University of Namur

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Etude didactique du théorème des fonctions implicites au cours du premier cycle universitaire

LENARTZ, Virginie

Award date:
2012

FUNDP
NAMUR

FACULTÉS UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR

Faculté des sciences

ÉTUDE DIDACTIQUE DU THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES AU COURS DU PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en sciences mathématiques
Virginie LENARTZ

Août 2012

Résumé

Etude didactique du théorème des fonctions implicites au cours du premier cycle universitaire
Virginie Lenartz

La théorie des fonctions implicites s'inscrit dans divers cursus universitaires. On la retrouve bien entendu dans celui des bacheliers en sciences mathématiques mais elle occupe également une place non négligeable dans les cours d'analyse de futurs économistes, gestionnaires ou encore ingénieurs civils. Son enseignement se révèle néanmoins délicat et nombre de professeurs n'ont pu que constater les difficultés auxquelles il mène.
Ce mémoire a été rédigé dans l'optique de comprendre la manière dont les étudiants appréhendent les fonctions implicites et de déterminer l'origine des obstacles liés à leur enseignement. Aussi, avons-nous entrepris de porter un regard didactique sur cette situation devenue récurrente ces dernières années. Pour y parvenir, nous avons utilisé certains des outils de la didactique des mathématiques. Nous avons également élaboré différentes expérimentations afin d'accéder aux cours, productions et avis d'étudiants directement concernés par cet enseignement.
La présente étude est scindée en deux parties. La première aborde les généralités du cadre de notre recherche. La seconde, elle, est davantage orientée vers la problématique qui nous préoccupe. Elle s'appuie sur les principales étapes de la transposition didactique et sur notre dispositif expérimental pour expliquer la manière dont le théorème des fonctions implicites est, à l'heure actuelle, perçu par les étudiants.

Mots-clés : Théorème des fonctions implicites, transposition didactique, savoir savant, savoir à enseigner, conceptions, savoir appris

Abstract

Implicit function theorem for the first universitary course : didactic study

Virginie Lenartz

The theory of implicit functions appears in various degree courses. It is found in the course of bachelor in mathematics but it also holds on a significant place in analysis courses of future economists, managers or civil engineers. Nevertheless, its teaching proves to be awkward and many teachers could only observe the difficulties it can lead.
This dissertation has been written in order to understand how students grasp implicit functions. It also aims to determine the origin of obstacles linked to their teaching methods. So, we have decided to carry out a didactic study of this situation which has become a recurrent problem for several years. We have also developed different experiments in order to accede to coursebooks, productions and opinions of students who are directly affected by implicit functions teaching.
This report is divided into two parts. The first broaches the general framework of our research. The second one is more oriented towards the issues which concern us. It is based on the main steps of the didactic transposition and our experiments to explain how students understand implicit function theorem.

Keywords : Implicit function theorem, didactic transposition, scholar knowledge, learning knowledge, preliminary ideas, learnt knowledge

Remerciements

Dans cet avant-propos, j'aimerais remercier toutes les personnes qui de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce mémoire.

Mes premiers remerciements s'adressent à ma promotrice, le professeur Valérie Henry. Son expérience, son exigence et ses conseils avisés m'ont permis d'évoluer et de mener ce travail à son terme.

Je tiens ensuite à remercier les lecteurs de ce mémoire pour le temps qu'ils y auront consacré.

Je souhaite à présent remercier mes parents et ma petite soeur pour leur présence, pour leur soutien dans mes moments de doute et pour tout ce qu'ils m'apportent au quotidien.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Francy et Francine pour leur hospitalité de ces dernières semaines. Leurs encouragements et le calme de la campagne ardennaise m'ont apporté l'inspiration dont je manquais.

Mes derniers mots et mes dernières pensées s'adressent à Julien, mon point de repère depuis plus de deux ans. Je le remercie d'avoir été à mes côtés tout au long de cette période et de m'avoir permis de croire en ce que je fais.

A chacun d'entre vous, merci.

Table des matières

Introduction

Contexte

Il n'est de secret pour personne que l'enseignement des mathématiques se révèle délicat pour nombre d'apprenants. L'institution universitaire ne déroge pas à cette règle et attend que les étudiants qu'elle accueille apprennent à évoluer au sein de cet univers mathématique complexe et constitué de concepts rigoureux. Ceux-ci, dès le début de leur cursus, doivent adopter une logique et faire preuve d'un niveau d'abstraction suffisamment élevé que pour s'approprier et maîtriser de tels concepts.

L'analyse multivariée qui occupe un pan non négligeable de la première année du bachelier en sciences mathématiques et qui est aussi abordée dans d'autres cursus, confronte les étudiants à ce genre de situation. Ceux-ci doivent y concevoir l'existence de dimensions supérieures à deux et accepter celle des espaces correspondants. Des propriétés qu'ils tenaient pour acquises se voient compromises et les liens entre expressions analytiques et représentations graphiques, difficiles à établir. Les objets qu'ils y rencontrent sont caractérisés par un comportement particulier et des propriétés spécifiques, demandant la mise en place de nouveaux outils mathématiques.

La théorie des fonctions implicites est envisagée dans ce contexte et les professeurs n'ont pu que déplorer, depuis de nombreuses années déjà, les obstacles auxquels mène son enseignement. L'enjeu, dès lors, afin de comprendre la manière dont les étudiants appréhendent ces fonctions et le théorème qui leur est sous-jacent, est de déterminer l'origine de ces difficultés. Pour y parvenir, nous avons voulu nous appuyer sur des résultats de la didactique des mathématiques relatifs à l'enseignement des fonctions de plusieurs variables. Malheureusement, au fil de nos recherches, nous avons dû nous rendre à l'évidence que la littérature est assez limitée à ce sujet [1]. Pourtant, nombreuses sont les questions qui nous ont préoccupés à propos des difficultés associées à l'enseignement des fonctions implicites.

- Proviennent-elles de l'objet « fonction implicite » lui-même ?
- Sont-elles liées aux outils permettant de le manipuler ?
- Est-ce le mode d'enseignement envisagé qui pose problème ?
- Sont-elles à imputer aux perceptions et aux interprétations des étudiants ?

1. Nous n'avons trouvé qu'un article rédigé par Elstak I., Montiel M., Vidakovic D. & Wilhelmi M.R. [11] évoquant les fonctions implicites.

Nous n'avons certes pas la prétention de trouver réponse à toutes ces questions mais au moins de dresser un état des lieux de l'enseignement du savoir que représente la théorie des fonctions implicites. Le recours à des outils spécifiques de la didactique des mathématiques et l'élaboration d'un dispositif expérimental grâce auquel nous avons pu accéder aux productions et avis d'étudiants de première année de bachelier en sciences mathématiques et physiques des FUNDP, nous ont aidés dans notre entreprise.

Méthodologie et plan de travail

Ce mémoire nous a donné la possibilité de porter un regard didactique sur l'enseignement du théorème des fonctions implicites. Afin d'avoir une vue d'ensemble du travail réalisé au cours de ces derniers mois, nous proposons de vous présenter les principales étapes et caractéristiques de son élaboration.

L'étude que nous avons menée, est scindée en deux parties. La première présente les généralités du cadre de notre recherche et est composée de deux chapitres. Nous y décrivons d'une part, la mise en place de notre dispositif expérimental et d'autre part, les outils de la didactique des mathématiques utilisés dans nos diverses analyses. Nous y définissons notamment la transposition didactique, processus autour duquel est articulée la seconde partie de notre travail.
Cette seconde partie spécifie davantage la problématique que nous avons choisi d'aborder. Les chapitres qui la composent ont pour objectif de caractériser la transposition didactique du théorème des fonctions implicites et correspondent à ses principales étapes. Aussi, nous commençons par y décrire, dans le chapitre trois, le contexte historique dans lequel le *savoir savant* relatif au théorème qui nous préoccupe, a vu le jour.
Nous nous intéressons ensuite à la manière dont celui-ci peut être instauré au sein de différentes institutions universitaires. L'analyse des supports de cours d'étudiants inscrits en sciences mathématiques et physiques, en économie ainsi qu'en gestion et en sciences de l'ingénieur nous a aidés à réaliser cette tâche. Celle-ci se voit dépeinte dans le quatrième chapitre de ce travail et doit nous permettre d'identifier le *savoir à enseigner* correspondant au théorème des fonctions implicites.
Après quoi, les pages du chapitre cinq mettent en évidence quelques-unes des conceptions qu'ont les étudiants sur les fonctions implicites, avant même que celles-ci ne soient évoquées dans leur formation. Pour ce faire, nous nous sommes basés sur une pratique didactique appelée la *narration de recherche*. Celle-ci a pu être mise en œuvre grâce à la collaboration d'étudiants en mathématiques et en physique. Ces mêmes étudiants nous ont également permis de rédiger le dernier chapitre de ce mémoire qui correspond à l'étape finale de la transposition didactique. Nous y avons déterminé certains éléments du *savoir appris* par les étudiants interrogés. Ces éléments sont le fruit des réponses qu'ils ont fournies à un questionnaire que nous leur avons soumis quelque temps après que les fonctions implicites leur aient été enseignées.

Nous clôturons ce mémoire par un résumé des principaux résultats retournés par notre dispositif expérimental et y proposons certaines perspectives qui pourraient être envisagées afin d'approfondir et améliorer nos recherches.

Première partie

Cadre et outils de recherche

Chapitre 1

Cadre de recherche

Ce chapitre, qui décrit l'environnement dans lequel nous avons évolué au cours de ces derniers mois, rappelle la problématique autour de laquelle est orchestré ce mémoire en didactique et décrit le dispositif expérimental établi pour organiser nos recherches. Celui-ci nous a permis de nous approprier le problème qui nous préoccupe dans ce travail.

1.1 Problématique étudiée

Ce mémoire nous a conduits à nous pencher sur l'enseignement du théorème des fonctions implicites, et plus particulièrement sur les difficultés associées à cet enseignement.

- Proviennent-elles de l'objet « fonction implicite » lui-même ?
- Sont-elles liées aux outils permettant de manipuler cet objet ?
- Est-ce le mode d'enseignement envisagé qui pose problème ?
- Sont-elles à imputer aux perceptions et aux interprétations des étudiants ?

sont autant de questions traitées dans les chapitres qui suivent. Afin de mieux les comprendre et peut-être y trouver une solution, nous avons mis en place différentes analyses et expériences. Celles-ci sont décrites ci-dessous.

1.2 Analyses et expériences réalisées

Dans le cadre de nos recherches, différentes analyses et expérimentations ont été menées pour déterminer les caractéristiques de l'enseignement du théorème des fonctions implicites en première année de bachelier. Afin d'avoir une vue d'ensemble sur le travail réalisé, nous proposons ici de présenter le dispositif expérimental employé pour y parvenir. Nous décrivons également l'institution dans laquelle il a eu lieu ainsi que les échantillons d'étudiants soumis aux différentes parties de nos expérimentations.

1.2.1 Manuels, institution et public analysés

Manuels consultés

Les manuels choisis pour analyser le savoir à enseigner sont les suivants :

- (Bair J., 1995) *ANALYSE MATHEMATIQUE à l'usage des étudiants inscrits en : seconde candidature en administration des affaires; seconde candidature en science économique; diplôme complémentaire en administration des affaires*, ULg;
- (Delhez E., 2005) *Analyse mathématique (1^{re} Partie)*, ULg;
- (Mawhin J., 1992) *ANALYSE. Fondements, techniques, évolution*, UCL;
- (Roger P., 2006) *Mathématiques pour l'économie et la gestion. Applications avec Excel*, étudiants en économie-gestion des universités et des écoles de management, élèves des classes préparatoires aux écoles de management;
- (Schneiders J.-P., 2007) *Analyse III (1^{re} Partie)*, ULg;
- (Strodiot J.-J., 1997) *Analyse ($2^{ème}$ Partie)*, FUNDP;
- (Thiry S., 2006) *Mathématiques pour l'économie et la gestion I*, FUNDP.

Ceux-ci nous permettront de mettre en évidence la(les) manière(s) dont la théorie des fonctions implicites peut être inculquée à des étudiants issus de formation scientifique ou économique. Parmi ces ouvrages, certains sont ainsi destinés à un public de futurs mathématiciens et de physiciens, d'autres constituent le support de cours d'étudiants en sciences économiques et en gestion. Un dernier enfin, est rédigé à l'attention d'étudiants en génie civil. Tous ces manuels s'adressent à un public de première année de bachelier de cycle universitaire sauf deux, réservés à l'usage d'étudiants de $2^{ème}$ et $3^{ème}$ années.

Description de l'institution universitaire

Nos expérimentations se sont déroulées entre les murs des Facultés Notre-Dame de la Paix (FUNDP) à Namur, et plus particulièrement au sein des institutions (voir Y. Chevallard [6]) suivantes :

- institution attachée au cours de *Calcul différentiel et intégral I*, $1^{ère}$ année de bachelier en sciences mathématiques, FUNDP;
- institution attachée au cours de *Calcul différentiel et intégral I*, $1^{ère}$ année de bachelier en sciences physiques, FUNDP.

Public interrogé

Les expériences réalisées l'ont été sur les étudiants suivants :

- étudiants de $1^{ère}$ année de bachelier en sciences mathématiques, inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2008-2009. Ce premier public est constitué de 25 étudiants;
- étudiants de $1^{ère}$ année de bachelier en sciences mathématiques, inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2009-2010. Ce deuxième public est constitué de 35 étudiants;

- étudiants de $1^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences physiques, inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2008-2009. Ce troisième public est constitué de 39 étudiants ;
- étudiants de $1^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences physiques, inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2009-2010. Ce dernier public est constitué de 30 étudiants.

Pour plus de facilités lors de nos analyses, nous nommerons ces groupes : $\text{Math1}_{08/09}$ et $\text{Math1}_{09/10}$ pour les étudiants mathématiciens et de la même manière, pour les étudiants physiciens : $\text{Phy1}_{08/09}$ et $\text{Phy1}_{09/10}$.

1.2.2 Analyse de l'existant

Aucun programme de cours officiel ne régit le savoir à enseigner au sein de l'institution universitaire. Le choix des matières vues revient donc principalement aux enseignants qui créent des manuels, syllabi, livres d'exercices et autres notes complémentaires. Mis à disposition des étudiants, ces ouvrages de référence leur donnent accès aux contenus du savoir qui doit être dispensé et en proposent des méthodes d'enseignement. L'analyse de tels supports de cours [1] nous a permis de :

- situer le théorème des fonctions implicites au sein des institutions universitaires observées ;
- relever différentes manières d'envisager l'enseignement du théorème des fonctions implicites ;
- repérer les contraintes et difficultés auxquelles doivent faire face les étudiants au cours de la phase d'apprentissage.

1.2.3 Expériences intra-FUNDP

Dans les lignes qui suivent, nous présentons brièvement les expérimentations menées au cours de ce mémoire. Celles-ci seront décrites de manière plus étayée dans les chapitres où leur analyse sera abordée.

Narration de recherche

La narration de recherche proposée aux quatre groupes d'étudiants de notre étude a été réalisée en décembre 2008 (pour les publics $\text{Math1}_{08/09}$ et $\text{Phy1}_{08/09}$) et en décembre 2009 (pour les publics $\text{Math1}_{09/10}$ et $\text{Phy1}_{09/10}$). Tous les groupes ont travaillé sur le même énoncé.
Réalisée en amont du cours théorique, la première phase de notre dispositif expérimental a permis à ces étudiants d'aborder, au travers de situations problèmes, les concepts de courbe de niveau et de fonction implicite.
Pour des questions pratiques, seule la phase de recherche de la narration a été effectuée et analysée. Les raisonnements retrouvés dans les copies récoltées nous ont permis d'identifier les conceptions des étudiants quant aux notions de courbe de niveau et de fonction implicite.

1. Les manuels sur lesquels nous avons réalisé nos analyses sont cités au point précédent.

Travail de groupe

Réalisé aux mois de février et mars 2010, ce travail de groupe ne concerne que les 35 étudiants du public $\mathrm{Math1}_{09/10}$. Ceux-ci ont dû construire une démonstration du théorème des fonctions implicites basée sur l'analyse non standard.
Articulé en deux parties, ce travail a permis aux étudiants de se familiariser aux concepts de l'analyse non standard [2] et de les employer dans le cadre du théorème des fonctions implicites afin d'obtenir une démonstration de la formule de dérivation implicite.

Cette expérimentation avait pour objectif initial de proposer une approche alternative du théorème des fonctions implicites au départ des concepts de l'analyse non standard. Cependant, la tournure prise par ce mémoire ne nous a pas permis d'explorer davantage les résultats retournés par les productions des étudiants. Nous le citons néanmoins dans l'énumération de nos expériences car sa réalisation a influencé la vision des étudiants du public $\mathrm{Math1}_{09/10}$ ainsi que certaines des réponses qu'ils ont fournies lors de la dernière expérience que nous leur avons proposée. L'énoncé de ce travail est disponible dans l'annexe B.2.

Questionnaire auprès des étudiants

La dernière étape de notre dispositif a été élaborée et distribuée en mars 2011. En réalité, tous les étudiants n'ont pas reçu le même questionnaire car nous avons tenu compte du fait que le public $\mathrm{Math1}_{09/10}$ avait davantage travaillé le théorème des fonctions implicites au travers du travail de groupe. Le regard qu'il pouvait porter sur celui-ci devait donc se révéler plus critique que celui des autres étudiants.
Deux types de questionnaires ont été définis en conséquence. Le premier, accessible à n'importe quel étudiant interrogé, reprenait cinq questions d'ordre général sur le théorème des fonctions implicites (importance, utilité, éléments constitutifs de l'énoncé, outils utiles à la démonstration,...). La réalisation de la narration de recherche ainsi que le suivi du cours ex cathedra et des séances d'exercices suffisaient à y répondre. Le second type, quant à lui, s'adressait uniquement aux étudiants ayant réalisé le travail de groupe car on y comparait la preuve vue au cours théorique à celle qu'ils avaient établie. Quatre questions supplémentaires ont été ajoutées en ce sens. Nous avons notamment demandé aux étudiants d'énumérer les difficultés relatives à chacune des preuves ou encore les différences et points communs entre celles-ci. C'est ainsi que nous avons décidé de concevoir :

- un questionnaire constitué de 5 questions ouvertes à l'attention des étudiants des publics $\mathrm{Math1}_{08/09}$, $\mathrm{Phy1}_{08/09}$ et $\mathrm{Phy1}_{09/10}$;
- un questionnaire constitué de 9 questions ouvertes à l'attention des étudiants du public $\mathrm{Math1}_{09/10}$.

Les réponses obtenues nous ont permis de cerner la position des étudiants face au savoir appris. En effet, nous avons pu mettre en évidence les souvenirs que ceux-ci ont conservés du théorème ainsi que les difficultés qu'ils ont rencontrées au cours de son enseignement et de sa manipulation,...

2. Un pan complet de la thèse de V. Henry [13] est consacré à la définition des concepts de l'analyse non standard.

Chapitre 2

Quelques outils de la didactique des mathématiques

Le deuxième chapitre de ce mémoire vise à décrire et définir les principaux outils de la didactique des mathématiques que nous avons utilisés pour réaliser nos analyses. Ainsi, les lignes qui suivent présentent respectivement les concepts de transposition didactique (plus simplement notée TD), registre de représentation sémiotique, cadre et conception. Nous y abordons également la notion de démonstration. Les idées et définitions défendues par des spécialistes du domaine comme M. Artigue, Y. Chevallard, R. Douady et R. Duval nous ont permis de donner tout leur sens à ces différents termes. De même, le travail réalisé par S. Xhonneux dans sa récente thèse de doctorat nous a grandement aidés à articuler les notions développées ci-dessous.

2.1 La transposition didactique

La TD est un processus reposant sur l'hypothèse qu'une reconstruction des mathématiques comme *science de référence* à des fins d'enseignement est envisageable. Comme l'écrit S. Xhonneux dans [27], il est nécessaire, pour y parvenir de *considérer les savoirs à enseigner et les savoirs enseignés comme résultant du passage d'un savoir d'une institution scientifique en dehors de l'établissement scolaire vers ce même établissement dans le but de les transmettre* .

2.1.1 Le concept de transposition didactique

S'interrogeant sur l'origine et les effets de l'arrivée périodique de nouveaux savoirs dans le système de l'enseignement, c'est à Y. Chevallard [6] que l'on doit la formalisation du concept de TD en les termes suivants :

> *un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le « travail » qui, d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé transposition didactique.*

La TD représente donc l'activité grâce à laquelle un savoir savant est transformé de manière à pouvoir être enseigné à des apprenants novices. Elle s'effectue en plusieurs étapes[1] :

- choisir, parmi les savoirs existants, ceux que l'on va transmettre;
- rendre les savoirs choisis enseignables en leur faisant subir des opérations d'adaptation, de démantèlement et de reconstruction;
- enseigner le savoir résultant à l'école ou à l'université

que nous pouvons schématiser de la manière suivante :

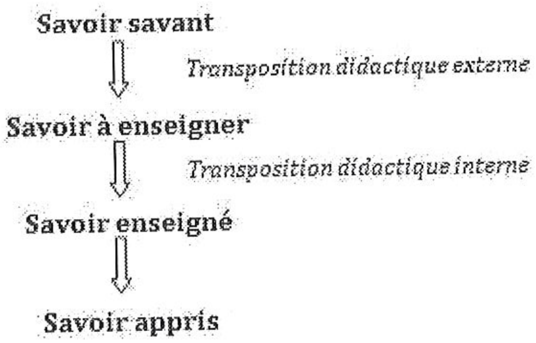


FIGURE 2.1 – Processus de la transposition didactique [34].

Remarquons que cette schématisation met également en évidence le fait que le processus de TD résulte de l'intervention de plusieurs acteurs que nous allons présenter dans le point ci-dessous.

2.1.2 Eléments, acteurs et étapes de la transposition didactique

Avant d'aborder les définitions suivantes, signalons que leur formulation est largement inspirée du travail réalisé par S. Xhonneux dans sa thèse ([27], pp. 37-38).

Eléments

Savoir savant

Le savoir savant constitue le savoir issu de la communauté scientifique (institution universitaire,...). En perpétuelle évolution, il est validé et reconnu par des représentants de cette même communauté.
En mathématiques, il fait l'objet de nombreuses recherches et poursuit l'objectif de vérifier des conjectures, d'approfondir des résultats déjà acquis, de résoudre des problèmes liés à diverses disciplines (physique, thermodynamique, économie,...) ou survenant au cours de

1. S. Xhonneux, "Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie." (2011)

tentatives de généralisation de découvertes antérieures ... Enfin, ce savoir est présenté dans des publications ou lors de colloques.

La transposition didactique externe (TD externe)

La transposition externe prend corps hors des salles de cours. En effet, elle est régie par les acteurs de la noosphère qui déterminent les contenus d'enseignement, établissent les programmes de cours et les documents d'accompagnement. L'évolution des connaissances propres à la discipline, la mixité des personnes intervenant à cette étape du processus mais aussi l'influence des valeurs sociétales modulent les décisions prises à ce niveau de la TD.

Savoir à enseigner

Le savoir à enseigner est présenté dans les textes officiels (programmes, référentiels,...) et permet de définir des normes et des méthodes d'enseignement. Disponible dans les manuels ou les syllabi de cours, il balise le savoir qui *doit* être divulgué.

La transposition didactique interne (TD interne)

La transposition interne se concrétise par l'adaptation des savoirs à enseigner tels qu'ils apparaissent dans les programmes, les manuels et syllabi en savoirs enseignés.
Prise en charge par les enseignants dans leurs classes, la présentation des savoirs provenant de la transposition interne est directement liée aux compétences de ces derniers, au profil des étudiants et aux exigences des programmes.
De par leur origine, leur fonction et le public auquel ils s'adressent, les savoirs issus de cette phase de la TD et la manière dont ils sont transmis, diffèrent des savoirs savants. En effet, le rôle d'un scientifique est de contribuer à l'évolution du domaine dont il est spécialiste. Il présentera le fruit de ses travaux à un public initié, lors de conférences ou de séminaires. Le savoir transmis sera ainsi présenté sous sa forme la plus complète, à son niveau de complexité le plus élevé. La transmission du savoir enseigné n'est pas du même registre, certes mais demande d'indéniables qualités de l'enseignant. Celui-ci doit être en mesure de favoriser l'appropriation des connaissances chez ses élèves. La création d'activités éducatives, de notes de cours adaptées et de séquences d'exercices mettant en évidence les savoirs présentés dans les programmes lui seront nécessaire pour y parvenir.

Savoir enseigné

Il s'agit du savoir enseigné aux élèves. Mis en oeuvre dans les classes et les auditoires pendant les heures de cours, celui-ci est directement tributaire des compétences, expectatives et conceptions de l'apprentissage de l'enseignant qui les construit.

Savoir appris

Le savoir appris arrive au terme du processus de la TD et représente ce qui est réellement acquis par l'apprenant en tenant compte de ses caractéristiques cognitives, psychologiques ainsi que des différentes étapes de la TD.
Etroitement lié à ce qu'il se passe dans « la tête de l'élève », le savoir appris est difficilement accessible à l'enseignant.

Acteurs

Les groupes d'individus que nous allons décrire à présent interviennent au niveau de la TD externe pour le premier et au niveau de la TD interne pour le second.

Noosphère

La noosphère représente l'institution productrice du savoir à enseigner et centre son intérêt sur les contenus disciplinaires. Elle reprend par conséquent toute personne impliquée dans le processus de la TD externe.
On y retrouve des universitaires s'intéressant aux problèmes d'enseignement, des porte-paroles de l'institution scolaire, des représentants des pouvoirs politiques, des spécialistes de la discipline, des auteurs de manuels, des parents, des enseignants,...

