

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Optimisation des paramètres de la relation photosynthèse - lumière du phytoplancton d'eau douce. Validation de différents modèles dans les lacs Kivu et Muhazi (Rwanda) et dans la Meuse.

WATELET, Isabelle

Award date:
1991

Awarding institution:
Universite de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

FACULTÉS UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR
FACULTÉ DES SCIENCES

Année académique 1990 - 1991

Optimisation des paramètres de la
relation photosynthèse - lumière du
phytoplancton d'eau douce.
Validation de différents modèles
dans les lacs KIVU et MUHAZI (Rwanda)
et dans la Meuse.

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licencié en Sciences
mathématiques
par

Isabelle WATELET

Promoteur : M. Jean-Jacques STRODIOT

Co-promoteur : M. Jean-Pierre DESCY



OPTIMISATION DES PARAMÈTRES DE LA RELATION PHOTOSYNTHÈSE-
LUMIÈRE DU PHYTOPLANCTON D'EAU DOUCE.
VALIDATION DE DIFFÉRENTS MODÈLES DANS LES LACS KIVU ET
MUHAZI (RWANDA) ET DANS LA MEUSE.

Isabelle WATELET

Résumé :

Un des objectifs de ce mémoire est d'optimiser, par la méthode des moindres carrés, les paramètres d'activité photosynthétique (I_k et P_{max}) et de photoinhibition (a, n, b, m) pour différentes équations décrivant la relation photosynthèse-lumière du phytoplancton d'eau douce. A partir de cette relation optimisée, un second objectif est d'évaluer, de manière précise, la production phytoplanctonique journalière (par double intégration sur la profondeur et le temps), et enfin, de déterminer lequel des modèles optimisés produit le meilleur ajustement de la courbe photosynthèse-lumière.

La réalisation de tout ceci, ainsi que les graphes des relations photosynthèse-lumière, s'effectue au moyen du programme BIOPTI, semi-interactif et travaillant sur les données brutes.

Abstract :

The aim of this work is to optimize, by the least squares method, the photosynthetic activity parameters (I_k and P_{max}), and the photoinhibition parameters for different equations describing photosynthesis-light curves. So we can estimate precisely the photoplanktonic production in one day, and determine which equation gives the best fit to the photosynthetic-light curve.

A semi-interactive Fortran program called BIOPTI has been written to realize this aim. In particular, it allows, by means of graphics to compare the validity of several well known models.

Mémoire de licence en sciences mathématiques
Juin 1991
Département de mathématiques appliquées
Promoteur : Jean-Jacques STRODIOT
Co-promoteur : Jean-Pierre DESCY

Au terme de ces années d'études,
mon souhait était de pouvoir me
consacrer à l'approfondissement des
mathématiques dans une autre discipline
que la mienne. Je remercie
chaleureusement Messieurs Jean-Jacques
Strodiet et Jean-Pierre Desly
d'avoir répondu à mon attente,
et je leur suis reconnaissante de
m'avoir suivie et guidée tout au
long de mes recherches.

TABLE DES MATIERES

	page
Résumé.....	1
Remerciements.....	2
CHAPITRE I : QUELQUES ELEMENTS D'ECOLOGIE.....	5
1.1. La production primaire.....	6
1.2. L'énergie lumineuse.....	10
1.2.1. L'énergie lumineuse incidente	10
1.2.2. Transmission de la lumière dans l'eau	10
1.3. La température.....	13
1.4. La relation photosynthèse-lumière.....	15
CHAPITRE II : MATERIEL ET METHODES.....	19
II.1. Mesure de l'activité photosynthétique.....	19
II.1.1. Principe de la méthode au ¹⁴ C	20
II.1.2. Principe de la méthode à l'O ₂	21
II.2. Mesure de l'intensité lumineuse.....	22
II.3. Obtention des relations photosynthèse-lumière d'après les valeurs expérimentales.....	24
II.4. Optimisation des relations photosynthèse- lumière.....	30
II.4.1. Méthodes précédentes.....	30
II.4.2. Méthode d'optimisation utilisée....	31
II.4.3. Optimisation des paramètres.....	32
II.4.4. Evaluation de la production journalière.....	34

II.5.	Données disponibles.....	37
II.5.1	Le lac KIVU (Rwanda).....	37
II.5.2	Le lac MUHAZI (Rwanda).....	39
II.5.3	La MEUSE (Belgique).....	41

CHAPITRE III : PROBLEME DES MOINDRES CARRÉS NON LINEAIRE.

III.1.	Présentation du problème.....	44
III.2.	Formulation du problème des moindres carrés non linéaire.....	46
III.2.1	Méthode de GAUSS-NEWTON.....	47
III.2.2	Méthode de NEWTON.....	50
III.2.3	Comparaison des 2 méthodes.....	51

CHAPITRE IV : ALGORITHME DE LEVENBERG-MARQUARDT.....

IV.1.	Rappel : méthode de la région de confiance..	57
IV.2.	Méthode de LEVENBERG-MARQUARDT.....	58
IV.2.1.	Calcul du multiplicateur μ_k	61
IV.2.2.	Calcul de la direction s_k	63
IV.2.3.	Mise à jour du rayon δ_k	64
IV.2.4.	Scaling.....	70
IV.2.5.	Algorithme de Levenberg-Marquardt...	71

CHAPITRE V : PRESENTATION DES RESULTATS.....

V.1.	Lac KIVU (Rwanda).....	74
V.2.	Lac MUHAZI (Rwanda).....	78
V.3.	MEUSE (Belgique).....	83
V.4.	Conclusions.....	88

V.4.1. Les paramètres de photoinhibition.....	88
V.4.2. Les modèles.....	89

ANNEXE : programme BIOPTI.....	91
BIBLIOGRAPHIE.....	B1
Merci à tous	fin

CHAPITRE I :

QUELQUES ÉLÉMENTS D'ÉCOLOGIE.

INTRODUCTION

Le département d'écologie des eaux douces a entrepris, ces dernières années, plusieurs études sur la production primaire, dans des lacs rwandais. Grâce à l'optimisation, ce travail a permis d'améliorer les résultats que les écologistes avaient obtenus. En outre, il propose un programme effectuant l'optimisation de la relation photosynthèse-lumière pour d'autres études antérieures ou futures.

Dans un premier chapitre, nous définirons les quelques termes d'écologie que nous utiliserons. Nous expliciterons ce qu'est la production primaire, ainsi que l'influence de la lumière et de la température sur celle-ci. Ce qui nous permettra d'introduire la relation photosynthèse-lumière.

Nous décrirons ensuite, dans un deuxième chapitre, le matériel et les méthodes qui ont été utilisés pour effectuer les mesures, pour obtenir la relation photosynthèse-lumière ainsi que pour l'optimisation de celle-ci.

Les deux chapitres suivants (III et IV) sont consacrés à expliciter la méthode mathématique utilisée pour l'optimisation.

Pour terminer, nous donnerons et commenterons quelques uns des résultats obtenus pour chacun des cas considérés (lac Kivu, lac Muhazi, Meuse).

I.1. LA PRODUCTION PRIMAIRE

Le *phytoplancton* ou *plancton végétal* désigne un ensemble d'algues microscopiques en suspension dans l'eau. Les communautés phytoplanctoniques peuplent des milieux d'eau stagnantes (lacs, étangs et marais), des rivières au cours lent et des océans.

Ces algues possèdent, pour la plupart, de la *chlorophylle* et d'autres pigments qui, comme les végétaux verts terrestres, leur permettent de réaliser la *photosynthèse*. En termes simplifiés, la photosynthèse comporte deux étapes :

- la phase "claire" : ce terme recouvre toute une série de processus photochimiques, au cours desquels la lumière solaire est captée par les pigments des chloroplastes et transformée en énergie chimique.

- la phase "sombre" : au cours de laquelle l'énergie chimique est utilisée pour fabriquer des molécules organiques à partir d'éléments minéraux : CO_2 , H_2O , NO_3^- , NH_4^+ , PO_4^{3-} , etc.

Ces algues chlorophylliennes, photosynthétiques, sont dites *autotrophes* : elles peuvent se nourrir à partir d'éléments minéraux. D'autres organismes, parmi les bactéries, sont également autotrophes, en utilisant comme sources d'énergie des composés chimiques, plutôt que la lumière (*chimiosynthèse*).

La photosynthèse implique aussi des échanges gazeux :

- une assimilation de dioxyde de carbone (CO_2) au cours de la phase sombre ;
- une production d'oxygène (O_2) au cours de la phase claire.

Comme il existe un couplage entre les deux phases, la photosynthèse peut se mesurer soit en CO_2 assimilé ($\text{mgC}/\text{l}/\text{h}$), soit en O_2 produit ($\text{mgO}_2/\text{l}/\text{h}$).

Ce couplage, entre les réactions photochimiques (qui produisent notamment de l' O_2) et les réactions biochimiques (qui fixent le CO_2), permet d'établir une équivalence entre les deux estimations de la photosynthèse. Cependant, le rapport (O_2 produit/ CO_2 assimilé) appelé *quotient photosynthétique* ou *PQ*, n'est pas toujours égal à 1, mais un peu plus élevé (de l' O_2 peut être produit par d'autres processus métaboliques, par exemple, par réduction des nitrates).

Le PQ d'une population algale peut être établi en mesurant la photosynthèse par les 2 méthodes. La valeur moyenne de la littérature est de 1.25, ce qui signifie que pour 1 mole de CO₂ assimilé, il y a 1.25 mole d'O₂ produit. La conversion en poids est donc

$$\begin{aligned}
 1 \text{ mgO}_2 \text{ produit} &= \frac{\text{poids atomique du C}}{\text{poids moléculaire de l'O}_2 \times 1.25} \text{ mgC assimilé} \\
 &= \frac{12}{32 \times 1.25} \text{ mgC assimilé} \\
 &= 0.3 \text{ mgC assimilé}
 \end{aligned}$$

La production primaire d'un écosystème est l'ensemble de ces processus de synthèse de carbone organique à partir du carbone minéral. Grâce à cette synthèse, les organismes producteurs croissent et se multiplient, constituant une nouvelle biomasse (mesurable en carbone organique) qui va nourrir les consommateurs. Ces derniers sont des *hétérotrophes*, incapables de fabriquer les matériaux organiques nécessaires à leur croissance. Ils se nourrissent des producteurs primaires, constituant le premier "maillon" de la chaîne trophique.

La plupart des bactéries sont également des *hétérotrophes*. Elles décomposent les matières organiques mortes, les convertissent en éléments minéraux et les utilisent pour leur croissance.

Le plus souvent, la production primaire est principalement le résultat de l'activité des végétaux autotrophes, autrement dit de la photosynthèse.

Un écosystème comprend donc une *biocénose* (ensemble des organismes vivants) en interaction constante avec un milieu caractérisé par un ensemble de facteurs physiques et chimiques. En milieu aquatique, les facteurs abiotiques importants pour la production primaire et le fonctionnement de l'écosystème sont l'énergie lumineuse, la température et les nutriments (sels nutritifs). L'hydrodynamique (débit, conditions de mélange, turbulence,...) et diverses composantes de la qualité de l'eau ont également une incidence sur la production primaire (fig. I.1).

Outre son activité photosynthétique, qui constitue son assimilation brute de carbone, une algue respire. C'est-à-dire qu'elle consomme une partie des produits photosynthétisés afin d'assurer sa maintenance cellulaire. De plus, elle peut, dans certaines circonstances, excréter de petites molécules organiques. Ces deux processus constituent une perte de carbone pour la cellule algale. En déduisant cette perte de la production brute, nous obtenons la production nette, qui est la quantité de carbone assimilé utilisable par l'algue pour sa croissance et la constitution de substances de réserve .

I.2. L'ÉNERGIE LUMINEUSE

I.2.1. L'énergie lumineuse incidente

La lumière incidente (I_0), exprimée en $\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$ ($1\mu\text{E} = 6 \cdot 10^{-17}$ photons), subit des pertes à la surface de l'eau, causée par la réflexion de la surface elle-même. Celle-ci dépend de l'angle d'incidence des rayons solaires : elle est maximale en lumière rasante et minimale à la lumière perpendiculaire. De plus, elle augmente avec l'agitation de l'eau (vagues en surface). Il est admis que la lumière réfléchie par temps clair est de 5 à 6% du rayonnement incident (10% en hiver).

Les radiations actives pour la photosynthèse (PAR = Photosynthetically Active Radiation, en $\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$) correspondent au domaine du rayonnement visible (400 à 700nm). Ces radiations représentent environs 50% de l'énergie incidente globale.

I.2.2. Transmission de la lumière dans l'eau

Lorsque la lumière pénètre dans l'eau, elle est dispersée et absorbée. Ce double phénomène, appelé *atténuation*, est provoqué par les molécules d'eau, les substances dissoutes et les particules en suspension.

L'atténuation est propre à chaque longueur d'onde de la lumière. L'absorption par l'eau pure se fait principalement dans le rouge. Pour les substances dissoutes et les matières en suspension, l'absorption est, de manière générale, plus forte pour les courtes longueurs d'ondes (rouge, orange) et décroît pour les grandes longueurs d'ondes (bleu, violet).

L'atténuation verticale du rayonnement lumineux suit approximativement la loi de BEER-LAMBERT. En désignant par I_z , l'intensité à la profondeur z , cette loi donne :

$$I_z = I'_0 \cdot e^{-kz} \quad (1.1)$$

où I'_0 est l'intensité transmise sous la surface, en $\mu E/m^2/s$ ($I'_0 = 95\%$ de I_0)

k est le coefficient d'atténuation verticale ou coefficient d'extinction, en m^{-1} .

Le coefficient d'extinction détermine donc la quantité d'énergie lumineuse pénétrant dans la colonne d'eau. Ainsi, la profondeur augmentant, l'énergie lumineuse diminue de manière exponentielle.

La limite inférieure à laquelle la photosynthèse peut compenser la respiration se situe habituellement à la profondeur à laquelle il ne reste plus qu'1% de l'énergie incidente.

Cette valeur permet de définir la zone photique ou euphotique (Z_e), dont la limite inférieure se situe à $4.6/k$ mètres (fig.1.2).

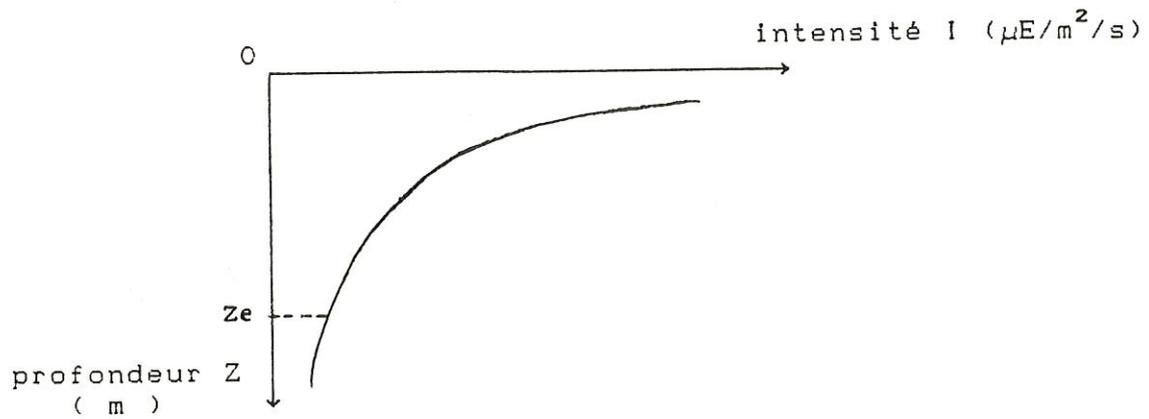


Fig. 1.2 : atténuation verticale du rayonnement lumineux.

Z_e = limite inférieure de la zone photique

I.3. LA TEMPERATURE

L'assimilation photosynthétique de carbone dépend de la température. Celle-ci agit principalement sur la "phase sombre", en contrôlant la vitesse des réactions biochimiques (synthèse de molécules organiques simples à partir de CO₂).

Comme toutes les réactions chimiques, le contrôle de l'assimilation photosynthétique par la température suit la loi d'Arrhenius : *La vitesse des réactions croît de façon exponentielle avec la température* (Fig 1.3).

L'effet de la température sur un processus chimique ou physiologique est mesuré par le Q_{10} : augmentation du taux de la réaction pour une élévation de température de 10°C

$$Q_{10} = \frac{\text{taux de réaction à } T + 10^{\circ}\text{C}}{\text{taux de réaction à } T}$$

La radiation solaire de grande longueur d'onde est absorbée à la surface de l'eau, généralement 90% dans le 1^{er} mètre et 99% à 2m. Ce sont donc surtout les couches de surface qui sont réchauffées par l'énergie solaire.

La température du milieu dépend également des variations climatiques et météorologiques (les réchauffements et les refroidissements se font lentement) et du rapport *surface/volume* de l'étendue d'eau (par exemple, un lac profond, de surface faible aura une température inférieure à un lac de même profondeur mais de surface plus grande).

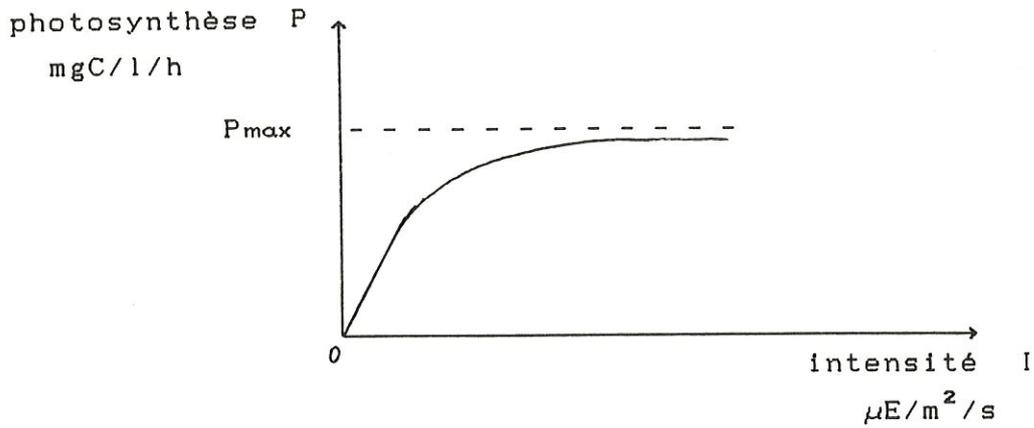
La productivité d'un milieu aquatique est donc en relation étroite avec sa morphologie. Elle dépend en particulier de la surface et de la profondeur.

I.4. LA RELATION PHOTOSYNTHÈSE-LUMIÈRE

La technique utilisée pour mesurer la photosynthèse du phytoplancton est celle des bouteilles claires et sombres : une production d'oxygène et une assimilation de CO₂ se produisent dans les bouteilles claires, alors qu'une consommation d'O₂ et une production de CO₂ se produisent dans les bouteilles sombres, suite à la respiration du phytoplancton.

Ces mesures sont effectuées à différentes profondeurs (z) et permettent ainsi d'obtenir une relation photosynthèse-profondeur (soit $P = f(z)$). Connaissant la loi d'extinction de l'intensité lumineuse en fonction de la profondeur (soit $z = g(I)$, loi de BEER-LAMBERT) il est ainsi possible d'établir une relation photosynthèse-lumière (soit $P = (f(g))(I)$). (Ceci est expliqué en détails dans le chapitre II)

Cette relation entre le taux de photosynthèse P, et la lumière reçue, I, présente, chez tous les végétaux photosynthétiques, une saturation à partir d'un certain niveau d'intensité lumineuse (variable suivant la photoadaptation), P atteint alors une valeur maximale, appelée P_{max} :



Cette relation simple est bien décrite par l'équation de SMITH(1936),

$$P = P_{\max} \frac{I/I_k}{(1 + (I/I_k)^2)^{1/2}}$$

que l'on retrouve dans les équations plus "complètes" : TALLING (1957), VOLLENWEIDER (1965), JASSBY & PLATT (1980), IWAKUMA & YASUNO (1983). Nous en étudierons plusieurs dans le cadre de ce mémoire.

Le plus général est celui de Vollenweider. Il s'exprime sous la forme suivante :

$$P = P_{\max} \frac{I / I_k}{\sqrt{1 + (I/I_k)^2}} \cdot \frac{1}{\left[1 + (a I / 2I_k)^2 \right]^{n/2}}$$

où $P = P(z, t)$ est le taux de photosynthèse à la profondeur z ,
au temps t ,

$I = I(z, t)$ est l'intensité lumineuse photosynthétiquement
active reçue dans le milieu à la profondeur z ,
au temps t ,

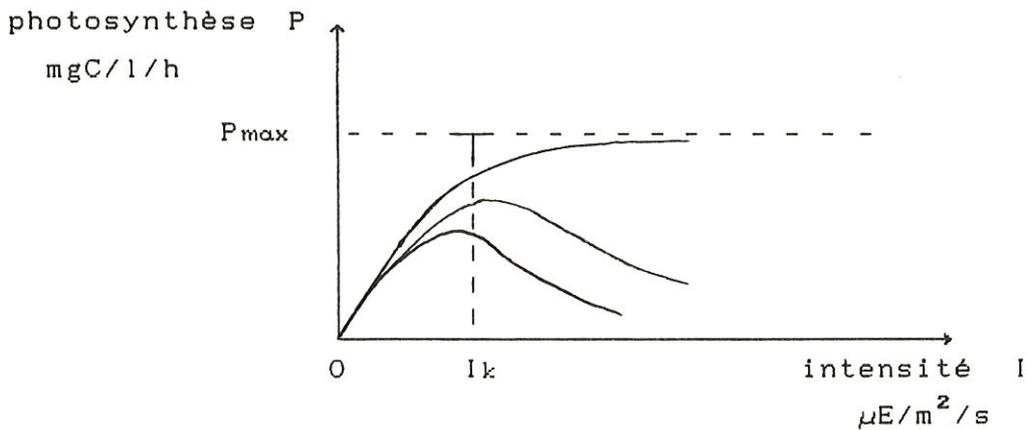
P_{max} est la photosynthèse maximale à intensité saturante,

I_k est l'intensité lumineuse à la profondeur à
laquelle la saturation de la lumière est détectée.

Elle équivaut à une constante de saturation .

a et n sont les paramètres de photoinhibition.

Tous ces modèles décrivent une famille de courbes du
type suivant:



Sur ces courbes, nous pouvons distinguer 3 parties :

1°) Si $I < I_k$, la photosynthèse est proportionnelle à l'énergie lumineuse absorbée par la chlorophylle (photosynthèse en lumière limitante).

2°) Si $I > I_k$, nous observons que P tend vers un plateau puis décroît. Ce plateau représente une saturation des réactions photochimiques.

3°) Au-delà de ce plateau, se produit une photoinhibition, c'est-à-dire une diminution de l'activité photosynthétique. Ceci est dû en partie aux radiations U.V. (Elles s'atténuent rapidement avec la profondeur).

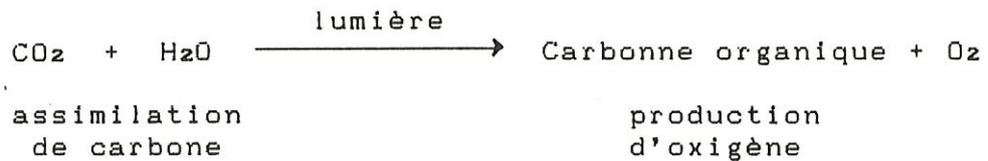
La photoinhibition est sans doute, en partie, un "artefact" lié à la technique de mesure, qui expose le phytoplancton à des profondeurs constantes souvent pendant plusieurs heures. Les algues incubées près de la surface reçoivent ainsi de fortes intensités pendant un certain laps de temps, alors que, en conditions naturelles, elles n'y sont exposées que pendant des temps courts grâce à la circulation des masses d'eau.

D'autres facteurs que l'intensité interviennent dans la variation du taux de photosynthèse. En milieu aquatique, notamment: la durée d'éclairement du jour, la composition et la densité du phytoplancton ainsi que son état nutritionnel.

CHAPITRE II :
MATÉRIEL ET MÉTHODES.

II.1. MESURE DE L'ACTIVITÉ PHOTOSYNTHÉTIQUE

Nous avons vu que les algues se servent de l'énergie lumineuse pour assimiler les molécules de carbone (CO₂) dissous dans l'eau (H₂O), et les transformer en molécules organiques. De plus, au cours du processus photosynthétique, les algues libèrent de l'oxygène (O₂). De façon très simplifiée, la photosynthèse se ramène à l'équation suivante :



Il existe alors 2 manières d'estimer l'activité photosynthétique : soit en évaluant la quantité de CO₂ assimilée (méthode au ¹⁴C), soit en mesurant l'O₂ produit. Pour évaluer la production phytoplanctonique, la méthode classique consiste à recueillir des échantillons d'eau à différentes profondeurs, et à les incuber dans des bouteilles à la profondeur à laquelle le prélèvement a été effectué (fig II.1).

Une autre manière de procéder est de fixer les bouteilles sur un cadre flottant, de façon à ce qu'elles soient maintenues couchées directement sous le niveau de l'eau. Pour remplacer les différentes profondeurs, elles sont recouvertes d'un filtre ne laissant passer qu'un pourcentage défini de lumière (entre 5 et 80% de lumière transmise), (fig II.2).

Le temps d'incubation varie de 2 à 5 heures. Au terme de celui-ci, l'assimilation de CO₂ ou la production d'O₂ est mesurée.

II.1.1. Principe de la méthode au ¹⁴C

L'échantillon d'eau comprenant les algues est incubé en présence d'un ajout d'activité connue de bicarbonate-¹⁴C (Na H¹⁴CO₃). Après incubation, les échantillons sont filtrés. L'activité des filtres ayant retenu les algues qui ont assimilé du ¹⁴C à la lumière est mesurée par un compteur à scintillation. Le rapport (*activité du filtre / activité initiale de l'eau*) donne un taux d'incorporation de carbone qui est affecté à la quantité totale de ¹²C minéral présent dans l'échantillon, pour déterminer le carbone assimilé pendant l'incubation. Une incubation, à l'obscurité est réalisée pour estimer la fixation hétérotrophe du carbone.

Cette méthode mesure le taux de fixation du CO_2 au cours des réactions biochimiques de la photosynthèse (carboxylation de RuBP, Ribulose Bi-Phosphate). Si le temps d'incubation est court, elle estime la photosynthèse brute (= carbone organique total synthétisé par les cellules algales). Si le temps d'incubation est long, plusieurs heures, des molécules récemment synthétisées peuvent être respirées : la mesure se rapproche alors de la photosynthèse nette, qui correspond au carbone assimilé disponible pour la croissance algale.

