepsilon \quad .$$

Mais, cette intégrale est plus générale que l'intégrale de Lebesgue. En effet, f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ si f et $|f|$ sont intégrables au sens de Perron sur $[a,b]$. Remarquons, aussi, que toute cette construction a été réalisée pour un intervalle compact $[a,b]$ de R. Pour l'étendre à R tout entier, il faut utiliser la notion d'intégrale impropre. Pour plus de détails, nous renvoyons à [4].

L'approche que nous allons adopter, nous permettra d'obtenir directement l'intégrale de Lebesgue, appelée "intégrale de jauge", sur R. En outre, elle apparaît comme un prolongement naturel de l'intégrale de Riemann.

Dans un premier temps, nous allons réexprimer la définition de l'intégrale de Riemann. Pour ce faire, introduisons, d'abord, quelques définitions.

Définition 2.7

On appelle <u>partition assignée de [a,b]</u> l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_n, A_n)\} \text{ où}$$

- les A_i sont des intervalles de la forme $]x_{i-1}, x_i]$ tels que leur union est l'intervalle $[a,b]$
- $\bar{x}_i$ appartient à $\bar{A}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Les $\bar{x}_i$, $i=1, \ldots, n$, sont appelés <u>points d'évaluation</u> de la partition.

Définition 2.8

Soit $[a,b]$ un intervalle borné. On appelle <u>jauge</u> une fonction γ de $[a,b]$ dans les intervalles de R, $x \to \gamma(x)$ telle que $\gamma(x)$ est un intervalle ouvert contenant x et telle que les $\gamma(x)$, $x \in [a,b]$, ont tous même longueur.

Définition 2.9

On dit qu'une partition assignée $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ est <u>γ-fine</u> si $\bar{A}_i \subset \gamma(\bar{x}_i)$, $i=1, \ldots, n$.

Définition 2.10

On appelle <u>somme de Riemann</u> correspondant à la partition assignée $\mathcal{P}$ et à f la somme

$$f(\bar{x}_1)\, m(A_1) + f(\bar{x}_2)\, m(A_2) + \ldots + f(\bar{x}_n)\, m(A_n).$$

On note $S(\mathcal{P}; f) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, m(A_i)$.

Ceci nous amène à la définition de l'intégrale de Riemann en termes de jauge.

Définition 2.11

> Une fonction f de $[a,b]$ dans R est dite Riemann intégrable sur $[a,b]$ s'il existe un nombre I tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver une jauge γ sur $[a,b]$ telle que, quelle que soit la partition γ-fine de $[a,b]$,
>
> $$| S(\mathcal{P} ; f) - I | < \varepsilon \quad .$$

Cette définition est équivalente à celle classique de Riemann. En effet,

> Une fonction est Riemann intégrable au sens classique si et seulement si elle est Riemann intégrable au sens de la définition 2.11.

Démonstration:

Condition nécessaire:

Soit $\varepsilon > 0$, il faut trouver une jauge γ telle que la définition 2.11 soit vérifiée.

Considérons $\delta > 0$ associé au ε de la définition classique . On prend γ telle que tous les $\gamma(x)$ soient des intervalles de longueur δ. Si

$$\mathcal{P} = \{ (\bar{x}_1,A_1), \ldots, (\bar{x}_n,A_n) \}$$

est une partition γ-fine de $[a,b]$, la famille $\{A_1, \ldots, A_n\}$ sera telle que l'union des A_i sera l'intervalle $[a,b]$, $\bar{x}_i \in \bar{A}_i$ et $\bar{A}_i \subset \gamma(\bar{x}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. On en déduit donc que $m(A_i) \leq m(\gamma(\bar{x}_i)) = \delta$. D'après la définition classique de Riemann, on a

$$| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \; m(A_i) - I | < \varepsilon \quad .$$

<u>Condition suffisante</u>:

Soit $\varepsilon > 0$, il faut trouver $\delta > 0$ tel que la définition classique soit vérifiée.

On note 2δ la longueur des intervalles définis par la jauge γ associée à ε par la définition 2.11. On prend une subdivision de $[a,b]$, soit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. On pose $]x_{i-1},x_i] = A_i$, $i = 1, \ldots, n$. On considère les points $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ tels que $\bar{x}_i \in \bar{A}_i$. En outre, on suppose que $\sup_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}) < \delta$. Alors,

$$\bar{x}_i - \delta \leq x_i - \delta \leq x_{i-1} < x_i \leq x_{i-1} + \delta \leq \bar{x}_i + \delta.$$

Dès lors, A_i est inclus dans $[\bar{x}_i - \delta, \bar{x}_i + \delta]$ qui est $\gamma(\bar{x}_i)$. Ce qui implique, d'après la définition 2.11,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, m(A_i) - I \right| < \varepsilon \quad .$$

■

§3. Intégrale de jauge

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser différents points de la définition de l'intégrale de Riemann en terme de jauge. Ceci nous amènera à la définition de l'intégrale de jauge. Pour ce faire, nous considérons une fonction f de R dans R que nous allons intégrer sur une partie quelconque B de R, éventuellement R tout entier. On peut donc prendre la convention $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$ sans perte de généralité.

Nous allons modifier de manière appropriée nos définitions de partition assignée de R, de jauge, de partition γ-fine et de somme de Riemann.

<u>Définition 3.1</u>

On appelle <u>partition assignée de</u> R l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_n, A_n)\} \quad \text{où:}$$

- les A_i sont des intervalles, que l'on prend par convention ouverts à gauche, disjoints deux à deux et tels que l'union des A_i est R.

Le premier, respectivement le dernier, de ces A_i est de la forme $]-\infty, b_1]$, respectivement $]a_n, +\infty[$.

- $\bar{x}_i$ appartient à $\bar{R}$, $i = 1, \ldots, n$

Remarquons que les points d'évaluation $\bar{x}_i$ n'appartiennent plus nécessairement aux intervalles correspondants de la subdivision.

Dorénavant, nous travaillerons avec une jauge définie sur $\bar{R}$. Les intervalles qu'elle définit ne seront plus tous de même longueur.

Remarque: Nous entendons par intervalles ouverts de R les intervalles de la forme suivante:

]a,b[avec a et b dans R

mais aussi ceux de la forme

$[-\infty, b[$, $]a, \infty]$ et $[-\infty, \infty]$.

Définition 3.2

On appelle jauge une fonction γ de $\overline{R}$ dans les intervalles de $\overline{R}$, $x \to \gamma(x)$ telle que $\gamma(x)$ est un intervalle ouvert contenant x.

Définition 3.3

On dit qu'une partition assignée $\mathcal{P}$ de R est γ-fine si l'adhérence $\overline{A}_i \subset \gamma(\overline{x}_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Plutôt qu'intégrer une fonction réelle sur une partie B de son domaine de définition $D \subseteq R$, on se ramène à une intégrale sur R en définissant la fonction f_B comme suit:

Définition 3.4

Si f est une fonction réelle, définie sur une partie $D \subset \overline{R}$ et si $B \subset D$, on note par f_B la fonction de $\overline{R}$ dans R définie par

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \in \overline{R} \setminus B. \end{cases}$$

Défnition3.5

On appelle somme de Riemann correspondant à la partition assignée $\mathcal{P}$ et à f_B la somme

$$S(\mathcal{P};f_B) = \sum_{i=1}^{n} f_B(\bar{x}_i)\ m(A_i)$$

Cette somme peut être un nombre réel, $+\infty$, $-\infty$ ou non définie. En effet, quand on prend une partition assignée de R, seules les mesures des intervalles extrêmes de la partition (c'est-à-dire $]-\infty, b_1]$, $]a_n, +\infty[$) peuvent rendre la somme de Riemann infinie. Si pour ces intervalles extrêmes, les points d'évaluation $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_n$ sont tels que $f(\bar{x}_i) = 0$, $i = 1$ et n, par exemple, $x_1 = -\infty$ et $x_n = +\infty$, alors la somme de Riemann est finie. Dans la somme de Riemann, $f(\bar{x}_1)$ est nul et la mesure de A_1 est infinie, le produit des deux est donc nul par la convention $0.\infty = 0$.
De même, $f(\bar{x}_n)$ vaut zéro et la mesure de A_n est infinie, le produit des deux est à nouveau nul.
Si $\bar{x}_1$ ou $\bar{x}_n$ est tel que $f(\bar{x}_i) \neq 0$, $i = 1$ ou n, alors la somme de Riemann vaut $+\infty$ ou $-\infty$ selon que la valeur de f en $\bar{x}_i$ est un nombre positif ou négatif.
? Si $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_n$ sont tels que $f(\bar{x}_i) \neq 0$ alors la somme de Riemann peut être non définie si $f(\bar{x}_1)$ et $f(\bar{x}_n)$ sont de signes opposés.

Nous disposons de tous les outils nécessaires à la définition de l'intégrale de jauge.

Définition 3.6

Etant données une partie D de $\bar{R}$, une fonction f de D dans R et une partie B de D; on dit que f est intégrable au sens de jauge sur B s'il existe un nombre réel J tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver une jauge δ sur $\bar{R}$ vérifiant la conditon suivante:

quelle que soit la partition γ-fine $\mathcal{P}$ de R, la somme de Riemann $S(\mathcal{P}, f_B)$ est finie et

$$| S(\mathcal{P}, f_B) - J | < \varepsilon .$$

On note l'intégrale de jauge de f sur B par

$$\int_B f(x)\ m(dx).$$

Et si f est définie sur l'intervalle [a,b] et intégrable sur [a,b], on définit

$$\int_b^a f(x)\ m(dx) = - \int_a^b f(x)\ m(dx)$$

et $$\int_a^a f(x)\ m(dx) = 0$$

Rappelons la définition d'une fonction que nous utilisons très souvent, la fonction caractéristique.

Définition 3.7

On appelle fonction caractéristique d'un ensemble B de $\overline{R}$ la fonction 1_B, définie par

$$1_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in B \\ 0, & \text{si } x \in R \setminus B \end{cases}$$

Cette fonction permet de redéfinir la mesure de longueur d'un intervalle borné.

Lemme 3.8

La fonction caractéristique d'un intervalle borné $A \subset R$ est intégrable au sens de jauge sur R et

$$\int_R 1_A(x)\ m(dx) = m(A).$$

Démonstration

On considère $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour pouvoir prouver ce lemme, nous devons, d'après la définition de l'intégrale de jauge 3.6, trouver une jauge γ sur $\bar{R}$ telle que pour chaque partition γ-fine $\mathcal{P}$ de R

(1) $\quad | S(\mathcal{P}; 1_A) - m(A) | < \varepsilon$.

D'après le lemme 1.3, on peut trouver des intervalles F et G tels que $A \subset G^o$ et $\bar{F} \subset A$,

(2) $\quad m(G) < m(A) + \varepsilon$ et

(3) $\quad m(F) > m(A) - \varepsilon$.

Notons G^o par $]a',b'[$ et $\bar{F}$ par $[a",b"]$

Tout x appartenant à A appartient à G^o. Pour ces x, on prend donc $\gamma(x)$ comme étant G^o.
Tout x appartenant à $\bar{R} \setminus A$ n'appartient pas à F. Pour de tels x, on doit pendre un $\gamma(x)$ disjoint de $\bar{F}$. Ainsi, si x est inférieur à a", on prend $\gamma(x) = [-\infty, a"[$ et si $x > b"$, on choisit $\gamma(x) =]b", +\infty]$. Donc, pour chaque x de $\bar{R}$, $\gamma(x)$ est un intervalle ouvert contenant x et par conséquent, γ est une jauge sur $\bar{R}$.

Il nous reste à montrer qu'avec ce γ on a bien l'inégalité (1). Pour cela, on considère la partition γ-fine $\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1, A_1), \dots, (\bar{x}_n, A_n)\}$ de R. Un certain nombre de couples $(\bar{x}_i, A_i)$, soit h, sont tels que $\bar{x}_i \in A$. On peut renuméroter les couples $(\bar{x}_i, A_i)$ de sorte que les $\bar{x}_i$, i = 1, ..., h appartiennent à A et que les $\bar{x}_i$, i = h + 1, ..., n ne lui appartiennent pas. Et donc, la somme de Riemann

$$S(\mathcal{P}; 1_A) = 1_A(\bar{x}_1)\, m(A_1) + \dots + 1_A(\bar{x}_h)\, m(A_h) + 1_A(\bar{x}_{h+1})\, m(A_{h+1}) + \dots + 1_A(\bar{x}_n)\, m(A_n)$$

est réduite à $S(\mathcal{P}; 1_A) = m(A_1) + \dots + m(A_h)$.

Pour $i \leq h$, les points d'évaluation $\bar{x}_i$ appartiennent à A et $\gamma(\bar{x}_i)$ est l'intérieur de G. De plus, comme la partition $\mathcal{P}$ est γ-fine, chaque $\bar{A}_i$ est inclus dans

$\gamma(\bar{x}_i)$. Par conséquent, les intervalles $A_1, \ldots, A_h$ disjoints deux à deux sont contenus dans G. En appliquant le lemme 1.1, on obtient

$$m(A_1) + \ldots + m(A_h) \leq m(G).$$

Ceci implique que la somme de Riemann $S(\mathcal{P}; 1_A) \leq m(G)$ et d'après (2)

$$(4) \quad S(\mathcal{P}; 1_A) \leq m(A) + \varepsilon .$$

Montrons maintenant que

$$(5) \quad F \subset (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_h)$$

En effet, soit $x \in F$, alors x appartient à l'un des intervalles de la partition, soit A_i. Puisque la partition $\mathcal{P}$ est γ-fine, $A_i \subset \gamma(\bar{x}_i)$, donc $x \in \gamma(\bar{x}_i)$. On en déduit $i \leq h$; sinon, $i > h$. $\bar{x}_i \notin A$, donc $\gamma(\bar{x}_i) =]b_n, +\infty]$, d'où $x \notin F$, ce qui est une contradiction. Ceci pouve bien (5).

L'application du lemme 1.1 implique

$$m(A_1) + \ldots + m(A_h) \geq m(F)$$

et donc, $S(\mathcal{P}; 1_A) \geq m(F)$ d'où avec (3)

$$(6) \quad S(\mathcal{P}; 1_A) > m(A) - \varepsilon .$$

En regroupant les inégalités (4) et (6), on obtient (1). ∎

Dans la démonstration du lemme, nous avons remarqué qu'il fallait faire preuve d'ingéniosité pour trouver la jauge adéquate. L'exemple que nous présentons maintenant confirme cette remarque.

Exemple:

Si f est la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres rationnels appartenant à l'intervalle $]0,1[$, c'est-à-dire telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]0,1[\cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ailleurs dans } \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$$

alors $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ m(dx) = 0$

Nous commençons la preuve avec deux remarques. D'abord, cette fonction est presque la fonction de Dirichlet qui, elle, vaut 1 si x est rationnel et 0 ailleurs dans $\mathbb{R}$. Ensuite, comme la fonction de Dirichlet, la fonction f n'est pas Riemann intégrable car elle est discontinue en chaque point de l'intervalle $[0,1]$ (cfr théorème p. 8 de ce chapitre)

Démonstration:

Tout nombre rationnel de $]0,1[$ peut s'écrire de façon unique sous la forme p/q avec p et q deux entiers positifs $q \neq 0$, sans diviseur commun.

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on définit la jauge γ de la manière suivante

$$\gamma(x) = \begin{cases}]x - \varepsilon / 2^{p+q+1},\ x + \varepsilon / 2^{p+q+1}[, & \text{si } x \in]0,1[\cap \mathbb{Q} \\ \mathbb{R}, & \text{ailleurs dans } \overline{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_n, A_n)\}$ une partition γ-fine de $\mathbb{R}$. On veut prouver que l'inégalité suivante est vérifiée

$$(1) \quad | S(\mathcal{P}; f) | < \varepsilon$$

En renumérotant, si nécessaire, les intervalles, on peut choisir les points d'évaluation $\bar{x}_i$ tels que $\bar{x}_i \in]0,1[\cap \mathbb{Q}$ pour $i = 1, \ldots, h$ et

$\bar{x}_i \notin]0,1[\cap \mathbb{Q}$ pour $i = h+1, \ldots, n$.

Ceci implique:

pour $i = 1, \ldots, h$, $f(\bar{x}_i) = 1$

et pour $i = h+1, \ldots, n$, $f(\bar{x}_i) = 0$.

La somme de Riemann $S(\mathcal{P}; f)$ est donc réduite à $\sum_{i=1}^{h} m(A_i)$.
Comme $\mathcal{P}$ est une partition γ-fine, chaque intervalle A_i a son adhérence contenue dans $\gamma(\bar{x}_i)$, et donc

$\sum_{i=1}^{h} m(A_i) \leq \sum_{i=1}^{h} m(\gamma(\bar{x}_i))$.

Or, si $\bar{x}_i$ est un rationnel de $]0,1[$, la mesure de $\gamma(\bar{x}_i)$ vaut $\varepsilon / 2^{p+q}$. On en déduit que $\sum_{i=1}^{h} m(\gamma(\bar{x}_i))$ est égale à la somme de $\varepsilon / 2^{p+q}$, somme sur les p et q tels que p et q sont respectivement les numérateurs et les dénominateurs des $\bar{x}_i$, $i = 1, \ldots, h$. Si l'on somme à présent sur tous les p et q positifs, on obtient l'inégalité suivante:

$S(\mathcal{P}; f) \leq \sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \varepsilon / 2^{p+q}$.

En sommant d'abord sur p puis sur q,

$S(\mathcal{P}; f) \leq \varepsilon \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^*} 1/2^p\right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}^*} 1/2^q\right)$.

On a obtenu deux progressions géométriques dont les sommes valent 1, ce qui prouve bien (1).

■

§4. Existence des partitions γ-fines

Jusqu'à présent, nous avons toujours utilisé la définition de l'intégrale de jauge sans nous préoccuper de l'existence de la partition γ-fine associée à chaque jauge γ. Or ce problème est primordial. En effet, s'il existe une seule jauge pour laquelle on ne peut trouver de partition γ-fine de R, toute notre théorie basée sur la définition 3.6 n'aurait plus aucun sens. Avant d'essayer d'apporter une solution à ce problème, nous donnons la définition de la partition assignée d'une partie A de R et démontrons un lemme utile dans plusieurs démonstrations.

Définition 4.1

On appelle <u>partition assignée d'une partie A de</u> R l'ensemble $\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_n, A_n)\}$ où:

- les A_i sont des intervalles, que l'on prend par convention ouverts à gauche, disjoints deux à deux et tels que l'union des A_i est A.
- $\bar{x}_i$ appartient à R, $i = 1, \ldots, n$

Lemme 4.2

Si $C_1, \dots, C_h$ sont des ensembles deux à deux disjoints de $\overline{R}$ et si $\mathcal{P}_j$ est une partition assignée de C_j, $j = 1, \dots, h$ alors l'union $\mathcal{P}$ des $\mathcal{P}_j$ est une partition assignée de $C_1 \cup \dots \cup C_h$. ($\mathcal{P}$ est l'ensemble de tous les couples $(\overline{x}, A)$ appartenant à au moins un $\mathcal{P}_j$).

Démonstration:

Pour montrer que $\mathcal{P}$ est une partition assignée de $C_1 \cup \dots \cup C_h$ il faut montrer que

i) chaque élément de $\mathcal{P}$ est un couple $(\overline{x}, A)$ avec $\overline{x}$ dans $\overline{R}$ et A un intervalle ouvert à gauche de $\overline{R}$,

ii) l'union des intervalles de la partition $\mathcal{P}$ est égale à $C_1 \cup \dots \cup C_h$,

iii) les intervalles de la partition sont disjoints deux à deux.

La preuve de i) est immédiate car chaque élément de $\mathcal{P}$ appartient à l'un des $\mathcal{P}_j$;

Preuve de ii) Tout x d'un intervalle de $\mathcal{P}$ est dans un intervalle d'une des partitions assignées $\mathcal{P}_j$. Il appartient donc à l'ensemble C_j dont $\mathcal{P}_j$ est une partition assignée. Par conséquent, il appartient à $C_1 \cup \dots \cup C_h$. Réciproquement, si x appartient à l'union des C_j, il appartient à l'un d'eux. Il est donc dans l'intervalle A d'un couple $(\overline{x}, A)$ qui appartient à $\mathcal{P}_j$; et donc, il est dans l'un des intervalles de l'ensemble des couples . Ainsi l'union des intervalles de l'ensemble $\mathcal{P}$ de couples est $C_1 \cup \dots \cup C_h$.

Preuve de iii) On considère deux intervalles A_1, A_2 appartenant aux différents couples $(\overline{x}_1, A_1)$ et $(\overline{x}_2, A_2)$ de $\mathcal{P}$. On distingue deux cas:

premièrement, $(\overline{x}_1, A_1)$ appartient à une partition assignée $\mathcal{P}_j$ d'un des C_j et $(\overline{x}_2, A_2)$ appartient à une partition

assignée $\mathcal{P}_k$ d'un des C_k. Alors A_1 et A_2 sont disjoints car ils sont respectivement contenus dans des ensembles disjoints C_j, C_k.
Secondement, $(\bar{x}_1,A_1)$ et $(\bar{x}_2,A_2)$ appartiennent à la même partition $\mathcal{P}_j$. Ils sont alors disjoints car les intervalles d'une partition assignée sont disjoints deux à deux. Dans chaque cas, A_1 et A_2 sont bien des intervalles ouverts à gauche, disjoints deux à deux.
On en déduit que $\mathcal{P}$ est une partition assignée de $C_1 \cup \ldots \cup C_n$.

■

Le théorème suivant apporte la solution au problème de l'existence de la partition γ-fine.

Théorème 4.3

Si γ est une jauge sur $\bar{R}$ et si B est un intervalle ouvert à gauche de R alors il existe une partition $\mathcal{P}$ γ- fine de B telle que pour chaque couple $(\bar{x},A) \in \mathcal{P}$, $\bar{x} \in \bar{A}$.

Démonstration:

Pour chaque entier n positif, on définit $\mathcal{Q}_1[n]$ comme étant l'ensemble des intervalles

$\{Q(n,0), \ldots ,Q(n,2.4^n + 1)\}$

où $Q(n,0) =]-\infty,-2^n]$

$Q(n,j) =]-2^n + (j-1)2^{-n} ,-2^n + j.2^{-n}]$,
$j = 1, \ldots, 2.4^n$

$Q(n,2.4^n + 1) =]2^n,\infty[$.

On a donc défini ainsi un ensemble de 2.4^n intervalles de R, ouverts à gauche et disjoints deux à deux, dont l'union est R. Il est clair que chaque intervalle de $\mathcal{Q}_1[n+1]$ est obtenu en subdivisant un intervalle de $\mathcal{Q}_1[n]$. On en déduit:

si $A' \in \mathcal{Q}_1[n']$ et si $A'' \in \mathcal{Q}_1[n'']$ avec $n'' \geq n'$ alors A'

et A" sont disjoints
sinon, A" est inclus dans A'.

Pour simplifier la preuve, on définit une partition spéciale d'un intervalle B' comme suit:
on appelle partition spéciale d'un intervalle B' toute partition γ-fine $\mathcal{P}$ telle que pour chaque couple $(\bar{x},A)$ de $\mathcal{P}$:

i) A est vide, ou sinon il est l'intersection de B' avec un intervalle d'un des ensembles $\mathcal{Q}_1[1]$, $\mathcal{Q}_1[2]$, ...;

ii) $\bar{x}$ appartient à l'adhérence $\bar{A}$ de A.

Nous pouvons prouver une propriété légèrement plus forte que la conclusion du théorème, à savoir:
il existe une partition spéciale de B.

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc que B n'admet aucune partition spéciale, ce qui va nous amener à une contradiction.

Si chaque intersection non vide $B \cap Q(1,j)$, $j = 0, \ldots, 2.4 + 1$, admet une partition spéciale, en appliquant le lemme 4.1, on en déduit que l'union de ces partitions spéciales est une partition assignée $\mathcal{P}$ de B. Montrons que dans ce cas, $\mathcal{P}$ est en fait une partition spéciale de B (ce qui contredit notre hypothèse).
Considérons le couple $(\bar{x},A)$ qui appartient à $\mathcal{P}$, avec A non vide. Il appartient à une partition spéciale de l'un des intervalles de l'ensemble $B \cap Q(1,0)$, ..., $B \cap Q(1,2.4 + 1)$, par exemple à une partition spéciale de l'intervalle $B \cap Q(1,j')$.
Alors: - $\bar{x} \in \bar{A}$;
- $\bar{A} \subset \gamma(\bar{x})$; et
- A est l'intersection de $B \cap Q(1,j')$ avec un intervalle $Q(n,j")$ d'un des ensembles $\mathcal{Q}_1[n]$.

Mais alors, ce $Q(n,j")$ doit être contenu dans $Q(1,j')$ et ainsi $A = [\, B \cap Q(1,j') \,] \cap Q(n,j") = B \cap Q(n,j")$.
On voit à présent que $\mathcal{P}$ satisfait toutes les conditions de la définition spéciale et par conséquent, B admet une partition spéciale, ce qui contredit notre hypothèse. On déduit alors qu'au moins l'une des intersections

$B \cap Q(1,0)$, ..., $B \cap Q(1,2.4 + 1)$ n'admet aucune partition spéciale. Parmi ces intersections, on en choisit une que l'on note B_1.

Si chaque intersection non vide $B_1 \cap Q(2,j)$, $j = 0, 1, \ldots, 2.4^2 + 1$ admet une partition spéciale, par le même argument que précédemment, B_1 aurait une partition spéciale, ce qui est faux. Ainsi, il doit exister au moins une intersection $B_1 \cap Q(2,j)$ non vide qui n'admet aucune partition spéciale. On en choisit une et on la note B_2. On considère ensuite l'intersection $B_2 \cap Q(3,j)$, $j = 0, 1, \ldots, 2.4^3 + 1$ et on répète le raisonnement. On obtient ainsi de proche en proche une suite d'intervalles ouverts à gauche B_0, B_1, B_2, B_3, ... où $B_0 = B$ et telle que chaque B_{i+1} est l'intersection de l'intervalle précédant B_i avec l'un des intervalles de $\mathcal{Q}_1[i+1]$, chaque B_i n'ayant pas de partition spéciale.
En outre, l'adhérence de B_i est un intervalle fermé non vide de $\bar{R}$ et pour $j \geq i \geq 0$, $\bar{B}_j \subset B_i$. D'après le théorème des intervalles emboîtés étendu à R, il existe un point $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{B}_i$. En posant $\bar{B}_i = [a_i\ , b_i]$, on a donc $a_i \leq y \leq b_i$, pour tout i. On distingue trois cas:

<u>1er cas</u>: $y = -\infty$.

Dans ce cas, $a_i = -\infty$ pour tout i. ainsi l'intersection $B_{i-1} \cap Q(i,j)$ (notée B_i) doit être $B_{i-1} \cap Q(i,0)$. Mais B_i est alors contenu dans $[-\infty, -2^i]$, et comme la suite (-2^i) converge vers $y = -\infty$, B_i doit être dans l'intervalle ouvert à gauche $\gamma(y)$ pour i assez grand. Par conséquent, $\bar{B}_i$ est inclus dans $\gamma(y)$ pour i assez grand lorsque $y = -\infty$.

<u>2ème cas</u>: $y = \infty$.

Par un raisonnement analogue, on établit que B_i est inclus dans $\gamma(y)$ pour i assez grand.

<u>3ème cas</u>: y est fini.

Alors pour i assez grand, y est compris strictement entre -2^i et 2^i. Ainsi le $Q(i,j)$ dont l'intersection avec B_{i-1} est B_i ne peut être ni $Q(i,0)$ ni $Q(i,2.4^i + 1)$; il doit être l'un des intervalles situés entre ces deux extrêmes, c'est-à-dire l'un de ces intervalles de longueur 2^{-i}. Par conséquent, $b_i - a_i \leq 2^{-i}$. Comme $y \in [a_i, b_i]$ pour

$i \in \mathbb{N}$, on en déduit $a_i \nearrow y$ et $b_i \searrow y$, d'où de nouveau, $[a_i,b_i] = B_i$ est inclus dans $\gamma(y)$ pour i assez grand.

On fixe à présent $i \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{B}_i$ soit contenu dans $\gamma(y)$. Il est clair que le singleton $\{(y,B_i)\}$ est une partition assignée de B_i. Elle est γ-fine car $\overline{B}_i \subset \gamma(y)$. Puisque $B_i = B_{i-1} \cap Q(i,j)$ quel que soit j, $B_i \cap Q(i,j)$ aussi. Et donc, $\{(y,B_i)\}$ est une partition spéciale de B_i. Mais par construction, B_i n'a pas de partition spéciale. Cette contradiction prouve le théorème.

■

Il est utile de savoir que l'intersection d'un nombre fini de jauges est une jauge. Plus précisément:

Théorème 4.4

> Etant données les jauges $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ sur $\overline{\mathbb{R}}$, la fonction $x \to \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) \cap \ldots \cap \gamma_k(x)$ est une jauge sur $\overline{\mathbb{R}}$. On la note $\gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \ldots \cap \gamma_k$. En outre, chaque partition γ-fine est aussi γ_i-fine, $i = 1, \ldots, k$.

Démonstration:

Prenons un point $x \in \overline{\mathbb{R}}$ arbitraire. pour $i = 1, \ldots, k$, $\gamma_i(x)$ est un intervalle ouvert qui contient x. L'intersection de ces intervalles est donc un intervalle ouvert qui contient x. Ceci prouve que la fonction $x \to \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) \cap \ldots \cap \gamma_k(x)$ est une jauge sur $\overline{\mathbb{R}}$.

On considère $\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1,A_1), \ldots, (\bar{x}_n,A_n)\}$ une partition $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \ldots \cap \gamma_k$-fine. Pour chaque couple $(\bar{x}_j,A_j)$ de $\mathcal{P}$, $\overline{A}_j$ est inclus dans $\gamma_1(\bar{x}_j) \cap \ldots \cap \gamma(\bar{x}_j)$ qui est contenu dans l'un des $\gamma_i(\bar{x}_j)$, $i = 1, \ldots, k$. Il en résulte que est γ_i-fine, $i = 1, \ldots, k$.

■

Nous pouvons, à présent, prouver la propriéré d'unicité de l'intégrale de jauge.

Théorème 4.5

> Soient B une partie de R et f une fonction réelle, intégrable sur B. Il ne peut exister deux nombres distincts J' et J" tels que
>
> (1) $\int_B f(x)\ m\ (dx) = J'$ et $\int_B f(x)\ m(dx) = J''$

Démonstration:

Supposons que J' et J" sont deux nombres distincts vérifiant (1). On pose $\varepsilon = |J' - J''| / 2$, donc $\varepsilon > 0$. Par la définition 3.6, il existe une jauge γ' sur $\bar{R}$ telle que si $\mathcal{P}'$ est une partition γ'-fine de R,

(2) $|S(\mathcal{P}'; f_B) - J'| < \varepsilon$

De même, il existe une jauge γ'' sur R telle que si $\mathcal{P}''$ est une partition γ''-fine de R,

(3) $|S(\mathcal{P}''; f_B) - J''| < \varepsilon$

Le théorème 4.2 nous assure l'existence d'une partition $\mathcal{P}$ $\gamma' \cap \gamma''$-fine de R, qui, par le théorème 4.3, est à la fois γ'-fine et γ''-fine. Ainsi, (2) et (3) sont vérifiées en même temps. Alors

$$\begin{aligned} |J' - J''| &= |[S(\mathcal{P}; f_B) - J''] + [J' - S(\mathcal{P}; f_B)]| \\ &\leq |S(\mathcal{P}; f_B) - J''| + |S(\mathcal{P}; f_B) - J'| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

Ceci contredit la définition de et notre hypothèse est donc fausse.

■

CHAPITRE II

PROPRIETES DE L'INTEGRALE DE JAUGE

Ce chapitre est entièrement consacré aux propriétés de base de l'intégrale de jauge. Celles-ci sont, en fait, analogues aux propriétés bien connues de l'intégrale de Riemann.

NOTE: Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous parlerons d'intégrale sans préciser qu'il s'agit de l'intégrale de jauge.

§1. Propriétés élémentaires.

Une propriété de base du calcul intégral est la linéarité. Afin de prouver que l'intégrale de jauge est linéaire, il suffit de prouver qu'elle est additive et homogène.

Lemme 1.1 (additivité)

> Si f et g sont deux fonctions réelles, intégrables sur une partie $B \subset R$, leur somme est intégrable sur B et
>
> (1) $$\int_B [f(x) + g(x)]\, m(dx) = \int_B f(x)\, m(dx) + \int_B g(x)\, m(dx)$$

Démonstration:

Pour simplifier les notations, nous définissons

(2) $$J_1 = \int_B f(x)\, m(dx) \qquad J_2 = \int_B g(x)\, m(dx)$$

Considérons $\varepsilon > 0$ arbitraire; d'après (2), il existe une jauge γ_1 sur $\bar{R}$ telle que pour chaque partition γ_1-fine $\mathcal{P}$ de R

(3) $$| S(\mathcal{P};\ f_B) - J_1 | < \varepsilon / 2.$$

De même, il existe une jauge γ_2 sur $\bar{R}$ telle que pour chaque partition γ_2-fine de R

(4) $$| S(\mathcal{P};\ f_B) - J_1 | < \varepsilon / 2.$$

On considère à présent $\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_k, A_k)\}$ une partition $\gamma_1 \cap \gamma_2$-fine de R. D'après le théorème I.4.2, $\mathcal{P}$ est à la fois γ_1-fine et γ_2-fine et donc (3) et (4) sont vérifiés. De plus, il est clair que $[f+g]_B = f_B + g_B$ ainsi,

$$(5) \quad S(\mathcal{P};\ [f+g]_B\ ) = [f_B(\overline{x}_1)+g_B(\overline{x}_1)]m(A_1) + \ldots + [f_B(\overline{x}_k)+g_B(\overline{x}_k)]m(A_k)$$
$$= [f_B(\overline{x}_1)m(A_1) + \ldots + f_B(\overline{x}_k)m(A_k)] + [g_B(\overline{x}_1)m(A_1) +\ldots + g_B(\overline{x}_k)m(A_k)]$$
$$= S(\mathcal{P};\ f_B) + S(\mathcal{P};\ g_B).$$

On obtient de (3), (4) et (5)

$$(6) \quad |\ S(\mathcal{P};[f+g]_B\ ) - [J_1 + J_2]\ |$$
$$= |\ [S(\mathcal{P};f_B) - J_1] + [S(\mathcal{P};g_B) - J_2]\ |$$
$$\leq |\ S(\mathcal{P};f_B) - J_1\ | + |\ S(\mathcal{P};g_B) - J_2\ |$$

Si J est défini comme le membre de droite de (1) et si γ est égale à $\gamma_1 \cap \gamma_2$, (6) montre alors que la condition de la définition I.3.6 est vérifiée et le lemme est ainsi prouvé.