Professeur

Le professeur est la personne responsable du savoir à enseigner. Son rôle peut se révéler double lorsqu'il fait également partie de la noosphère (cas de l'enseignement universitaire où il est souvent responsable de la TD externe et de la diffusion des savoirs à enseigner).

Aborder la transposition didactique du théorème des fonctions implicites nous a semblé pertinent dans le sens où ce processus va nous permettre de détecter les caractéristiques et difficultés d'enseignement liées au savoir en jeu dans notre recherche.

2.1.3 Risques de la transposition didactique

La TD est un processus visant à rendre les savoirs accessibles à tout apprenant et reflète la distance entre le savoir savant et le savoir enseigné. Légitime mais non sans risque, elle peut *être perçue comme une dégradation à laquelle la vraie science est obligée de consentir pour être diffusée* (M. Romainville, [4]). En effet, nous l'avons déjà évoqué, le savoir savant subit de nombreuses modifications avant de pouvoir devenir enseignable :

- termes techniques délaissés au profit des mots de la langue courante pour parler de la même chose mais de manière simplifiée ;
- présentation des savoirs enseignés comme des vérités, des faits avérés alors que les résultats provenant des recherches scientifiques peuvent évoluer et sont réfutables ;
- illustration fréquente des savoirs enseignés par des exemples ;
- ...

A force de simplification et de vulgarisation, le risque que les savoirs enseignés tombent dans le sens commun et perdent toute leur richesse scientifique n'est donc pas nul. Dès lors, afin de contrer cette dérive, l'enseignant doit s'interroger sur la manière d'envisager la TD et, comme le souligne M. Romainville [4], éviter de :

- dépersonnaliser (oubli du nom de l'inventeur d'un objet,...) ;
- décontextualiser (oubli de l'essence même d'un objet,...) ;
- linéariser car les raisonnements scientifiques sont plutôt systémiques ou circulaires ;

- déproblématiser en osant mettre en évidence les raisons pour lesquelles un objet a été inventé

car les savoirs enseignés ne doivent pas rendre impossible le passage ultérieur aux savoirs savants.

2.2 Articuler la compréhension des objets mathématiques

Les concepts que nous proposons de définir à présent interviennent à différents moments de la TD. Ils permettent tant aux acteurs de la noosphère qu'à l'enseignant de porter un regard critique sur les différents niveaux du savoir en leur donnant les moyens d'analyser les programmes, les manuels scolaires ou les séquences de cours.
Cadre, conception et registre sont ainsi largement utilisés en didactique des mathématiques lorsqu'il s'agit de modéliser des situations ou d'étudier l'activité des élèves. Respectivement formalisées par R. Douady en 1984, M. Artigue en 1988 et R. Duval en 1995, la définition de ces notions et les relations qu'elles entretiennent peuvent néanmoins poser problème. C'est pourquoi, afin d'éviter toute confusion dans nos analyses, nous allons, dans les lignes qui suivent, clarifier et expliciter ces différents termes.

2.2.1 Les registres de représentation sémiotique

Afin de présenter au mieux les concepts définis par R. Duval, nous nous sommes essentiellement basés sur un article les clarifiant et les explicitant grâce à des exemples variés et concrets. Cet article est repris dans notre bibliographie sous la rubrique [29].

Les objets manipulés en mathématiques ne sont accessibles qu'au travers des différentes représentations qu'on en a. Par exemple, l'accès à l'objet fonction passe autant par son expression algébrique que par sa représentation graphique ou par l'ensemble des couples qui le caractérisent. Ainsi, la fonction du 1$^{\text{er}}$ degré peut être abordée sous ces divers points de vue.

- Algébriquement, l'expression
$$y = ax + b$$
où $a \in \mathbb{R}_0$ et $b \in \mathbb{R}$ permet d'y accéder.
- Sa représentation graphique correspond, dans un repère orthonormé, à la droite de coefficient angulaire a et d'ordonnée à l'origine b.
- Au niveau ensembliste, les couples de points vérifiant
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = ax + b,\ a \in \mathbb{R}_0,\ b \in \mathbb{R}\right\}$$
permettent de l'identifier.

Ces représentations peuvent alors être assimilées à des « supports » permettant d'envisager l'objet étudié sous des facettes spécifiques. R. Duval, pour qui la relation à un objet mathématique se construit par le biais de telles représentations, les qualifie de *représentations sémiotiques*.

Représentation sémiotique

> *Une représentation sémiotique est une production constituée de signes appartenant à un système de représentations ayant ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement.*
> (R. Duval, [29].)

D'après R. Duval, les systèmes auxquels ces représentations font référence peuvent être regroupés dans des *registres de représentation sémiotique.* Ces registres constituent *des ensembles cohérents de représentations qui permettent de désigner un objet dans une perspective sémiotique associant les signes à leur signification* [2].

Plusieurs types de registres peuvent ainsi être mis en évidence : les écritures algébriques, les graphiques cartésiens, le langage naturel, les figures géométriques,... et donner lieu à trois activités cognitives liées à la production de représentations sémiotiques :

- la *formation d'une représentation conforme à des lois de formation de ces signes propre au registre* (dans le registre algébrique, $3x^2 + 5$ est conforme) ;
- le *traitement d'une représentation dans son propre registre* (dans le registre algébrique, l'application de la règle $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ à une expression comme $(3p + 2)^2$) ;
- la *conversion d'une représentation du registre dans un autre registre* (l'expression mathématique $a^2 + b^2 = c^2$ se traduit par : « la somme des carrés des nombres a et b est égale au carré du nombre c »dans le registre langagier).

Conditions nécessaires à la compréhension

De nombreux didacticiens l'ont mis en évidence bien avant nous : le travail du mathématicien et par extension celui de l'enseignant, repose davantage sur la manipulation des registres et des représentations sémiotiques d'un objet mathématique que sur cet objet lui-même. En effet, celui-ci est inaccessible, de l'ordre des Idées. Dès lors, l'apprentissage et la compréhension des concepts auxquels mènent ces objets passent indubitablement par l'acquisition et la maîtrise des représentations sémiotiques et de leurs registres. Deux raisons peuvent nous aider à expliquer leur rôle en vue d'améliorer l'apprentissage des mathématiques. Pour cela, R. Duval attire notre attention sur les deux mots suivants : multiplicité et coordination.

Pour accéder à un objet mathématique, R. Duval [16] insiste sur la nécessité de disposer de plusieurs de ses représentations. Chacune d'entre elles ne traduit en effet qu'une partie du concept à construire. Un objet mathématique forme ainsi un tout, composé, comme nous l'avons déjà dit, de ses différentes représentations sémiotiques [3].
La coordination des registres de représentation, qui occupe elle aussi une place prépondérante dans la compréhension des objets mathématiques, consiste à reconnaître dans deux représentations différentes, celles d'un même objet. Cette opération peut s'avérer difficile pour les élèves car

2. Voir l'article [29] définissant les concepts mis en avant par R. Duval.
3. Se référer à l'exemple introductif sur les différentes représentations de la fonction.

elle demande de passer par la conversion de la représentation d'un registre en la représentation correspondante dans un autre registre.

Finalement, pour comprendre un concept mathématique, il est impératif d'en maîtriser les représentations et les relations existant entre elles.

2.2.2 Cadres mathématiques

Les travaux que R. Douady a réalisés l'ont conduite à préciser des critères sur les problèmes afin qu'ils deviennent de bons moyens de susciter l'apprentissage des mathématiques chez les élèves. C'est donc ainsi qu'elle s'est penchée sur la notion de cadre.

Liée à l'expérimentation, cette notion a évolué au fil du temps. Nous en retenons ici les définitions suivantes :

> *Un cadre est un domaine des mathématiques qui soit assez bien identifié par ses objets, les relations qu'ils entretiennent ainsi que les types de représentation et de traitement qu'ils mobilisent.*
> (R. Douady, 1984 [3].)
>
> *Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre objets, de leurs (diverses) formulations et des images mentales associées à ces objets et ces relations.*
> *Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outils des objets du cadre.*
> (R. Douady, 1986 [3].)
>
> La chercheuse fait également remarquer, dans la définition de 1986, que deux cadres peuvent comporter les mêmes objets mais différer par les images mentales et la problématique développée.

La notion de cadre qui traduit l'environnement dans lequel les étudiants vont travailler et réfléchir, permet donc de modéliser et analyser l'activité de ces derniers à partir de relations mettant en avant des propriétés d'un même concept. Concrètement, plusieurs types de cadres peuvent être mis en évidence selon que le raisonnement analysé ait été établi à partir d'illustrations graphiques ou d'arguments issus de l'algèbre, du calcul différentiel, de la géométrie,etc. (S. Xhonneux, [27]). En fonction des situations, on peut donc travailler soit dans le cadre graphique, algébrique, numérique, de la géométrie analytique, de l'analyse numérique ou encore de l'analyse fonctionnelle ; chacun étant constitué d'éléments spécifiques.

Un exemple de cadre

Le cadre numérique est composé des nombres eux-mêmes mais aussi des opérations qu'il est possible d'effectuer sur eux. On y retrouve également la relation d'ordre usuelle, les propriétés nécessaires au calcul,...

Remarque

Au sein d'un même cadre, plusieurs registres de représentation sémiotique peuvent cohabiter afin de permettre à l'élève d'appréhender au mieux l'objet mathématique en jeu et de lui donner tout son sens. R. Duval [10] illustre cette spécificité au travers du cadre géométrique. En effet, celui-ci fait intervenir plusieurs registres de représentation car les figures géométriques qui le composent sont réduites, en termes de registres, à des formes planes en 0, 1, 2 ou 3 dimensions. Ces formes ne comprennent aucune indication de mesure ou de propriété géométrique. Pour les manipuler (mesurer leur périmètre, leur aire,...), on doit recourir à plusieurs de leurs représentations. En effet, mesurer le périmètre ou l'aire de ces formes, demande de « transformer » leurs côtés en nombres. On va donc tantôt les caractériser d'un point de vue géométrique, tantôt d'un point de vue numérique.

Finalement, la notion de cadre est à associer au contexte dans lequel l'élève, à l'aide de certains outils, va pouvoir travailler ; celle de représentation sémiotique, par contre, porte sur l'objet lui-même et sur tous les moyens qui permettent de l'atteindre, le comprendre et le manipuler.

Changements de cadres

Le mathématicien, dans son travail, est très souvent amené à envisager un même problème sous différents aspects, à le traduire de plusieurs manières (résolution d'une équation différentielle en adoptant un point de vue qualitatif ou un point de vue algébrique). Bref, à transporter ce problème d'un cadre vers un(des) autre(s) et à confronter entre elles les formulations liées à ces différents cadres. De cette confrontation jaillissent de nouvelles interrogations et des alternatives aux outils permettant de résoudre le problème dans sa configuration initiale. R. Douady [8] définit ces *changements de cadres* de la manière suivante :

> *Un changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.*

Pour le chercheur ou l'enseignant qui analyse la manière dont des élèves appréhendent un nouveau savoir, le recours au(x) changement(s) de cadres permet non seulement d'approcher différemment les difficultés des élèves mais aussi de mettre en évidence de nouveaux outils et techniques de résolution.

Un exemple de changement de cadres

En pratique, les changements de cadres peuvent aider certains élèves à résoudre des problèmes mathématiques donnés puisque, plutôt que de travailler avec les éléments d'un cadre qu'ils ne maîtrisent pas, il leur est possible d'utiliser des outils qui leur sont familiers.

Illustrons[4] cela au travers d'un problème faisant intervenir deux inconnues x et y liées par deux relations de la forme

$$ax + by = u \quad \text{et} \quad cx + dy = v \tag{2.1}$$

4. Voir l'article de R. Douady [8] dans lequel ce problème est davantage détaillé.

dans lesquelles a, b, c, d, u et v sont donnés.

Si l'on demande aux élèves d'une classe de déterminer x et y pour que les deux relations soient satisfaites, plusieurs modes de résolution, relatives à des cadres spécifiques, s'offrent à eux. Ces modes de résolution correspondent aux changements de cadres qui nous intéressent. Nous pouvons alors mettre en évidence :

- l'emploi du cadre algébrique via des méthodes comme la substitution ou la combinaison linéaire;
- l'emploi du cadre analytique et du cadre graphique.
  En jouant avec ces deux cadres, les couples (x, y) qui satisfont (2.1) peuvent par exemple être déterminés de la manière suivante :

  1. considérer la fonction qui à x fait correspondre y tel que $ax + by = u$ et la représenter dans un repère orthonormé;
  2. faire de même avec la fonction qui à x fait correspondre y tel que $cx + dy = v$;
  3. confronter les deux graphiques obtenus (au niveau des possibles intersections, de l'importance de la valeur des différents coefficients,...)

Jeux de cadres

Afin que l'activité des élèves en situation de recherche soit davantage guidée par le savoir que par l'enseignant lui-même, R. Douady a mis en place et a défini le dispositif des jeux de cadres. Ceux-ci consistent en *des changements de cadres provoqués par l'enseignant dans des problèmes choisis pour faire avancer les phases de recherche et faire évoluer les conceptions des élèves. Les situations choisies dans ces jeux font intervenir des connaissances dans des cadres où le manque de correspondances doit provoquer des déséquilibres favorisant l'apprentissage.* (R. Douady, [8]).

R. Douady décompose ce procédé en trois étapes :

- *transfert et interprétation :* lorsqu'un élève est face à un problème formulé dans un certain cadre, il va le traduire dans un autre cadre dans lequel il interprétera certaines des questions qu'il se pose afin de faire émerger des correspondances entres différents cadres et objets;
- *correspondances imparfaites :* pour des raisons mathématiques ou à cause du manque de connaissances des élèves, les correspondances issues de la première phase du processus sont imparfaites. Cela provoque des déséquilibres entre les attentes de l'enseignant et les productions mentales dans la tête des apprenants;
- *amélioration des correspondances et progrès des connaissances :* pour rééquilibrer l'activité des élèves, les faire progresser et construire de nouvelles connaissances, il est nécessaire de créer des interactions entre les différents cadres mis en jeu.

Un exemple de jeu de cadres

Dans son article *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement* [8], R. Douady explicite les différentes étapes [5] du concept de jeu de cadres au travers du problème suivant :

Chercher un rectangle dont le demi-périmètre vaut 41 cm et l'aire vaut 402 cm^2.

Dans ce problème, formulé dans un cadre géométrique, les élèves vont devoir découvrir un rectangle dont les dimensions (que nous pouvons noter a et b) sont à déterminer au travers d'un périmètre et d'une aire imposés.
Pour y parvenir, ils vont commencer par traduire la situation donnée dans le cadre numérique ; ce qui va les conduire à rechercher deux nombres dont ils connaissent la somme et le produit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 41 \\ ab & = & 402. \end{array} \right.$$

Une fois ce transfert effectué, les élèves vont devoir organiser correctement leur raisonnement et leurs réponses en désignant les nombres cherchés et en écrivant les relations imposées par les données. Ils sont dans un premier temps à la recherche d'une solution approchée du problème qu'ils ont à résoudre. Pour progresser dans cette étape de *transfert et interprétation*, ils vont devoir transformer le problème initial en privilégiant la relation $a+b=41$. Ils vont ainsi obtenir des couples de valeurs (a, b) dont la somme vaut 41 et dont le produit se rapprochera plus ou moins de 402.
Après avoir trouvé un produit de deux nombres encadrant 402, les élèves vont vouloir affiner leurs recherches en tentant de trouver des couples dont le produit est de plus en plus proche de 402 (jusqu'à en être égal). Les recherches entreprises alors n'aboutissent pas forcément et vont provoquer des déséquilibres entre leurs convictions et ce qu'ils savent réellement faire car ils sont amenés à manipuler des éléments qu'ils ne contrôlent pas toujours. C'est ce qui caractérise la phase des *correspondances imparfaites.*
Enfin, les problèmes qui impliquent des variations de couples de nombres nécessitent un nouveau changement de cadre ; ce que les élèves vont faire en représentant [6] graphiquement les couples (a, b) trouvés au cours des précédentes étapes du jeu de cadres. En choisissant cette méthode de représentation et en écrivant la valeur du produit ab à côté de chaque point (a, b) dessiné, les élèves vont pouvoir se rendre compte que les points représentés sont alignés [7] et que la valeur du produit ab est fonction du couple (a, b). De ce fait, cette étape d'*amélioration des correspondances et progrès des connaissances* va les aider à choisir de meilleurs couples pour atteindre leur objectif.

Le type de jeu de cadres que l'enseignant va proposer à ses élèves dépend de leur profil et des conceptions qu'ils ont des objets mathématiques. C'est à l'explication de ces dernières qu'est consacré le point suivant.

5. Pour davantage de détails à propos de ce problème, nous vous invitons à vous référer à l'article cité.
6. Le choix de cette représentation peut aussi être guidée par l'enseignant.
7. Ces points (d'abscisse a et d'ordonnée b) donnent lieu, dans le cadre géométrique, à des rectangles de même périmètre.

2.2.3 Conceptions mathématiques

Avant même d'aborder une nouvelle matière, les apprenants ont déjà certaines idées sur les savoirs qui vont leur être enseignés. C'est par le biais de ces idées, appelées *conceptions*, qu'ils vont essayer de comprendre les propos de l'enseignant et interpréter les situations qui leur sont proposées. L'apprentissage d'une connaissance, d'une procédure dépend donc énormément de ces idées « déjà-là ». Si elles ne sont pas prises en compte, *le savoir enseigné ne sera que plaqué sur de l'existant qui pourra constituer un obstacle à la progression de l'élève* (M. Romainville, [4]).

Les conceptions résultent de l'expérience passée de l'apprenant. Elles le renvoient à ses questions, prennent appui sur ses perceptions, ses raisonnements, ses interprétations ainsi que sur sa façon de s'exprimer et de donner du sens. Ces différents éléments forment un tout en interaction permettant de comprendre pourquoi les conceptions ne se réduisent pas à ce qui émerge en classe. En effet, celles-ci correspondent plutôt à une structure de pensée à l'origine des productions de l'élève ; une structure susceptible d'*expliquer certaines des difficultés que l'élève a à décontextualiser des savoirs et à manipuler des connaissances nouvellement acquises ou liées aux mathématiques*[8].

Pendant de nombreuses années, les chercheurs en didactique des mathématiques ont employé le terme conception sans le définir rigoureusement, jusqu'à la fin des années '80 où le besoin d'exprimer correctement les choses s'est fait sentir. La définition de cette notion a évolué en passant entre les mains de G. Brousseau, M. Artigue et N. Balacheff qui en a fourni la formulation [12] la plus récente. En effet, celui-ci l'a assimilée à un quadruplet C, composé des éléments suivants :

- une *sphère P de pratiques* constituant un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire ;
- un *ensemble R d'opérateurs* permettant de traiter des problèmes ;
- un *système L de représentations*, caractérisé par des éléments de P et de R, permettant de représenter problèmes et opérateurs ;
- une *structure de contrôle* Σ décrivant et organisant les fonctions de choix, de décision, de jugement de validité et d'adéquation de l'action.

Ce quadruplet qui suffit à caractériser une conception mathématique, est donné à titre informatif et ne nous servira pas outre mesure dans nos analyses ultérieures.

M. Artigue, dans la formulation de son modèle de conception, a quant à elle été la première à souligner l'importance des conceptions des apprenants dans l'adaptation des pratiques pédagogiques de l'enseignant. En effet, pour un même objet mathématique, plusieurs points de vue et modes de traitement sont possibles. De plus, le savoir transmis diffère bien souvent de celui réellement acquis par les élèves.

8. Cet argument est issu de la thèse de S. Xhonneux [27].

2.3 La démonstration mathématique

Démontrer, prouver, vérifier,... sont autant de synonymes régulièrement utilisés pour qualifier l'activité du mathématicien. Il est néanmoins possible de trouver certaines nuances entre ces différentes actions car comme nous allons le voir, une démonstration ne se rapporte pas tout à fait à la même chose qu'une preuve ou qu'une vérification.

Différencier ces termes nous permettra d'envisager la démonstration mathématique sous deux aspects différents :

- les types de démonstrations qui existent ;
- les rôles, les fonctionnalités remplis par une démonstration

afin de caractériser et comparer, lorsque nous aborderons l'analyse de certains manuels d'enseignement [9], différentes approches du théorème des fonctions implicites qu'il est possible de proposer aux étudiants.

2.3.1 Les types de démonstrations

Démontrer une propriété mathématique, c'est faire appel à des propriétés déjà démontrées, des définitions, des axiomes et des règles de logique pour établir un nouveau théorème.

En didactique, la démonstration est perçue comme un discours à la forme particulière, prédominant en mathématiques. N. Balacheff [9] lui a assigné les caractéristiques suivantes :

> *Il s'agit d'énoncés organisés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction* [10] *prise dans un ensemble de règles bien défini.* [...] *Ce qui caractérise les démonstrations comme genre de discours est leur forme strictement codifiée. En fait, cette rigueur formelle doit être nuancée au regard de la pratique (étapes d'une démonstration laissées aux soins du lecteur)*[...]

Pour catégoriser les démonstrations, nous pouvons prendre appui sur les constatations de R. Duval qui distingue, selon les degrés de rigueur et de formalisme avec lesquels elles sont rédigées, deux types de démonstrations : la *preuve* et l'*argumentation*. Ces notions, également travaillées par S. Xhonneux dans sa thèse [27], peuvent être définies de la manière suivante :

> **Preuve**
>
> L'objectif d'un tel raisonnement est de prouver une affirmation donnée. Dans une preuve, chaque pas s'appuie sur un énoncé tiers ayant un statut de « définition » ou de « théorème ». Il s'agit d'un raisonnement déductif dont la principale caractéristique est la validité qu'il permet d'obtenir.
>
> Le statut d'une preuve n'est pas définitif car il peut évoluer dans le temps, avec les savoirs qu'elle fait intervenir.

9. Voir le chapitre 4 de ce mémoire *Le théorème des fonctions implicites, un savoir à enseigner.*
10. Il s'agit de la règle du *modus ponens*, également appelée règle du *détachement.*

Argumentation

L'objectif de l'argumentation est de convaincre le lecteur. Chaque étape de cette démarche est en relation avec la conclusion et s'ajoute aux autres étapes. Ce type de raisonnement prend tout son sens lorsqu'il permet de mettre en place des rapprochements et des oppositions entre ses différents arguments constitutifs. Une argumentation peut être caractérisée par sa pertinence.

2.3.2 Les fonctions de la démonstration

Que l'on soit en présence d'une preuve ou d'une argumentation, toute démonstration remplit une, voire plusieurs fonctions particulières. G. Hanna, dans son article *Proof in mathematics* [2], en a identifié sept. Selon elle, l'outil démonstration peut servir à vérifier, expliquer, convaincre, systématiser, découvrir, communiquer et même, prendre du plaisir.

Les démonstrations rencontrées dans les manuels d'enseignement consultés nous ont conduits à considérer deux des sept fonctions que nous venons de citer : les démonstrations de type *vérificatif* et celles de type *explicatif.* A nouveau, afin de manipuler correctement ces qualificatifs, nous allons décrire en quelques lignes la manière dont G. Hanna les définit.

Rôle vérificatif

Vérifier, justifier ou encore assurer la validité d'un résultat mathématique désigne la fonction usuelle d'une démonstration. On dit alors qu'un raisonnement est vérificatif s'il est caractérisé par :

- une série d'arguments suffisamment rigoureux pour convaincre un public averti ;
- une conclusion résultant toujours des hypothèses initiales.

Rôle explicatif

Citons tout d'abord ces quelques mots de Bourbaki [11] :

> [...] *une démonstration n'est pas véritablement « comprise » tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à tout autre.*

Une démonstration explicative ne se contente donc pas uniquement de montrer la validité des assertions qu'elle inclut, elle a aussi pour but de les détailler et de les clarifier en permettant au lecteur de comprendre pourquoi celles-ci sont vraies. Cela demande une bonne maîtrise des propriétés des objets mathématiques en jeu.

La classification que nous allons employer pour caractériser les démonstrations du théorème des fonctions implicites mène, comme S. Xhonneux l'a déjà fait dans l'étude qui le préoccupait, au tableau-synthèse présenté ci-dessous.

11. Cette citation de Bourbaki apparaît dans l'article [36].

		Rôle	
		Explication	Vérification
Type	Argumentation	Argumentation qui explique	Argumentation qui vérifie
	Preuve	Preuve qui explique	Preuve qui vérifie

TABLE 2.1 – Classification des démonstrations mathématiques [27].

Finalement, cette classification ainsi que les définitions données aux concepts de registre sémiotique et de cadre mettent en avant les quatre critères qui nous aideront à analyser et comparer les différentes formes de démonstrations du théorème des fonctions implicites dont nous disposons. En effet, il s'agira pour nous de :

- discerner les preuves des argumentations ;
- distinguer les développements à visée explicative de ceux à visée vérificative ;
- identifier les registres de représentation sémiotique (registre du langage naturel, registre de représentation graphique, registre algébrique,...) utilisés pour accéder aux principaux objets mathématiques d'une démonstration ;
- caractériser le cadre (algébrique, analytique, géométrique,...) dans lequel est écrit une démonstration.

Deuxième partie

Transposition didactique du théorème des fonctions implicites

Chapitre 3

Le théorème des fonctions implicites, un savoir savant

Il s'agit, au fil des sections qui suivent, de dresser une ligne du temps du savoir savant relatif au théorème des fonctions implicites et aux principales notions qui s'y rapportent. Afin de parvenir à la formulation initiale de l'énoncé du résultat qui nous préoccupe dans ce mémoire, nous allons essentiellement nous intéresser aux évolutions mathématiques qu'a connues ce thème de l'analyse entre les XVII$^{\text{ème}}$ et XIX$^{\text{ème}}$ siècles.