11.1.2 Principe de la méthode à l'oxygène

L'échantillon d'eau est prélevé dans une bouteille VAN DORN opaque. Il est ensuite reparti dans deux bouteilles de WINKLER (250 ml) pour mesurer la teneur en O_2 initiale (notons cette quantité initiale Q_0). La teneur en O_2 finale est mesurée dans les bouteilles claires incubées à différentes profondeurs ou intensités relatives (en quantité Q_1) et dans les bouteilles sombres (en quantité Q_2) . La différence ($Q_2 - Q_0$) correspond à la consommation d'oxygène de tout le plancton (phyto-, zoo-, et bactérioplancton). Tandis que ($Q_1 - Q_2$) donne la photosynthèse brute du phytoplancton, en production d' O_2 , à la profondeur ou à l'intensité relative correspondante.

II.2. MESURE DE L'INTENSITÉ LUMINEUSE

La transparence de l'eau est mesurée sur le terrain au moyen de deux cellules photoélectriques équipées de trois filtres : un vert, un rouge et un bleu. Une cellule est maintenue en surface pour servir de référence tandis que l'autre est plongée successivement à différentes profondeurs (z) : 0.10m - 0.25m - 0.50m - 0.75m - 1.00m - 1.50m - 2.00m - 2.50m . Ceci permet de calculer l'intensité relative (I_z) par rapport à l'intensité de surface (I₀).

L'utilisation des trois gammes de couleur donne la possibilité de déterminer l'extinction de la lumière dans l'eau, dans 3 parties du spectre photosynthétiquement actif. Pour chaque gamme de longueur d'onde, le coefficient d'extinction k est obtenu par la loi de BEER-LAMBERT (I.1):

$$I_z = I_0' e^{-kz}$$

$$\Leftrightarrow \ln I_z = \ln I_0' - kz$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{z} (\ln I_0' - \ln I_z)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{z} \ln \left(\frac{I_0'}{I_z} \right)$$

Le coefficient d'extinction moyen se détermine alors en calculant la moyenne des coefficients obtenus pour chaque filtre (VOLLENWEIDER, 1974) :

$$k_{\text{moyen}} = \frac{k_{\text{vert}} + k_{\text{rouge}} + k_{\text{bleu}}}{3}$$

La mesure de l'énergie lumineuse dans la colonne d'eau est réalisée en combinant les enregistrements de l'irradiance en surface avec la mesure de l'atténuation de la lumière dans l'eau.

L'irradiance en surface est mesurée avec un quantamètre LICOR LI-190 SB couplé à un data logger : le senseur réalise une mesure des radiations photosynthétiquement actives (PAR, en $\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$) qui est échantillonnée toutes les 5 à 10 secondes par le data logger. Ce dernier met en mémoire la moyenne, le minimum et le maximum des valeurs collectées pendant 15 minutes.

En Belgique, les intensités lumineuses totales au niveau du sol sont également transmises par les différentes stations de l'I.R.M. (en J/cm^2). le rayonnement global est intégré par demi-heure et la PAR constitue 50% de ce rayonnement global. La conversion des mesures et unités se fait de la façon suivante :

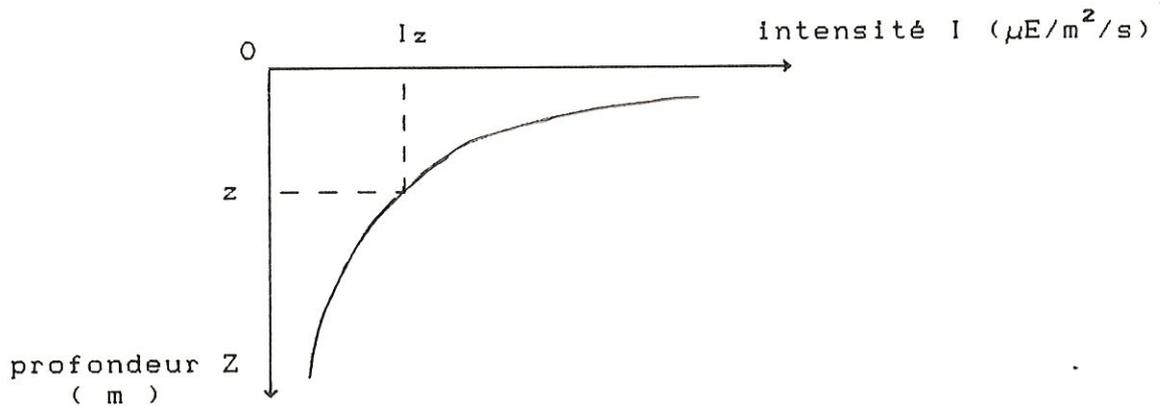
$$\text{PAR} (\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}) = 11.083 \times \text{mesure I.R.M.} (\text{J}/\text{cm}^2/\frac{1}{2}\text{h})$$

II.3. OBTENTION DES RELATIONS PHOTOSYNTHÈSE-LUMIÈRE À PARTIR DES VALEURS EXPÉRIMENTALES

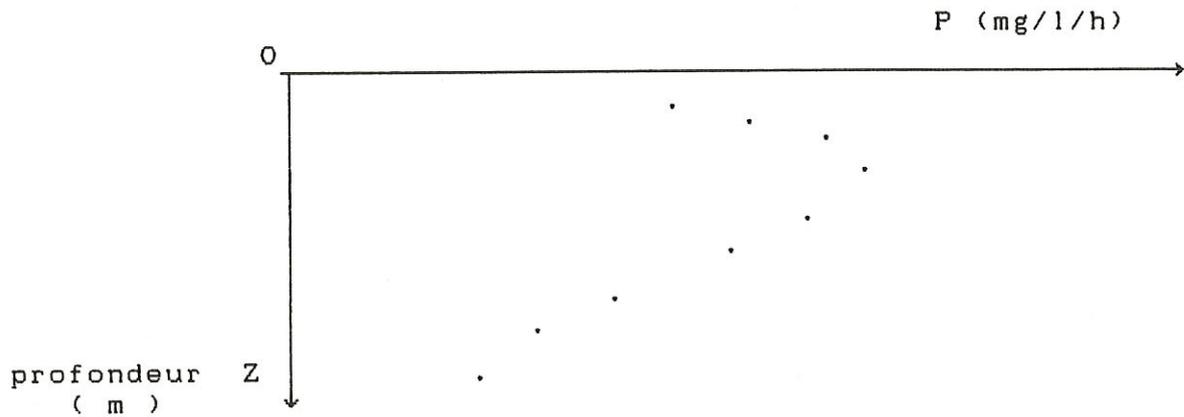
Pour obtenir une relation photosynthèse-lumière, il y a deux sortes de mesures à effectuer : l'intensité lumineuse et la production photosynthétique (assimilation de CO₂ ou production d'O₂). La mesure d'intensité lumineuse se fait d'une part en surface pour obtenir le I₀ (cf tab 1) et I₀' = 0.95 I₀, d'autre part, à différentes profondeurs (I_z) pour obtenir le coefficient d'extinction

$$k = \frac{1}{z} \ln \left[\frac{I_0'}{I_z} \right]$$

En introduisant celui-ci dans la formule de BEER-LAMBERT (I.1), nous obtenons la relation lumière-profondeur qui est une exponentielle décroissante :

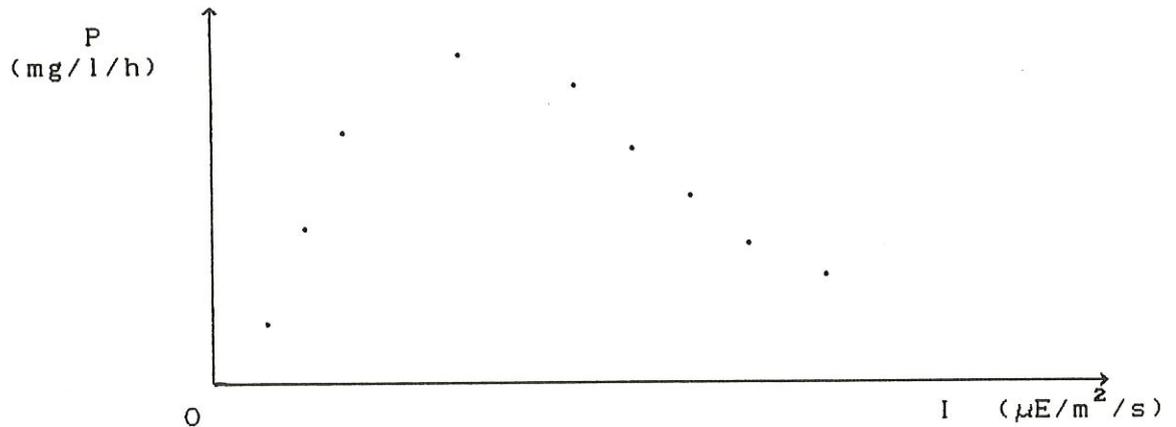


La relation photosynthèse-profondeur s'obtient en mesurant l'assimilation de C ou la production d'O₂ à différentes profondeurs (cf. tab II.2, II.4, II.5). Si nous reportons ces points sur un système d'axes (P-Z), nous obtenons :



(il s'agit ici d'un exemple avec photoinhibition)

Par la formule de BEER-LAMBERT (I.1), nous connaissons l'intensité lumineuse parvenant à ces différentes profondeurs. Nous pouvons alors reporter les points ci-dessus sur un système d'axes (P-I) :



A partir de cette première approximation, la constante de saturation I_k (appelée aussi "intensité au seuil de la saturation"), est déterminée par l'intersection de la droite de pente initiale et de la droite $P = P_{\max}$ (ou P_{opt}) (cf fig. II.3).

I_k étant connu, la relation photosynthèse-lumière est décrite par toute une série de modèles. Par exemple, le modèle de VOLLENWEIDER simplifié (où $\alpha=1$ et $n=1$)

$$P = P_{\max} \frac{I/I_k}{1 + (I/2I_k)^2} \quad (II.1)$$

Lorsque les intensités lumineuses sont fournies pour toute la durée du jour, cette relation permet, par une double intégration sur la profondeur et le temps, d'obtenir la production phytoplanctonique journalière.

L'ensemble de cette démarche est synthétisé par les graphes suivants :

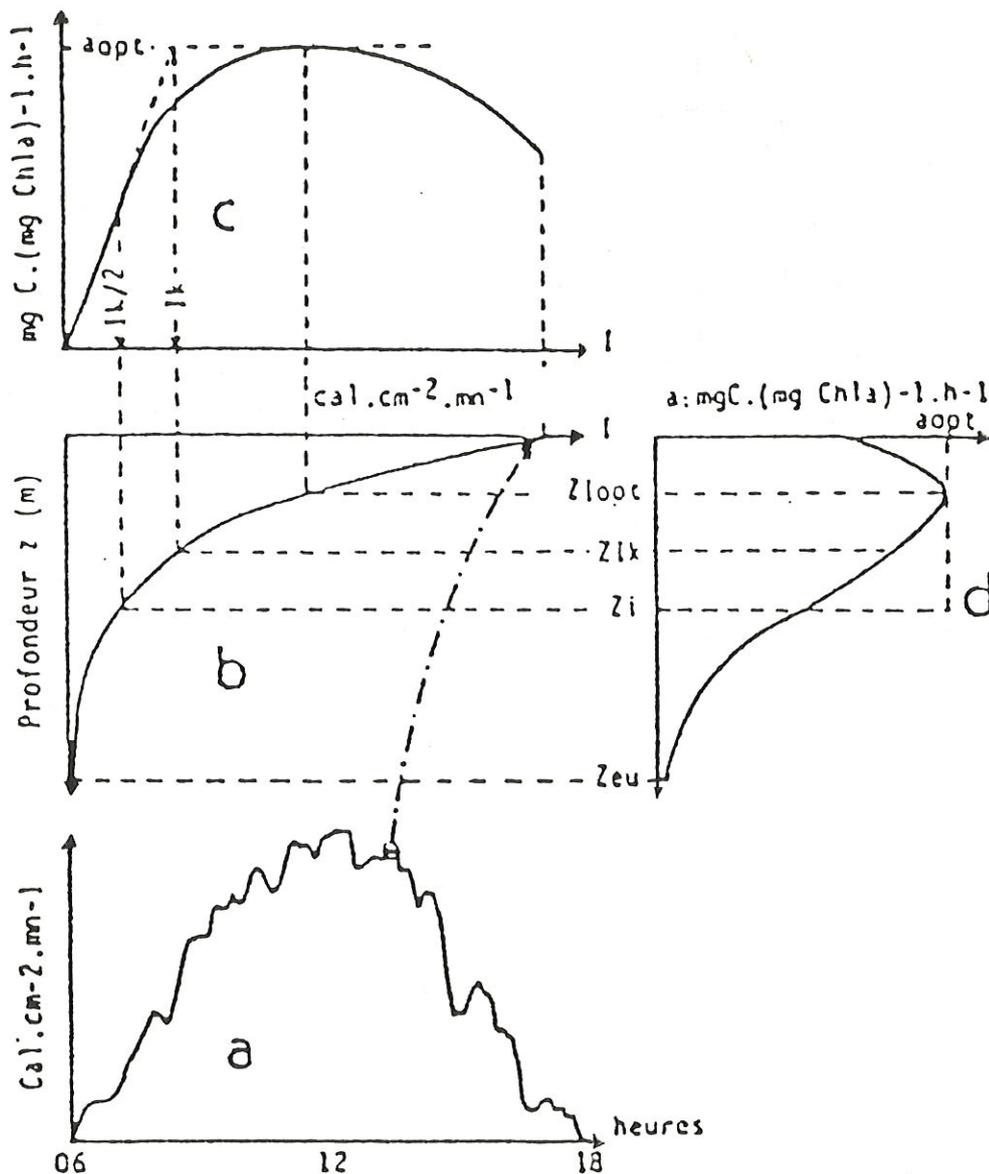


Fig. 11.4 : intensité de l'éclairement en surface (courbe a), extinction des rayonnements en profondeur (courbe b), activité photosynthétique en fonction de la profondeur (courbe d), et relation photosynthèse-lumière (courbe c)

Les équations décrivant la relation photosynthèse-lumière, traitées dans le cadre de ce mémoire sont les suivantes :

$$\text{VOLLENWEIDER (1965) : } P = P_{opt} \frac{I/I_k}{\left(1+(I/I_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1+(aI/2I_k)^2\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\text{JASSBY \& PLATT (1976) : } P = P_{max} \tanh (I/I_k)$$

$$\text{PLATT et al. (1980) : } P = P_o \left[1 - \exp(-I/I_o)\right] \exp(-bI/I_o)$$

$$\text{IWAKUMA \& YASUNO (1983) : } P = P_o \frac{I/I_k}{\left(1+(I/I_o)^m\right)^{(1+n)/m}}$$

où :

P_{opt} est le taux maximal de photosynthèse en présence de photoinhibition

P_{max} est le taux maximal de photosynthèse en l'absence de photoinhibition

P_o est le taux maximal idéal de photosynthèse en l'absence de photoinhibition

I_k est l'intensité lumineuse à laquelle la pente initiale de la courbe atteint le taux de photosynthèse P_{max} (intensité au seuil de la saturation)

I_o est l'intensité lumineuse à laquelle la pente initiale de la courbe atteint le taux de photosynthèse P_o

a, b, n, sont les facteurs indiquant l'amplitude de la
photoinhibition

m est le paramètre donnant la forme de la courbe aux
basses intensités lumineuses.

Les modèles de VOLLENWEIDER, PLATT et al. et IWAKUMA &
YASUNO tiennent compte de la photoinhibition. Tandis que
celui de JASSBY & PLATT est un modèle avec saturation simple.

Quelques valeurs des paramètres de photoinhibition α et
 n de VOLLENWEIDER sont indiquées sur la figure 11.6. Nous voyons
qu'un accroissement de α conduit à un abaissement général de
la courbe sur toute la gamme d'intensités lumineuses, tandis
qu'une augmentation de n provoque une diminution plus rapide
du taux de photosynthèse à partir du sommet de la courbe. Le
cas de non photoinhibition correspond à $\alpha=0$ ou $n=0$.

Pour les paramètres m et n du modèle d'IWAKUMA &
YASUNO, quelques familles de courbes possibles sont
représentées sur la figure 11.7.

II.4. OPTIMISATION DES RELATIONS PHOTOSYNTHÈSE-LUMIÈRE

II.4.1. Méthodes précédentes

Jusqu'à présent, les membres du département d'écologie utilisaient principalement le modèle de VOLLENWEIDER simplifié (II.1) . Ils fixaient donc les paramètres de photoinhibition $\alpha=1$ et $n=1$, et prenaient pour valeur de P_{max} , le taux de production maximal mesuré. Le paramètre I_k était calculé par interpolation graphique, et la production journalière était approximée par la formule de TALLING (1965) pour les lacs africains :

$$SSP = (P_{max}/k) \cdot (\ln 2(I_0'/I_k)) \cdot Dt \cdot 0,9 \quad (II.2)$$

où SSP désigne la production journalière en $mg/m^2/j$

P_{max} est le taux maximal d'activité photosynthétique mesuré en $mg/m^3/h$.

Dt désigne l'intervalle de temps entre le lever et le coucher du soleil

Un des objectifs de ce mémoire est de laisser libres les paramètres α et n , et d'optimiser I_k , P_{max} , α et n . Un autre étant de tester différents modèles. Tout ceci pour obtenir le meilleur ajustement possible de la courbe photosynthèse-lumière, et permettre, d'évaluer avec plus de précision la production journalière (en fait, de tenir compte des intensités tout au long de la journée plutôt que d'une irradiance moyenne).

II.4.2. Méthode d'optimisation utilisée

Le problème est de déterminer les valeurs de n paramètres de façon à obtenir le meilleur ajustement d'une courbe sur un nombre fini (m) de données expérimentales. La méthode utilisée pour résoudre ce problème est celle des moindres carrés non linéaire, développée en détails dans les chapitres III et IV. Pour effectuer les calculs d'optimisation proprement dits, nous avons utilisé la sous-routine DUNLSF de la librairie IMSL [8]. Celle-ci résout un problème de moindres carrés non linéaire en considérant un algorithme de LEVENBERG-MARQUARDT modifié (cf Chap IV).

Pour que cette méthode soit efficace, il faut que $m > n$. En outre, plus le nombre de mesures est grand par rapport au nombre de paramètres ($m \gg n$), plus l'optimisation sera facilitée.

En effet, si une des mesures est faussée à cause d'une mauvaise manipulation ou pour une autre raison (e.g. filtre mal rincé, mesures inversées,...), sa prise en compte ne sera pas trop importante grâce aux autres mesures qui serviront de correction (cf.fig. II.8). Mais si ces dernières n'existent pas, la mesure erronée prendra beaucoup d'importance et l'ajustement sera parfois impossible (cf. fig. II.9). Cependant, si les mesures sont réalisées avec beaucoup de précision, il est possible d'avoir un excellent ajustement même si celles-ci sont peu nombreuses (cf. fig. II.10).

Dans certains cas, nous ignorons les mesures incorrectes pour permettre un meilleur ajustement.

II.4.3. Optimisation des paramètres

Une des particularités des lacs rwandais par rapport aux cours d'eau belges est la forte photoinhibition. C'est pourquoi il est important, pour ces lacs, de pouvoir faire varier les paramètres de photoinhibition (α , n , m , b suivant les modèles). Soit en consultant les familles de courbes) soit en les optimisant. Nous verrons dans la présentation des résultats (Chap V) que fixer $\alpha = 1$ et $n = 1$ est une bonne approximation.

D'autre part, il est essentiel de pouvoir optimiser sur les paramètres I_k et P_{max} , puisque ce sont eux qui caractérisent la manière dont l'algue s'adapte à la lumière et photosynthétise.

Notre raisonnement fut d'optimiser d'abord sur un paramètre I_k , en considérant le modèle de VOLLENWEIDER. Ensuite, nous avons réalisé l'optimisation sur I_k et P_{max} .

Les résultats étant très bons, nous avons continué avec trois puis quatre paramètres. Ce qui donnait alors d'excellentes réponses du point de vue de l'optimisation car les résidus étaient très petits (de l'ordre de 10^{-5}). Seulement, les valeurs obtenues pour l_k , P_{max} , a et n étaient incompatibles avec la réalité. Nous avons donc choisi d'imposer des contraintes supplémentaires pour garder les valeurs des variables dans les limites de la réalité, ceci au moyen de la sous-routine DBCLSF de la librairie IMSL.

Les paramètres optimaux prenaient alors presque systématiquement des valeurs égales aux bornes supérieures ou inférieures imposées. Ces résultats n'étant pas acceptables, nous avons décidé de laisser totalement libres les paramètres et de les traiter deux par deux. Autrement dit, nous optimisons d'abord sur l_k et P_{max} , ensuite nous fixons ces paramètres à leur valeur optimale calculée et nous optimisons sur a et n . De cette façon, nous obtenons une bonne optimisation du point de vue mathématique car les résidus sont petits, et du point de vue "réalité écologique", les valeurs optimales des paramètres correspondent à celles mesurées ou fixées par les écologistes.

En fait, les fonctions traitées (dédites des modèles) possèdent des minima locaux. Donc, si le point de départ est trop éloigné de l'optimum, l'algorithme risque de converger vers un de ces minima locaux qui n'est pas toujours la solution espérée. A l'utilisateur donc d'être attentif au point de départ qu'il donne, pour ne pas être surpris par les réponses qu'il recevra.

II.4.4. Evaluation de la production journalière

Au terme de la procédure d'optimisation, nous obtenons un ajustement de la relation photosynthèse-lumière, c'est-à-dire une équation qui donne le taux P en fonction de l'intensité I , et dans laquelle se trouvent les paramètres optimaux. Cette équation fournit, en quelques sortes, le taux de production "instantané" i.e. à un moment précis de la journée et à un endroit précis du lac ou du cours d'eau.

Pour évaluer la production journalière, il suffit d'intégrer cette équation sur le temps et la profondeur (25m en général). Pour cela, il faut évidemment disposer des irradiances sur toute la durée du jour. Ce qui nous permet d'intégrer la production tous les 1/4h ou toutes les 1/2h. L'intégration sur la profondeur se fait tous les 0,5m.

La production totale (SSP) se calcule donc par :

$$SSP = \int_d^f \int_0^{25} f(I) . dx . dy$$

où d désigne l'heure du début du jour (lever du soleil),
f désigne l'heure de fin du jour (coucher du soleil),
f(I) est l'équation d'un modèle donnant la relation
photosynthèse-lumière

$$dx = 0,5m$$

$$dy = 15 \text{ ou } 30 \text{ minutes}$$

Dans l'algorithme, cette intégration est formalisée par
l'équation :

$$SSP = \sum_{j=1}^{J_{max}} \sum_{i=1}^{50} f(I) . 0,5 . P_{temps}$$

où J_{max} est le nombre de 1/4h ou 1/2h sur la journée
 P_{temps} est le pas de temps (i.e. 15 ou 30 minutes).

La formule (11.2) donne une bonne approximation de la
production journalière pour les lacs rwandais, car
l'intensité suit une courbe "idéale" tout au long de la
journée. Dans les pays tempérés, cette courbe est souvent
imprévisible, étant donné les changements d'intensité au
cours d'une même journée. C'est pourquoi l'intégration par
1/4 ou 1/2 heure en fonction des différentes intensités donne
une meilleure approximation.

Il est évident que plus l'intervalle de temps est court,
meilleure est l'évaluation de la production journalière.

II.5. DONNÉES DISPONIBLES

II.5.1. Le lac KIVU (RWANDA)

Situé sur la frontière entre le Rwanda et le Zaïre, le lac Kivu s'étend sur 2650km², à une altitude de 1460m. Il est resserré au creux d'un complexe appareil montagneux qui lui ménage des côtes découpées et accidentées. Sa profondeur est d'environ 480m. Il a pour seul exutoire le Rusizi qui se déverse dans le lac Tanganyika.

Les mesures ont été réalisées par J-P DESCY et J-M THEATE dans le cadre d'un projet d'étude sur la production planctonique au lac Kivu [2]. Les stations considérées sont : KIGUFI (zone côtière), KIGUFI (zone pélagique) et au centre de la partie nord (STATION 3 dans le texte). L'incubation se fait à différentes profondeurs par la méthode au ¹⁴C. Les mesures sont fournies en µgC/l pour le taux de production, et en µE/m²/s pour les intensités lumineuses (intégrées par 1/4 d'heure).

LAC KIVU : irradiances enregistrees a la surface de l'eau

01/10/90		02/10/90	
HEURES	IRRADIANCES ($\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$)	HEURES	IRRADIANCES ($\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$)
06.00	0	06.00	30
06.15	20	06.15	60
06.30	70	06.30	120
06.45	140	06.45	210
07.00	300	07.00	370
07.15	500	07.15	640
07.30	880	07.30	960
07.45	1020	07.45	1110
08.00	1050	08.00	1200
08.15	1110	08.15	1350
08.30	610	08.30	1540
08.45	600	08.45	1630
09.00	580	09.00	850
09.15	870	09.15	560
09.30	1680	09.30	510
09.45	1900	09.45	420
10.00	2170	10.00	710
10.15	1760	10.15	860
10.30	1390	10.30	560
10.45	1670	10.45	1020
11.00	1730	11.00	1590
11.15	1930	11.15	2220
11.30	560	11.30	2530
11.45	2310	11.45	2220
12.00	2370	12.00	2530
12.15	2190	12.15	1990
12.30	1790	12.30	1830
12.45	2480	12.45	1130
13.00	1900	13.00	1680
13.15	1210	13.15	1690
13.30	1750	13.30	940
13.45	1780	13.45	590
14.00	1970	14.00	270
14.15	1520	14.15	300
14.30	1860	14.30	280
14.45	1140	14.45	300
15.00	1260	15.00	380
15.15	790	15.15	550
15.30	370	15.30	920
15.45	340	15.45	2020
16.00	280	16.00	1430
16.15	390	16.15	520
16.30	540	16.30	410
16.45	570	16.45	270
17.00	530	17.00	150
17.15	720	17.15	100
17.30	850	17.30	100
17.45	1530	17.45	60
18.00	90	18.00	40
18.15	50	18.15	30
18.30	20	18.30	30
18.45	0	18.45	30

Tab. 11.2.