■

<u>Lemme 1.2 (homogénéité)</u>

Etant donnés une fonction réelle f, intégrable sur une partie $B \subset R$ et $c \in R$, cf est intégrable sur B et

$$(7) \quad \int_B cf(x)\ m(dx) = c \int_B f(x)\ m(dx)$$

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$; $\varepsilon/(|c|+1)$ est également positif et d'après la définition I.3.6, il existe une jauge γ telle que pour chaque partition γ-fine de R,

$$(8) \quad |\ S(\mathcal{P};f_B) - \int_B f(x)\ m(dx)\ | < \varepsilon/(|c|+1)$$

Si $\mathcal{P} = \{(\overline{x}_1,A_1),\ \ldots\ ,\ (\overline{x}_k,A_k)\}$ est une partition γ-fine de R,

$$S(\mathcal{P};\ cf_B) = cf_B(\overline{x}_1)m(A_1) + \ldots + cf_B(\overline{x}_k)m(A_k)$$
$$= c[f_B(\overline{x}_1)m(A_1) + \ldots + f_B(\overline{x}_k)m(A_k)]$$
$$= cS(\mathcal{P};f_B).$$

Ceci et (8) nous donnent

$$| S(\mathcal{P};cf_B) - c \int_B f(x)\ m(dx) |$$

$$= | c\ [S(\mathcal{P};f_B) - \int_B f(x)\ m(dx)]\ |$$

$$= |c|\ | S(\mathcal{P};f_B) - \int_B f(x)\ m(dx) |$$

$$\leq |c| . \mathcal{E} / (|c|+1) < \mathcal{E} .$$

Les conditions de la définition I.3.6 sont ainsi vérifiées si on y remplace f par cf et J par le membre de droite de (7).

■

Les lemmes 1.1 et 1.2 impliquent la linéarité de l'intégrale qui s'énonce:

Théorème 1.3

> Etant donnés deux fonctions réelles f_1 et f_2, intégrables sur une partie $B \subset R$ et les nombres réels c_1 et c_2, la fonction $c_1 f_1 + c_2 f_2$ est intégrable sur B et
>
> (9) $$\int_B [\ c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\ ]\ m(dx) = c_1 \int_B f_1(x)\ m(dx) + c_2 \int_B f_2(x)\ m(dx)$$

Théorème 1.4

> Si f est une fonction définie sur une partie B de R, nulle sauf en un nombre fini de points de B, elle est intégrable sur B et $\int_B f(x)\ m(dx) = 0$

Démonstration:

Si on considère la fonction f_B définie en I.3.4, la conclusion est équivalente à

$$\int_R f_B(x)\ m(dx) = 0$$

Soient $a_1, \ldots, a_n$ les points de B où f est $\neq 0$; en ces points, $f_B(x)$ est également non nulle. Et comme chaque singleton $\{a_i\}$ est un intervalle fermé $[a_i, a_i]$ de longueur nulle, f_B est une fonction en escalier sur R. Par linéarité de l'intégrale, nous obtenons alors

$f_B(a_1)m([a_1,a_1]) + \ldots + f_B(a_n)m([a_n,a_n]) = 0.$

■

Corollaire 1.5

> Etant données f et g deux fonctions définies sur une partie $B \subset R$, si f est intégrable sur B et si $g(x) = f(x)$ sauf sur un nombre fini de points de B alors g est intégrable sur B et
>
> $$\int_B g(x)\ m(dx) = \int_B f(x)\ m(dx).$$

Démonstration:

La différence $g - f$ est nulle sauf sur un nombre fini de points de B. D'après le théorème 1.4, elle est intégrable sur B et son intégrale vaut zéro. Par application du théorème 1.3, la somme $f + [\ g - f\ ]$, qui vaut g, est intégrable sur B et

$$\int_B g(x)\ m(dx) = \int_B f(x)\ m(dx) + 0$$

■

§2. Monotonie de l'intégrale.

La monotonie de l'intégrale de jauge est un fait simple et cependant très important. Il s'énonce souvent comme suit:

<u>Théorème 2.1</u>

> Une fonction f positive et intégrable sur une partie B possède une intégrale positive.

La définition même de l'intégrale de jauge permet de montrer très facilement cette propriété.
Ce théorème admet un corollaire tout aussi évident.

<u>Corollaire 2.2</u>

> Si f et g sont deux fonctions définies et intégrables sur un ensemble B tel que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in B$ alors
>
> $$\int_B f(x)\ m(dx) \leq \int_B g(x)\ m(dx).$$

<u>Théorème 2.3</u>

> Supposons $B \subset A \subset D \subset \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur D, positive et intégrable sur A. Si, en outre, f est intégrable sur B, alors
>
> $$(1) \quad \int_B f(x)\ m(dx) \leq \int_A f(x)\ m(dx).$$

Ce théorème formalise simplement le fait que l'aire sous le graphe de f sur A tout entier est au moins aussi grande que l'aire sous le graphe de f sur une partie de A.

Démonstration:

La définition I.3.4 nous permet d'écrire la conclusion du théorème comme suit:

$$(2) \quad \int_{R} f_B(x)\ m(dx) \leq \int_{R} f_A(x)\ m(dx).$$

Considérons l'inégalité

$$(3) \quad f_B(x) \leq f_A(x)$$

Si $x \notin A$, $x \notin B$ et donc les deux membres de (3) sont nuls.
Si $x \in B$, $x \in A$ et les deux membres de (3) sont alors égaux à $f(x)$.
Si $x \in A \setminus B$, $f_B(x) = 0$ alors que $f_A(x) = f(x)$ qui par hypothèse est positive. Ainsi, (3) est vérifié pour tout $x \in \overline{R}$. Le corollaire 2.2 implique directement l'inégalité (2) .

■

Le théorème suivant est souvent utile pour obtenir une estimation grossière mais facile de l'intégrale du produit de deux facteurs dont l'un est difficilement intégrable.

Théorème 2.4 Premier théorème de la moyenne

Soient f et Φ deux fonctions définies sur une partie $B \subset R$ telles que f et $f.\Phi$ sont intégrables sur B.

Si

i) f est bornée, à savoir s'il existe deux nombres m, M tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x de B; et

ii) Φ est positive sur B

alors,

$$(4) \quad m \int_B \Phi(x)\ m(dx) \leq \int_B f(x)\Phi(x)\ m(dx)$$
$$\leq M \int_B \Phi(x)\ m(dx)$$

En particulier, si B est un intervalle compact et si f est continue sur B, il existe un nombre $x^* \in B$ tel que

$$(5) \quad \int_B f(x)\Phi(x)\ m(dx) \leq f(x^*) \int_B \Phi(x)\ m(dx).$$

Démonstration:

Les hypothèses i) et ii) impliquent

$$m\Phi(x) \leq f(x)\Phi(x) \leq M\Phi(x) \text{ pour chaque } x \in B.$$

Et l'inégalité (4) est valable d'après le théorème 2.1. Si f est continue sur un intervalle compact B, on prend m comme étant l'infimum de f sur B et M comme le suprêmum de f sur B. Si l'intégrale de Φ sur B est nulle, les inégalités (4) impliquent alors que l'intégrale de $f\Phi$ l'est aussi et donc (5) est vérifié quelque soit le point $x^* \in B$ choisi. D'autre part, l'intégrale de Φ est positive et les inégalités (4) entrainent que le nombre

$$(6) \quad \left[\int_B f(x)\Phi(x)\ m(dx) \right] / \left[\int_B \Phi(x)\ m(dx) \right]$$

appartient à l'intervalle $[m,M]$. Les extrémités de cet intervalle sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de f sur B, et d'aprés la propriété de la valeur intermédiaire d'une fonction continue il existe un nombre $x^* \in B$ tel que

$$[\int_B f(x)\Phi(x)\ m(dx)\ ] \,/\, [\int_B \Phi(x)\ m(dx)\ ] = f(x^*)$$

Ceci montre que (5) est vérifié. ∎

§3. Comparaison avec l'intégrale de Riemann

Dans ce paragraphe, nous allons montrer qu'une fonction Riemann intégrable sur [a,b] est intégrable au sens de jauge sur [a,b] et que les deux intégrales sont égales. Pour ce faire, nous établissons le lemme suivant.

Lemme 3.1

> Soient une fonction réelle f définie sur une partie $D \subset R$, et une partie $B \subset D$, s'il existe un nombre J tel que pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver des fonctions g, h intégrables au sens de jauge sur B vérifiant
>
> $g \leq f \leq h$ et
>
> $$\int_B g(x)\; m(dx) > J - \varepsilon \; ; \quad \int_B h(x)\; m(dx) < J + \varepsilon$$
>
> alors f est intégrable au sens de jauge sur B, et
>
> $$\int_B f(x)\; m(dx) = J.$$

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Considérons les fonctions g et h intégrables sur B, qui satisfont

(1) $g \leq f \leq h$ sur B ainsi que

(2) $\displaystyle\int_B g(x)\; m(dx) > J - \varepsilon/2$ et $\displaystyle\int_B h(x)\; m(dx) < J + \varepsilon/2$

Puisque g est intégrable sur B, il existe une jauge δ_1 sur $\bar{R}$ telle que pour chaque partition δ_1-fine $\mathcal{P}$ de R

(3) $\displaystyle\left| S(\mathcal{P}; g_B) - \int_B g(x)\; m(dx) \right| < \varepsilon / 2$

De même, on peut trouver une jauge γ_2 sur $\overline{R}$ telle que pour chaque partition γ_2-fine $\mathcal{P}$ de R

$$(4) \quad | S(\mathcal{P};h_B) - \int_B h(x)\ m(dx) | < \varepsilon / 2$$

Définissons alors $\gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2$ et considérons $\mathcal{P} = \{(x_1,A_1), \ldots, (x_k,A_k)\}$ une partition γ-fine de R. $\mathcal{P}$ étant à la fois γ_1-fine et γ_2-fine, les inégalités (3) et (4) sont vérifiées; d'autre part, les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$(5) \quad g_B(x_j) \leq f_B(x_j) \leq h_B(x_j),\ j = 1, \ldots, k.$$

En effet, si $x_j \in B$, les inégalités (5) sont les mêmes que les inégalités (1) vérifiées par hypothèse. Si $x_j \notin B$, les trois membres de (5) sont nuls. En multipliant chaque membre de (5) par $m(A_j) \geq 0$ et en sommant sur $j = 1, \ldots, k$, on obtient

$$(6) \quad S(\mathcal{P};g_B) \leq S(\mathcal{P};f_B) \leq S(\mathcal{P};h_B)$$

Mais comme (2), (3) et (4) sont vérifiés,

$$J - \varepsilon < \int_B g(x)\ m(dx) - \varepsilon / 2 < S(\mathcal{P};g_B) \text{ et}$$

$$J + \varepsilon > \int_B h(x)\ m(dx) + \varepsilon / 2 > S(\mathcal{P};h_B)$$

Ces inégalités et (6) impliquent

$$J - \varepsilon < S(\mathcal{P};f_B) < J + \varepsilon$$

et puisque ceci est vérifié pour chaque partition γ-fine $\mathcal{P}$ de R, J est donc, par définition, l'intégrale de f sur B .

■

Il nous faut ici rappeler que l'on peut définir l'intégrale de Riemann à partir des fonctions en escalier. Par définition, une fonction en escalier d'un intervalle $B \subset R$ est une fonction $s: B \to R$ telle que, pour un nombre fini de sous-intervalles $B_1, \ldots, B_n$ de B, disjoints deux à deux, f est constante sur chaque B_i et s'annule sur $B \setminus [B_1 \cup \ldots \cup B_n]$. Si cette fonction prend la valeur constante c_i sur chaque B_i, $i = 1, \ldots, h$, son intégrale de Riemann

$$\int_R s(x)\, dx = c_1 m(A_1) + \ldots + c_h m(A_h)$$

D'après la définition de l'intégrale de jauge, il est clair que

$$\int_R s(x)\, m(dx) = \int_R s(x)\, dx$$

Nous obtenons donc qu'une fonction f définie et bornée sur l'intervalle compact [a,b] est Riemann intégrable sur [a,b] si et seulement si il existe un seul $J \in R$ tel que quelles que soient s_1 et s_2 deux fonctions en escalier sur [a,b] vérifiant $s_1 \leq f \leq s_2$,

$$\int_a^b s_1(x)\, dx \leq J \leq \int_a^b s_2(x)\, dx$$

J est alors appelé <u>l'intégrale de Riemann sur [a,b]</u>.

<u>Corollaire 3.2</u>

> Soient une partie $B \subset R$ et une fonction f de B dans R, s'il existe des fonctions g, h intégrables sur B vérifiant $g \leq f \leq h$ sur B et
>
> $$\int_B g(x)\, m(dx) = \int_B h(x)\, m(dx)$$
>
> alors f est intégrable au sens de jauge sur B et son intégrale est égale aux intégrales de g et h.

Démonstration:

On appelle J l'intégrale de g sur B. Pour chaque $\varepsilon > 0$, les fonctions g et h vérifient les hypothèses du lemme 3.1. Par application de ce lemme, f est intégrable et son intégrale vaut J.

■

On peut, à présent, prouver le théorème suivant.

Théorème 3.3

Soit $B = [a,b]$ un intervalle compact. Si f est Riemann intégrable sur B alors f est intégrable au sens de jauge sur B et les deux intégrales sont égales.

Démonstration:

Appellons J l'intégrale de Riemann de f sur B, et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On peut alors trouver une fonction en escalier g définie sur B telle que $g \leq f$ et

$$\int_B g(x)\,dx > J - \varepsilon.$$

car sinon, pour chaque couple de fonctions en escalier g, h définies sur B et vérifiant $g \leq f \leq h$,

$$\int_B g(x)\,dx \leq J - \varepsilon < J \leq \int_B h(x)\,dx,$$

d'où J ne serait donc pas le seul réel séparant l'intégrale d'une fonction en escalier $g \leq f$ de l'intégrale d'une fonction en escalier $h \geq f$. Ce qui contredirait l'hypothèse que J est l'intégrale de Riemann de f. De même, on peut trouver une fonction en escalier h définie sur B telle que $h \geq f$ et

$$\int_B h(x)\,dx \leq J + \varepsilon$$

Les fonctions g et h étant évidemment intégrables au sens de jauge, les hypothèses du lemme 3.1 sont vérifiées. Ainsi l'intégrale de jauge de f sur B existe et vaut J qui est l'intégrale de Riemann de f sur B.

$\blacksquare$

§4. Additivité de l'intégrale de jauge par rapport à l'intervalle d'intégration

Si un intervalle A est subdivisé en un nombre fini de sous-intervalles disjoints deux à deux, la longueur de A est la somme des longueurs des sous-intervalles. Nous allons prouver un fait similaire pour l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle; " L'intégrale sur A est la somme des intégrales sur chaque sous-intervalle".

<u>Théorème 4.1</u>

> Soient $E_1, \ldots, E_h$ des ensembles disjoints deux à deux de R et E leur union. Si f est une fonction définie sur E et intégrable sur chaque E_j, f est intégrable sur E et
>
> $$\int_E f(x)\ m(dx) = \sum_{j=1}^{h} \int_{E_j} f(x)\ m(dx)$$

Démonstration:

Considérons l'égalité

$$(1) \quad f_E(x) = f_{E_1}(x) + \ldots + f_{E_h}(x)$$

où chaque terme est défini comme en I.3.4. Cette égalité est vérifiée pour tout x. En effet, si $x \notin E$, il n'appartient à aucun des E_j, les deux membres de (1) sont donc nuls. Si $x \in E$, il appartient à l'un des E_j, le membre de gauche de (1) vaut alors $f(x)$; et dans le membre de droite, tous les termes sont nuls sauf le $j^{ième}$ qui, par définition, vaut $f(x)$. Par hypothèse, chaque f_{E_j} est intégrable sur R. D'après l'identité (1) et le théorème 1.3, f_E est intégrable et la conclusion du théorème en résulte.

■

Théorème 4.2

Soient u, v, w ∈ [a,b], arbitraires, non nécessairement distincts. Si f est intégrable sur [chaque sous-intervalle de] l'intervalle [a,b], alors

$$(2) \quad \int_u^w f(x)\ m(dx) = \int_u^v f(x)\ m(dx) + \int_v^w f(x)\ m(dx)$$

Note: Ce théorème et ceux du prochain paragraphe contiennent une condition qui, nous le verrons dans la suite, se révèlera superflue. Nous les démontrerons donc en mettant cette hypothèse entre crochets.

Démonstration:

Si u = v ou si v = w, l'égalité (2) est trivialement vérifiée. Si u = w, (2) est également immédiate d'après la remarque qui suit la définition I.3.6. Il reste le cas principal où u, v, w sont distincts. Si $u < v < w$, les trois intégrales de (2) peuvent s'écrire comme des intégrales de f sur les ensembles

$E =]u,w]$, $\quad E_1 =]u,v]$, $\quad E_2 =]v,w]$

Les ensembles E_1 et E_2 sont disjoints; et par hypothèse, f est intégrable sur chacun d'eux; de plus $E = E_1 \cup E_2$ ainsi, d'après le théorème 4.1, (2) est vérifiée. Soient p, q, r les trois nombres u, v, w rangés par ordre croissant. Nous venons de démontrer que

$$\int_p^q f(x)\ m(dx) + \int_q^r f(x)\ m(dx) = \int_p^r f(x)\ m(dx)$$

D'après la remarque qui suit la définition I.3.6, cette égalité peut s'écrire

$$(3) \quad \int_p^q f(x)\ m(dx) + \int_q^r f(x)\ m(dx) + \int_r^p f(x)\ m(dx) = 0$$

De même, l'égalité (2) peut s'écrire

$$(4) \qquad \int_u^v f(x)\ m(dx) + \int_v^w f(x)\ m(dx) + \int_w^u f(x)\ m(dx) = 0$$

Six cas sont alors possibles. Dans les trois premiers, u, v, w sont respectivement égaux à p, q, r; q, r, p; r, p, q. Les trois intégrales de (4) sont alors égales aux intégrales de l'égalité (3) que l'on sait vérifiée. Ainsi (4) est vérifiée. Dans les trois autres cas u, v, w sont respectivement égaux à p, r, q; r, p, q; q, p, r. Chaque intégrale de (4) est alors l'opposée d'une des intégrales de (3), ainsi (4) est à nouveau vérifiée.

■

§5. Intégrale indéfinie et primitive

Alors que l'idée d'intégrale et celle de dérivée sont apparues il y a bien longtemps (déjà au temps des anciens Grecs), il a fallu attendre Newton et Leibntiz pour réaliser qu'en fait, ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre. Dès lors, elles firent l'objet d'une même théorie. Ce rapport de réciprocité peut être décrit de deux façons: premièrement, sous des hypothèses particulières sur f et en définissant F comme une fonction définie sur [a,b] telle que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(u)\ m(du),$$

la dérivée de F est égale à f. Ensuite, si f est la dérivée de F alors,

$$\int_a^b f(x)\ m(dx) = F(b) - F(a)$$

Cette dernière expression nous permet de résoudre une multitude de problèmes de la forme: " trouver l'intégrale de f de a à b " . Mais souvent, ces deux propriétés sont regroupées en une seule appelée " théorème fondamental du calcul intégral " . Ce théorème possède beaucoup de versions. Nous allons en démontrer une de la première partie de ce théorème, et ce, sous des hypothèses assez restrictives (mais qui recouvrent cependant les applications du calcul ordinaire). Malheureusement, cette démonstration nécessite une condition qui, plus tard, se révèlera superflue. Nous démontrerons donc cette propriété en mettant cette hypothèse entre crochets à savoir: "Supposons que f est intégrable sur [chaque sous-intervalle d'] un intervalle [a,b]. Si $c \in [a,b]$, l'intégrale de f de c à u existe pour tout $u \in [a,b]$, sa valeur est déterminée par la borne supérieure u, elle est donc une fonction de u". On appelle cette fonction, ainsi que celles qui en diffèrent d'une constante, <u>intégrale indéfinie de f</u>. Nous formalisons ce fait dans un théorème

Théorème 5.1

Soient f une fonction intégrable sur [chaque sous-intervalle de] l'intervalle [a,b] et F une fonction définie sur [a,b]. Si l'une des trois affirmations suivantes est vraie, alors elles le sont toutes:

i) il existe $c \in [a,b]$ et une constante k telle que pour tout $x \in [a,b]$

$$F(x) = k + \int_c^x f(u)\ m(du);$$

ii) pour chaque $c \in [a,b]$, la fonction

$$x \to F(x) - \int_c^x f(u)\ m(du);$$

est constante sur [a,b]; et

iii) pour chaque x' et $x'' \in [a,b]$,

$$F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x'} f(u)\ m(du);$$

Démonstration:

Si, dans ii), la fonction prend une valeur constante k, l'égalité de i) est vérifiée. Si i) est vérifiée alors, d'après le théorème 4.2 et pour x' et $x'' \in [a,b]$,

$$F(x'') - F(x') = \left(k + \int_c^{x''} f(u)\ m(du)\right) - \left(k + \int_c^{x'} f(u) m(du)\right)$$

$$= \int_{x'}^{x''} f(u)\ m(du),$$

ainsi iii) est vérifiée. Enfin, si iii) est vérifiée, on choisit $c \in [a,b]$ et on écrit l'égalité de iii) en remplaçant x' par c et x'' par x. Et puisque F(c) est constante, i) est vérifiée avec $k = F(c)$. ∎

Définition 5.2

> On appelle <u>intégrale indéfinie de f sur [a,b]</u> la fonction F qui vérifie l'une des trois conditions du théorème 5.1.

Nous allons prouver une forme simple de la première partie du théorème fondamental qui affirme que si f est continue et si F est une intégrale indéfinie de f, alors f est la dérivée de F.

Théorème 5.3 (Première partie du théorème fondamental)

> Si f est intégrable sur [chaque sous-intervalle d'] un intervalle [a,b] et si F est une intégrale indéfinie de f alors, en chaque $x \in [a,b]$ point de continuité de f, F a une dérivée, et $DF(x) = f(x)$.
> En particulier si f est continue sur [a,b], F est dérivable en chaque point de [a,b] et sa dérivée est identique à f.

Démonstration:

Nous séparons la preuve en deux parties. Démontrons d'abord

> Si f est continue en un point $\bar{x} \in [a,b]$ et vérifie les hypothèses du théorème alors, à chaque $\varepsilon > 0$, il correspond un intervalle ouvert $\mathcal{J}(\bar{x})$ contenant $\bar{x}$ tel que
>
> (1) $\quad | (F(x'')-F(x')) / (x''-x') - f(\bar{x}) | < \varepsilon$
>
> pour $x', x'' \in [a,b] \cap \mathcal{J}(\bar{x})$ et $x'' > x'$.

Puisque f est continue en $\bar{x}$, il existe $\gamma(\bar{x})$ tel que pour chaque $x \in [a,b] \cap \gamma(\bar{x})$

(2) $f(\bar{x}) - \varepsilon / 2 < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon / 2$.

Considérons x' et $x'' \in [a,b] \cap \gamma(\bar{x})$ tels que $x'' > x'$; (2) est alors vérifié pour tout $x \in [x',x'']$ et donc d'après la propriété de monotonie de l'intégrale,

$$\int_{x'}^{x''} [\, f(x) - \varepsilon / 2 \,]\, m(dx) \leq \int_{x'}^{x''} f(x)\, m(dx)$$
$$\leq \int_{x'}^{x''} [\, f(x) + \varepsilon / 2 \,]\, m(dx)$$

D'après le théorème 1.3 et la définition 5.2, ceci implique

$$[\, f(\bar{x}) - \varepsilon / 2 \,](x''-x') \leq F(x'') - F(x')$$
$$\leq [\, f(\bar{x}) + \varepsilon / 2 \,](x''-x').$$

En divisant chaque membre par le nombre positif $(x''-x')$, on obtient (1). Nous démontrons à présent:

> Soit G une fonction définie sur $[a,b]$, $\bar{x} \in [a,b]$ et
>
> $1 \in R$. Si à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un intervalle
>
> ouvert $\gamma(\bar{x})$ contenant $\bar{x}$ tel que
>
> (3) $| (G(x'')-G(x')) / (x''-x') - 1 | < \varepsilon$
>
> pour x', $x'' \in [a,b]$, $x' = x''$ et $x' \leq x \leq x''$
>
> alors, G est dérivable en $\bar{x}$ et $DG(\bar{x}) = 1$

En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma(\bar{x})$ défini comme ci-dessus, ainsi que $x \in [a,b] \cap \gamma(\bar{x})$ tel que $x \neq \bar{x}$.
Si $x > \bar{x}$, on choisit $x' = \bar{x}$ et $x'' = x$, ainsi les conditions sur x' et x'' sont vérifiées. Par hypothèse, (3) est vérifié et donc

(4) $| (G(x)-G(\bar{x})) / (x-\bar{x}) - 1 | < \varepsilon$

Si $x < \bar{x}$, on choisit $x' = x$ et $x'' = \bar{x}$. Les mêmes arguments nous conduisent à (4) où x et $\bar{x}$ sont interchangés, et comme ceci laisse le quotient de (4) inchangé, (4) est vérifié pour tout $x \neq \bar{x} \in [a,b] \cap \gamma(\bar{x})$.
Et par définition, $DG(\bar{x}) = 1$.

Si $\bar{x} \in [a,b]$ est un point de continuité de f, on applique d'abord la première partie et ensuite la seconde avec $G = F$ et $l = f(\bar{x})$. Nous trouvons ainsi que $DF(\bar{x})$ existe et est égale à $f(\bar{x})$. En faisant de même pour chaque point de [a,b], le reste de la conclusion du théorème suit facilement.

■

Souvent, on applique ce théorème en oubliant de vérifier que $\bar{x}$ est un point de continuité et on l'utilise même aux points de discontinuité de f. Ceci conduit à des résultats incorrects. Par exemple, considérons la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

et l'intervalle [a,b] dont l'intérieur contient 0, alors pour chaque $u \in [a,b]$,

$$\int_0^u f(x)\ m(dx) = |u|$$

Ainsi, la fonction $u \to F(u) = |u|$ est l'intégrale indéfinie de cette fonction $x \to f(x)$ mais en 0 n'admet pas de dérivée.

De même, si nous considérons la fonction f nulle en [a,b] sauf sur un nombre fini de points de [a,b]. Son intégrale indéfinie F satisfait

$$F(u) = \int_a^u f(x)\ m(dx) = 0 \quad \text{pour tout } u \in [a,b].$$

Et donc, F admet une dérivée nulle en chaque point de [a,b] et qui diffère de f(x) en chaque point tel que $f(x) \neq 0$. D'après le théorème 5.3, si f est continue, F admet une propriété plus forte que la continuité, à savoir, elle est dérivable en chaque point de [a,b]. Nous allons montrer que si f est intégrable et bornée, non nécessairement continue, son intégrale indéfinie F possède encore une propriété plus forte que la continuité, à savoir: <u>la lipschitzianité</u>.

Théorème 5.4

> Si f est une fonction bornée, intégrable sur [chaque sous-intervalle de] [a,b] et si F est une intégrale indéfinie de f, alors, F est lipschitzienne sur [a,b]

Démonstration:

Par hypothèse, il existe un nombre C tel que

$-C \leq f(x) \leq C$, pour tout $x \in [a,b]$.

Considérons x' et x" $\in [a,b]$. Supposons, sans perte de généralité, que x' < x". D'après le corollaire 2.2

$$-C(x''-x') \leq \int_{x'}^{x''} f(x)\ m(dx) \leq C(x''-x')$$

et donc $\quad | F(x'') - F(x') | \leq C \, | x'' - x' |$

■

Nous sommes à présent amenés à prouver la seconde partie du théorème fondamental, déjà mentionnée au début de ce paragraphe. Pour ce faire, nous introduisons la notion de primitive.

Définition 5.5

> Soient f et F deux fonctions réelles, définies sur un intervalle B. F est appelée primitive de f sur B si et seulement si pour chaque $x \in B$, F'(x) existe et est égale à f.

Cette seconde partie affirme que, sous des hypothèses adéquates et si F est une primitive de f sur B = [a,b], l'intégrale de f sur B vaut F(b) - F(a). Nous allons démontrer deux formes de ce théorème. Dans la première, nous ferons l'hypothèse que f est continue; ceci est assez restrictif mais nous permet quand même de calculer beaucoup d'intégrales rencontrées dans les applications.

Théorème 5.6 (Deuxième partie du théorème fondamental)

Soit $[a,b]$ un intervalle compact. Si f est continue sur $[a,b[$ et intégrable sur chaque sous-intervalle de $[a,b]$] et si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors,

$$\int_a^b f(x)\ m(dx) = F(b) - F(a).$$

Démonstration:

La fonction f étant continue, elle est intégrable sur chaque sous-intervalle de $[a,b]$. Ceci n'ayant pas encore été prouvé, nous mettons cette hypothèse entre crochets. On sait qu'une fonction de dérivée nulle est constante en tout point de $[a,b]$ et donc $g(a) = g(b)$. Définissons sur $[a,b]$ la fonction G comme suit:

$$G(x) = \int_a^x f(u)\ m(du),$$

par application du théorème 5.3, $G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Par hypothèse, $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Ainsi, $G - F$ admet une dérivée nulle en chaque point de $[a,b]$. D'après le théorème 5.3, $G(b) - F(b) = G(a) - F(a)$. Mais $G(b) = \int_a^b f(u)\ m(du)$ et $G(a) = 0$. On obtient donc la conclusion du théorème. ∎

Démontrons à présent, une autre forme de la seconde partie du théorème fondamental dans laquelle f n'est pas continue, ni même bornée

Théorème 5.7

Soient $[a,b]$ R un intervalle compact, f et F définies sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$.

Si f est intégrable sur]a,b], alors

$$(1)\qquad \int_{B}^{b} f(x)\ m(dx) = F(b) - F(a).$$

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour simplifier les notations définissons

$$(2)\qquad B =]a,b]; \qquad \varepsilon' = \varepsilon \ /\ (2b-2a+1); \qquad J = \int_{B}^{b} f(x)\ m(dx).$$

D'après la définition de DF et puisque DF = f, pour chaque $\bar{x} \in [a,b]$ on peut trouver un intervalle ouvert $\gamma_1(\bar{x})$ contenant $\bar{x}$, tel que si $x \in \gamma_1(\bar{x}) \cap [a,b]$ et $x \neq \bar{x}$, alors

$$(3)\qquad f(\bar{x}) - \varepsilon' < (F(x) - F(\bar{x}))\ /\ (x-\bar{x}) < f(\bar{x}) + \varepsilon'.$$

Nous pouvons donc montrer que

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{si } u \text{ et } v \in \gamma_1(\bar{x}) \cap [a,b] \text{ vérifient } u \leq \bar{x} \leq v, \text{ alors} \\ [f(\bar{x}) - \varepsilon'](v-u) \leq F(v) - F(u) \leq [f(\bar{x}) + \varepsilon'](v-u) \end{cases}$$

En effet: si $u < \bar{x}$, (3) est vérifié si on remplace x par u. En multipliant tous les membres par $(\bar{x}-u) > 0$, on obtient

$$(5)\qquad [f(\bar{x}) - \varepsilon'](\bar{x}-u) \leq F(\bar{x}) - F(u) \leq [f(\bar{x}) + \varepsilon'](\bar{x}-u)$$

Si $u = \bar{x}$, (5) est encore évidemment vérifié. De même, si $v > \bar{x}$, (3) est vérifié si on y remplace x par v. En multipliant chaque membre par $(v-\bar{x}) > 0$ on obtient

$$(6)\qquad [f(\bar{x}) - \varepsilon'](v-\bar{x}) \leq F(v) - F(\bar{x}) \leq [f(\bar{x}) + \varepsilon'](v-\bar{x})$$

qui est encore vérifié pour $v = \bar{x}$. Ainsi (5) et (6) sont satisfaites dans tous les cas. En les additionnant membre à membre, nous obtenons la conclusion de (4)

Posons $\gamma_1(\bar{x}) = \overline{R}$ pour tout $\bar{x} \in \overline{R} \setminus [a,b]$. D'après (2), J est l'intégrale de f sur B ou encore si on définit f_B comme en I.3.4, J est l'intégrale de f_B sur R. Ainsi, d'après la définition de l'intégrale, il existe une jauge γ_2 sur R telle que pour chaque partition γ_2-fine $\mathcal{P}$ de R

(7) $J - \varepsilon / 2 < S(\mathcal{P}; f_B) < J + \varepsilon / 2.$

Définissons alors γ comme étant $\gamma_1 \cap \gamma_2$. D'après le théorème I.4.2, on peut trouver une partition γ-fine de $]a,b]$, notée $\{(\bar{x}_1,A_1), \ldots, (\bar{x}_k,A_k)\}$, telle que pour chaque i, $\bar{x}_i \in \bar{A}_i$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les A_i sont numérotés de gauche à droite. Leurs extrémités $c_0 = a, c_1, \ldots, c_k = b$ sont donc en ordre croissant; $A_i =]c_{i-1},c_i]$ et $c_{i-1} \leq x \leq c_i$. Ainsi, par application du théorème I.4.2, il existe une partition γ-fine de $]-\infty,a]$ que nous notons $\{(\bar{x}_{k+1},A_{k+1}), \ldots, (\bar{x}_m,A_m)\}$ et une partition γ-fine de $]b,\infty[$, dénotée $\{(\bar{x}_{m+1},A_{m+1}), \ldots, (\bar{x}_n,A_n)\}$ telles que $\bar{x}_j \in \bar{A}_j$ correspondant. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les couples $\{(\bar{x}_1,A_1), \ldots, (\bar{x}_n,A_n)\}$. D'après le lemme I.4.1, c'est une partition γ-fine de R. Alors,

(8) $S(\mathcal{P}; f_B) = \sum_{i=1}^{n} f_B(\bar{x}_i)\ m(A_i).$

Montrons d'abord la conclusion du théorème sous l'hypothèse supplémentaire

(9) $f(a) = f(b) = 0.$

Dans ce cas, f_B s'annule sur chaque $\bar{A}_i$, $i = k+1, \ldots, m$: en effet, ces intervalles sont contenus dans $[-\infty,a]$. De même, f_B s'annule sur chaque $\bar{A}_{m+1}, \ldots, \bar{A}_n$. Ainsi, tous les termes de (8) pour lesquels $i > k$ sont nuls. Pour $i = 1, \ldots, k$, $\bar{x}_i \in \bar{A}_i \subset [a,b]$. Sur $[a,b]$, $f(x) = f_B(x)$ car si $x \in [a,b]$, ou bien $x \in]a,b]$ et dans ce cas, $f(x) = f_B(x)$ par définition, ou bien $x = a$ et alors, $f(a) = 0$ d'après (9) et $f_B(x) = 0$ par définition. Et comme $m(A_i) = c_i - c_{i-1}$, (8) devient

(10) $S(\mathcal{P}; f_B) = \sum_{i=1}^{k} f(\bar{x}_i)\ m(c_i - c_{i-1}).$

Etant γ-fine, $\mathcal{P}$ est γ_1-fine; ainsi, d'après (4), pour $i = 1, \ldots, k$

$$[\, f(\bar{x}_i) - \varepsilon'](c_i - c_{i-1}) \leq F(c_i) - F(c_{i-1}) \leq [\, f(\bar{x}_i) + \varepsilon'](c_i - c_{i-1})$$

Sommons ces inégalités membre à membre pour i = 1, ..., k sans oublier que $c_0 = a$ et $c_k = b$. On obtient

$$(11)\quad S(\mathcal{P};f_B) - \varepsilon'(b-a) \leq F(b) - F(a) \leq S(\mathcal{P};f_B) + \varepsilon(b-a)$$

Comme $\mathcal{P}$ est γ_2-fine, (7) est satisfaite. D'après (2), $\varepsilon'(b-a) < \varepsilon / 2$. (7) et (11) impliquent alors

$J - \varepsilon < F(b) - F(a) < J + \varepsilon$.