La rédaction de cette approche historique fut rendue possible grâce aux très nombreuses informations récoltées dans l'article *Fonctions implicites : de la notion au théorème* paru dans la revue *Mnemosyne* [17] ainsi que dans l'ouvrage *The implicit function theorem. History, theory, and applications* [18].

3.1 Introduction

Avant d'aborder l'histoire du théorème des fonctions implicites ou même, celle des fonctions implicites, il serait tout d'abord intéressant de nous interroger sur le moment où la notion de fonction est apparue. Celle-ci n'a commencé à prendre effectivement sens qu'à partir du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, lorsque VIÈTE et DESCARTES ont introduit des expressions littérales pour quantifier les inconnues et les paramètres apparaissant dans les problèmes algébriques. Les premières manipulations des fonctions implicites remontent elles aussi à cette époque. Nous pouvons notamment citer :

– la résolution du problème de Pappus[1] (300 av. J.-C.) par DESCARTES en 1637 grâce à des

1. PAPPUS généralisa un problème qu'EUCLIDE et APOLLONIUS DE PERGE avaient résolu auparavant pour 3 et 4 droites. On peut l'énoncer de la manière suivante :

> *Etant donné $2n$ droites, dont 2 peuvent être confondues, quel est le lieu des points tel que le produit des distances de chacun à n de ces droites soit dans un rapport constant avec le produit de leurs distances aux n dernières ?*

Pour 3 et 4 droites, la solution est une conique. Plus généralement, la solution trouvée est une courbe algébrique dont le degré dépend des positions relatives des droites
(Source : `http ://serge.mehl.free.fr` (consultée le 10 Juillet 2012)).

courbes quadratiques d'expression générale

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- les premiers exemples d'analyse du comportement des fonctions implicites travaillés par NEWTON (aux environs des années 1670) ;
- les premiers cas de différenciation implicite traités par LEIBNIZ, en 1684.

C'est davantage le souci de comprendre le comportement des fonctions implicites qui a tout d'abord animé ces grands noms des mathématiques. Il faudra attendre le XIX$^{\text{ème}}$ siècle pour éprouver le besoin de les définir et d'en démontrer formellement l'existence.

Entre ces deux périodes, l'engouement toujours croissant pour le progrès mathématique va demander un réel effort de rigueur dans la présentation et la formalisation de nombreux concepts. En analyse mathématique par exemple, la « simple » notion de fonction ne s'exprimait [2] jusqu'alors qu'en termes vagues comme *quantité variable* ou *quantité constante*. En 1748, EULER propose la mise en place d'un vocabulaire décrivant les objets mathématiques sans pour autant les définir formellement. Une première définition de la notion de fonction *à la* EULER voit alors le jour :

> *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*
> (Euler, *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, 1748. Extrait du chapitre I.)

Dans le même temps, celui-ci établit une classification des fonctions dans laquelle les fonctions implicites sont décrites de la manière suivante :

> *Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être représentées explicitement, telle serait la fonction de z si elle était exprimée par l'équation $Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$ car quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que Z est égale à une expression composée de la variable z et de constantes, et que par conséquent Z est une fonction quelconque de z.*
> [...] *Les fonctions algébriques se subdivisent commodément en explicites et implicites. Ces dernières dépendent de la résolution des équations. Ainsi, Z sera une fonction implicite de z si elle est représentée par l'équation $Z^7 = azZ^2 - bz^5$ d'où l'on ne peut tirer la valeur explicite de Z.*
> (Euler, *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, 1748. Extrait du chapitre I.)

Une fois admises comme « élémentaires », les fonctions implicites ne sont devenues problématiques et n'ont dû faire l'objet d'un théorème que lorsqu'on leur a imposé d'être uniformes [3]. La coexistence de ces deux caractéristiques a survécu jusqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle ; époque où a été donnée la définition de fonction comme expression de calcul.

Bien que la première version officielle du théorème des fonctions implicites pour des variables réelles soit attribuée à DINI, l'évolution de sa preuve résulte des contributions de mathématiciens de renom et d'époques différentes comme NEWTON, LAGRANGE ou encore CAUCHY.

2. Cette formulation apparaît dans le lexique de WOLFF en 1716.
3. Voir la définition donnée dans l'annexe C.

3.2 De Newton à Cauchy

3.2.1 Premiers pas avec Newton

Ce que la communauté mathématique considère aujourd'hui comme la version la plus ancienne du théorème des fonctions implicites serait liée aux recherches de Newton et à son souci d'exprimer la solution de l'équation

$$Y^3 + a^2Y - 2a^3 + axY - x^3 = 0 \tag{3.1}$$

sous la forme d'une série de x ayant une racine a non nulle dans un voisinage de $x = 0$. L'énoncé de ce problème et sa résolution numérique se trouvent dans le manuscrit *De Analysi per Aequationes Infinitas* datant de 1669. En 1670, dans *De Methodis Serierum et Fluxionum*, Newton transforme et améliore la procédure qu'il a mise au point moins d'un an auparavant. Mieux connue sous le nom de « Polygone de Newton », cette méthode est employée pour déterminer le comportement d'un ensemble de points vérifiant une équation polynômiale du type

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i+j=n} a_{i,j}x^iy^j \tag{3.2}$$

au voisinage d'un point de l'ensemble considéré.

En procédant à un changement de variables (correspondant à une translation), on peut supposer que d'une part, un point de l'ensemble est le point $(0, 0)$ et que d'autre part, il n'existe aucun facteur commun à x et y dans le polynôme P.

Tout comme Newton, nous allons illustrer ce procédé (et construire le dit polygone) à partir de l'équation (3.1). Le changement de variables

$$y = Y - a$$

a permis au scientifique de transformer (3.1) en

$$y^3 + 3ay^2 + 4a^2y + axy + a^2x - x^3 = 0 \tag{3.3}$$

Les coefficients apparaissant dans cette dernière équation correspondent à

$$\begin{array}{rclrclrcl} a_{1,0} & = & a^2 & a_{1,1} & = & a & a_{3,0} & = & -1 \\ a_{0,1} & = & 4a^2 & a_{0,2} & = & 3a & a_{0,3} & = & 1. \end{array}$$

dans le polynôme P et les autres, eux, sont nuls.

Les segments définis par les couples de points répondant au critère

$$\{(i, j) \ : \ a_{i,j} \neq 0\} \tag{3.4}$$

définissent un ensemble convexe K dont la frontière (notée ∂K) est un polygone fermé, construit sur les axes d'un repère orthonormé.

Dans le cadre de ce travail, nous limitons la description de la méthode du « Polygone de Newton » à la construction du polygone. Pour obtenir des informations plus précises sur la portée du procédé, nous vous invitons à consulter un de nos ouvrages de référence : *The implicit function theorem. History, theory, and applications* [18].

3.2.2 L'apport de LAGRANGE

En 1770, LAGRANGE donne ce qui pourrait être apparenté à la première « vraie » preuve du théorème des fonctions implicites. Ce résultat qui fournit le développement en série de certaines fonctions définies implicitement, sera connu plus tard sous le nom de *Théorème de l'Inversion de Lagrange*[4].

En 1806, dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions*, LAGRANGE souhaite édifier l'ensemble du calcul des fonctions grâce au développement en série entière qui permit la mise en exergue de la fonction dérivée d'une fonction f. Une première formule de dérivation implicite voit alors le jour, déduite de celle permettant de dériver une fonction composée. En procédant de la sorte, le mathématicien a esquivé le passage par les fonctions de deux variables et n'a donné la formule de dérivation d'une fonction de type $f(p,q)$ que sous l'hypothèse où p et q sont deux fonctions de la même variable x.

> [...]*Dénotons cette fonction* z, *et comme* x *devenant* $x+i$, z *devient* $z + iz' + \frac{i^2}{2}z'' + \dots$. *On aura, peu importe la valeur de* i, *l'équation*
>
> $$z + iz' + \frac{i^2}{2}z'' + \ldots = 0.$$
>
> *D'où l'on tire les équations* $z = 0$, $z' = 0$, $z'' = 0, \ldots$
>
> *Maintenant,* z *étant égale à* $F(y,x)$, *on aura, par les formules ci-dessus*
>
> $$z' = y'F'(y) + F'(x).$$
>
> *En dénotant par* $F'(y)$ *la fonction prime de* $F(y,x)$ *prise relativement à* y *seul, et par* $F'(x)$ *la fonction prime de* $F(y,x)$ *prise relativement à* x, *et faisant* $x' = 1$, *puisque* x *devient simplement* $x+i$. *Ainsi, l'équation dérivée* $z' = 0$ *sera*
>
> $$y'F'(y) + F'(x) = 0.$$
>
> *D'où l'on tire*
>
> $$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$
>
> (Lagrange, *Leçons sur le Calcul des Fonctions.* Ch. 1. 1806.)

Longtemps, l'étude des fonctions implicites se verra restreinte à la seule recherche d'une formule de dérivation ; formule qui, par ailleurs, ne sera pas issue du procédé découvert par Lagrange. En effet, d'autres que lui se sont attelés à cette tâche mais nous ne les évoquerons pas dans ce travail. Non qu'ils soient moins brillants que le mathématicien mais leur contribution à l'évolution des recherches liées aux fonctions implicites fut moindre.

3.2.3 Que doit-on à CAUCHY ?

Que doit-on réellement à CAUCHY dans l'avancée des recherches sur le théorème des fonctions implicites ? A ce sujet, les avis divergent. Pour les uns, on doit lui attribuer la découverte de ce

4. L'énoncé de ce théorème se trouve dans l'annexe C.

résultat ; pour d'autres, rien n'est moins sûr. Finalement, cette découverte ne lui a jamais été accordée car même si les fonctions implicites ont souvent été mentionnées dans les travaux du mathématicien, elles ne se sont jamais retrouvées au cœur de ses réflexions.

C'est dans un contexte de remise en question de certaines « évidences » apparaissant dans les traités d'EULER ou de LAGRANGE que quelques-unes des théories fondées par CAUCHY ont vu le jour. Comme d'autres avant lui, le mathématicien français s'est interrogé sur la place des fonctions implicites parmi les fonctions. A l'époque, celles-ci étaient le plus souvent formulées en termes d'équations différentielles ordinaires pour trois raisons[5] :

- la formule de dérivation implicite d'une fonction supposée dérivable permettait de considérer que y (définie implicitement par $f(x,y)=0$) était solution de l'équation différentielle

$$y' = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$$

- la définition donnée à l'époque pour caractériser une fonction implicite permettait de considérer les solutions d'équations différentielles comme des fonctions implicites particulières. Inversement, si la forme générale d'une équation différentielle ordinaire pouvait être fournie par l'expression $f(x,y,y')=0$, une définition de la notion de fonction implicite du type $f(x,y)=0$ était vue comme un cas particulier d'équation différentielle... sans dérivée ;
- CAUCHY[6] associait les fonctions implicites aux méthodes de résolution des équations différentielles. Résoudre une équation du premier ordre

$$y' = f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

revenait alors à chercher une fonction u dont

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

était la différentielle totale.

La première démonstration abstraite d'existence de solutions à une équation différentielle ordinaire est par ailleurs l'oeuvre de CAUCHY.

Au début des années 1830, CAUCHY découvre le « calcul des limites ». Détaillées dans son *Résumé d'un Mémoire sur la Mécanique Céleste et sur un Nouveau Calcul appelé Calcul des Limites*, les méthodes qu'il a mises au point lui ont permis d'obtenir les premières formules sur les fonctions holomorphes. On lui doit ainsi :

- l'obtention des coefficients d'un polynôme comme intégrales curvilignes le long d'un cercle centré à l'origine ;
- l'énoncé de la formule générale intégrale permettant de calculer $f(0), f'(0), \dots f^{(n)}(0)$;

5. ces raisons sont explicitées à la page 22 de la revue *Mnemosyne* [17].
6. Cette troisième raison est davantage détaillée dans l'ouvrage de CAUCHY, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique*. Cours de 2$^{\text{ème}}$ année : équations différentielles ordinaires.

– l'extension du disque de convergence ;

– ...

Outre les avancées qui lui sont dues en analyse réelle, CAUCHY a également posé les premières briques de la théorie des fonctions d'une variable complexe (avec la formulation géométrique de la théorie de la variable complexe, dans un premier temps). Ses recherches ont permis de démystifier les fonctions d'une variable complexe et de mieux comprendre les différences entre dérivation réelle et dérivation complexe. En effet, celui-ci est parvenu à montrer qu'*une fonction de deux variables n'est dérivable au sens complexe en un point que si sa dérivée partielle au sens réel ne dépend pas de la direction par laquelle le point est approché*. On parle alors de fonctions *monogènes* et plus tard, de fonctions *$\mathbb{C}$-dérivables* [17].

CAUCHY possédait plusieurs cordes à son arc et excellait dans divers domaines. C'est donc sans surprise qu'une partie de son œuvre s'est inscrite dans l'étude des fonctions implicites. Pourtant, son apport y a été moins important que ce que l'on aurait pu imaginer. Comme nous l'avons mentionné précédemment, CAUCHY s'est principalement penché sur la place occupée par les fonctions implicites au sein des fonctions. Le recours au registre géométrique, devenu fréquent à l'époque, l'a aidé à décrire et interpréter géométriquement les fonctions implicites. C'est ainsi qu'en les associant à des *réunions de plusieurs fonctions explicites*, il est parvenu à percevoir derrière elles *des branches de courbe, chacune associée à une fonction explicite*. Cependant, CAUCHY a rapidement fermé la parenthèse liée aux questions d'existence et de représentation de ces fonctions. Pour lui, il s'agissait plutôt d'un problème secondaire que d'un réel domaine d'étude de l'analyse mathématique. D'autant qu'il pensait que le calcul des limites l'aiderait à résoudre les problèmes auxquels il était confronté dans son quotidien de chercheur.

Certes, l'étude des fonctions implicites n'aura pas permis à CAUCHY d'acquérir ses lettres de noblesse mais on peut néanmoins lui attribuer l'étude du théorème de LAGRANGE et de ses nombreuses généralisations, la preuve de l'existence et la représentation (dans le contexte des fonctions holomorphes) d'une fonction définie implicitement ainsi que la preuve du théorème des fonctions implicites par la méthode des majorants [7].

3.3 De l'énoncé des mathématiciens italiens...

A partir de 1860, les mathématiciens prennent conscience des limites imposées par les variables réelles (problème du développement en série, notion de fonction, définition de continuité,...). De même, ils se rendent compte de la complexité des théorèmes d'analyse sur les fonctions holomorphes. Une étape décisive est alors franchie dans l'évolution du théorème des fonctions implicites ; une étape qui aboutit à une première démonstration d'existence locale. Celle-ci traitait le cas des fonctions de deux variables réelles et abordait respectivement l'existence, la continuité, la dérivabilité ainsi que la formule de dérivation implicite.

Le premier exposé du théorème des fonctions implicites, établi entre les années 1876 et 1878,

7. La méthode des majorants consiste à moyenniser des majorants. Elle est applicable aux fonctions holomorphes et analytiques réelles dès que le problème de la convergence des séries de puissances est levé.

revient au mathématicien italien DINI. Pour parvenir à le démontrer, le mathématicien s'est basé sur le principe suivant :

> *La condition $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ et la continuité de f'_y garantissent la stricte monotonie des fonctions $y \mapsto f(x, y)$ pour les valeurs de x dans un intervalle suffisamment petit autour de x_0. La condition $f(x_0, y_0) = 0$ garantit que ces fonctions de la seule variable y changent de signe dans un intervalle suffisamment petit autour de y_0 et indépendant de x.*
> *Ce théorème d'existence garantit aussi la continuité. La dérivabilité est établie en second lieu grâce au théorème des accroissements finis.*
> (*Fonction implicite : de la notion au théorème.* Revue *Mnemosyne* [17], p.27.)

La première publication du théorème est quant à elle attribuée à GENOCCHI et PEANO, en 1884. La traduction de l'énoncé des deux Italiens peut être formulée en ces termes :

> *Soit $f(x, y)$ une équation entre les deux variables x et y, et (x_0, y_0) un couple de valeurs des variables pour lequel $f(x_0, y_0) = 0$. Supposons que la fonction et ses dérivées partielles du premier ordre sont finies et continues au voisinage du point (x_0, y_0), et que $f'_y(x_0, y_0)$ n'est pas nul ; alors il existe une et une seule fonction y de x, $y = \varphi(x)$, qui vérifie l'équation au voisinage du point $x = x_0$, i.e. on a identiquement pour chaque x, $f(x, \varphi(x)) = 0$, et qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0. Cette fonction $y = \varphi(x)$ est continue et possède une dérivée finie.*
> (Genocchi, *Calcul Différentiel et Fondements du Calcul Intégral*, 1884. (Traduction Libre R. Chorlay)).

A dater de cette période, la notion de fonction implicite s'est vue définie d'une manière assez particulière. Associée à *ce dont parle le théorème des fonctions implicites*, le résultat a finalement supplanté le concept qui auparavant, semblait s'« auto-suffire ».

3.4 ... aux applications actuelles

Les travaux de DINI, puis ceux de GENOCCHI et PEANO vont rester pendant un long moment une référence en matière de démonstration du théorème des fonctions implicites. Après quoi, grâce à une meilleure maîtrise des concepts en jeu et à la modernisation des techniques de calcul, le nombre de preuves alternatives et les généralisations du résultat se sont accrues.

A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, avec les prémisses de l'analyse fonctionnelle, une méthode générale de démonstration d'existence fonctionnelle par des méthodes de point fixe est apparue.
Plus tard, à l'heure de la génération bourbakienne (CARTAN, SCHWARTZ, LANG,...), une démonstration du théorème d'inversion locale de Lagrange (voir annexe C) dans les espaces de Banach ainsi qu'un corollaire du théorème des fonctions implicites ont vu le jour.
Aujourd'hui, grâce aux modifications et aux évolutions qu'il a subies, le théorème des fonctions implicites est perçu comme un moyen d'analyser des problèmes liés à des domaines spécifiques des mathématiques (algèbre, géométrie différentielle, théorie des variétés, topologie, théorie du point fixe, équations aux dérivées partielles,...). Il permet également de résoudre des équations apparaissant dans différents contextes comme les espaces euclidiens et de Banach, les fonctions d'ordre C^k et $C^{k,\alpha}$, les fonctions lipschitziennes, les fonctions analytiques réelles et holomorphes ainsi que les fonctions manipulées dans les classes de Gevrey (cfr. Annexe C pour la définition).

Chapitre 4

Le théorème des fonctions implicites, un savoir à enseigner

Le principal objectif de ce chapitre est de comparer et analyser le théorème des fonctions implicites tel qu'il apparaît dans les manuels et supports de cours de différentes institutions universitaires. Ces manuels nous ont permis d'accéder à plusieurs manières de transmettre le résultat qui fait l'objet de ce mémoire à des apprenants issus de cursus comme les mathématiques, la physique, l'économie et l'ingéniorat de gestion ou encore, les sciences de l'ingénieur.

Dans notre pays, aucun décret ni programme officiel ne légifère les matières à aborder dans l'enseignement supérieur. Les choix et aspects du savoir à enseigner sont donc principalement du ressort des professeurs responsables des cours qui mettent à disposition de leurs étudiants des syllabi, des cahiers d'exercices, des notes complémentaires,... renfermant les contenus et méthodes d'enseignement qui seront divulgués dans les auditoires.

Parce qu'il faut faire des choix, parce que nous n'avons pas toujours accès à tous les documents que nous venons de citer, parce que ceux-ci n'existent parfois tout simplement pas et parce que nous n'avons pas eu accès à la manière dont l'enseignant exploite leurs contenus, les analyses qui suivent sont uniquement basées sur les manuels de cours que nous avons énumérés dans le premier chapitre de cette étude et ne font en aucun cas référence aux pratiques ayant lieu durant les séances de cours.

4.1 Présentation des manuels

Nous l'avons déjà évoqué, le théorème des fonctions implicites intervient dans le cursus d'étudiants universitaires issus de domaines assez différents. Bien entendu, on le retrouve dans les cours d'analyse et calcul intégral des mathématiciens, mais aussi dans les cours de mathématiques des physiciens, économistes, ingénieurs de gestion et ingénieurs civils.

Outil de résolution de certains problèmes pour les uns ou élément essentiel à la construction de résultats fondamentaux pour les autres, l'accès à différents manuels de cours a permis de décrire, comparer et analyser la manière dont le théorème des fonctions implicites est inculqué à l'université. Pour mener à bien cette analyse, nous avons commencé par décrire l'enseignement reçu par les étudiants inscrits en :

- sciences économiques et de gestion aux FUNDP et à l'ULg ;
- sciences mathématiques et physiques aux FUNDP, à l'UCL et à l'ULg ;
- sciences appliquées (ingénieur civil) à l'ULg.

Afin que l'analyse résultant de cette description soit riche et complète, nous avons consulté des manuels envisageant des enseignements variés du théorème des fonctions implicites en fonction des institutions considérées.

Les ouvrages présentés ci-après constituent les manuels de référence des cours associés. Vous pourrez retrouver dans l'annexe A les contenus que chacun d'entre eux consacre au théorème des fonctions implicites.

Pour rappel, les manuels que nous avons choisis sont :

- (Bair J., 1995) *ANALYSE MATHEMATIQUE à l'usage des étudiants inscrits en : seconde candidature en administration des affaires ; seconde candidature en science économique ; diplôme complémentaire en administration des affaires*, ULg ;
- (Delhez E., 2005) *Analyse mathématique (1re Partie)*, ULg ;
- (Mawhin J., 1992) *ANALYSE. Fondements, techniques, évolution*, UCL ;
- (Roger P., 2006) *Mathématiques pour l'économie et la gestion. Applications avec Excel*, étudiants en économie-gestion des universités et des écoles de management, élèves des classes préparatoires aux écoles de management ;
- (Schneiders J.-P., 2007) *Analyse III (1re Partie)*, ULg ;
- (Strodiot J.-J., 1997) *Analyse (2ème Partie)*, FUNDP ;
- (Thiry S., 2006) *Mathématiques pour l'économie et la gestion I*, FUNDP.

Parmi ces ouvrages, trois sont destinés à un public de futurs économistes et ingénieurs de gestion (P. Roger, J. Bair et S. Thiry), trois autres constituent le support de cours d'étudiants en mathématiques (J. Mawhin, J.-J. Strodiot et J.-P. Schneiders). Le syllabus rédigé par E. Delhez concerne quant à lui des étudiants en génie civil.
Tous ces manuels s'adressent à un public de 1ère année de bachelier de cycle universitaire sauf ceux de J. Bair et J.-P. Schneiders dont les cours sont respectivement suivis par des étudiants de 2ème et 3ème année. Il est à souligner que les cours qui accompagnent les manuels de J. Mawhin et J.-J. Strodiot sont également donnés à des étudiants de 1ère année en sciences physiques.

Enfin, nous nous sommes aperçus que certains ouvrages, de parution plus ancienne, ont été modifiés et même remplacés sur base de critiques, remarques ou réactions provenant d'autres mathématiciens et même parfois d'étudiants. C'est le cas notamment pour l' ouvrage de J. Mawhin dont le cours est donné aujourd'hui par Ponce et Van Schaftingen. Par contre, dans d'autres situations, même si le chargé de cours a été remplacé, le support, lui, reste identique. Nous avons rencontré cette situation aux FUNDP où le cours de J.-J. Strodiot et S. Thiry sont à l'heure actuelle, respectivement donnés par J. Winkin et A. K. Ben-Naoum.

Avant de commencer la description des contenus d'enseignement de ces manuels, une première présentation de chacun d'entre eux peut être réalisée à partir des matières vues et des objectifs que veulent atteindre les cours dont ils sont le support. La plupart de ces informations sont consultables sur le site internet de l'université dans laquelle le cours est donné ou sont mentionnées dans la préface du manuel. Voici les principaux renseignements que nous avons pu y découvrir.

(Bair J., 1995) Les notes de J. Bair sont relatives à un cours avancé d'analyse mathématique à l'usage, principalement, des économistes et des gestionnaires. Elles accompagnent actuellement l'enseignement dispensé par l'auteur aux étudiants de 2ème Baccalauréat en ingénieur de gestion de l'ULg. L'auteur suppose ici parfaitement assimilées de solides notions de mathématiques générales et d'algèbre linéaire car il y traite essentiellement de l'analyse des fonctions de plusieurs variables réelles. De nombreuses applications concrètes, orientées vers l'économie et la gestion, ainsi que de multiples problèmes d'illustrations sont rassemblés dans cet ouvrage [1].

(Delhez E., 2005) Le cours de E. Delhez s'étale sur 50 heures de séances ex-cathedra et 40 heures de répétition. Il a pour but d'introduire les principaux outils de base de l'analyse mathématique utilisés dans les sciences de l'ingénieur. Les matières suivantes y sont abordées :

- fonctions d'une variable réelle : limite, continuité, dérivée, graphe, primitive, intégrale de Riemann ;
- équations différentielles ordinaires ;
- fonctions de plusieurs variables : limite, continuité, différentiation, extrema, changements de variables ;
- suites et séries : suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, séries de puissances ;
- calcul intégral : intégrale de Lebesgue, intégrales de longueur, de surface, de volume, intégrales paramétriques.