II.5.2. Le lac MUHAZI (Rwanda)

Le lac Muhazi est situé à moins de 20 km au Nord-Est de Kigali, à une altitude de 1443m. C'est un lac de vallée barrée, de forme étirée et digitée, orienté d'Est en Ouest. Sa superficie est d'environ 35 km², pour une longueur de 37 km, et une largeur moyenne de 0.6 km. Sa profondeur moyenne est de 7.6 m, la profondeur maximale étant de 13.9m. Son exutoire constitue la rivière Nyabugogo à l'extrémité Ouest. Il est alimenté en de nombreux affluents riches en sédiments et en nutriments. Il est bordé également de nombreuses sources, souvent très riches en sels minéraux. Sa température varie de 23 à 26°C en surface.

Les mesures ont été effectuées dans le cadre du mémoire de Laurence Massaut [10], de mars 1990 à mai 1990. Les stations retenues sont celles de NYARUBYE et KARAMBO (15/03/90, 22/03/90, 29/03/90) car l'intensité y est fournie pour toute la durée du jour. La méthode utilisée est celle de l'O₂ (mesures en mgO₂/l) pour une incubation à différentes profondeurs. L'intensité (en $\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$) est intégrée tous les quarts d'heure.

LAC MUHAZI : irradiances enregistrees a la surface de l'eau

15/03/90		22/03/90		29/03/90	
HEURES	IRRADIANCES ($\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$)	HEURES	IRRADIANCES ($\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$)	HEURES	IRRADIANCES ($\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$)
06.00	40	06.00	50	06.00	20
06.15	40	06.15	50	06.15	40
06.30	70	06.30	70	06.30	90
06.45	100	06.45	110	06.45	130
07.00	150	07.00	180	07.00	170
07.15	190	07.15	570	07.15	240
07.30	230	07.30	620	07.30	330
07.45	310	07.45	770	07.45	540
08.00	520	08.00	900	08.00	480
08.15	680	08.15	1240	08.15	430
08.30	810	08.30	1460	08.30	620
08.45	950	08.45	1640	08.45	780
09.00	1490	09.00	1770	09.00	770
09.15	1090	09.15	1900	09.15	1170
09.30	1380	09.30	2020	09.30	1090
09.45	2100	09.45	1710	09.45	960
10.00	2200	10.00	1940	10.00	1490
10.15	2340	10.15	1390	10.15	2140
10.30	1740	10.30	1350	10.30	1290
10.45	2230	10.45	610	10.45	1900
11.00	2500	11.00	1410	11.00	1810
11.15	2550	11.15	2380	11.15	2030
11.30	2430	11.30	2100	11.30	1990
11.45	1270	11.45	1640	11.45	2430
12.00	1130	12.00	290	12.00	2550
12.15	1100	12.15	110	12.15	2130
12.30	830	12.30	150	12.30	2090
12.45	940	12.45	190	12.45	1740
13.00	1010	13.00	170	13.00	2120
13.15	1000	13.15	230	13.15	2020
13.30	830	13.30	230	13.30	2090
13.45	850	13.45	340	13.45	1860
14.00	880	14.00	290	14.00	2150
14.15	1020	14.15	590	14.15	1830
14.30	1180	14.30	1080	14.30	1780
14.45	940	14.45	1210	14.45	1540
15.00	930	15.00	1070	15.00	1740
15.15	870	15.15	1310	15.15	1420
15.30	710	15.30	1030	15.30	1580
15.45	650	15.45	810	15.45	1370
16.00	740	16.00	670	16.00	620
16.15	560	16.15	580	16.15	1050
16.30	660	16.30	520	16.30	890
16.45	810	16.45	520	16.45	400
17.00	710	17.00	440	17.00	210
17.15	520	17.15	340	17.15	220
17.30	270	17.30	240	17.30	150
17.45	190	17.45	170	17.45	80
18.00	110	18.00	110	18.00	40
18.15	50	18.15	60		
18.30	30	18.30	20		
18.45	40	18.45	20		

Tab. II.4.

II.5.3. La MEUSE (BELGIGUE)

La Meuse prend sa source dans l'Est de la France, à Pouilly-en-Bassigny . Elle s'écoule en Belgique et aux Pays-Bas avant de se jeter dans la Mer du Nord. Sa longueur totale est de 885 km et son bassin hydrologique couvre 36 000 km² dont 40% en Belgique.

Les stations considérées se situent dans la région de Namur : à ANDENNE et TAILFER. Les mesures sont réalisées par Florence Evrard tout au long de cette année académique au moyen de la méthode au ¹⁴C dans les bouteilles tramées. Elles sont exprimées en mgC/l . Les intensités lumineuses sont intégrées toutes les 5 minutes par la sonde (en $\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$), et au terme de chaque mois, l'I.R.M. (station de Saint-Hubert) fournit le rayonnement solaire global (en J/cm^2) pour toute surface horizontale, intégrées par demi-heure (en $\text{J}/\text{cm}^2/\frac{1}{2}\text{h}$).

MEUSE : irradiances enregistrées par l'IRM sur toute surface horizontale

13/09/90		14/09/90		10/10/90		19/10/90	
HEURES	IRRADIANCES ($\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$)						
05.30	11.083	05.30	22.166	06.30	22.166	06.30	33.249
06.00	44.332	06.00	88.664	07.00	77.581	07.00	99.747
06.30	88.664	06.30	210.577	07.30	88.664	07.30	254.909
07.00	210.277	07.00	354.656	08.00	121.913	08.00	365.752
07.30	332.490	07.30	520.901	08.30	177.328	08.30	520.901
08.00	509.818	08.00	687.146	09.00	332.490	09.00	676.063
08.30	731.478	08.30	842.308	09.30	376.822	09.30	764.727
09.00	886.640	09.00	997.470	10.00	376.822	10.00	797.976
09.30	1086.134	09.30	1119.383	10.30	443.320	10.30	864.474
10.00	1196.964	10.00	1219.130	11.00	421.154	11.00	886.474
10.30	1296.711	10.30	1219.130	11.30	443.320	11.30	953.138
11.00	1252.379	11.00	1396.458	12.00	432.237	12.00	853.391
11.30	1407.541	11.30	1296.711	12.30	487.652	12.30	886.640
12.00	1208.047	12.00	1230.213	13.00	554.150	13.00	731.478
12.30	1385.375	12.30	1296.711	13.30	487.652	13.30	587.399
13.00	609.565	13.00	1041.802	14.00	598.482	14.00	476.569
13.30	886.640	13.30	1230.213	14.30	720.395	14.30	543.067
14.00	797.976	14.00	1130.466	15.00	664.980	15.00	432.237
14.30	942.045	14.30	1075.051	15.30	421.154	15.30	288.158
15.00	465.486	15.00	664.980	16.00	243.826	16.00	121.913
15.30	288.158	15.30	487.652	16.30	166.245	16.30	33.249
16.00	454.403	16.00	365.739	17.00	44.332		
16.30	299.241	16.30	343.573	17.30	11.083		
17.00	210.577	17.00	188.411				
17.30	88.664	17.30	88.664				
18.00	22.166	18.00	22.166				

Tab. 11.6.

CHAPITRE III :

PROBLÈME DES MOINDRES CARRÉS NON LINÉAIRE.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la méthode utilisée pour l'optimisation des paramètres.

Nous présenterons d'abord le problème de manière générale en faisant le parallèle avec les mesures et les modèles fournis par les écologistes. Ensuite, nous étudierons plus particulièrement la méthode de GAUSS-NEWTON. Au chapitre suivant, nous verrons une méthode plus globale : la méthode de LEVENBERG-MARQUARDT.

III.1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME.

Rappelons que le problème est de trouver le meilleur ajustement d'une courbe sur une série de mesures expérimentales.

Nous possédons :

- des points (mesures) (I_i, P_i) $i = 1, \dots, m$

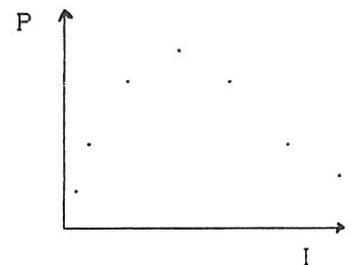
où I_i est la $i^{\text{ème}}$ intensité lumineuse

P_i est la $i^{\text{ème}}$ production

photosynthétique

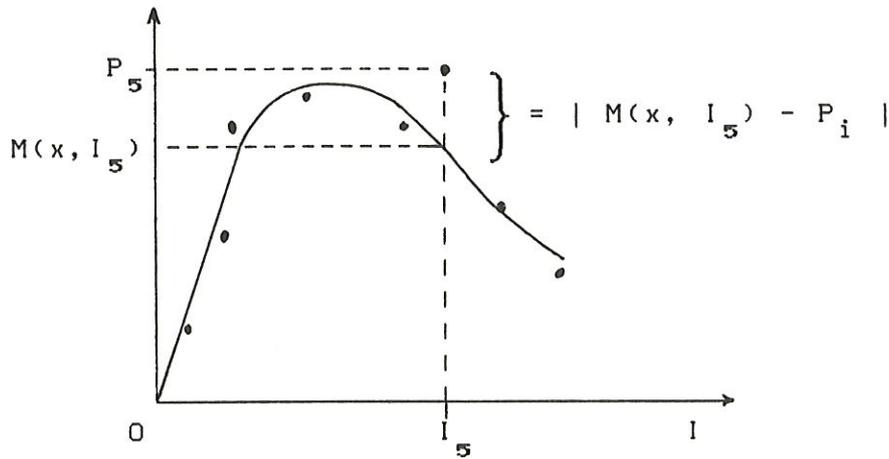
correspondante

m est le nombre de mesures effectuées.



- un modèle $M(x, I_i)$ [par exemple le modèle de Vollenweider] où x est le vecteur contenant les différents paramètres.

Le problème est de trouver x de telle sorte que les valeurs calculées par le modèle théorique soient les plus proches possibles des valeurs mesurées sur le terrain, i.e. de telle sorte que la différence $| M(x, I_i) - P_i |$ soit la plus petite possible.



Cette différence $M(x, I_i)$ est appelée le résidu.

Ce genre de problème peut être résolu par la théorie des moindres carrés, c'est-à-dire que nous allons minimiser la somme des carrés des résidus.

III.2. FORMULATION DU PROBLÈME DES MOINDRES CARRÉS NON LINÉAIRE.

Le problème des moindres carrés non linéaire peut se formuler de la manière suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} R(x)^T R(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

où R est la fonction résidu ; $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \rightarrow R(x) = \begin{bmatrix} r_1(x) \\ \vdots \\ r_m(x) \end{bmatrix}$$

r_i est le $i^{\text{ème}}$ résidu ($i = 1, \dots, m$) ; $r_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow r_i(x) = M(x, l_i) - P_i$$

R est supposée non linéaire. (Si R était linéaire, nous aurions un problème des moindres carrés linéaire). Les modèles considérés sont tous non linéaires.

Le problème est de trouver x tel que les résidus $r_i(x)$ soient les plus petits possibles au sens des moindres carrés. Le choix de la somme des carrés provient de considérations statistiques.

Nous allons développer deux modèles : l'un affine, l'autre quadratique. Pour cela, nous aurons besoin des deux dérivées premières de la fonction f : le gradient et la matrice hessienne.

Nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

donc

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x) \cdot \nabla r_i(x).$$

Notons $J(x)$ la matrice jacobienne de $R(x)$. Un élément (i, j) s'exprime alors comme :

$$[J(x)]_{i, j} = \frac{\partial r_i(x)}{\partial x_j} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

et $J(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Avec ces notations, le gradient devient : $\nabla f(x) = J(x)^T R(x)$ (III.1)

La dérivée seconde donne :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x) &= \sum_{i=1}^m \left(\nabla r_i(x) \nabla r_i(x)^T + r_i(x) \nabla^2 r_i(x) \right) \\ &= J(x)^T J(x) + \sum_{i=1}^m \nabla r_i(x) \nabla^2 r_i(x) \end{aligned}$$

Notons

$$S(x) = \sum_{i=1}^m \nabla r_i(x) \nabla^2 r_i(x)$$

Ainsi,

$$\nabla^2 f(x) = J(x)^T J(x) + S(x)$$

Examinons maintenant les deux modèles.

III.2.1. Modèle affine de $R(x)$ - Méthode de Gauss-Newton.

Considérons le modèle affine de $R(x)$ autour du point courant x_c

$$M_c(x) = R(x_c) + J(x_c) (x - x_c)$$

où $M_c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $m > n$.

Nous approchons la fonction f au voisinage de x_c par la

fonction $\frac{1}{2} \| M_c(x) \|_2^2$.

Et au lieu de résoudre le problème $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, nous résolvons :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \| M_c(x) \|_2^2$$

qui est un problème des moindres carrés linéaire.

La solution, notée x^+ , constitue le nouvel itéré. Pour déterminer cette solution, faisons le rappel suivant : si on a un problème des moindres carrés du type $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - b \|_2^2$ avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $m > n$, la solution optimale est x^* ssi $A^T A x^* = A^T b$ (ce sont les équations normales). De plus, si les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, alors x^* est unique, tel que $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$.

Ceci peut être appliqué à notre problème. Ainsi, en remplaçant $M_c(x)$ par son expression, nous obtenons le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \| J(x_c) (x - x_c) + R(x_c) \|_2^2.$$

En faisant la correspondance

$$A \leftrightarrow J(x_c), \quad x \leftrightarrow x - x_c, \quad b \leftrightarrow -R(x_c),$$

la solution est :

$$x^+ = x_c - (J(x_c)^T J(x_c))^{-1} J(x_c)^T R(x_c) \quad (III.2)$$

si les colonnes de $J(x_c)$ sont linéairement indépendantes.

Pour calculer x^+ , on utilise la décomposition QR de $J(x_c)$:

$$\text{soit } J(x_c) = Q(x_c) \cdot \tilde{R}(x_c)$$

où $Q(x_c) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est orthogonale

$\tilde{R}(x_c) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est triangulaire supérieure

$$\text{soit de la forme } \tilde{R}(x_c) = \begin{bmatrix} * & & \\ \text{O} & \dots & \\ \text{O} & \dots & \end{bmatrix}_{(m-n, n)} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_u(x_c) & \\ \text{O} & \end{bmatrix}_{(m-n, n)}$$

En omettant les dépendances en x_c , il vient :

$$\begin{aligned} x^+ &= x_c - (J^T J)^{-1} J^T R \\ &= x_c - (\tilde{R}^T Q^T Q \tilde{R})^{-1} \tilde{R}^T Q^T R \\ &= x_c - (\tilde{R}^T \tilde{R})^{-1} \tilde{R}^T Q^T R \\ &= x_c - (\tilde{R}_u^T \tilde{R}_u)^{-1} \tilde{R}^T Q^T R \quad \text{car } R^T R = R_u^T R_u \\ &= x_c - \tilde{R}_u^{-1} (\tilde{R}_u^T)^{-1} \tilde{R}^T Q^T R \end{aligned}$$

Or,

$$(\tilde{R}_u^T)^{-1} \tilde{R}^T = \begin{bmatrix} \tilde{R}_u^T & \\ \text{O} & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_d & \\ \text{O} & \end{bmatrix}$$

Donc

$$(\tilde{R}_u^T)^{-1} \tilde{R}^T Q^T R = \begin{bmatrix} I_d & \\ \text{O} & \end{bmatrix} (Q^T R) = (Q^T R)_u$$

où $(Q^T R)_u$ désigne les n premières composantes du vecteur $Q^T R$.

La solution s'écrit donc

$$x^+ = x_c - \tilde{R}_u^{-1}(x_c) (Q(x_c)^T R(x_c))_u.$$

C'est sous cette forme que nous calculerons la solution (et non par (III.2)).

Ayant trouvé x^+ , il suffit de recommencer le procédé en résolvant $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \| M_c(x^+) \|_2^2$ et ainsi de suite.

La convergence des itérés vers une solution x^* sera établie par le théorème 1.

Cette méthode s'appelle la méthode de GAUSS - NEWTON.

III.2.2. Modèle quadratique de $f(x)$ - Méthode de Newton.

Considérons le modèle quadratique

$$m_c(x) = f(x_c) + \nabla f(x_c)^T (x - x_c) + \frac{1}{2} (x - x_c)^T \nabla^2 f(x_c) (x - x_c)$$

qui est le développement de $f(x)$ du second ordre autour de x_c .

Remplaçant $f(x_c)$, $\nabla f(x_c)$ et $\nabla^2 f(x_c)$ par leurs valeurs, il vient :

$$m_c(x) = \frac{1}{2} R(x_c)^T R(x_c) + R(x_c)^T J(x_c) (x - x_c) + \frac{1}{2} (x - x_c)^T (J(x_c)^T J(x_c) + S(x_c)) (x - x_c).$$

Le problème est alors

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \| m_c(x) \|_2^2$$

et la solution est, par la méthode de Newton

$$x^+ = x_c - (\nabla^2 f(x_c))^{-1} \nabla f(x_c)$$

c'est-à-dire :

$$x^+ = x_c - (J(x_c)^T J(x_c) + S(x_c))^{-1} J(x_c)^T R(x_c).$$

Cependant, $S(x_c)$ est souvent indisponible ou trop coûteuse à calculer. Nous allons discuter de cette matrice au paragraphe suivant.

III.2.3. Comparaison des deux méthodes.

Nous allons voir quel est le comportement respectif de ces deux méthodes au voisinage de la solution x^* . Nous en déduirons ensuite les avantages et inconvénients de la méthode de GAUSS-NEWTON.

Rappelons que le problème à résoudre est

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} R(x)^T R(x)$$

et que les itérés sont :

$$x^+ = x_c - (J(x_c)^T J(x_c))^{-1} J(x_c)^T R(x_c)$$

pour la méthode de GAUSS-NEWTON et,

$$x^+ = x_c - (J(x_c)^T J(x_c) + S(x_c))^{-1} J(x_c)^T R(x_c)$$

pour la méthode de NEWTON.

Nous voyons directement que les deux itérées diffèrent par l'apparition ou non de la matrice $S(x_c)$.

La méthode de Gauss-Newton aura donc un comportement rapide, proche de celui de la méthode de Newton, si le terme $S(x_c)$ n'est pas trop important.

Donc, si en particulier, $S(x^*) = 0$, la méthode de Gauss-Newton est localement quadratiquement convergente (comme celle de Newton). Ce cas se produit lorsque R est linéaire ou $R(x^*) = 0$.

En effet,
$$S(x) = \sum_{i=1}^m r_i(x) \nabla^2 r_i(x)$$

$$= 0 \quad \begin{cases} \text{si } r_i(x) = 0 \quad \forall i \\ \text{ou si } \nabla^2 r_i(x) = 0 \quad \forall i \quad \text{i.e. si } R \text{ est linéaire} \end{cases}$$

La convergence de la méthode de GAUSS-NEWTON est établie dans le théorème suivant :

THEOREME 1 :

Soit $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et soit $f(x) = \frac{1}{2} R(x)^T R(x)$ une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , $f \in C^2$ dans un ouvert convexe $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Supposons que $J(x) \in \text{Lip}(D)$ avec $\|J(x)\|_2 \leq \alpha \quad \forall x \in D$

et que $\exists x^* \in D$ et $\lambda, \sigma \geq 0$ tels que :

$$J(x^*)^T R(x^*) = 0$$

λ est la plus petite valeur propre de $J(x^*)^T J(x^*)$

$$\|(J(x) - J(x^*))^T R(x^*)\|_2 \leq \sigma \|x - x^*\|_2 \quad \forall x \in D \quad (\text{III.3})$$

Si $\sigma < \lambda$, alors $\forall c \in]1, \lambda/\sigma[$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x_0 \in B(x^*, \varepsilon)$, la suite engendrée par la méthode de Gauss-Newton

$x_{k+1} = x_k - (J(x_k)^T J(x_k))^{-1} J(x_k)^T R(x_k)$ est bien définie, converge vers x^* et satisfait

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq \frac{c\sigma}{\lambda} \|x_k - x^*\|_2 + \frac{c\alpha\gamma}{2\lambda} \|x_k - x^*\|_2^2 \quad (\text{III.4})$$

et

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq \frac{c\sigma + \lambda}{2\lambda} \|x_k - x^*\|_2 < \|x_k - x^*\|_2$$

Pour la preuve, voir [DENNIS et SCHNABEL]11

Remarques :

1) *Interprétation de la constante σ .*

Lorsque x est assez proche de x^* , nous avons :

$$\begin{aligned} (J(x) - J(x^*))^T R(x^*) &= \sum_{i=1}^m [\nabla r_i(x) - \nabla r_i(x^*)] r_i(x^*) \\ &\simeq \sum_{i=1}^m [\nabla^2 r_i(x^*) (x - x^*)] r_i(x^*) \\ &\simeq S(x^*) (x - x^*) \end{aligned}$$

En vertu de (III.3),

$$\sigma \simeq \| S(x^*) \|_2$$

σ représente donc approximativement la plus grande valeur propre en valeur absolue de $S(x^*)$.

2) Si $\sigma < \lambda$, la convergence (locale) est linéaire.

En effet, (2) est équivalent à

$$\| x_{k+1} - x^* \|_2 \leq \left[\frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\sigma \gamma}{2\lambda} \| x_k - x^* \|_2 \right] \| x_k - x^* \|_2$$

Etant donné que $\frac{\sigma}{\lambda} < 1$ et que $\| x_k - x^* \| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, le terme entre [] est inférieur à 1 pour k assez grand. La convergence est donc linéaire.

3) Si $R(x^*) = 0$, nous pouvons choisir $\sigma = 0$ dans (III.3). Alors,

(III.4) devient :

$$\| x_{k+1} - x^* \|_2 \leq \frac{\sigma \gamma}{2\lambda} \| x_k - x^* \|_2^2$$

c'est-à-dire que la convergence est quadratique.

Dans le cas où $\sigma \geq \lambda$, le théorème ne dit rien. Nous verrons dans l'exemple 2 que, dans ce cas, la méthode peut ne pas être convergente.

Avant de passer à l'exemple, voyons si la méthode de Gauss-Newton engendre une direction de descente, c'est-à-dire si $\nabla f(x_c)^T s < 0$.

Par (III.2), nous avons

$$s = x^+ - x_c = - (J(x_c)^T J(x_c))^{-1} J(x_c)^T R(x_c)$$

et par (III.1),

$$\nabla f(x_c) = J(x)^T R(x_c)$$

Donc

$$\begin{aligned} \nabla f(x_c)^T s &= -R(x_c)^T J(x_c) (J(x_c)^T J(x_c))^{-1} J(x_c)^T R(x_c) \\ &= -v^T (J(x_c)^T J(x_c))^{-1} v \end{aligned}$$

où $v = J(x_c)^T R(x_c)$.

Ainsi, si $(J(x_c)^T J(x_c))$, de dimension $n \times n$, est définie positive, nous aurons $\nabla f(x_c)^T s < 0$.

En conclusion, si les colonnes de $J(x_c)$ sont linéairement indépendantes, alors la direction s engendrée par la méthode de Gauss-Newton est de descente.

L'exemple suivant montre le comportement de la méthode de

Gauss-Newton par rapport à celle de Newton sur un problème simple à une variable.

EXEMPLE :

Soit $R : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $r_i(x) = e^{t_i x} - y_i$, $i = 1, \dots, 4$

$$f(x) = \frac{1}{2} R(x)^T R(x)$$

$$(t_1, y_1) = (1, 2)$$

$$(t_2, y_2) = (2, 4)$$

$$(t_3, y_3) = (3, y_3)$$

Les valeurs de y_3 et de x_0 sont indiquées dans le tableau ci-dessous. Le critère d'arrêt est $|\nabla f(x_k)| \leq 10^{-10}$.

Données		Nombre d'itération requis pour avoir $ \nabla f(x_k) \leq 10^{-10}$, par		Résultats	
y_3	x_0	GAUSS-N.	NEWTON	x^*	$f(x^*)$
8	1	5	7	0,69315	0
	0,6	4	6		
3	1	12	9	0,44005	1,6390
	0,5	9	5		
-1	1	34	10	0,044744	6,9765
	0	32	4		
-4	1	*	12	-0,37193	16,425
	-0,3	*	4		
-8	1	*	12	-0,79148	41,145
	-0,7		4		

L'astérisque * indique que la méthode ne converge pas. En effet, pour les cas $y_3 = -4$ et $y_3 = 8$, le point x_1 engendré par la méthode de Gauss-Newton est plus éloigné de x^* que le point précédent x_0 .

Les avantages de la méthode de Gauss-Newton sont donc :

- une convergence quadratique sur les problèmes à résidus nuls.
- une convergence linéaire sur les problèmes "raisonnablement non linéaires".

Tandis que les inconvénients sont :

- une convergence lente ou inexistante lorsque le résidu optimal est grand
- un problème mal défini si les colonnes de $J(x_k)$ ne sont pas linéairement indépendantes.
- une convergence locale lorsqu'elle existe.

Nous avons vu que la méthode de Gauss-Newton était localement convergente. Nous allons maintenant l'améliorer afin d'obtenir une convergence globale, indépendante du point de départ.

Pour cela, nous avons deux possibilités. La première est de faire une recherche globalement convergente (car s est une direction de descente). Mais en pratique, celle-ci est très lente et mal définie si les colonnes de $J(x_c)$ ne sont pas linéairement dépendantes.

La seconde est d'utiliser une stratégie de région de confiance. Par exemple, celle implémentée par Levenberg (1944) - Marquardt (1963). C'est cette méthode que nous allons étudier au chapitre suivant.

CHAPITRE IV :

MÉTHODE DE LEVENBERG-MARQUARDT.

IV.1. RAPPEL : MÉTHODE DE LA RÉGION DE CONFIANCE

Soit x_c un point de \mathbb{R}^n et $M_c(x)$ un modèle.

La méthode de région de confiance consiste à regarder le modèle $M_c(x)$ sur une boule centrée en x_c . Autrement dit, nous minimisons le modèle dans une région où nous avons confiance en ce modèle.

Rappelons que nous considérons la méthode de Gauss-Newton, basée sur le modèle affine de $R(x)$:

$$M_c(x) = R(x_c) + J(x_c) (x - x_c). \quad (\text{IV.1})$$

Pour tenir compte du fait que nous restons dans une boule de centre x_c et de rayon δ_c , nous ajoutons la contrainte :

$$\|x - x_c\| \leq \delta_c$$

c'est-à-dire :

$$\|s\| \leq \delta_c$$

où $s \in \mathbb{R}^n$ désigne la direction $x - x_c$.