On obtient donc la conclusion du théorème sous l'hypothèse (9). Si (9) n'est plus vérifiée, nous définissons

$c = [\, bf(a) - af(b) \,] / (b-a)$, $m = [\, f(b)-f(a) \,] / (b-a)$

ainsi que les fonctions g et G définies sur R par

$g(x) = f(x) - c - mx$, $G(x) = F(x) - cx - mx^2 / 2$. Alors,

$g(a) = g(b) = 0$ et pour tout $x \in R$,

$DG(x) = DF(x) - c - mx = g(x)$. Ainsi, d'après ce qui précède

$$(12)\quad \int_a^b g(x)\ m(dx) = G(b) - G(a).$$

Par application du théorème 5.6,

$$(13)\quad \int_a^b (c + mx)\ m(dx) = (cb + mb^2 / 2) - (ca + ma^2 / 2)$$

En additionnant (12) et (13) membre à membre, nous obtenons (1).

■

<u>Corollaire 5.8</u>

> Soit l'intervalle compact [a,b]. Si f est définie sur [a,b] et intégrable sur]a,b] et si F est une primitive de f sur [a,b] alors, pour chaque $u, v \in [a,b]$,
>
> $$\int_u^v f(x)\ m(dx) = F(v) - F(u)$$

Démonstration:

D'après le théorème 5.7

$$F(v) = F(a) + \int_a^v f(x)\ m(dx), \quad F(u) = F(a) + \int_a^u f(x)\ m(dx).$$

Si nous substituons ceci dans la conclusion du corollaire, nous obtenons la conclusion du théorème 4.2.

■

<u>Remarque:</u> Lorsqu'une fonction F est définie sur un ensemble contenant les points u et v, on utilise la notation

$$F(x)\Big|_u^v = F(v) - F(u).$$

Ceci nous permet d'écrire la conclusion du corollaire 5.8 sous la forme familière

$$\int_u^v f(x)\ m(dx) = F(x)\Big|_u^v .$$

§6. Intégrations par changement de variables et par parties

La version des théorèmes d'intégration par substitution et par parties que nous présentons, dans ce paragraphe, n'est pas la plus générale. Dans le paragraphe 6 du 3ième chapitre, nous verrons des extensions de ces théorèmes.

Théorème 6.1

> Soient $[a,b]$, $[c,d]$ deux intervalles compacts.
> Si f est définie et continue sur $[c,d]$, si g est définie et continument dérivable sur $[a,b]$ et à valeurs dans $[c,d]$ alors,
> $$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ m(dx) = \int_a^b f(g(y))Dg(y)\ m(dy)$$

Démonstration:

Supposons que l'affirmation suivante est démontrée:
" une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$ ". (Il s'agit en fait du corollaire III.1.3 qui sera prouvé ultérieurement). Définissons

$$F(u) = \int_{g(a)}^{u} f(x)\ m(dx), \text{ pour chaque } u \in [c,d]$$

D'après le théorème fondamental 5.3, $DF(u) = f(u)$ pour tout $u \in [c,d]$, et donc
$(dF(g(y)) / dy) = DF(g(y))Dg(y) = f(g(y))Dg(y)$ pour tout $y \in [a,b]$. Par application du corollaire 5.8, il suit alors

$$\int_a^b f(g(y))Dg(y)\ m(dy) = \int_a^b (dF(g(y)) / dy)\ m(dy)$$

$$= F(g(b)) - F(g(a))$$
$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ m(dx)$$

■

Théorème 6.2

Soient f, g, F et G des fonctions définies sur un intervalle [a,b] telles que, pour tout $x \in [a,b]$,

$$DF(x) = f(x) \text{ et } DG(x) = g(x).$$

Si les produits f.G et F.g sont intégrables sur [a,b] alors,

$$\int_a^b f(x)G(x)\ m(dx) = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\ m(dx).$$

Démonstration:

Pour tout $x \in [a,b]$,

$$D[F(x)G(x)] = DF(x)G(x) + F(x)DG(x)$$
$$= f(x)G(x) + F(x)g(x).$$

Les deux fonctions du membre de droite de la dernière égalité étant intégrables sur [a,b], $D[F(x)G(x)]$ l'est également; ainsi, par application du théorème fondamental 5.3,

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b [\ f(x)G(x) + F(x)g(x)\ ]\ m(dx).$$

Ceci entraine la conclusion du théorème.

■

Cas particulier de ce théorème:

si f et g sont continues sur [a,b], F et G étant dérivables, elles sont également continues et donc les produits fG et Fg sont continus.

CHAPITRE III

ETUDE DE L'INTEGRALE DE JAUGE

Nous avons vu, dans le chapitre II, que l'intégrale de jauge est un prolongement de celle de Riemann. Dans ce chapitre, nous allons établir que l'intégrale de jauge possède certaines propriétés analogues à celles de l'intégrale de Lebesgue. Ces propriétés nous permettront de démontrer, au chapitre V, que les deux intégrales sont égales.

§1. Critère d'intégrabilité

Pour montrer qu'une fonction f est intégrable au sens de jauge en utilisant la définition 1.3.6, il est nécessaire de connaître, à l'avance, la valeur de l'intégrale, J. Or, dans de nombreuses applications, nous ne savons pas ce que vaut J et nous voulons, néanmoins, savoir si l'intégrale existe. Le théorème suivant nous permettra de résoudre ce problème.

<u>Théorème 1.1</u>

Si f est une fonction réelle définie sur une partie $B \subset R$, l'intégrale

$$\int_B f(x)\ m(dx)$$

existe si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une jauge γ sur $\bar{R}$ telle que quelles que soient $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ deux partitions γ-fines de R, les sommes de Riemann $S(\mathcal{P}';f_B)$, $S(\mathcal{P}'';f_B)$ sont finies et vérifient

$$| S(\mathcal{P}';f_B) - S(\mathcal{P}'';f_B) | < \varepsilon .$$

Cette condition s'appelle <u>condition de Cauchy</u>.

Démonstration

Supposons d'abord que f est intégrable sur B et que son intégrale vaut J. Nous allons montrer que la condition de Cauchy est vérifiée.

D'après la définition I.3.6, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver une jauge γ sur $\overline{R}$ telle que pour chaque partition $\mathcal{P}$ γ-fine de R,

(1) $| S(\mathcal{P};f_B) - J | <$ /2.

Si $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ sont deux partitions γ-fines de R, elles vérifient l'inégalité (1). Ceci entraîne que $S(\mathcal{P}'; f_B)$ et $S(\mathcal{P}'';f_B)$ sont finies et que

$$
\begin{aligned}
| S(\mathcal{P}';f_B) - S(\mathcal{P}'';f_B) | &\leq | S(\mathcal{P}';f_B) - J | + | J - S(\mathcal{P}'';f_B) | \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .
\end{aligned}
$$

Par conséquent, la condition de Cauchy est vérifiée.

Supposons maintenant que la condition de Cauchy soit vérifiée et montrons que f est intégrable sur B.

Si la condition est vérifiée, pour chaque $\varepsilon > 0$, nous pouvons choisir une jauge γ sur $\overline{R}$ telle que quelles que soient $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ deux partitions γ-fines de R, $S(\mathcal{P}';f_B)$ et $S(\mathcal{P}'';f_B)$ sont finies et

(2) $| S(\mathcal{P}';f_B) - S(\mathcal{P}'';f_B) | < \varepsilon/3$.

Choisissons une partition $\mathcal{P}[\varepsilon]$ γ_ε-fine de R et définissons l'intervalle fermé $C[\varepsilon]$ par

$C[\varepsilon] = [S(\mathcal{P}[\varepsilon];f_B) - \varepsilon/3 , S(\mathcal{P}[\varepsilon];f_B) + \varepsilon/3]$

D'après (2), si $\mathcal{P}$ est une partition γ-fine de R, $S(\mathcal{P};f_B) \in C[\varepsilon]$. Si ε' et ε'' sont des nombres > 0, $\gamma = \gamma_{\varepsilon'} \cap \gamma_{\varepsilon''}$ est une jauge sur $\overline{R}$. En appliquant le théorème I.4.2, on peut trouver une partition γ-fine $\mathcal{P}$ de R. D'après le théorème I.4.3, $\mathcal{P}$ est à la fois $\gamma_{\varepsilon'}$-fine et $\gamma_{\varepsilon''}$-fine, donc $S(\mathcal{P};f_B) \in C[\varepsilon']$ et $S(\mathcal{P};f_B) \in C[\varepsilon'']$. Par application du théorème A_1 de l'annexe A1, nous savons qu'il existe un nombre J contenu dans tous les $C[\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$).
Si $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{P}$ est une partition γ_ε-fine de R, alors $S(\mathcal{P};f_B)$ et J sont dans $C[\varepsilon]$. Comme la longueur de $C[\varepsilon]$ est 2 $\varepsilon/3$, $| S(\mathcal{P};f_B) - J | < \varepsilon$. Ceci nous montre que f est intégrable sur B et que son intégrale vaut J.

■

De ce théorème suit un corollaire qui est, en fait, une légère modification du lemme II.3.1.

Corollaire 1.2

> Soit f une fonction réelle définie sur une partie $B \subset R$. Si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions g et h intégrables sur B telles que:
>
> i) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, pour tout $x \in B$; et
>
> ii) $\int_B h(x)\ m(dx) < \int_B g(x)\ m(dx) + \varepsilon$;
>
> alors f est intégrable sur B.

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$. Nous pouvons choisir deux fonctions g, h intégrables sur B vérifiant les conditions:

(3) $g(x) \leq f(x) \leq (x)$, pour chaque $x \in B$

(4) $\int_B h(x)\ m(dx) < \int_B g(x)\ m(dx) + /3.$

Alors, nous pouvons écrire

(5) $g_B(x) \leq f_B(x) \leq h_B(x)$, pour tout $x \in R$.

En effet, si $x \in B$, on retrouve l'inégalité (3); sinon, les trois membres de (4) sont nuls.

Comme g est intégrable sur B, il existe une jauge γ' sur $\overline{R}$ telle que pour chaque partition γ'-fine $\mathcal{P}'$ de R,

(6) $$\int_B g(x)\ m(dx) - \varepsilon/3 < S(\mathcal{P}'; g_B)$$

$$< \int_B g(x)\ m(dx) + \varepsilon/3$$

De même, comme h est intégrable sur B, il existe une jauge γ'' sur $\overline{R}$ telle que pour chaque partition γ''-fine $\mathcal{P}''$ de R,

$$(7) \quad \int_B h(x)\ m(dx) - \varepsilon/3 < S(\mathcal{P}'';h_B)$$

$$< \int_B h(x)\ m(dx) + \varepsilon/3$$

Définissons la jauge $\gamma = \gamma' \cap \gamma''$ et considérons une partition $\mathcal{P}$ γ-fine de R. Alors (6) et (7) sont vérifiées. De ceci et de (5), on déduit

$$\int_B g(x)\ m(dx) - \varepsilon/3 < S(\mathcal{P};g_B) \leq S(\mathcal{P};f_B) \leq S(\mathcal{P};h_B)$$

$$< \int_B h(x)\ m(dx) + \varepsilon/3$$

Par conséquent, la somme de Riemann $S(\mathcal{P};f_B)$ appartient à l'intervalle

$$\left] \int_B g(x)\ m(dx) - \varepsilon/3, \int_B h(x)\ m(x) + \varepsilon/3 \right[.$$

D'après (4), la longueur de cet intervalle est $< \varepsilon$ et puisque $S(\mathcal{P}';f_B)$ et $S(\mathcal{P}'';f_B)$ appartiennent à cet intervalle, pour $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ deux partitions γ-fines arbitraires de R, la condition de Cauchy du théorème 1.1 est vérifiée. Donc, f est intégrable sur B.

■

Un autre corollaire s'énonce comme suit:

Corollaire 1.3

Si f est une fonction réelle, continue sur un intervalle compact $B = [a,b] \subset R$, alors f est intégrable sur $]a,b]$.

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$, définissons $\varepsilon' = \varepsilon / (2(m(B) + 1))$. Comme f est continue sur B, à chaque $\bar{x} \in B$, il correspond un intervalle ouvert contenant $\bar{x}$, $\gamma(\bar{x})$ tel que pour chaque $x \in \gamma(\bar{x}) \cap B$,

(8) $\quad | f(x) - f(\bar{x}) | < \varepsilon'$.

Pour $\bar{x} \in \bar{\mathbb{R}} \setminus B$, nous prenons pour $\gamma(\bar{x})$ un intervalle ouvert contenant $\bar{x}$ disjoint de B (par exemple, nous pouvons choisir $\gamma(\bar{x}) = [-\infty, a[$ pour $\bar{x} < a$ et $\gamma(\bar{x}) =]b, +\infty]$ pour $\bar{x} > b$).

Considérons $\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_k, A_k)\}$ une partition γ-fine de $]a,b]$. De telles partitions existent d'après le théorème I.4.2.

Soient s et S les fonctions en escalier qui, sur chaque A_i, ont respectivement les valeurs
$s(x) = f(\bar{x}_i) - \varepsilon'$, $S(x) = f(\bar{x}_i) + \varepsilon'$.
Tout x de $]a,b]$ appartient à un des A_i et ce A_i est contenu dans $\gamma(\bar{x}_i)$. Ainsi, d'après (8),

(9) $f(x) < f(\bar{x}_i) + \varepsilon' = S(x)$.

De même, pour chaque $x \in]a,b]$,

(10) $\quad f(x) > f(\bar{x}_i) - \varepsilon' = s(x)$.

En appliquant la définition de s et S, on obtient

$$(11) \quad \int_{]a,b]} S(x)\, m(dx) - \int_{]a,b]} s(x)\, m(dx)$$
$$= \int_{]a,b]} 2\, \varepsilon' m(dx) = 2\, \varepsilon' m(]a,b]) < \varepsilon .$$

Les inégalités (9), (10) et (11) montrent que les fonctions s et S vérifient les hypothèses du corollaire 1.2. Ainsi, par application de ce corollaire, l'intégrale de f sur $]a,b]$ existe.

■

§2. Intégrabilité absolue

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une fonction est intégrable si et seulement elle est absolument intégrable. Avant de démontrer ce théorème, nous devons définir quand une fonction réelle est absolument intégrable sur une partie $B \subset R$.

Afin de ne pas interrompre le raisonnement, démontrons, d'abord, plusieurs propriétés que nous énonçons dans un même lemme.

Lemme 2.1

Soient γ une jauge sur $\overline{R}$ et f une fonction réelle.

Soient $B_j \subset R$, $j = 1, \ldots, h$ et

$\mathcal{P}_j = \{(x_{j,1}, A_{j,1}), \ldots, (x_{j,k(j)}, A_{j,k(j)})\}$

une partition assignée de B_j. Alors :

(i) Si $B_1 \subset B_2$, l'ensemble des couples

$\mathcal{P}' = \{(x_{1,i}, A_{1,i} \cap A_{2,j}) : i=1, \ldots, k(1); j=1, \ldots, k(2)\}$

est une partition assignée de B_1, et

$$S(\mathcal{P}'; f) = S(\mathcal{P}_1; f).$$

De plus, si $\mathcal{P}_1$ est γ-fine, $\mathcal{P}'$ l'est aussi.

(ii) Si les B_j sont disjoints deux à deux, l'ensemble des couples $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_h$

$= \{(x_{i,j}, A_{i,j}) : i=1, \ldots, h; j=1, \ldots, k(i)\}$

est une partition assignée de $B_1 \cup \ldots \cup B_h$ et

$$S(\mathcal{P}''; f) = S(\mathcal{P}_1; f) + \ldots + S(\mathcal{P}_h; f).$$

De plus, si tous les $\mathcal{P}_i$ sont γ-fines, $\mathcal{P}''$ l'est aussi.

Démonstration:

Preuve de (i):

Pour montrer que $\mathcal{P}'$ est une partition assignée de B_1, il faut essentiellement prouver que les $A_{1,i} \cap A_{2,j}$ sont disjoints deux à deux et que leur union est B_1.

Chaque $A_{1,i}$ et $A_{2,j}$ étant des intervalles ouverts à gauche, $A_{1,i} \cap A_{2,j}$ est aussi un intervalle ouvert à gauche. Tout point x de B_1 appartient à B_2. Donc, ce point est dans un intervalle $A_{1,i}$ de la partition assignée $\mathcal{P}_1$ de B_1 et aussi dans un intervalle $A_{2,j}$ de la partition assignée $\mathcal{P}_2$ de B_2. Ainsi, les $A_{1,i} \cap A_{2,j}$ sont des intervalles disjoints deux à deux dont l'union vaut B_1. Par conséquent, $\mathcal{P}'$ est une partition assignée de B_1.

Montrons que $S(\mathcal{P}';f) = S(\mathcal{P}_1;f)$. Chaque x de $A_{1,i}$ appartient aussi à l'un des $A_{2,j}$, donc $A_{1,i}$ est l'union des intervalles $A_{1,i} \cap A_{2,1}, \ldots, A_{1,i} \cap A_{2,k(2)}$. En appliquant le corollaire I.1.2, on obtient

$$m(A_{1,i}) = m(A_{1,i} \cap A_{2,1}) + \ldots + m(A_{1,i} \cap A_{2,k(2)}).$$

En multipliant les deux membres par $f(x_{1,i})$ et en sommant pour $i = 1, \ldots, k(1)$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{k(1)} f(x_{1,i})\, m(A_{1,i}) = \sum_{i=1}^{k(1)} \sum_{j=1}^{k(2)} f(x_{1,i})\, m(A_{1,i} \cap A_{2,j}),$$

c'est-à-dire $S(\mathcal{P}_1;f) = S(\mathcal{P}';f)$.

Maintenant, si $\mathcal{P}_1$ est γ-fine, pour chaque i et j, nous avons $\gamma(x_{1,i}) \supset \overline{A}_{1,i} \supset \overline{(A_{1,i} \cap A_{2,j})}$ ou encore, $\mathcal{P}'$ est γ-fine.

Preuve de (ii):

Montrons d'abord que $\mathcal{P}''$ est une partition assignée. Chaque point x de $B_1 \cup \ldots \cup B_h$ est dans un seul B_j, donc il est dans un seul $A_{j,i}$ de la partition assignée $\mathcal{P}_j$ et dans aucun intervalle d'une autre partition $\mathcal{P}_j'$. Ainsi, les intervalles $A_{j,i}$ ($j = 1, \ldots, h$; $i = 1, \ldots, k(j)$) sont disjoints deux à deux et leur union est $B_1 \cup \ldots \cup B_h$. Par conséquent, $\mathcal{P}''$ est une partition assignée de $B_1 \cup \ldots \cup B_h$

Si chaque $\mathcal{P}_j$ est γ-fine, pour chaque couple $(x_{j,i}, A_{j,i})$ de $\mathcal{P}''$, $\overline{A}_{j,i} \subset \gamma(x_{j,i})$ car $(x_{j,i}, A_{j,i})$ appartient à la partition γ-fine $\mathcal{P}_j$ et donc, $\mathcal{P}''$ est γ-fine.

Il est clair que

$$S(\mathcal{P}''; f) = \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{k(j)} f(x_{j,i})\, m(A_{j,i}) = \sum_{j=1}^{h} S(\mathcal{P}_j; f).$$

■

En appliquant le lemme 2.1 avec $B_1 = R$ et $B_2 = R$, nous pouvons reformuler le théorème 1.1 comme suit:

> Une fonction réelle f définie sur une partie B de R est intégrable sur R si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une jauge γ sur $\overline{R}$ telle que quelles que soient $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ deux partitions γ-fines de R ($\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ étant les partitions définies dans le lemme 2.1) les sommes de Riemann $S(\mathcal{P}'; f_B)$ et $S(\mathcal{P}''; f_B)$ sont finies et
> $$\left| \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} (f_B(x_i') - f_B(x_j''))\, m(A_i' \cap A_j'') \right| < \varepsilon .$$

Donnons, à présent, la définition d'une fonction absolument intégrable.

Définition 2.2

> Soit f une fonction réelle définie sur une partie $B \subset R$. f est dite absolument intégrable sur B si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une jauge γ sur $\overline{R}$ telle que quelles que soient $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ deux partitions γ-fines de R,
>
> $\mathcal{P}' = \{(x_1', A_1'), \ldots, (x_k', A_k')\}$ et
>
> $\mathcal{P}'' = \{(x_1'', A_1''), \ldots, (x_h'', A_h'')\}$,
>
> on a
> $$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} | f_B(x_i') - f_B(x_j'') |\, m(A_i' \cap A_j'') < \varepsilon .$$

Cette notion intervient peu dans les applications mais elle est très intéressante au niveau technique, notamment, dans les démonstrations de certaines propriétés.

D'après la reformulation du théorème 1.1, il est clair qu'une fonction absolument intégrable est intégrable. Avant de démontrer la réciproque de cette propriété, établissons un lemme qui sera utile dans plusieurs démonstrations.

<u>Lemme 2.3</u>

Soient f une fonction réelle, intégrable sur $B \subset R$, $\varepsilon > 0$ et γ une jauge sur $\overline{R}$ telle que pour chaque partition $\mathcal{P}$ γ-fine de R,

$$\left| S(\mathcal{P};f_B) - \int_B f(x)\, m(dx) \right| < \varepsilon \quad .$$

Si $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ sont deux partitions γ-fines du même ensemble $C \subset R$, alors $| S(\mathcal{P}';f_B) - S(\mathcal{P}'';f_B) | < 2\,\varepsilon$.

Démonstration:

Si C = R, le résultat est trivial. Or, C est un sous-ensemble de R qui a une partition assignée γ-fine, c'est-à-dire que C est une union finie d'intervalles ouverts à gauche. Puisque C est l'union d'intervalles de la partition γ-fine $\mathcal{P}'$, son complémentaire $R \setminus C$ consiste en un nombre fini d'intervalles ouverts à gauche $B_1, \ldots, B_n$.

Par application du théorème I.4.2, il est possible de trouver une partition γ-fine $\mathcal{P}_j$ pour chacun des B_j. D'après le lemme 2.1, $\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_n$ est une partition γ-fine de $C \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n = R$ et donc, par hypothèse,

$$\left| S(\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_n;f_B) - \int_B f(x)\, m(dx) \right| < \varepsilon \quad .$$

De même,

$$| S(\mathcal{P}'' \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_m ; f_B) - \int_B f(x)\ m(dx)\ | < \varepsilon\ .$$

Ce qui entraîne

$$(1) \quad | S(\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_m ; f_B) - S(\mathcal{P}'' \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_m ; f_B) | < 2\ \varepsilon$$

D'après le lemme 2.1,

$$(2) \quad S(\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_m ; f_B) = S(\mathcal{P}' ; f_B) + \sum_{j=1}^{m} S(\mathcal{P}_j ; f_B),$$

$$(3) \quad S(\mathcal{P}'' \cup \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_m ; f_B) = S(\mathcal{P}'' ; f_B) + \sum_{j=1}^{m} S(\mathcal{P}_j ; f_B).$$

Si nous portons (2) et (3) dans (1), nous obtenons la conclusion du lemme.

■

Nous pouvons maintenant prouver qu'une fonction intégrable est absolument intégrable.

<u>Théorème 2.4</u>

Soit f une fonction réelle définie sur une partie $B \subset R$. Soit $\varepsilon > 0$. Si f est intégrable sur B et si γ est une jauge sur $\bar{R}$ telle que pour chaque partition $\mathcal{P}$ γ-fine de R,

$$| S(\mathcal{P} ; f_B) - \int_B f(x)\ m(dx)\ | < \varepsilon/4,$$

alors quelles que soient

$\mathcal{P}' = \{(x_1', A_1'), \ldots, (x_k', A_k')\}$ et

$\mathcal{P}'' = \{(x_1'', A_1''), \ldots, (x_h'', A_h'')\}$ deux partitions γ-fines de R,

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} | f_B(x_i') - f_B(x_j'') |\ m(A_i' \cap A_j'') < \varepsilon\ .$$

Démonstration:

Supposons que f est intégrable sur B et montrons qu'elle est absolument intégrable sur B.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une jauge γ sur $\overline{R}$ telle que pour chaque partition $\wp$ γ-fine de R,

$$(5) \qquad \left| S(\wp ; f_B) - \int_B f(x)\ m(dx) \right| < \varepsilon/4.$$

Considérons $\wp'$ et $\wp''$ deux partitions γ-fines de R. D'après le lemme 2.1,

$\wp' = \{(x_i', A_i' \cap A_j'') : i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, h\}$ et

$\wp'' = \{(x_i'', A_i' \cap A_j'') : i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, h\}$

sont des partitions γ-fines de R. Nous scindons l'ensemble $\{(i,j)\ i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, h\}$ en deux sous-ensembles, le sous-ensemble

$I = \{(i,j)$ tel que $f_B(x_i') \geq f_B(x_j''))\}$ et

le sous-ensemble

$II = \{(i,j)$ tel que $f_B(x_i') < f_B(x_j'')|$.

Si C est l'union de tous les $A_i' \cap A_j''$ pour lesquels $(i,j) \in I$, alors les ensembles

$\{(x_i', A_i' \cap A_j'') : (i,j) \in I\}$ et

$\{(x_j'', A_i' \cap A_j'') : (i,j) \in I\}$

sont deux partitions γ-fines de C. D'après le lemme 2.3 et (5),

$$(6) \qquad \left| \sum_{(i,j)\in I} (f_B(x_i') - f_B(x_j''))\ m(A_i' \cap A_j'') \right| < \varepsilon/2.$$

Mais, d'après la définition de l'ensemble I,

$(f_B(x_i') - f_B(x_j'')) > 0$,

nous pouvons donc écrire (6) sous la forme

$$(7) \qquad \sum \left| f_B(x_i') - f_B(x_j'') \right| m(A_i' \cap A_j'') < \varepsilon/2.$$

De même, les deux ensembles

$\{(x_i', A_i' \cap A_j'') : (i,j) \in II\}$ et

$\{(x_j'', A_i' \cap A_j'') : (i,j) \in II\}$

sont des partitions γ-fines de $R \setminus C$ et en appliquant le lemme 2.3,

$$\left| \sum_{(i,j)\in II} (f_B(x_j'') - f_B(x_i'))\ m(A_i' \cap A_j'') \right| < \varepsilon/2.$$

De nouveau, $(f_B(x_j'') - f_B(x_i')) > 0$, ce qui nous donne

$$(8) \qquad \sum_{(i,j)\in II} \left| f_B(x_i') - f_B(x_j'') \right| m(A_i' \cap A_j'') < \varepsilon/2.$$

L'union des deux ensembles I et II forment l'ensemble des couples $\{(i,j) : i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, h\}$, donc en additionnant (7) et (8), on obtient bien (4). Ce qui prouve l'intégrabilité absolue de f sur B.

■

Remarquons que si nous avions demandé dans la définition de partition assignée que $x_i \in \overline{A_i}$, $i = 1, \ldots, n$, nous n'aurions pas pu avoir les lemmes 2.1 et 2.3 et par conséquent, le théorème 2.4.

§3. Intégration de fonctions composées

Souvent, nous rencontrons, en analyse, des fonctions qui sont, en fait, des composées d'autres fonctions. C'est pourquoi, il peut être utile de savoir si $g \circ f$ est intégrable sur B quand f l'est. Le théorème suivant répond à ce problème.

Théorème 3.1

Soit f une fonction réelle définie et intégrable sur une partie $B \subset \mathbb{R}$. Si g est une fonction lipschitzienne sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ telle que

$D \supset \{0\}$,

$D \supset \{f(x) : x \in B\}$ et

$g(0) = 0$,

alors la fonction $g \circ f$ est intégrable sur B.

Démonstration:

Soit L une constante de Lipschitz pour g. Puisque f est intégrable sur B, elle est absolument intégrable sur B, d'après le théorème 2.4. Donc, si $\varepsilon > 0$, il existe une jauge γ sur $\overline{\mathbb{R}}$ telle que pour deux partitions γ-fines $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ de $\mathbb{R}$ (nous utilisons les notations du lemme 2.1),

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} | f_B(x_i') - f_B(x_j'') | \, m(A_i' \cap A_j'') < \varepsilon / L.$$

Puisque L est une constante de Lipschitz pour g,

$$(2) \quad | g(f_B(x_i')) - g(f_B(x_j'')) | \le L \, | f_B(x_i') - f_B(x_j'') | .$$

Mais si $x_i' \notin B$, $f_B(x_i') = 0$, par hypothèse, $g(f_B(x_i')) = 0$. De plus, si $x_i' \notin B$, $[g \circ f]_B(x_i') = 0$. Dans ce cas, nous obtenons l'égalité

(3) $g(f_B(x_i')) = [g \circ f]_B(x_i')$.

Si $x_i' \in B$, nous avons, d'après la définition de f_B I.3.4, que $f_B(x_i') = f(x_i')$ et

$$[g \circ f]_B(x_i') = [g \circ f](x_i').$$

Donc, $g(f_B(x_i')) = [g \circ f]_B(x_i')$. Par conséquent, (3) est vérifiée pour tout i. De même,

(4) $g(f_B(x_j")) = [g \circ f]_B(x_j")$.

Si nous portons (3) et (4) dans (2), en multipliant les deux membres par $m(A_i' \cap A_j") \geq 0$ et en sommant pour chaque i et j, nous trouvons d'après (1),

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} | [g \circ f]_B(x_i') - [g \circ f]_B(x_j") | \, m(A_i' \cap A_j")$$
$$\leq L \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{h} | f_B(x_i') - f_B(x_j") | \, m\,(A_i' \cap A_j")$$
$$< L \ \varepsilon/L = \varepsilon \ .$$

Donc, g o f est absolument intégrable sur B et par application du théorème 2.4, elle est intégrable sur B.

■

Ce théorème admet plusieurs corollaires que nous allons démontrer maintenant.

<u>Corollaire 3.2</u>

Si f est intégrable sur une partie $B \subset R$ et $c \geq 0$, alors $\min(c,f)$ et $\max(-c,f)$ sont intégrables sur B.

Démonstration:

Définissons g comme étant la fonction $y \mapsto \min(c,y)$. g est continue sur R et $g(0) = 0$. Si $y < c$, g est la fonction $y \mapsto y$ et sa dérivée vaut donc 1. Si $y > c$, elle est la fonction constante c ont la dérivée est nulle. D'après le lemme A_2 de l'annexe A1, ceci entraîne que g est lipschitzienne. De plus, par application du théorème

3.1, $g \circ f$ est intégrable sur B. Mais, $g \circ f = \min(c,f)$. Donc, nous avons démontré que $\min(c,f)$ est intégrable sur B. Pour prouver que $\max(-c,f)$ est intégrable sur B, il suffit de définir g par $g(y) = \max(-c,y)$ pour tout $y \in R$.

■

Il est habituel de définir les parties positives et négatives d'une fonction f respectivement par

$$f^+ = \max(f,0) \quad ; \quad f^- = \max(-f,0).$$

Pour tout x du domaine de f, nous avons

$$(5) \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x) \; ; \quad | f(x) | = f^+(x) + f^-(x).$$

En effet, si $f(x) \geq 0$, $f^-(x) = 0$ et $f^+(x) = | f(x) | = f(x)$ alors que si $f(x) < 0$, $f^+(x) = 0$ et $f^-(x) = -f(x) = | f(x) |$. Dans chaque cas, les égalités (5) sont vérifiées. Pour ces fonctions f^+ et f^-, nous pouvons prouver le corollaire suivant.

<u>Corollaire 3.3</u>

Si f est intégrable sur une partie $B \subset R$, f^+, f^- et $| f |$ le sont aussi. De plus,

$$(6) \quad 0 \leq \int_B f^+(x) \, m(dx) \leq \int_B | f(x) | \, m(dx),$$

$$(7) \quad 0 \leq \int_B f^-(x) \, m(dx) \leq \int_B | f(x) | \, m(dx),$$

$$(8) \quad \left| \int_B f(x) \, m(dx) \right| \leq \int_B | f(x) | \, m(dx).$$

Démonstration:

Puisque f est intégrable sur B, $-f$ l'est aussi. En appliquant le corollaire 3.3 avec $c = 0$, $\max(f,0)$ et $\max(-f,0)$ sont aussi intégrables sur B, par conséquent, f^+ et f^- le sont également. Puisque $| f | = f^+ + f^-$ et que l'intégrale de jauge est linéaire, $| f |$ est aussi intégrable sur B.

Il est évident que

$$0 \leq f^+ \leq | f |, \quad 0 \leq f^- \leq | f |, \quad -f \leq | f |.$$

En intégrant et en appliquant le corollaire II.2.2, nous obtenons (6) et (7) et aussi

(9) $$\int_B f(x)\, m(dx) \leq \int_B | f(x) |\, m(dx),$$

(10) $$-\int_B f(x)\, m(dx) \leq \int_B | f(x) |\, m(dx).$$

Si $\int_B f(x)\, m(dx) \geq 0$, alors (9) est (8).

Par contre, si $\int_B f(x)\, m(dx) < 0$, c'est (10) qui est (8).

Dans chaque cas, (8) est vérifiée.

■

Le corollaire suivant montre que l'infimum et le suprémum d'un nombre fini de fonctions intégrables sont intégrables.

Corollaire 3.4

> Si $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions réelles intégrables sur une partie $B \subset R$, alors $\max(f_1, \ldots, f_n)$ et $\min(f_1, \ldots, f_n)$ sont intégrables sur B.

Démonstration:

Supposons, premièrement, que $n = 2$.

$$\max(f_1,f_2) = (f_1 + f_2 + | f_1 - f_2 |)/2,$$

en effet, si $f_1(x) \geq f_2(x)$, $\max(f_1(x),f_2(x)) = f_1(x)$ et $| f_1(x) - f_2(x) | = f_1(x) - f_2(x)$, donc,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \max(f_1(x),f_2(x)) \\ &= (f_1(x) + f_2(x) + | f_1(x) - f_2(x) |)/2 \\ &= (f_1(x) + f_2(x) + f_1(x) - f_2(x))/2 \\ &= 2 f_1(x)/2 = f_1(x); \end{aligned}$$

si $f_1(x) < f_2(x)$, $\max(f_1(x),f_2(x)) = f_2(x)$ et $| f_1(x) - f_2(x) | = f_2(x) - f_1(x)$, donc,

$$f_2(x) = \max(f_1(x),f_2(x))$$

$= (f_1(x) + f_2(x) + f_2(x) - f_1(x))/2$
$= f_2(x).$

D'après le corollaire 3.4, $| f_1 - f_2 |$ est intégrable sur B et comme l'intégrale de jauge est linéaire, $\max(f_1, f_2)$ est aussi intégrable sur B.

Nous raisonnons, maintenant, par récurrence. Supposons que $\max(f_1, \ldots, f_k)$ et $f_1, \ldots, f_{k+1}$ sont intégrables sur B. Puisque f_{k+1} est intégrable sur B, en appliquant la première partie de la démonstration, nous obtenons que $\max(f_1, \ldots, f_k, f_{k+1})$ est intégrable sur B. Donc, la conclusion du théorème est valable pour tout $n = k + 1$ et par récurrence, elle est valable pour tout n. Pour prouver que $\min(f_1, \ldots, f_n)$ est intégrable sur B, il suffit d'utiliser le fait que

$$\min(f_1, \ldots, f_n) = - \max(-f_1, \ldots, -f_n).$$

■

Voyons ce qu'il advient de l'intégrabilité de la fonction f^n.

<u>Corollaire 3.5</u>

Si f est une fonction réelle, bornée sur une partie $B \subset R$, intégrable sur B et $n \in N \setminus \{0\}$, alors f^n est aussi intégrable sur B.