L'exposé de chacune de ces matières combine une mise en situation permettant de comprendre l'utilité des outils développés avec une présentation théorique rigoureuse de ceux-ci et des concepts associés. Au terme du cours, il est demandé à l'étudiant de maîtriser les concepts théoriques de base de l'analyse mathématique et de mettre en oeuvre les techniques de calcul correspondantes, que ce soit dans un contexte purement mathématique ou dans le cadre d'applications simples relevant du domaine des sciences et techniques. On lui demande également d'être capable d'utiliser le langage mathématique pour formuler, analyser et résoudre des problèmes originaux simples en utilisant avec discernement et rigueur les outils de l'analyse mathématique. L'étudiant sera également capable de comprendre des raisonnements abstraits qui lui sont présentés, de les exposer de façon structurée, de justifier rigoureusement les différentes étapes du cheminement et de produire des raisonnements

1. Voir l'avant-propos de l'ouvrage de J. Bair [1].

abstraits originaux s'apparentant à ceux qui lui sont présentés [2].

(Mawhin J., 1992) Le cours d'analyse de J. Mawhin constituait *la partie théorique du cours de calcul différentiel et intégral dispensé aux étudiants de candidatures en sciences mathématiques et physiques. Son but était d'introduire les concepts et les résultats fondamentaux du calcul différentiel et intégral, de développer les techniques correspondantes et d'initier le lecteur à quelques domaines importants de l'analyse développés dans d'autres cours* [3].

(Roger P., 2006) Dans son ouvrage, le but poursuivi par P. Roger est de *présenter les éléments d'analyse et d'algèbre linéaire indispensables aux étudiants en économie ou en sciences de gestion.* On y retrouve un grand nombre d'exemples concrets tirés de modèles économiques et de problématiques de gestion mais aussi, en fin de chaque chapitre, des exercices corrigés pouvant servir de techniques pour l'assimilation des outils et raisonnements ou à appliquer à des situations concrètes [4].

(Strodiot J.-J., 2007) Le cours de J.-J. Strodiot est aujourd'hui réparti en 60 heures de cours magistraux et 62.5 heures de travaux dirigés. L'objectif de ce cours est l'apprentissage du raisonnement mathématique et de la rigueur, l'acquisition d'un esprit de synthèse et l'initiation à la résolution d'exercices et de problèmes issus de l'analyse réelle. L'initiation à l'analyse mathématique passe par la présentation des outils de base que sont le calcul différentiel et le calcul intégral. L'accent est mis sur l'apprentissage de la rigueur et sur l'initiation à la résolution d'exercices. Quelques exemples physiques sont d'ailleurs illustrés dans le cours [5].

(Schneiders J.-P., 2007) Comprenant 30 heures de séances théoriques et 30 heures de séances pratiques, le cours de J.-P. Schneiders est divisé en deux parties. La première aborde la théorie locale des systèmes d'équations non-linéaires (fonctions implicites, théorème du rang, lemme de Morse,...). La seconde, quant à elle, détaille des systèmes d'équations différentielles ordinaires (existence, unicité locale et globale des solutions, propriétés spéciales des systèmes autonomes et linéaires, dépendance en les conditions initiales,...). A la fin du cours, les étudiants devraient avoir compris complètement les résultats présentés durant les leçons et être capables d'établir les résultats décrits et de les utiliser pour résoudre des problèmes variés [6].

(Thiry S., 2006) Composé de 30 heures de séances théoriques et 15 heures d'exercices, le cours donné par S. Thiry aux économistes vise à introduire et étudier les concepts et techniques relatifs aux fonctions de plusieurs variables, utiles dans les problèmes rencontrés par l'économiste et le gestionnaire. Les cas des fonctions de deux ou trois variables, auxquels on se limite le plus souvent permettent, entre autres, de traiter les premiers problèmes d'optimisation rencontrés par le consommateur et le producteur. Les matières abordées permettront d'introduire d'importantes notions mathématiques utilisées dans des cours ultérieurs comme :

- les vecteurs ainsi que les équations de droites et de plans ;

---

2. Voir le site : `http ://progcours.ulg.ac.be/cocoon/cours/MATH0002-3.html` (consulté le 24.01.2012).
3. Voir la préface de l'ouvrage de J. Mawhin [19].
4. Voir la préface de l'ouvrage de P. Roger [21].
5. Voir le site `http ://www.fundp.ac.be/etudes/cours.page_view/SMATB103.` (consulté le 24.01.2012).
6. Voir le site `http ://www.progcours.ulg.ac.be/cocoon/cours/MATH0251-1.html` (consulté le 24.01.2012).

- les fonctions de plusieurs variables (représentation géométrique, limite et continuité) ;
- la dérivation de fonctions de plusieurs variables ;
- l'optimisation libre avec ou sans contrainte, au moyen des multiplicateurs de Lagrange ;
- les intégrales doubles [7].

4.2 Place du théorème des fonctions implicites dans les manuels consultés

C'est sur base des outils didactiques mis en place dans le deuxième chapitre de ce mémoire que nous allons réaliser la description qui occupe la majeure partie de ce chapitre. Nous allons, dans l'ordre, décrire et analyser les contenus d'enseignement reçus par les étudiants inscrits en :

- sciences économiques et de gestion ;
- sciences mathématiques et physiques ;
- sciences appliquées (ingénieur civil).

Nous effectuons cette distinction car les objectifs poursuivis varient selon l'institution dans laquelle nous nous plaçons. Ensuite, nous récapitulerons les principales caractéristiques didactiques de chaque manuel et relèverons les points communs et divergences existant entre eux afin d'essayer de vous proposer un inventaire des différentes façons d'envisager l'enseignement du théorème des fonctions implicites.

4.2.1 En sciences économiques et de gestion

Manuel de J. Bair (1995)

Les fonctions implicites couvrent les cinq pages constituant la première section du quatrième chapitre de l'ouvrage de J. Bair intitulé *Quelques fonctions spéciales.* Ce chapitre introduit cinq autres types de fonctions correspondant chacun à une section spécifique de son manuel. Il s'agit des enveloppes, des fonctions homogènes, des fonctions concaves et convexes et enfin, des fonctions quasi-concaves et quasi-convexes. Une série de dix-sept exercices non-corrigés clôture ce point. Les cinq premiers exploitent les fonctions implicites et veulent permettre aux étudiants de manipuler les théorèmes qui leur sont relatifs dans diverses situations. L'extrait consulté se trouve dans l'annexe A.1.

Description du manuel

La section considérée peut d'emblée être scindée en deux parties. La première traite les fonctions d'une variable définie implicitement. La seconde partie généralise les résultats de la première au cas de m fonctions $y_1, \ldots, y_m$ dépendant chacune de n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ définies implicitement par m relations du type

$$F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

7. Voir le site `http ://www.fundp.ac.be/etudes/cours.page_view/ECGEB151.` (consulté le 24.01.2012).

pour $j = 1, \ldots, m$. L'accès à cette généralisation passe par le cas intermédiaire traitant une fonction implicite y de n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ définie par l'équation

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0.$$

La description de cette seconde partie ne sera pas abordée ici car nous axons notre travail sur les fonctions implicites du type $F(x, y) = 0$.

L'auteur commence en donnant une première description du concept de fonction implicite, traduisant la raison pour laquelle on y a recours.

> *Une fonction n'est pas toujours définie explicitement sous la forme classique $y = f(x)$ mais peut être donnée implicitement à l'aide d'une relation du type $F(x, y) = 0$.*

Il place ensuite cette nouvelle forme d'expression dans le contexte économique en citant des situations où leur emploi est nécessaire (courbes d'indifférence, isoquantes et chemin d'expansion d'une firme produisant un output à l'aide de deux inputs). Après quoi, bien qu'aucune définition formelle de ce type de fonction ne soit donnée, l'auteur explique sur base d'exemples analytiques les contraintes auxquelles les relations du type $F(x, y) = 0$ peuvent conduire. Il montre ainsi que :

- toute relation du type $F(x, y) = 0$ n'assure pas forcément l'existence d'une fonction bien définie.
  Cette situation est illustrée par l'expression $F(x, y) = x$ qui permet à y de prendre n'importe quelle valeur lorsque x vaut 0 ;
- il peut exister plusieurs fonctions introduites par une même expression du type $F(x, y) = 0$. Pour cette situation, l'auteur souligne cependant que la solution doit être *localement unique*. Il illustre cela sur l'équation du cercle unitaire centré à l'origine.

Le but de ces exemples est de donner la possibilité aux étudiants de prendre conscience que l'existence et l'unicité locale de la fonction $y = f(x)$ ne sont garanties que sous certaines conditions fournies par le *théorème d'existence des fonctions implicites*. Nous pouvons retrouver l'énoncé de ce résultat (donné sans démonstration) à la page 43 du manuel décrit. Un second théorème, le *théorème de dérivation implicite*, admis lui aussi, présente la formule de dérivation implicite. Avant d'introduire cette formule, l'auteur souligne qu'une fois que l'existence d'une fonction définie implicitement est assurée, ses dérivées peuvent être calculées de proche en proche (si elles existent) en égalant à zéro les dérivées successives de $F(x, y)$ par rapport à x. Pour les obtenir, le recours à la formule de dérivation des fonctions composées est nécessaire.

Evidemment, le *théorème de dérivation implicite* proposé par J. Bair fournit l'expression de la dérivée première y' d'une fonction y d'une variable indépendante x définie implicitement. Cependant, l'auteur va plus loin que les autres ouvrages analysés dans ce travail car il met également en évidence l'expression de la dérivée seconde y'' de ce genre de fonction. Celle-ci est directement liée aux expressions de y' et du hessien bordé de F.

Ensuite, l'auteur explique, sans se référer au théoréme qu'il vient de présenter et en employant des notions déjà rencontrées par les étudiants, comment obtenir les expressions de y' et y''. Il donne également sens à ce qu'elles représentent en les interprétant dans différents registres.

La dérivée première y'

La dérivée première est étudiée dans les registres graphique et analytique. L'auteur commence par expliquer que son expression peut être calculée à partir de la différentielle totale de F :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

(Bair J., 1995, p.43)

Après quoi, il montre à l'aide d'un graphique que sa valeur en un point x^* donne la pente de la tangente ($\tan\alpha$) à la courbe au point d'abscisse x^*.

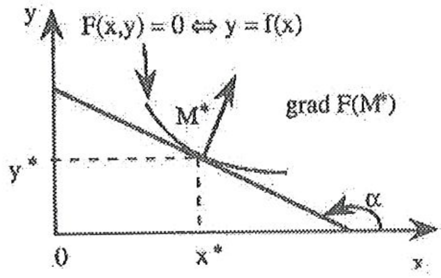


FIGURE 4.1 – Pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse x^* ([1], p.43).

Enfin, il se place dans un contexte économique et y explique que l'opposé de l'expression de y' définit le taux marginal de substitution [8].

La dérivée seconde y''

J. Bair met en évidence que la dérivée seconde permet de déterminer la concavité de la fonction y et que son expression peut être calculée en tenant compte de l'égalité $y' = -\frac{F'_y}{F'_x}$ et du théorème de Schwarz $F''_{xy} = F''_{yx}$.

8. En économie, le taux marginal de substitution (TMS) désigne la pente d'une courbe d'indifférence. Il indique quelle quantité d'un bien un consommateur est disposé à sacrifier en échange d'une unité supplémentaire d'un autre bien (Stiglitz dans [15]).
Le TMS correspond au rapport $-\frac{\partial y}{\partial x}$ où ∂y correspond à la variation de quantité consommée d'un bien Y nécessaire pour maintenir l'utilité d'un consommateur constante alors que la quantité consommée d'un bien X varie de $-\partial x$.

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right) = -\frac{F'_y \frac{d}{dx}F'_x - F'_x \frac{d}{dx}F'_y}{(F'_y)^2} \\
&= -\frac{F'_y(F''_{xx} + F''_{xy}y') - F'_x(F''_{yx} + F''_{yy}y')}{(F'_y)^2} \\
&= \frac{-F'_y F''_{xx} + F'_y F''_{xy}\frac{F'_x}{F'_y} + F'_x F''_{yx} - F''_{yy}F'_x \frac{F'_x}{F'_y}}{(F'_y)^2} \\
&= \frac{|\overline{\mathcal{HF}}|}{(F'_y)^3}
\end{aligned}
$$

où $|\overline{\mathcal{HF}}|$ désigne le "hessien bordé" de F :

$$
|\overline{\mathcal{HF}}| = \begin{vmatrix} 0 & F'_x & F'_y \\ F'x & F'_{xx} & F'_{xy} \\ F'_y & F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}.
$$

(Bair J., 1995, p.44)

De tous les manuels analysés, celui de J. Bair est le seul qui aborde le calcul de la dérivée seconde de la fonction y, c'est pourquoi nous avons jugé pertinent de reprendre le raisonnement ci-dessus qui permet de l'obtenir.

Le dernier point de la section consiste à illustrer l'emploi des théorèmes d'existence et de dérivation des fonctions implicites dans le cas d'une expression donnée. La relation traitée (l'auteur détermine ses dérivées première et seconde à la page 44 de son ouvrage) est la suivante :

$$F(x, y) \equiv y^3 + xy + 1 = 0.$$

Principales caractéristiques

Nombre de pages

Cinq pages du manuel sont consacrées aux fonctions implicites.

Introduction/ Motivation

J. Bair motive le concept de fonction implicite au travers de situations économiques connues des étudiants. Procéder de la sorte peut se révéler judicieux pour capter leur attention, leur faire prendre conscience de l'importance des fonctions implicites dans leur domaine d'étude et les intéresser à cette matière.
L'auteur pose ensuite les contraintes liées aux fonctions implicites en se basant sur deux relations :

- $F(x, y) = x$ qui *ne garantit pas l'existence d'une fonction bien définie* ;
- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ qui donne lieu, au niveau global, à plusieurs fonctions.

qui vont introduire le théorème garantissant l'existence et l'unicité d'une fonction $y = f(x)$ définie implicitement par $F(x, y) = 0$.

Enoncé(s)

Un premier énoncé, le *théorème d'existence implicite*, assure l'existence et l'unicité d'une fonction $y = f(x)$ définie implicitement par $F(x, y) = 0$. Un second, le *théorème de dérivation implicite* fournit les expressions des dérivées première $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ et seconde[9] $y'' = \frac{\overline{\mathcal{HF}}}{(F'_y)^3}$de la fonction $y = f(x)$.

Démonstration

Les résultats présentés ne sont pas démontrés dans le manuel mais l'auteur explique comment obtenir les dérivées première et seconde de $y = f(x)$. L'obtention de y' fait appel à la formule de la différentielle totale de F et celle de y'' nécessite l'emploi de l'expression de y' ainsi que de l'égalité $F''_{xy} = F''_{yx}$ découlant du théorème de Schwarz.

Interprétation

Une partie non négligeable de la section est consacrée à l'interprétation des dérivées première et seconde. L'auteur développe le fait que la dérivée première correpspond à *la pente de la courbe $y = f(x)$ en un point x^* de celle-ci*. Il lui donne également sens dans le contexte économique (théorie du consommateur) en précisant que son opposé représente le taux marginal. La dérivée seconde est quant à elle uniquement associée à la concavité de la courbe $y = f(x)$.

Généralisation

Le théorème d'existence implicite est généralisé au cas de m fonctions $y_1, \ldots, y_m$ dépendant chacune de n variables indépendantes $x_1, \ldots x_n$ définies implicitement par m relations du type $F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ pour $j = 1, \ldots, m$. La formule de dérivation implicite (expression de la dérivée première) est également généralisée à ce cas de figure en passant tout d'abord par l'intermédiaire d'une fonction implicite y de n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ définie par l'équation $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

Visée

Cette section est, selon nous, essentiellement construite dans une optique explicative. Des outils analytiques et graphiques y sont mis en place pour faciliter la compréhension du théorème des fonctions implicites et des principales notions qui y ont trait. Le but poursuivi par l'auteur n'est pas de démontrer les théorèmes présentés mais d'expliquer leur utilité aux étudiants. Nous avons également pu nous apercevoir qu'une certaine importance est accordée à l'interprétation des notions introduites et au sens qu'on peut leur donner.

Cadre(s) et registre(s) employé(s)

La partie introductive de la section a essentiellement été réalisée dans le registre du langage naturel. Les exemples y sont développés dans le cadre analytique. Le corps de la section

9. Rappelons que le manuel de J. Bair est le seul à fournir l'expression de y''.

est lui-même réalisé dans le cadre analytique mais l'auteur n'hésite pas à faire appel au registre graphique pour que les étudiants comprennent et visualisent les interprétations qu'il établit (cas de la dérivée première).

Manuel de P. Roger (2006)

Les fonctions implicites et le théorème qui leur est sous-jacent sont abordés dans le huitième chapitre, intitulé *Fonctions de plusieurs variables*, de cet ouvrage qui en compte onze. On y présente des outils nécessaires à l'optimisation (avec et sans contrainte) de fonctions de plusieurs variables, abordée plus loin dans le manuel. On y introduit les notions de distance et espace métrique sur des espaces de dimension finie $\mathbb{R}^p$, de continuité et différentiabilité, le théorème des accroissements finis et la formule de Taylor pour des fonctions de plusieurs variables. La dernière section du chapitre nous intéresse particulièrement dans ce travail puisque deux pages sont consacrées aux fonctions implicites. Leur contenu est disponible dans l'annexe A.2 de ce mémoire. Les fonctions homogènes ainsi qu'une série d'exercices (ne traitant pas des fonctions implicites) clôturent le chapitre.

Description du manuel

Dans cette section, le but de l'auteur est de *fournir aux étudiants un outil permettant de mesurer la sensibilité d'une variable par rapport à une autre*. D'emblée, ceux-ci sont placés dans le contexte économique qui les intéresse puisque l'auteur commence la section par une définition descriptive de la notion de fonction implicite :

> *Il n'est pas rare que plusieurs variables économiques soient liées par une relation fonctionnelle mais qu'il soit impossible d'exprimer (explicitement) une variable en fonction des autres.*
> (Roger P., 2006, p.287)

et l'illustre au travers de situations économiques concrètes, connues des étudiants comme :

- le taux actuariel r d'une obligation est lié à son prix p et aux flux $F_1, \ldots, F_T$ qu'elle engendre sous forme de coupons et de prix de remboursement.
  Dans cette situation, il est impossible d'exprimer r en fonction de l'ensemble de variables $(p, F_1, \ldots, F_T)$;
- la satisfaction d'un individu liée à la consommation d'un panier de biens $(x_1, \ldots, x_p)$ est mesurée par une fonction d'utilité à valeurs réelles $U(x_1, \ldots, x_p)$.
  Pour un niveau d'utilité u fixé, l'égalité $U(x_1, \ldots, x_p) = u$ induit une relation entre x_1 et les $p-1$ autres variables qui n'est pas toujours exprimable de manière explicite.

Dans les explications qu'il donne, l'auteur distingue les relations émanant de fonctions de deux variables de celles qui en font intervenir p.

C'est donc dans cet ordre d'idées que la notion de fonction implicite[10] F de deux variables

10. A ce passage du manuel (Roger P., 2006, p.287), on peut remarquer que l'auteur précise à nouveau le qualificatif *implicite* en se basant cette fois sur les éléments intervenant dans la définition de fonction implicite : *le caractère implicite de la relation entre x et $y = g(x)$ apparaît lorsqu'il n'est pas possible d'exprimer (explicitement) g.*

sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ est définie rigoureusement et que l'énoncé du théorème permettant d'obtenir la formule de dérivation implicite est donné. En ne s'intéressant qu'à cette formule, on peut supposer que l'existence même des fonctions implicites est directement admise.

Afin d'illustrer le résultat énoncé et de donner tout leur sens aux propos qu'il a tenus, l'auteur explique que le théorème des fonctions implicites est utilisé dans des modèles économiques pour faire de la *statique comparative* [11]. Après quoi, il l'applique à l'exemple du taux interne de rentabilité (TIR) [12], cité antérieurement.

Le second cas de figure envisagé correspond aux fonctions implicites de p variables réelles. Seules les généralisations de la définition et de l'énoncé donnés auparavant sont exprimées.

Principales caractéristiques

Nombre de pages

Deux pages du manuel sont consacrées aux fonctions implicites.

Introduction/ Motivation

L'auteur introduit les fonctions implicites au travers de problèmes économiques connus des étudiants :

- le taux actuariel d'une obligation ;
- la fonction d'utilité du consommateur.

Enoncé(s)

Le *théorème des fonctions implicites* présenté dans ce manuel fournit uniquement la formule de dérivation implicite $g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

Démonstration

Aucune démonstration du résultat n'est fournie.

Interprétation

Aucune interprétation mathématique n'est donnée à la formule de dérivation implicite. Son expression analytique est fournie aux étudiants mais on ne leur donne pas la possibilité de visualiser (par le biais d'une représentation graphique ou d'une explication en français) la pente de la tangente en un point d'une courbe à laquelle cette dérivée correspond. Cependant, près de la moitié de la section est consacrée à l'illustration d'une application économique (le taux interne de rentabilité (TIR)) dans laquelle le concept de fonction implicite intervient.

Généralisation

Le manuel généralise l'énoncé du *théorème des fonctions implicites* au cas des fonctions de p variables.

11. La *statique comparative* consiste à maintenir une fonction de deux variables (coût, production, utilité, valeur actuelle nette,...) à un niveau donné et à analyser l'impact de la variation d'une variable sur le niveau de l'autre.
12. Il est possible de retrouver le détail de cet exemple à la page 288 du manuel que nous décrivons.

Visée

P. Roger ne cherche pas à démontrer le théorème. Son intention est plutôt d'expliquer l'utilité du résultat en économie et de fournir à ses étudiants *un outil permettant de mesurer la sensibilité d'une variable par rapport à la variation d'une autre* (Roger P., 2006, p.287). Près de la moitié de la section illustre ainsi le rôle du théorème des fonctions implicites et la statique comparative qu'il met en œuvre dans les modèles économiques.

Cadre(s) et registre(s) employé(s)

P. Roger privilégie le cadre analytique dans cette section. La résolution de l'exemple du TIR est elle aussi réalisée dans ce cadre. Par contre, l'auteur n'hésite pas à employer le registre du langage naturel dans certaines de ses explications.

Manuel de S. Thiry (2006)

Dans le syllabus de S. Thiry, l'étude des fonctions de plusieurs variables est scindée en deux chapitres. Le premier, intitulé *Fonctions de plusieurs variables : limite et continuité*, aborde surtout les généralités qui leur sont spécifiques par le biais des fonctions de deux variables. C'est ainsi qu'on y présente la définition de fonctions de plusieurs variables, les modes de représentation (graphe et courbe de niveau) ainsi que les notions de limite et continuité qui leur sont propres. Cette introduction s'achève par une série d'exercices corrigés portant sur les notions nouvellement introduites. Le second chapitre sur les fonctions de plusieurs variables est axé sur la dérivation de celles-ci. Il va donc particulièrement nous intéresser dans le cadre de ce mémoire car on y aborde la dérivation implicite. En effet, une section de six pages découpée en trois niveaux intitulés :

- pente d'une courbe de niveau et dérivée d'une fonction d'une variable définie implicitement ;
- dérivée d'une fonction de deux variables définie implicitement ;
- dérivée d'une fonction de n variables définie implicitement,

est consacrée à l'étude de ce procédé. Les conditions nécessaires à l'existence des fonctions implicites n'apparaissent qu'en guise de remarque ou en conclusion d'exemples illustratifs. L'extrait consulté se trouve dans l'annexe A.3.

Description du manuel

La section débute par une présentation en français du concept de fonction implicite :

> *Certaines fonctions ne sont pas décrites explicitement mais sont définies comme solution d'une équation de plusieurs variables.*
> (Thiry S., 2006, p.120)

Pour parvenir à la mise en place de la méthode de dérivation spécifique aux fonctions implicites, l'auteur procède en trois étapes correspondant aux trois sous-sections citées précédemment. La première aborde donc le cas le plus souvent traité des fonctions d'une variable définies implicitement.

Pour obtenir la dérivée d'une fonction d'une variable définie implicitement, l'auteur se place dans le cadre de l'analyse et y associe l'expression de la dérivée de la fonction traitée à la pente d'une de ses courbes de niveau. Les explications données sont enrichies d'une représentation graphique de la situation décrite. Concrètement, la notion de courbe de niveau [13] est tout d'abord rappelée aux étudiants. Ensuite, l'auteur considére une fonction de deux variables $F(x,y)$ et l'équation $F(x,y) = c$ (où c est une constante) qui correspond à une courbe de niveau de la fonction F. En se basant sur la définition de fonction implicite donnée en début de section et sur celle de courbe de niveau, S. Thiry suppose que l'équation $F(x,y) = c$ définit implicitement une fonction d'une variable $y = f(x)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Dans le même temps, une nouvelle formulation analytique de la courbe de niveau $F(x,y) = c$ est donnée. Celle-ci est obtenue en remplaçant y par la fonction implicite $f(x)$ à laquelle on l'identifie :

$$\forall x \in I \ : \quad F(x, f(x)) = c. \quad \text{(Thiry S., 2006, p. 120)}$$

En s'appuyant sur la représentation graphique suivante, l'auteur permet aux étudiants de visualiser les premiers liens mis en place :

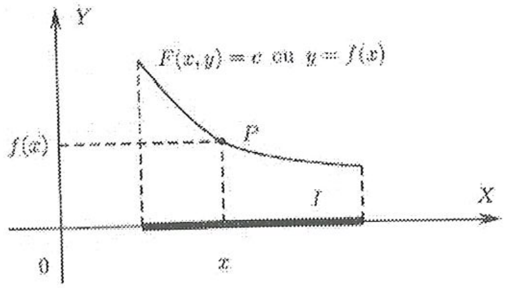


FIGURE 4.2 – Pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse P ([25], p.121).