Le problème est donc :

$$\begin{cases} \min_{s \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|R(x_c) + J(x_c) s\|_2^2 \\ \text{s.c.} \quad \|s\| \leq \delta_c \end{cases}$$

IV.2. LA MÉTHODE DE LEVENBERG-MARQUARDT

Considérons le problème

$$(1) \quad \begin{cases} \min_{s \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \| R(x_c) + J(x_c) s \|^2 \\ \text{s.c.} \quad \| Ds \|^2 \leq \delta_c^2 \end{cases}$$

où $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice diagonale qui prend en compte le scaling du problème (i.e. les changements de grandeur des variables). Elle permet de stabiliser le processus numérique. Au lieu de travailler sur une boule de rayon δ_c , nous minimisons donc le modèle sur un ellipsoïde dont les demi-axes sont égaux à δ_c/d_i . (d_i est le $i^{\text{ème}}$ élément diagonal de la matrice D).

Ceci se voit facilement pour le cas où $n = 2$, avec $D = \text{diag}(d_1, d_2)$ et $s = (s_1, s_2)^T$. En élevant au carré la condition, il vient :

$$\| Ds \|^2 \leq \delta_c^2$$

$$d_1^2 s_1^2 + d_2^2 s_2^2 \leq \delta_c^2$$

$$\frac{s_1^2}{\left(\frac{d_1}{\delta_c}\right)^2} + \frac{s_2^2}{\left(\frac{d_2}{\delta_c}\right)^2} \leq 1$$

Cette dernière équation est bien celle d'une ellipse (ellipsoïde en dimension 2) de demi-axes égaux à $\frac{d_1}{\delta_c}$ et $\frac{d_2}{\delta_c}$.

Exprimons les conditions d'optimalité de Kuhn-Tucker associées, après avoir mis la contrainte sous la forme suivante :

$$g(x) = \frac{1}{2} \|Ds\|^2 - \frac{1}{2} \delta_c^2 \leq 0 .$$

Pour un problème (P) $\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{s.c. } g(x) \leq 0 \end{cases}$

avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

les conditions d'optimalité sont :

$$\exists \mu \geq 0 \text{ tel que } \begin{cases} \nabla f(x) + \mu \nabla g(x) = 0 \\ \mu g(x) = 0 \end{cases}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g(x) \leq 0$.

Pour notre problème, cela devient

$$\exists \mu \geq 0 \text{ tel que } \begin{cases} J(x_c)^T (R(x_c) + J(x_c)s) + \mu D^T D s = 0 \\ \mu (s^T D^T D s - \delta_c^2) = 0 \end{cases}$$

De la première équation, nous pouvons extraire s :

$$s = s(\mu) = - (J(x_c)^T J(x_c) + \mu D^T D)^{-1} J(x_c)^T R(x_c)$$

Deux cas peuvent se présenter comme solution :

1°) Si $s = s(0)$ satisfait la contrainte $g(x)$,

alors $s = - (J(x_c)^T J(x_c))^{-1} J(x_c)^T R(x_c)$ est la solution du problème (1).

2°) Si $s = s(0)$ ne satisfait pas la contrainte $g(x)$, c'est-à-dire si $s^T(0) D^T D s(0) - \delta_c^2 > 0$,

alors $\exists ! \mu > 0$ tel que $s^T(\mu) D^T D s(\mu) - \delta_c^2 = 0$ (IV.2)

et $s(\mu) = - (J(x_c)^T J(x_c) + \mu D^T D)^{-1} J(x_c)^T R(x_c)$ est la solution du problème (1).

L'idée de l'algorithme est donc de vérifier si, à l'étape k , le vecteur $s_k = s_k(0)$ se trouve dans la région de confiance (i.e. si $\|D_k s_k(0)\| \leq \delta_c$) :

- si oui, poser $\mu_k = 0$ et $s_k = -(J(x_k)^T J(x_k))^{-1} J(x_k)^T R(x_k)$. (IV.3)

- si non, déterminer μ_k solution de $\|D_k s_k(\mu_k)\| = \delta_k$ et poser $s_k = -(J(x_k)^T J(x_k) + \mu_k D_k^T D_k)^{-1} J(x_k)^T R(x_k)$. (IV.3')

Comparer ensuite la valeur de la fonction objectif au nouveau point $x_k + s_k$ avec celle au point x_k . Si elle a augmenté, réduire le rayon δ_k , si elle a diminué, appliquer le test d'arrêt. Si celui-ci n'est pas vérifié, chercher un nouveau rayon de confiance et mettre à jour D_k .

Voyons maintenant en détails comment implémenter cet algorithme.

Il y a trois problèmes à résoudre :

- 1) Comment calculer le multiplicateur μ_k ?
- 2) μ_k étant donné, comment calculer la direction s_k ?
- 3) Comment mettre à jour le rayon δ_k ?

Nous donnerons ensuite quelques possibilités de choix pour la matrice D_k .

IV.2.1 Calcul du multiplicateur μ_k

Nous savons par (IV.2) que μ_k est solution de l'équation $\|Ds(\mu)\| = \delta_k$. Dès lors, si nous définissons $\phi(\mu)$ tel que

$$\begin{aligned}\phi(\mu) &= \|Ds(\mu)\| - \delta_k \\ &= \|D (J(x_c)^T J(x_c) + \mu (D^T D)^{-1} J(x_c)^T R(x_c))\| - \delta_k\end{aligned}\quad (\text{IV.4})$$

il faut alors résoudre l'équation théorique

$$\phi(\mu) = 0$$

En pratique, nous calculons la solution en utilisant la formule itérative de HEBDEN (cfr par exemple DENNIS ET SCHABEL [1])

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \left[\frac{\phi(\mu_k) + \delta_k}{\delta_k} \right] \frac{\phi(\mu_k)}{\phi'(\mu_k)}$$

Le test d'arrêt étant :

$$\phi(\mu_k) \leq \sigma \delta_k$$

avec $\sigma \in]0,1[$ (par exemple $\sigma = 0,1$).

Pour que cette méthode soit efficace, il faut que $\phi(\mu_k)$ et $\phi'(\mu_k)$ soient calculables à peu de frais. Nous examinerons uniquement le cas du calcul de $\phi(\mu_k)$. Pour alléger les notations, nous n'écrirons plus explicitement la dépendance en x .

Posons

$$\tilde{J} = J D^{-1}$$

et décomposons $\tilde{J} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en valeurs singulières

$$\tilde{J} = USV^T$$

où $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont orthogonales et $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est de la forme ($m > n$) :

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ \hline 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m-n, n}$$

$\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les valeurs singulières de la matrice \tilde{J} .

Nous pouvons alors calculer $\phi(\mu_k)$ en remplaçant J par $\tilde{J}D$ dans (IV.4) :

$$\begin{aligned} \phi(\mu) &= \| D (D^T \tilde{J}^T \tilde{J} D + \mu D^T D)^{-1} D^T \tilde{J}^T R \|_2 - \delta \\ &= \| D [D^T (\tilde{J}^T \tilde{J} + \mu I) D]^{-1} D^T \tilde{J}^T R \|_2 - \delta \\ &= \| D D^{-1} (\tilde{J}^T \tilde{J} + \mu I) D^{-1} D^{-T} D^T \tilde{J}^T R \|_2 - \delta \\ &= \| (\tilde{J}^T \tilde{J} + \mu I)^{-1} \tilde{J}^T R \|_2 - \delta \end{aligned}$$

Remplaçons \tilde{J} et \tilde{J}^T par leur décomposition en valeurs singulières USV^T , respectivement VSU^T .

$$\begin{aligned} \phi(\mu) &= \| (VSU^T USV^T + \mu I)^{-1} VSU^T R \|_2 - \delta \\ &= \| (VS^2 V^T + \mu I)^{-1} VSU^T R \|_2 - \delta \end{aligned}$$

V étant orthogonale, nous avons que :

$$A^{-1}V = (V^T A)^{-1} \text{ et } \| V^T A \|_2 = \| A \|_2 \text{ pour toute matrice } A.$$

Prémultiplions par V^T :

$$\begin{aligned} \phi(\mu) &= \| V^T (VS^2 V^T + \mu I)^{-1} VSU^T R \|_2 - \delta \\ &= \| (V^{-1} (VS^2 V^T + \mu I) (V^T)^{-1})^{-1} S^T U^T R \|_2 - \delta \\ &= \| (V^{-1} V S^2 V^T V + \mu V^{-1} V)^{-1} S^T U^T R \|_2 - \delta \\ &= \| (S^2 + \mu I)^{-1} S^T U^T R \|_2 - \delta \end{aligned}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2 + z_i^2}{(\sigma_i^2 + \mu)^2} \right]^{1/2} - \delta$$

où z_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $U^T R$.

Maintenant que nous savons comment déterminer le multiplicateur μ_k , essayons de déterminer la direction s_k .

IV.2.2. Calcul de la direction s_k

Soit μ_k fixé. Le problème est alors de résoudre le système (IV.3'), c'est-à-dire, en notant $J_k = J(x_k)$ et $R_k = R(x_k)$,

$$(J_k^T J_k + \mu_k D_k^T D_k) s = - J_k^T R_k \quad (IV.5)$$

La résolution peut se faire de deux manières.

La première consiste à résoudre le système en utilisant une factorisation de Cholesky. Cette méthode est rapide mais des difficultés numériques risquent de surgir si $J_k^T J_k$ est singulier et $\mu_k = 0$.

La seconde est moins rapide mais stable numériquement. Elle considère (IV.5) comme les équations normales d'un problème de moindres carrés linéaire :

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} J_k \\ \mu^{1/2} D_k \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} R_k \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Ce problème est résolu en utilisant la décomposition QR de J avec pivotage des colonnes (car les colonnes de J_k ne sont pas nécessairement indépendantes).

IV.2.3. Mise à jour de δ_k

La mise à jour de δ_k dépend du rapport $\rho(s)$ entre la réduction effective (Δf_e) de la fonction et la réduction prédite (Δf_p) par le modèle.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \rho(s) &= \frac{\Delta f_e}{\Delta f_p} \\ &= \frac{f(x+s) - f(x)}{M(x+s) - M(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \|R(x+s)\|^2 - \frac{1}{2} \|R(x)\|^2}{\frac{1}{2} \|R(x) + J(x)s\|^2 - \frac{1}{2} \|R(x)\|^2} \\ &= \frac{\|R(x)\|^2 - \|R(x+s)\|^2}{\|R(x)\|^2 - \|R(x) + J(x)s\|^2} \end{aligned} \tag{IV.5}$$

Ce rapport mesure l'ajustement du modèle linéaire à la fonction objectif non linéaire. (Par exemple, si f était linéaire, alors $\rho(s)$ serait égal à 1 $\forall s \in \mathbb{R}^n$.)

Le plan de mise à jour de δ_k a pour but de garder la valeur $\rho(s)$ suffisamment proche de l'unité. Donc, si $\rho(s)$ est proche de l'unité (soit $\rho(s) \geq 3/4$), nous augmentons le rayon δ_k (par exemple en le doublant), c'est-à-dire que nous agrandissons la région de confiance. Tandis que si $\rho(s)$ est trop éloigné de 1 (soit $\rho(s) \leq 1/4$), nous devons diminuer le rayon δ_k . En fait, nous avons fait confiance au modèle sur une région trop grande pour avoir un bon ajustement. Dans les autres cas, (i.e. $1/4 \leq \rho(s) \leq 3/4$), l'ajustement n'est ni bon, ni mauvais, nous gardons donc le même rayon.

Avant de donner des règles plus spécifiques pour la mise à jour de δ_k , nous allons discuter le calcul de (IV.5).

En effet, le calcul du dénominateur peut engendrer un dépassement de capacité (overflow), et même être négatif suite aux erreurs d'arrondis.

Afin de ne pas avoir ce genre de problèmes, nous allons transformer la formule (IV.5).

Par définition de s , nous avons (en omettant les dépendances en x) :

$$(J^T J + \mu D^T D) s = - J^T R$$

Prémultiplions par s^T :

$$s^T J^T J s + \mu s^T D^T D s = - s^T J^T R$$

c'est-à-dire :

$$\| J s \|^2 + \mu \| D s \|^2 = - s^T J^T R = - R^T J s \quad (IV.7)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \| J s + R \|^2 &= \| J s \|^2 + 2 R^T J s + \| R \|^2 \\ &= \| J s \|^2 - 2 \| J s \|^2 - 2 \mu \| D s \|^2 + \| R \|^2 \\ &= \| R \|^2 - \| J s \|^2 - 2 \mu \| D s \|^2 \end{aligned}$$

D'où le dénominateur de (IV.5) s'écrit :

$$\| R \|^2 - \| R + J s \|^2 = \| J s \|^2 + 2 \mu \| D s \|^2 \quad (IV.6)$$

et le rapport $\rho(s)$ devient :

$$\rho(s) = \frac{\| R \|^2 - \| R(x+s) \|^2}{\| J s \|^2 + 2 \mu \| D s \|^2}$$

Divisant haut et bas par $\| R \|^2$, il vient

$$\rho(s) = \frac{1 - \left[\frac{\| R(x+s) \|}{\| R \|} \right]^2}{\left[\frac{\| J s \|}{\| R \|} \right]^2 + 2 \left[\frac{\mu^{1/2} \| D s \|}{\| R \|} \right]^2}$$

Transformée ainsi, cette formule n'engendrera pas de dépassement de capacité. De plus, le dénominateur ne deviendra jamais négatif suite à des erreurs d'arrondis.

En effet, l'égalité (IV.6) entraîne d'une part, que :

$$\| R \|^2 - \| J_s \|^2 = \| R + J_s \|^2 + 2 \mu \| D_s \|^2 \geq 0$$

puisque $\mu \geq 0$.

Donc,

$$\| R \|^2 \geq \| J_s \|^2$$

ou encore :

$$\left(\frac{\| J_s \|}{\| R \|} \right)^2 \leq 1 \quad (\text{IV.8})$$

D'autre part, puisque

$$\begin{aligned} \| R \|^2 - 2 \mu \| D_s \|^2 &= \| J_p \|^2 + \| R + J_p \|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\| R \|^2 \geq 2\mu \| D_s \|^2 \geq \mu \| D_s \|^2$$

ou encore,

$$\left(\frac{\mu^{1/2} \| D_s \|}{\| R \|} \right)^2 \leq 1 \quad (\text{IV.9})$$

Le numérateur pourrait engendrer un nombre négatif si $\| R(x+s) \| \geq \| R \|$, mais comme nous nous intéressons uniquement à des valeurs positives de $\rho(s)$, nous posons dans ce cas $\rho(s) = 0$.

Voyons maintenant comment ajuster le rayon δ_k .

Pour augmenter δ_k , nous multiplions simplement δ_k par une constante supérieure à 1. Pour diminuer δ_k , nous suivons la méthode de Fletcher (1971), c'est-à-dire approcher

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2} \|R(x+\lambda s)\|^2$$

avec $0 \leq \lambda \leq 1$, par une quadratique de la forme :

$$q(\lambda) = a \lambda^2 + b \lambda + c$$

qui a les mêmes valeurs que $\psi(\lambda)$ aux points $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$, et la même pente que $\psi(\lambda)$ au point $\lambda = 0$. Autrement dit, telle que

$$\begin{cases} \psi(0) = q(0) \\ \psi(1) = q(1) \\ \psi'(0) = q'(1) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \|R(x)\|^2 = c \\ \frac{1}{2} \|R(x+\varepsilon)\|^2 = a + b + c \\ \|R(x)\|^2 = b \end{cases} \quad (IV.10)$$

$$\text{où } \gamma = \frac{s^T J(x)^T R(x)}{\|R(x)\|^2} = - \left[\left(\frac{\|J s\|}{\|R(x)\|} \right)^2 + \left(\mu^{1/2} \frac{\|D s\|}{\|R(x)\|} \right)^2 \right]$$

déduit de (IV.7) et par (IV.8) et (IV.9), $\gamma \in [-1, 0]$.

Nous voulons diminuer le rayon le plus possible. Soit le multiplier par un facteur λ^* , minimum de la quadratique $a\lambda^2 + b\lambda + c$. Sachant que ce minimum est atteint en $\frac{-b}{2a}$ et que a et b se déduisent facilement du système (IV.10), il vient,

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \frac{-b}{2a} = \frac{-\gamma \|R(x)\|^2}{2 \left(\frac{1}{2} \|R(x+s)\|^2 - \frac{1}{2} \|R(x)\|^2 - \gamma \|R(x)\|^2 \right)} \\ &= \frac{-\gamma \|R(x)\|^2}{2 \|R(x)\|^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\|R(x+s)\|^2}{\|R(x)\|^2} - 1 \right) - \gamma \right]} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \gamma}{\gamma + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\|R(x+s)\|}{\|R(x)\|} \right)^2 \right]} \quad \text{(IV.11)} \end{aligned}$$

Si $\|R(x+s)\| \leq \|R(x)\|$, le dénominateur risque d'entraîner certains problèmes. Dans ce cas, nous posons $\lambda^* = 1/2$. Nous faisons de même si $\lambda^* > 1/2$, tandis que si $\lambda^* < 1/10$, nous posons $\lambda^* = 1/10$. De cette façon, nous avons toujours $\lambda^* \in [1/10, 1/2]$.

En fait, la formule (IV.11) n'est utilisée que lorsque

$$\|R(x)\| < \|R(x+s)\| \leq 10 \|R(x)\|$$

car dans les autres cas, λ^* est inférieur à 1/10.

IV.2.4. Scaling

Le but de la matrice D_k dans l'algorithme de Levenberg-Marquardt est de prendre en compte le scaling du problème, c'est-à-dire le changement de grandeur des données. C'est ainsi que certains auteurs ont choisi

$$D_k = \text{diag} (d_1^{(k)}, \dots, d_n^{(k)})$$

où

$$d_i^{(k)} = \|\partial_i R(x_0)\|, \quad k \geq 0 \quad (\text{IV.12})$$

La dérivée partielle donne le taux de variation. Seulement, lorsque $\|\partial_i R(x_k)\|$ croît avec k , ce choix n'est plus valable car R varie plus vite pour la $i^{\text{ème}}$ variable. De plus, les pas ayant une $i^{\text{ème}}$ composante grande ne sont plus fiables. Un autre choix est alors de prendre

$$d_i^{(0)} = \|\partial_i R(x_0)\| \quad (\text{IV.13})$$

$$d_i^{(k)} = \max \{ d_i^{(k-1)}, \|\partial_i R(x_k)\| \} \quad k \geq 1$$

Mais ici, une diminution de $\|\partial_i R(x_k)\|$ n'entraîne pas nécessairement une diminution de d_i .

Un troisième choix serait

$$d_i^{(k)} = \|\partial_i F(x_k)\| \quad k \geq 0 \quad (\text{IV.14})$$

mais du point de vue calcul, il est moins bon que les deux premiers.

En fait, le choix (IV.13) s'avère être le meilleur.

IV.2.5. ALGORITHME DE LEVENBERG-MARQUARDT

Voici, sous forme algorithmique, les étapes développées dans la théorie ci-dessus.

Pas 1 : Soit $\sigma \in]0,1[$ (par exemple $\sigma = 0,1$)

Si $\| D_k (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T R_k \| \leq (1+\sigma) \delta_k$,

alors poser $\lambda_k = 0$

$$p_k = - (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T R_k$$

sinon déterminer $\lambda_k > 0$ tel que

$$(1-\sigma) \delta_k \leq \| D_k p_k \| \leq (1+\sigma) \delta_k$$

où p_k est solution du problème de moindres carrés

linéaire :

$$\min_p \left\| \begin{pmatrix} J_k \\ \lambda_k^{1/2} D_k \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} R_k \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

Pas 2 : Calculer le quotient $\rho(k) = \frac{\text{réd. effective}}{\text{réd. prédite}}$

Si $\rho_k \leq 10^{-4}$

alors poser $x_{k+1} = x_k$

$$J_{k+1} = J_k$$

sinon poser $x_{k+1} = x_k + p_k$ et calculer J_{k+1}

PAS 3 : - Si $\rho_k \leq 1/4$

alors $\delta_{k+1} \in [1/10 \delta_k, 1/2 \delta_k]$

- Si $\rho_k \in [1/4, 3/4]$ et $\lambda > 0$

alors $\delta_{k+1} = \delta_k$

- Si $\rho_k \in [1/4, 3/4]$ et $\lambda = 0$ ou si $\rho_k \geq 3/4$
alors $\delta_{k+1} = 2 \| D_k p_k \|^2$

Pas 4 : mettre à jour la matrice D_k

CHAPITRE V :

PRÉSENTATION DES RÉSULTATS.

Voici les résultats obtenus pour le lac KIVU (stations de KIGUFI (C), KIGUFI (L), STATION 3), le lac MUHAZI (stations de KARAMBO et NYARUBUYE) et la MEUSE (stations de TAILFER et ANDENNE). Pour chacune des stations, nous reprenons, sur une même figure, les 4 graphes représentant la relation photosynthèse-lumière, et correspondant aux 4 modèles étudiés (numérotés de 1 à 4) :

modèle 1 = VOLLENWEIDER (1965)

modèle 2 = JASSBY & PLATT (1976)

modèle 3 = PLATT et al. (1980)

modèle 4 = IWAKUMA & YASUNO (1983).

Ces modèles sont décrits au paragraphe 11.3.

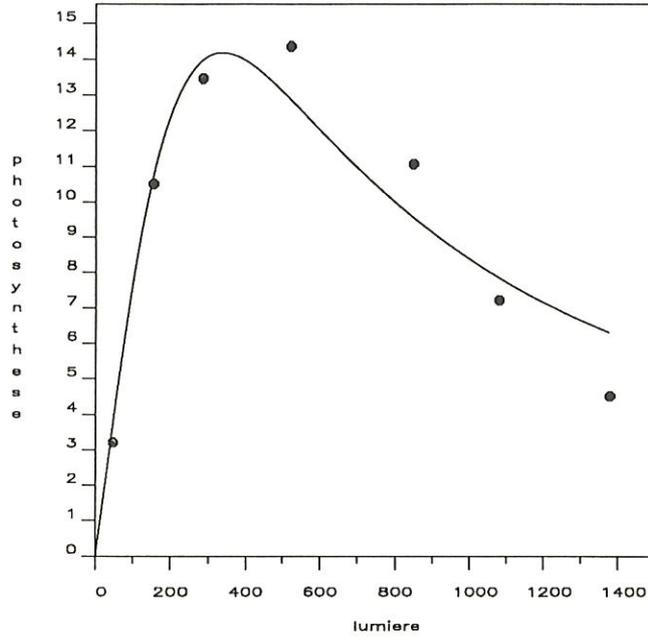
Les relations photosynthèse-lumière sont dessinées à partir des valeurs optimales des paramètres reprises dans les tableaux (V.2), (V.4), (V.6). Ceux-ci contiennent également la production journalière.

Les résidus sont regroupés dans les tableaux (V.1), (V.3), (V.5). Ils représentent la différence entre la production photosynthétique calculée par optimisation et celle mesurée sur le terrain. Ils sont repris dans l'ordre des mesures, c'est-à-dire de la plus grande à la plus faible intensité lumineuse.