Démonstration:

Comme f est borné, on peut trouver un réel c tel que

$$\{f(x) : x \in B\} \subset D \quad \text{où } D = [-c, c].$$

Définissons une fonction g sur D par $g(y) = y^n$. Elle admet une dérivée égale à ny^{n-1} qui est bornée sur D. D'après le lemme A_2 de l'annexe A1, g est lipschitzienne sur D. Par application du théorème 3.1, la fonction $g \circ f = f^n$ est intégrable sur B.

■

Les deux corollaires suivants concernent l'intégrabilité d'un produit de fonctions.

Corollaire 3.6

> Si f et g sont deux fonctions réelles, définies et bornées sur une partie $B \subset R$, intégrables sur B, alors leur produit fg est intégrable sur B.

Démonstration:

Les fonctions f, g et f+g sont bornées et intégrables sur B. D'après le corollaire 3.6, leurs carrés sont intégrables sur B et donc $((f + g)^2 - f^2 - g^2)/2$, qui est en fait fg, est intégrable sur B.

■

Corollaire 3.7

> Si f est une fonction réelle, bornée sur une partie $B \subset R$, intégrable sur B et A un intervalle borné contenu dans B, alors f est intégrable sur A.

Démonstration:

Considérons l'égalité $f_A(x) = f_B(x)\ 1_A(x)$. Si $x \in A$, le membre de gauche est f(x) et les deux facteurs du membre de droite valent respectivement f(x) et 1. Si $x \notin A$, chacun des membres de l'égalité sont nuls. Ainsi, f_A est le produit de deux fonctions bornées f_B et 1_A. Or, chacune de ces fonctions est intégrable sur R. Donc, d'après le corollaire 3.7, f_A est intégrable sur R c'est-à-dire f est intégrable sur A.

■

Les hypothèses de ce corollaire sont assez restrictives. En effet, il faut que f soit bornée sur B et que l'intervalle A soit borné. Nous pouvons démontrer que, même sous des hypothèses plus faibles, f est intégrable sur A. Nous prouverons ce résultat au paragraphe suivant comme conséquence du théorème de convergence monotone.

§4. Passage à la limite sous le signe intégrale

Une fonction peut être définie à partir de fonctions connues, soit en les composant, soit comme limite d'une suite de fonctions. Dans ce paragraphe, nous allons voir sous quelles hypothèses, cette limite est une fonction intégrable et comment trouver la valeur de son intégrale. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions intégrables sur un intervalle D, convergeant vers une fonction f_0, il est tentant de conclure que

$$\int_D f_n(x)\ m(dx) \to \int_D f_0(x)\ m(dx) \text{ quan } n \to \infty.$$

Or, ce n'est pas nécessairement le cas. En effet, soit f_0 une fonction définie sur $[0,1]$ telle que $f_0(0) = 0$ et considérons une suite de nombres réels $c_1, c_2, \dots$ Pour chaque $n > 0$, nous définissons une fonction f_n sur $[0,1]$ par

$$f_n(0) = f_0(0)$$
$$f_n(x) = c_n \text{ si } 0 < x < 1/n$$
$$f_n(x) = f_0(x) \text{ si } 1/n \leq x \leq 1.$$

Alors, pour chaque $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$. Car, si $x = 0$, pour tout n, $f_n(x) = f_0(x)$ et si $x > 0$, pour tout $n > 1/x$, $f_n(x) = f_0(x)$. En particulier, considérons $f_0(x)$ identiquement nulle, son intégrale sur $[0,1]$ est nulle. Nous pouvons calculer l'intégrale des f_n, nous avons

$$\int_0^1 f_n(x)\ m(dx) = c_n/n.$$

Si chaque $c_n = 1$, c_n/n tend vers 0 qui est l'intégrale de f_0 sur $[0,1]$. Si $c_n = n$; la limite des c_n/n vaut 1.
Si $c_n = (-1)^n n$, c_n/n vaut alternativement 1 et -1 , la suite (c_n/n) n'admet donc pas de limite.
Enfin, si $c_n = n^2$, la suite (c_n/n) est non bornée. Ainsi, il est possible pour f_0 d'etre intégrable alors que les intégrales des f_n convergent vers l'intégrale de f_0, ou

tendent vers une autre limite, ou restent bornées en n'approchant aucune limite, ou encore sont non bornées.

Cet exemple montre que si une suite (f_n) converge point par point vers f_0, pour conclure que f_0 est intégrable et que son intégrale est la limite des intégrales des f_n, les f_n doivent satisfaire à des conditions supplémentaires. Le théorème que nous allons démontrer donne une de ces hypothèses, à savoir la convergence uniforme.

Théorème 4.1

> Soit B un intervalle borné de R. Si $(f_n)_{n\in N^*}$ est une suite de fonctions intégrables sur B et convergeant uniformément sur B vers une fonction f_0, alors f_0 est intégrable sur B et
>
> $$\int_B f_0(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\ m(dx).$$

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$. Définissons ε_1 par $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2\ m(B) + 1)$. Puisque $f_n \to f_0$ uniformément, il existe un entier n tel que si $n > n_\varepsilon$,

$$| f_n(x) - f_0(x) | < \varepsilon_1 \text{ , pour chaque } x \in B.$$

Définissons les fonctions $g_n = f_n - \varepsilon_1$ et $h_n = f_n + \varepsilon_1$, elles sont intégrables sur B car f_n et ε_1 le sont. D'après l'inégalité précédente, $g_n \le f_0 \le h_n$ sur B et

$$\int_B h_n(x)\ m(dx) - \int_B g_n(x)\ m(dx)$$

$$= \int_B 2\,\varepsilon_1\ m(dx) = 2\,\varepsilon_1\ m(B) < \varepsilon .$$

Donc, par application du corollaire 1.2, f_0 est intégrable sur B. De plus, puisque $| f_n(x) - f_0(x) | < \varepsilon_1$, pour chaque $x \in B$,

$f_0 - \varepsilon_1 < f_n < f_0 + \varepsilon_1$ sur B et pour tout $n > n_\varepsilon$.
Ainsi, en intégrant sur B,

$$\int_B f_0(x)\ m(dx) - \varepsilon_1 m(B) \leq \int_B f_n(x)\ m(dx)$$

$$\leq \int_B f_0(x)\ m(dx) + \varepsilon_1 m(B).$$

Comme $\varepsilon_1 m(B) < \varepsilon$,

$$\left| \int_B f_n(x)\ m(dx) - \int_B f_0(x)\ m(dx) \right| < \varepsilon.$$

Ceci entraîne que

$$\int_B f_0(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\ m(dx)$$

■

Nous retrouvons, ici, le théorème bien connu de passage à la limite sous le signe intégrale pour l'intégrale de Riemann.

Dans les applications, on rencontre souvent des situations où la convergence uniforme de la suite de fonctions n'est pas vérifiée ou encore très difficile à prouver. Pour remplacer le théorème 4.1, nous allons établir deux théorèmes; le premier est le théorème de convergence monotone que nous démontrons dans ce paragraphe, le second est le théorème de convergence dominée que nous prouverons au paragraphe 8.

Le théorème de convergence monotone s'applique aux suites de fonctions croissantes ou décroissantes. Une suite (f_n) croissante converge, en chaque point x, vers une fonction limite qui peut être finie ou $+\infty$ au point x. Nous considérons, ici, seulement le cas où la limite de (f_n) est finie. Si les fonctions f_n forment une suite croissante et sont intégrables sur une partie $B \subset R$, la suite de leurs intégrales est croissante, d'après le corollaire II.2.2. Donc, elle converge vers une limite finie ou $+\infty$.

Théorème 4.2(théorème de convergence monotone

Soient B une partie de R et $(f_n)_{n\in N^*}$ une suite monotone de fonctions définies et intégrables sur B. Supposons que la limite, quand $n \to +\infty$, de $(f_n(x))$ est un nombre fini pour chaque $x \in B$. Alors, la fonction qui en tout point x de B, prend la valeur $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est intégrable sur B si et seulement si les intégrales des f_n sur B forment un ensemble borné de réels; dans ce cas:

$$\int_B \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\ m(dx)$$

Démonstration:

Nous allons démontrer ce théorème pour une suite croissante de fonctions. La preuve est similaire pour une suite décroissante, il suffit de faire un simple changement de signe.

Pour simplifier les notations, nous posons

$$f_0(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

partout où la limite existe. Alors, $f_n(x) \leq f_0(x)$ pour tout $n \in N^*$ et tout $x \in B$.

Supposons que f_0 est intégrable sur B et montrons alors que les intégrales des f_n forment un ensemble borné. Comme $f_n(x) \leq f_0(x)$ et f_0 est intégrable, d'après le corollaire II.2.2,

$$\int_B f_1(x)\ m(dx) \leq \int_B f_n(x)\ m(dx) \leq \int_B f_0(x)\ m(dx) < \infty ,$$

pour tout entier n. Et donc, la suite des intégrales des f_n est bornée.

Réciproquement, supposons que les intégrales

$$J_n = \int_B f_n(x)\ m(dx) \qquad (n = 1,2, \ldots)$$

ont une borne supérieure finie. Ces J_n forment une suite croissante. Donc, ils admettent une limite finie que l'on note J : $J = \lim_{n\to\infty} J_n$. Nous allons montrer que f_0 est intégrable sur B et que son intégrale vaut J. Nous prouvons, d'abord, ceci sous l'hypothèse supplémentaire

$$f_1(x) \geq 0 \text{ pour chaque } x \in B.$$

L'existence et la valeur de l'intégrale sur B d'une fonction définie sur B ne sont pas affectées par les valeurs de cette fonction en dehors de B. Donc, nous pouvons supposer que $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sont définies sur $\overline{R}$ tout entier et nulles sur $\overline{R} \setminus B$. Pour chacune de ces f_j, $(f_j)_B = f_j$, et donc $S(\mathcal{P}\,;(f_j)_B) = S(\mathcal{P}\,;f_j)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme (J_n) converge vers J, nous pouvons prendre un entier $N > 0$ tel que

(1) $\quad J_N > J - \varepsilon/2.$

Pour chaque $x \in \overline{R}$ et chaque entier $n > 0$, considérons

(2) $\quad f_n(x) \geq ((2J + \varepsilon)/(2J + 2\varepsilon))\ f_0(x).$

Si $f_0(x) > 0$, $((2J + \varepsilon)/(2J + 2\varepsilon))\ f_0(x) < f_0(x)$ et $f_n(x) \to f_0(x)$ quand $n \to \infty$, donc, (2) est vraie pour tout n grand. Si $f_0(x) = 0$, de l'inégalité

$$0 \leq f_1(x) \leq f_n(x) \leq f_0(x) = 0,$$

nous déduisons que tous les $f_n(x)$ sont nuls et donc, (2) est valable pour tout n. Dans chacun des cas, pour tout $x \in \overline{R}$, nous choisissons un entier $n(x)$ tel que $n(x) > N$ et pour lequel (1) est vérifiée, c'est-à-dire,

(3) $\quad f_{n(x)}(x) \geq ((2J + \varepsilon)/(2J + 2\varepsilon))\ f_0(x).$

Pour chaque entier $n > 0$, l'intégrale de f_n sur R existe et vaut J_n. Nous pouvons, dès lors, trouver une jauge γ_n' sur $\overline{R}$ telle que pour toute partition $\mathcal{P}$ γ_n'-fine de R,

$$|\ S(\mathcal{P}\,;f_n) - J_n\ | < \varepsilon/2^{n+3}.$$

Définissons γ_n par $\gamma_n = \gamma_1' \cap \gamma_2' \cap \ldots \cap \gamma_n'$ $(n = 1,2,3,\ldots)$. Il est évident que, pour tout $x \in \overline{R}$,

(4) $\gamma_1(x) \supset \gamma_2(x) \supset \gamma_3(x) \supset \ldots$

D'après le théorème I.4.3, chaque γ_n est une jauge sur $\overline{R}$ et si $\wp$ est une partition γ_n-fine de R, elle est aussi γ_n'-fine. Par conséquent, si $\wp$ est une partition γ_n-fine de R,

(5) $| S(\wp; f_n) - J_n | < \varepsilon/2^{n+3}$.

Soit $x \in \overline{R}$. Puisque $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ sont des jauges sur R, chacun des ensembles $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots$ est un intervalle ouvert contenant x. Un d'entre eux est indexé par le n(x) choisi dans (3). Ce $\gamma_{n(x)}(x)$ sera noté $\gamma(x)$. Alors la fonction γ sur $\overline{R}$ définie par

$\gamma(x) = \gamma_{n(x)}(x)$ pour $x \in \overline{R}$

est une jauge sur $\overline{R}$. Nous allons montrer que c'est la jauge que nous cherchons, c'est-à-dire la jauge telle que pour toute partition $\wp$ γ-fine de R,

(6) $J - \varepsilon < S(\wp; f_0) < J + \varepsilon$.

Considérons une partition γ-fine de R,

$\wp = \{(x_1, A_1), \ldots, (x_k, A_k)\}$.

D'après (3), $\overline{A}_i \subset \gamma(x_i) = \gamma_{n(x_i)}(x_i) \subset \gamma_N(x_i)$ et donc, $\wp$ est γ_N-fine. Par conséquent, de (4), nous déduisons

$| S(\wp; f_N) - J_N | < \varepsilon/2^{N+3}$.

Puisque $f_N(x) \le f_0(x)$ pour tout $x \in R$, ce qui précède et (1) impliquent

$S(\wp; f_0) \ge S(\wp; f_N) > J_N - \varepsilon/2^{N+3} > J - \varepsilon$.

Ainsi, la première inégalité de (6) est vérifiée.

Soit M le plus grand élément de l'ensemble $\{n(x_1), \ldots, n(x_k)\}$. Définissons, pour chaque entier $h > 0$,

(7) $I[h] = \{i \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $n(x_i) = h\}$.

Alors, les I[h] sont disjoints deux à deux et chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$ appartient à un et un seul des I[1],..., I[M]. Nous définissons aussi

$A[h] = \cup \{A_i : i \in I[h]\}$ et

(8) $\mathcal{P}[h] = \{(x_i, A_i) : i \in I[h]\}$.

Pour chaque $h \in \{1, \ldots, M\}$ et chaque couple $(x_i, A_i) \in \mathcal{P}[h]$, $n(x_i) = h$ et donc

$\overline{A}_i \subset \gamma(x_i) = \gamma_{m(x_i)}(x_i) = \gamma_h(x_i)$.

Dès lors, $\mathcal{P}[h]$ est une partition γ_h-fine de $A[h]$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, nous pouvons choisir une partition γ_M-fine $\mathcal{P}_i^*$ de A_i et nous définissons

$\mathcal{P}^*[h] = \bigcup_{i \in I[h]} \mathcal{P}_i^*$.

Par application du lemme 2.1, $\mathcal{P}^*[h]$ est une partition γ_M-fine de $A[h]$, donc de (4), si (x, A) est un couple de $\mathcal{P}^*[h]$, $\overline{A} \subset \gamma_M(x) \subset \gamma_h(x)$. Dès lors, $\mathcal{P}^*[h]$ est une partition γ_h-fine de $A[h]$. Comme $\mathcal{P}[h]$ et $\mathcal{P}^*[h]$ sont deux partitions γ_h-fines de $A[h]$ et de (5), nous déduisons par application du lemme 2.3,

(9) $S(\mathcal{P}[h]; f_h) < S(\mathcal{P}^*[h], f_h) + \varepsilon/2^{h+2}$.

Pour tout couple $(x_i, A_i) \in \mathcal{P}[h]$, d'après (7) et (8), $m(x_i) = h$ et par application de (3),

$f_h(x_i) \geq ((2J + \varepsilon) / (2J + 2\varepsilon)) f_0(x_i)$.

Dès lors, le membre de gauche de (9) n'augmente pas si nous remplaçons f_h par $((2J + \varepsilon) / (2J + 2\varepsilon)) f_0$. Les f_j étant croissantes et $M \geq h$, $f_M \geq f_h$ et le membre de droite de (9) ne diminue pas si nous remplaçons f_h par f_M. Par conséquent,

$$((2J + \varepsilon) / (2J + 2\varepsilon)) S(\mathcal{P}[h]; f_0) < S(\mathcal{P}^*[h]; f_M) + \varepsilon/2^{h+2}.$$

Nous sommons ces inégalités membre à membre pour $h = 1, \ldots, M$. La somme des $S(\mathcal{P}[h]; f_0)$ est la somme des termes $f_0(x_i)\, m(A_i)$ pour tout $i \in I[1] \cup I[2] \ldots \cup I[M]$, c'est-à-dire la somme pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Le résultat vaut $S(\mathcal{P}; f_0)$. La somme des $S(\mathcal{P}^*[h]; f_M)$ est la somme des termes $f_M(x_i^*)\, m(A_i^*)$ pour tout couple $(x_i^*, A_i^*) \in \mathcal{P}^* = \mathcal{P}^*[1] \cup \ldots \cup \mathcal{P}^*[M]$. D'après le lemme 2.1, $\mathcal{P}^*$ est une partition γ_M-fine de $A[1] \cup \ldots \cup A[M] = R$. Donc, en appliquant le lemme 2.1,

$$\sum_{h=1}^{M} S(\mathcal{P}^*[h]; f_M) + \varepsilon / 2^{h+2}$$
$$= S(\mathcal{P}^*; f_M) + \varepsilon/2^3 + \varepsilon/2^4 \ldots + \varepsilon/2^{M+3}.$$

En combinant ces résultats avec (5),

$$S(\mathcal{P}; f_0) < ((2J + 2\varepsilon) / (2J + \varepsilon)) (S(\mathcal{P}^*; f_M) + \varepsilon/4)$$
$$< ((2J + 2\varepsilon) / (2J + \varepsilon)) (J_M + \varepsilon/2^{M+3} + \varepsilon/4)$$
$$< J + \varepsilon .$$

Ainsi, la deuxième inégalité de (6) est vérifiée. Le théorème est donc prouvé sous l'hypothèse supplémentaire

(10) $f_1(x) \geq 0$, pour $x \in B$.

Si les f_n forment une suite croissante et si leurs intégrales sont bornées mais (10) n'est pas vérifiée, nous définissons les fonctions g_n par $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$ pour tout $x \in \overline{R}$. Les fonctions g_n forment une suite croissante, leurs intégrales sont bornées et de plus, l'hypothèse (10) est vérifiée. Donc, d'après la première partie de la preuve, la limite des g_n, quand $n \to +\infty$, est intégrable sur B et son intégrale est la limite des intégrales des g_n. Mais,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_1(x))$$

donc la limite des f_n doit être aussi intégrable sur B. De plus,

$$\int_B \lim_{n\to\infty} f_n(x)\; m(dx) = \int_B \lim_{n\to\infty} g_n(x)\; m(dx) + \int_B f_1(x)\; m(dx)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_B f_n(x)\; m(dx) - \int_B f_1(x)\; m(dx) \right\} + \int_B f_1(x)\; m(dx)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\; m(dx)$$

■

Ce théorème permet d'étendre l'utilisation du symbole d'intégration.

<u>Définition 4.3</u>

! Soient B une partie de R et f une fonction réelle !
! définie sur B mais non intégrable sur B. S'il existe !
! une suite croissante $f_1, f_2, f_3, \ldots$ de fonctions !

intégrables sur B et convergeant vers f en tout point de B, nous définissons

$$\int_B f(x)\ m(dx) = +\infty \ ;$$

s'il existe une suite décroissante $f_1, f_2, f_3, \ldots$ de fonctions intégrables sur B et convergeant vers f en chaque point de B, nous définissons

$$\int_B f(x)\ m(dx) = -\infty \ .$$

Grâce à cette définition, le théorème de convergence monotone peut s'énoncer sous une forme plus facilement mémorisable.

Corollaire 4.4

Si f est une fonction réelle définie sur une partie $B \subset R$ et $f_1, f_2, f_3, \ldots$ une suite monotone de fonctions intégrables sur B et convergeant vers f en chaque point de B, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\ m(dx) = \int_B f(x)\ m(dx).$$

Nous pouvons aussi donner une forme plus générale du lemme I.3.8.

Lemme 4.5

Si A est un intervalle (borné ou non) de R, alors sa fonction caractéristique 1_A a une intégrale sur R et

$$(11) \qquad \int_R 1_A(x)\ m(dx) = m(A).$$

Démonstration:

Si A est borné, la conclusion du lemme suit du lemme I.3.8. Si A n'est pas borné, considérons la fonction f_n définie comme étant la fonction caractéristique de $A \cap]-n,n[$ et ce pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Alors, d'après le lemme I.3.8, f_n est intégrable et son intégrale vaut $m(A \cap]-n,n])$ qui croît sans borne quand n augmente. Pour $x \notin A$, $f_n(x) = 0$, pour tout n; pour $x \in A$, $f_n(x)$ est croissante quand n augmente et vaut 1, pour tout n grand assez pour que $x \in]-n,n]$. Par application du théorème 4.2, 1_A n'est pas intégrable mais d'après la définition 4.3, le membre de gauche de (11) à la même valeur, à savoir ∞ , que le membre de droite.

■

La définition 4.3 permet de faire une distinction entre "f est intégrable sur B" et "f a une intégrale sur B" puisque f peut avoir une intégrale sur B dont la valeur est $+\infty$ ou $-\infty$ sans être intégrable sur B. "f est intégrable sur B" et "f a une intégrale finie sur B" sont deux énoncés équivalents.

L'exemple suivant nous montre comment appliquer le théorème 4.2. En fait, nous pourrions utiliser le théorème 4.1 car la convergence est uniforme mais elle est assez laborieuse à prouver, c'est pourquoi nous n'appliquons pas ce théorème.

Exemple 4.6:

Montrons que $\lim_{n\to\infty} n(u^{1/n} - 1) = \ln u$.

Démonstration:

Définissons f et f_n par

$$f(x) = 1/x, \quad f_n(x) = x^{(1/n)-1} \text{ pour } x > 0.$$

Puisque $x^{1/n} \to 1$ quand $n \to +\infty$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x > 0$. Si $1 \leq x \leq u$, $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \ldots$

et si $0 < u \leq x \leq 1$, $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ Dans chaque cas, le théorème de convergence monotone 4.2 peut s'appliquer et alors,

$$n(u^{1/n} - 1) = \int_1^u f_n(x)\ m(dx) \text{ converge vers}$$

$$\int_1^u f(x)\ m(dx) = \ln u.$$

■

§5. Intégrale d'un produit de fonctions

Dans ce paragraphe, nous présentons des théorèmes traitants de l'intégrabilité d'un produit de fonctions. Leurs démonstrations sont, en fait, de simples applications du théorème de convergence monotone. Nous allons commencer par démontrer un lemme qui nous permettra d'établir une légère modification du corollaire 3.7.

Lemme 5.1

> Soient B une partie de R et f, g deux fonctions réelles positives définies sur B et admettant une intégrale, finie ou infinie ,sur B. Alors, fg a une intégrale sur B. Si, en outre, il existe une fonction M intégrable sur B telle que $f(x)g(x) \leq M(x)$ pour tout $x \in B$, alors fg est intégrable sur B.

Démonstration:

Prouvons d'abord un résultat préliminaire qui simplifiera la démonstration de ce lemme.

> Si f est une fonction positive ayant une intégrale sur B, alors il existe une suite croissante f_1, f_2,... de fonctions positives, bornées, intégrables sur B telle que $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ pour chaque $x \in B$.

Si l'intégrale de f sur B est infinie, d'après la définition 4.3, nous pouvons trouver une suite croissante f_1', f_2', ... de fonctions intégrables sur B et tendant partout dans B vers f. Si f est intégrable sur B, nous choisissons tous les f_n' égales à f. Pour chaque entier $n > 0$, définissons f_n par $f_n = \min(n, \max(f_n', 0))$. Ces f_n sont positives et bornées puisqu'elles ne dépassent jamais n. D'après le corollaire 3.2, elles sont intégrables sur B. De plus, il est clair que si u', u'' et v sont des réels tels que $u' \leq u''$, alors

$$\max(u', v) \leq \max(u'', v) \text{ et } \min(u', v) \leq \min(u'', v).$$

D'où, pour tout $x \in B$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \min((n+1, \max(f'_{n+1}(x), 0)) \\ &\geq \min((n, \max(f'_{n+1}(x), 0)) \\ &\geq \min((n, \max(f'_n(x), 0)) = f_n(x) \end{aligned}$$

Ainsi, les f_n forment une suite croissante sur B. Pour tout $x \in B$ et tout n tel que $n > f(x)$, nous avons $n > \max(f_n'(x), 0)$, donc $f_n(x) = \max(f_n'(x), 0)$.
Le membre de droite de cette égalité tend vers $\max(f(x), 0)$ quand $n \to +\infty$. Or, $\max(f(x), 0) = f(x)$ car f est une fonction positive. Donc, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. Ce qui termine la preuve du résultat préliminaire.

Considérons, maintenant, f et g deux fonctions positives admettant des intégrales sur B. D'après le résultat prouvé précédemment, nous pouvons trouver deux suites croissantes $f_1, f_2, \ldots$ et $g_1, g_2, \ldots$ de fonctions positives, bornées, intégrables sur B qui convergent respectivement vers f et g partout dans B. Alors, les produits $f_1g_1, f_2g_2, \ldots$ sont positifs et croissants, de plus, d'après le corollaire 3.6, ils sont intégrables sur B et ils convergent vers fg partout dans B. Par application du corollaire 4.4, fg a une intégrale (finie ou infinie) sur B. En particulier, s'il existe une fonction M intégrable sur B telle que $fg \leq M$, alors pour tout entier $n > 0$, $f_ng_n \leq fg \leq M$. Donc, les intégrales des f_ng_n ne dépassent jamais l'intégrale de M et d'après le théorème de convergence monotone, fg est intégrable sur B.

■

Nous pouvons, à présent, démontrer une amélioration du corollaire 3.7.

Corollaire 5.2

> Soit A un intervalle (non nécessairement borné) de R.
>
> Si f est une fonction intégrable sur une partie
>
> $B \subset R$, alors f est intégrable sur $A \cap B$.

Démonstration:

Par hypothèse, f est intégrable sur B, donc f_B est intégrable sur R. D'après le corollaire 3.3, f_B^+ et f_B^- sont aussi intégrables sur R. Par application du lemme 4.5, la fonction caractéristique 1_A admet une intégrale sur R et de plus, $f_B^+1_A \leq f_B^+$. Donc, puisque f_B^+ est intégrable, d'après le lemme 5.1, $f_B^+1_A$ est intégrable sur R. L'égalité $f_B^+(x)1_A(x) = f_{A\cap B}^+(x)$ est vérifiée pour tout $x \in R$. En effet, si $x \in A \cap B$, les deux membres valent $f^+(x)$ et sinon, ils sont nuls. Par conséquent, $f_{A\cap B}^+$ est intégrable sur R et donc, f^+ est intégrable sur $A \cap B$. Par un raisonnement similaire, nous pouvons prouver que f^- est intégrable sur $A \cap B$, ce qui entraîne que $f = f^+ - f^-$ est aussi intégrable sur $A \cap B$.

■

Le théorème suivant est une propriété beaucoup plus puissante que le corollaire 3.6.

Théorème 5.3

> Si f est une fonction intégrable sur R et g une
>
> fonction bornée, intégrable sur chaque intervalle
>
> borné de R (en particulier, si g est bornée et
>
> intégrable sur R), alors fg est intégrable sur R.

Démonstration:

Prouvons d'abord un résultat préliminaire.

| Si g est une fonction positive, intégrable sur chaque intervalle borné de R, alors g admet une intégrale (finie ou non) sur R.

Pour chaque entier $n > 0$, considérons la fonction $g_n = g_{]-n,n]}$. Pour tout $x \in R$, prenons $n^*(x)$ le plus petit entier $n > 0$ tel que $x \in]-n,n]$. Alors,

$$g_n(x) = 0 \quad \text{pour } n < n^*(x) \text{ et}$$
$$g_n(x) = g(x) \text{ pour } n \geq n^*(x).$$

D'où, les g_n sont croissantes et convergent vers g. Par hypothèse, g est intégrable sur $]-n,n]$, donc g_n est intégrable sur R. Alors, ou bien g est intégrable sur R ou bien, d'après la définition 4.3, elle a une intégrale infinie sur R. Nous avons donc prouvé le résultat préliminaire.

Si f est intégrable sur R, il en est de même pour f^+ et f^-. Si g est bornée c'est-à-dire $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in R$, g^+ et g^- ont la même borne. Si g est intégrable sur chaque intervalle borné de R, g^+ et g^- le sont aussi. Alors, par application du résultat précédent, elles admettent des intégrales sur R. Ceci reste vrai si, en particulier, g est intégrable sur R. Puisque $f^+g^+ \leq Mf^+$ et que Mf^+ est intégrable sur R, d'après le lemme 5.1, f^+g^+ est intégrable sur R. Similairement, il en est de même pour f^+g^-, f^-g^+ et f^-g^-. Dès lors,

$$f^+g^+ - f^-g^+ - f^+g^- + f^-g^- = (f^+ - f^-)\ (g^+ - g^-) = fg$$

est intégrable sur R.

■

Voyons un exemple d'utilisation de ces théorèmes.

Exemple 5.4:

Si f est intégrable sur R et $k \in R$, en appliquant le théorème 5.3, les fonctions $x \mapsto f(x) \cos kx$ et $x \mapsto f(x) \sin kx$ sot intégrables sur R. Les intégrales de ces fonctions ont une certaine importance dans la théorie des transformées de Fourier.

§6. Intégrales impropres

Pour intégrer au sens de Riemann une fonction non bornée ou une fonction sur une partie non bornée, nous devons utiliser les intégrales impropres. L'intégrale de jauge s'applique directement aux fonctions non bornées et aux ensembles non bornés. Nous n'avons donc pas besoin de définir des "intégrales impropres" pour couvrir de tels cas. Cependant, il est souvent utile d'appliquer cette idée, non pour définir l'intégrale, ce qui est dejà fait, mais pour calculer sa valeur. Le théorème suivant montre que c'est, en effet, possible.

Théorème 6.1

Soient $]a,b]$ un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, a_1, a_2, a_3, ... et b_1, b_2, b_3, ... deux suites de réels telles que

i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ et $a_1 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Si f est une fonction réelle définie sur $]a,b]$ et intégrable sur chaque intervalle $]a_n,b_n]$, alors f est intégrable de a à b si et seulement si les nombres

(1) $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\ m(dx)$

sont bornés. Dans ce cas, la limite

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\ m(dx)$ existe et

(2) $$\int_a^b f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\ m(dx)$$

Démonstration:

Remarquons que nous pourrions choisir tous les $a_n = a$ et les $b_n = b$, a peut être $-\infty$ et b, $+\infty$.

Nous avons défini l'intégrale de jauge de f de a à b comme étant l'intégrale de f sur $]a,b]$ qui est encore l'intégrale de $f_{]a,b]}$ sur R. Mais, changer l'intégrant en un seul point n'affecte pas l'intégrale. Donc, l'intégrale de f de a_n à b_n est la même que son intégrale sur l'intervalle ouvert $B(n) =]a_n,b_n[$. De même, l'intégrale de f de a à b vaut son intégrale sur l'intervalle ouvert $B =]a,b[$.

Si f est intégrable sur $]a,b[$, $|f|$ l'est aussi. Donc, les

$$\int_{a_m}^{b_m} |f(x)|\, m(dx) \text{ ne peuvent dépasser } \int_B |f(x)|\, m(dx).$$

Supposons que les intégrales (1) soient bornées et ajoutons l'hypothèse supplémentaire

(3) $\quad f(x) \geq 0$ pour tout $x \in B$.

Définissons la fonction $f_n = f_{B(n)}$ c'est-à-dire

$$f_n(x) = f_{B(n)} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B(n) \\ 0 & \text{si } x \in R \setminus B(n) \end{cases}$$

Par hypothèse,

$$\int_{a_n}^{b_m} |f(x)|\, m(dx) = \int_{a_n}^{b_m} f(x)\, m(dx)$$

$$= \int_{B(n)} f(x)\, m(dx)$$

$$= \int_R f_n(x)\, m(dx)$$

existe pour chaque entier $n > 0$.

Pour tout $n > 0$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour tout $x \in R$. En effet, si $x \in B(n)$, il appartient aussi à $B(n+1)$ et les deux membres de l'inégalité valent $f(x)$; si $x \notin B(n)$, le membre de gauche de l'inégalité est nul et le membre de droite est positif. Donc, la suite f_1, f_2, f_3, ... est croissante. Elle admet une limite que nous notons f_0. Pour chaque $x \in B$, $x \in B(n)$ pour tout n grand, donc pour de tels n, $f_n(x) = f(x)$. Dans ce cas, la limite $f_0(x) = f(x) = f_B(x)$ car $x \in B$. Si $x \notin B$, $x \notin B(n)$ pour tout n et $f_B(x) = f_0(x)$. D'après le théorème de convergence monotone, la limite f_0 est intégrable et son intégrale est la limite des intégrales sur R des fonctions f_n. Les conclusions du théorème sont donc ainsi établies sous l'hypothèse supplémentaire (3).

Supposons maintenant que les hypothèses du théorème soient vérifiées mais pas nécessairement (3). Puisque f est intégrable sur chaque B(n), il en est de même pour f^+ et f^-. D'après ce qui a été démontrer précédemment, les deux fonctions positives f^+ et f^- sont intégrables de a à b et donc, $f = f^+ - f^-$ l'est aussi. De plus, (2) est vérifiée pour f^+ et f^- donc,

$$\int_a^b f(x)\ m(dx) = \int_a^b f^+(x)\ m(dx) - \int_a^b f^-(x)\ m(dx)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{a_n}^{b_n} f^+(x)\ m(dx) - \int_{a_n}^{b_n} f^-(x)\ m(dx) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\ m(dx).$$

■

Ce théorème admet un corollaire assez utile.

Corollaire 6.2

> Soient $]a,b[$ et $]a_n,b_n[$ les intervalles définis comme dans le théorème 6.1. Soient f et g deux fonctions définies sur $]a,b]$ satisfaisant l'inégalité $|f| \leq g$ sur $]a,b]$. Si f est intégrable sur chaque intervalle $]a_n,b_n[$ et si g est intégrable de a à b, alors f est intégrable de a à b.

Démonstration:

Puisque pour chaque entier $n > 0$,

$$\int_{a_n}^{b_n} |f(x)| \, m(dx) \leq \int_{a_n}^{b_n} g(x) \, m(dx) \leq \int_{a}^{b_n} g(x) \, m(dx),$$

les intégrales $\int_{a_n}^{b_n} |f(x)| \, m(dx)$ sont bornées. Donc, par

application du théorème 6.1, f est intégrable de a à b.

■

§7. Continuité absolue de l'intégrale indéfinie.

Dans le théorème II.5.4, nous avons montré que si f est une fonction réelle, bornée et intégrable sur [a,b], son intégrale indéfinie est lipschitzienne. Dans ce paragraphe, nous allons prouver que si f est intégrable, même si elle est non bornée, son intégrale indéfinie possède une propriété plus forte que la continuité, à savoir, la continuité absolue. La définition de la continuité absolue, ainsi que quelques unes de ses propriétés se trouvent en annexe A1.

<u>Théorème 7.1</u>

Si f est intégrable sur un intervalle B de R, non nécessairement borné et F est une intégrale indéfinie de f, alors F est absolument continue.

Démonstration:

Puisque f est intégrable sur B, d'après le théorème 2.4, le corollaire 3.2 et le lemme II.1.1, $|f|$ et $\min(|f|,n)$ le sont aussi pour chaque entier $n > 0$. Il en est donc de même pour la fonction f_n définie par

(1) $f_n = |f| - \min(|f|,n)$.