A partir de cette figure, le problème de la dérivabilité de la fonction f est ensuite introduit :

> *Si la courbe de niveau est telle que celle de la figure 3.11* [14]*, le problème revient donc à déterminer la pente de la courbe en chaque point P de coordonnées $(x, f(x))$, c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point.*
> (Thiry S., 2006, p.121)

Confronter le cadre de l'analyse et la représentation graphique du problème permet donc d'établir le lien entre la dérivée de la fonction implicite $y = f(x)$ et la pente de la courbe de niveau $F(x,y) = c$ en un point (x,y). Une fois cette association obtenue, l'expression de la dérivée $f'(x)$ est déterminée. Pour cela, l'auteur recommande l'emploi de la règle appelée "*Règle de la chaîne : fonction de 2 variables - une variable de base*" et de calculer la dérivée totale [15] (par rapport à x) de chacun des deux membres de l'équation $F(x,y) = c$. Cette démarche permet d'aboutir au résultat suivant

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad \text{si} \quad F'_y(x, f(x)) \neq 0$$

13. Cette notion est étudiée dans le paragraphe 2.2.2 du syllabus décrit.
14. Cette figure correspond à la figure (4.2.1).
15. Ces deux méthodes de dérivation font l'objet d'une section antérieure du chapitre sur la dérivation des fonctions de plusieurs variables.

qui fait l'objet de la proposition *Pente en un point d'une courbe de niveau et dérivée d'une fonction d'une variable définie implicitement* à la page 121 de ce manuel.

Deux exemples illustrant la formule de dérivation implicite suivent cette phase théorique et permettent d'introduire deux remarques relatives aux fonctions implicites. Dans le même temps, une méthode de résolution est proposée pour les exercices où interviennent ces notions.

Exemple 1

Considérons la courbe d'équation $x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y = 0$.
Nous allons déterminer la pente et l'équation de la tangente au point $(x, y) = (2, 1)$.
(Thiry S., 2006,p.121)

En illustrant graphiquement la solution de ce premier exemple, l'auteur met en évidence le fait que, pour une même équation $F(x, y) = c$, on peut définir plus d'une fonction $f(x)$.

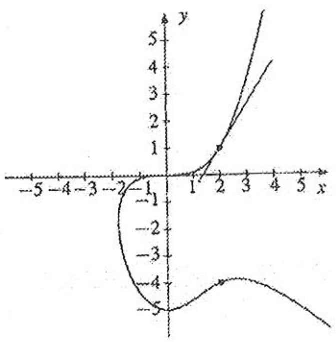


FIGURE 4.3 – Graphe de la courbe $x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y = 0$ ([25],p.122).

Cela souligne la non unicité des fonctions implicites à l'échelle globale.

Exemple 2

Supposons que l'équation $e^{xy^2} - 2x - 4y = c$ *définisse une fonction dérivable* $y = f(x)$.
Nous allons déterminer une valeur c *telle que* $f(0) = 1$ *et ensuite déterminer* $y'(0) = f'(0)$.
(Thiry S., 2006, p.123)

Ce second exercice montre quant à lui qu'une équation $F(x, y) = c$ ne permet pas toujours d'obtenir une expression analytique de la fonction $y = f(x)$ mais que, malgré cela, il reste possible d'en déterminer la dérivée.

La deuxième étape du travail réalisé par S. Thiry consiste en une généralisation au cas de la dérivation des fonctions de deux variables définies implicitement.

On commence ainsi par considérer une fonction de trois variables $F(x, y, z)$ ainsi que l'équation $F(x, y, z) = c$ où c est une constante dont on donne une interprétation géométrique en termes de surface de $\mathbb{R}^3$. Ensuite, en supposant que l'équation $F(x, y, z) = c$ permet de définir implicitement une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ sur un domaine de $\mathbb{R}^2$, on obtient une nouvelle formulation de F sur ce domaine

$$F(x, y, f(x, y)) = c.$$

Comme dans le premier cas, si la fonction F est différentiable, on montre qu'on peut utiliser la règle de dérivation en chaîne pour calculer les dérivées partielles de z par rapport à x et y, pour autant que $F'_z(x, y, f(x, y)) \neq 0$. C'est ainsi qu'on obtient les résultats

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &\equiv f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &\equiv f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))} \end{aligned}$$

qui font l'objet de la proposition *Dérivées partielles d'une fonction de deux variables définie implicitement* (Thiry S., 2006, p. 124). Cette généralisation est également illustrée par un exercice résolu.

La section se termine en introduisant la dérivation des fonctions de n variables définies implicitement. Cette dernière étape théorique se résume à l'énoncé de la propriété fournissant l'expression des dérivées partielles de telles fonctions.

La série d'exercices relative à la section que nous venons de décrire est articulée autour de cinq énoncés mettant en évidence la manipulation des fonctions implicites et le calcul de leurs dérivées. On y demande aux étudiants de :

- déterminer les dérivées partielles et/ou la dérivée totale de fonctions d'une ou de deux variables et définies implicitement ;
- montrer qu'un point de coordonnées (x, y) se situe sur une courbe de niveau $F(x, y) = c$ d'une fonction $F(x, y)$ d'expression analytique connue ;
- déterminer l'équation de la tangente à une courbe de niveau en un point de coordonnées (x, y).

Les énoncés de cette séquence d'exercices sont également repris dans l'annexe A.3.

Principales caractéristiques

Nombre de pages

Dans ce manuel, une section de six pages traite les fonctions implicites.

Introduction/ Motivation

Contrairement aux deux manuels précédents, celui de S. Thiry définit d'emblée la notion de fonction implicite sans passer par une phase introductive qui pourrait mettre en évidence des situations (en économie ou en mathématiques) où leur usage est requis. L'approche du concept est tout d'abord assez informelle, établie dans le registre du langage naturel. Après quoi, une formulation mathématique plus rigoureuse en est donnée.

Enoncé(s)

Le manuel envisage uniquement l'énoncé permettant d'obtenir la formule de dérivation implicite.

Démonstration

Même si aucune démonstration n'en est fournie, l'auteur explique comment obtenir la formule de dérivation implicite. Pour y parvenir, elle commence par travailler dans le cadre analytique et se référer à la représentation graphique d'une fonction implicite. Ensuite, elle effectue un changement de cadres. Elle se place dans le cadre graphique dans lequel elle associe la dérivée y' de la fonction implicite à la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en un point donné P. Dériver la fonction $y = f(x)$ revient donc à déterminer la pente de la tangente à la courbe au point P. Après quoi, S. Thiry revient dans le cadre analytique initial et y détermine l'expression de la dérivée y' en employant la règle de la chaîne (vue antérieurement dans le chapitre). L'énoncé du théorème suit cette explication.

Interprétation

La dérivée d'une fonction d'une variable définie implicitement est associée à la pente en un point d'une courbe de niveau.

Généralisation

En traitant tour à tour les fonctions à $1, 2$ puis n variables définies implicitement, l'approche de la dérivation implicite présentée dans cet ouvrage se veut évolutive car le raisonnement établi pour exprimer la formule de dérivation implicite des fonctions du type $y = f(x)$ sert de base aux généralisations à effectuer dans les deux autres situations.

Visée

Tout au long de cette section, l'auteur évolue uniquement dans un contexte mathématique. Le discours tenu par cette dernière est principalement explicatif.

Cadre(s) et registre(s) employé(s)

La stratégie favorisée par l'auteur consiste à confronter le cadre de l'analyse au registre des représentations graphiques. Cela permet aux étudiants de mieux percevoir les idées et associations développées.

4.2.2 En sciences mathématiques et physiques

Manuel de J. Mawhin (1992)

Le syllabus qui nous préoccupe à présent a été rédigé pour les étudiants de candidatures en sciences mathématiques et physiques de l'UCL. Le cinquième chapitre de ce manuel nous intéresse dans le cadre de nos recherches car il traite les fonctions implicites. Composé de onze sections, des sujets comme les limites infinies et les points d'accumulation, le critère de Cauchy, les itérées d'une application ou le théorème des fonctions contractantes y sont tout d'abord abordés. L'existence et la régularité des fonctions implicites font respectivement l'objet des quatrième et cinquième sections du chapitre. Les fonctions réciproques, le théorème de l'application intérieure ainsi que les extrémants liés en constituent les derniers points théoriques. L'analyse qui suit dépeint les onze pages du syllabus dédiées à l'existence et la régularité des fonctions implicites. L'extrait que nous avons consulté se trouve dans l'annexe A.4 de ce travail.

Description du manuel

Le manuel de J. Mawhin scinde l'étude des fonctions implicites en deux sections distinctes. La première envisage le théorème assurant leur existence; la seconde, celui permettant d'obtenir la formule de dérivation implicite. Nous allons organiser notre travail en procédant comme J. Mawhin et commencer par décrire la section *Fonctions implicites : existence* qui constitue les sept premières pages de l'extrait qui nous intéresse.

Dans cette section, l'auteur commence par motiver l'objet de la théorie des fonctions implicites en expliquant qu'elle a pour but de

> *déterminer des conditions sur une fonction F de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ pour que son graphe*
>
> $$\Phi = \{(x,y) \in \ dom F \ : \ F(x,y) = 0\}$$
>
> *constitue une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (problème global).*
> (Mawhin J., 1992, p.176)

J. Mawhin met ensuite l'accent sur le fait que ce problème global est très difficile à aborder. L'alternative qu'il propose alors à ses étudiants est de déterminer les conditions pour que la restriction du graphe Φ au voisinage d'un de ses points devienne une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Trois exemples, ayant pour objectif de donner sens à ce problème local des fonctions implicites et de permettre aux étudiants de comprendre intuitivement les conditions à mettre en place pour le résoudre, sont alors introduits. L'auteur les travaille dans le cadre de l'analyse en manipulant les représentations analytiques des objets qui y sont traités.

Exemple 1

Le premier exemple traite une application affine $F(x,y) = ax + by + c$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'auteur montre de manière analytique que le graphe Φ de cette application est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si à chacun de ses éléments $x \in \mathbb{R}$ correspond au plus un élément $y \in \mathbb{R}$ tel que $ax + by + c = 0$ ou encore, si l'équation linéaire en y, $by = -ax - c$ admet au plus une solution. L'auteur formule ensuite cette condition de la manière suivante :

> [...] *Ce sera le cas si et seulement si la valeur de la dérivée partielle de $F(x,y)$ par rapport à y*[16] *est différente de zéro.*
> (Mawhin J., 1992, p.177)

Exemple 2

Le deuxième exemple étudie l'application non linéaire $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ définie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'auteur met tout d'abord en évidence le fait que le graphe Φ de cette application n'est pas un graphe fonctionnel sur son domaine de définition. Il explique ensuite analytiquement comment faire pour que, sur un certain intervalle, ce graphe soit celui d'une fonction (voir Mawhin J., 1992, p.177) et finit en concluant :

16. La dérivée partielle de $F(x,y)$ par rapport à y est notée $D_2\, F(x,y)$ dans le manuel.

[...] *Notons que, pour chaque* $(x,y) \in I\!R \times I\!R$, $D_2 F(x,y) = 2y$ *et dès lors que la restriction de* Φ *est une fonction sur un voisinage convenable des points* (x,y) *tels que* $D_2 F(x,y) \neq 0$ *et n'est une fonction sur aucun voisinage des points* (x,y) *tels que* $D_2 F(x,y) = 0$.
(Mawhin J., 1992, p.177)

Afin d'éviter toute confusion chez les étudiants qui pourraient penser que la condition $D_2 F(x,y) \neq 0$ est nécessaire et suffisante pour que la restriction de Φ à un voisinage d'un de ses points (x,y) soit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'auteur développe un troisième et dernier exemple.

Exemple 3

En développant l'application $F(x,y) = y^3 - x$, l'auteur montre qu'au point $(0,0)$, la condition $D_2 F(x,y) \neq 0$ n'est pas nécessaire. En effet, le graphe de F est celui de l'application $f(x) = x^{1/3}$.

Ces quelques situations ont servi à contextualiser le problème des fonctions implicites. L'étape suivante consiste à démontrer le théorème des fonctions implicites qui est dépeint ici comme un résultat grâce auquel la condition $D_2 F(x,y) \neq 0$ suffit (sous certaines conditions) à ce que la restriction de Φ au voisinage d'un point (x,y) de Φ soit une fonction.

La majorité des professeurs cités dans ce chapitre axent l'essentiel de leur cours sur les fonctions implicites autour des applications F définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ avant de passer à toute autre généralisation. J. Mawhin, lui, entreprend directement de démontrer une version du théorème d'existence des fonctions implicites traitant les applications F définies de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avant de généraliser son raisonnement aux applications F définies de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$.

Dans le cadre de notre étude, et parce que son travail a suscité notre intérêt, nous allons décrire les principales étapes de la démonstration du théorème d'existence implicite de J. Mawhin dans le cas d'une application F définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ afin d'y repérer les caractéristiques didactiques qui constituent le fil conducteur de ce chapitre. Le second théorème bien qu'intéressant lui aussi, ne sera pas repris dans notre analyse car la construction de sa démonstration est très semblable à celle qui nous préoccupe à présent. Son énoncé et sa démonstration peuvent néanmoins être consultés dans l'annexe A.4 (pp.181-183 du syllabus analysé).

L'énoncé du théorème que nous avons choisi d'analyser s'exprime en les termes suivants

Théorème

Soit F, *une fonction de* $I\!R^n \times I\!R$ *dans* $I\!R$,

$$\Phi = \{(x,y) \in dom F \, : \, F(x,y) = 0\},$$

$(x_0, y_0) \in domF$, $r_0 > 0$, $R_0 > 0$ *tels que*

$$B_2(x_0, r_0) \times]y_0 - R_0, y_0 + R_0[\subset dom F$$

et tels que les conditions suivantes soient satisfaites.

1. *$F(x_0, y_0) = 0$ (c'est-à dire $(x_0, y_0) \in \Phi$) ;*
2. *la fonction $F(., y_0) : x \mapsto F(x, y_0)$ est continue en x_0 ;*
3. *pour chaque $x \in B_2(x_0, r_0)$ et chaque $y \in]y_0 - R_0, y_0 + R_0[$, $D_2 F(x, y)$ existe et la fonction $D_2 F : (x, y) \mapsto D_2 F(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ correspondante est continue en (x_0, y_0) ;*
4. *$D_2 F(x_0, y_0) \neq 0$.*

Alors il existe $r \in]0, r_0[$ et $R \in]0, R_0[$ tels que la restriction f du graphe Φ à $B_2 [x_0, r] \times [y_0 - R, y_0 + R]$ est une application de $B_2 [x_0, r]$ dans $[y_0 - R, y_0 + R]$ continue en x_0. (Mawhin J., 1992, p.178)

Sa démonstration, organisée en deux étapes, a été élaborée à partir de résultats (théorème de Lagrange[17], théorème de Banach) et de notions (application lipschitzienne, continuité d'une fonction) de l'analyse mathématique vus dans des sections et/ou chapitres précédents du manuel.

Etape 1

L'objectif de cette première étape est de démontrer l'existence de $r \in]0, r_0[$ et $R \in]0, R_0[$ tels que, pour chaque $x \in B_2 [x_0, r_0]$, l'équation $F(x, y) = 0$ en l'inconnue y possède une solution unique dans $[y_0 - R, y_0 + R]$. Cette solution sera notée $f(x)$.

Pour y parvenir, l'auteur a construit, pour chaque élément $x \in B_2 [x_0, r_0]$, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont les points fixes y correspondent aux solutions de l'équation $F(x, y) = 0$ et pour laquelle le théorème des applications contractantes (ou théorème du point fixe de Banach) est applicable. Le point fixe (unique) que cette méthode a permis de découvrir, coïncide avec la solution $y = f(x)$ de l'équation $F(x, y) = 0$. Il s'agit de la fonction implicite unique dont le théorème des fonctions implicites assure l'existence.
Cette première étape est elle-même divisée en différents points. Nous en reprenons les idées essentielles dans les lignes qui suivent. L'entièreté du développement se trouve dans les pages 178 à 180 du manuel (consultables dans l'annexe A.4).

1. Construire, pour chaque $(x, y) \in B_2 [x_0, r_0] \times]y_0 - R_0[$, une fonction $G(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, de domaine égal à dom F définie par
$$G(x, y) = -L^{-1} [F(x, y) - Ly]$$
grâce à la dérivée partielle $D_2 F(x_0, y_0)$ (notée L dans la suite du développement).
2. Appliquer le théorème de Lagrange à la fonction $G(x, .) : y \mapsto G(x, y)$ pour $x \in B_2 [x_0, r_0]$. Cela a permis de déterminer une constante θ comprise entre 0 et 1 telle que
$$\begin{aligned} G(x, u) - G(x, v) &= (u - v) D_2 G (x, v + \theta(u - v)) \\ &= \dots \\ &= -(u - v) L^{-1} [D_2 F (x, v + \theta(u - v)) - D_2 F(x_0, y_0)] . \end{aligned}$$

17. Théorème également connu sous le nom de *théorème de la moyenne.*

Les éléments u et v intervenant dans l'expression ci-dessus appartiennent tous deux à l'intervalle $]y_0 - R_0, y_0 + R_0[$.

3. Se servir de l'hypothèse 3 [18] du théorème pour montrer qu'on parvient à l'inégalité

$$|D_2\,F(x,y) - D_2\,F(x_0,y_0)| \leq \frac{L}{2}$$

sur la restriction du domaine de définition de F à

$$B_2\,[x_0, r_1] \times [y_0 - R, y_0 + R]\,.$$

Utiliser le θ retourné par le théorème de Lagrange permet ensuite de montrer que l'application $G(x,.)$ est lipschitzienne, de constante $\frac{1}{2}$ pour chaque $x \in B_2\,[x_0, r_1]$ sur l'intervalle restreint $[y_0 - R, y_0 + R]$. On obtient en effet

$$|G(x,u) - G(x,v)| \leq |u - v| L^{-1} \frac{L}{2} = \frac{1}{2}|u - v|.$$

4. Montrer que $G(x,.)$ est une application du fermé $[y_0 - R, y_0 + R]$ dans lui-même afin de lui appliquer le théorème du point fixe de Banach. Pour y parvenir, l'auteur développe l'inégalité

$$\begin{array}{rcl} |G(x,y) - y_0| & \leq & |G(x,y) - G(x,y_0)| + |G(x,y_0) - y_0| \\ & = & \ldots \\ & \leq & \frac{1}{2}|y - y_0| + |L^{-1}\,F(x,y_0)| \\ & \leq & \frac{R}{2} + |L^{-1}\,F(x,y_0)|. \end{array}$$

à laquelle il applique les hypothèses 1 et 2 du théorème qui vont lui permettent de déduire l'existence d'un $r \in]0, r_1]$ tel que, pour tout $x \in B_2[x_0, r]$

$$|L^{-1}\,F(x,y_0)| \leq \frac{R}{2}.$$

Dès lors, pour chaque $x \in B_2[x_0, r]$ et chaque $y \in [y_0 - R, y_0 + R]$,

$$|G(x,y) - y_0| \leq R$$

Autrement dit, $G(x,.)$ est une application du fermé $[y_0 - R, y_0 + R]$ dans lui-même.

5. Appliquer le théorème de Banach à $G(x,.)$ entraîne finalement, pour chaque élément $x \in B_2\,[x_0, r]$, l'existence d'un point fixe unique $y \in [y_0 - R, y_0 + R]$.

L'auteur est ainsi parvenu, grâce à ce développement, à prouver l'existence d'un unique $y = f(x) \in [y_0 - R, y_0 + R]$, tel que $F\,[x, f(x)] = 0$ [19].

18. Cette hypothèse permet avant tout de montrer l'existence de $r_1 \in]0, r_0[$ et de $R \in]0, R_0[$.
19. En $x = x_0$, le caractère unique de $f(x)$ entraîne que $f(x_0) = y_0$.

Etape 2

La seconde étape de la démonstration consiste à montrer que f est continue en x_0. Pour y parvenir, l'auteur part de l'égalité

$$|f(x) - f(x_0)| = |G[x, f(x)] - G[x_0, f(x_0)]|$$

et prouve, en se basant notamment sur la deuxième hypothèse du théorème et la conclusion de sa première partie, que le second membre tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.

La seconde section analysée est intitulée *Fonctions implicites : régularité*. Elle recouvre quatre pages du syllabus et a pour objectif de *montrer qu'en posant des conditions de continuité ou de dérivabilité plus fortes sur F, il est possible d'obtenir des conditions de continuité ou de dérivabilité plus fortes sur f* (Mawhin J., 1992, p.183). Trois propositions y sont énoncées et démontrées. La première assure la continuité de la fonction f (dont l'existence a été prouvée dans le théorème que nous venons de décrire) en chaque point de $B_2[x_0, r]$. La méthode utilisée pour prouver ce résultat est similaire à celle employée pour démontrer la seconde partie du théorème des fonctions implicites (voir la seconde étape de la description précédente). Nous n'allons donc pas nous attarder davantage sur celle-ci. Les deuxième et troisième propositions se placent dans le contexte précis des applications F définies de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ et étudient la dérivabilité de l'application f résultant de la généralisation du théorème des fonctions implicites. Comme cette généralisation du théorème n'a pas été analysée, nous n'aborderons pas la démonstration de ces deux propositions. Signalons néanmoins que chacune se clôture par une remarque fournissant le raisonnement suivi pour déterminer la formule de dérivation de la fonction f lorsque l'application de départ F est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Enfin, en consultant les démonstrations de ces propositions (annexe A.4, pp. 183-186 du manuel), on s'aperçoit que, comme les autres résultats de l'ouvrage de J. Mawhin, celles-ci ont été réalisées dans le cadre de l'analyse et envisagent les objets mathématiques qui y interviennent au travers du registre analytique.

Principales caractéristiques

Nombre de pages

Onze pages, réparties sur deux sections consécutives, traitent le sujet des fonctions implicites.

Introduction/ Motivation

Dans la première section considérée, l'auteur explique l'utilité de la théorie des fonctions implicites et le point de vue qu'il a adopté pour l'étudier. Afin de contextualiser les différents résultats qui seront démontrés et de permettre aux étudiants de comprendre l'optique dans laquelle il s'est placé, il introduit et résout trois situations mathématiques :

- une application linéaire de la forme $F = ax + by + c$;
- l'équation du cercle unitaire ;
- l'application $F(x, y) = y^3 - x$.

Celles-ci lui permettent d'associer le théorème des fonctions implicites à un résultat grâce auquel la condition portant sur la valeur non nulle de la dérivée partielle par rapport à y

des applications F considérées suffise à ce que la restriction de leur graphe soit celui d'une fonction.

La seconde section travaillée envisage la continuité et la dérivabilité de la fonction implicite f. Aucun exemple mathématique ne l'introduit. L'auteur explique directement l'objectif qu'il souhaite y atteindre.

Enoncé(s)

Le théorème assurant l'existence et l'unicité de la fonction implicite f lorsque F est une application définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi que sa généralisation au cas où F est définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ sont abordés dans la section *Fonctions implicites : existence.*
Trois propositions font l'objet de la section *Fonctions implicites : régularité.* La première assure la continuité de la fonction implicite f, partout sur son domaine de définition, lorsque F est une application définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les deux autres propositions abordent la dérivabilité de la fonction f ; l'une en un point x_0 de son domaine de définition, l'autre en tout point de celui-ci. Ces deux propositions considèrent le cas général d'une application F définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$.

Démonstration

Même si, dans le cadre de notre travail, nous n'avons analysé que la preuve du théorème d'existence et d'unicité des fonctions implicites pour une application F définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, chacun des résultats évoqués dans le point précédent est démontré par J. Mawhin.
La démonstration sur laquelle nous nous sommes penchés a été élaborée en deux étapes :

- la première consiste à démontrer que l'équation $F(x, y) = 0$ en l'inconnue y, possède une seule solution $y = f(x)$ dans un fermé du type $[y_0 - R, y_0 + R]$;
- la seconde consiste à vérifier la continuité de la fonction f en un point x_0.

Pour démontrer ce résultat, l'auteur utilise des résultats de l'analyse mathématique comme le théorème de Banach et le théorème de Lagrange. Il emploie également les notions d'application lipschitzienne, de continuité et de dérivabilité d'une fonction en un point,...

Interprétation

Aucune interprétation graphique ou géométrique n'est envisagée dans le cours de J. Mawhin.

Généralisation

Les applications F définies de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont considérées comme le cas de base de l'étude réalisée dans ce syllabus. La généralisation envisagée traite les applications F définies de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. Les équations du type $F(x, y) = 0$ définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont quant à elles perçues comme des cas particuliers des résultats mis en place.

Type de démonstration

Les informations dégagées au travers de notre description nous permettent de dire que la démonstration du théorème des fonctions implicites rédigée par J. Mawhin possède davantage les caractéristiques d'une preuve que celles d'une argumentation. En effet, celle-ci qui est constituée de deux étapes importantes, suit un raisonnement logique et rigoureux. Les différents points de ces deux étapes résultent de notions (application lipschitzienne, continuité et dérivabilité d'une fonction en un point,...) et de résultats (théorème de Lagrange, théorème de Banach) de l'analyse mathématique. Leur agencement a permis à J. Mawhin d'aboutir à la thèse du théorème. Les propositions que nous n'avons pas analysées ont été élaborées dans le même ordre d'idées.

Fonction de la démonstration

Nous pensons que la preuve proposée par J. Mawhin a une visée vérificative. Le raisonnement élaboré par l'auteur pour démontrer la thèse est empreint de beaucoup de rigueur, de formalisme et les développements mathématiques y occupent une place importante. Quelques explications légitimant le passage d'un point à l'autre de la démonstration sont apportées mais selon nous, le principal objectif de J. Mawhin est de justifier la validité du théorème des fonctions implicites auprès de ses étudiants. L'explication de ce résultat passe en second lieu. Cette logique transparaît tant dans la preuve que nous avons détaillée que dans celles que nous nous sommes contentés de citer.