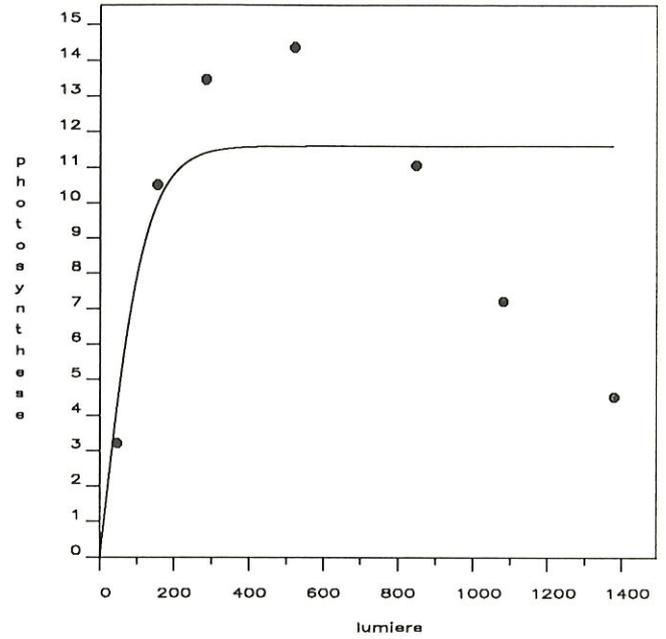
V.1. LAC KIVU (RWANDA)

Station : KIGUFI côtier

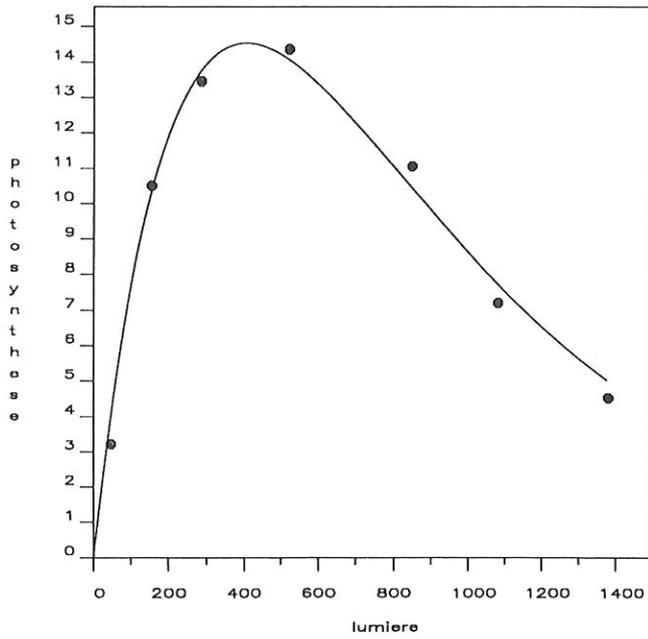
STATION : KIGUFI (C) LE 011090
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



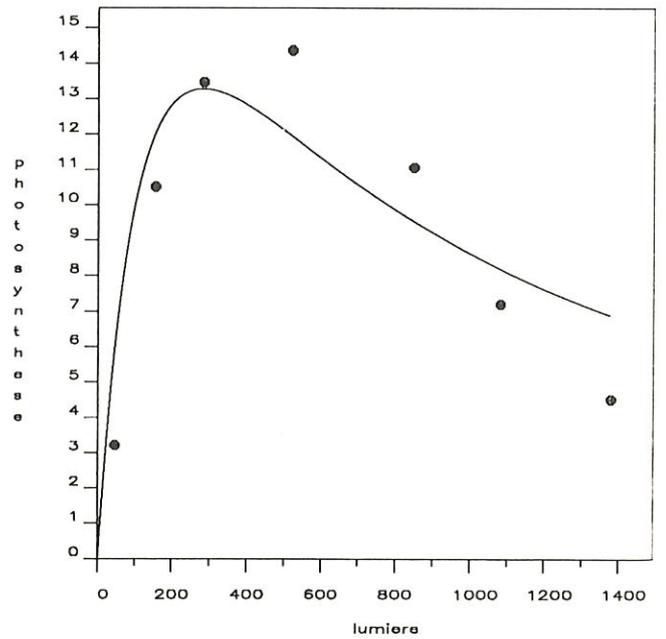
STATION : KIGUFI (C) LE 011090
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



STATION : KIGUFI (C) LE 011090
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)



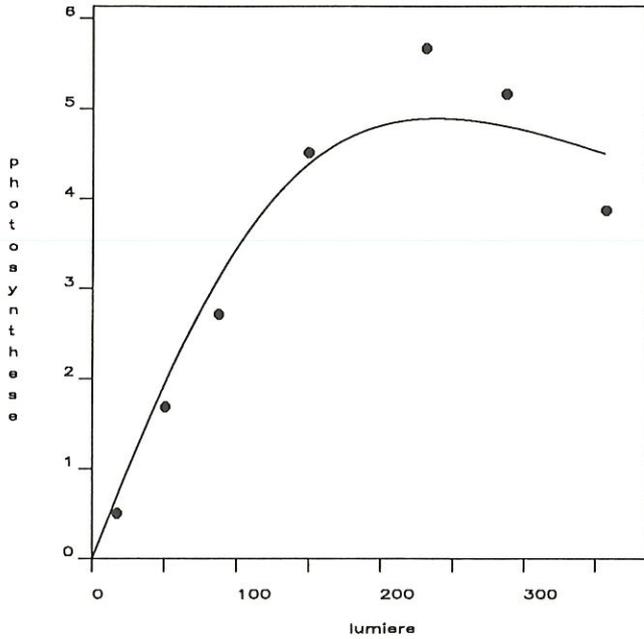
STATION : KIGUFI (C) LE 011090
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)



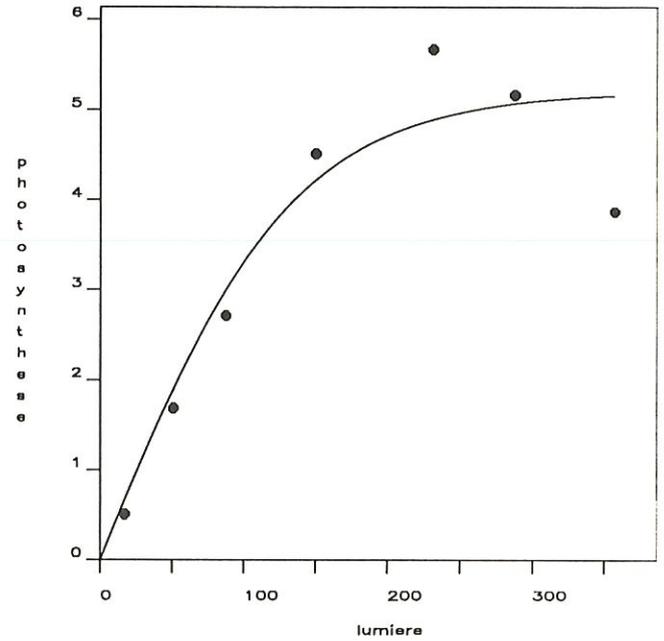
Unites : photosynthese : $\mu\text{gC/l}$
lumiere : $\mu\text{E/m}^2/\text{s}$

Station : KIGUFI zone pélagique

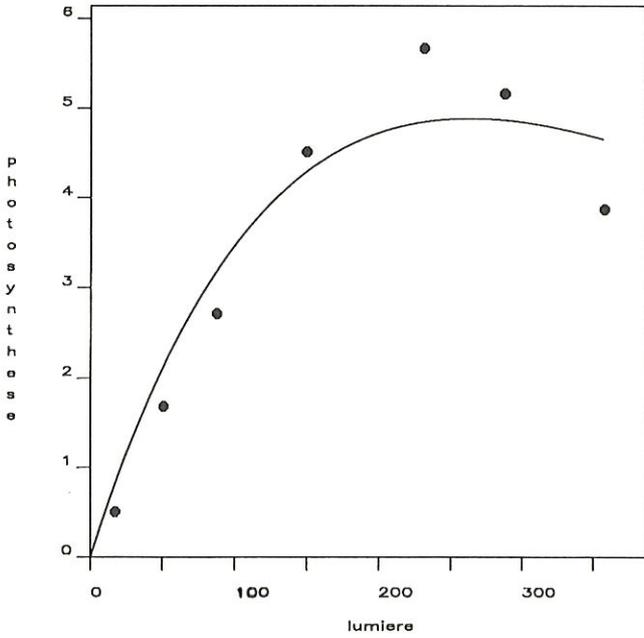
STATION : KIGUFI(L) LE 011090
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



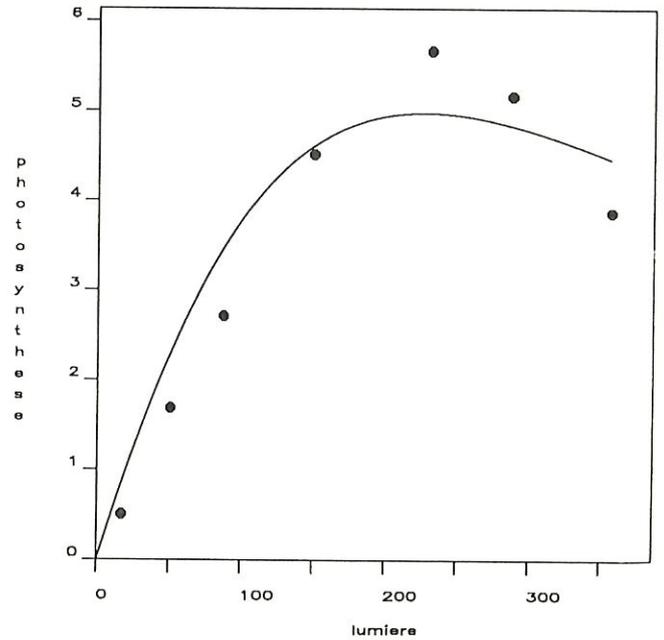
STATION : KIGUFI(L) LE 011090
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



STATION : KIGUFI(L) LE 011090
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)

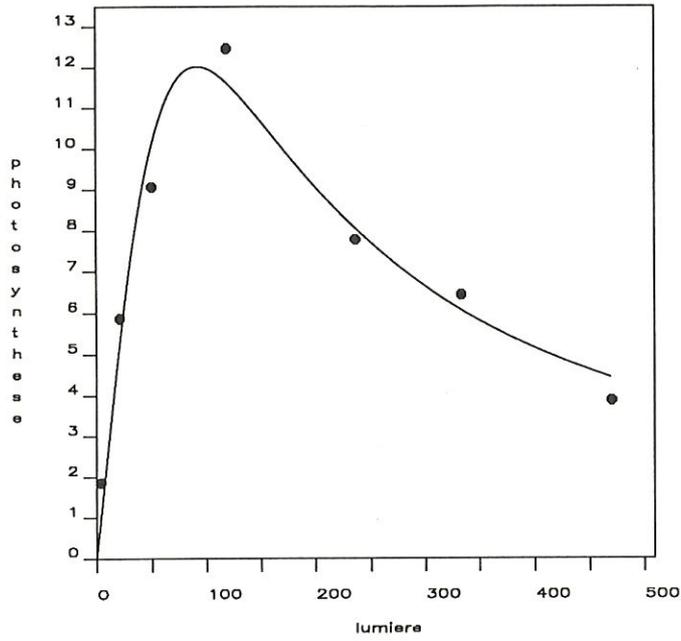


STATION : KIGUFI(L) LE 011090
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)

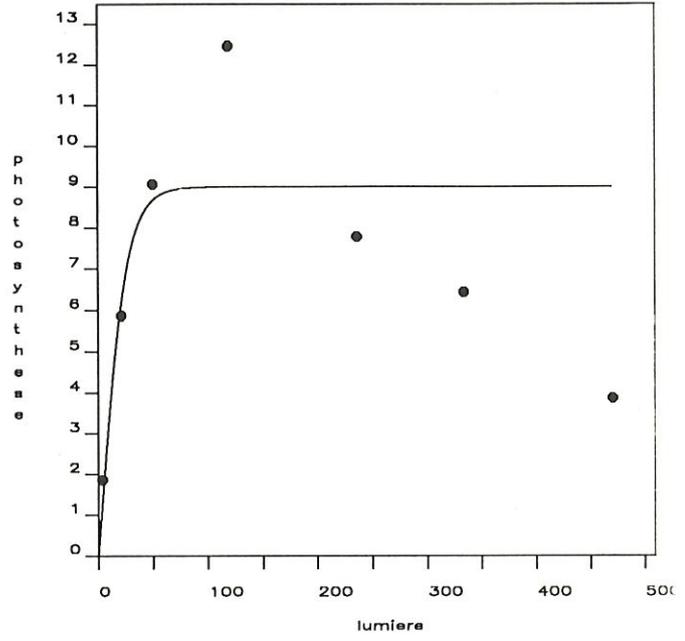


STATION 3

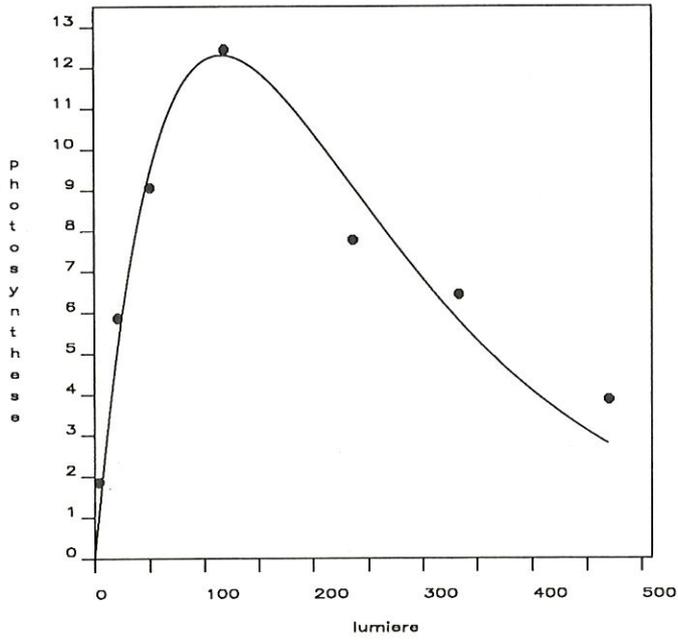
STATION : STATION 3 LE 021090
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



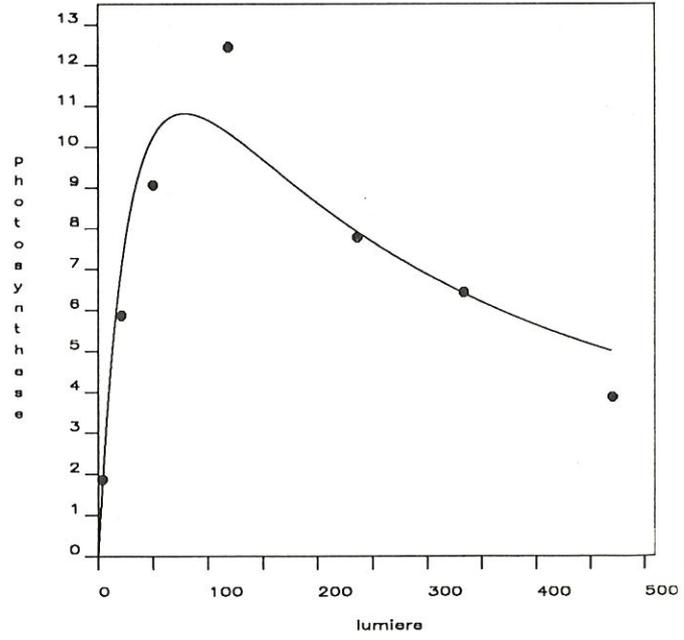
STATION : STATION 3 LE 021090
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



STATION : STATION 3 LE 021090
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)



STATION : STATION 3 LE 021090
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)



LAC KIVU : point de départ, valeurs des paramètres optimisés et production journalière pour chacun des modèles et chacune des stations

	point de départ		valeurs optimales					prod. jour. mgC/m ² /j
	Ik μE/m ² /s	Pmax Popt μgC/l	Ik μE/m ² /s	Pmax Popt μgC/l	n b	a m		
KIGUFI (C) 01/10/90								
N°1 (Vollenweider)	200	14	171.16	14.32	7.47	1.06	0.98	807.72
N°2 (Jassby & Platt)	200	14	119.38	11.60	6.05	-	-	815.36
N°3 (Platt et al.)	200	14	585.58	58.14	30.33	1.00	-	806.56
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	200	14	312.36	52.00	27.13	1.12	1.07	939.89
KIGUFI (L)								
N°1 (Vollenweider)	200	5	124.81	5.03	2.62	1.11	0.98	332.65
N°2 (Jassby & Platt)	200	5	132.79	5.20	2.71	-	-	392.86
N°3 (Platt et al.)	200	5	388.39	19.96	10.41	1.03	-	334.36
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	200	5	409.60	20.97	10.94	2.30	1.41	346.84
STATION 3								
N°1 (Vollenweider)	50	12	46.23	12.08	5.00	1.02	1.00	462.30
N°2 (Jassby & Platt)	50	12	25.23	9.00	3.72	-	-	515.24
N°3 (Platt et al.)	50	12	167.95	49.50	20.46	1.01	-	452.09
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	50	12	84.36	42.57	17.62	1.07	1.05	517.28

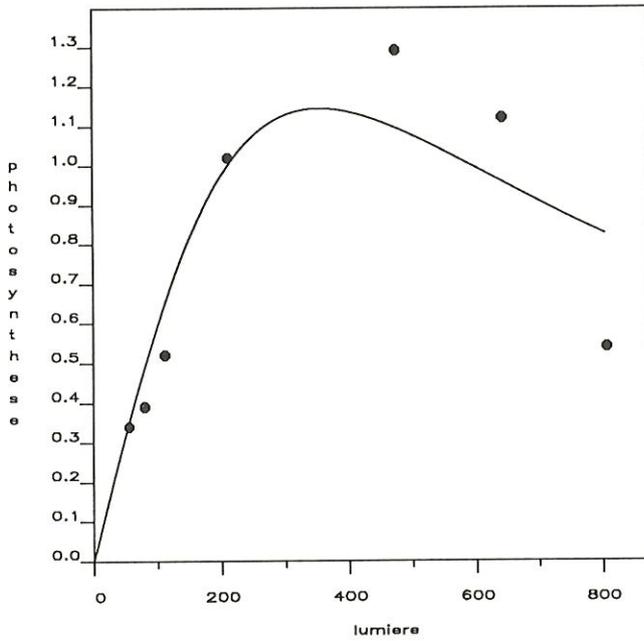
Tab. V.2.

Remarques : 1) le point de départ des paramètres de photoinhibition (n,a,b,m) est fixe à 1.
 2) le Pmax et le Popt ont une signification différente selon qu'il s'agit des modèles 1 et 2, ou 3 et 4.
 3) le - signifie que ce paramètre n'existe pas pour ce modèle.

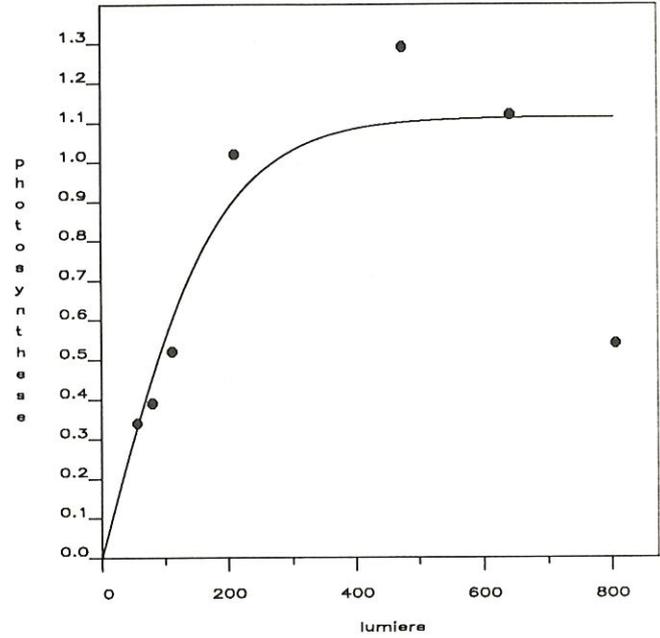
V.2. LAC MUHAZI (RWANDA)

Station : KARAMBO (22/03/90)

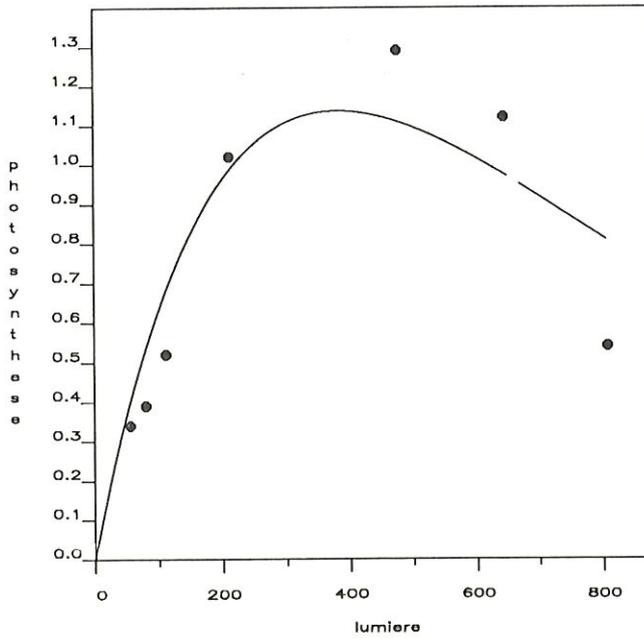
STATION : KARAMBO LE 220390
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



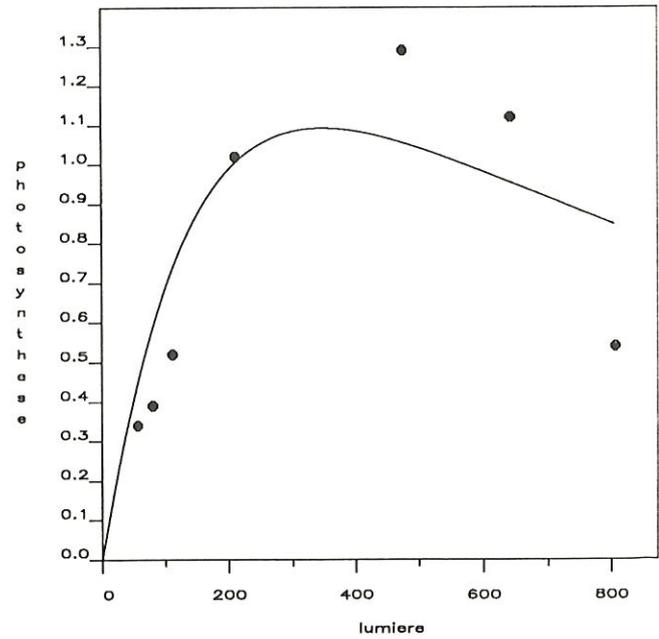
STATION : KARAMBO LE 220390
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



STATION : KARAMBO LE 220390
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)



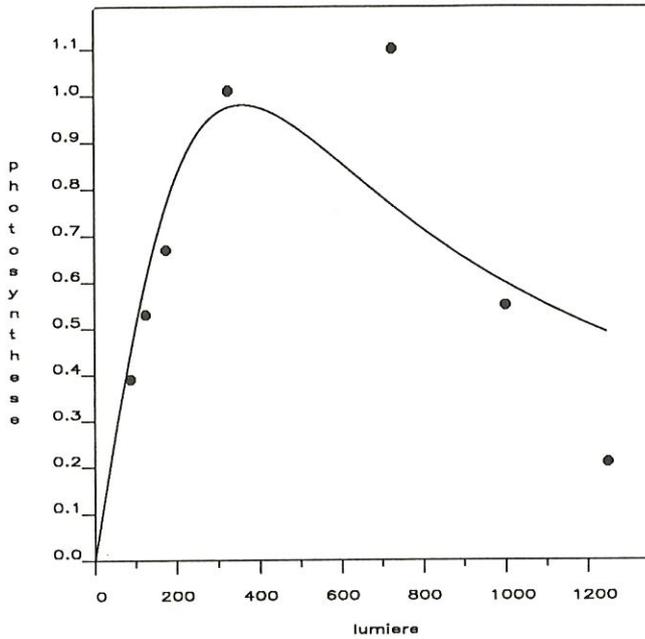
STATION : KARAMBO LE 220390
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)



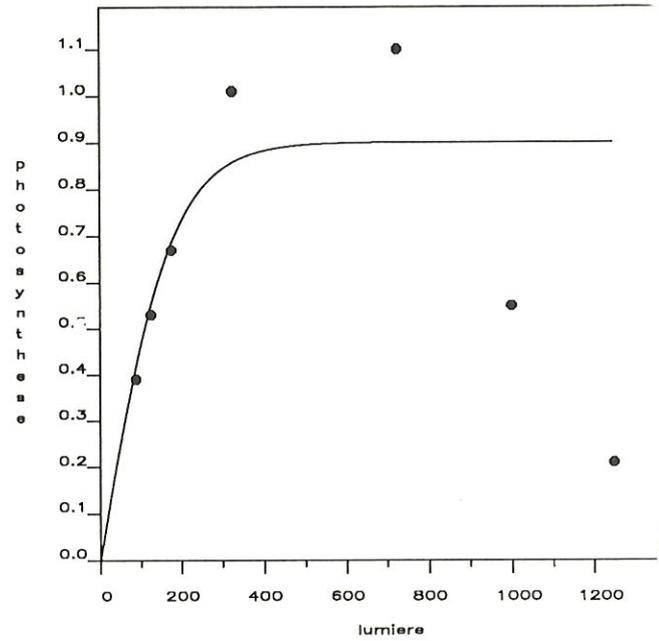
Unites : photosynthese : mgO2/l
lumiere : μE/m2/s

Station : NYARUBUYE (15/03/90)

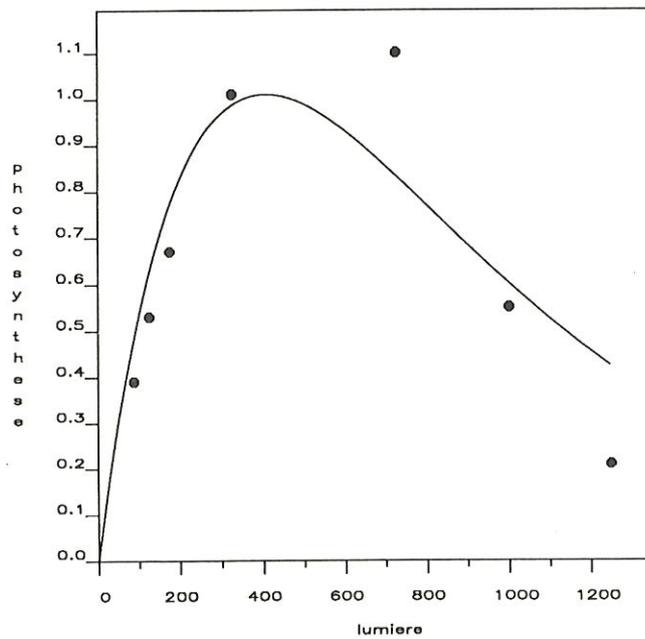
STATION : NYARUBUYE LE 150390
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



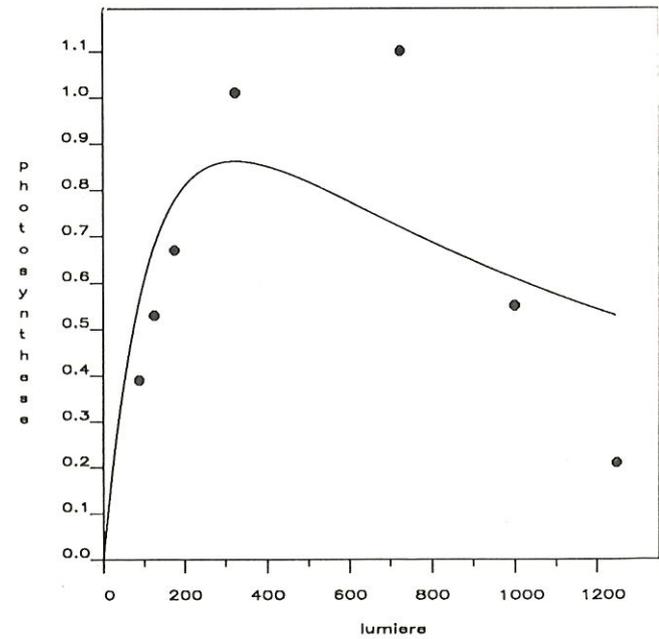
STATION : NYARUBUYE LE 150390
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



STATION : NYARUBUYE LE 150390
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)

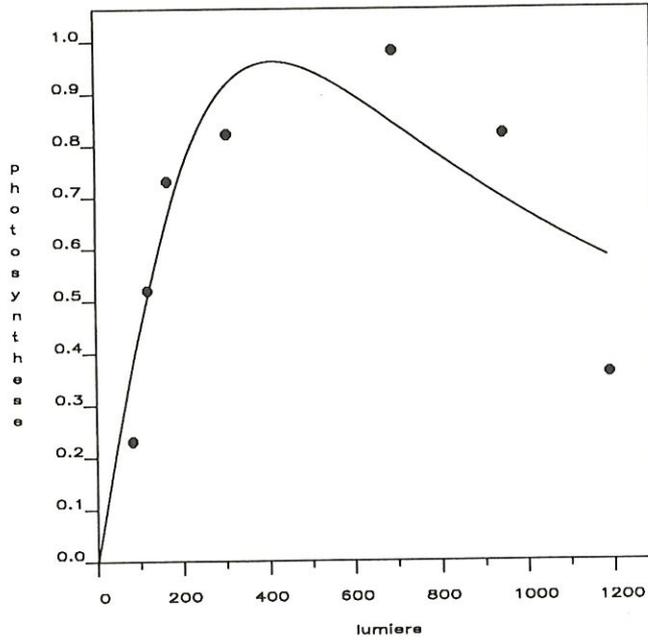


STATION : NYARUBUYE LE 150390
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)