Comme $\min(|f|,n) \leq |f|$, f_n est positive et pour tout x, elle est nulle à chaque fois que $n > |f(x)|$. Ainsi, $f_n(x)$

converge vers 0 pour tout $x \in B$. De plus, pour chaque $x \in B$ et chaque entier $n > 0$, ou bien $|f(x)| \geq n+1$ et dans ce cas, $\min(|f(x)|,n) = n < n+1 = \min(|f(x)|,n+1)$; ou bien $|f(x)| < n+1$ et alors,

$\min(|f(x)|,n) \leq |f(x)| = \min(|f(x)|,n+1)$.

Dans chaque cas, ceci et (1) entraînent $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Les fonctions f_n satisfont les hypothèses du théorème 4.2 de convergence monotone et les intégrales des f_n convergent vers l'intégrale de leur limite qui est nulle. Dès lors, si $\varepsilon > 0$, nous pouvons choisir un n tel que

$$\int_a^b f_n(x)\ m(dx) < \varepsilon/2.$$

et nous définissons $\delta = \varepsilon/2n$.

Considérons maintenant des sous-intervalles de B disjonts deux à deux, $]x'_1,x''_1]$, ..., $]x'_k,x''_k]$, dont la longueur totale est inférieure à δ. Alors, d'après (1),

$$\sum_{j=1}^{k} |F(x''_j) - F(x'_j)| = \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{x'_j}^{x''_j} f(x)\ m(dx) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \int_{x'_j}^{x''_j} |f(x)|\ m(dx)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{x'_j}^{x''_j} f_n(x)\ m(dx)$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \int_{x'_j}^{x''_j} \min(|f(x)|,n)\ m(dx)$$

Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \int_{x'_j}^{x''_j} f_n(x)\ m(dx) = \int_{\bigcup_{j=1}^{k}]x'_j,x''_j]} f_n(x)\ m(dx)$

et $\bigcup_{j=1}^{k}]x'_j,x''_j] \subset B$. Puisque $f_n \geq 0$, d'après le corollaire II.2.3,

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{k}]x'_j,x''_j]} f_n(x)\ m(dx) \leq \int_B f_n(x)\ m(dx)$$

Dans $\sum_{j=1}^{k} \int_{x'_j}^{x''_j} \min(|f(x)|,n)\ m(dx)$, les intégrants ne sont

jamais plus grands que n, la somme ne diminue donc pas si nous remplaçons $\min(|f(x)|,n)$ par n. Tout ceci nous donne

$$\sum_{j=1}^{k} |F(x'_j) - F(x''_j)| \leq \int_B f_n(x)\ m(dx) + \sum_{j=1}^{k} \int_{x'_j}^{x''_j} n\ m(dx)$$

Le premier terme du membre de droite est plus petit que $\varepsilon/2$ par le choix de n. Le second vaut n fois la somme des longueurs des intervalles $]x'_j,x''_j]$ qui est inférieure à $n\delta = n\ \varepsilon/2n$. Donc,

$$\sum_{j=1}^{k} |\ F(x'_j) - F(x''_j)\ | \leq \varepsilon ,$$

c'est-à-dire, d'après la définition de continuité absolue, F est absolument continue sur B.

■

La réciproque de ce théorème reste vraie; elle s'énonce: " si une fonction F est absolument continue sur un intervalle, il existe une fonction f telle que F est une intégrale indéfinie de f". Pour la preuve, nous renvoyons à [7].

Nous démontrons en annexe A1 que si une fonction est absolument continue sur B, elle est continue en chaque point de B. Ainsi, l'intégrale indéfinie de F qui est absolument continue est continue en tout point de B. Mais, si B n'est pas borné, c'est-à-dire que $a = -\infty$ ou $b = \infty$, la continuité absolue de F ne garantit pas qu'elle est continue aux extrémités de B. Cependant, nous allons prouver, à présent, que c'est, en effet, le cas.

<u>Téorème 7.2</u>

Soit B un intervalle non nécessairement borné de R dont les extrémités sont a et b. Si f est intégrable sur B, alors chaque intégrale indéfinie de f est

continue sur $\overline{B} = [a,b]$.

Démonstration:

Soit $\bar{x} \in [a,b]$. Si $\bar{x}$ est fini, nous savons déjà que F est continue en $\bar{x}$. Si $\bar{x} = \infty$, pour chaque suite de points $a < b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$ convergeant vers $\bar{x}$, en appliquant le théorème 6.1 nous avons

$$\lim_{n\to\infty} F(b_n) = \lim_{n\to\infty} \{ F(a) + \int_a^{b_n} f(x)\ m(dx) \}$$

$$= F(a) + \int_a^{\infty} f(x)\ m(dx)$$

$$= F(\bar{x}).$$

Ceci est vrai pour toute suite $b_1, b_2, b_3, \ldots$ telle que $a < b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$, donc, F est continue en ∞ . Nous pouvons appliquer un raisonnement similaire si $\bar{x} = -\infty$.

■

Nous pouvons maintenant établir une forme plus générale de la formule d'intégration par parties. L'intervalle d'intégration peut être non borné et il n'y a pas d'hypothèse sur les dérivées des fonctions. En particulier, l'extension aux intervalles non bornés est très utile dans de nombreuses applications.

Théorème 7.3

Soit B un intervalle non nécessairement borné de R dont les extrémités sont a et b. Si f et g sont deux fonctions réelles intégrables sur B et si F et G sont respectivement des intégrales indéfinies de f et g

alors,

$$\int_a^b f(x)G(x)\ m(dx) = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\ m(dx)$$

Démonstration:

Puisque f et g sont intégrables sur B, $|f| + |g|$ l'est aussi. Considérons la fonction H définie sur $[a,b]$ par

$$H(x) = \int_a^x [\ |f(u)| + |g(u)|\ ]\ m(du).$$

Comme $|f| + |g|$ est intégrable sur B, H(b) est fini.
Donc, si $\varepsilon > 0$, nous pouvons choisir un nombre fini de points $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_k = H(b)$ tels que
$y_j - y_{j-1} < \varepsilon/(H(b)+1)$, $j = 1, 2, \ldots, k$.
D'après le corollaire 7.2, H est continue sur $[a,b]$, ainsi, nous pouvons trouver des points
$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_k = b$ tels que
$H(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
Nous définissons maintenant deux fonctions F^*, G_* sur $[a,b]$ par

$$F^*(x) = F(x_i),\ G_*(x) = G(x_{i-1}),\quad x_{i-1} < x \leq x_i \quad i = 1, \ldots, k$$

avec $F^*(a) = F(x_1)$ et $G_*(a) = G(a)$.
Ces fonctions sont bornées et à valeurs dans l'intervalle $[0,H(b)]$. De plus, elles sont constantes sur chaque intervalle $]x_{i-1},x_i]$. D'après le corollaire 5.2, f et g sont intégrables sur chaque intervalle $]x_{i-1},x_i]$, il en est donc de même pour fG_* et F^*g. Comme F et G sont respectivement des intégrales indéfinies de f et g,

$$(1)\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)G_*(x)\ m(dx) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} F^*(x)g(x)\ m(dx)$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)G(x_{i-1})\ m(dx) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x_i)g(x)\ m(dx)$$

$$= [F(x_i)-F(x_{i-1})]G(x_{i-1}) + F(x_i)[G(x_i)-G(x_{i-1})]$$

$$= F(x_i)G(x_i) - F(x_{i-1})G(x_{i-1}).$$

D'après le théorème II.4.1, fG_* et F^*g sont intégrables sur l'union $]a,b]$ des intervalles $]x_{i-1},x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, et en additionnant les égalités (1) pour $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$(2) \quad \int_a^b f(x)G_*(x)\ m(dx) + \int_a^b F^*(x)g(x)\ m(dx).$$

$$= F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Pour chaque $x \in]x_{i-1},x_i]$, nous avons, d'après la définition de l'intégrale indéfinie,

$$| F^*(x) - F(x) | = | F(x_i) - F(x) | = | \int_x^{x_i} f(u)\ m(du) |$$

$$(3) \qquad \leq \int_x^{x_i} |f(u)|\ m(du) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(u)|\ m(du)$$

$$\leq H(x_i) - H(x_{i-1}) = y_i - y_{i-1}$$
$$< \varepsilon/(H(b)+1).$$

De même,

$$(4) \quad | G_*(x) - G(x) | < \varepsilon/ (H(b)+1).$$

De (2), (3) et (4) nous déduisons

$$\int_a^b f(x)G(x)\ m(dx) + \int_a^b F(x)g(x)\ m(dx) - F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

$$= | \int_a^b f(x)[G(x)-G_*(x)]\ m(dx) + \int_a^b [F(x)-F^*(x)]g(x)\ m(dx) |$$

$$\leq \int_a^b |f(x)|\ |G(x) - G_*(x)|\ m(dx)$$

$$+ \int_a^b |F(x) - F^*(x)|\ |g(x)|\ m(dx)$$

$$\leq \varepsilon/(H(b)+1) \int_a^b [|f(x)| + |g(x)|]\ m(dx)$$

$$= \varepsilon\,[H(b)] \,/\, (H(b)+1) < \varepsilon .$$

De ceci et de (2) nous obtenons

$$\Big| \int_a^b f(x)G(x)\ m(dx) + \int_a^b F(x)g(x)\ m(dx)$$

$$- F(b)G(b) - F(a)G(a)\Big| < \varepsilon .$$

Le premier membre de cette inégalité est un nombre positif fixé et est inférieur à un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il doit donc être nul, ce qui prouve le théorème.

■

Grâce à ce théorème, nous pouvons établir une forme légèrememnt améliorée du théorème d'intégration par substitution. Avant de la démontrer, il est utile de considérer le cas particulier suivant:

Lemme 7.4

Soit B un intervalle d'extrémités a et b. Si f est intégrable sur B et F est une intégrale définie de f, alors pour chaque entier $n > 0$

$$(5) \qquad \int_a^b F(u)^n f(u)\ m(du) = (F(b)^{n+1} - F(a)^{n+1}) \,/\, (n+1)$$

Démonstration:

Si f était continue, la conclusion du lemme suivrait du théorème II.6.1 de substitution avec $f(x) = x^n$ et $g(x) = F(x)$. Le point important de ce lemme est que nous n'imposons pas à f d'être continue mais simplement d'être intégrable. L'existence de l'intégrale (5) suit du théorème 5.4, puisque F^n est bornée et continue, elle est intégrable sur chaque intervalle borné.

Nous allons raisonner par récurrence. Si nous posons $(F(u))^0 = 1$ pour tout u, la conclusion est immédiate pour n = 0, puisque (5) est une partie de la définition de l'intégrale indéfinie. Supposons que (5) est vraie pour n = k et montrons que cela le reste pour n = k+1. Définissons les fonctions

$$g(x) = F(x)^k f(x), \quad G(x) = \int_a^x g(x)\ m(dx)$$

Par application du théorème 9.3, nous avons, pour chaque $x \in [a,b]$,

$$(6) \quad \int_a^x F(u)^{k+1} f(u)\ m(du)$$

$$= \int_a^x F(u) g(u)\ m(du).$$

$$= F(x)G(x) - F(a)G(a) - \int_a^x f(u)G(u)\ m(du).$$

Mais par hypothèse de récurrence, l'égalité (5) est vérifiée pour n = k, donc

$$(7) \quad G(x) = [F(x)^{k+1} - F(a)^{k+1}]\ /(k+1).$$

Comme G(a) = 0, (6) et (7) impliquent

$$\int_a^x F(u)^{k+1} f(u)\ m(du) = F(x)^{k+2}/(k+1) - F(x)F(a)^{k+1}/(k+1)$$

$$- 1/(k+1) \int_a^x F(u)^{k+1} f(u) \; m(du)$$

$$+ \; F(a)^{k+1}(F(x)-F(a))/(k+1)$$

$$= (F(x)^{k+2} - F(a)^{k+2})/(k+1)$$

$$- 1/(k+1) \int_a^x F(u)^{k+1} f(u) \; m(du)$$

En faisant passer l'intégrale du membre de droite à celui de gauche et en multipliant les deux membres par $(k+1)/(k+2)$, nous obtenons (5) pour $n = k+1$. Donc, par récurrence, (5) est vérifiée pour tout entier $n > 0$.

■

Dans le théorème suivant (théorème d'intégration par substitution), nous supposons que f est une fonction continue sur un intervalle compact $[\alpha,\beta]$. Elle vérifie alors le théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions continues par des polynômes qui dit que pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver un polynôme p tel que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [\alpha,\beta]$.

<u>Théorème 7.5</u>

Soient f une fonction continue sur un intervalle compact $[\alpha,\beta]$, $\mathring{g}$ une fonction intégrable sur un intervalle B non nécessairement borné d'extrémités a et b et g une intégrale indéfinie de $\mathring{g}$ à valeurs dans $[\alpha,\beta]$. Alors,

$$(8) \quad \int_a^b f(g(u))\mathring{g}(u) \; m(du) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \; m(dx).$$

Démonstration:

Si nous posons $y^0 = 1$ même si $y = 0$, pour chaque entier $n > 0$, nous avons, d'après le lemme 7.4,

$$\int_a^b g(u)^n \dot{g}(u) \; m(du) = (g(b)^{n+1} - g(a)^{n+1}) \; / \; (n+1).$$

et en appliquant le théorème fondamental,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} x^n \; m(dx) = x^{n+1}/(n+1) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = (g(b)^{n+1} - g(a)^{n+1})/(n+1)$$

Dès lors,

$$(9) \quad \int_a^b g(u)^n g(u) \; m(du) = \int_{g(a)}^{g(b)} x^n \; m(dx)$$

Si f est un polynôme, c'est-à-dire $f(x) = \sum_{m=0}^{k} a_n x^n$, en multipliant les deux membres de (9) par a_n et en sommant sur $n = 1, 2, \ldots, k$, nous obtenons (8) pour le polynôme f.

Soit maintenant un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Puisque $\dot{g}$ est intégrable de a à b, sa valeur absolue l'est aussi. Définissons un $\varepsilon' > 0$ par

$$= \varepsilon' / \; (\int_a^b |\dot{g}(u)| \; m(du) + \beta - \alpha + 1).$$

Par le théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions continues par un polynôme, on peut trouver un polynôme p tel que pour chaque $x \in [\alpha,\beta]$, $|f(x)-p(x)| < \varepsilon'$. Nous savons déjà que si nous remplaçons f par p dans (8), la différence entre les deux membres de (8) est nulle, donc,

$$(10) \quad |\int_a^b f(g(u))\dot{g}(u) \; m(du) - \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \; m(dx)|$$

$$= | \int_a^b [f(g(u))\dot{g}(u) - p(g(u))\dot{g}(u)] \; m(du)$$

$$- \int_{g(a)}^{g(b)} [f(x) - p(x)] \, m(dx) \, |$$

$$\leq \int_a^b |f(g(u))-p(g(u))| \, |\dot{g}(u)| \, m(du)$$

$$+ \, \left| \int_{g(a)}^{g(b)} |f(x)-p(x)| \, m(dx) \right|$$

$$\leq \varepsilon' \int_a^b \dot{g}(u) \, m(du) + \varepsilon' |g(b)-g(a)|.$$

Puisque $g(a)$ et $g(b)$ sont dans $[\alpha,\beta]$, $|g(b)-g(a)| \leq \beta-\alpha$. D'après (10) et la définition de ε', le membre de gauche de (10) est inférieur à ε. Mais le membre de gauche de (10) est un nombre positif, inférieur à ε, il doit donc être nul, ce qui termine la preuve.

■

§8. Le théorème de convergence dominée

Nous avons déjà prouvé un théorème de passage à la limite sous le signe intégrale, le théorème 4.2 de convergence monotone. De ce théorème, nous pouvons déduire assez facilement le corollaire suivant:

> Si b, f_0, f_1, f_2, ..., sont des fonctions réelles définies sur une partie $B \subset \mathbb{R}$ telles que
>
> i) b, f_1, f_2, ..., sont intégrables sur B;
>
> ii) $| f_n(x) | \leq b(x)$ pour tout $x \leq B$ et tout entier $n > 0$;
>
> iii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ pour tout $x \in B$;
>
> iv) la suite f_1, f_2, ..., est soit croissante, soit décroissante; alors, f_0 est intégrable sur B et
> $\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\ m(dx) = \int_B f_0(x)\ m(dx)$.

Démonstration:

De l'hypothèse ii), nous tirons $-b \leq f_n \leq b$ pour tout n, donc, d'après le corollaire II.2.2,

$$-\int_B b(x)\ m(dx) \leq \int_B f_n(x)\ m(dx) \leq \int_B b(x)\ m(dx)$$

Ainsi, les intégrales des f_n sont bornées. Puisque les autres hypothèses du théorème 4.2 ont été supposées vérifiées, la conclusion du corollaire suit directement de ce théorème 4.2.

■

Si nous supprimons l'hypothèse iv), la conclusion du corollaire est encore vraie. Le théorème résultant est appelé théorème de convergence dominée:

Théorème 8.1 (théorème de convergence dominée)

> Soient b, f_0, f_1, f_2, f_3, ..., des fonctions réelles définies sur une partie $B \subset R$ telles que
>
> i) b, f_1, f_2, ..., sont intégrables sur B;
>
> ii) $| f_n(x) | \leq b(x)$ pour tout $x \in B$ et tout entier $n > 0$;
>
> iii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ pour tout $x \in B$.
>
> Alors, f_0 est intégrable sur B et
>
> $$\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\ m(dx) = \int_B f_0(x)\ m(dx).$$

Démonstration:

Pour chaque entier $n > 0$ et chaque m qui est soit l'infini, soit $m \geq n$, nous définissons une fonction $g_{n,m}$ sur B par

(1) $g_{n,m}(x) = \inf \{f_j(x) : n \leq j < m\}$, $x \in B$.

Par hypothèse, pour tout $x \in B$, les nombres $f_j(x)$ appartiennent à l'intervalle fermé $[-b(x), b(x)]$, ainsi, d'après (1)

(2) $-b(x) \leq g_{n,m}(x) \leq b(x)$.

Si $q > p \geq n$, $g_{n,q}(x) = \inf \{f_j(x)) : n \leq j < q\}$. Ainsi, $g_{n,q}(x)$ est une borne inférieure pour le sous-ensemble $\{f_j(x) : n \leq j < p\}$ et par conséquent, elle ne peut dépasser la plus grande borne inférieure de ce sous-ensemble, à savoir, $g_{n,p}(x)$, c'est-à-dire

(3) si $n \leq p < q$, $g_{n,q}(x) \leq g_{n,p}(x)$.

Si n est un entier positif, $x \in B$ et $\varepsilon > 0$, d'après (1), il existe un entier k tel que $k \geq n$ et $f_k(x) < g_{n,\infty}(x) + \varepsilon$. Alors, pour tout entier $m > k$, par application de (1) et de (3)

$$g_{n,\infty}(x) \leq g_{n,m}(x) \leq f_k(x) < g_{n,\infty}(x) + \varepsilon .$$

Donc, pour chaque $x \in B$,

(4) $\lim_{m\to\infty} g_{n,m}(x) = g_{n,\infty}(x)$.

Pour chaque entier $m > 0$, $m > n$, la fonction $g_{n,m}$ est intégrable sur B, d'après le corollaire 3.4. Ceci, (2), (3) et (4) montrent que pour tout entier $n > 0$, les hypothèses du corollaire précédent sont vérifiées avec $f_0, f_1, f_2, \ldots$ remplacés par $g_{n,}$, $g_{n,n}, g_{n,n+1}, \ldots$. Donc, en utilisant ce corollaire, $g_{n,}$ est intégrable sur B.

Si $q > n$ et $x \in B$, $g_{n,\infty}(x) = \inf\{f_j(x)): j \geq n\}$. Alors, $g_{n,\infty}(x)$ est une borne inférieure du sous-ensemble $\{f_j(x): j \geq q\}$ et elle ne peut dépasser la plus grande borne inférieure $g_{q,\infty}(x)$ de ce sous-ensemble. Donc, si $q > n$, $g_{q,\infty} \geq g_{n,\infty}$ et les fonctions $g_{n,\infty}$, $n = 1, 2, \ldots$ forment une suite croissante.

Si $x \in B$ et $\varepsilon > 0$, alors, puisque les fonctions $f_n(x)$ convergent vers $f_0(x)$, il existe un n' tel que

(5) si $j > n'$, alors $f_0(x) - \varepsilon/2 < f_j(x) < f_0(x) + \varepsilon/2$

Donc, si $n > n'$, l'inégalité de (5) est vérifiée pour tout $j \geq n$, d'où

$$(6) \quad f_0(x) - \varepsilon < f_0(x) - \varepsilon/2 \leq \inf\{f_j(x): j \geq n\}$$
$$= g_{n,\infty}(x) \leq f_n(x) < f_0(x) + \varepsilon/2.$$

C'est-à-dire, pour tout $x \in B$

(7) $\lim_{n\to\infty} g_{n,\infty}(x) = f_0(x)$

Puisque les $g_{n,\infty}$ forment une suite croissante de fonctions intégrables et puisque (2) et (7) sont vérifiées, nous pouvons appliquer le corollaire précédent avec les f_n remplacées par les $g_{n,\infty}$. Nous en déduisons que f_0 est intégrable sur B, et

$$(8) \quad \lim_{n\to\infty} \int_B g_{n,\infty}(x)\ m(dx) = \int_B f_0(x)\ m(dx).$$

Nous définissons maintenant d'autres fonctions $h_{n,m}$ par

$$(9) \quad h_{n,m}(x) = \sup\{f_j(x) : n \leq j < m\} \quad .$$

Nous pouvons faire la même discussion que précèdemment en inversant le sens des inégalités. Nous trouvons alors que les $h_{n,m}$ vérifient une égalité analogue à (8), à savoir,

$$(10) \quad \lim_{n\to\infty} \int_B h_{n,\infty}(x) \; m(dx) = \int_B f_0(x) \; m(dx).$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. D'après (8), il existe un entier n' tel que si n > n',

$$(11) \quad \int_B g_{n,\infty}(x) \; m(dx) > \int_B f_0(x) \; m(dx) - \varepsilon \; .$$

De même, d'après (10), on peut trouver un n" tel que si n > n",

$$(12) \quad \int_B h_{n,\infty}(x) \; m(dx) < \int_B f_0(x) \; m(dx) + \varepsilon \; .$$

Si n > max (n',n"), (11) et (12) sont toutes deux vérifiées et de (1) et (9),

$$g_{n,\infty}(x) \leq f_n(x) \leq h_{n,\infty}(x) ; \; x \in B$$

ainsi,

$$(13) \quad \int_B g_{n,\infty}(x) \; m(dx) \leq \int_B f_n(x) \; m(dx) \leq \int_B h_{n,\infty}(x) \; m(dx)$$

Les inégalités (11), (12) et (13) montrent que si n > max (n',n"),

$$\int_B f_0(x) \; m(dx) - \varepsilon < \int_B f_n(x) \; m(dx) < \int_B f_0(x) \; m(dx) + \varepsilon$$

c'est-à-dire que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x) \; m(dx) = \int_B f_0(x) \; m(dx)$$

■

Le théorème de convergence dominée peut souvent être utilisé là où le théorème 4.2 de convergence monotone ne peut l'être. Le théorème principal du paragraphe suivant est un exemple d'une telle situation.

Nous pouvons comparer le théorème 8.1 de convergence dominée au théorème 4.1 qui demande la convergence uniforme des fonctions f_n. Considérons un intervalle borné $B \subset R$ et une suite de fonctions f_1, f_2, ... intégrables sur B et convergeant vers une fonction f en chaque point de B. Pour utiliser le théorème 4.1, il nous faut vérifier que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $n(\varepsilon)$ tel que si $n \geq n(\varepsilon)$

(14) $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$, pour tout $x \in B$.

Par contre, pour appliquer le théorème 8.1, il suffit de trouver au moins un $\varepsilon > 0$ tel que (14) soit vérifiée. Car alors, nous avons que

$| f_n(x) - f_m(x) | < 2 \varepsilon$ pour tout $m \geq n(\varepsilon)$ et $n \geq n(\varepsilon)$

c'est-à-dire que pour $n \geq n(\varepsilon)$

$| f_n(x) | \leq | f_{n(\varepsilon)}(x) | + 2 \varepsilon$, $x \in B$.

Le membre de droite de cette inégalité est intégrable sur B, il joue donc le rôle de b dans les hypothèses du théorème 8.1. Donc, le théorème 8.1 est plus commode à utiliser que le théorème 4.1

§9. Dérivation sous le signe intégrale.

Supposons que f est une fonction réelle $(x,\alpha) \mapsto f(x,\alpha)$ définie pour tout $x \in B$ où $B \subset R$ et pour tout α de l'intervalle $]\alpha',\alpha''[$; c'est-à-dire f est une fonction définie sur $B \times]\alpha',\alpha''[$. Si pour chaque $\alpha \in]\alpha',\alpha''[$, la fonction $x \mapsto f(x,\alpha)$ est intégrable sur B, alors pour de tels α, nous pouvons définir $F(\alpha)$ par

$$F(\alpha) = \int_B f(x,\alpha)\, m(dx).$$

Supposons que pour tout $x \in B$, f admet une dérivée partielle par rapport à α que nous notons f_α, c'est-à-dire que pour chaque $\alpha \in]\alpha',\alpha''[$, la limite

$$f_\alpha(x,\alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} (f(x,\beta)-f(x,\alpha)) / (\beta-\alpha) \text{ existe.}$$

L'objet de ce paragraphe est de montrer que sous certaines conditions, nous pouvons trouver la dérivée de F en calculant d'abord la dérivée partielle de f par rapport à α et en intégrant, ensuite, cette dérivée partielle.

<u>Théorème 9.1</u>

Soient B un ensemble de R et A un intervalle ouvert de R. Soit f une fonction réelle $(x,\alpha) \mapsto f(x,\alpha)$ définie pour tout $x \in B$ et tout $\alpha \in A$ telle que

i) pour chaque x et α, la dérivée partielle

$$f_\alpha(x,\alpha) = \partial f(x,\alpha)) / \partial\alpha \text{ existe;}$$

ii) pour chaque $\alpha \in A$, l'intégrale

$$F(\alpha) = \int_B f(x,\alpha)\, m(dx) \text{ existe finie.}$$

En outre, s'il existe une fonction b intégrable sur B et telle que pour tout $x \in B$ et tout $\alpha \in A$,

| $f_\alpha(x,\alpha)$ | $\leq b(x)$, alors F est dérivable sur A et

(1) $\quad DF(\alpha) = \int_B f_\alpha(x,\alpha)\ m(dx)$.

Démonstration:

Soit $\alpha \in A$ et α_1, α_2, ... une suite de points de A, $\alpha_i \neq \alpha$ pour tout $i \in N^*$, convergeant vers α quand $n \to \infty$.
Pour simplifier les notations, nous posons

$$q_n(x) = [f(x,\alpha_n) - f(x,\alpha)] / (\alpha_n - \alpha).$$

D'après la définition de F, nous avons alors

$$(2) \quad [F(\alpha_n)-F(\alpha)] / (\alpha_n-\alpha) = \int_B q_n(x)\ m(dx).$$

Par application du théorème de la valeur moyenne, pour chaque $x \in B$, il existe un nombre $\alpha(x)$ compris entre α et α_n tel que $q_n(x) = f_\alpha(x,\alpha(x))$.
Ce qui implique que $|\ q_n(x)\ | \leq b(x)$, $x \in B$. De plus, la définition de la dérivée entraîne que $\lim_{n\to\infty} q_n(x) = f_\alpha(x,\alpha)$ pour chaque $x \in B$. Ainsi, en appliquant le théorème 8.1 de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_B q_n(x)\ m(dx) = \int_B f_\alpha(x,\alpha)\ m(dx)$$

En combinant ce résultat avec (2), nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} (F(\alpha_n)-F(\alpha)) / (\alpha_n-\alpha) = \int_B f_\alpha(x,\alpha)\ m(dx)$$

Nous venons donc de montrer que f_α est intégrable sur B et que pour chaque suite α_1, α_2, α_3, ... de points de A différents de α convergeant vers α, la limite de $[F(\alpha_n)-F(\alpha)] / (\alpha_n-\alpha)$ existe et est égale au membre de droite de (1). Ce qui implique que

$$\lim_{\beta\to\alpha} (F(\beta)-F(\alpha)) / (\beta-\alpha) = \int_B f_\alpha(x,\alpha)\ m(dx)$$

Ceci revient à dire que F admet une dérivée en α et que (1) est vérifiée.

■

Le théorème 9.1 admet la généralisation suivante pour le cas où les bornes d'intégration sont également variables.

<u>Théorème 9.4</u>

Supposons vérifiées les hypothèses du théorèmes 9.1 avec B un intervalle de R. Si g et h sont des fonctions à valeurs dans B, dérivables sur A, alors la fonction $\alpha \mapsto \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x,\alpha)\ m(dx)$ est dérivable sur A et sa dérivée est

$$f(h(\alpha),\alpha)Dh(\alpha) - f(g(\alpha),\alpha)Dg(\alpha) + \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f_\alpha(x,\alpha)\ m(dx).$$

La preuve est basée sur la même idée que celle utilisée pour démontrer le théorème correspondant pour l'intégrale de Riemann.

§10. Ensembles de mesure nulle.

Nous avons défini, au paragraphe 1 du premier chapitre, la mesure m d'un intervalle de R et nous avons établi, au quatrième paragraphe de ce chapitre, que la mesure d'un intervalle borné ou non de R valait l'intégrale de jauge de sa fonction caractéristique. Nous allons, à présent, étendre ce concept de mesure aux ensembles de R.

<u>Définition 10.1</u>

> Soit B un ensemble de R. B est dit <u>mesurable</u> si et seulement si sa fonction caractéristique 1_B possède une intégrale (finie ou infinie) sur R. <u>La mesure de B</u> est définie par $m(B) = \int_R 1_B(x)\ m(dx)$.

Dans ce paragraphe, nous n'allons étudier que les ensembles de mesure nulle. Ces ensembles sont assez importants dans la théorie d'intégration car ils n'ont aucune influence sur le calcul de l'intégrale. En effet, changer l'intégrant sur un ensemble de mesure nulle n'affecte pas la valeur de l'intégrale comme nous allons le démontrer dans le théorème suivant.

<u>Théorème 10.2</u>

> Soit f une fonction réelle définie sur R et admettant une intégrale (finie ou infinie) sur R. Si g est une fonction réelle définie sur R et égale à f en tout point de R sauf sur un ensemble de mesure nulle, alors

g admet aussi une intégrale sur R qui est égale à celle de f sur R.

Démonstration:

Supposons d'abord que l'intégrale de f est finie. Définissons $h = g-f$ et pour chaque entier $n > 0$, $h_n = \min(|h|, n)$. Si E est l'ensemble de mesure nulle sur lequel $f(x) \neq g(x)$, nous avons

(1) $h_n(x) \leq n1_E(x)$, $x \in R$;

car si $x \in E$, h_n est au plus n et le membre de droite de (1) est n, alors que si $x \notin E$, $h(x) = 0$ donc $h_n = 0$. Par hypothèse, le membre de droite de (1) a une intégrale nulle, donc, d'après le corollaire II.3.3, le membre de gauche de (1) a aussi une intégrale nulle. Pour chaque $x \in R$, $h_n(x) = |h(x)|$ pour $n > |h(x)|$, ainsi, le membre de gauche converge vers $|h(x)|$ quand $n \to \infty$. Les h_n forment une suite croissante, donc par application du théorème de convergence monotone, l'intégrale de $|h|$ est égale à la limite des intégrales des h_n qui est nulle. Puisque $|h|$ a une intégrale, $f+|h|$ et $f-|h|$ sont intégrables et comme $h = g-f$, $f-|h| \leq g \leq f+|h|$. Or, $f-|h|$ et $f+|h|$ ont la même intégrale, donc, d'après le corollaire II.3.3, g possède aussi la même intégrale qui est l'intégrale de f. Nous avons donc prouvé le théorème dans le cas où f est intégrable.

Si l'intégrale de f est infinie, d'après la définition 4.3, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions intégrables convergeant partout vers f et dont les intégrales tendent vers l'infini. Soit g égale à f sauf sur un ensemble de mesure nulle. Pour chaque n, nous définissons g_n par

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{si } x \in R \setminus E \\ g(x), & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

D'après ce qui a déjà été démontré, pour chaque n, la fonction g_n est intégrable sur R et a la même intégrale que f_n. Pour chaque $x \in R \setminus E$, la suite (g_n) est la même que (f_n), donc, elle est croissante et sa limite est $f(x) = g(x)$. Pour $x \in E$, la suite (g_n) a tous ces termes égaux à $g(x)$. Elle n'est donc pas décroissante et sa limite est $g(x)$. Les fonctions g_i, $i = 1, \ldots, n$ forment une suite croissante de fonctions intégrables dont les intégrales convergent vers l'infini et elles convergent partout vers g. Ainsi, par définition, g possède une intégrale infinie qui est l'intégrale de f.
Similairement, si l'intégrale de f vaut $-\infty$, il en est de même pour l'intégrale de g.

■

Rappelons la définition d'un ensemble dénombrable.

Définition 10.3

> On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une suite (a_n) dans laquelle chaque élément de E apparaît une et une seule fois.

L'ensemble des entiers positifs et celui de tous les rationnels sont dénombrables.

Le théorème suivant donne trois procédés pour reconnaître qu'un ensemble est de mesure nulle. Les points ii) et iii) nous permettront de manipuler ces ensembles plus facilement.

Théorème 10.4

> Soit E un ensemble de R.
>
> i) Si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une collection dénombrable d'ensembles E(1), E(2), E(3), ..., chacun de mesure finie telle que E soit contenu dans l'union des E(i) et la somme des mesures des E(i) plus petite

que ε, alors $m(E) = 0$.

ii) Si E est contenu dans un esemble $E(1)$ de mesure nulle, alors $m(E) = 0$.

iii) Si E est l'union dénombrables d'ensembles, chacun de mesure nulle, alors $m(E) = 0$.

Démonstration:

Dans i), nous pouvons supposer qu'il existe une suite infinie d'ensembles $E(1)$, $E(2)$, $E(3)$, ... vérifiant les hypothèses, puisque s'il y en a un nombre fini, soit n, nous pouvons définir $E(j)$ comme étant l'ensemble vide pour $j > n$ sans bouleverser les hypothèses. Pour chaque entier $n > 0$, nous définissons

$$S_n = \sup (1_{E(1)}, \ldots, 1_{E(n)}).$$

Quand $n \to \infty$, S_n croît, mais elle ne dépasse jamais 1, elle approche donc une fonction limite à valeurs finies que nous appelons h. Si $x \in E$, x est dans l'union des $E(i)$, il existe donc un k tel que $x \in E(k)$. Alors $1_{E(k)}(x) = 1$ et $S_n(x) = 1$ pour tout $n \geq k$. Ce qui entraîne

$$(2) \quad h(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1 \geq 1_E(x).$$

Si $x \notin E$, le membre de droite s'annule et l'inégalité est encore vérifiée. Puisque $S_n \leq 1_{E(1)} + \ldots + 1_{E(n)}$, en intégrant sur R, nous obtenons

$$\int_R S_n(x)\, m(dx) \leq m(E(1)) + \ldots + m(E(n)).$$

Le membre de droite est plus petit que ε, d'après le théorème de convergence monotone, h est alors intégrable sur R et

$$\int_R h(x)\, m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_R S_n(x)\, m(dx).$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} [\, m(E(1)) + \ldots + m(E(n)) \,]$$

$$< \varepsilon .$$

D'après (2) et le lemme II.3.1 avec g = 0 et J = 0, nous voyons que l'intégrale de 1_E sur R existe et vaut 0, par conséquent, m(E) = 0. i) est ainsi prouvé.