Cadre(s) et registre(s) employé(s)

Dans son syllabus, J. Mawhin travaille essentiellement dans le cadre de l'analyse. En effet, les démonstrations qu'il présente sont construites sur base de résultats et notions connus de l'analyse. Nous avons également pu constater qu'il privilégie le registre analytique : les objets mathématiques rencontrés étant décrits au travers de leur expression analytique. De plus, nulle mention n'est faite à une quelconque interprétation graphique, à une figure géométrique ou à une expression numérique.

Manuel de J.-P. Schneiders (2007)

Rédigé pour des étudiants de 3ème bachelier en sciences mathématiques, ce syllabus est constitué de trois chapitres intitulés *Systèmes d'équations de classe C_k ($k \geq 1$)*, *Systèmes différentiels normaux du premier ordre* et *Transformation de Laplace.*

La description réalisée dans les pages qui suivent porte sur la première section du premier de ces chapitres. Treize pages y sont consacrées à ce que nous appelons dans ce mémoire le théorème des fonctions implicites. En effet, nous avons pu constater que les dénominations employées diffèrent entre notre travail et le syllabus de J.-P. Schneiders. Dans la section que nous considérons, l'auteur n'évoque jamais le nom de ce théorème et ne définit pas non plus le terme « fonction implicite ». Les fonctions qu'il étudie sont seulement présentées comme des équations à deux inconnues dont il faut assurer l'existence, la continuité, l'unicité et la dérivabilité de la solution, notée φ. Les différentes caractéristiques de cette fonction solution font l'objet d'une proposition vue comme le cas de base de ce que l'auteur nomme plus tard théorème des fonctions implicites. Ce dernier résultat consiste donc en une généralisation de la proposition citée ci-dessus au cas d'un système d'équations indépendantes à plusieurs inconnues. Notre analyse se limitera à l'introduction, la démonstration et l'application de la proposition relative au cas des équations de deux variables.

Description du manuel

Les premières lignes de l'extrait analysé introduisent l'objectif du chapitre, à savoir : *l'étude de systèmes d'équations du type*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots x_n) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f_1, \dots, f_m$ *sont des fonctions réelles de classe* C_k $(k \geq 1)$ *sur un ouvert* Ω *de* $I\!R^n$.
(Schneiders J.-P., 2007, p.1)

Pour atteindre cet objectif, la démarche employée par l'auteur se veut progressive et traite tout d'abord le cas d'une équation à deux inconnues $f(x, y) = 0$ avant d'étendre les résultats obtenus au cas général de systèmes d'équations similaires au système (4.1). La description de la section intermédiaire sur la résolution d'équations de deux inconnues nous importe tout particulièrement dans la rédaction de notre analyse.

Dans ce chapitre, la principale préoccupation de l'auteur est de montrer que la résolution de toute équation à deux inconnues est envisageable sous réserve de certaines conditions. Pour sensibiliser les étudiants à la complexité du problème et leur montrer la diversité des solutions qu'il est possible d'obtenir, J.-P. Schneiders commence par présenter des exemples traduisant différentes situations qu'il est possible de rencontrer en travaillant dans deux registres de représentation sémiotique différents. Deux de ces exemples sont illustrés ci-dessous, les autres se retrouvent dans l'annexe A.5.

Exemple 1

Posons

$$f(x, y) = x^2 - y$$

pour tout $(x, y) \in I\!R^2$. *Dans ce cas,*

$$\{(x, y) \in I\!R^2 \ : \ f(x, y) = 0\} = \{(x, x^2) \ : \ x \in I\!R\}$$

peut être représenté par :

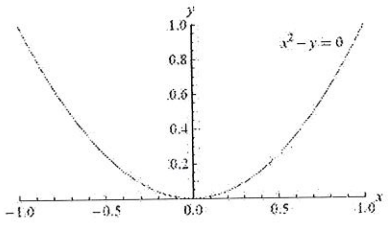


FIGURE 4.4 – Représentation graphique de la fonction $f(x, y) = x^2 - y$ [26].

Deux registres différents permettent d'identifier l'ensemble des racines (ou ensemble des zéros) de $f(x, y) = x^2 - y$

- le registre analytique le présente au travers de sa définition mathématique ;
- le registre graphique l'associe à la parabole d'équation $x^2 - y = 0$.

Exemple 2

Posons

$$f(x, y) = x - y^2$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. Dans ce cas,*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x, y) = 0\} = \{(y^2, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$$

peut se représenter par :

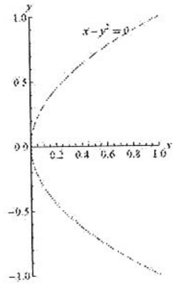


FIGURE 4.5 – Représentation graphique de $f(x, y) = x - y^2$ [26].

Deux registres différents permettent d'identifier l'ensemble des racines (ou ensemble des zéros) de $x - y^2 = 0$:

- le registre analytique le présente au travers de sa définition mathématique ;
- le registre graphique le visualise au travers des points du graphe de $x - y^2 = 0$.

Ensuite, l'auteur se replace dans un contexte théorique pour citer les conditions qui permettent d'envisager l'étude de

$$\{(x, y) \in \Omega \ : \ f(x, y) = 0\}$$

et précise que celle-ci n'est concevable qu'au niveau local.

Sur base des considérations mises en place jusqu'alors, le point suivant démontre une proposition (Proposition 1.2.1. du syllabus de J.-P. Schneiders) assurant l'existence, la continuité et l'unicité de la solution locale φ d'une équation $f(x, y) = 0$. Cette même proposition donne la formule de dérivation de la fonction φ.

Avec celle de J. Mawhin, il s'agit de la seule démonstration du théorème des fonctions implicites rencontrée dans le cadre de notre recherche. C'est pourquoi, nous avons entrepris de présenter et analyser ses principales caractéristiques et les outils ayant contribué à sa construction. Pour mener à bien cette analyse, nous allons scinder sa démonstration, qui couvre les pages 7 à 10 du syllabus décrit, en trois parties :

– l'existence et l'unicité de la fonction φ ;

– la continuité de la fonction φ ;

– la dérivabilité de la fonction φ

et nous baser sur la caractérisation établie dans le chapitre 2 de ce travail afin de définir le type de démonstration dont il s'agit, de déterminer sa fonctionnalité et d'identifier le(s) cadre(s) dans le(s)quel(s) elle a été établie ainsi que les registres qu'elle fait intervenir.

Partie 1 : existence et unicité de la fonction φ

[...] *Puisque* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continu sur* Ω, *il existe* $\eta_0 > 0$ *et* $\varepsilon_0 > 0$ *pour lesquels*

$$[x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$$

est une partie de Ω *sur laquelle* $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$. *Il en résulte que* $f(x, y)$ *est strictement croissante en* y *pour tout* $x \in [x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$. *Comme* $f(x_0, y_0) = 0$, *on en tire que*

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0 \quad \textit{et} \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0.$$

En utilisant la continuité de $f(x_0, y_0 - \varepsilon_0)$ *et* $f(x_0, y_0 + \varepsilon_0)$ *en* x, *on voit que, quitte à diminuer* η_0, *on peut supposer que*

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0 \quad \textit{et} \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

pour tout $x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$.

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on voit que l'équation $f(x, y) = 0$ *possède une et une seule solution* y *dans* $]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[$ *pour tout* x *fixé dans* $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$. *Il s'ensuit qu'il existe une unique fonction*

$$\varphi \; : \;]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\mapsto]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[$$

pour laquelle

$$\{(x, y) \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\times]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[: f(x, y) = 0\}$$
$$= \{(x, \varphi(x)) : x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\}.$$

Remarque : dans la première partie de cette démonstration, les idées ont été mises en place en utilisant certaines hypothèses intervenant dans l'énoncé de la proposition et un résultat de l'analyse mathématique. Hormis quelques éléments que nous allons mettre en évidence, la structure des idées développées est formulée de façon claire et précise. C'est donc en utilisant le fait que la fonction $f(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}_1$ sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ qu'il a été possible de déterminer un voisinage du point (x_0, y_0) sur Ω et d'en déduire la croissance stricte de $f(x, y)$ en y pour tout élément de $[x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$. Ensuite, cette nouvelle caractéristique de la fonction $f(x, y)$ associée à l'hypothèse $f(x_0, y_0) = 0$ a permis d'obtenir le signe de la fonction f autour du point (x_0, y_0) :

$$f(x_0, y_0 - \eta_0) < 0 \quad \text{et} \quad f(x_0, y_0 + \eta_0)$$

L'argument [...] *quitte à diminuer* η_0*, on peut supposer que* [...] permet quant à lui de franchir un pas supplémentaire dans le raisonnement en montrant que

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0 \quad \text{et} \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

pour tout $x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$. La conclusion de ce premier point de la démonstration est obtenue à partir du théorème des valeurs intermédiaires.

Partie 2 : continuité de la fonction φ

[...] *Pour cela, fixons* $x_1 \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ *et posons* $y_1 = \varphi(x_1)$*. Fixons également* $\varepsilon_1 > 0$ *tel que*

$$]y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1[\subset]y_0 - \varepsilon_0, y_+ \varepsilon_0[.$$

En remplaçant x_0 *par* x_1 *et* ε_0 *par* ε_1 *dans le raisonnement précédent, on voit directement qu'il existe* $\eta_1 > 0$ *tel que*

$$]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[\subset]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$$

et pour lequel

$$\varphi(]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[) \subset]y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1[.$$

Remarque : le raisonnement suivi pour assurer la continuité de la fonction φ est un raisonnement déductif et similaire à celui décrit dans la première partie de la démonstration.

Partie 3 : dérivabilité de la fonction φ

[...] *Fixons à nouveau* $x_1 \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ *et posons à nouveau* $y_1 = \varphi(x_1)$*. Comme* f *est de classe* C_1 *sur* Ω*, le théorème des accroissements finis nous dit que pour tout* (x, y) *suffisamment voisin de* (x_1, y_1)*, il existe* $\theta \in]0, 1[$ *tel que*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_1,y_1) + (x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + \theta(x - x_1), y_1 + \theta(y - y_1)) \\ &+ (y - y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + \theta(x - x_1), y_1 + \theta(y - y_1)) . \end{aligned}$$

On en tire que pour x *suffisamment voisin de* x_1*, il existe* $\theta \in]0, 1[$ *tel que*

$$\begin{aligned} 0 &= (x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + \theta(x - x_1), \varphi(x_1) + \theta(\varphi(x) - \varphi(x_1))) \\ &+ (\varphi(x) - \varphi(x_1))\frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + \theta(x - x_1), \varphi(x_1) + \theta(\varphi(x) - \varphi(x_1))) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x - x_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}((x_1 + \theta(x - x_1), \varphi(x_1) + \theta(\varphi(x) - \varphi(x_1)))}{\frac{\partial f}{\partial y}((x_1 + \theta(x - x_1), \varphi(x_1) + \theta(\varphi(x) - \varphi(x_1)))}$$

Comme $\varphi(x) \to \varphi(x_1)$ *si* $x \to x_1$*, on en tire que*

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, \varphi(x_1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \varphi(x_1))}$$

Pour conclure, il suffit alors de tenir compte de la continuité des fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \varphi$$

et du fait que $\frac{\partial f}{\partial y}$ *ne s'annule pas sur* $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\times]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[$.

Remarque : dans cette dernière partie, on remarque à nouveau que la conclusion est obtenue à partir de résultats et propriétés de l'analyse mathématique. En effet, le théorème des accroissements finis autour d'un point (x, y) suffisamment proche de (x_1, y_1) est utilisé pour déterminer un développement de la fonction $f(x, y)$ en termes de ses dérivées partielles et de la fonction φ. Cette expression permet ensuite d'obtenir le rapport

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x - x_1} \tag{4.2}$$

à partir duquel on peut déduire la dérivée de la fonction φ. L'obtention de cette dernière étape résulte du comportement limite de la fonction $\varphi(x)$ au voisinage du point x_1 autorisant le passage de (4.2) à la dérivée $\varphi'(x)$ de la fonction φ.

La section se termine par une application de cette proposition au cas concret de l'équation de Kepler

$$E - e \sin E = M$$

régissant le mouvement de notre planète.

Principales caractéristiques

Nombre de pages

Les treize premières pages du syllabus abordent l'étude des équations à deux inconnues (le terme fonction d'une variable définie implicitement n'est employé à aucun moment).

Introduction/ Motivation

L'auteur introduit le chapitre en décrivant le principal objectif qui y est poursuivi :

l'étude de systèmes d'équations du type

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_m(x_1, \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

où $f_1, \dots, f_m$ *sont des fonctions réelles de classe* C_k $(k \geq 1)$ *sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$.

Il motive ensuite cette étude au travers d'exemples mathématiques montrant que l'ensemble des solutions d'une équation du type $f(x, y) = 0$ peut prendre des formes très variées même si les fonctions traitées sont de classe $\mathcal{C}_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. L'auteur explique également que, comme ces fonctions admettent une approximation affine en chaque point de leur domaine de différentiabilité, leur étude locale est envisageable sous certaines conditions.

Enoncé(s)

Le principal résultat des pages que nous venons de décrire présente les conditions sous lesquelles l'étude des équations du type $f(x, y) = 0$ est envisageable. Ce résultat assure l'existence, l'unicité et la continuité de la solution φ de telles équations. Il en fournit également l'expression de la dérivée.

Démonstration

Cette proposition est démontrée.

Interprétation

Aucune interprétation n'est donnée.

Généralisation

Deux généralisations du théorème sont proposées. Celles-ci n'ont pas été traitées dans la description du manuel. Elles abordent respectivement l'étude d'une équation de plusieurs inconnues (dans le manuel, cette proposition est intitulée *théorème des fonctions implicites*) et celle d'un système d'équations indépendantes à plusieurs inconnues.

Type de démonstration

La démonstration de la proposition analysée a pour objectif de prouver et valider ses différentes assertions. Il s'agit d'un raisonnement déductif dans lequel chaque étape fait référence à des définitions (définition de limite), à des propriétés (continuité de f, continuité de la fonction φ,...) ou à d'autres théorèmes (théorème des valeurs intermédiaires, théorème des accroissements finis,...).

Fonction de la démonstration

La preuve qui nous intéresse a une visée vérificative. Les idées y ont été agencées de manière à aboutir aux conclusions désirées et les arguments présentés, qui ont pour but de convaincre, assurent la validité de l'énoncé.

Cadre(s) et registre(s) employé(s)

Le cadre analytique prévaut dans cette partie du manuel. Les exemples développés dans l'introduction du chapitre sont travaillés dans ce cadre et leurs solutions sont présentées dans les registres de représentation analytique et graphique. La preuve que nous avons analysée s'appuie quant à elle entièrement sur des notions et des outils de l'analyse réelle.

J.-J. Strodiot (1997)

Le sixième chapitre du manuel de J.-J. Strodiot s'attarde en détails sur l'analyse des fonctions de plusieurs variables. Il y aborde les dérivées partielles des premier et second ordre, puis la différentiabilité et le principe de dérivation en chaîne. Les fonctions homogènes, le théorème de Taylor, les problèmes d'extrema d'une fonction de plusieurs variables réelles et les fonctions convexes sont ensuite introduits. Le théorème des fonctions implicites couvre quant à lui la dixième section du chapitre qui se clôture par l'étude des problèmes d'optimisation sous contrainte d'égalité. Les onze pages que nous avons analysées sont reprises dans l'annexe A.6.

Description du manuel

La section sur laquelle porte notre description est scindée en trois parties :

- cas d'une équation de deux variables réelles ;
- cas d'une équation de $n+1$ variables réelles ;
- cas des systèmes de p équations à $n+p$ variables réelles

correspondant aux différentes situations que le théorème des fonctions implicites permet de traiter.

La première partie de cette dixième section donne tout d'abord une brève description de la notion de fonction implicite :

> *Certaines fonctions ne sont pas décrites explicitement mais sont définies comme solution d'une équation de plusieurs variables.*
> (Strodiot J.-J., 1997, Ch.6. p.59)

Ensuite, l'auteur introduit le premier type d'équation que le théorème des fonctions implicites permet d'étudier : les équations de deux variables réelles. La définition formelle de la notion de fonction implicite correspondante est alors fournie.

> *Considérons l'équation*
> $$f(x, y) = 0$$
> *où f est une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points (x, y) que vérifie cette équation détermine une courbe de $\mathbb{R}^2$, notée C.*
>
> *L'équation $f(x, y) = 0$ est appelée équation implicite de la courbe C.*
>
> *On appelle fonction implicite définie par l'équation $f(x, y) = 0$ toute fonction ϕ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que*
> $$f(x, \phi(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$
> (Strodiot J.-J., 1997, Ch.6. p.60)

Cette définition est suivie de deux exemples d'équations mettant en évidence les contraintes auxquelles mène l'emploi des fonctions implicites. Comme nous allons le voir, le choix de ces exemples n'est pas anodin puisqu'ils jouent le double rôle d'introduire et illustrer le théorème des fonctions implicites.

Exemple 1

L'auteur propose de considérer l'équation du cercle unitaire centré à l'origine

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{4.3}$$

Au travers d'une rapide résolution analytique et graphique de cet exemple, il tient à montrer que ce type d'équation peut définir une infinité de fonctions implicites.

Exemple 2

Dans cet exemple, l'auteur introduit l'équation

$$x^3 + y^3 - xy - 1 = 0 \tag{4.4}$$

pour montrer que toutes les équations, même si elles admettent au moins une solution, ne permettent pas de l'expliciter.

Sur base des problèmes soulevés, l'auteur entreprend d'introduire le théorème des fonctions implicites. Celui-ci est présenté sans démonstration aux étudiants. Néanmoins, son but est très clairement souligné par J.-J. Strodiot qui rappelle que ce résultat permet de *fournir des conditions pour assurer l'existence, l'unicité et la différentiabilité d'une fonction implicite.*

Pour illustrer les deux assertions du théorème, l'auteur s'appuie à nouveau sur les exemples définis par les équations (4.3) et (4.4). Ces illustrations font l'objet de deux remarques que l'on peut retrouver aux pages 62, 63 et 64 du chapitre décrit. Celles-ci mettent en évidence :

- le caractère local de la fonction ϕ définie par le théorème.

  Remarque : au travers de son travail, l'auteur a voulu montrer que la fonction implicite ne permet pas de caractériser l'entièreté de la courbe. Pour illustrer cette situation, il s'est basé sur l'équation du cercle unitaire (équation (4.3)). Pour la rendre compréhensible à ses étudiants et lui donner tout son sens, l'auteur travaille dans le cadre de l'analyse et emploie les registres des représentations analytique et graphique. Les représentations analytiques ont été utilisées pour effectuer les développements permettant de montrer l'existence de la fonction implicite, les représentations graphiques ont quant à elles servi à visualiser l'expression analytique obtenue;

- le fait que le théorème des fonctions implicites assure l'existence sans pour autant être toujours en mesure d'exprimer analytiquement la fonction implicite trouvée.

  Remarque : cette situation est illustrée à partir de l'équation

  $$f(x, y) = x^3 + y^3 - xy - 1 = 0$$

  dans le cadre de l'analyse. En se basant sur le théorème des fonctions implicites, l'auteur parvient à prouver l'existence de la fonction solution ϕ et à calculer sa dérivée première ϕ'. Ensuite, en utilisant des propriétés générales de l'analyse, il montre comment calculer la dérivée seconde et le développement limité d'ordre deux de la fonction ϕ. Il est également intéressant de souligner que l'auteur n'hésite pas à interpréter les différents éléments calculés dans un registre langagier.

Dans le même temps, ces illustrations fournissent une méthode de résolution des problèmes où interviennent ce genre de notions.

Deux autres remarques accompagnent le théorème étudié. La première met en évidence le comportement de la fonction ϕ en un point particulier (a, b) ; l'autre, ce qu'il se passe lorsque la dérivée $f'_x(a,b)$ est non nulle. L'auteur ne s'attarde que brièvement sur ces deux points dans un registre analytique.

Pour clore cette première partie de la section, l'auteur énonce et démontre deux propositions découlant du théorème des fonctions implicites.

Proposition 1 : équation de la tangente à une courbe définie implicitement

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$.
Considérons un point (a,b) de D sur la courbe C d'équation

$$f(x,y) = 0$$

où le gradient $\nabla f(a,b)$ ne s'annule pas.
Alors la tangente à la courbe C au point (a,b) a pour équation

$$f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = 0.$$

(Strodiot J.-J., 1997. Ch.6. p.65)

Remarque : la démonstration proposée par J.-J. Strodiot est réalisée dans le cadre de l'analyse et possède des caractéristiques de la preuve et de l'argumentation explicative.
Nous nous apercevons que d'une part, sa conclusion résulte d'un développement faisant appel à différentes hypothèses et aux deux assertions du théorème des fonctions implicites ainsi qu'à la définition de la tangente à une courbe C en un point (a,b). D'autre part, cette démonstration peut être vue comme le résultat d'une succession d'étapes, à la fois en relation les unes avec les autres mais aussi avec la conclusion puisqu'elles expliquent la manière dont celle-ci est obtenue.
Nous avons donc un raisonnement dans lequel chaque pas constitue une hypothèse permettant de construire l'équation de la tangente à une courbe définie implicitement ; ces hypothèses faisant référence à l'énoncé du théorème des fonctions implicites.

Proposition 2 : interprétation géométrique du gradient

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$.
Considérons un point (a,b) où

$$\nabla f(a,b) \neq 0.$$

Alors le gradient de f au point (a,b) est perpendiculaire à la courbe de niveau de f passant par (a,b)

$$f(x,y) = f(a,b).$$

(Strodiot J.-J., 1997. Ch.6. p.66)

Remarque : nous constatons que la démonstration proposée par J.-J. Strodiot tient davantage de l'argumentation explicative car il s'agit d'un raisonnement évolutif dans lequel chaque étape est en relation avec la conclusion. Nous pouvons également nous apercevoir que des parallèles peuvent être réalisés entre les différents arguments menant à l'obtention de la thèse. C'est ainsi que l'auteur explique la démarche suivie pour obtenir l'interprétation géométrique du gradient $\nabla f(a,b)$.

Le fil conducteur de cette démarche est précisé dès le début de la démonstration ; son but étant de déterminer l'équation de la tangente à la courbe $g(x,y)=0$ définie par

$$f(x,y)-f(a,b)=0.$$

En employant les caractéristiques de la fonction $g(x,y)=0$, l'auteur va pouvoir exprimer l'équation de sa tangente en un point (a,b)

$$f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)=0.$$

De cette relation, ressort la propriété d'orthogonalité entre les vecteurs

$$\nabla f(a,b) \quad \text{et} \quad ((x-a,y-b))$$

qui, une fois transformée, permet de parvenir à la conclusion souhaitée.

Enfin, nous pouvons à nouveau voir qu'une certaine importance est accordée à l'interprétation de cette proposition car l'auteur l'applique à l'ellipse d'équation

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1$$

au point $(1/2,\sqrt{3})$ en utilisant les représentations sémiotiques des registres graphique et analytique, dans le cadre de l'analyse.

Afin de rester dans le contexte de notre cadre expérimental qui exploite essentiellement le théorème des fonctions implicites au cas d'une équation à deux variables réelles, la description des points deux et trois de la section (qui généralisent le théorème aux équations de $n+1$ variables et aux systèmes d'équations) ne sera réalisée que dans les grandes lignes.

Le deuxième point de la section aborde l'étude d'une équation à $n+1$ variables réelles. Le schéma de construction retenu par l'auteur est similaire à celui utilisé au point précédent. Il y définit la notion de fonction implicite à $n+1$ variables réelles et y généralise l'énoncé du théorème des fonctions implicites au cas traité. L'illustration des assertions du résultat repose sur l'équation de la sphère unité centrée à l'origine

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

qui est réalisée dans un cadre analytique, sans aucune interprétation graphique. Enfin, on y énonce et démontre[20] une propriété permettant d'obtenir l'équation du plan tangent à une surface définie implicitement. L'interprétation géométrique du gradient est également donnée. Admise, elle est elle aussi illustrée analytiquement par l'étude de la sphère unité au point $(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$.

La dernière partie de la section est consacrée au cas plus général des systèmes de p équations à $n+p$ inconnues que l'auteur motive au travers de la situation suivante

20. La démonstration proposée est similaire à celle de la propriété permettant d'obtenir l'équation de la tangente à une courbe définie implicitement.

Considérons dans $I\!R^3$ la courbe définie comme intersection des deux surfaces

$$\left\{\begin{array}{l} x - \sin y - \cos z = 0 \\ x + \exp^y + z - 2 = 0 \end{array}\right. \tag{4.5}$$

(Strodiot J.-J., 1997. Ch 6. p.73)

en montrant à ses étudiants qu'il est possible de décrire localement la courbe que traduit le système (4.5) par des équations du type

$$\left\{\begin{array}{l} y = \phi_1(x) \\ z = \phi_2(x) \end{array}\right.$$

Pour y parvenir, il commence par définir la notion de fonction implicite liée à ce type de système et généraliser le théorème des fonctions implicites au cas des systèmes de p équations à $n+p$ variables réelles [21].

Plutôt que de démontrer le théorème, l'auteur l'applique à l'exemple introductif (4.5) et en propose une démarche de résolution analytique.

Cette seconde généralisation assimile ainsi le théorème des fonctions implicites à un outil permettant de donner une description locale d'une courbe de $I\!R^n$ à l'aide de $n-1$ équations implicites.

Remarquons enfin que les autres propriétés présentées dans les points précédents ne sont pas mentionnées dans cette dernière partie.

Principales caractéristiques

<u>Nombre de pages</u>

Onze pages du manuel couvrent le thème des fonctions implicites.