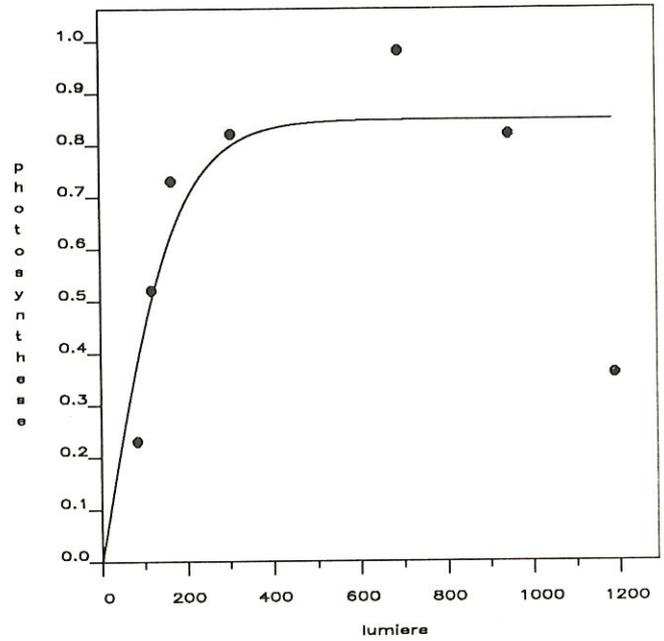


Station : NYARUBUYE (22/03/90)

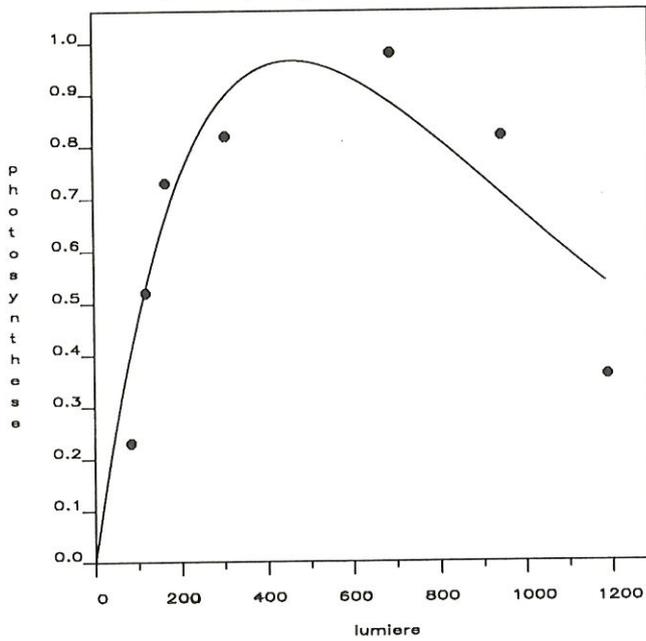
STATION : NYARUBUYE LE 220390
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



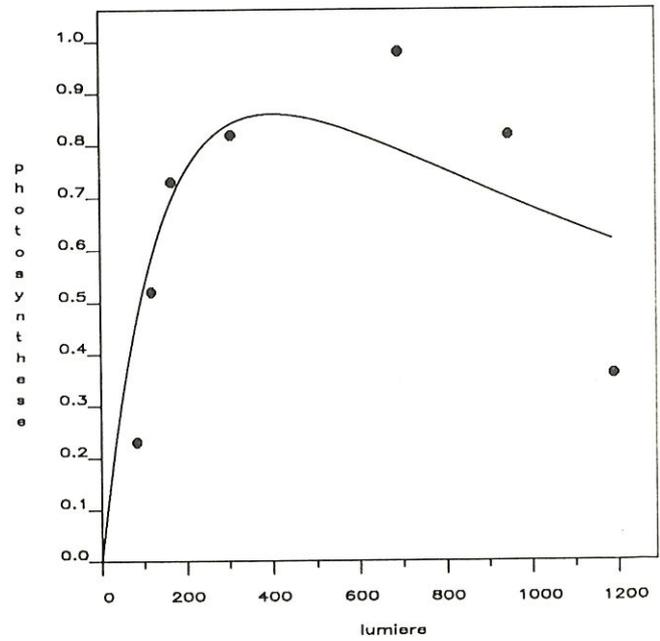
STATION : NYARUBUYE LE 220390
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



STATION : NYARUBUYE LE 220390
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)

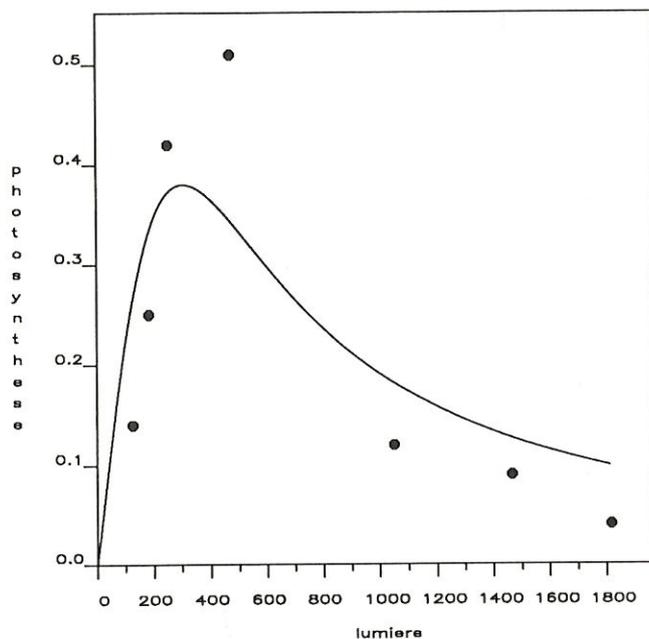


STATION : NYARUBUYE LE 220390
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)

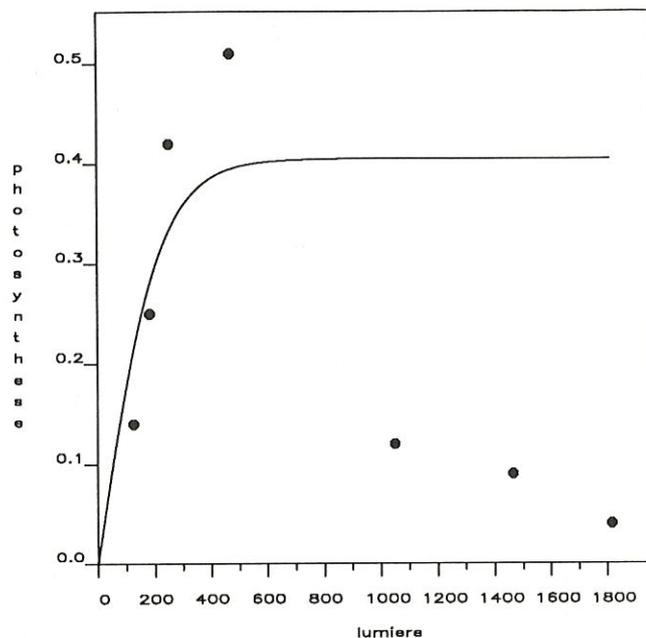


Station : NYARUBUYE (29/03/90)

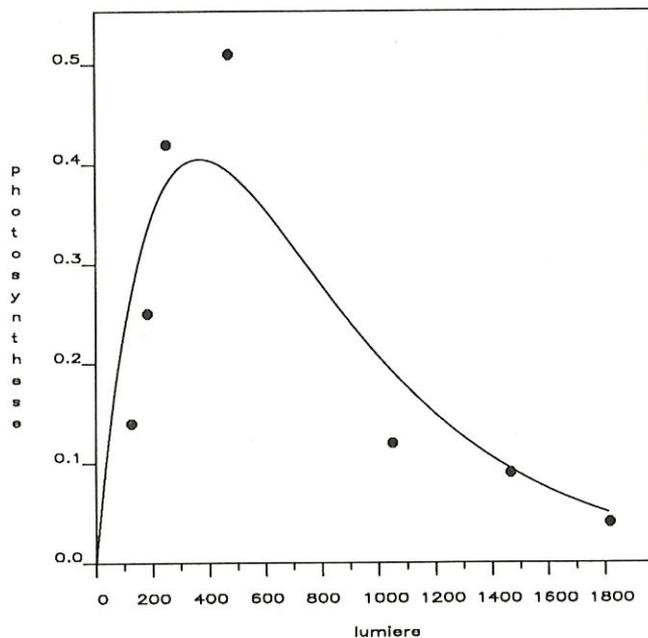
STATION : NYARUBUYE LE 290390
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



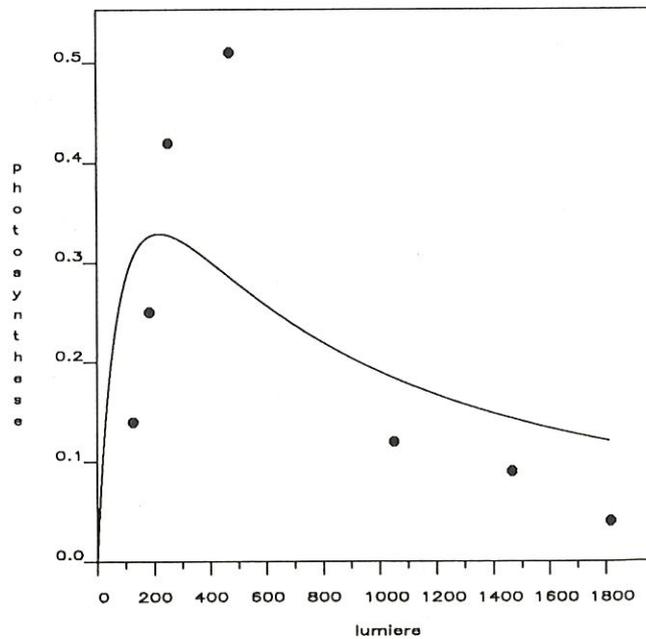
STATION : NYARUBUYE LE 290390
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



STATION : NYARUBUYE LE 290390
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)



STATION : NYARUBUYE LE 290390
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)



LAC MUHAZI : point de départ, valeurs des paramètres optimisés et production journalière pour chacun des modèles et chacune des stations

		point de départ						valeurs optimales						prod. jour.
		Ik	Pmax Popt	Ik	Pmax Popt	n	a	Ik	Pmax Popt	n	a	m	prod. jour.	
		$\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$	mgO_2/l	$\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$	mgO_2/l			$\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$	mgO_2/l				$\text{gO}_2/\text{m}^2/\text{j}$	
KARAMBO 22/03/90														
N°1 (Vollenweider)	200	1	185.60	1.18	0.20	1.10	0.99	1.33					1.33	
N°2 (Jassby & Platt)	200	1	186.05	1.11	0.19	-	-	1.27					1.27	
N°3 (Platt et al.)	200	1	564.16	4.65	0.78	1.03	-	1.42					1.42	
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	200	1	471.72	4.35	0.72	1.44	1.20	1.49					1.49	
NYARUBUYE 15/03/90														
N°1 (Vollenweider)	200	1	190.29	1.02	0.17	1.11	1.01	1.99					1.99	
N°2 (Jassby & Platt)	200	1	175.20	0.90	0.15	-	-	1.89					1.89	
N°3 (Platt et al.)	200	1	601.56	4.13	0.69	1.03	-	2.13					2.13	
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	200	1	376.63	3.64	0.60	1.17	1.04	2.22					2.22	
NYARUBUYE 22/03/90														
N°1 (Vollenweider)	200	1	213.35	0.98	0.50	1.06	1.01	3.99					3.99	
N°2 (Jassby & Platt)	200	1	175.06	0.85	0.42	-	-	3.85					3.85	
N°3 (Platt et al.)	200	1	677.02	3.93	1.96	1.02	-	4.22					4.22	
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	300	1	465.97	3.50	1.75	1.17	1.07	4.46					4.46	
NYARUBUYE 29/03/90														
N°1 (Vollenweider)	200	1	171.26	0.41	0.08	1.24	1.02	0.89					0.89	
N°2 (Jassby & Platt)	200	1	215.31	0.41	0.08	-	-	0.89					0.89	
N°3 (Platt et al.)	200	1	558.56	1.71	0.34	1.08	-	0.97					0.97	
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	200	1	249.11	1.56	0.31	1.13	0.94	1.08					1.08	

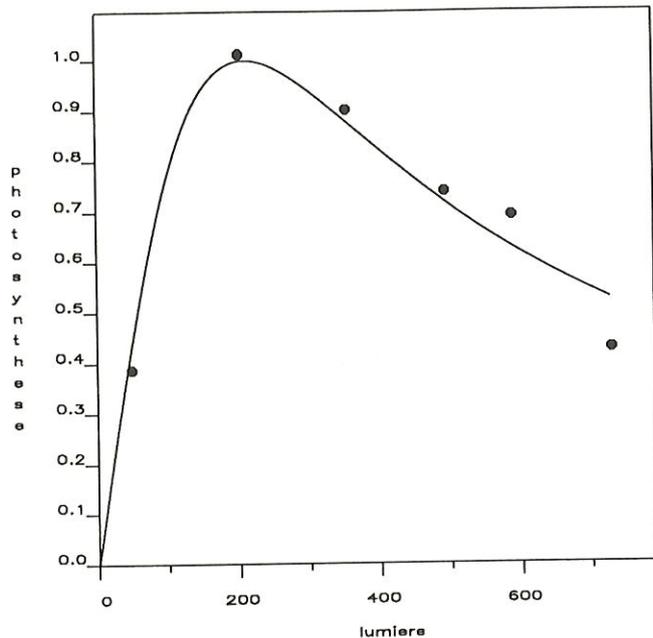
Tab. V.4.

Remarques : 1) le point de départ des paramètres de photoinhibition (n,a,b,m) est fixe a 1.
 2) le Pmax et le Popt ont une signification différente selon qu'il s'agit des modèles 1 et 2, ou 3 et 4.
 3) le - signifie que ce paramètre n'existe pas pour ce modèle.

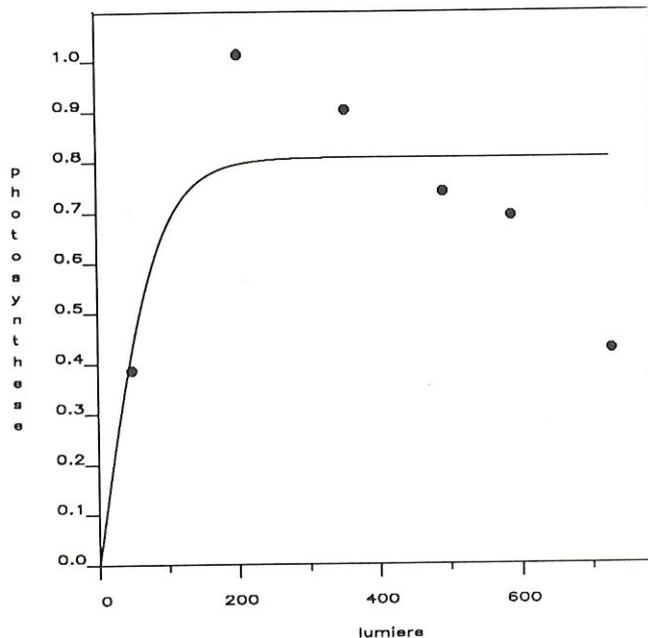
V.3. LA MEUSE (BELGIQUE)

Station : TAILFER (13/09/90)

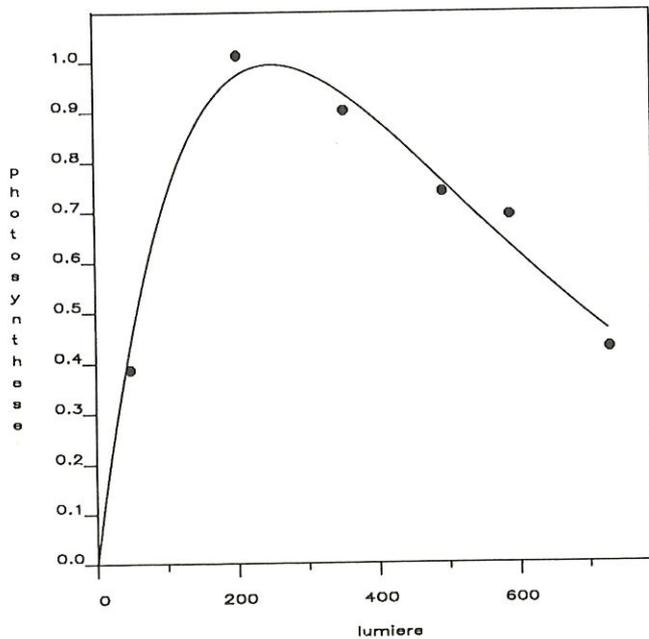
STATION : TAILFER LE 130990
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



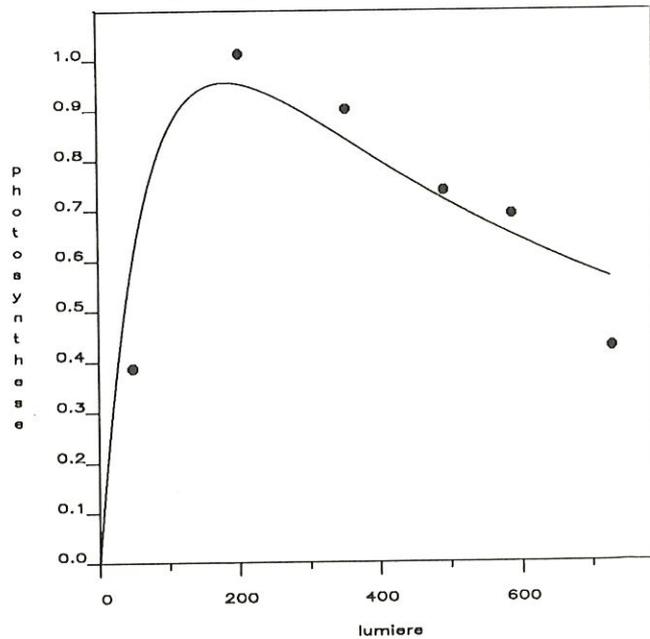
STATION : TAILFER LE 130990
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



STATION : TAILFER LE 130990
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)



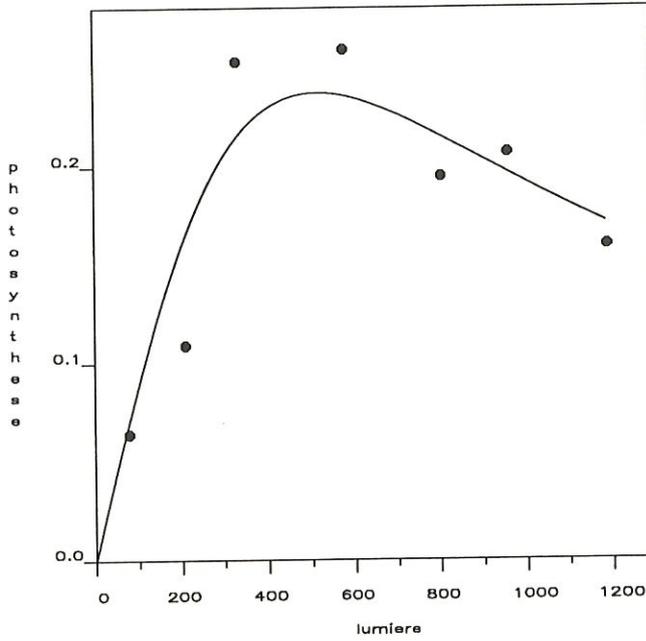
STATION : TAILFER LE 130990
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)



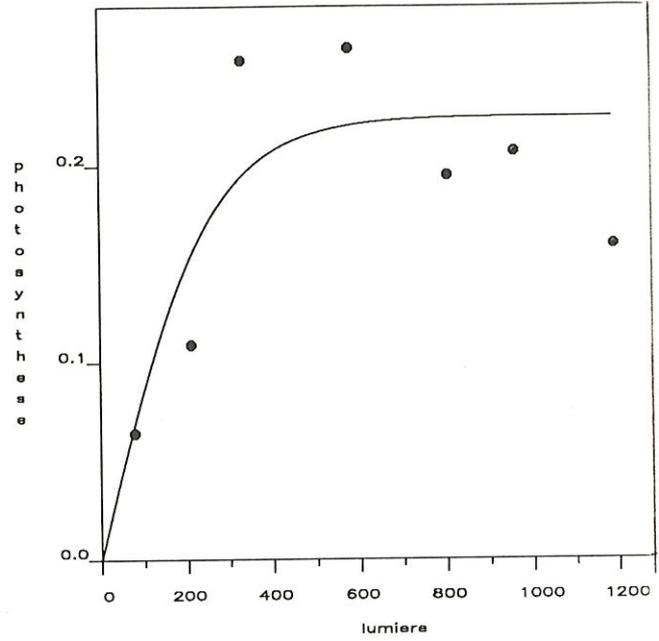
Unites : photosynthese : mgC/l
lumiere : $\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$

Station : ANDENNE (14/09/90)

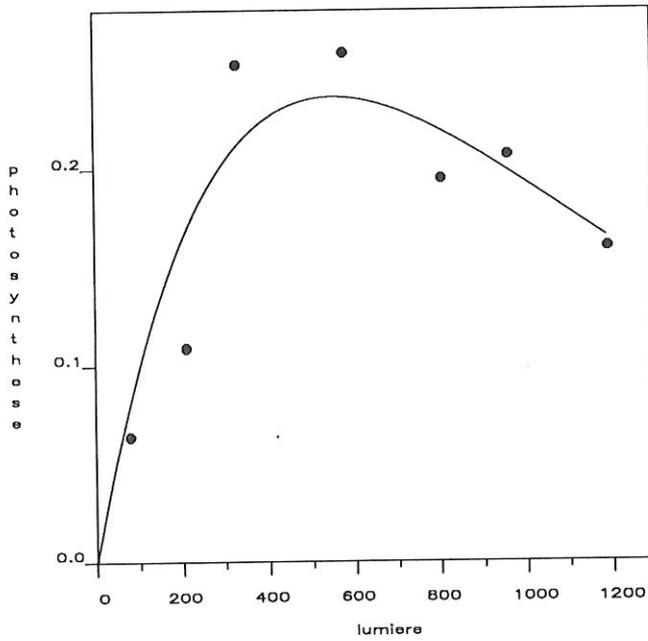
STATION : ANDENNE LE 140990
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



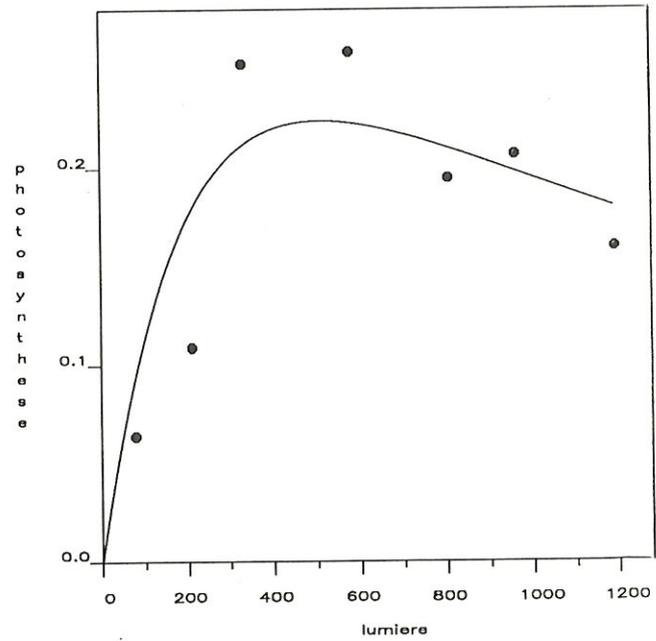
STATION : ANDENNE LE 140990
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



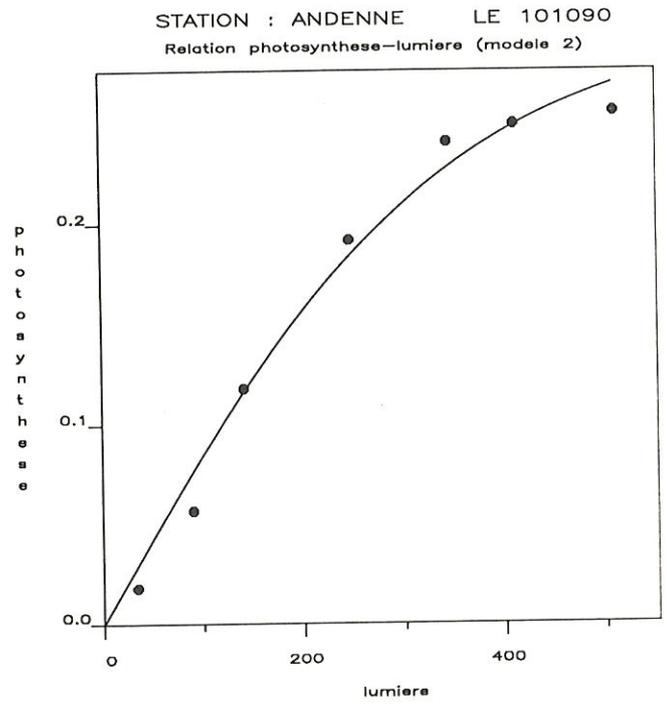
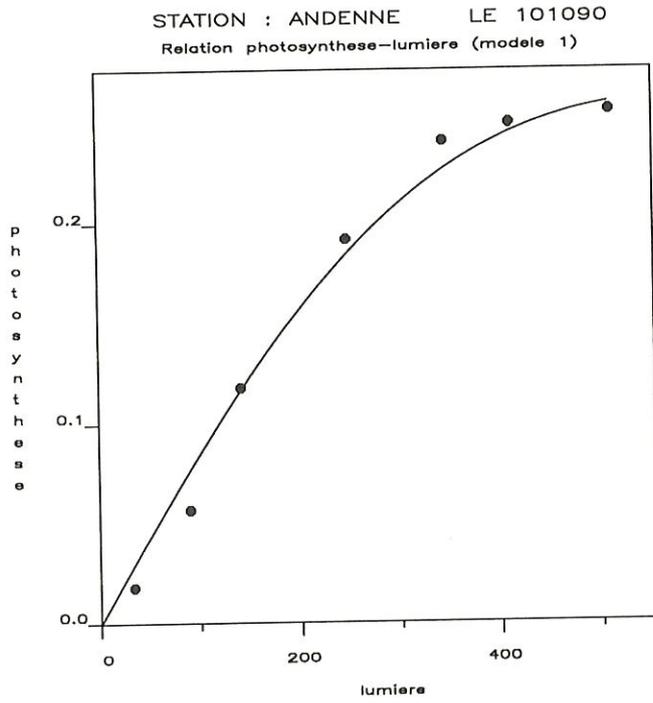
STATION : ANDENNE LE 140990
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)