Si E est contenu dans l'union dénombrable de E(1), ... chacun de mesure nulle, alors pour chaque $\varepsilon > 0$, les conditions de i) sont vérifiées pour ces E(i), donc, d'après i), m(E) = 0. En particulier, si les ensembles E(i) se réduisent à un seul ensemble E(1), nous obtenons ii). Si l'ensemble E n'est pas seulement contenu dans l'union des E(i) mais est cette union, nous obtenons iii).

■

On dit souvent qu'une propriété est vraie " presque partout " si elle est vraie pour tout point sauf sur un ensemble de mesure nulle. On note " presque partout " par "p.p.". Nous appelons alors équivalentes deux fonctions f,g définies sur le même ensemble et telles que f(x) = g(x) p.p. dans cet ensemble. Ainsi, le théorème 10.2 peut s'énoncer comme suit: si f a une intégrale et si g est équivalente à f, alors g possède aussi une intégrale qui est égale à celle de f. D'après le lemme I.3.2, chaque ensemble réduit à un singleton est de mesure nulle. D'après le théorème 10.4, chaque ensemble dénombrable est de mesure nulle. D'après le théorème 10.2, chaque fonction définie sur un ensemble B et nulle sauf sur un sous-ensemble dénombrable de B possède une intégrale nulle sur B.

Le théorème 10.2 admet une réciproque.

Théorème 10.5

> Si f est une fonction positive sur un ensemble B et si son intégrale sur B est nulle, alors f(x) = 0 p.p. dans B.

Démonstration:

Soit n un entier positif. Puisque l'intégrale de f est nulle, il en est de même pour nf. Définissons $f_n(x)$ par $f_n(x) = \min (nf(x), 1)$ pour tout x. D'après le corollaire II.3.3, l'intégrale de f_n est nulle.

Nous allons prouver que pour tout x, $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1_E(x)$ où E est l'ensemble des x pour lesquels $f(x) > 0$. Les inégalités sont évidentes car nf(x) croît avec n. Si $x \in E$, $f(x) > 0$ et pour tout $n > 1/f(x)$, nous avons $nf(x) > 1$ et $f_n(x) = 1$ donc, $f_n(x) = 1_E(x)$. Si $x \notin E$, $f(x) = 0$, ainsi $nf(x) = 0$ pour tout n et $f_n(x) = 0$ pour tout n. Dès lors, la limite des $f_n(x)$ est nulle et vaut $1_E(x)$. Par application du théorème de convergence monotone, 1_E est intégrable et son intégrale est la limite des intégrales des f_n qui est nulle. Donc, $m(E) = 0$ c'est-à-dire $f(x) = 0$ p.p. dans B.

■

Bien que nous parlions d'équivalence de fonctions réelles, nous pouvons étendre cette idée à d'autres espaces. En effet, deux fonctions f,g définies sur R et à valeurs dans un espace quelconque sont équivalentes si $f(x) = g(x)$ pour tout x sauf sur un ensemble de mesure nulle. L'équivalence est une relation d'équivalence; en effet, pour tout f, f est équivalente à elle-même; si f est équivalente à g, g est équivalente à f; et enfin, si f est équivalente à g et g équivalente à h, f est équivalente à h. D'après le théorème 10.2, dans chaque classe de fonctions réelles équivalentes entre elles, ou bien aucune fonction n'est intégrable, ou bien elles sont toutes intégrables et ont la même intégrale. Ceci nous permet d'étendre le concept d'intégrale à certaines fonctions à valeurs dans $\overline{R}$. Soit $f: R \to \overline{R}$ et si elle prend des valeurs finies en tout point sauf sur un ensemble N de mesure nulle, il existe un nombre infini de fonctions réelles g définies sur R qui lui sont équivalentes; par exemple, nous pourrions prendre $g(x) = 0$ sur N et $g(x) = f(x)$ ailleurs. De telles fonctions sont équivalentes entre elles et d'après le théorème 10.2, ou bien aucune n'a d'intégrale, ou bien elles ont toutes la même. Dans le premier cas, nous disons que f n'est pas intégrable. Dans le second, nous étendons l'idée d'intégrabilité en disant que f est intégrable et nous définissons son intégrale comme étant la valeur commune des intégrales des fonctions réelles équivalentes à f. Le théorème 10.2 reste valable pour ces intégrales aussi. Tous les théorèmes des chapitres I, II et III peuvent avoir des versions moins restrictives; par exemple, le corollaire II.2.2 peut être légèrement amélioré comme suit.

Théorème 10.6

Soit B un sous-ensemble de R. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions à valeurs dans $\overline{R}$ et intégrables sur B telles que $f_1(x) \leq f_2(x)$ p.p. dans B, alors

$$(3) \quad \int_B f_1(x)\ m(dx) \leq \int_B f_2(x)\ m(dx)$$

Démonstration:

Soient N_1 l'ensemble des $x \in B$ pour lesquels $f_1(x) = \pm\infty$, N_2 l'ensemble sur lequel $f_2(x) = \pm\infty$ et N_3 l'ensemble sur lequel $f_1(x) > f_2(x)$. Par hypothèse, ces ensembles sont de mesure m nulle et donc leur union aussi. Pour $i = 1, 2$, nous définissons g_i par

$$g_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{pour tout } x \in B \setminus N \\ 0, & \text{pour tout } x \in \overline{R} \setminus (B \setminus N). \end{cases}$$

Alors, g_1 et g_2 sont des fonctions qui prennent des valeurs finies. De plus, elles sont respectivement équivalentes à $(f_1)_B$ et $(f_2)_B$ et $g_1(x) \leq g_2(x)$ pour tout $x \in \overline{R}$. D'après le corollaire II.2.2,

$$(4) \quad \int_B g_1(x)\ m(dx) \leq \int_B g_2(x)\ m(dx).$$

Par application du théorème 10.2 généralisé aux fonctions à valeurs dans $\overline{R}$, les deux membres de (4) sont égaux aux membres correspondant de (3), donc (3) est vérifiée.

■

Le fait d'étendre l'idée d'intégrabilité aux fonctions à valeurs dans $\overline{R}$ peut être très utile. En effet, grâce à cela, nous pouvons établir des formes plus générales de certains théorèmes, notamment, le théorème de convergence monotone.

<u>Théorème 10.7 (Théorème de convergence monotone presque partout)</u>

Soient (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans $\overline{R}$, intégrables sur un sous-ensemble $B \subset R$ telles que ou bien

(4) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots$ p.p. dans B,

ou bien

$f_1(x) \geq f_2(x) \geq f_3(x) \geq \ldots$ p.p. dans B.

Si f est une fonction définie sur B telle que

(5) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ p.p. dans B,

alors f est intégrable sur B si et seulement si les intégrales de f_n sur B forment un ensemble borné de réels. Dans ce cas,

(6) $\int_B f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\ m(dx)$

Démonstration:

Supposons que (4) est vérifiée p.p. dans B. Soit N_0 l'ensemble des points x de B pour lesquels (4) n'est pas vraie; pour chaque n, considérons N_n l'ensemble des points x de B pour lesquels $f_n(x) = \infty$ ou $-\infty$ et soit N_L l'ensemble des points x de B pour lesquels (5) n'est pas vérifiée. Tous ces ensembles sont de mesure nulle par hypothèse, donc leur union N est aussi de mesure nulle. Pour chaque n, nous définissons la fonction g_n par

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{si } x \in B \setminus N \\ 0, & \text{si } x \in N \end{cases}$$

et la fonction g par

$$g(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} g_n(x), & \text{si } x \in B \setminus N \\ 0, & \text{si } x \in N. \end{cases}$$

Alors, les g_n sont des fonctions réelles, $g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots$ pour tout $x \in B$ et les $g_n(x)$ convergent vers $g(x)$ pour tout $x \in B$. Nous ne pouvons pas encore appliquer le théorème 4.2 car nous ne savons pas si g est une fonction réelle. Il est clair qu'elle ne vaut nulle part $-\infty$ mais elle peut prendre la valeur $+\infty$ en certains points.

Il suit immédiatement du théorème 10.6 que si f est intégrable, les f_n ont des intégrales bornées. Supposons alors que les intégrales des g_n sont bornées. Comme dans la démonstration du théorème 4.2, il est suffisant de prouver la conclusion quand $g_n \geq 0$; le cas général suit de ceci en soustrayant g_1 de chaque terme de la suite. Soient M une borne supérieure pour les intégrales des g_n sur B et E l'ensemble des x de B tels que $g(x) = \infty$. Nous devons montrer que $m(E) = 0$. Pour chaque entier $j > 0$, les fonctions g_n/j, $n = 1, 2, \ldots$, sont intégrables sur B et donc, les fonctions $\min(g_n/j\ , 1)$ le sont aussi d'après le corollaire 3.2. De plus,

$$(7) \quad \int_B \min(g_n(x)/j\ , 1)\ m(dx) \leq \int_B (g_n(x)\ /\ j)\ m(dx)$$
$$\leq M/j.$$

Pour chaque j fixé, les fonctions $\min(g_n/j\ , 1)$ forment une suite croissante qui converge vers $\min(g/j\ , 1)$. D'après (7), les intégrales des $\min(g_n/j\ , 1)$ sont bornées, donc, par application du théorème 4.2, $\min(g/j\ , 1)$ est intégrable sur B et

$$(8) \quad \int_B \min(g(x)/j\ , 1)\ m(dx)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_B \min(g_n(x)/j\ , 1)\ m(dx)$$

$\leq M/j$.

Puisque g est positive, les fonctions $\min(g/j\ ,\ 1)$, $j = 1, 2, \ldots$ forment une suite décroissante. D'après (8), leurs intégrales convergent vers 0. Si $x \in B \setminus E$, $g(x)$ est fini, donc pour $j > g(x)$, nous avons $\min(g(x)/j\ ,\ 1) = g(x)/j$ et l'égalité

$$(9)\quad \lim_{n\to\infty} \min(g(x)/j\ ,\ 1) = 1_E(x)$$

est vérifiée, le membre de droite étant nul. Si $x \in E$, $g(x)/j = \infty$ pour tout entier $j > 0$, donc $\min(g(x)/j\ ,\ 1) = 1$ pour tout j et (9) est encore vérifiée. Par application du théorème 4.2, 1_E est intégrable sur B, et d'après (7),

$$\begin{aligned}\int_R 1_E(x)\ m(dx) &= \int_B 1_E(x)\ m(dx)\\ &= \lim_{j\to\infty} \int_B \min(g(x)\ /\ j\ ,\ 1)\ m(dx)\\ &= 0,\end{aligned}$$

et donc $m(E) = 0$.

Nous définissons, à présent, les fonctions h_n et h par

$$h_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{pour tout } x \in B \setminus E\\ 0, & \text{pour tout } x \in E\end{cases}$$

et

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{pour tout } x \in B \setminus E\\ 0, & \text{pour tout } x \in E.\end{cases}$$

Ces fonctions satisfont toutes les hypothèses du théorème 4.2 et les intégrales des h_n sont égales aux intégrales des f_n. Donc, h est intégrable et son intégrale est la limite des intégrales des f_n. Mais h et f ne diffèrent que sur l'ensemble $N \cup E$ de mesure nulle donc, f est aussi intégrable sur B, son intégrale étant égale à l'intégrale de h. Ainsi, (6) est vérifiée.

■

Le théorème 10.7 permet d'étendre l'intégrale comme nous l'avons fait dans la définition 4.3; si f est une fonction réelle définie sur B mais non intégrable sur B et si il existe une suite croissante de fonctions intégrables sur B convergeant partout vers f, nous disons que f a une intégrale sur B qui vaut ∞ . Une définition similaire existe pour les fonctions dont les intégrales valent $-\infty$. Si nous utilisons cette extension, le théorème de convergence monotone prend une forme facilement mémorisable.

Théorème 10.8

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur un ensemble B et croissante (ou décroissante) sur un ensemble $B \setminus E$ où $m(E) = 0$. Si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ p.p. dans B, alors f admet une intégrale sur B et

$$\int_B f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n\ (x)\ m(dx).$$

Le théorème de convergence dominée peut aussi être généralisé.

Théorème 10.9

Soient b, f_0, f_1, f_2, ... des fonctions définies sur une partie $B \subset R$ et à valeurs dans $\overline{R}$ telles que

i) b, f_1, f_2, ... sont intégrables sur B;

ii) pour n = 1, 2, 3, ..., $|f_n(x)| \leq b(x)$ p.p. dans B;

iii) $\lim_{n\to\infty} f_n\ (x) = f_0(x)$ p.p. dans B.

Alors, f_0 est intégrable sur B et

$$\int_B f_0\ (x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n\ (x)\ m(dx)$$

Démonstration:

Soit N_0 l'ensemble de mesure nulle sur lequel iii) n'est pas vérifiée et pour chaque entier $n > 0$, soit N_n l'ensemble de mesure nulle sur lequel ii) n'est pas vérifiée. Définissons $N = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup \ldots$, il est aussi de mesure nulle. Nous définissons les fonctions b^* et f^*_j par

$$b^*(x) = \begin{cases} b(x), & \text{si } x \in B \setminus N \\ 0, & \text{si } x \in N. \end{cases}$$

et

$$f^*_j(x) = \begin{cases} f_j(x), & \text{si } x \in B \setminus N \\ 0, & \text{si } x \in N. \end{cases}$$

Alors, b^*, f^*_1, f^*_2, ... sont intégrables sur B et ont les mêmes intégrales que b, f_1, f_2, ... puisqu'elles diffèrent de ces fonctions sur un ensemble de mesure nulle. De plus, $f^*_n(x) \to f^*_0(x)$ pour tout $x \in B$ et $|f^*_n(x)| \leq b^*(x)$ pour tout entier $n > 0$ et tout $x \in B$. Par application du théorème 8.1, f^*_0 est intégrable sur B et

$$\int_B f^*_0(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_B f^*_n(x)\ m(dx)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)\ m(dx).$$

Puisque $f_0(x) = f^*_0(x)$ p.p., elle est aussi intégrable sur B et son intégrale vaut celle de f^*.

■

En utilisant les théorèmes de ce paragraphe et du paragraphe 8, nous pouvons prouver une généralisation du théorème fondamental II.5.5

<u>Théorème 10.10</u>

Soit F une fonction lipschitzienne sur un intervalle $[a,b]$ [et admettant une dérivée $DF(x)$ en presque tout x de $[a,b]$]. Si f est une fonction définie sur $[a,b]$ qui coïncide avec DF en presque tout point où DF existe, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x)\ m(dx) = F(b) - F(a).$$

L'hypothèse entre crochets est superflue. Il est possible, mais difficile de montrer que si F est lipschitzienne, elle admet nécessairement une dérivée en presque tout point de $[a,b]$. Cependant, si nous voulons appliquer le théorème 10.10 pour calculer une intégrale, cette hypothèse superflue ne pose aucun problème puisque nous ne pouvons utiliser ce théorème sans savoir ce que vaut $DF(x)$ en presque tout x.

Démonstration:

Pour chaque entier $n > 0$, nous définissons

$x_{n,j} = a+j(b-a)/n,\ j = 0, 1, \ldots, n,$

et s_n la fonction en escalier sur $]a,b]$ qui pour $j = 1, \ldots, n$, prend la valeur constante

$$(10)\quad s_n(x) = [F(x_{n,j}) - F(x_{n,j-1})] / (x_{n,j} - x_{n,j-1})$$

sur l'intervalle $]x_{n,j-1},x_{n,j}]$. Alors,

$$(11)\quad \int_a^b s_n(x)\ m(dx)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{n,j-1}}^{x_{n,j}} [F(x_{n,j}) - F(x_{n,j-1})] / (x_{n,j} - x_{n,j-1})\ m(dx)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} [F(x_{n,j}) - F(x_{n,j-1})] = F(b) - F(a).$$

Comme F est lipschitzienne, il existe un nombre L tel que pour tout entier $n > 0$ et pour $j = 1, \ldots, n$,

$| F(x_{n,j}) - F(x_{n,j-1}) | \le L| x_{n,j} - x_{n,j-1} |.$

Ceci et (10) impliquent que pour tout $x \in]a,b]$, nous avons

$$(12)\quad | s_n(x) | \le L.$$

Par hypothèse, $DF(x)$ existe pour tout $x \in]a,b]$ sauf sur un ensemble N_1 de mesure nulle. L'ensemble N_2 des points $x_{n,j}$, $n = 1, 2, 3, \ldots;\ j = 0, 1, \ldots, n$, est dénombrable, et donc $m(N_2) = 0$. Dès lors, leur union $N = N_1 \cup N_2$ est aussi de mesure nulle. Si $x \in]a,b] \setminus N$, pour chaque entier $n > 0$, il existe un nombre $j(n) \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_{n,j(n)-1} < x < x_{n,j(n)}$.

Ainsi, d'après (10), nous calculons

$$s_n(x)-DF(x) = \left\{\frac{x-x_{n,j(n)-1}}{x_{n,j(n)}-x_{n,j(n)-1}}\right\}\left[\frac{F(x)-F(x_{n,j(n)-1})}{x-x_{n,j(n)-1}} - DF(x)\right]$$

$$+\left\{\frac{x_{n,j(n)}-x}{x_{n,j(n)}-x_{n,j(n)-1}}\right\}\left[\frac{F(x_{n,j(n)})-F(x)}{x_{n,j(n)}-x} - DF(x)\right]$$

Quand $n \to \infty$, les deux expressions entre crochets convergent vers 0 et les facteurs qui les multiplient sont compris entre 0 et 1. Dès lors, le membre de gauche de l'égalité converge vers 0 et

$$(13) \quad \lim_{n\to\infty} s_n(x) = DF(x)$$

pour tout $x \in]a,b]$ sauf sur l'ensemble N dont $m(N) = 0$. D'après (12), (13), (11) et le théorème de convergence dominée, f est intégrable de a à b et

$$\int_a^b f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\ m(dx) = F(b) - F(a).$$

■

§11. Approximation par des fonctions en escalier

La classe des fonctions intégrables au sens de jauge est très riche; elle contient même des fonctions discontinues en tout point de leur domaine de définition. Comme nous allons le voir, toute fonction intégrable peut être approchée aussi bien que l'on veut par une fonction en escalier qui est de structure plus simple; c'est-à-dire que l'intégrale de la différence des deux fonctions est inférieure à .

<u>Théorème 11.1</u>

Soient f une fonction intégrable sur R et $\varepsilon > 0$. Soit γ une jauge sur $\bar{R}$ telle que $\gamma(x)$ est un intervalle borné pour chaque $x \in R$ et telle que pour chaque partition γ- fine $\mathcal{P}$ de R

(1) $\left| S(\mathcal{P}; f_R) - \int_R f(x)\, m(dx) \right| < \varepsilon$.

Si $\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_k, A_k)\}$ est une partition γ- fine de R et si s est la fonction définie sur R qui sur chaque A_i prend la valeur constante $f_R(\bar{x}_j)$, alors s est une fonction en escalier et

(2) $\int_R | f(x) - s(x) |\, m(dx) < 5\varepsilon$.

Démonstration:

Pour chaque $j \in \{1, \ldots, k\}$, si A_1 est non borné, l'intervalle ouvert $\gamma(\bar{x}_j)$ qui contient A_j est non borné, donc, $\bar{x}_j \notin R$ et sur A_j, $f_R(\bar{x}_j) = 0$. Ainsi, s est une fonction en escalier sur R, elle est donc intégrable. Alors, f-s est intégrable sur R, d'après le théorème

II.1.3 et $| f - s |$ est intégrable sur R par application du corollaire 3.3. Dès lors, il existe une jauge γ_1 sur $\overline{R}$ telle que pour chaque partition γ_1- fine $\mathcal{P}'$ de R,

$$(3) \quad | S(\mathcal{P}'; | f - s |_R) - \int_R | f(x) - s(x) | m(dx) < \varepsilon.$$

Pour chaque $x \in \overline{R}$, nous définissons $\gamma^*(x)$ comme étant l'intersection de $\gamma(x)$, $\gamma_1(x)$ et de tous les intervalles $\gamma(\overline{x}_1)$, ..., $\gamma(\overline{x}_k)$ qui contiennent x. C'est une intersection d'un nombre fini d'intervalles ouverts contenant x, c'est donc un intervalle ouvert contenant x. Par conséquent, la fonction $x \mapsto \gamma^*(x)$ est une jauge sur $\overline{R}$. Pour chaque intervalle A_j, j = 1, ..., k, nous choisissons une partition γ^*- fine $\mathcal{P}'_j$ de A_j telle que pour chaque couple $(\overline{x},A) \in \mathcal{P}'_j$, $\overline{x} \in \overline{A}$; ceci est possible d'après le théorème I.4.2. Nous prenons $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}'_k$. Par application du lemme 2.1, cette union est une partition assignée $\mathcal{P}' = \{(\overline{x}'_1,A'_1), \ldots, (\overline{x}'_h,A'_h)\}$ de l'union de A_j qui est en fait R. $\mathcal{P}'$ est telle que $\overline{x}'_i \in \overline{A}'_i$ et A'_i est contenu dans un seul A_j. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, h\}$, nous définissons $j(i) \in \{1, \ldots, k\}$ comme suit: si A'_i est borné, $\overline{x}'_i \in A'_i$ qui est borné et donc $\overline{x}'_i \in R$. Il appartient donc à un seul A_j. Nous définissons j(i) comme étant l'entier j tel que $\overline{x}'_i \in A_j$. Si A'_i est non borné, il existe un seul entier j tel que $A'_i \subset A_j$ et nous prenons j(i) = j.

Nous allons prouver que pour chaque couple $(\overline{x}_{j(i)},A'_i)$, i = 1, ..., h, $\overline{A'_i} \subset \gamma(\overline{x}_{j(i)})$. Supposons d'abord que A'_i est borné. D'après la définition de j(i), $\overline{x}'_i \in A_{j(i)}$ et $\overline{A}_{j(i)} \subset \gamma(\overline{x}_{j(i)})$. Par définition, $\gamma^*(x_i')$ est l'intersection de plusieurs intervalles ouverts dont $\gamma(\overline{x}_{j(i)})$, donc $\gamma^*(x'_i) \subset \gamma(\overline{x}_{j(i)})$. Puisque $\mathcal{P}'$ est γ^*- fine, $\overline{A}'_i \subset \gamma^*(\overline{x}'_i)$ et donc, $\overline{A}'_i \subset \gamma(\overline{x}_{j(i)})$. Supposons maintenant que A'_i est non borné. Alors, d'après la définition de j(i), $A'_i \subset A_{j(i)}$ et $\overline{A}_{j(i)} \subset \gamma(\overline{x}_{j(i)})$ car $\mathcal{P}$ est γ- fine. De ceci, il suit que la partition $\mathcal{P}'' = \{(\overline{x}_{j(1)},A'_1), \ldots, (\overline{x}_{j(h)},A'_h)\}$ est une partition γ- fine de R. Puisque $\mathcal{P}'$ est aussi

γ - fine et (1) est vérifiée pour toute partition γ - fine de R, d'après le théorème 2.4, nous avons

$$(4) \sum_{n=1}^{h} \sum_{i=1}^{h} | f_R(\overline{x}'_n) - f_R(\overline{x}_{j(i)}) | m(A'_n \cap A'_i) < 4\varepsilon .$$

L'intersection $A'_n \cap A'_i$ est vide sauf quand $n = i$, donc (4) implique

$$(5) \sum_{i=1}^{h} | f_R(\overline{x}'_i) - f_R(\overline{x}_{j(i)}) | m(A'_i) < 4\varepsilon .$$

Pour chaque i tel que A'_i est borné, $\overline{x}'_i \in \overline{A'_i}$ où $\overline{A'_i}$ est borné et donc, $\overline{x}'_i \in R$, par conséquent

$s_R(\overline{x}'_i) = s(\overline{x}'_i)$.

Puisque, dans ce cas, $\overline{x}'_i \in A_{j(i)}$ et que s vaut $f(\overline{x}_{j(i)})$ sur $A_{j(i)}$,

$$(6) f_R(\overline{x}_{j(i)}) = s_R(\overline{x}'_i)$$

Pour chaque i tel que A'_i est non borné, d'après la définition de j(i), nous avons $A'_i \subset A_{j(i)}$. Donc, A'_i et $A_{j(i)}$ sont non bornés et les intervalles ouverts $\gamma^*(\overline{x}'_i)$, $\gamma(\overline{x}_{j(i)})$ qui les contiennent sont non bornés. Ceci ne peut se passer que si ni $\overline{x}'_i$, ni $\overline{x}_{j(i)}$ n'est dans R, donc dans ce cas, les deux membres de (6) sont nuls et (6) est à nouveau vérifiée. Si nous portons (6) dans (5) nous obtenons

$$(7) \sum_{i=1}^{h} | f_R(\overline{x}'_i) - s_R(\overline{x}'_i) | m(A'_i) < 4\varepsilon .$$

Mais le membre de gauche de (7) est $S(\mathcal{P}'; | f - s |_R)$, donc (7) et (3) impliquent que (2) est vérifiée.

■

<u>Corollaire</u>

> Pour chaque fonction intégrable au sens de jauge sur R, il existe une suite (Φ_n) de fonctions en escalier telle que
>
> $$\int_R | f(x) - \Phi_n(x) | m(dx) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Corollaire 11.2

Soient f une fonction intégrable sur R et $\varepsilon > 0$.

Soit γ une jauge sur $\bar{R}$ telle que $\gamma(x)$ est borné pour chaque $x \in R$ et telle que pour chaque partition γ - fine $\mathcal{P}$ de R

$$\left| S(\mathcal{P}; f_R) - \int_R f(x)\, m(dx) \right| < \varepsilon .$$

Si $\{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_h, A_h)\}$ est un ensemble de couples tel que les A_j sont disjoints deux à deux et pour $i = 1, \ldots, h$, $\bar{A}_j \subset \gamma(\bar{x}_j)$, alors

$$(8) \quad \sum_{j=1}^{h} \left| f_R(\bar{x}_j)\, m(A_j) - \int_{A_j} f(x)\, m(dx) \right| < 5\,\varepsilon .$$

Démonstration:

Le complémentaire $\bar{R} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_h)$ de l'union des A_j est l'union d'un nombre fini d'intervalles ouverts à gauche disjoints deux à deux. Nous choisissons une partition γ - fine de chacun de ces intervalles et nous prenons l'union de ces partitions que nous notons $\{(\bar{x}_{h+1}, A_{h+1}), \ldots, (\bar{x}_k, A_k)\}$. Alors, l'ensemble $\mathcal{P} = \{(\bar{x}_1, A_1), \ldots, (\bar{x}_k, A_k)\}$ est une partition γ - fine de R, d'après le lemme 2.1.

Nous définissons la fonction s comme dans le théorème 10.1. D'après ce théoème, le corollaire II.2.2, le théorème II.4.1 et le corollaire 3.3,

$$(9) \quad 5\varepsilon > \int_R | f(x) - s(x) |\, m(dx)$$

$$\geq \int_{A_1 \cup \ldots \cup A_h} | f(x) - s(x) |\, m(dx)$$

$$= \sum_{j=1}^{h} \left| \int_{A_j} | f(x) - s(x) |\, m(dx) \right|$$

$$\geq \sum_{j=1}^{h} \left| \int_{A_j} [\, f(x) - s(x)\,]\, m(dx) \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{A_J} f(x)\ m(dx) - \int_{A_J} s(x)\ m(dx) \right| .$$

Mais sur A_J, la fonction s prend la valeur $f_R(\overline{x}_J)$, donc

$$\int_{A_j} s(x)\ m(dx) = f_R(\overline{x}_J)\ m(A_J).$$

Si nous portons ceci dans (9), nous obtenons (8). ∎

Nous allons, à présent, prouver qu'une fonction intégrable peut aussi être approchée par la fonction en escalier qui, sur chaque intervalle d'une partition suffisamment fine, est égale à la valeur moyenne de la fonction sur cet intervalle.

Corollaire 11.3

> Soient f une fonction intégrable sur R et $\varepsilon > 0$.
> Soit γ une jauge sur $\overline{R}$ telle que $\gamma(x)$ est borné pour $x \in R$ et telle que pour chaque partition γ- fine $\mathcal{P}$ de R, $\left| S(\mathcal{P}; f_R) - \int_R f(x)\ m(dx) \right| < \varepsilon$.
>
> Si $\{(\overline{x}_1, A_1), \ldots, (\overline{x}_k, A_k)\}$ est une partition γ- fine de R et si g est la fonction qui sur chaque intervalle borné A_i, $m(A_i) > 0$, prend la valeur
>
> $$g(x) = \left(\int_{A_i} f(x)\ m(dx) \right) / m(A_i)$$
>
> et s'annule ailleurs, alors g est une fonction en escalier et $\int_R |f(x) - g(x)|\ m(dx) < 10\ \varepsilon$.

Démonstration:

Il est évident que g est une fonction en escalier. Soit s définie comme dans le théorème 11.1. D'après ce théorème,

$$(10) \quad \int_R |f(x) - s(x)|\ m(dx) < 5\ \varepsilon .$$

Si A_i est borné et $m(A_i) > 0$, s et g sont constantes sur A_i et d'après leur définition, si $\overline{x} \in A_i$,

$$\int_{A_i} | g(x) - s(x) | m(dx) = | g(\overline{x}) - s(\overline{x}) | m(A_i)$$

$$= | g(\overline{x}) m(A_i) - s(\overline{x}) m(A_i) |$$

$$= \left| \int_{A_i} f(x) m(dx) - \int_{A_i} s(x) m(dx) \right|$$

Dès lors, pour de tels A_i,

$$(11) \quad \int_{A_i} | g(x) - s(x) | m(dx) \leq \int_{A_i} | f(x) - s(x) | m(dx).$$

Si $m(A_i) = 0$, les deux membres de (11) sont nuls. Si A_i est non borné, g et s sont nuls sur A_i et le membre de gauche de (11) est nul. Donc, (11) est vérifiée pour $i = 1 \ldots, k$. Nous sommons ces k inégalités membre à membre. Les A_i sont disjoints deux à deux et leur union est R, ainsi nous obtenons

$$(12) \quad \int_{R} | g(x) - s(x) | m(dx) \leq \int_{R} | f(x) - s(x) | m(dx).$$

L'inégalité

$$\int_{R} | f(x) - g(x) | m(dx) \leq \int_{R} | f(x) - s(x) | m(dx)$$
$$+ \int_{R} | s(x) - g(x) | m(dx).$$

avec (12) et (10) donne la conclusion.

■

Nous pouvons établir une amélioration du théorème 10.5. Nous obtenons la même conclusion que ce théorème mais à partir d'hypothèses plus faibles.

<u>Théorème 11.4</u>

| Si f est une fonction intégrable sur R telle que
| pour chaque intervalle ouvert à gauche A de R

$$(13) \quad \int_A f(x)\, m(dx) = 0,$$

alors $f(x) = 0$ presque partout dans R.

Démonstration:

Soit $\varepsilon' > 0$ et définissons $\varepsilon = \varepsilon'/10$. Puisque f est intégrable, il existe une jauge γ_1 sur $\bar{R}$ telle que pour chaque partition γ_1- fine $\mathcal{P}$ de $\bar{R}$

$$(14) \quad | S(\mathcal{P}; f_R) - \int_R f(x)\, m(dx) | < \varepsilon .$$

Soit γ_2 une jauge sur R telle que $\gamma_2(x)$ est borné pour $x \in R$ et définissons $\gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2$. Alors, (14) est vérifiée quelque soit la partition γ- fine $\mathcal{P}$, donc les hypothèses du corollaire 11.3 sont vérifiées. La fonction g de ce corollaire s'annule à chaque fois que $m(A_i) = 0$ ou A_i est non borné, d'après la définition de g; et quand A_i est borné et $m(A_i) > 0$, g s'annule sur A_i car par hypothèse, l'égalité (13) est vérifiée. Donc, g est identiquement nulle et d'après le corollaire 10.3,

$$(15) \quad \int_R | f(x) |\, m(dx) < 10\,\varepsilon = \varepsilon'.$$

Le membre de gauche de (15) est positif et plus petit qu'un certain $\varepsilon' > 0$ arbitraire, donc il est nul. Par application du théorème 10.5, $f(x) = 0$ presque partout dans R.

■

§12. Dérivabilité des intégrales indéfinies

D'après le théorème II.5.3, si une fonction F est une intégrale indéfinie d'une fonction f, alors F a une dérivée égale à f(x) en tout point x où f est continue. Mais notre intégrale s'applique à des fonctions qui peuvent n'avoir aucun point de continuité. Pour de telles fonctions, l'intégrale indéfinie F existe, mais le théorème II.5.3 ne nous dit rien au sujet de sa dérivée. Nous allons démontrer que F admet une dérivée égale à f(x) en tout point x sauf sur un ensemble de mesure nulle.

Théorème 12.1

> Si f est une fonction intégrable au sens de jauge sur $\mathbb{R}$ et F est une intégrale indéfinie de f, alors pour presque tout point $x \in \mathbb{R}$, F a une dérivée et
>
> $DF(x) = f(x)$.

Démonstration:

Nous allons, en fait, prouver un énoncé qui semble plus fort que la conclusion du théorème; en réalité, il lui est exactement équivalent. Pour ce faire, nous définissons la fonction

$$F[A] = \int_A f(x)\ m(dx).$$

Si A est un intervalle d'extrémités a et b, en appliquant la définition II.5.2

$$F[A] = \int_a^b f(x)\ m(dx) = F(b) - F(a).$$

Nous allons donc démontrer la propriété suivante:

| Pour presque tout $x \in R$ et pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert G contenant x tel que pour chaque intervalle A non vide contenu dans G et contenant x,

(1) $| F[A] / m(A) - f(x) | < \varepsilon$.

Ceci implique que F possède une dérivée f(x) en tout point où cette condition est vérifiée. Car soient x un tel point et $\varepsilon > 0$, considérons G défini comme dans la propriété. Si $x' \in G$, $x' \neq x$, l'intervalle A dont les extrémités sont x et x' est un intervalle non vide contenu dans G. Son adhérence contient x. Donc, l'inégalité de la propriété est vérifiée. Si $x' > x$, $F[A] = F(x') - F(x)$ et $m(A) = x' - x$, donc

(2) $F[A]/m(A) = (F(x') - F(x))/(x'-x)$.

Si $x' < x$, $F[A] = F(x) - F(x')$ et $m(A) = x - x'$ et de nouveau, (1) est vérifiée. Si nous portons (2) dans (1), l'inégalité (1) prend la forme de la définition de la dérivée de F et montre qu'elle est égale à f(x).

Démontrons maintenant cette propriété. Pour chaque $\varepsilon > 0$, nous définissons D^+_ε comme étant l'ensemble des points $x \in R$ pour lesquels il existe un intervalle ouvert contenant x , $\gamma_1(x)$ tel que si A est un intervalle dont $\overline{A} \subset \gamma_1(x)$ et $x \in \overline{A}$,

(3) $F[A] / m(A) \leq f(x) + \varepsilon$.