<u>Introduction/ Motivation</u>

Le chapitre débute avec la description et la définition du concept de fonction implicite. Celles-ci sont suivies de deux exemples illustrant les contraintes liées à ce concept :

- l'équation du cercle unitaire à partir de laquelle on peut définir une infinité de fonctions implicites ;
- la relation $x^3 + y^3 - xy - 1 = 0$ qui montre que toutes les équations, même si elles admettent au moins une solution ne permettent pas de l'expliciter analytiquement.

<u>Enoncé(s)</u>

Le théorème proposé dans le syllabus de J.-J. Strodiot est divisé en deux assertions distinctes. La première assure l'existence et l'unicité de la fonction implicite, notée ϕ. La seconde met en évidence la formule permettant de dériver la fonction ϕ.

21. Il est à noter que cette généralisation ne fournit pas la formule de dérivation implicite associée au cas traité.

Démonstration

Aucune démonstration du théorème n'est présentée. Néanmoins, l'auteur applique celui-ci aux exemples introductifs afin de souligner son caractère local et le fait qu'il s'agit d'un résultat assurant l'existence de la fonction implicite ϕ sans pour autant toujours être en mesure de l'exprimer analytiquement. Deux autres remarques relatives au comportement de la fonction implicite en un point donné (a, b) et à l'« adaptation » du théorème au cas où la dérivée première $f'_x(a, b)$ est nulle, sont aussi mises en évidence.
Par contre, l'auteur énonce et démontre deux propositions découlant du théorème des fonctions implicites :

Proposition 1 : équation de la tangente à une courbe définie implicitement ;

Proposition 2 : interprétation géométrique du gradient.

Interprétation

Au travers des deux propositions citées ci-dessus, l'auteur met l'accent sur le fait que :

- la valeur de la dérivée ϕ' correspond à la pente de la tangente à la courbe de la fonction implicite ;
- le gradient de f en un point (a, b) est un vecteur perpendiculaire à la courbe de niveau de f passant par (a, b).

Généralisation

Deux généralisations du théorème des fonctions implicites sont présentées. La première aborde l'étude d'une équation à $n + 1$ variables réelles et la seconde, celle des systèmes de p équations à $n + p$ inconnues.

Visée

Au vu des nombreuses remarques et illustrations faites dans notre description, il semble que le but poursuivi par l'auteur soit davantage axé sur la manipulation des fonctions implicites et la compréhension du théorème des fonctions implicites que sur sa démonstration. Nous pouvons donc dire que l'extrait analysé poursuit un objectif explicatif. Une certaine importance semble également être accordée au sens et à l'interprétation des notions abordées tout au long de cette section. Le théorème des fonctions implicites peut dès lors être perçu comme un élément central autour duquel gravitent ces notions, remarques et illustrations mais aussi à partir duquel certaines applications, constatations et propriétés ont pu voir le jour, dans un souci de faire prendre conscience aux étudiants de la portée de ce résultat et du contexte dans lequel on l'utilise.

Cadre(s) et registre(s) employé(s)

L'extrait consulté a été rédigé dans le cadre analytique. L'auteur y a privilégié deux registres de représentations sémiotiques :

- le registre analytique dans lequel la majorité des développements ont été réalisés ;
- le registre graphique offrant un support visuel aux étudiants.

Nous avons également pu constater que certaines interprétations et conclusions d'exercices ont été données à l'aide du seul registre langagier.

4.2.3 En sciences appliquées (ingénieur civil)

E. Delhez (2005)

La première partie du cours d'analyse mathématique des étudiants de première année de bachelier en sciences de l'ingénieur de l'ULg est articulée autour de trois thèmes :

- les fonctions d'une variable réelle ;
- les équations différentielles ;
- les fonctions de plusieurs variables réelles

constituant chacun un chapitre du syllabus consulté.

Dans le cadre de notre étude, notre attention s'est dirigée vers le chapitre relatif aux fonctions de plusieurs variables réelles. Celui-ci est découpé en treize sections théoriques dans lesquelles les étudiants sont amenés à étudier les principaux concepts de l'analyse à plusieurs variables comme : les espaces métriques et euclidiens, les notions de limite et de continuité, les fonctions différentiables, la dérivation des fonctions composées, le gradient et la dérivée directionnelle, la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, la formule de Taylor, les fonctions implicites, les changements de variables, les extremas de fonctions à plusieurs variables ainsi que l'introduction à l'analyse vectorielle. Le chapitre s'achève sur une série d'une cinquantaine d'exercices corrigés illustrant les sujets préalablement abordés.

Description du manuel

Nous allons à présent considérer les quatre pages du manuel qui traitent du concept de fonction implicite. Celles-ci se retrouvent dans l'annexe A.7 du présent travail.

Dès les premières lignes de la section, l'auteur donne une définition de ce concept :

> *Une équation du type*
> $$f(x, y) = 0 \tag{4.6}$$
> *définit implicitement une fonction $y(x)$ sur un sous-ensemble $E \subset I\!R$ si $\forall x \in E$, l'équation (4.6) possède une solution y unique.*
> (Delhez E., 2005, p.260)

Ensuite, en appliquant la méthode de dérivation spécifique aux fonctions de plusieurs variables à l'équation $f(x, y) = 0$, l'auteur guide assez naturellement ses étudiants vers l'expression de la dérivée implicite $y'(x)$

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))} \quad \text{si} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0.$$

(Delhez E., 2005, p.261)

L'obtention de cette formule est, à ce stade, basée sur les seules connaissances des étudiants en matière de calcul différentiel. L'objectif de l'enseignant est donc d'identifier les balises assurant l'existence des fonctions de la même famille que $y(x)$, leur continuité et leur dérivabilité. Pour y parvenir, il énonce (sans démontrer) le théorème d'existence des fonctions implicites. L'énoncé proposé dans l'ouvrage correspond à la généralisation au cas d'un système de n équations à $m+n$ inconnues en un point (a,b) de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Cette démarche peut paraître déroutante car la situation ayant mené à l'énoncé cité traitait le cas d'une unique fonction définie de manière implicite. Cependant, on peut tout à fait imaginer qu'au cours de son exposé, E. Delhez ait détaillé les étapes intermédiaires (cas d'une seule fonction implicite à une puis m variables indépendantes), habituellement rencontrées et permettant d'expliquer le résultat final. Soulignons également que l'auteur met en évidence deux remarques assez importantes sur le théorème des fonctions implicites. La première concerne le caractère local du résultat. La seconde quant à elle porte sur l'hypothèse de non-annulation du Jacobien

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}\right|_{(x,y)=(a,b)} \neq 0.$$

E. Delhez montre que cette hypothèse apparaît naturellement quand on essaye d'évaluer les dérivées partielles des fonctions définies implicitement. En effet,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx_j} f_i(x,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x,\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) \end{aligned}$$

pour $i=1,\ldots,n$ *et* $j=1,\ldots,m$.
Cette relation peut encore prendre la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{f_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

dans laquelle les dérivées partielles sont évaluées en (a,b) ou a selon leur nature. Ce système possède ainsi une solution unique pour autant que

$$\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\right|_{(a,b)} \neq 0. \tag{4.7}$$

En utilisant la règle de Cramer, on peut alors exprimer les solutions sous la forme

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right)(a) = -\frac{\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k,\ldots,f_n)}{\partial(y_1,\ldots,x_j,\ldots,y_n)}\right|_{(a,b)}}{\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k,\ldots,f_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_k,\ldots,y_n)}\right|_{(a,b)}}.$$

(Delhez E., 2005, pp.263-264)

Au travers de ce développement, nous pouvons nous apercevoir que l'auteur se sert de l'expression (4.7) pour obtenir l'expression de la dérivée d'une fonction à n variables définie implicitement.

Le dernier point de la section consiste à illustrer le théorème d'existence implicite. Deux cas sont présentés :

Cas 1

Le système

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

à partir duquel il faut définir deux fonctions $u(x, y, z)$ et $v(x, y, z)$ au voisinage d'un point donné.
(Delhez E., 2005, p.262)

Cas 2

Le second problème présenté quant à lui à la page 264 du manuel, est une application plus concrète puisqu'il s'agit de l'équation d'état d'un gaz en thermodynamique

$$f(P, V, T) = 0$$

dans laquelle les variables P, V et T désignent respectivement la pression, le volume et la température d'un gaz.

La résolution de ces deux situations figure dans l'annexe A.7.

Cependant, on remarque que très peu d'importance est attachée aux exercices portant sur le théorème des fonctions implicites car un seul exercice porte sur cette matière dans la liste d'exercices clôturant le chapitre.

Principales caratéristiques

Nombre de pages

Quatre pages sont consacrées à l'étude des fonctions implicites dans ce syllabus.

Introduction/ Motivation

Le syllabus ne présente aucune situation introductive. Il définit directement le concept de fonction implicite et explique comment déterminer l'expression de la dérivée implicite $y'(x)$ grâce aux seules connaissances des étudiants en matière de calcul différentiel.

Enoncé(s)

L'énoncé proposé est celui assurant l'existence des fonctions implicites dans le cas d'un système de n équations à $m + n$ inconnues, en un point (a, b) de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Démonstration

Le théorème d'existence n'est pas démontré. Seules deux remarques (à propos du caractère local du résultat et de l'hypothèse de non-annulation du jacobien) ont été relevées.

Interprétation

Les notions intervenant dans la section décrite ne font l'objet d'aucune interprétation.

Généralisation

L'énoncé présenté traite le cas le plus général des systèmes constitués de n équations à $m + n$ inconnues.

Visée

La principale constatation ressortant de la description réalisée est le fait que le cours de E. Delhez est construit de manière à expliquer aux étudiants les notions qui y sont mises en jeu, sans pour autant chercher à les démontrer de manière formelle. Le théorème d'existence des fonctions implicites est de ce fait admis et est davantage perçu comme un outil de résolution de certains systèmes d'équations. Nous avons également pu voir que même si la formule de dérivation implicite ne fait l'objet d'aucune proposition, elle occupe une place assez importante dans la section considérée. En effet, elle est évoquée dans la partie introductive (cas d'une fonction d'une variable définie implicitement) ainsi qu'à la fin (cas général des fonctions de n variables) des pages que nous avons décrites. La différence entre ces deux situations réside dans la complexité des procédés utilisés pour obtenir la formule de dérivation souhaitée ; l'un reposant sur la dérivation des fonctions de deux variables, l'autre sur la principale hypothèse du théorème d'existence des fonctions implicites.

Cadre(s) et registre(s) employé(s)

L'auteur a uniquement travaillé dans le cadre de l'analyse et a utilisé le système de représentations qui lui est lié.

4.3 Conclusions

L'essentiel du travail réalisé dans ce chapitre consistait à caractériser le savoir à enseigner relatif au théorème des fonctions implicites dans différentes institutions universitaires. Nous avons ainsi voulu voir de quelle(s) manière(s) celui-ci peut être diffusé. Pour y parvenir, nous avons décidé d'analyser les supports de cours d'étudiants en mathématiques, en physique, en économie, en gestion ou encore, en sciences de l'ingénieur. Les outils de la didactique des mathématiques définis dans le deuxième chapitre de ce mémoire nous ont quant à eux permis d'affiner notre étude. Ceux-ci nous ont aidés à nous rendre compte que l'enseignement d'une nouvelle notion ou d'un nouveau résultat peut prendre des directions tout à fait différentes selon la finalité du cursus entrepris, la philosophie de l'enseignant et l'objectif qu'il poursuit, le(s) cadre(s) et le(s) registre(s) utillisés pour présenter l'objet mathématique ou le résultat en jeu aux apprenants. En effet, chaque domaine d'études sur lequel nous nous sommes focalisés aborde la théorie des fonctions implicites dans une optique spécifique. Associée à un outil de résolution de problèmes particuliers chez les uns ou correspondant à un élément participant à l'élaboration de certains résultats chez les autres, nous avons recensé autant de façons de l'aborder que de manuels consultés.

Situé entre les transpositions didactiques externe et interne, le savoir à enseigner à l'université est donc, en grande partie, le propre du professeur chargé de le divulguer. Selon l'institution considérée, nous avons néanmoins vu des tendances générales apparaître. C'est ainsi que, par exemple, nous avons pu distinguer l'enseignement à visée explicative de l'enseignement à visée vérificative. Le premier fait essentiellement l'objet de manuels rédigés par des professeurs voulant que leurs étudiants comprennent le concept de fonction implicite, se rendent compte de son utilité et sachent le manipuler. L'enseignement des fonctions implicites est alors abordé à des fins applicatives, sans pour autant être dépourvu de rigueur. Les interprétations, les illustrations ainsi que les références à d'autres domaines que les mathématiques y sont fréquentes. Certes, les auteurs de tels manuels privilégient le cadre de l'analyse dans leurs développements et les définitions qu'ils fournissent mais, ils n'hésitent pas non plus à changer de cadre ou à employer différents registres de représentation sémiotique (essentiellement les registres analytique et graphique, parfois aussi celui du langage naturel) dès que cela se révèle nécessaire. En outre, aucun de ces auteurs n'a démontré le théorème des fonctions implicites de manière effective : seuls quelques éléments et quelques caractéristiques de sa démonstration sont évoqués chez certains d'entre eux. Nous avons retrouvé ce type d'enseignement dans les cours de mathématiques des étudiants inscrits en sciences économiques et de gestion, en sciences appliquées (ingénieur civil) ainsi que dans le syllabus de J.-J. Strodiot [24], pourtant destiné à des étudiants en mathématiques et en physique. Cela peut sembler moins étonnant lorsque l'on sait que le département de mathématiques des FUNDP est principalement orienté vers les mathématiques appliquées.

> *L'originalité des Mathématiques, c'est d'être à la fois un outil indispensable à de nombreuses disciplines et de constituer une science, avec ses méthodes et ses lois, à laquelle une recherche véritable est associée*[22][...]

A l'inverse, les syllabus des étudiants en mathématiques et en physique de l'UCL et de l'ULg affichent une visée vérificative. Ils sont le fruit de professeurs peut-être plus puristes, moins orientés vers les applications auxquelles mènent les mathématiques. Les raisonnements que nous y avons retrouvés sont réalisés dans le cadre de l'analyse et privilégient le registre de représentation analytique. De plus, ce sont les seuls syllabus où la preuve du théorème des fonctions implicites a réellement été envisagée.

22. Voir le site : `http ://www.fundp.ac.be/sciences/mathematique` (consulté le 11.08.2012).

Chapitre 5

Conceptions préalables au théorème des fonctions implicites

Nous l'avions développé dans le chapitre 2 de ce mémoire : les idées « déjà-là », les conceptions préalables des étudiants à propos d'une nouvelle matière peuvent être déterminantes dans la manière dont ils vont aborder cette dernière. En effet, c'est par le biais de telles conceptions qu'ils vont essayer de comprendre les propos de l'enseignant et interpréter les situations qui leur sont proposées. Issues de l'expérience personnelle des apprenants, de leurs points forts, de leurs faiblesses, de leurs questionnements et de leurs interprétations, mais aussi fortement liées aux pratiques pédagogiques, ces conceptions sont autant à imputer à ceux qui reçoivent le savoir qu'à ceux qui le transmettent. L'apprentissage de toute nouvelle connaissance en est donc tributaire. L'expérience sur laquelle se base ce chapitre, la première que nous avons menée dans le cadre de notre étude, nous a permis d'accéder aux conceptions des étudiants sur les fonctions implicites. L'identification de ces conceptions peut se révéler d'une grande utilité et nous aider à expliquer l'origine de certaines des difficultés rencontrées par ces derniers lorsque leur cursus aborde les fonctions implicites. Pour y parvenir, nous avons proposé à nos étudiants une activité à laquelle ils n'avaient jamais été confrontés : la rédaction d'une *narration de recherche.*

5.1 La narration de recherche

La narration de recherche est une pratique pédagogique ayant vu le jour dans un contexte spécifique et poursuivant des objectifs précis. C'est à la description de ces différentes caractéristiques que cette section s'attelle.

5.1.1 Contexte et origine

Un travail de recherche en didactique, dirigé par le Groupe Géométrie de l'IREM [1] de Montpellier, est à l'origine de cette pratique pédagogique. Ce groupe, constitué d'une douzaine de chercheurs et d'enseignants, a analysé diverses expérimentations basées sur des observations individuelles d'élèves en recherche de solutions à des problèmes mathématiques. Au terme de ces

1. L'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a été fondé en 1977 par G. Audibert.

analyses, ils ont pu constater que de nombreux élèves étaient capables de produire des stratégies de résolution pour le moins surprenantes, innovantes et parfois même assez ingénieuses. Ces observations ont eu pour effet de remettre en question les enseignants concernés quant à leurs propres pratiques pédagogiques. En effet, comment et pourquoi les situations proposées à ces « élèves-cobayes » ont-elles réussi à les motiver ? N'était-ce là que le simple fruit du hasard ou cela résidait-il dans l'intérêt et l'attention portés à chacun d'eux ? De même, comment accéder à cette phase de recherche si intéressante et qui pourtant échappe aux enseignants en temps normal ? Une nouvelle pratique a alors vu le jour dans l'enseignement des mathématiques : la narration de recherche qui *demande aux élèves en situation de recherche, d'être leur propre observateur et de détailler par écrit chaque étape de leur raisonnement* (A. Pourtier, [20]).
En demandant à ses élèves de ne pas se contenter de donner la solution d'un problème mais bien de raconter toutes les étapes de leur recherche, de façon chronologique et avec le plus de précision possible, A. Chevalier (elle aussi issue du Groupe Géométrie de l'IREM) a été la première à réellement introduire cette pratique au sein de ses classes. Après elle, d'autres enseignants ont intégré la narration de recherche à leur mode de travail et ce, dans le primaire, le secondaire et même le supérieur, en France et ailleurs...

5.1.2 Description du dispositif

Le principe de la narration de recherche est de faire travailler les étudiants sur un problème difficile (du moins au premier abord) issu d'un domaine mathématique que l'enseignant souhaite explorer, puis de rédiger un compte-rendu de leur recherche en décrivant toutes les idées, toutes les pistes suivies, y compris celles qui n'ont pas abouti. Divisés en groupes de trois ou quatre, les étudiants sont prévenus que peu d'importance sera attachée à l'obtention du résultat. L'accent porte essentiellement sur la description du raisonnement qu'ils ont suivi. Ne pas trouver ou trouver un résultat faux n'est pas grave. Chacun doit porter son attention sur la recherche proprement dite : comprendre pourquoi telle idée ne sera pas utile, faire des retours en arrière, confronter ses idées avec celles des autres membres du groupe et profiter de cette confrontation pour en faire naître de nouvelles, peut-être plus judicieuses,...
Ce dispositif est généralement réparti sur trois ou quatre séances. Les élèves reçoivent tout d'abord une feuille qui explique son fonctionnement et expose le problème à traiter. Une ou deux séances sont alors consacrées à la recherche. Chaque élève note au brouillon les idées et résultats obtenus par son groupe. Au cours de cette phase, le professeur peut parfois intervenir. Il répond aux questions, fait des suggestions ou encourage certaines initiatives. Le cours suivant est consacré à la rédaction individuelle. Durant cette étape, il est demandé à chaque élève de remettre sa narration au propre, de passer d'une écriture personnelle (outil, langage de recherche) à une écriture plus experte pour communiquer les démarches qu'il a appliquées et les résultats qu'il a obtenus. Enfin, la dernière séance est celle de la correction. L'enseignant y présente des extraits de copies, résume les principales idées, reprend les méthodes qui sont apparues le plus souvent et explique la solution du problème.

5.1.3 Objectifs

La narration de recherche est un outil de communication destiné aux étudiants mais aussi à leur professeur afin que celui-ci puisse accéder aux raisonnements, travaux et productions de chacun. En outre, elle lui donne la possibilité d'engager et faire participer ses classes à des travaux introduisant de nouvelles notions. De plus, *cette méthode permet à l'élève d'expliquer ses recherches et découvertes dans un langage moins codifié et contraignant que le seul langage mathématique* [28]. Même s'il ne parvient pas à la solution du problème, il peut montrer son travail à l'enseignant sans avoir peur d'un jugement négatif car ce sont ses efforts qui importent ici et non l'obtention de bons ou de mauvais résultats comme dans les travaux habituels. Cela doit être profitable à l'apprenant et l'aider à porter un tout autre regard sur ses propres capacités. Le but ultime d'une narration de recherche étant de motiver les classes au travail mathématique, tout dans la présentation de l'exercice doit inciter l'étudiant à se prendre au jeu du chercheur et lui apprendre à extraire de la formation qu'il a reçue les outils indispensables à la résolution de situations plus complexes.

5.2 Conception et description de l'expérience

C'est dans l'idée d'accéder aux conceptions qu'ont les étudiants sur les fonctions implicites que nous avons décidé de leur faire rédiger une narration de recherche. Les lignes qui suivent vous permettront de comprendre comment cette activité a été mise en place.

5.2.1 Contexte de travail

La partie expérimentale de ce mémoire a pu être menée à bien grâce à la collaboration des étudiants des FUNDP inscrits en 1$^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences mathématiques et en 1$^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences physiques au cours des années académiques 2008-2009 et 2009-2010. En tout, ce sont près de 130 étudiants répartis de la manière suivante

- $\text{Math1}_{08/09}$: les 25 étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences mathématiques inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2008-2009 ;
- $\text{Math1}_{09/10}$: les 35 étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences mathématiques inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2009-2010 ;
- $\text{Phy1}_{08/09}$: les 39 étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences physiques inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2008-2009 ;
- $\text{Phy1}_{09/10}$: les 30 étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences physiques inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2009-2010

qui nous ont permis de réaliser l'expérience décrite dans ce chapitre.

5.2.2 Conception de l'expérience

L'élaboration des questions figurant dans l'activité proposée est à attribuer à S. Xhonneux. Ces questions, outre l'apport que nous pouvons leur attribuer dans la réalisation de ce mémoire, ont également permis aux étudiants concernés de manipuler le concept de courbe de niveau (vu au préalable dans leur cours théorique[2]), d'introduire celui de fonction implicite et de tenter de mettre en avant le lien unissant ces deux notions.

2. Voir le chapitre 6 *Différentiabilité des fonctions de plusieurs variables réelles* du syllabus de J.-J. Strodiot [24].

Nous sommes respectivement aux mois de décembre 2008 et décembre 2009 lorsque nous soumettons nos différents publics à la même expérience « narration de recherche ». A ce moment de l'année, le chapitre sur les fonctions implicites n'est pas encore entamé ou vient juste de l'être. Nous espérons alors que les résultats récoltés au cours de la première phase de notre dispositif expérimental nous permettront de déterminer dans quelle mesure les conceptions et les acquis antérieurs des étudiants influent sur leur manière de percevoir la notion de fonction implicite. Pour y parvenir, nous avons demandé aux étudiants de travailler individuellement ou par groupes de 2 à 4 et de nous raconter en détail les différentes étapes de leur recherche, les remarques, les observations ainsi que les stratégies employées pour trouver ou essayer de trouver la réponse aux questions qui leur étaient posées. Finalement, nous avons récolté 67 narrations dont [3]

- 8 du public $\text{Math1}_{08/09}$;
- 14 du public $\text{Phy1}_{08/09}$;
- 32 du public $\text{Math1}_{09/10}$;
- 13 du public $\text{Phy1}_{09/10}$.

Pour des raisons pratiques, nous avons réduit le dispositif à une séance de 2 heures au cours de laquelle nous nous sommes surtout intéressés à la phase de recherche de l'expérimentation menée. A la fin de celle-ci, S. Xhonneux a proposé aux étudiants une correction au tableau des différentes questions de l'activité.

5.2.3 Enoncés proposés aux étudiants

Les étudiants interrogés ont dû résoudre deux exercices au cours de cette activité. Le premier abordait les courbes de niveaux, le second quant à lui portait sur les fonctions implicites et était divisé en deux sous-questions. L'énoncé complet du travail proposé est consultable dans l'annexe B.1 mais se retrouve également dans le section suivante qui consiste en une analyse a priori de la narration que les étudiants ont dû réaliser.

5.3 Analyse a priori

Nous avons décidé, avant de passer à la description proprement dite des résultats de la narration de recherche, d'en proposer une analyse a priori. Celle-ci poursuit le double objectif de familiariser le lecteur aux questions proposées et aux réponses auxquelles elles mènent mais aussi et surtout, d'envisager les éventuelles stratégies de résolution (portant leurs fruits ou non) utilisées par les étudiants durant l'expérience. Cela nous permettra en outre de comparer nos attentes à la réalité de leurs conceptions initiales puisque, rappelons que lorsque cette expérience a été réalisée, les fonctions implicites n'avaient pas encore été introduites.
Nous allons donc considérer chacune des questions proposées, en fournir les principaux éléments de réponse et enfin, énumérer certaines des stratégies auxquelles pourrait avoir recours notre public d'étudiants.

3. Les publics $\text{Math1}_{08/09}$ et $\text{Phy1}_{08/09}$ ont le plus souvent travaillé en petits groupes alors que les publics $\text{Math1}_{09/10}$ et $\text{Phy1}_{09/10}$ ont réalisé des narrations individuelles.