STATION : ANDENNE LE 140990
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)

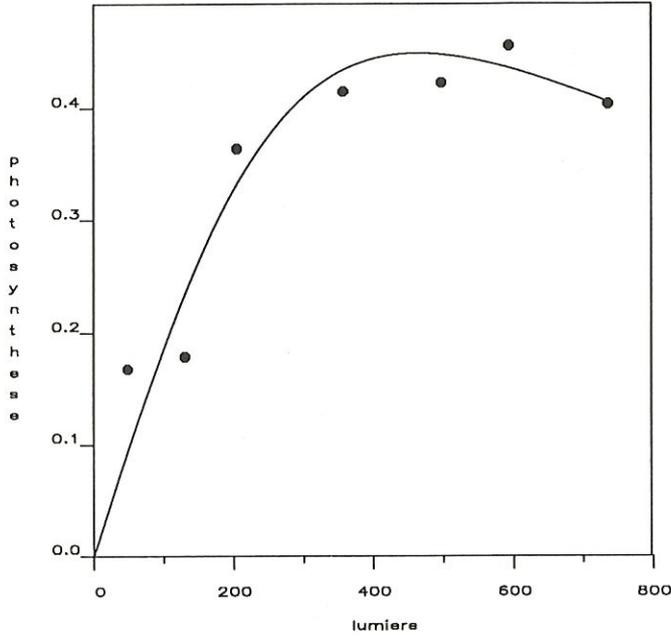


Station : ANDENNE (10/10/90)

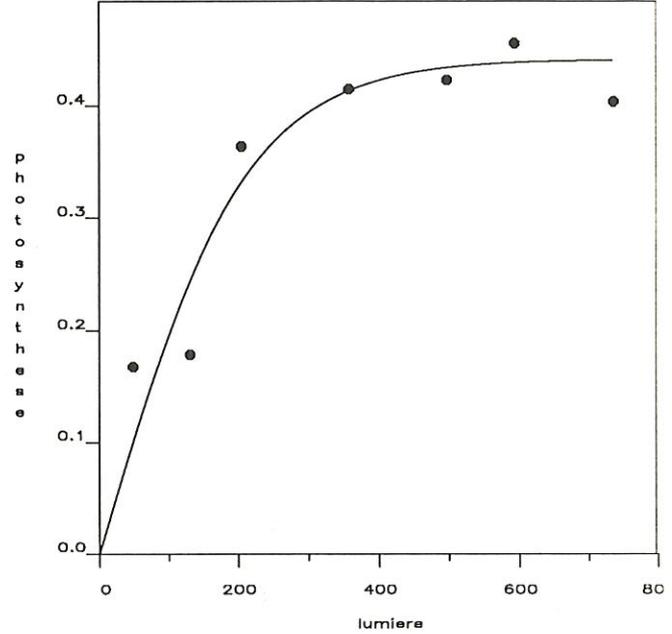


Station : TAILFER (19/10/90)

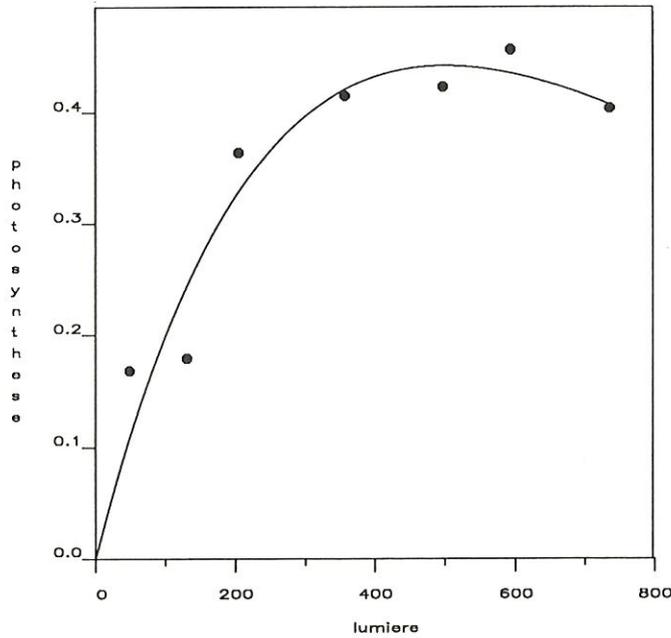
STATION : TAILFER LE 191090
Relation photosynthese-lumiere (modele 1)



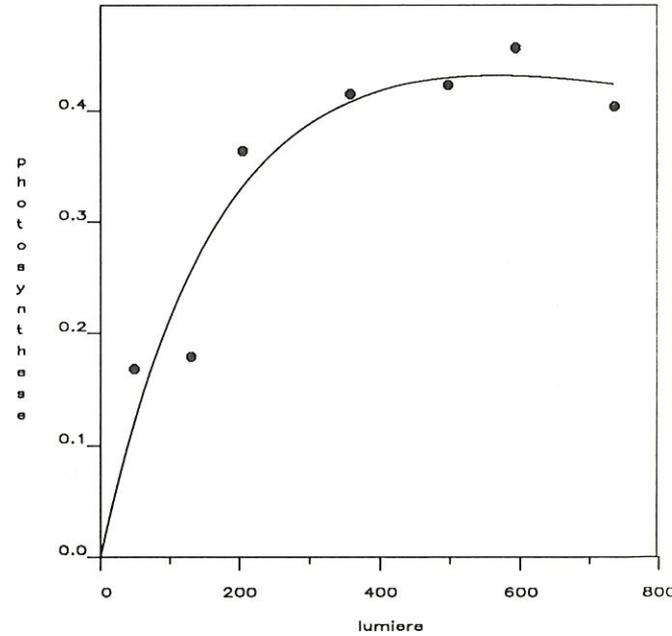
STATION : TAILFER LE 191090
Relation photosynthese-lumiere (modele 2)



STATION : TAILFER LE 191090
Relation photosynthese-lumiere (modele 3)



STATION : TAILFER LE 191090
Relation photosynthese-lumiere (modele 4)



Présentation des résultats

MEUSE : point de depart, valeurs des parametres optimises et production journaliere pour chacun des modeles et chacune des stations

	point de depart		valeurs optimales					prod. jour. gC/m2/j
	Ik μE/m2/s	Pmax Popt mgC/l	Ik μE/m2/s	Pmax Popt mgC/l	mgC/l/h	n b	a m	
TAILFER 13/09/90								
N°1 (Vollenweider)	150	1	106.50	1.00	0.29	1.03	0.98	3.89
N°2 (Jassby & Platt)	150	1	82.31	0.80	0.24	-	-	3.49
N°3 (Platt et al.)	150	1	362.94	3.98	1.16	1.00	-	3.91
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	150	1	204.58	3.62	1.06	1.13	1.10	4.71
ANDENNE 14/09/90								
N°1 (Vollenweider)	150	1	264.17	0.24	0.24	1.04	1.00	3.50
N°2 (Jassby & Platt)	200	1	249.06	0.22	0.22	-	-	3.31
N°3 (Platt et al.)	200	1	806.11	0.96	0.96	1.02	-	3.77
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	200	1	614.49	0.90	0.90	1.23	1.10	4.09
ANDENNE 10/10/90								
N°1 (Vollenweider)	200	1	314.30	0.27	0.27	1.13	0.98	0.80
N°2 (Jassby & Platt)	200	1	347.79	0.30	0.30	-	-	0.79
TAILFER 19/10/90								
N°1 (Vollenweider)	200	1	224.55	0.45	0.45	0.96	1.04	3.54
N°2 (Jassby & Platt)	200	1	198.35	0.44	0.44	-	-	3.68
N°3 (Platt et al.)	200	1	712.16	1.80	1.80	1.03	-	3.72
N°4 (Iwakuma & Yasuno)	200	1	597.25	1.76	1.76	1.07	1.01	3.93

Tab. V. 6.

- Remarques : 1) le point de depart des parametres de photoinhibition (n,a,b,m) est fixe a 1.
 2) le Pmax et le Popt ont une signification differente selon qu'il s'agit des modeles 1 et 2, ou 3 et 4.
 3) le - signifie que ce parametre n'existe pas pour ce modele.

V.4. CONCLUSIONS

V.4.1. Les paramètres de photoinhibition

avons
Nous \checkmark vu au chapitre II que, jusqu'à présent, les paramètres de photoinhibition α et n du modèle VOLLENWEIDER étaient fixés à 1. Les résultats confirment que cette approximation est valable pour ce modèle, principalement pour la Meuse. En effet, en optimisant α et n , nous obtenons des valeurs comprises entre 0.98 et 1.12 pour la Meuse. Alors que pour les lacs rwandais, elles varient de 0.98 à 1.24. Ces dernières valeurs étant légèrement plus élevées, il est intéressant de pouvoir les laisser libres plutôt que de les fixer.

Pour le modèle de PLATT et al., le paramètre de photoinhibition est compris entre 1.00 et 1.08, donc presque toujours égal à 1. Tandis que pour le modèle de IWAKUMA & YASUNO, les paramètres m et n varient de 0.94 à 2.30. Il est donc important pour ce 4^{ème} modèle d'optimiser les paramètres de photoinhibition.

V.4.2. Les modèles

L'équation de JASSBY et PLATT décrit un modèle avec saturation. De ce fait, il donne, lorsqu'il y a photoinhibition, un ajustement assez éloigné des points de mesures aux fortes intensités. Mais aux basses intensités, l'approximation est tout-à-fait remarquable, souvent meilleure que pour d'autres modèles. De plus, lorsqu'il n'y a pas photoinhibition (e.g. ANDENNE 10/10/90, TAILFER 19/10/90), ce modèle donne un très bon ajustement sur toute la gamme d'intensités.

L'équation de IWAKUMA & YASUNO décrit une courbe qui s'ajuste plus ou moins bien sur les points de mesures. Cependant, ce sont les modèles de VOLLENWEIDER et PLATT et al. qui produisent le meilleur ajustement. Les résidus obtenus sont très petits. En outre, ils sont respectivement très proches l'un de l'autre. A première vue, ces 2 modèles se valent, bien que les équations soient totalement différentes, et que le nombre de paramètres de photoinhibition est également différent (cf. § 11.3.). Mais en les regardant de plus près, les résidus résultant de l'optimisation du modèle de PLATT et al. sont les plus petits. Nous pouvons donc conclure que c'est ce dernier modèle qui donne le meilleur ajustement de la relation photosynthèse-lumière.

Nous avons donc construit un programme, BIOPTI, qui permet, à partir des données brutes, d'optimiser des équations décrivant la relation photosynthèse-lumière. Celui-ci calcule, entre autres, les paramètres I_k et P_{max} , et la production journalière, calculée par intégration, en tenant compte de chacune des intensités du jour. De plus, il permet de tester les mesures avec différents modèles. Nous avons pu ainsi améliorer les résultats précédents et commencer à traiter de nouvelles mesures. L'utilisation de ce programme est expliquée en annexe.

ANNEXE

PROGRAMME BIOPTI

Contenu du programme

Le programme BIOPTI fait appel à 4 sous-routines :

LECDON : pour la lecture des données

DUNLSF : pour l'optimisation.

FCN : pour le calcul des résidus

DESFON : pour le dessin de la relation
photosynthèse-lumière

et à 4 fonctions :

FVOL : pour le modèle de VOLLENWEIDER (1965).

FJPL : pour le modèle de JASSBY & PLATT (1976).

FPLA : pour le modèle de PLATT et AL (1980).

FIWA : pour le modèle de IWAKUMA & YASUNO (1983).

Commentaires sur l'utilisation des sous-routines

1) LECDON.

Cette sous-routine se trouve dans le fichier *LECDON.FOR*.

Elle demande à l'utilisateur - le modèle à traiter

- le nom du fichier de données

- le nom du fichier
d'intensités

- la dernière heure du jour

- la méthode d'incubation
utilisée

- une première estimation des
paramètres.

Le fichier de données doit être structuré de la façon suivante :

a) Pour la méthode des bouteilles à différentes profondeurs :

Le nom de la station (10 caractères maximum)
La date (6 caractères maximum)
Le coefficient d'extinction
L'heure du début de l'incubation (en heure.minutes)
L'heure de fin d'incubation (en heure.minutes)
La première profondeur (en mètres)
Le taux de production d'O₂ ou assimilation de CO₂ correspondant
à la première profondeur
La deuxième profondeur (en mètres)
Le taux de production d'O₂ ou assimilation de CO₂ correspondant
à la deuxième profondeur
.
.
.

Exemple :

```
KIGUFI (C)
011090
0.243
11.10
13.05
1.
4.516
2.
7.211
3.
11.065
5.
14.361
7.5
13.464
10.
10.510
15.
3.211
```

b) pour la méthode des bouteilles filtrées :

Le nom de la station (10 caractères maximum)
 La date (6 caractères maximum)
 Le coefficient d'extinction
 L'heure du début de l'incubation (en heure.minutes)
 L'heure de fin d'incubation (en heure.minutes)
 L'intensité absolue en surface
 Le premier pourcentage d'intensité relative (en %)
 Le taux de production d'O₂ ou d'assimilation de CO₂
 correspondant au premier pourcentage
 Le deuxième pourcentage d'intensité relative (en %)
 Le taux de production d'O₂ ou d'assimilation de CO₂
 correspondant au deuxième pourcentage.
 .
 .
 .

Exemple :

TAILFER
 130990
 3.43
 12.05
 15.30
 728.7
 100
 0.427
 80
 0.692
 67
 0.739
 48
 0.901
 .
 .

Le fichier d'intensités lumineuses doit avoir la structure suivante :

1 ^{ere} heure.minutes	intensité correspondante en $\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$
2 ^{eme} heure.minutes	intensité correspondante en $\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
dernière heure.minutes	intensité correspondante en $\mu\text{E}/\text{m}^2/\text{s}$

Exemple : cf. § 11.5

Le pas de temps est calculé à partir des 2 premières heures.

Il est préférable que la première estimation des paramètres soit suffisamment proche de la solution, sinon l'algorithme risque de converger vers une autre solution que celle attendue. Déterminer I_k par interpolation et prendre P_{\max} égal au P_{\max} mesuré donne un très bon point de départ.

2) DUNLSF

Cette sous-routine fait partie de la librairie IMSL. Elle résout un problème des moindres carrés non linéaire en utilisant un algorithme de LEVENBERG-MAQUARDT modifié (cf[8]). Le nombre et la disposition de ses arguments ne peuvent être modifiés. Il est préférable de linker toute la librairie IMSL, car DUNLSF fait appel à d'autres sous-routines de la librairie. Notamment à la fonction FCN.

3) FCN

Cette sous-routine se trouve dans le fichier *FONCTION.FOR*. Elle calcule les résidus relatifs en fonction du modèle. Elle peut être utilisée indépendamment de la sous-routine DUNLSF, mais le nombre et la disposition de ses arguments ne peuvent être modifiés.

4) DESFON

Cette sous-routine se trouve dans le fichier *DESFON.FOR*. Les dessins sont réalisés au moyen du Di3000. Le linkage se fait par l'instruction *@PLT : VT 240* pour le système VAX/VMS.

Pour linker le programme BIOPTI il existe un fichier *BIOPTI.COM*, l'instruction est donc *LINK @BIOPTI.COM* ce qui revient à :

LINK BIOPTI, LECDON, FONCTIONS, DESFON, IMSL/LIB, @PLT : VT240

PROGRAMME BIOPTI


```

C      descriptions :
C      =====
C
C      abbreviations : VE = Variable Entiere
C                      VR = Variable Reelle simple precision
C                      VDP = Variable Double Precision
C                      VC(x) = Variable Caractere de longueur x
C                      TE(x) = Tableau d'Entiers de longueur x
C                      TDP(x) = Tableau Double Precision de x elements
C                      MDP(x,y) = Matrice Double Precision de
C                                 dimension (x,y)
C
C
C      constantes :
C      -----
C
C      NMAX      : VE, nombre maximal de parametres a optimiser
C      MESMAX   : VE, nombre maximal de mesures effectuees
C      DIMJAC   : VE, dimension maximal du jacobien JAC (cf. imsl)
C
C
C      variables :
C      -----
C
C      NMESU    : VE, nombre de mesures effectuees
C      N        : VE, nombre de parametres a optimiser
C      JMAX     : VE, nombre d'intensites relevees sur une journee
C      PTEMPS   : VE, pas de temps entre 2 intensites (15, 30,...)
C      IPARAM   : TE(6), vecteur de parametres utilise par imsl, en
C                  particulier :
C                  IPARAM(3)= nombre maximal d'iterations
C                  IPARAM(4)= nombre maximal d'evaluations de fonctions
C      IOS      : VE, indice du type d'erreur eventuelle lors des
C                  interactions e/s
C      I, J     : VE, indices de boucle
C      X        : TDP(N), inconnue (contient les N parametres a optimiser)
C      XPREST   : TDP(N), premiere estimation de X
C      XSCALE   : TDP(N), diagonale de la matrice des variables (imsl)
C                  (initialisee a 1.0 )
C      FSCALE   : TDP(NMESU), diagonale de la matrice des fonctions (imsl)
C                  (initialisee a 1.0 )
C      DPARAM   : TDP(7), vecteur de parametres utilise par imsl
C      JAC      : MDP(NMESU,N), jacobien de difference finie de la
C                  solution approximee
C      NOP      : VDP, parametre optimal de photoinhibition de la courbe
C      AOP      : VDP, parametre optimal de photoinhibition de la courbe
C      RESIDU   : TDP(NMESU), residus de la solution approximee
C      INTJ     : MDP(51,JMAX), INTJ(i,j) = intensite recue a la "ieme"
C                  profondeur (i=0,...,51) a la "jeme" heure (j=1,...,JMAX).
C                  La profondeur etant decoupee en bandes de 0.5 metres,
C                  (e.g. i=0=surface, i=4=2 m.de profondeur) et 1'heure en
C                  1/4 d'heure ou en 1/2 heure.
C      PJ       : MDP(51,JMAX), PJ(i,j) = production photosynthetique
C                  correspondant a l'intensite INTJ(i,j)
C      PTOTJ    : VDP, production photosynthetique totale sur la
C                  profondeur a l'instant "j" (j=1,...,JMAX)
C      PTOT     : VDP, production photosynthetique totale sur la journee
C      ZMES     : TDP(NMESU), profondeurs mesurees
C      ETA      : VR, coefficient d'extinction
C      TINIT    : VR, temps du debut des mesures exprime en
C                  heure.minutes
C      TFIN     : VR, temps de la fin des mesures exprime en
C                  heure.minutes
C      TINITD   : VR, temps du debut des mesures exprime en
C                  heure.decimales
C      TFIND    : VR, temps de la fin des mesures exprime en
C                  heure.decimales

```

```

C      HFIN   : VR, heure de fin du jour
C      REP    : VC, contient une reponse 'O' ou 'N' de l'utilisateur
C      STATION: VC(10), nom de la station ou sont effectuee les mesures
C      DATE   : VC(6), date a laquelle sont effectuee les mesures
C              (e.g. 2 novembre 1990 = 021090)
C      XMAX   : VDP, intensite (abscisse) maximale mesuree
C      YMAX   : VDP, production (ordonnee) maximale mesuree
C
C
C      commons :
C      -----
C
C      INTM   : TDP(NMESU), INTM(i) = intensite a la profondeur
C              mesuree ZMES(i), i=1,...,NMESU
C      PMES   : TDP(NMESU), PMES(i) = production photosynthetique
C              mesuree a la profondeur ZMES(i), i=1,...,NMESU
C      INVIKOP: VDP, valeur de l'inverse du parametre Ik apres
C              optimisation
C      PMAXOP : VDP, valeur du parametre Pmax apres optimisation
C      TOUR2  : VC, indique si l'optimisation se fait en une (TOUR2='N')
C              ou 2 etapes (TOUR2='O')
C      RESU   : VC, nom du fichier ou l'utilisateur desire avoir
C              les resultats
C      MODELE : VE, indice du modele choisi :
C              Vollenweider (1965)           = 1
C              Jassby & Platt (tanh)(1976)  = 2
C              Platt et al. (exp) (1980)    = 3
C              Iwakuma & Yasuno (1983)     = 4
C
C
C      declaration des sous-routines et fonctions
C      -----
C
C      EXTERNAL FCN
C      EXTERNAL FVOL,FJPL,FPLA,FIWA
C      DOUBLE PRECISION FVOL,FJPL,FPLA,FIWA
C
C
C      descriptions :
C      =====
C
C      sous-routines :
C      -----
C
C      FCN      : utilisee par DUNLSF pour calculer les residus
C      LECDON   : demande les donnees a l'utilisateur et calcule
C              les intensites correspondantes aux productions
C              mesurees
C      DUNLSF   : realise l'optimisation des parametres (cf. imsl)
C      DU4LSF   : utilisee dans ce programme pour limiter le nombre
C              d'iterations et d'evaluations de fonctions (cf. imsl)
C      DESFON   : realise le graphe de la relation photosynthese-lumiere
C              en considerant les parametres optimaux calcules
C
C
C      fonctions :
C      -----
C      elles sont utilisees par DESFON pour dessiner la relation
C      photosynthese-lumiere du modele correspondant :
C
C      FVOL     : fonction de Vollenweider (1965)
C      FJPL     : fonction de Jassby & Platt (tanh)(1976)
C      FPLA     : fonction de Platt et al. (exp)(1980)
C      FIWA     : fonction de Iwakuma & Yasuno (1983)

```

```

C
C -----
C                               corps du programme
C -----
C
C initialisations
C
C WRITE (*, 900)
900 FORMAT (26 (/))
C WRITE (*, *)' -----
C WRITE (*, *)' Ce programme a pour objectif de optimiser la '
C WRITE (*, *)' relation photosynthese-lumiere et calculer la '
C WRITE (*, *)' production phytoplanctonique journaliere. '
C WRITE (*, *)' -----
C TOUR2='N'
C
C -----
C lecture des donnees
C -----
C
C CALL LECDON (NMESU, N, X, INTM, XPRES, ZMES, STATION, DATE,
1          ETA, TINIT, TFIN, PMES, INTJ, HFIN, JMAX, PTEMPS)
C
C
C transformation des "heure.minutes" en "heure.decimales"
C
C TINITD=AIN(TINIT)+(TINIT-AINT(TINIT))/0.60
C TFINDD=AIN(TFIN)+(TFIN-AINT(TFIN))/0.60
C
C calcul de XMAX correspondant a l'intensite moyenne maximale
C
C XMAX=0
C DO 3 I=1, NMESU
C   XMAX=MAX(INTM(I), XMAX)
3 CONTINUE
C
C calcul de YMAX correspondant au maximum des productions mesurees
C
C YMAX=0
C DO 10 I=1, NMESU
C   YMAX=MAX(PMES(I), YMAX)
10 CONTINUE
C
C initialisation par defaut des vecteurs XSCALE et FSCALE
C
C DO 20 I=1, N
C   XSCALE(I)=1.0
20 CONTINUE
C
C DO 30 I=1, NMESU
C   FSCALE(I)=1.0
30 CONTINUE
C
C limite du nombre d'iterations et d'evaluations de fonction
C
C CALL DU4LSF (IPARAM, DPARAM)
C IPARAM(3)=400
C IPARAM(4)=1000
C
C

```

```

C      impression du point de depart et calcul des residus initiaux
C
      WRITE (44, 800) STATION, DATE, MODELE
800    FORMAT (' RESULTATS OBTENUS POUR ', A10, ' LE ', A6, '/',
1      '
1      '
1      ' -----', //)
      WRITE (44, 950) (1/XPREST(1)), XPREST(2), XPREST(2) / (TFIND-TINITD)
950    FORMAT (' Les parametres initiaux donnees sont : ',
1      ' /, 2X, ' Ik (Iopt) =', G13.6, ' Popt =', G12.5, ' pour la',
1      ' duree de l''incubation', //,
1      ' 33X, ' =', G12.5, ' par heure',
1      ' /, 2X, ' a = 1', 21X, ' n = 1')
C
      CALL FCN(NMESU, N, XPREST, RESIDU)
      WRITE (44, *) ' Les residus initiaux sont : '
      WRITE (44, 2000) (RESIDU(I), I=1, NMESU)
2000   FORMAT ( 12G16.6)
C
C
C
C      -----
C      calcul de la solution optimale pour 2 parametres.
C      -----
C
      CALL DUNLSF (FCN, NMESU, N, XPREST, XSCALE, FSCALE, IPARAM,
1      DPARAM, X, RESIDU, JAC, DIMJAC)
C
C
C
C      initialisation des parametres optimaux calcules
C
      INVIKOP=X(1)
      PMAXOP=X(2)
C
C
C
C      -----
C      lere impression des resultats
C      -----
C
      WRITE (*, 1000) (1/X(1)), X(2), X(2) / (TFIND-TINITD)
1000   FORMAT (//, ' Les parametres optimaux sont (memes unites',
1      ' que les donnees) : ',
1      ' /, 2X, ' Ik (Iopt) =', G13.6, ' Popt =', G12.5, ' pour la',
1      ' duree de l''incubation', //,
1      ' 33X, ' =', G12.5, ' par heure', //)
      WRITE (*, *) ' Les residus sont : '
      WRITE (*, 2000) (RESIDU(I), I=1, NMESU)
      WRITE (44, 1000) (1/X(1)), X(2), X(2) / (TFIND-TINITD)
      WRITE (44, *) ' Les residus apres optimisation sur 2 parametres'
      WRITE (44, *) ' sont : '
      WRITE (44, 2000) (RESIDU(I), I=1, NMESU)
C
C
C
C