Notons par B^+_ε le complémentaire $R \setminus D^+_\varepsilon$ de D^+_ε . Nous allons d'abord montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$, $m(B^+_\varepsilon) = 0$. Soit $\delta > 0$. Comme f est intégrable sur R, il existe une jauge γ telle que si $\mathcal{P}$ est une partition γ- fine de R,

(4) $| S(\mathcal{P};f_R) - \int_R f(x)\ m(dx) | < \varepsilon\delta / 15.$

Soit $x \in B^+_\varepsilon$. Si, pour chaque intervalle A dont $\overline{A} \subset \gamma(x)$ et $x \in \overline{A}$, l'inégalité (3) est vérifiée, $x \in D^+_\varepsilon$, ce qui contredit le fait que $x \in B_\varepsilon^+$. Donc, il existe un intervalle A dont $\overline{A} \subset \gamma(x)$ et $x \in \overline{A}$ pour lequel

(5) $F[A] / m(A) > f(x) + \varepsilon$.

Soient a et b les extrémités de A. Nous pouvons prendre une suite croissante de nombres rationnels $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ convergeant vers a et une suite décroissante de nombres rationnels $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$ convergeant vers b. Puisque a et b sont dans $\gamma(x)$, pour tout n grand, a_n et b_n appartiennent à $\gamma(x)$. Comme F est continue, d'après le corollaire 7.2,

$\lim_{n\to\infty}[F(b_n) - F(a_n)] / (b_n-a_n) = [F(b) - F(a)] / (b-a)$

De ceci et de la définition de F[A], nous pouvons trouver un n correspondant au point $x \in B_\varepsilon^+$, assez grand pour que l'intervalle $A(x) =]a_n,b_n]$ ait des extrémités rationnelles, $\overline{A(x)} \subset \gamma(x)$ et

(6) $F[A(x)] / m(A(x)) > f(x) + \varepsilon$.

Bien que B_ε^+ puisse avoir un nombre non dénombrable de points, il ne peut y avoir qu'un nombre dénombrable d'intervalles $A(x)$, $x \in B_\varepsilon^+$ car il n'y a qu'un nombre dénombrable d'intervalles dont les extrémités sont rationnelles. Donc,nous pouvons choisir un nombre dénombrable d'intervalles $A(x_1)$, $A(x_2)$, $A(x_3)$, ... tel que pour chaque $x \in B_\varepsilon^+$, $A(x)$ est l'un des $A(x_i)$. Puisque l'union des $A(x)$ pour tout $x \in B_\varepsilon^+$ contient B_ε^+, nous avons aussi

(7) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A(x_i) \supset B_\varepsilon^+$.

Soit n un entier positif. En changeant leur nom, si nécessaire, nous pouvons ranger les intervalles $A(x_1)$, ..., $A(x_n)$ pour qu'ils soient de longueur croissante. Nous scindons l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ en deux sous-ensembles, Sel et Rej. $h \in$ Sel si $h = 1$ ou si $A(x_h)$ est disjoint de tous les $A(x_i)$, $i \in$ Sel. Donc, pour $j \in$ Sel, les intervalles $A(x_j)$ sont disjoints deux à deux. De plus, pour de tels j, $\overline{A(x_j)} \subset \gamma(x_j)$, par application du corollaire 11.2 et de (2),

$$(8) \sum_{j \in Sel} \left| -f(x_j) m(A(x_j)) + \int_{A(x_j)} f(x)\, m(dx) \right| < 5.\varepsilon\delta / 15.$$

Puisque $x_j \in B^+_\varepsilon$ et $A(x_j)$ est l'intervalle associé, d'après (6)

$$\int_{A(x_j)} f(x)\, m(dx) = F(A(x_j)) > f(x_j) m(A(x_j)) + \varepsilon\, m(A(x_j)).$$

Donc, pour chaque $j \in Sel$, le terme correspondant dans le membre de gauche de (8) est plus grand que $\varepsilon\, m(A(x_j))$, et d'après (8), nous obtenons

$$(9) \quad \varepsilon \sum_{j \in Sel} m(A(x_j)) < \varepsilon\delta / 3.$$

Pour chaque intervalle B de R, nous notons par B^* l'intervalle ouvert à gauche qui a le même point milieu que B et dont la longueur est trois fois celle de B. Donc, si $B =]a,b]$, $B^* =]\, 2a - b,\ 2b - a]$.
Nous allons prouver que

$$(10) \quad \bigcup_{j \in Sel} A(x_j)^* \supset \bigcup_{i=1}^{m} A(x_i).$$

Comme, d'après la définition de B^*, il est clair que $A(x_j)^* \supset A(x_j)$

$$(11) \quad \bigcup_{i=1}^{m} A(x_i) = \Big[\bigcup_{j \in Sel} A(x_j) \Big] \cup \Big[\bigcup_{k \in Rej} A(x_k) \Big]$$
$$\Big[\bigcup_{j \in Sel} A(x_j)^* \Big] \cup \Big[\bigcup_{k \in Rej} A(x_k) \Big].$$

Soit x un point d'un des $A(x_k)$, $k \in Rej$. Il existe donc un $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ et $j \in Sel$ pour lequel $A(x_j)$ n'est pas disjoint de $A(x_k)$; sinon, k serait dans Sel. Soit $x^* \in A(x_k) \cap A(x_j)$. Posons $A(x_k) =]a,b]$ et $A(x_j) =]c,d]$. Puisque $k > j$ et que les $A(x_i)$ ont des longueurs croissantes, $d-c \geq b-a$.
Comme $x \in]a,b]$ et $x^* \in]a,b] \cap]c,d]$,
$x = x^* + (x - x^*) \leq d + (b - a) \leq d + (d - c)$, et
$x = x^* - (x^* - x) > c - (b - a) \geq c - (d - c)$.
Donc, $x \in]\, 2c - d,\ 2d - c[\ = A(x_j)^*$. Ainsi, tout point de $[\bigcup_{k \in Rej} A(x_k)]$ est dans $[\bigcup_{j \in Sel} A(x_j)^*]$ et par conséquent (11) se réduit à (10)

Pour plus de facilité, nous definissons

$$V(n) = \bigcup_{i=1}^{n} A(x_i), \quad n = \infty, 1, 2, 3, \ldots,$$

et nous notons f la fonction caractéristique de l'intervalle $A(x_1)^*$. Alors (10) implique que pour tout $x \in R$

$1_{V(n)}(x) \leq \sup \{ f_j(x) : j \in Sel \} \leq \sum_{j \in Sel} f_j(x)$.

La longueur de $A(x_j)^*$ est trois fois celle de $A(x_j)$, donc en intégrant sur R et d'après (9)

$$(12) \int_R 1_{V(n)}(x)\ m(dx) \leq \sum_{j \in Sel} m(A(x_j)^*) = 3 \sum_{j \in Sel} m(A) < \delta.$$

Quand $n \to \infty$, $1_{V(n)}$ croît et converge partout dans R vers $1_{V(\infty)}$, donc, de (12) et en appliquant le théorème de convergence monotone,

$$(13) \int_R 1_{V(\infty)}(x)\ m(dx) \leq \delta$$

et d'après (7),

$$(14)\ 0 \leq 1_B \leq 1_{V(\infty)}.$$

Maintenant, nous pouvons trouver une fonction intégrable $1_{V(\infty)}$, correspondant à un $\delta > 0$ arbitraire, qui vérifie (13) et(14). Par application du lemme II.3.1,

$$\int_R 1_B\ (x)\ m(dx) = 0$$

c'est-à-dire, $m(B^+_\varepsilon) = 0$.

Définissons, pour chaque $\varepsilon > 0$, D^-_ε comme étant l'ensemble de tous les $x \in R$ pour lesquels il existe un intervalle ouvert contenant x, $\gamma_2(x)$ tel que si A est un intervalle dont $\bar{A} \subset \gamma_2(x)$ et $x \in \bar{A}$

$$(15)\ F[A] / m(A) \geq f(x) - \varepsilon$$

et posons $B^-_\varepsilon = R \setminus D^-_\varepsilon$. Nous pourrions prouver que $m(B^-_\varepsilon) = 0$ comme nous l'avons fait pour B^+_ε, mais ce n'est pas nécessaire. En effet, puisque $-F$ est une intégrale indéfinie de $-f$ et B^-_ε est l'ensemble B^+_ε pour $-f$ et $-F$, la preuve précédente implique que $m(B^-_\varepsilon) = 0$. Alors, $B_\varepsilon = B^+_\varepsilon \cup B^-_\varepsilon$ est de mesure nulle et chaque point x n'appartenant pas à B_ε est à la fois dans D^+_ε et D^-_ε. Ainsi, pour tout intervalle A non vide dont $\bar{A} \subset \gamma(x) = \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x)$ et $x \in \bar{A}$, (3) et (15) sont vérifiées, c'est - à - dire

$| F[A] / m(A) - f(x) | \leq \varepsilon$.

Soit $B = B_1 \cup B_{1/2} \cup B_{1/3} \cup B_{1/4} \cup \ldots$ Il est de mesure nulle car chaque $B_{1/n}$ a une mesure nulle. Soit $x \in R$ mais $x \notin B$ et $\varepsilon > 0$. Prenons un entier n tel que $1/n < \varepsilon$. Puisque $x \notin B_{1/n}$, il existe un intervalle ouvert contenant x, $\gamma(x)$ tel que tous les intervalles A non vides dont les adhérences sont contenues dans $\gamma(x)$ et contiennent x, $| F[A] / m(A) - f(x) | \leq 1/n < \varepsilon$.
Ceci termine la preuve de la propriété et par conséquent, celle du théorème.

■

CHAPITRE IV

===========

FONCTIONS MESURABLES ET ENSEMBLES MESURABLES

==

Nous avons défini au paragraphe 1 du premier chapitre, la mesure m d'un intervalle de R. Dans ce chapitre nous allons définir les fonctions m-mesurables et les ensembles m-mesurables. Nous savons que pour être intégrable, une fonction f ne doit être ni trop irrégulière, ni trop "grande". Il est facile d'établir que f ne prend pas des valeurs trop élevées, il suffit pour cela de trouver une fonction intégrable g telle que $|f| < g$. Montrer que f n'est pas trop irrégulière peut se faire de plusieurs façons, notamment, en utilisant la définition d'ensemble m-mesurable et le théorème de convergence dominée. En outre, si f est limite d'une suite de fonctions intégrables, alors, elle est assez régulière bien qu'elle peut ne pas être intégrable. Formalisons ceci dans une définition.

Définition 1

> Soient $B \subset R$ et une fonction $f: B \to R$. On dit que
> <u>f est m-mesurable sur B</u> s'il existe une suite (f_n) de
> fonctions réelles, intégrables au sens de jauge sur B
> telle que $f_n(x) \to f(x)$ pour chaque $x \in B$.

Remarque 1: Etant donné que dans ce chapitre, nous ne travaillons qu'avec une seule mesure (la mesure m), nous parlerons plutôt de fonctions mesurables et d'ensembles mesurables.

Remarque 2: Si $B = R$, la définition se modifie légèrement car dans ce cas, f_n est intégrable sur B si et seulement si $f_{n,B}$ est intégrable sur R; de même, f_n converge vers f sur B si et seulement si $f_{n,B}$ converge vers f_B sur R.

Puisque cette définition exprime l'idée de fonction pas trop irrégulière, chaque fonction mesurable qui ne prend pas de valeurs trop élevées devrait être intégrable. Le lemme 3 et le corollaire 4 que nous allons présenter montrent que c'est effectivement le cas. Au préalable, nous démontrons un lemme qui simplifiera leur preuve.

Lemme 2

> Soient $(u_i)_{i\in N}$, $(v_i)_{i\in N}$, $(w_i)_{i\in N}$ trois suites de R,
> de limites respectives u, v et w. Alors,
> i) $\lim_{n\to\infty} \max(u_n,v_n) = \max(u,v)$
> ii) $\lim_{n\to\infty} \min(u_n,v_n) = \min(u,v)$
> iii) $\lim_{n\to\infty} \max(\min(u_n,v_n),w_n) = \max(\min(u,v),w)$

Démonstration:

Pour prouver i) et ii), nous pouvons supposer $u \geq v$. (Nous interchangeons u_n avec v_n et u avec v si nécessaire). Si $u > v$, nous prenons $c \in R$ tel que $v < c < u$. Ainsi $]c,\infty]$ contient u et $[-\infty,c[$ contient v. Puisque $u_n \to u$ et $v_n \to v$, $u_n \in]c,\infty]$ et $v_n \in [-\infty,c[$ pour n assez grand. Et donc, $v_n < u_n$, $\max(u_n,v_n) = u_n$ et $\min(u_n,v_n) = v_n$, ce qui nous donne encore

$\lim_{n\to\infty} \max(u_n,v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n = u = \max(u,v)$

$\lim_{n\to\infty} \min(u_n,v_n) = \lim_{n\to\infty} v_n = v = \min(u,v)$

Si $u = v$, on considère $\gamma(u)$ un intervalle ouvert à gauche contenant u. Comme u_n et $v_n \to u$, ils appartiennent à $\gamma(u)$, pour n assez grand, et puisque $\max(u_n,v_n)$ vaut soit u_n, soit v_n, il est aussi dans $\gamma(u)$. Par conséquent, $\max(u_n,v_n) \to u = \max(u,v)$. On procède de même avec le minimum quand $u = v$ et ainsi i) et ii) sont prouvés dans tous les cas. D'après i) et ii), $\min(u_n,v_n) \to \min(u,v)$ et $\max(\min(u_n,v_n),w_n) \to \max(\min(u,v),w)$.

■

Lemme 3

> La fonction $f: R \to \overline{R}$ est mesurable sur R si et seulement si, pour chaque couple de fonctions réelles g, h, intégrables sur R et satisfaisant $g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in R$, la fonction $\max(\min(f,h),g)$ est intégrable sur R.

Démonstration:

Supposons f mesurable sur R. Il existe alors une suite (f_n) de fonctions intégrables au sens de jauge sur R convergeant vers f. Pour chaque n, f_n, g et h sont intégrables au sens de jauge sur R. D'après le corollaire III.3.4, ceci reste vrai pour la fonction $\max(\min(f_n,h),g)$. Puisque $g \leq \max(\min(f_n,h),g) \leq h$, nous obtenons $|\max(\min(f_n,h),g)| \leq \max(|g|,|h|)$ qui est une fonction intégrable. D'après le lemme 2, $\max(\min(f_n,h),g)$ converge vers $\max(\min(f,h),g)$. Nous pouvons dès lors appliquer le théorème de convergence dominée; on en déduit que la fonction $\max(\min(f,h),g)$ est intégrable au sens de jauge sur R.

Réciproquement, supposons que $\max(\min(f,h),g)$ est intégrable au sens de jauge sur R avec g et h des fonctions intégrables vérifiant $g \leq h$. Pour chaque entier $n > 0$, nous définissons $h_n = n\,1_{]-n,n[}$. Cette fonction est intégrable au sens de jauge sur R (car fonction en escalier). Ainsi, la fonction $f_n = \max(\min(f,h_n),(-h_n))$ est intégrable. Pour chaque $x \in R$, $h_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. Le lemme 2 implique alors que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \max(\min(f(x),\infty),(-\infty)) = f(x)$. On en déduit que f est la limite des fonctions f_n intégrables au sens de jauge sur R , c'est-à-dire qu'elle est mesurable.

∎

<u>Corollaire 4</u>

Soit f une fonction réelle, mesurable sur R. S'il existe une fonction h, intégrable au sens de jauge sur R telle que $|f(x)| \leq h(x)$, pour $x \in R$, alors f est intégrable au sens de jauge sur R.

Démonstration:

Définissons $g = -h$. Les fonctions g et h sont intégrables au sens de jauge sur R et vérifient $g \leq h$. D'après le lemme 3, $\max(\min(f,h),g)$ est intégrable sur R. Et comme $\max(\min(f,h),g)$ est identique à f, la preuve est complète.

■

Le théorème suivant montre qu'on peut travailler plus "librement" avec les fonctions mesurables qu'avec les fonctions intégrables.

Théorème 5

i) Soient f, g des fonctions réelles, mesurables sur R et $c \in \overline{R}$. Les fonctions cf, f^+, f^-, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ et fg sont mesurables sur R ainsi que $f + g$ (on fait la convention $f(x) + g(x) = 0$ si l'un des termes vaut $+\infty$ et l'autre $-\infty$).

ii) Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, définies sur R et convergeant simplement vers f dans R, alors f est mesurable sur R.

Démonstration:

Nous prenons une suite de nombres finis (c_i) qui converge vers c; et pour chaque entier $n > 0$, nous définissons h_n comme étant $n\,1_{]-n,n]}$. h_n est une fonction en escalier, positive, définie sur R, elle est donc intégrable sur R. Pour chaque entier $n > 0$, nous définissons $f_n = \max(\min(f,h_n),(-h_n))$, $g_n = \max(\min(g,h_n),(-h_n))$. f_n

et g_n sont bornées; d'après le lemme 3, elles sont intégrables au sens de jauge sur R. En chaque $x \in R$, $h_n(x) \to \infty$ quand $n \to \infty$. Ainsi, d'après le lemme 2

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \max(\min(f(x),\infty),(-\infty)) = f(x)$.

De même,

(2) $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$.

Et donc, toujours par application du lemme 2, les fonctions

(3) $c_n f_n$, f^+_n, f^-_n, $|f_n|$, $\max(f_n,g_n)$, $\min(f_n,g_n)$

convergent respectivement vers

(4) cf, f^+, f^-, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$.

D'après le théorème II.1.3 et les corollaires III.3.3 et III.3.4, chaque fonction du point (3) est intégrable; d'après la définition 1, toutes les fonctions du point (4) sont donc mesurables sur R. En chaque $x \in R$ tel que ni $f(x)$, ni $g(x)$ ne s'annule, (1) et(2) impliquent que le produit $f_n(x)g_n(x)$ converge vers $f(x)g(x)$. Mais si x est tel que , par exemple, $f(x) = 0$ alors $f_n(x) = 0$ pour tout n. Ainsi $f_n(x)g_n(x) \to 0$, ce qui est la valeur de $f(x)g(x)$. Et donc f_ng_n converge vers fg en tout $x \in R$, on en déduit que fg est mesurable. Si x est tel que $f(x)$ et $g(x)$ ne sont ni ∞, ni de signes opposés, (1) et (2) impliquent que $f_n(x) + g_n(x) \to f(x) + g(x)$. Mais si, par exemple, $f(x)$ vaut l'infini quand $g(x)$ vaut $-\infty$, alors $f_n(x) = n$ et $g_n(x) = -n$. Et par conséquent, $f_n(x) + g_n(x) = 0$ et tend vers 0, qui dans ce cas, est la valeur de $f(x) + g(x)$. Ainsi $f_n + g_n$ converge vers $f + g$, on en conclut que $f + g$ est mesurable sur R. Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables convergeant vers f, le lemme 3 implique que les fonctions $g_n = \max(\min(f_n,h_n),(-h_n))$ sont toutes intégrables au sens de jauge sur R. Comme $h_n(x) \to \infty$ et par application du lemme 2, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \max(\min(f(x),\infty),-\infty) = f(x)$, pour tout $x \in R$. On en conclut que f est mesurable sur R.

■

La définition 1 ressemble assez bien à la définition III.4.3 (posséder une intégrale finie ou infinie). Le prochain théorème montre qu'en effet, il existe une relation étroite entre les deux.

<u>Théorème 6</u>

> Soient $B \subset R$ et une fonction $f: R \to \overline{R}$. Alors,
>
> i) si f possède une intégrale au sens de jauge sur R, elle est mesurable sur R;
>
> ii) f est mesurable sur R si et seulement si f^+ et f^- possèdent une intégrale sur R;
>
> iii) B est mesurable si et seulement si son indicatrice 1_B est mesurable sur R;
>
> iv) R est mesurable.

Démonstration:

Nous obtenons immédiatement i) en comparant les définitions 1 et III.3.4. Si f^+ et f^- possèdent une intégrale, d'après i) elles sont mesurables et leur différence $f = f^+ - f^-$ l'est également, par application du théorème 5. Réciproquement, si f est mesurable, le théorème 5 implique que f^+ et f^- le sont aussi. Nous définissons $h_n = n1_{]-n,n]}$. h_n est positive et intégrable. D'après le lemme 3, les fonctions

$g_n = \min(f^+, h_n)$ sont intégrables au sens de jauge sur R. Quand $n \to \infty$, ces g_n croissent et tendent vers f^+. Par application du lemme 2 et la définition III.3.4, f^+ possède une intégrale de jauge sur R. De façon similaire, f^- possède une intégrale. Ainsi ii) est établi. Si B est mesurable, la définition III.9.1 implique que 1_B admet une intégrale. Ainsi, d'après i) 1_B est mesurable. Si 1_B est mesurable, d'après ii), $(1_B)^+$ (qui est encore 1_B) possède une intégrale sur R. iii) est alors vérifiée. Par application du corollaire III.4.5, pour chaque entier $n > 0$, la fonction $f_n = 1_{]-n,n]}$ est intégrable au sens de jauge sur R; d'après i) elle est alors mesurable sur R. Quand $n \to \infty$, $f_n(x) \to 1_R(x)$, $x \in R$. Par application du théorème 5, 1_R est une fonction mesurable et par ii) on conclut que R est un ensemble mesurable.

■

Une propriété importante des ensembles mesurables est la suivante: l'union d'un nombre dénombrable d'ensembles mesurables est encore mesurable. Commençons avec la définition suivante:

<u>Définition 7</u>

Soit X un ensemble $= \emptyset$ et $\mathcal{A}$ une famille de sous-ensembles de X. On dit que $\mathcal{A}$ <u>est une σ-algèbre</u> (de sous-ensembles de X) si elle possède les trois propriétés suivantes:

i) $\emptyset$ appartient à $\mathcal{A}$;

ii) quel que soit l'ensemble $A \in \mathcal{A}$, son complémentaire $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

iii) quel que soit la suite $(A(j))$ d'ensembles appartenant à $\mathcal{A}$, l'union de ces $A(j)$ appartient encore à $\mathcal{A}$.

Théorème 8

> La famille de tous les ensembles mesurables de R est une σ-algèbre.

Démonstration:

Notons $\mathcal{A}$ la famille des ensembles mesurables de R. L'indicatrice de l'ensemble Ø est la fonction identiquement nulle sur R, intégrable au sens de jauge. Ainsi, d'après le théorème 6, Ø est mesurable et le point i) de la définition 7 est vérifié. Soit (A(j)) une suite d'ensembles appartenant à $\mathcal{A}$. Par application du théorème 6, chaque indicarice $1_{A(j)}$ est mesurable. D'après le théorème 5, pour chaque entier n > 0, la fonction $\max(1_{A(1)}, \ldots, 1_{A(n)})$ est alors mesurable. Il en est de même pour sa limite (quand n ->∞) qui est en fait l'indicatrice de l'union de tous les A(j). D'après le théorème 6, cette union est donc mesurable. Et nous venons de vérifier le point iii) de la définition 7. Le théorème 6 nous assure que R lui-même est mesurable. Si A est mesurable, ce même théorème implique que les fonctions 1_A et 1_R sont mesurables. D'après le théorème 5, $1_R - 1_A$ l'est aussi. Cette fonction étant l'indicatrice de l'ensemble R \ A, on en conclut que R \ A est mesurable et donc la condition ii) de la définition 7 est aussi vérifiée.

■

La mesure m avec laquelle nous travaillons est additive sur la famille des intervalles ouverts à gauche de R (cfr le paragraphe 1 du chapitre I). Si nous la considérons sur la σ-algèbre des ensembles mesurables, elle vérifie alors une additivité plus forte dont nous donnons la définition.

Définition 9

Soient $\mathcal{A}$ une σ-algèbre et $F: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. On dit que F est σ-additive si, quelle que soit la famille $\mathcal{K} = (A_i)_{i \in I}$, finie ou dénombrable d'ensembles disjoints deux à deux de ,

$$F(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} F(A_i)$$

Théorème 10

---

m est une mesure σ-additive sur la famille des ensembles mesurables.

Démonstration:

Soit K une collection finie ou dénombrable d'ensembles de R, disjoints deux à deux et mesurables. Si K est finie, nous notons ses éléments A(1), ..., A(k) et G(k) leur union. Alors,

$$(5)\quad 1_{G(k)} = 1_{A(1)} + \ldots + 1_{A(k)},$$

et par intégration, nous obtenons la relation

$$(6)\quad m(G(k)) = m(A(1)) + \ldots + m(A(k)).$$

Si K est dénombrable, nous notons ses éléments A(1), A(2), A(3), ... et G leur union. (G(k) étant l'union A(1) U ... U A(k)). (5) et (6) sont à nouveau vérifiés. D'après le théorème 8, G est mesurable. Si pour tout k, l'ensemble G(k) est de mesure infinie, G est aussi de mesure infinie car il contient $G(k)$. Si tous les $G(k)$ sont de mesure finie, leurs indicatrices $1_{G(k)}$ sont intégrables au sens de jauge sur R; elles sont croissantes pour $k \to \infty$ et tendent vers 1_G. Par application du théorème de convergence monotone III.10.8, 1_G possède une intégrale sur R, et

$$\int_R 1_G(x)\ m(dx) = \lim_{k\to\infty} \int_R 1_{G(k)}(x)\ m(dx)$$

$$= \lim_{k\to\infty} m(G(k))$$
$$= \lim_{k\to\infty} [m(A(1)) + \ldots + m(A(k))]$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} m(A(j)).$$

c'est-à-dire que la mesure de G est la somme des mesures des $A(j)$.

■

Corollaire 11

i) Si $A(1), A(2), \ldots$ est une suite d'ensembles mesurables qui vérifient $A(1) \subset A(2) \subset \ldots$, alors

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} A(j)) = \lim_{n\to\infty} m(A(n));$$

ii) Si $(A(n))$ est une suite d'ensembles mesurables qui vérifient $A(1) \supset A(2) \supset \ldots$ et si $A(j)$ est de mesure finie,

$$m(\bigcap_{j=1}^{\infty} A(j)) = \lim_{n\to\infty} m(A(n));$$

iii) Si $A(1), A(2), \ldots$ est une collection finie ou dénombrable d'ensembles mesurables, alors

$$m(\bigcup_j A(j)) \leq \sum_j m(A(j));$$

Démonstration:

preuve de i): Notons G l'union des A(j). D'après le théorème 8, G est mesurable. Si l'un des A(j) est de mesure ∞ , alors $m(G) = \infty$ car $G \supset A(j)$; et dans ce cas, i) est vérifié. Si tous les $m(A(j))$ sont finis, nous observons que $1_{A(j)} \to 1_G$. Par application du théorème de convergence monotone III.10.8, nous obtenons

$$\int_R 1_G(x)\ m(dx) = \lim_{j\to\infty} \int_R 1_{A(j)}(x)\ m(dx)$$

$$= \lim_{j\to\infty} m(A(j))$$

et ii) est alors vérifié.

preuve de iii). Notons G(k) l'union $A(1) \cup \ldots \cup A(k)$; son indicatrice vérifie

$1_{G(k)} \leq \max(1_{A(1)}, \ldots, 1_{A(k)}) \leq 1_{A(1)} + \ldots + 1_{A(k)}$.

Et nous obtenons en intégrant chaque membre

$$(7)\quad m(G(k)) \leq m(A(1) + \ldots + m(A(k)).$$

Si la collection des A(j) contient une infinité d'ensembles, nous observons que G(k) croît avec k et que l'union de tous les G(k) est égale à l'union des A(j). Ainsi d'après i)

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} A(j)) = \lim_{n\to\infty} m(G(n)).$$

Avec (7) nous obtenons alors

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} A(j)) \leq \lim_{n\to\infty} [m(A(1)) + \ldots + m(A(n))]$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} m(A(j)).$$

■

Le théorème suivant établit une relation entre les fonctions mesurables et les ensembles mesurables. Celle-ci est souvent utilisée comme définition de la mesurabilité de fonctions.

Théorème 12 (condition de mesurabilité de Lebesgue)

> Soit une fonction réelle f, mesurable sur R. Alors l'ensemble $\{x \in R : f(x) \leq y\}$ est mesurable pour tout $y \in R$.

Démonstration:

Supposons que $y \in R$. R est mesurable ainsi que son indicatrice. D'après le théorème 5, les fonctions à valeurs constantes respectives y et $y+1$ le sont également, de même que la fonction
$g(x) = y + 1 - \max(\min(f(x), y + 1), y)$. Puisque
$\max(\min(f(x), y + 1), y) \leq y + 1$, g est positive. Pour chaque x tel que $f(x) \leq y$,
$\min(f(x), y + 1) = f(x)$ et $\max(\min(f(x), y + 1), y) = y$. Ainsi

(8) $g(x) = 1$, pour tout x tel que $f(x) \leq y$.

Si $f(x) > y$ alors, $\min(f(x), y + 1) > y$ et
$\max(\min(f(x), y + 1), y) > y$; et donc

(9) $0 \leq g(x) < 1$ en tout x tel que $f(x) > y$.

D'après (8) et (9), pour tout x tel que $f(x) \leq y$, toutes les puissances $g(x)^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont égales à 1 alors que ces puissances convergent vers 0 quand $f(x) > y$. C'est-à-dire

$$\lim_{n \to \infty} g(x)^n = 1_{\{x \in R \,:\, f(x) \leq y\}}$$

D'après le théorème 5, toutes les puissances g^n sont mesurables; leur limite $1_{\{x \in R \,:\, f(x) \leq y\}}$ l'est donc également et d'après le théorème 6, si y est fini, l'ensemble $\{x \in R : f(x) \leq y\}$ est mesurable. Si $y = \infty$,

$\{x \in R : f(x) \leq y\} = R$ qui est mesurable. Si $y = -\infty$, $\{x \in R : f(x) \leq y\}$ est l'intersection des ensembles $\{x \in R : f(x) \leq -n\}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. Puisque nous venons de montrer que ces ensembles sont mesurables, leurs complémentaires $R \setminus \{x \in R : f(x) \leq -n\}$ le sont aussi, de même que l'union de ces complémentaires. Cette union est en fait le complémentaire de $\{x \in R : f(x) \leq -\infty\}$. Ainsi, $\{x \in R : f(x) \leq -\infty\}$ est mesurable.

∎

CHAPITRE V

EQUIVALENCE ENTRE L'INTEGRALE DE JAUGE ET L'INTEGRALE DE LEBESGUE

Ce chapitre est entièrement consacré à la démonstration de la proriété suivante:

> Une fonction f de $\overline{R}$ dans R est intégrable au sens de Lebesgue sur R si et seulement si elle est intégrable au sens de la jauge sur R. En outre, si cette condition est vérifiée, les deux intégrales sont égales.

Cette démonstration est assez longue et technique. Afin de la rendre aussi claire que possible, nous démontrons quelques résultats preliminaires.

Remarque: La mesure de Lebesgue sera notée L.

§1. Un théorème d'approximation pour l'intégrale de Lebesgue

Nous avons présenté, au paragraphe 11 du chapitre III, un théorème d'approximation d'une fonction intégrable au sens de jauge par une fonction en escalier. Avant de prouver la propriété correspondante pour l'intégrale de Lebesgue, nous présentons les deux lemmes suivants. (cfr. [8])

Lemme 1.1

Soit f une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur [a,b]. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction simple $\Phi : [a,b] \to R$ telle que

$$\int_a^b | f(x) - \Phi(x) | \, L(dx) < \varepsilon .$$

Démonstration:

La partie positive d'une fonction f est la fonction f^+ définie par

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

La partie négative d'une fonction f est la fonction f^- définie par

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Il suit que pour chaque x appartenant au domaine de f,

$$f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x) \;;$$

la preuve peut donc être limitée aux fonctions positives.

Etant donnée une fonction f mesurable et positive, on peut trouver une suite croissante (Φ_n) de fonctions simples telles que

$$\lim_{n\to\infty} | f(x) - \Phi_n(x) | = 0 \quad L\text{ - presque partout}$$

(cfr lemme d'approximation [9]).

D'autre part, la suite $(|f - \Phi_n|)$ est décroissante et pour chaque $n \in N^*$, $| f - \Phi_n |$ est positive et intégrable au sens de Lebesgue (car mesurable et majorée par la fonction intégrable f). On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour déduire

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b | f(x) - \Phi_n(x) | \; L(dx) = 0.$$

On en tire que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\int_a^b | f(x) - \Phi_n(x) | \; L(dx) < \varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

■

<u>Lemme 1.2</u>

Soit $\Phi : [a,b] \to R$ une fonction simple qui prend h valeurs distinctes, $\neq 0$ et soit $M = \sup_{x\in[a,b]} | \Phi(x) |$. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\theta : [a,b] \to R$ en escalier et une partie mesurable $A \subset [a,b]$ telles que

$\Phi(x) = \theta(x)$ sur $[a,b] \setminus A$, $L(A) \leq \varepsilon$ et

$| \Phi(x) | \leq hM$ sur $[a,b]$.

Avant de présenter la preuve, rappelons deux propriétés établies dans [8] et [9].

Propriété (1):

Soient E un ensemble mesurable et $\varepsilon' > 0$. Alors, il existe un ensemble ouvert $G \supset E$ tel que

$L(G \setminus E) < \varepsilon'$.

Propriété (2):

Chaque ensemble ouvert de R est l'union d'une collection dénombrable d'intervalles ouverts, deux à deux disjoints.

Démonstration:

Cas h = 1:

Notons c la seule valeur $\neq 0$ prise par θ et posons

$E = \{x \in [a,b] : \theta(x) = c\}$.

Puisque E est mesurable, d'après la propriété (1), il existe un ouvert G de R tel que $E \subset G$ et $L(G \setminus E) \leq \varepsilon/2$. Comme E est borné, on peut prendre G borné aussi. D'après la propriété (2), G est la réunion dénombrable d'intervalles ouverts, deux à deux disjoints, soit $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n,b_n[$. En outre, puisque G est borné, $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = L(G) < \infty$. Il existe donc $N \in N^*$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon/2$.

On définit la fonction $\theta : [a,b] \to R$ par

$$\theta(x) = \begin{cases} c & ,\text{si } x \in \{\bigcup_{n=1}^{N} (]a_n,b_n[\cap [a,b])\} \\ 0 & ,\text{ailleurs} \end{cases}$$

et on pose

$A = [a,b] \cap \{(G \setminus E) \cup (\bigcup_{n=N+1}^{\infty}]a_n,b_n[)\}$.

Il est clair que θ est en escalier et que $|\theta(x)| \leq M$ sur [a,b]. En outre, A est mesurable et

$L(A) \leq L(G \setminus E) + L(\bigcup_{n=N+1}^{\infty}]a_n,b_n[) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Montrons maintenant que $\Phi(x) = \theta(x)$ sur $[a,b] \setminus A$. En effet, soit $x \in [a,b]$ arbitraire. Il n'y a que trois possibilités:

1) $x \in E$; alors, ou bien $x \in \bigcup_{n=1}^{N}]a_n,b_n[$ et dans ce cas, $\Phi(x) = \theta(x) = c$, ou bien $x \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty}]a_n,b_n[$ et dans ce cas, $x \in A$;
2) $x \in G \setminus E$; alors $x \in A$;
3) $x \notin G$; alors $\Phi(x) = \theta(x) = 0$.

On en déduit bien que $\Phi(x) = \theta(x)$ sur $[a,b] \setminus A$.

<u>Cas $h > 1$:</u>

On note $c_1, \ldots, c_h$ les valeurs distinctes $\neq 0$ prises par Φ et on pose pour $i = 1, \ldots, h$

$$E_i = \{x \in [a,b] : \Phi(x) = c_i\},$$

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} c_i & ,\text{si } x \in E_i , \\ 0 & , \text{ailleurs dans } [a,b]. \end{cases}$$

Il est clair que chaque Φ_i est une fonction simple. En outre, les E_i, $i = 1, \ldots, h$ sont deux à deux disjoints (car les c_i , $i = 1, \ldots, h$ sont distincts), d'où

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{h} \Phi_i(x) \text{ sur } [a,b].$$

D'après ce qui précède, pour chaque Φ_i, on peut trouver une fonction en escalier $\theta_i: [a,b] \rightarrow R$ et une partie mesurable $A_i \subset [a,b]$ telles que $\Phi_i(x) = \theta_i(x)$ sur $[a,b] \setminus A_i$, $L(A_i) \leq \varepsilon/h$ et $| \theta_i(x) | \leq M$ sur $[a,b]$. On pose $\theta(x) = \sum_{i=1}^{h} \theta_i(x)$ et $A = \bigcup_{i=1}^{h} A_i$.

Il est évident que θ est en escalier, que $| \theta(x) | \leq hM$ sur $[a,b]$, que A est mesurable et

$$L(A) \leq \sum_{i=1}^{h} L(A_i) \leq h.\varepsilon/h = \varepsilon.$$

Puisque $[a,b] \setminus A = \bigcap_{i=1}^{h} ([a,b] \setminus A_i)$, on en déduit aussi que pour $x \in [a,b] \setminus A$, $\theta_i(x) = \Phi_i(x)$, $i = 1, \ldots, h$, d'où $\theta(x) = \Phi(x)$.

■

On peut, à présent, énoncer le théorème d'approximation d'une fonction intégrable au sens classique de Lebesgue par une fonction en escalier.

Théorème 1.3

Soit f une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier θ telle que

$$\int_a^b | f(x) - \theta(x) | L(dx) < \varepsilon .$$

Démonstration:

D'après le lemme 1.1, il existe une fonction simple $\Phi : [a,b] \to R$ telle que

$$\int_a^b | f(x) - \Phi(x) | L(dx) \leq \varepsilon/2.$$

Par application du lemme 1.2, on peut trouver une fonction en escalier $\theta : [a,b] \to R$ et une partie mesurable $A \subset [a,b]$ telles que $\theta(x) = \Phi(x)$ sur $[a,b] \setminus A$, $L(A) \leq \varepsilon$ et $|\theta(x)| \leq hM$ sur $[a,b]$, où h est le nombre de valeurs distinctes $\neq 0$ prises par Φ et $M = \sup_{x\in[a,b]} | \Phi(x) |$. Il s'en suit

$$\int_a^b | f(x) - \theta(x) | L(dx)$$

$$\leq \int_a^b | f(x) - \Phi(x) | L(dx) + \int_a^b | \Phi(x) - \theta(x) | L(dx)$$

$$\leq \varepsilon/2 + \int_{[a,b]\setminus A} | \Phi(x) - \theta(x) | L(dx) + \int_A | \Phi(x) - \theta(x) | L(dx)$$

$$\leq \varepsilon/2 + \int_A | \Phi(x) | L(dx) + \int_A | \theta(x) | L(dx)$$

$$\leq \varepsilon/2 + (\varepsilon/2M(h + 1)) (M + hM) = \varepsilon .$$

■

Corollaire

Pour chaque fonction intègrable au sens de Lebesgue sur [a,b], il existe une suite (θ_n) de fonctions en escalier telle que

$$\int_a^b | f(x) - \Phi_n(x) | L(dx) \to 0 \text{ quand } n \to \infty .$$

§2. Rapport entre les ensembles de mesure de Lebesgue de nulle et de mesure m nulle

Nous allons montrer, ici, que les ensembles de mesure nulle sont les mêmes pour la mesure m et pour celle de Lebesgue. On en déduit, en particulier, que pour la convergence presque partout au sens de la jauge et au sens de Lebesgue sont èquivalentes.

Prouvons d'abord quelques résultats intermédiaires.

<u>Lemme 2.1</u>

> Soient E une partie non vide de R et $\gamma(x)$ un intervalle ouvert contenant x, pour chaque $x \in E$. Alors, il existe une suite $(A_n)_{n \in N^*}$ d'intervalles ouverts à gauche, disjoints deux à deux et une suite $(\overline{x}_n)_{n \in N^*}$ de points de E tels que
>
> i) E est contenu dans l'union des A_i;
>
> ii) pour chaque entier $i > 0$, $\overline{x}_i \in A_i$ et $\overline{A_i} \subset \gamma(x_i)$.

La démonstration de ce lemme est assez longue et technique. Afin de garder une certaine fluidité dans notre exposé, nous préférons mettre la preuve en annexe A2.

On peut, à présent, prouver le théoreme suivant.

Théorème 2.2

> Soit E un ensemble de mesure m finie de R. Etant donnés $\varepsilon > 0$ et un ensemble ouvert G contenant E, il existe une suite $A_1, A_2, \dots$ d'intervalles ouverts à gauche, disjoints deux à deux tels que $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\overline{A_i} \subset G$ et $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) < m(E) + \varepsilon$.

Démonstration:

On considère un $\varepsilon > 0$ et un ensemble G ouvert tel que $E \subset G$. Puisque l'intégrale de la fonction 1_E est égale à m(E), il existe une jauge γ_1 sur $\overline{R}$ telle que pour chaque partition γ_1-fine de R

$$(1) \qquad | S(\mathcal{P} ; 1_E) - m(E) | < \varepsilon/6.$$

On définit la jauge γ_2 comme suit:

si $x \in G$, on prend pour $\gamma_2(x)$ un intervalle ouvert contenant x et inclus dans G; ceci est possible car G est ouvert,

si $x \notin G$, on prend $\gamma_2(x) = \overline{R}$.

On définit $\gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2$. D'après le lemme 2.1, il existe une suite $A_1, A_2, \dots$ d'intervalles ouverts à gauche, disjoints deux à deux tels que E soit inclus dans l'union des A_i et tels que pour chaque A_i, il existe un point $\overline{x_i}$ de E tel que $\overline{x_i} \in A_i$ et $\overline{A_i}$ est incluse dans $\gamma(\overline{x_i})$. Il s'en suit $\overline{A_i} \subset G$. D'après le corollaire III.11.2 et (1), on trouve que pour tout entier $n > 0$,

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} | 1_E(\overline{x_i}) \; m(A_i) - \int_{A_i} 1_E(x) \; m(dx) | < 5\,\varepsilon/6.$$

Comme $\overline{x_i} \in E$, $1_E(\overline{x_i})$ vaut 1 et on tire de (2) que

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) < \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} 1_E(x) \; m(dx) + 5\,\varepsilon/6$$

$$\leq \int_{R} 1_E(x) \; m(dx) + 5\,\varepsilon/6$$

$$= m(E) + 5\,\varepsilon/6.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m(E) + 5\,\varepsilon/6 \leq m(E) + \varepsilon \quad .$$

■

Si on considère un ensemble de mesure m nulle, par ce théorème, il vérifie la propriété suivante.

Propriété (1):

> Soit E une partie de R. Alors, pour que $m(E) = 0$, il faut et il suffit que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles A_1, A_2, ... dont l'union contient E et tels que $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) < \varepsilon$.

La condition est nécessaire d'après le théorème 2.2; elle est suffisante d'après le théorème III.9.4.

Une propriété analogue est vraie pour la mesure de Lebesgue.

Propriété (2):

> Soit E une partie de R. Alors, pour que $L(E) = 0$, il faut et il suffit que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles A_1, A_2, ... dont l'union contient E et tels que $\sum_{i=1}^{\infty} L(A_i) < \varepsilon$. (cfr [8])

On peut démontrer, à présent, que si un ensemble E de R est de mesure de Lebesgue nulle, sa mesure m est nulle aussi et inversement. En effet, soit $E \subset R$. Supposons d'abord $L(E) = 0$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Alors, en appliquant la propriété (2), on voit qu'il existe une suite d'intervalles disjoints deux à deux, ($]\alpha_n,\beta_n]$), $n \in N^*$ tels que E est inclus dans l'union des $]\alpha_n,\beta_n]$, et tels que $\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$.

Puisque $m(\,]\alpha_n,\beta_n]\,) = \beta_n - \alpha_n = L(\,]\alpha_n,\beta_n]\,)$, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\,]\alpha_n,\beta_n]\,) = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon \ .$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit avec la propriété (1) que $m(E) = 0$.

Inversément, supposons $m(E) = 0$. D'après la propriété (1), pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une suite d'intervalles disjoints deux à deux $(A_i)_{i \in N^*}$ tels que

- E est inclus dans l'union des A_i
- $\sum_{i \in N} m(A_i) < \varepsilon$.

Ceci entraîne comme précédemment $L(E) = 0$.

§3. Egalité entre les deux intégrales

Nous allons établir l'égalité entre l'intégrale de Lebesgue et celle de jauge en travaillant étape par étape.

Dans un premier temps, on considère un intervalle borné I. On sait que

$$L(I) = \int_R 1_I(x)\ L(dx) = b - a,$$

où a et b sont les extrémités de I (cfr [9]). Sa mesure m est, par définition,

$$m(I) = \int_R 1_I(x)\ m(dx) = b - a.$$

On a donc égalité entre la mesure de jauge et celle de Lebesgue d'un intervalle borné.

Prenons maintenant une fonction en escalier $\theta : R \to R$. Rappelons qu'une fonction en escalier est, par définition, une combinaison linéaire finie d'intervalles bornés $J_1, \ldots, J_n$,

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i\ 1_{J_i}(x).$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\int_R \theta(x)\ L(dx) &= \int_R \sum_{i=1}^{m} c_i\ 1_{J_i}(x)\ L(dx)\\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \int_R 1_{J_i}(x)\ L(dx)\\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i\ (b_i - a_i),\end{aligned}$$

où a_i et b_i sont les extrémités de J_i. L'intégrale de jauge est également linéaire. On en déduit

$$\begin{aligned}\int_R \theta(x)\ m(dx) &= \int_R \sum_{i=1}^{m} c_i\ 1_{J_i}(x)\ m(dx)\\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \int_R 1_{J_i}(x)\ m(dx)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \, (b_i - a_i).$$

L'égalité entre les deux intégrales d'une fonction en escalier est donc aussi vérifiée.

Considérons enfin une fonction f de $\overline{R}$ dans R.

<u>Remarque 1:</u> Pour chaque x ∈ R, f(x) peut s'écrire comme $f^+(x) - f^-(x)$ où f^+ et f^- sont les fonctions définies par $f^+(x) = \max(f(x),0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x),0)$. Il suffit donc de se limiter à une fonction positive de $\overline{R}$ dans R.

Montrons d'abord le théorème suivant.

<u>Théorème 3.1</u>

> Si une fonction positive f de $\overline{R}$ dans R est intégrable au sens de Lebesgue sur [a,b], elle est intégrable au sens de jauge sur [a,b] et les deux intégrales sont égales.

Démonstration:

D'après le corollaire du théorème 1.3, il existe une suite de fonctions réelles (f_n) en escalier sur [a,b] telle que

$$\int_a^b | \, f(x) - f_n(x) \, | \, L(dx) \to 0 \text{ quand } n \to \infty ,$$

c'est-à-dire que (f_n) tend vers f dans L([a,b]). On peut alors extraire une sous-suite de (f_n), que l'on note encore (f_n) pour ne pas alourdir les notations, qui converge vers f L-presque partout (cfr [8]).

Définissons les fonctions en escalier

$g_{n,p} = \inf (f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots , f_{n+p}(x))$.

Pour chaque x et n fixés, la suite $(g_{n,p}(x))_{p\in N^*}$ est décroissante et sa limite (finie ou infinie) existe car une suite monotone admet toujours une limite. On pose

$\bar{g}_n(x) = \lim_{p\to\infty} g_{n,p}(x)$.

Pour chaque x fixé, la suite $(\bar{g}_n(x))_{n\in N^*}$ est croissante car $g_{n+1,p-1}(x) \geq g_{n,p}(x)$, d'où par passage à la limite sur p, on obtient $\bar{g}_{n+1}(x) \geq \bar{g}_n(x)$. Elle résulte donc convergente. Montrons qu'elle converge vers f(x) L-presque partout, plus précisément en chaque point x tel que $f_n(x)$ converge vers f(x). En effet, soit $x \in [a,b]$ tel que $f_n(x) \to f(x)$. Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire et n assez grand, on a donc quel que soit $p \in N^*$

(1) $\quad f(x) - \varepsilon \leq g_{n,p}(x) \leq f(x) + \varepsilon$

d'où en faisant $p \to \infty$,

(2) $\quad f(x) - \varepsilon \leq \bar{g}_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$ pour n assez grand,

ce qui prouve bien que $\bar{g}_n \to f(x)$.

Les fonctions $g_{n,p}$ sont mesurables. En outre, de (1), on déduit que pour n assez grand,

$$\int_a^b f(x)\ L(dx) - \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b g_{n,p}(x)\ L(dx) \text{ , pour}$$

tout $p \in N^*$. On peut, dès lors, appliquer le théorème de convergence monotone pour l'intégrale de Lebesgue et en déduire que pour $n \in N^*$ assez grand, la limite $\bar{g}_n$ est Lebesgue intégrable et

$$\int_a^b \bar{g}_n(x)\ L(dx) = \lim_{p\to\infty} \int_a^b g_{n,p}(x)\ L(dx).$$

Les fonctions $g_{n,p}$ sont également intégrables au sens de jauge sur [a,b] car elles sont en escalier. On déduit alors, de (1), que pour $n \in N^*$ assez grand,

$$\int_a^b f(x)\ L(dx) - \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b g_{n,p}(x)\ L(dx)$$

$$= \int_a^b g_{n,p}(x)\ m(dx) \text{ , pour}$$

tout p $\in$ N*. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour l'intégrale de jauge (voir III.4.2) à la suite décroissante $(g_{n,p})_{p\in N^*}$ et on en déduit que pour n $\in$ N* assez grand, $\bar{g}_n$ est intégrable au sens de jauge et

$$\int_a^b \bar{g}_n(x)\ m(dx) = \lim_{p\to\infty} \int_a^b g_{n,p}(x)\ m(dx).$$

Comme les $g_{n,p}$ sont des fonctions en escalier,

$$\int_a^b g_{n,p}(x)\ m(dx) = \int_a^b g_{n,p}(x)\ L(dx)$$

et par unicité de la limite d'une suite convergente, on en conclut

$$(3) \quad \int_a^b \bar{g}_n(x)\ m(dx) = \int_a^b \bar{g}_n(x)\ L(dx) \text{ pour n assez grand.}$$

Les fonctions $\bar{g}_n$ sont mesurables et la suite $(\bar{g}_n)$ est croissante et converge vers f L-presque partout. On déduit, de (2),

$$\int_a^b \bar{g}_n(x)\ L(dx) \leq \int_a^b f(x)\ L(dx) + \varepsilon\,(b-a) \text{ pour n assez}$$

grand. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour l'intégrale de Lebesgue et en déduire

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \bar{g}_n(x)\ L(dx) = \int_a^b f(x)\ L(dx).$$

D'autre part, (2) et (3) impliquent aussi

$$\int_a^b \bar{g}_n(x)\ m(dx) = \int_a^b \bar{g}_n(x)\ L(dx)$$

$$\leq \int_a^b f(x)\ L(dx) + \varepsilon\ (b-a) \text{ pour n assez grand.}$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour l'intégrale de jauge et en déduire que la limite f est intégrable au sens de jauge et

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \bar{g}_n(x)\ m(dx) = \int_a^b f(x)\ m(dx).$$

Il s'en suit

$$\int_a^b f(x)\ L(dx) = \int_a^b f(x)\ m(dx).$$

Ce qui achève la preuve du théorème 3.1.

∎

Montrons, à présent, le théorème suivant.

<u>Théorème 3.2</u>

Si une fonction positive f de $\overline{R}$ dans R est intégrable au sens de jauge sur [a,b], elle l'est au sens de Lebesgue sur [a,b] et les deux intégrales sont égales.

Démonstration:

D'après le corollaire du théorème III.11.1, il existe une suite de fonctions en escalier telle que

$$(4) \quad \int_a^b |\ f(x) - f_n(x)\ |\ m(dx) \to 0.$$

Ceci entraîne que (f_n) est une suite de Cauchy dans $L^1(L)$. En effet, pour les fonctions en escalier f_n et f_p on peut écrire

$$\int_a^b |\ f_n(x) - f_p(x)\ |\ L(dx) = \int_a^b |\ f_n(x) - f_p(x)\ |\ m(dx)$$

$$\leq \int_a^b |\ f_n(x) - f(x)\ |\ m(dx) + \int_a^b |\ f_p(x) - f(x)\ |\ m(dx)$$

D'après (4), chaque terme du membre de droite de la dernière inégalité est aussi petit que l'on souhaite dès que n et p sont assez grands, d'où (f_n) est bien de Cauchy pour L. Or, l'espace $L^1(R,L)$ est complet, donc la suite (f_n) converge dans $L^1(R,L)$ vers une fonction $F \in L^1(L)$.

Puisque $F \in L^1(L)$, elle résulte intégrable au sens de jauge et, par application du théorème 3.1, son intégrale de jauge et celle de Lebesgue sont égales. On en déduit

$$\int_a^b | F(x) - f(x) | \, m(dx)$$

$$\leq \int_a^b | F(x) - f_n(x) | \, m(dx) + \int_a^b | f_n(x) - f(x) | \, m(dx)$$

$$\leq \int_a^b | F(x) - f_n(x) | \, L(dx) + \int_a^b | f_n(x) - f(x) | \, m(dx)$$

Comme $f_n \to F$ dans $L^1(L)$, le premier terme du membre de droite tend vers 0. D'après (4), le second terme du membre de droite tend également vers 0. Ceci implique $F(x) = f(x)$ m-presque partout.

Les ensembles de mesure m-nulle et de mesure L-nulle étant les mêmes, on en déduit que $F(x) = f(x)$ L-presque partout aussi et donc que f est Lebesgue intégrable. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \int_a^b f(x) \, m(dx) - \int_a^b f(x) \, L(dx) \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) \, m(dx) + \int_a^b (f_n(x) - f(x)) \, L(dx) \right|$$

$$\leq \int_a^b | f(x) - f_n(x) | \, m(dx) + \int_a^b | f(x) - f_n(x) | \, L(dx).$$

Et comme $\int_a^b | f(x) - f_n(x) | \, m(dx) \to 0$ ainsi que

$\int_a^b | f(x) - f_n(x) | \, L(dx)$, on obtient

$$\int_a^b f(x) m(dx) = \int_a^b f(x) L(dx).$$

■

On vient donc de prouver que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle positive sur un intervalle [a,b] est égale à son intégrale de jauge sur [a,b]. D'après la remarque 1 et la linéarité des intégrales, ceci reste vrai pour une fonction réelle quelconque f.

Il nous faut encore montrer que la propriété reste valable lorsqu'on prend des fonctions f intégrables sur R.

Pour ce faire, nous allons démontrer que l'intégrale sur R d'une fonction peut s'écrire comme une somme infinie d'intégrales sur des intervalles bornés.

Nous allons considérer le cas de l'intégrale de jauge; la preuve pour l'intégrale de Lebesgue est tout à fait similaire.

Nous allons montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ m(dx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{[n,n+1[} f(x)\ m(dx).$$

Définissons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } x \in [n,n+1[\\ 0 & , \text{ ailleurs dans } \overline{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$. Il est clair que

$$S_N(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ pour } x \text{ dans } [0,N+1[\\ 0 & , \text{ ailleurs dans } \overline{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

La suite $S_N(x)$ converge vers $f(x)$ m-presque partout dans $[0,+\infty[$. De plus, $| S_N(x) | \leq | f(x) |$ m-presque partout. Comme f est intégrable au sens de jauge, on peut appliquer le théorème de convergence dominée III.8.1 pour l'intégrale de jauge et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\ m(dx) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} S_N(x)\ m(dx).$$

Par définition de S_N et par linéarité de l'intégrale de jauge,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} S_N(x)\ m(dx) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\ m(dx).$$

d'où

$$(5) \qquad \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\ m(dx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[n,n+1[} f(x)\ m(dx).$$

Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S'_N = \Sigma\, f_n(x)$. Il est clair que

$$S'_N(x) = \sum_{n=-N}^{0} f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, pour } x \text{ dans }]-N,0[\\ 0 & \text{, ailleurs dans } \overline{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

Le même procédé nous conduit à l'égalité suivante:

$$(6) \quad \int_{R_-} f_n(x)\ m(dx) = \sum_{n=-\infty}^{0} \int_{R_-} f(x)\ m(dx).$$

En regroupant (5) et (6) et par additivité de l'intégrale sur l'intervalle d'intégration, on obtient

$$(7) \quad \int_{R} f_n(x)\ m(dx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{[n,n+1[} f(x)\ m(dx).$$

Le même raisonnement appliqué à l'intégrale de Lebesgue conduit à

$$(8) \quad \int_{R} f_n(x)\ L(dx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{[n,n+1[} f(x)\ L(dx).$$

Comme nous avons égalité entre l'intégrale de Lebesgue et celle de jauge sur un intervalle borné, (7) et (8) nous permettent de dire qu'on garde aussi cette égalité sur R tout entier. Ceci termine la preuve de la propriété énoncée au début de ce chapitre.

Annexe A1

Théorème A_1

> Soit K une collection d'intervalles fermés de $\overline{R}$ telle que toute paire d'intervalles de K possède un point commun. Alors, il existe un point a^* de $\overline{R}$ qui appartient à tous les intervalles de la collection.

Démonstration:

Soit A l'ensemble des origines des intervalles de K. Si $a \in A$ et si b_1 est l'extrémité d'un intervalle de K, alors $a \leq b_1$ car il existe un nombre b tel que $[a,b] \in K$ et il existe un nombre a_1 tel que $[a_1,b_1] \in K$. Par hypothèse, nous pouvons trouver un nombre x tel que $x \in [a,b]$ et $x \in [a_1,b_1]$. Puisque $x \in [a,b]$, $a \leq x$ et comme $x \in [a_1,b_1]$, $x \leq b_1$. Nous en déduisons $a \leq b_1$.

Soient a^* le suprémum de l'ensemble A et $[a_1,b_1]$ un intervalle de la collection K. Pour tout $a \in A$, nous savons que $b_1 \geq a$. Donc, b_1 est un majorant de A et par définition de a^*, il doit être au moins égal à a^*. Par conséquent, $a^* \leq b_1$. D'autre part, $a_1 \in A$ et a^* est un majorant de A, donc $a_1 \leq a^*$. Tout ceci implique $a_1 \leq a^* \leq b_1$. Ainsi, $a^* \in [a_1,b_1]$ qui est un intervalle arbitraire de la collection K.

■

Condition de Lipschitz

Rappelons qu'une fonction g : D -> R est <u>lipchitzienne</u> s'il existe un nombre L tel que pour tout y' et y de D,

$$| g(y') - g(y) | \leq L | y' - y |.$$

Ce nombre L est appelé <u>constante de Lipschitz</u> pour g.

On sait qu'une fonction lipchitzienne sur E est continue sur E.

Nous pouvons prouver un lemme qui nous permettra de vérifier qu'une fonction g est lipchitzienne.

<u>Lemme A_2</u>

> Soient g une fonction réelle et continue sur un intervalle D de R et L un réel. Si l'ensemble des points $x \in D$ en lesquels $Dg(x)$ n'existe pas ou $| Dg(x) | > L$ est fini, alors g est lipschitzienne et L est une constante de Lipchitz pour g.
>
> En particulier, si la dérivée de g existe partout et est bornée, g est lipchitzienne.

Démonstration:

Soient x' et x" deux points de D et nous supposons que x' < x". Dans l'intervalle ouvert]x',x"[, il existe un nombre fini de points en lesquels g n'admet pas de dérivée ou $| Dg(x) | > L$; nous appelons ces points $x_1, \ldots, x_n$ que nous avons rangés par ordre croissant. Nous définissons x_0 comme étant x' et x_{n+1} comme étant x". D'après le théorème de la moyenne, pour $i = 0, \ldots, n$, il existe un point $\overline{x_i}$ de $]x_i, x_{i+1}[$ tel que

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = Dg(\overline{x_i})\ (x_{i+1} - x_i).$$

Puisque $| Dg(\overline{x_i}) | \leq L$,

$$-L\ (x_{i+1} - x_i) \leq g(x_{i+1}) - g(x_i) \leq L\ (x_{i+1} - x_i)$$

En additionnant ces inégalités membre à membre pour $i = 0, \ldots, n$, nous obtenons

$$-L\ (x_{n+1} - x_0) \leq g(x_{n+1}) - g(x_0) \leq L\ (x_{n+1} - x_0),$$

ce qui est la même chose que

$$|\ g(x'') - g(x')\ | \leq L\ |\ x'' - x'\ |.$$

■

Continuité absolue

Définition

> Une fonction réelle f définie sur un intervalle $B \subset R$ est dite <u>absolument continue</u> sur B si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que , quel que soit le nombre fini de sous-intervalles de B, $]x_1', x_1"]$, ..., $]x_k', x_k"]$, disjoints deux à deux, de longueur totale inférieure à δ,
>
> $$(1) \qquad \sum_{j=1}^{k} | f(x_j") - f(x_j') | < \varepsilon .$$

Il est évident que si f est absolument continue sur $B \subset R$, elle est continue sur B. En effet, soient $\varepsilon > 0$ et le $\delta > 0$ qui lui correspond dans la définition. Soit $x \in B$. Définissons $G =]\, x - \delta,\ x + \delta\, [$. Si $\bar{x} \in B \cap G$, nous choisissons $x_1' = x$ et $x_1" = \bar{x}$ si $x < \bar{x}$ et nous prenons $x_1' = \bar{x}$ et $x_1" = x$ si $x \geq \bar{x}$. Alors, la somme dans (1) possède un seul terme et l'inégalité (1) s'écrit

$$| f(\bar{x}) - f(x) | = | f(x_1") - f(x_1') | < \varepsilon \quad .$$

Ce qui montre que f est continue en x.

Second théorème de la moyenne

> Soient $[a,b]$ un intervalle borné, f et Φ deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et telles que Φ est soit positive, soit négative sur $[a,b]$. Si Φ est une intégrale indéfinie de Φ, alors il existe un nombre $\xi \in [a,b]$ tel que
>
> $$\int_a^b f(u)\ \Phi(u)\ m(du) = \Phi(a) \int_a^\xi f(u)\ m(du) + \Phi(b) \int_\xi^b f(u)\ m(du).$$

Pour la preuve de ce théorème, nous renvoyons à [7].

Annexe A2

Démonstration du lemme V.2.1

Pour chaque $x \in E$, on choisit un intervalle ouvert, borné, contenant x, $\gamma_1(x)$ et on définit $\gamma_2(x)$ comme étant $\gamma(x) \cap \gamma_1(x)$.

Pour chaque entier $n > 0$, on définit $\mathcal{Q}_1[n]$ comme étant l'ensemble des intervalles

$\{Q(n,0),\ Q(n,1),\ \ldots,\ Q(n,2.4^n + 1)\}$

où $Q(n,0) =]-\infty, -2^n]$

$Q(n,j) =]-2^n + (j-1)2^{-n}, -2^n + j2^{-n}]$, $j = 1, \ldots, 2.4^n$

.

.

$Q(n,2.4^n + 1) =]2^n, \infty[$.

Ces intervalles sont disjoints deux à deux et leur union est R. De plus, chaque intervalle de $\mathcal{Q}_1[n+1]$ est obtenu en subdivisant un intervalle de $\mathcal{Q}_1[n]$; ainsi, si A' est un intervalle de $\mathcal{Q}_1[n']$ et A'' est un intervalle de $\mathcal{Q}_1[n'']$ avec $n'' > n'$ alors ou bien A' et A'' sont disjoints, ou bien $A'' \subset A'$.

On arrange ces intervalles en une suite, de la façon suivante:
on prend d'abord les intervalles qui appartiennent à $\mathcal{Q}_1[1]$, on prend ensuite ceux qui appartiennent à $\mathcal{Q}_1[2]$ et ainsi de suite. On note cette suite $Q^*(1), Q^*(2), \ldots$
De cette suite, on choisit successivement les intervalles $A_1, A_2, \ldots$ vérifiant les deux conditions suivantes:

<u>Propriété (1):</u>

> Pour chaque $n \in N^*$, A_n contient un point $x \in E$ et $\bar{A}_n \subset \gamma_2(x)$.

Propriété (2):

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, A_n n'est inclus dans aucun $A_{n'}$ avec $n' < n$.

Pour chaque entier $i > 0$, il existe, d'après la propriété (1), un point $x \in E$ contenu dans A_i tel que $\overline{A_i} \subset \gamma_2(x)$. Ce x est rebaptisé $\overline{x_i}$ et donc (ii) est prouvé.

Montrons, à présent, que les A_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont disjoints deux à deux. Supposons par l'absurde que pour $i \neq i' \in \mathbb{N}^*$, A_i et $A_{i'}$ ont un point commun, soit y. A_i est de la forme $Q(n,j)$ et $A_{i'} = Q(n',j')$ avec n', n, j, j' quelconques. n ne peut être égal à n' car les intervalles appartenant à $\mathcal{Q}_1[n]$ sont disjoints deux à deux. Supposons $n' > n$ (le cas $n' < n$ peut être examiné de manière analogue). Ou bien $A_{i'} \subset A_i$, ou bien A_i et $A_{i'}$ sont disjoints. Or, ils ne peuvent être disjoints car ils contiennent tous les deux le point y. On en déduit $A_{i'} \subset A_i$, ce qui contredit la propriété (2). Il s'en suit donc que les A_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont donc disjoints deux à deux.

Il reste à prouver que la condition (i) est vérifiée. Soit $x \in E$. Montrons que $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Posons $\gamma_2(x) =]a,b[$, donc $x \in]a,b[$, et $\delta = \min(x-a,b-x)$, donc $\delta > 0$. On choisit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(1) \qquad 2^N > |x| \text{ et } 2^{-N} < \delta \quad .$$

Puisque l'union des intervalles $Q(N,1)$, ..., $Q(N,2.4^N + 1)$ est $\mathbb{R}$ tout entier, x appartient à l'un de ces intervalles, soit $Q(N,j(N))$. $Q(N,j(N))$ ne peut être l'un des intervalles non bornés $Q(N,0)$ ou $Q(N,2.4^N + 1)$ car ces deux derniers intervalles ne contiennent aucun point de $]2^{-N},2^N[$ qui lui contient, d'après (1), le point x. On en déduit que $Q(N,j(N))$ est un intervalle ouvert à gauche de mesure égale à $2^{-N} < \delta$. Comme $x \in Q(N,j(N))$, il s'en suit $\overline{Q(N,j(N))} \subset]x-\delta,x+\delta[$ et puisque $]x-\delta,x+\delta[\subset]a,b[$, il vient $\overline{Q(N,j(N))} \subset \gamma_2(x)$. Ainsi, l'intervalle $Q(N,j(N))$ vérifie la propriété (1). S'il vérifie aussi la propriété (2), il a été choisi dans la suite A_1, A_2, ... et donc, dans ce cas $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Si $Q(N, j(N))$ ne vérifie pas la propriété (2), alors il existe $n' \in \mathbb{N}^*$ tel que $Q(N, j(N)) \subset A_{n'}$ et dans ce cas aussi, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ceci achève la preuve du lemme. ∎

VI CONCLUSION

Le principal avantage de l'intégrale de jauge réside dans le fait que sa construction est proche de celle de l'intégrale de Riemann et aboutit à l'intégrale de Lebesgue sans établir au préalable la théorie de la mesure. Malheureusement, elle garde certains inconvénients de l'intégrale de Lebesgue, notamment, son emploi dans les démonstrations des propriétés et dans les applications reste assez technique.

Nous savons que l'intégrale de Lebesgue se généralise aux espaces à plusieurs dimensions. L'un des théorèmes les plus importants de cette théorie est, sans aucun doute, le théorème de Fubini qui permet de réduire une intégrale multiple à des intégrales itérées. Or, nous avons vu que dans R, l'intégrale de jauge et celle de Lebesgue sont égales. Nous ne pouvons conclure qu'il en est de même dans un espace à plusieurs dimensions qu'après avoir, notamment, établi un théorème analogue à celui de Fubini pour l'intégrale de jauge. Ceci ne peut se faire sans de nombreux préliminaires et développements poussés qui risquent de déborder du cadre de ce mémoire. Cependant, il nous semble important de décrire les principales étapes de la démarche à suivre.

Les notions de jauge, de partition assignée, de partition δ-fine et de somme de Riemann s'étendent facilement à R^n, $n \in N$, $n \geq 1$, une fois définis les pavés de R^n, ainsi que leur mesure (si A est un pavé de R^n, sa mesure m(A) est égale au produit des mesures de chaque intervalle facteur). Nous pouvons, alors, définir l'intégrale de jauge sur une partie B de R^n comme suit:

Définition

Etant données une partie D de R^n, une fonction f de D dans R et une partie B de D, on dit que <u>f est intégrable au sens de jauge sur</u> B s'il existe un réel J tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver une jauge γ sur R^n vérifiant la condition suivante:
quelle que soit la partition γ-fine $\mathcal{P}$ de R^n, la somme de Riemann $S(\mathcal{P};f_B)$ est finie et

$$|S(\mathcal{P};f_B) - J| < \varepsilon \quad .$$

La plupart des théorèmes des chapitres II et III restent valables dans R^n moyennant quelques modifications. Dans R, nous approchions une fonction intégrable par des fonctions en escalier; dans R^n, nous approchons plutôt, une fonction intégrable par la fonction limite d'une suite de fonctions en escalier (appelée U-fonction ou L-fonction selon que la suite est croissante ou décroissante). Ceci nous permet, enfin, d'établir le théorème de Fubini pour l'intégrale de jauge.

Théorème de Fubini

> Soit A un pavé de R^n qui est le produit cartésien $A(1) \times A(2)$ d'un pavé $A(1)$ de R^s et d'un pavé $A(2)$ de R^t où $s + t = n$. Si f est une fonction intégrable sur A, alors il existe un sous-ensemble $N(1)$ de $A(1)$ avec $m(N(1)) = 0$ tel que
>
> i) pour chaque $u \in A(1) \setminus N(1)$, la fonction
>
> $v \to f(u,v)$ $(v \in A(2))$ est intégrable sur $A(2)$;
>
> ii) la fonction
>
> $$v \to \int_{A(2)} f(u,v)\, m(dv)$$
>
> est intégrable sur $A(1) \setminus N(1)$; et
>
> iii) $$\int_{A(1)\setminus N(1)} \int_{A(2)} f(u,v)\, m(dv)\, m(du) = \int_A f(x)\, m(dx).$$

Pour plus de détails, nous renvoyons à [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] E.J.McShane
Unified Integration, Academic Press, 1983.

[2] J.Kurzweil
Nichtabsolut konvergente Integrale, Teubner, Leipzig, 1980.

[3] R.Henstock
Theory of integration, Butterworths, London, 1963.

[4] J.Mawhin
Introduction à l'analyse, CABAY, 1984.

[5] R.Couty et J.Ezra
Analyse, Armand Colin, 1967

[6] E.Asplund et L.Bungart
A first course in integration, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[7] R.Descombes
Intégration, Hermann, 1972.

[8] H.L.Royden
Real analysis, Macmillan Publishing Co., 1968.

[9] F.Callier
Théorie de la mesure, cours de seconde candidature en sciences mathématiques.