```

```

C -----
C eventuellement, calcul de la solution optimale pour les
C parametres de photoinhibition
C -----
C IF (MODELE.EQ.1.OR.MODELE.EQ.3.OR.MODELE.EQ.4) THEN
C
C     demande d'optimisation sur les autres parametres
C
C     WRITE (*,*) ' '
50    WRITE (*,*) 'Desirez-vous optimiser sur les autres parametres ?'
      WRITE (*,*) 'O/N?'
      READ (*,2100,ERR=100,IOSTAT=IOS) TOUR2
2100  FORMAT (A)
100   IF ((TOUR2.NE.'O'.AND.TOUR2.NE.'o'.AND.TOUR2.NE.'N'.AND.
1     TOUR2.NE.'n').OR.(IOS.NE.0)) THEN
      WRITE (*,1111)
1111  FORMAT (//,' Veuillez repondre par O ou N.',
1     //,' Vous avez la possibilite de recommencer ',
1     '1' operation.',/)
      GOTO 50
      ENDIF

C
C
C     reinitialisation du point de depart
C
C     IF (TOUR2.EQ.'O'.OR.TOUR2.EQ.'o') THEN
C       IF (MODELE.EQ.1.OR.MODELE.EQ.4) THEN
C         XPREST(1)=1.
C         XPREST(2)=1.
C       ELSE
C         N=1
C         XPREST(1)=1.
C       ENDIF

C
C
C     limite du nombre d'iterations et d'evaluations de fonction
C
C     CALL DU4LSF (IPARAM,DPARAM)
C     IPARAM(3)=400
C     IPARAM(4)=1000

C
C
C     appel de la sous-routine d'optimisation
C
1     CALL DUNLSF (FCN,NMESU,N,XPREST,XSCALE,FSCALE,IPARAM,
      DPARAM,X,RESIDU,JAC,DIMJAC)

C
C
C     initialisation des parametres optimaux calcules
C
C     IF (MODELE.EQ.1.OR.MODELE.EQ.4) THEN
C       NOP=X(1)
C       AOP=X(2)
C     ELSE
C       NOP=X(1)
C     ENDIF

C
C
C     -----
C     2eme impression des resultats
C     -----
C
C     IF (MODELE.EQ.1) THEN
C       WRITE (44,3000) NOP,AOP
3000  WRITE (*,3000) NOP,AOP
      FORMAT (//,' Les 2 autres parametres optimaux sont : ',/,
1     2X,' n =',G12.5,' a =',G12.5,/)

```

```

ELSE
  IF (MODELE.EQ.3) THEN
    WRITE (44,3001)NOP
    WRITE (*,3001)NOP
3001 1  FORMAT (/, ' Le 3eme parametre optimal est : ',/,
           2X, ' b =',G12.5,/)
    ELSE
    WRITE (44,3002)NOP,AOP
    WRITE (*,3002)NOP,AOP
3002 1  FORMAT (/, ' Les 2 autres parametres optimaux sont : ',/,
           2X, ' n =',G12.5,' m =',G12.5,/)
    ENDIF
  ENDIF
C
  WRITE (*,*) 'Les residus sont :'
  WRITE (*,2000) (RESIDU(I),I=1,NMESU)
  WRITE (44,*) 'Les residus finaux sont :'
  WRITE (44,2000) (RESIDU(I),I=1,NMESU)
C
  ELSE
    NOP=1.
    AOP=1.
  ENDIF
ENDIF
C
C
C -----
C calcul de la production photosynthetique sur toute une
C journee
C -----
C
PTOT=0
C
C integration sur le temps
C
DO 40 J=1,JMAX
  PTOTJ=0
C
C integration sur la profondeur (25 m)
C
DO 32 I=1,50
  INTJ(I,J)=INTJ(0,J)*EXP(-ETA*(I/2.))
  IF (MODELE.EQ.1) THEN
    PJ(I,J)=FVOL (INTJ(I,J), INVIKOP, PMAXOP, NOP, AOP)
  ENDIF
C
  IF (MODELE.EQ.2) THEN
    PJ(I,J)=FJPL (INTJ(I,J), INVIKOP, PMAXOP)
  ENDIF
C
  IF (MODELE.EQ.3) THEN
    PJ(I,J)=FPLA (INTJ(I,J), INVIKOP, PMAXOP, NOP)
  ENDIF
C
  IF (MODELE.EQ.4) THEN
    PJ(I,J)=FIWA (INTJ(I,J), INVIKOP, PMAXOP, AOP, NOP)
  ENDIF
C
  PTOTJ=PTOTJ+ (PJ(I,J) / ((TFIND-TINITD) / (PTEMPS/60.))) * 0.5
32  CONTINUE
  PTOT=PTOT+PTOTJ
40  CONTINUE
  WRITE (*,4000)PTOT
  WRITE (44,4000)PTOT
4000 1  FORMAT (/, ' La production calculee sur toute la journee est : ',/,
           3X,G13.6,/)
C

```

```

C
C
C -----
C dessin de la relation photosynthese-lumiere
C -----
C
C CALL DESFON (NMESU,XMAX,YMAX,NOP,AOP,STATION,DATE)
C
C
C -----
C demande de reexecution du programme
C -----
C
C WRITE(*,*) ' '
60 WRITE(*,*) 'Desirez-vous traiter un autre modele ou une autre '
  WRITE(*,*) 'station ? O/N ? '
  READ(*,2100,ERR=110,IOSTAT=IOS) REP
C
110 IF ((REP.NE.'O'.AND.REP.NE.'o'.AND.REP.NE.'N'.AND.
  1  REP.NE.'n').OR.(IOS.NE.0)) THEN
  WRITE(*,1111)
  GOTO 60
ENDIF
C
IF (REP.EQ.'O'.OR.REP.EQ.'o'.) THEN
  GOTO 2
ENDIF
C
END

```

SOUS-ROUTINE LECDON


```

C      SOMINT : VDP, somme des intensites prises en compte pour
C              calculer Io
C      IO      : VDP, intensite moyenne pendant l'incubation (cf. formule
C              de BEER-LAMBERT :  $I=I_0 \cdot \exp(-kz)$  )
C      HEURE   : TR(150), heures de la journee par 1/4 ou 1/2 heure
C      METHOD   : VC, indice de la methode d'incubation utilisee :
C              P pour les bouteilles en Profondeur
C              F pour les bouteilles Filtrees
C      FICDON  : VC(30), contient le nom du fichier de donnees
C      FICINT  : VC(30), contient le nom du fichier
C              d'intensites

```

```

C      commons :
C      -----

```

```

C      RESU    : VC(30), contient le nom du fichier ou l'utilisateur
C              desire avoir les resultats
C      MODELE  : VE, indice du modele choisi :
C              Vollenweider (1965)           = 1
C              Jassby & Platt (tanh) (1976) = 2
C              Platt et al. (exp) (1980)    = 3
C              Iwakuma & Yasuno (1983)     = 4

```

```

C      -----
C      corps de la sous-routine
C      -----

```

```

C      -----
C      demandes des donnees a l'ecran
C      -----

```

```

C      demande du modele et du fichier souhaite
C      -----

```

```

C      4
900  WRITE (*,900)
      FORMAT(////,' Quel modele desirez-vous utiliser ? ',
1      ' Entrez le chiffre correspondant : ',/,
1      '      Vollenweider (1965)           = 1 ',/,
1      '      Jassby & Platt (tanh) (1976) = 2 ',/,
1      '      Platt et al. (exp) (1980)    = 3 ',/,
1      '      Iwakuma & Yasuno (1983)     = 4 ')
      READ (*,*,ERR=500,IOSTAT=IOS)MODELE

C      500
      IF (IOS.NE.0.OR.(MODELE.NE.1.AND.MODELE.NE.2.AND.MODELE.NE.3
1      .AND.MODELE.NE.4)) THEN
1111  WRITE (*,1111)
      FORMAT(//,' La reponse donnee ne peut etre acceptee.',
1      ' /, ' Vous avez la possibilite de recommencer ',
1      ' 1''operation.')
      GOTO 4
      ENDIF

```

```

C

```

```

WRITE (*, 950)
950  FORMAT (//, ' Dans quel fichier desirez-vous avoir les resultats ?',
1      //, ' Specifiez le sous-directory et l''extension ',
1      //, ' (si necessaire).',
1      //, ' Le tout ne peut pas depasser 30 caracteres.')
```

999 READ (*, 999) RESU

```

999  FORMAT (A)
      OPEN (44, FILE=RESU, STATUS='NEW')
```

C
C
C
C
C
C

10
1000

```

WRITE (*, 1000)
FORMAT (//, ' Veuillez donner le nom du fichier ou se trouvent ',
1      //, ' les donnees (STATION, DATE, ... etc ) ',
1      //, ' Specifiez le sous-directory et l''extension ',
1      //, ' (si necessaire).',
1      //, ' Le tout ne peut pas depasser 30 caracteres.')
```

999 READ (*, 999) FICDON

C

```

      OPEN (21, ERR=520, FILE=FICDON, IOSTAT=IOS, STATUS='OLD')
```

C

```

520  IF (IOS.NE.0) THEN
      WRITE (*, 1200)
1200  FORMAT (//, ' Il y a une erreur lors de l''ouverture ',
1      //, ' du fichier contenant les donnees.')
```

10
GOTO 10

```

      ENDIF
```

C

```

30  
1300  WRITE (*, 1300)
      FORMAT (//, ' Veuillez donner le nom du fichier ou se trouvent ',
1      //, ' les intensites lumineuses .',
1      //, ' Specifiez le sous-directory et l''extension.',
1      //, ' (si necessaire).',
1      //, ' Le tout ne peut pas depasser 30 caracteres.')
```

999 READ (*, 999) FICINT

C

```

      OPEN (33, ERR=550, FILE=FICINT, IOSTAT=IOS, STATUS='OLD')
```

C

```

550  IF (IOS.NE.0) THEN
      WRITE (*, 1500)
1500  FORMAT (//, ' Il y a une erreur lors de l''ouverture ',
1      //, ' du fichier contenant les intensites lumineuses.')
```

30
GOTO 30

```

      ENDIF
```

C

```

65  
1650  WRITE (*, 1650)
      FORMAT (//, ' Veuillez donner l''heure de fin du jour.')
```

565 READ (*, *, ERR=565, IOSTAT=IOS) HFIN

C

```

565  IF (IOS.NE.0) THEN
      WRITE (*, 1111)
      GOTO 65
      ENDIF
```

C
C
C
C

66
1656

```

WRITE (*, 1656)
FORMAT (//, ' Veuillez entrer le caractere correspondant a ',
1      //, ' la methode utilisee : ', //,
1      //, ' P pour l''incubation a differentes profondeurs', //,
1      //, ' F pour l''incubation dans les bouteilles ',
1      //, ' filtrees (bac).')
```

999 READ (*, 999, ERR=556, IOSTAT=IOS) METHOD

```

C
556 IF ((METHOD.NE.'P'.AND.METHOD.NE.'F'.AND.METHOD.NE.'p'
1 .AND.METHOD.NE.'f').OR.(IOS.NE.0)) THEN
WRITE (*,1111)
GOTO 66
ENDIF

C
C
C
C demande de la premiere estimation de X
C -----
C
70 WRITE(*,1700)
1700 FORMAT(//,' Veuillez donner la premiere estimation des ',
1 'parametres. ',
1 '/,' Ik (Iopt) = ', $)
READ(*,*,ERR=570,IOSTAT=IOS)IK
XPREST(1)=1./IK

C
570 IF (IOS.NE.0) THEN
WRITE (*,1111)
GOTO 70
ENDIF

C
72 WRITE(*,1720)
1720 FORMAT(' Pmax (Popt) = ', $)
READ(*,*,ERR=572,IOSTAT=IOS)XPREST(2)

C
572 IF (IOS.NE.0) THEN
WRITE (*,1111)
GOTO 72
ENDIF

C
N=2
XPREST(3)=1.
XPREST(4)=1.

C
C
C
C -----
C
C lecture des donnees dans les fichiers
C -----
C
C
C lecture de la station et de la date
C -----
C
READ(21,999,ERR=850,IOSTAT=IOS)STATION
READ(21,999,ERR=850,IOSTAT=IOS)DATE

C
850 IF (IOS.NE.0) THEN
WRITE(*,1850)
1850 FORMAT(//,' Il y a une erreur lors de la lecture ',
1 'de la station ou de la date.',
1 '/,' Le programme est interrompu.',/)
STOP
ENDIF

C
C
C
C lecture du coefficient d'extinction et des temps d'incubation
C -----
C
READ(21,*)ETA,TINIT,TFIN

C
C

```

```

C      lecture des profondeurs (ou du pourcentage d'intensite relative
C      converti en profondeur) et des productions mesurees
C      -----
C
90     IF (METHOD.EQ.'P'.OR.METHOD.EQ.'p') THEN
      I=1
      READ (21,*,END=100) ZMES (I)
      READ (21,*,END=100) PMES (I)
      I=I+1
100    GOTO 90
      CONTINUE
      NMESU=I-1
      ELSE
      I=1
91     READ (21,*) ISURF
      READ (21,*,END=101) IRPC (I)
      READ (21,*,END=101) PMES (I)
      ZMES (I)=1/ETA*LOG ( (ISURF*0.95) / (ISURF*IRPC (I)*0.01) )
      I=I+1
101    GOTO 91
      CONTINUE
      NMESU=I-1
      ENDIF
C
C
C      lecture des intensites journalieres
C      -----
C
105    J=1
      READ (33,*) HEURE (J),INTJ (0,J)
      IF (HEURE (J).NE.HFIN) THEN
      J=J+1
      READ (33,*) HEURE (J),INTJ (0,J)
      GOTO 105
      ENDIF
      JMAX=J
      PTEMPS=100*(HEURE (2)-HEURE (1))
C
C
C      -----
C      correspondance entre les temps mesures TINIT et TFIN
C      et heures donnees par 1/4 ou 1/2 heure
C      -----
C
120    J=1
      C
      C      heure initiale
      C      -----
      IF (HEURE (J).LE.TINIT) THEN
      IF (HEURE (J+1).GT.TINIT) THEN
      MINUT=(TINIT-AINT (TINIT))*100
      IF (MOD (MINUT,PTEMPS).LE.(PTEMPS/2)) THEN
      HEURI=HEURE (J+1)
      KI=J+1
      ELSE
      HEURI=HEURE (J+2)
      KI=J+2
      ENDIF
      ELSE
      J=J+1
      GOTO 120
      ENDIF
      ENDIF
      J=J+1
C
C

```

```

C      heure finale
C      -----
C
125   IF (HEURE (J) .LE. TFIN) THEN
      IF (HEURE (J+1) .GT. TFIN) THEN
          MINUT=(TFIN-AINT (TFIN)) *100
          IF (MOD (MINUT, PTEMPS) .LE. (PTEMPS/2)) THEN
              HEURF=HEURE (J+1)
              KF=J+1
          ELSE
              HEURF=HEURE (J+2)
              KF=J+2
          ENDIF
      ELSE
          J=J+1
          GOTO 125
      ENDIF
  ENDIF

C
C
C      -----
C      calcul des intensites correspondantes aux productions
C      mesurees
C      -----
C
C      moyenne des intensites pendant les heures d'incubation
C      -----
C
      SOMINT=0
      DO 134 J=KI, KF
          SOMINT=SOMINT+INTJ (0, J)
134   CONTINUE

C
C
C      calcul des intensites correspondant aux productions
C      mesurees -----
C
      I0=(SOMINT/ (KF-KI+1)) *0.95
      DO 140 J=1, NMESU
          INTM (J)=I0*EXP (-ETA*ZMES (J))
140   CONTINUE

C
C
C      fermeture des fichiers de donnees et d'intensites
C      -----
C
      CLOSE (21)
      CLOSE (33)

C
C
      END

```

SOUS-ROUTINE FCN
ET
FONCTIONS FVOL, FJPL, FPLA, FIWA


```

DO 10 I=1,NMESU
  IF (MODELE.EQ.1) THEN
    A=INTM(I)*INVIK
    B=1.+0.25*A**2
    C=-0.5*PARN
    RESIDU(I)=(A*B**(-0.5))*(B*PARA**2)**C-PMES(I)/PMA
  ENDIF
  IF (MODELE.EQ.2) THEN
    RESIDU(I)=TANH(X(1)*INTM(I))-PMES(I)/X(2)
  ENDIF
  IF (MODELE.EQ.3) THEN
    RESIDU(I)=(1-EXP(-INTM(I)*INVIK))
1    *EXP(-PARN*INTM(I)*INVIK)-PMES(I)/PMA
  ENDIF
  IF (MODELE.EQ.4) THEN
    RESIDU(I)=(INTM(I)*INVIK)/(1+(INTM(I)*INVIK)**PARA)
1    **((1+PARN)/PARA)-PMES(I)/PMA
  ENDIF
CONTINUE

```

10
C

END

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

=====

DOUBLE PRECISION FUNCTION FVOL(X, INVIKOP, PMAOP, AOP, NOP)

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

cette fonction calcule la fonction de Vollenweider (1965)

declarations :

DOUBLE PRECISION X, INVIKOP, PMAOP, AOP, NOP

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

X : VDP, variable de la fonction
INVIKOP: VDP, valeur de l'inverse du parametre Ik apres
optimisation
PMAOP : VDP, valeur du parametre Pmax apres optimisation
NOP : VDP, valeur du parametre n optimal
AOP : VDP, valeur du parametre a optimal

calcul de la fonction

FVOL=((PMAOP*(X*INVIKOP))/
1 SQRT(1+(X*0.5*INVIKOP)**2))/
1 (1+(AOP*X*0.5*INVIKOP)**2)**(NOP/2)

C
C
C
C
C
C
C
C

END


```

C
C
=====
C
C  DOUBLE PRECISION FUNCTION FIWA(X, INVIKOP, PMAXOP, AOP, NOP)
C
C  -----
C  cette fonction calcule la fonction de Iwakuma & Yasuno (1983)
C  -----
C
C  declarations :
C  -----
C
C  DOUBLE PRECISION X, INVIKOP, PMAXOP, AOP, NOP
C
C  X      : VDP, variable de la fonction
C  INVIKOP: VDP, valeur de l'inverse du parametre Ik apres
C           optimisation
C  PMAXOP : VDP, valeur du parametre Pmax apres optimisation
C  NOP    : VDP, valeur du parametre n optimal
C  AOP    : VDP, valeur du parametre m optimal
C
C
C  calcul de la fonction
C  -----
C
C  FIWA=PMAXOP*((X*INVIKOP)/(1+(X*INVIKOP)**AOP)**((1+NOP)/AOP))
C
C  END
C
C
C  =====

```

SOUS-ROUTINE DESFON


```

C      common :
C      -----
C
C      INTM   : TDP(NMESU), INTM(i) = intensite a la profondeur
C              mesuree ZMES(i), i=1,...,NMESU
C      PMES   : TDP(NMESU), PMES(i) = production photosynthetique
C              mesuree a la profondeur ZMES(i), i=1,...,NMESU
C      INVIKOP: VDP, valeur de l'inverse du parametre Ik apres
C              optimisation
C      PMAXOP : VDP, valeur du parametre Pmax apres optimisation
C      MODELE : VE, indice du modele choisi :
C              Vollenweider      = 1
C              Jassby & Platt (tanh) = 2
C              Platt (exp)        = 3
C              Iwakuma & Yasuno   = 4

```

```

C      declaration des fonctions externes
C      -----

```

```

C      DOUBLE PRECISION FVOL,FJPL,FPLA,FIWA
C      EXTERNAL FVOL,FJPL,FPLA,FIWA

```

```

C      ces fonctions permettent de dessiner la relation
C      photosynthese-lumiere du modele correspondant :

```

```

C      FVOL   : fonction de Vollenweider (1965)
C      FJPL   : fonction de Jassby & Platt (tanh) (1976)
C      FPLA   : fonction de Platt et al. (exp) (1980)
C      FIWA   : fonction de Iwakuma & Yasuno (1983)

```

```

C      -----
C      corps du programme
C      -----

```

```

C      demande d'affichage de la fonction
C      -----

```

```

C      WRITE (*,*) ' '
30      WRITE (*,*) 'Desirez-vous avoir un affichage du graphe de '
C      WRITE (*,*) 'la fonction ? O/N ?'
C      READ (*,900,ERR=32,IOSTAT=IOS)REP
900      FORMAT(A)
C
C      32      IF ((IOS.NE.0).OR.((REP.NE.'O').AND.(REP.NE.'o').AND.
C      1              (REP.NE.'N').AND.(REP.NE.'n')) THEN
C      WRITE (*,1111)
1111      FORMAT(/,' La reponse donnee ne peut etre acceptee.',
C      1              /,' Vous avez la possibilite de recommencer ',
C      1              ' l''operation.',/)
C      GOTO 30
C      ENDIF

```



```

UNITX= ( (XMAX/100+1) *100) / (XMAX/100+1)
NGRADX=XMAX/100+1
DO 79 I=2,NGRADX,2
  CALL JMOVE (I*UNITX,0)
  CALL JDRAW (I*UNITX,-0.15*MARGEY)
  CALL JMOVE (I*UNITX-10*LGRX,-0.5*MARGEY)
  IF (I*100.LT.1000) THEN
    WRITE (NOMBRE,3001) I*100
3001    FORMAT (I3)
  ELSE
    WRITE (NOMBRE,3000) I*100
3000    FORMAT (I4)
  ENDIF
  CALL JHSTRG (NOMBRE)
79    CONTINUE
  DO 73 I=1,NGRADX-1,2
    CALL JMOVE (I*UNITX,0)
    CALL JDRAW (I*UNITX,-0.08*MARGEY)
73    CONTINUE
C
ELSE
C    intensites superieures a 500
C
  UNITX= ( (XMAX/100+1) *50) / (XMAX/100+1)
  NGRADX= (XMAX/100+1) *2-1
  DO 74 I=0,NGRADX
    CALL JMOVE (I*UNITX,0)
    CALL JDRAW (I*UNITX,-0.15*MARGEY)
74    CONTINUE
    DO 77 I=2,NGRADX,2
      CALL JMOVE (I*UNITX,-0.5*MARGEY)
      WRITE (NOMBRE,3001) I*50
      CALL JHSTRG (NOMBRE)
77    CONTINUE
    DO 75 I=1,NGRADX-1,2
      CALL JMOVE (I*UNITX,0)
      CALL JDRAW (I*UNITX,-0.08*MARGEY)
75    CONTINUE
  ENDIF
C
C    marques des mesures
C    -----
C
  CALL JCMARK (3)
  CALL JINTEN (30000)
  DO 80 I=1,NMESU
    CALL JMARK (INTM(I),PMES(I))
80    CONTINUE
C
C    dessin de la fonction
C    -----
C
  CALL JMOVE (X(0),Y(0))
  DO 70 I=1,300
    CALL JDRAW (X(I),Y(I))
70    CONTINUE
C
C    inscription de la legende
C    -----
C
  CALL JSIZE (0.15*MARGEX,0.15*MARGEY)
  CALL JMOVE (-MARGEX,4.6*MARGEY)
  CALL JHSTRG ('p')
  CALL JMOVE (-MARGEX,4.35*MARGEY)

```


BIBLIOGRAPHIE

[1] DENNIS J.E., ROBERT J.R., SCHNABEL B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983, pp.218-237.

[2] DESCY J-P. Étude de la production planctonique au lac Kivu, rapport de mission, Nov. 1990, UNECED, FUNDP, Namur, 31p.

[3] ELSTER H-J. & OHLE W., Ergebnisse der limnologie, photosynthesis, productivity and growth : the physiological ecology of phytoplankton, E. Schweizerbart'sche Verlagsbruckhandlung (Nägele u. Obermiller), Stuttgart 1978.

[4] FEE E.J. , Digital computer programs for Estimating primary production , integrated Over Depth and Time, in water bodies (special report n°14) Center for Great Lakes studies, university of Wisconsin-Milwaukee, Mil, Dec. 1971.

[5] FEE E.J. , A numerical model for the estimation of photosynthetic production , integrated over time and depht. in natural waters (contribution n°22) . Center for Great Lakes studies, university of Wisconsin-Milwaukee, Milwaukee.

[6] GALLEGOS C.L. and PLATT T. Photosynthesis Measurements on Natural Populations of Phytoplankton : Numerical Analysis, in Physiological Bases of Phytoplankton Ecology, Canadian Bulletin of Fisheries and Aquatic Sciences, Ottawa 1981, Canada, pp 103-112

[7] GOSSELAIN Véronique, Compléments à l'étude de la production primaire en Meuse. Mise au point d'une méthode de mesure de l'activité respiratoire du phytoplancton. Mémoire présenté pour l'obtention du grade de licencié en Sciences Biologiques. UNECED, FUNDP, Namur, 1988, 122p.

[8] IMSL, Inc. Math/Library pp 835-847, pp 876-881.

[9] LAVIOLETTE F. Etude de l'utilisation du phytoplancton par *Tilapia* (*Sarotherodon nilotica*) au lac Muhazy (Rwanda) Mémoire présenté pour l'obtention du grade d'ingénieur agronome UCL, Louvain-La-Neuve. 1990, 102p.

[10] MASSAUT Laurence, Etude de la production primaire phytoplancton au lac Muhazi (Rwanda). Mémoire présenté pour l'obtention du grade de licencié en Sciences Biologiques, UNECEP, FUNDP, Namur, 1990, 123p.

[11] MORE J. The Levenberg-Marquardt algorithm : implementation and theory, Proceedings Dundee 1977, Springer Verlag, pp 105-116.

[12] PLATT and S.SATHYENDRANATH. Computation of aquatic primary production : Extended formalism to include effect of angular and spectral distribution of light

[13] STRASKRABA M. & GNAUCK A. Freshwater Ecosystem, Modelling and Simulation, (Developements in Environmental Modelling, 8) Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 1985, pp.119-139.

[14] STRODIOT J.-J. Méthodes numériques d'optimisation. Cours de seconde licence, notes, 1991.

[15] TOSHIO IWAKUMA & MASAYUKI YASUNO , A comparison of several mathematical equations describing photosynthesis-light curve for natural phytoplankton populations. E.Schweizerbart'sche Verlagsbruckhandlung, Stuttgart, 1983.

Avant de tourner la dernière page, je voudrais dédier quelques mots à ceux qui m'ont aidée et soutenue pendant ces dernières années.

Tout d'abord, à mes parents, toujours présents dans les moments difficiles, et dont le dévouement a permis l'accomplissement de mes études. Ils reçoivent toute mon affection.

Toute ma reconnaissance va également à Fabienne, Luc et Papa pour leur frappe efficace, ainsi qu'aux nombreuses "cours de pouce" qui se sont gentiment proposés pour la mise en forme de ces quelques pages.

Enfin, je remercie de tout cœur tous mes amis musiciens qui, moralement, m'ont offert le plus merveilleux soutien.

Merci à tous.