5.3.1 Question 1 : courbes de niveaux

Enoncé

Soit la fonction suivante que l'on écrit $z = F(x, y)$.

$$\begin{array}{rccl} F & : & I\!R^2 & \rightarrow & I\!R \\ & & (x,y) & \rightsquigarrow & F(x,y) = 3x^2y - y^3 \end{array}$$

La représentation graphique d'une fonction à deux variables est une surface qui est définie par l'ensemble des points dont les coordonnées sont $(x, y, F(x, y))$, *avec* $(x, y) \in I\!R^2$. *La figure suivante montre la représentation graphique de la fonction* $F(x, y)$ *définie ci-dessus.*

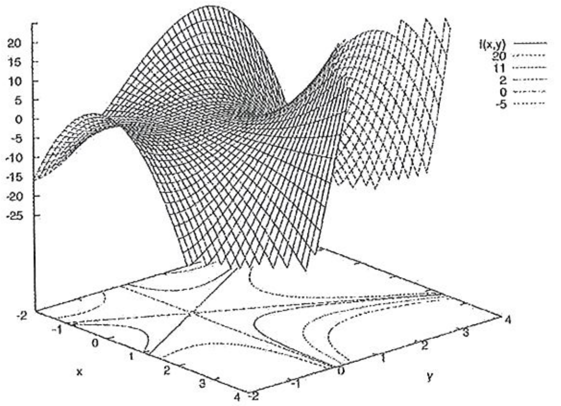


FIG. 1 – $F(x, y) = 3x^2y - y^3$

Les courbes représentées dans le plan Oxy peuvent être définies à partir de la fonction $F(x, y)$ *et sont reprises sur la figure suivante :*

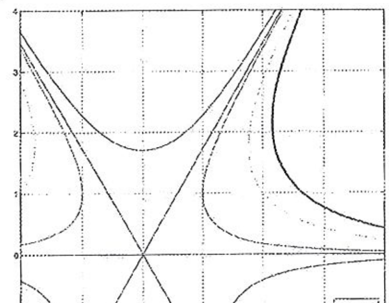


FIG. 2 – Quelques courbes définies à partir de $F(x, y)$

Q.1. Donnez les équations analytiques de toutes les courbes représentées à la figure 2.

Résolution

L'équation de chaque courbe de niveau de la figure 2 correspond à :

- $F(x, y) = -5$ pour la courbe située à un niveau $z = -5$;
- $F(x, y) = 0$ pour la courbe située à un niveau $z = 0$;
- $F(x, y) = 2$ pour la courbe située à un niveau $z = 2$;
- $F(x, y) = 11$ pour la courbe située à un niveau $z = 11$;
- $F(x, y) = 20$ pour la courbe située à un niveau $z = 20$.

où $F(x, y) = 3x^2y - y^3$.

Stratégies de résolution envisageables

Lorsque les étudiants ont réalisé la narration de recherche, ils avaient déjà abordé la notion de courbe de niveau [4]. Ils devaient donc savoir qu'il s'agit d'un moyen de représenter une fonction de plusieurs variables.

Nous avons pensé que les étudiants pourraient adopter deux comportements différents pour répondre à cette première question. Ils pourraient :

- faire le lien entre la représentation graphique de la fonction $F(x, y)$ (figure 1) et celle de ses courbes de niveaux (figure 2) ;
- ne pas mettre ce lien en évidence.

A chacun de ces comportements, pourraient aussi correspondre des stratégies spécifiques pour parvenir à déterminer les équations demandées.

Par exemple, les étudiants ayant fait le lien entre la fonction $F(x, y)$ et ses courbes de niveaux pourraient :

- se souvenir de l'expression analytique $F(x, y) = z$ d'une courbe de niveau et en déduire les équations demandées ;
- ne pas se souvenir de l'expression analytique $F(x, y) = z$ d'une courbe de niveau et dès lors, entamer d'autres procédures pour essayer de parvenir aux équations demandées.
  Ces procédures pourraient alors devenir nombreuses et être spécifiques à presque chacun des groupes considérés. Nous pourrions imaginer par exemple que certains d'entre eux essaieraient de transformer la situation à traiter en un problème d'une variable réelle afin d'isoler y dans chacune des expressions $3x^2y - y^3 = z$ pour l'exprimer en fonction de x et ainsi obtenir les équations analytiques recherchées.

4. Les courbes de niveaux sont étudiées dans le chapitre 6 *Différentiabilité des fonctions de plusieurs variables réelles* du syllabus de J.-J. Strodiot [24].

Les autres, ceux n'ayant fait aucun lien entre la fonction $F(x,y)$ et ses courbes de niveaux, pourraient eux aussi essayer de trouver les équations de ces dernières uniquement à partir de la figure 2 en associant par exemple chacun de ses éléments au graphique d'une fonction particulière.

5.3.2 Question 2 : fonctions implicites

Considérons maintenant l'équation $F(x,y) = 11$. Ce qui importe désormais est l'ensemble des couples (x,y) qui satisfont cette équation. Appelons T l'ensemble de tous ces couples

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2y - y^3 = 11\}.$$

Enoncé de la question Q.2.1.

Ecrivez le plus précisément possible, l'équation de la tangente à la courbe d'équation $F(x,y) = 11$ au(x) point(s) d'abscisse $x = 2$.

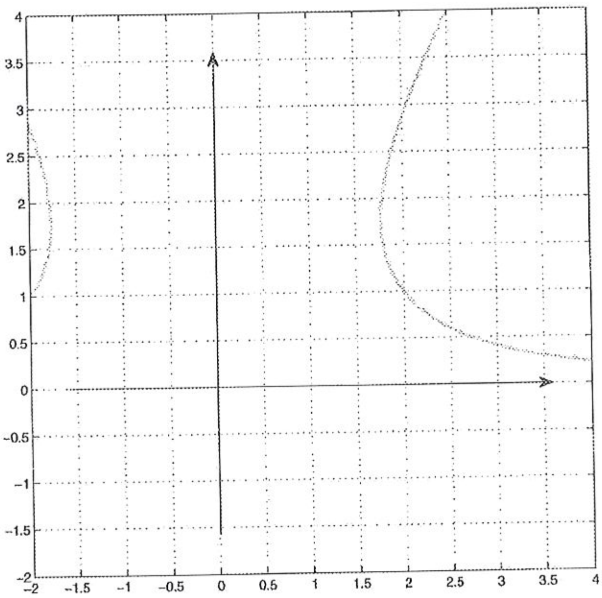


FIG. 3 – $F(x,y) = 11$

Résolution

Le raisonnement qui suit n'aurait pu être établi par les étudiants car ceux-ci ne connaissaient pas l'équation de la tangente en un point d'une courbe définie implicitement. Nous l'avons néanmoins réalisé afin de mettre en avant le type de réponse auquel leurs stratégies personnelles auraient pu les mener.

La tangente en un point (a, b) d'une courbe définie implicitement a pour équation

$$F'_x(a,b)(x-a) + F'_y(a,b)(y-b) = 0 \tag{5.1}$$

Pour résoudre cet exercice, il faut tout d'abord déterminer les images de $F(x, y) = 11$ en l'abscisse $x = 2$. La résolution de l'équation

$$12y - y^3 = 11$$

permet d'obtenir les ordonnées y de chacune de ces images. Nous obtenons ainsi trois points de coordonnées

$$(2,1) \quad \left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right).$$

Il faut également déterminer les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

de la fonction F et les évaluer aux trois points ci-dessus. Ainsi, les dérivées partielles aux points de coordonnées

- $(2, 1)$ valent
$$\frac{\partial F}{\partial x}(2,1) = 12 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(2,1) = 9$$
- $\left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right)$ valent
$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right) = 6\left(-1+\sqrt{45}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right) = 12 - \frac{3\left(1+\sqrt{45}\right)^2}{4}$$
- $\left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right)$ valent
$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right) = -6\left(1+\sqrt{45}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right) = 12 - \frac{3\left(-1-\sqrt{45}\right)^2}{4}$$

Maintenant que nous possédons tous les outils nécessaires à la détermination de l'équation des tangentes à la courbe $F(x, y) = 11$ aux trois points déterminés, explicitons leur expression.

$$\begin{aligned}
T_{(2,1)} &\equiv y = -\tfrac{4}{3}x + \tfrac{11}{3} \\
T_{\left(2,\frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right)} &\equiv 6\left(-1+\sqrt{45}\right)(x-2) + \left(12 - \tfrac{3\left(1+\sqrt{45}\right)^2}{4}\right)\left(y + \tfrac{1-\sqrt{45}}{2}\right) \\
T_{\left(2,\frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right)} &\equiv -6\left(1+\sqrt{45}\right)(x-2) + \left(12 - \tfrac{3\left(-1-\sqrt{45}\right)^2}{4}\right)\left(y + \tfrac{1+\sqrt{45}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Stratégies de résolution envisageables

Les étudiants peuvent aborder graphiquement ou analytiquement cet exercice. La première de ces approches fournit une équation approximative (puisque les coefficients sont obtenus à partir de mesures) de deux des trois tangentes recherchées (aux points $(2,1)$ et $\left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right)$). Les étudiants qui envisageraient une résolution analytique du problème devront commencer par déterminer les images de la courbe en l'abscisse $x = 2$ en remplaçant x par 2 dans l'expression de la courbe $F(x,y) = 11$ puis en résolvant l'équation $12y - y^3 - 11 = 0$ qui en découle. Une autre manière de déterminer ces points serait de se référer à la figure 3 (sur laquelle deux des trois images de la courbe $F(x,y) = 11$ sont visibles). Pour pousuivre leur résolution, les étudiants devront se passer de l'équation 5.1 puisque celle-ci n'a pas encore été abordée dans leur cours théorique au moment de la réalisation de la narration. Ils vont devoir, dès cette étape, mettre au point des méthodes de résolution faisant appel aux connaissances et aux propriétés de l'analyse mathématique dont ils disposent alors. Nous pensons par exemple que nombre d'entre eux vont employer l'équation de la tangente en un point a d'une courbe

$$T \equiv y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

connue depuis la fin de l'enseignement secondaire et essayer de la généraliser pour l'appliquer à la courbe $F(x,y) = 11$. Une des questions se posant alors concerne la manière de calculer la pente des tangentes recherchées. Que vont faire les étudiants ? Essayer d'établir un lien entre le coefficient angulaire de la tangente et le gradient de la fonction $F(x,y)$? Si oui, à quelle fin vont-ils le manipuler ? Comment leurs idées vont-elles s'organiser ? Les raisonnements employés vont, selon notre avis, emprunter des directions très différentes, voire même surprenantes pour peut-être aboutir à la solution recherchée.

Enoncé de la question Q.2.2.

Calculez les dérivées partielles de $F(x,y)$ et évaluez-les au(x) point(s) d'abscisse considéré(s) à la question précédente.

Résolution

Il faut tout d'abord déterminer l'expression analytique du gradient de la fonction $F(x,y) = 3x^2y - y^3$:

$$\nabla F(x,y) = (6xy, 3x^2 - 3y^2)$$

et l'évaluer ensuite aux 3 points d'abscisse $x = 2$ (leurs coordonnées ont été calculées à la question précédente). Ainsi,

- au point de coordonnées $(2,1)$, le gradient vaut

$$\nabla F(2,1) = (12,9)$$

- au point de coordonnées $\left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right)$, le gradient vaut

$$\nabla F\left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right) = \left(6\left(-1+\sqrt{45}\right), 12 - \frac{3\left(1+\sqrt{45}\right)^2}{4}\right)$$

– au point de coordonnées $\left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right)$, le gradient vaut

$$\nabla F\left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right) = \left(-6\left(1+\sqrt{45}\right), 12 - \frac{3\left(-1-\sqrt{45}\right)^2}{4}\right).$$

Stratégies de résolution envisageables

Au moment de l'expérience, les étudiants connaissaient déjà la notion de dérivée partielle. Leur manipulation ne devait dès lors pas leur poser de problème majeur et déterminer leur expression analytique devait être à la portée de chacun. Le seul véritable obstacle que les étudiants auraient pu rencontrer se situe à l'étape où il leur était demandé d'évaluer chacune des dérivées au(x) point(s) d'abscisse $x = 2$. En effet, certains ne seront peut-être pas parvenus à déterminer chacun d'entre eux (déjà demandés à la question *Q.2.1.*). Il se pourrait dès lors que ces étudiants s'en tiennent à la seule détermination de l'expression analytique des dérivées, sans les évaluer. Pour les autres, cette évaluation aura lieu aux points identifiés soit :

- grâce à la résolution de l'équation $12y - y^3 = 11$ qui permet d'obtenir l'ordonnée des trois images de la courbe $F(x, y) = 11$ en l'abscisse $x = 2$;
- à l'aide de la figure 3 sur laquelle deux des trois images de la courbe $F(x, y) = 11$ sont visibles. Les valeurs obtenues seront approximatives.

5.4 Description et analyse des résultats

Les résultats récoltés au cours de cette activité nous ont permis d'accéder à la manière dont les publics interrogés appréhendaient la notion de fonction implicite. La description et l'analyse réalisées dans cette section ont pour objectif de vous communiquer les principales conceptions et idées a priori des étudiants.
Pour chacune des questions reprises ci-dessous, nous avons commencé, dans le point *Ce que révèlent les narrations des étudiants*, par rassembler les réponses reçues dans des catégories. Après quoi, afin de donner sens et pertinence aux catégories recensées, nous avons détaillé chacune d'entre elles en mettant en évidence les principales conceptions et stratégies de résolution développées par les étudiants. Le point *Les tendances les plus retrouvées* présente d'une part, un récapitulatif des différentes catégories de réponses et d'autre part, le pourcentage d'étudiants correspondant à chacune d'elles.

5.4.1 Question 1 : courbes de niveaux

Ce que révèlent les narrations des étudiants

Lorsque nous avons demandé aux étudiants de déterminer les équations analytiques des courbes qui leur étaient présentées, nous avons pu rassembler leurs réponses dans deux catégories différentes.

- $\mathbf{C}_1$: pas de lien entre la représentation graphique de la fonction $F(x, y)$ et les courbes de niveaux ;

– $\mathbf{C}_2$: lien entre la représentation graphique de la fonction $F(x, y)$ et les courbes de niveaux.

Explicitons ces catégories et découvrons ce qui se cache derrière les intitulés $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$.

$\mathbf{C}_1$: pas de lien entre la représentation graphique de la fonction $F(x, y)$ et les courbes de niveaux de la figure 2

Les 16 groupes d'étudiants (1 en $\text{Math1}_{08/09}$, 9 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 3 en $\text{Math1}_{09/10}$ et 3 en $\text{Phy1}_{09/10}$) dont nous parlons dans cette première catégorie n'ont établi aucun lien entre la représentation graphique de la fonction $F(x, y)$ et ses courbes de niveaux. Ils voient en chaque courbe de la figure 2 le graphe d'une fonction d'une variable dont ils doivent trouver l'équation analytique.

Les réponses des étudiants évoqués ici se sont orientées, dès le début de la résolution du problème, dans deux directions différentes. Cela nous a aidés à identifier

- 14 narrations (1 en $\text{Math1}_{08/09}$, 9 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 1 en $\text{Math1}_{09/10}$ et 3 en $\text{Phy1}_{09/10}$) présentant uniquement une description graphique de l'exercice ;
- 2 narrations (en $\text{Math1}_{09/10}$) passant tout d'abord par une description graphique avant de déterminer, au moyen d'outils de l'analyse mathématique, l'équation analytique de chacune des courbes de la figure 2.

Les 14 groupes qui s'en sont tenus à une description graphique des courbes de la figure 2, ont tous choisi de résoudre l'activité en abordant une stratégie basée sur l'observation de cette figure. Ils ont ainsi eu l'idée d'associer chaque élément de celle-ci à la représentation graphique de fonctions connues. C'est ainsi qu'ils ont détecté trois droites (une droite *horizontale et située à une ordonnée nulle*, deux droites *symétriques passant par l'origine du repère*) pouvant être les asymptotes des coniques (des paraboles pour certains étudiants, des hyperboles pour d'autres, des paraboles et des hyperboles pour d'autres, encore) correspondant au second type de courbe représenté. Un détail a alors choqué les 3 groupes (1 en $\text{Math1}_{08/09}$, 1 en $\text{Phy1}_{08/09}$ et 1 en $\text{Math1}_{09/10}$) ayant choisi l'option des hyperboles : *trois branches semblent composer* ces dernières. Cette réflexion les a conduits à s'interroger sur la dimension dans laquelle les courbes sont représentées.

> *Il se pourrait qu'on travaille en trois dimensions car nous avons une fonction $F(x, y)$ du troisième degré.*

Ces étudiants ayant privilégié le cadre graphique pour résoudre cet exercice ont vu, au travers des propriétés qu'ils pensaient avoir décelées, un bon moyen de découvrir l'équation de chaque courbe décrite. Toutefois, leur narration s'est arrêtée là. Ils s'en sont tenus à une description « courbe après courbe » de la figure 2.

Les 2 étudiants du public $\text{Math1}_{09/10}$ que nous considérons à présent ont poursuivi le raisonnement commencé par leurs camarades décrits ci-dessus et ont essayé d'exprimer l'équation des courbes identifiées grâce à certaines des connaissances qu'ils possèdent en analyse mathématique tout en continuant à se référer à la figure 2. Ils ont commencé par déterminer l'équation des trois droites y apparaissant en se basant sur les caractéristiques du graphique. Ils ont ainsi trouvé que

- la droite *horizontale située à une ordonnée nulle* a pour équation $y = 0$;
- les deux droites *sécantes passant par l'origine du repère* ont pour équation $y = 1.5x$ et $y = -1.5x$

Ces étudiants ont ensuite fait appel aux propriétés des coniques pour trouver l'équation des autres courbes de la figure 2 car *leur forme* [leur faisait] *penser à la représentation graphique* de ces objets mathématiques. Les raisonnements qu'ils ont développés étaient de la forme :

- [...] *Nous allons essayer de découvrir l'équation* $\mathcal{P} \equiv ax^2 + bx + c = 0$ *de la parabole correspondant à la courbe* $3x^2 - y^3 = 2$. *Son axe de symétrie est la droite* $x = 0$ *et elle passe par les points* $(-1, -2)$, $(1, -2)$ *et* $(0, \sqrt[3]{-2})$. *La résolution du système*

$$\begin{cases} a - b + c = -2 \\ a + b + c = -2 \\ c = \sqrt[3]{-2} \end{cases}$$

nous permettra alors d'obtenir l'équation de la parabole recherchée [...]

- [...] *Pour obtenir l'équation de l'hyperbole à trois branches, nous devons rechercher son minimum afin de trouver l'endroit où séparer la courbe et pouvoir exprimer* y *en fonction de* x. *Pour y parvenir, nous allons déterminer le gradient de la fonction* $\nabla F(x, y)$ *et calculer le point minimum de la courbe en égalant chacune des dérivées partielles* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *à zéro. Le point que nous aurons trouvé permettra de séparer la courbe en deux parties qui elles, représenteront le graphe de la fonction que nous devons trouver.*

C_2 : lien entre la représentation graphique de la fonction $F(x, y)$ et les courbes de niveaux de la figure 2

Nous avons rassemblé dans cette seconde catégorie les 51 groupes ayant associé les courbes à analyser aux courbes de niveaux de la fonction $F(x, y)$. Parmi les narrations de ces derniers, nous avons pu distinguer deux types d'écrits : ceux d'étudiants s'en tenant à une description graphique des courbes de niveaux (6 au total, répartis de la façon suivante : 1 en $\text{Math1}_{08/09}$, 1 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 1 en $\text{Phy1}_{09/10}$ et 3 en $\text{Math1}_{09/10}$) et ceux d'étudiants qui ont essayé de déterminer l'équation de chacune des courbes décrites (45 au total, répartis de la façon suivante : 6 en $\text{Math1}_{08/09}$, 4 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 7 en $\text{Phy1}_{09/10}$ et 28 en $\text{Math1}_{09/10}$). Deux tendances sont apparues chez ces derniers et nous avons recensé :

- 24 groupes qui ont réussi à associer l'équation générale $F(x, y) = z$ d'une courbe de niveau à celles que nous leur demandions de trouver ;
- 21 groupes qui ont dû envisager une autre alternative pour déterminer ces équations car ils n'ont pas réussi à établir cette association.

Les réponses retrouvées chez les étudiants ayant simplement établi un lien graphique entre la fonction $F(x, y)$ et ses courbes de niveaux étaient du type :

> *Les courbes de la figure 2 représentent la projection des points de la fonction de la figure 1, situés à une même hauteur* z.

Les narrations des 24 groupes parvenus à se souvenir de l'équation analytique d'une courbe de niveau et à l'associer au cas proposé dans l'activité, regroupaient des écrits de la forme :

Chaque courbe représente l'ensemble des doublets (x, y) tels que $F(x, y) = z$

$$\{(x, y) \mid 3x^2 - y^3 = z\}$$

L'équation des différentes courbes peut alors s'écrire de la manière suivante $3x^2 - y^3 - z = 0$ où z sera tour à tour égal à -5, 0, 2, 11, 20.
Chaque courbe représente une surface située à un niveau z déterminé par les valeurs que nous venons de citer.

Les 21 groupes que nous considérons enfin n'ont pas fait de rapprochement entre l'expression générale d'une courbe de niveau et les équations qu'ils devaient trouver. Ils ont alors entamé d'autres procédures pour y parvenir en se servant de l'équation $3x^2y - y^3 = z$.

Une majorité a essayé d'exprimer dans chacune des équations

$$3x^2y - y^3 = z \quad \text{où} \quad z = \{-5, 0, 2, 11, 20\}$$

la variable y comme une fonction de x afin d'en déduire l'équation analytique des cinq fonctions d'une variable qui, pour eux, étaient représentées à la figure 2. Cependant, cette démarche ne leur a pas permis d'avancer dans leur recherche : l'expression obtenue

$$y = \frac{z}{3x^2 - y^2} \quad \text{où} \quad z = \{-5, 0, 2, 11, 20\}$$

ne permettant pas d'exprimer la variable y uniquement en fonction de x.
Selon les étudiants ayant abordé le problème de cette manière, la méthode n'était satisfaisante que dans la situation où z valait 0. La résolution de l'équation correspondante

$$3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0$$

leur a ainsi permis d'identifier l'équation analytique des *trois droites apparaissant sur la figure : $y = 0$ pour la droite horizontale et $y = \pm\sqrt{3}\,x$ pour les deux droites sécantes.*
Les étudiants se sont alors vus contraints d'abandonner la démarche entreprise, la concluant de la manière hâtive et erronée

[...] *La seule conclusion que nous sommes en mesure d'apporter est que la figure 2 ne représente pas le graphe d'une fonction.*

Avec ces constatations, de nouvelles tentatives de résolution, basées sur des notions développées durant les premiers mois du bachelier ou maîtrisées depuis la fin du cycle secondaire, ont émergé de l'esprit de nos étudiants. Afin de vous faire partager ce que leurs narrations nous ont permis de découvrir, nous allons expliciter les méthodes de résolution les plus rencontrées dans les copies dépouillées.

Sept groupes (1 en $\text{Math1}_{08/09}$, 2 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 4 en $\text{Phy1}_{09/10}$) ont émis l'idée de calculer le gradient de la fonction $F(x, y)$ (afin d'obtenir la pente des droites du graphe) et/ou sa matrice jacobienne. Quatorze autres groupes (5 en $\text{Math1}_{08/09}$, 1 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 1 en $\text{Phy1}_{09/10}$ et 7 en $\text{Math1}_{09/10}$) enfin, ont choisi de « renverser » la situation en essayant d'exprimer x comme une fonction de y. Ils ont alors obtenu, pour chaque valeur de z à considérer (sauf le cas où $z = 0$, déjà résolu) une expression du type

$$x = \pm\sqrt{\frac{y^3 + z}{3y}} \tag{5.2}$$

Les narrations de ces derniers ont ensuite pris des directions différentes et nous avons encore pu voir apparaître, au sein même de cette stratégie, d'autres propositions de résolution. Les étudiants ont en effet soit choisi :

- de poursuivre en posant $x = F^{-1}(y, z)$ dans l'expression (5.2). Ils ont ainsi pu écrire

$$F^{-1}(y, z) = \pm\sqrt{\frac{y^3 + z}{3y}}$$

  avec z prenant des valeurs fixées. Ils ont alors décidé de reformuler l'expression $x = F^{-1}(y, z)$ en la réduisant à la seule variable y et ont obtenu l'écriture $x = F^{-1}(y)$. En posant $g = F^{-1}$, ils ont ensuite essayé de passer à une *fonction du type* $x = g(y)$ au travers de laquelle ils ont cru reconnaître la réciproque de la fonction initialement recherchée. Selon eux, l'équation de cette fonction pourrait être déterminée grâce à un simple changement de variables qui leur fournirait une expression de la forme $y = g(x)$. Un groupe du public $\text{Phy1}_{08/09}$ et 2 groupes du public $\text{Math1}_{08/09}$ ont procédé de cette façon ;
- de poursuivre en suggérant de réaliser une symétrie orthogonale des points de chaque fonction par rapport à la première bissectrice du graphe. Cette symétrie permettrait de *déterminer tous les x par rapport aux y et de retrouver les véritables fonctions, après avoir effectué une seconde symétrie à nouveau par rapport à la première bissectrice.* Un groupe du public $\text{Math1}_{08/09}$ ainsi qu'un étudiant inscrit en $\text{Math1}_{08/09}$ ont utilisé cette méthode ;
- d'arrêter la procédure. On retrouve ici 2 groupes du public $\text{Math1}_{08/09}$, 1 groupe du public $\text{Phy1}_{09/10}$ et 2 étudiants de $\text{Math1}_{09/10}$.

Les tendances les plus retrouvées

Le résumé ci-dessous répertorie l'ensemble des étudiants sondés selon le cadre dans lequel ils ont travaillé. Il fournit d'une part la proportion de chaque groupe d'étudiants ayant employé un cadre donné (graphique ou analytique) pour construire son raisonnement et d'autre part, le pourcentage que cette proportion représente par rapport à l'échantillon total.

$\mathbf{C}_1$: pas de lien entre la représentation graphique de la fonction $F(x, y)$ et les courbes de niveaux de la figure 2 (16 groupes sur 67 ou 24% de l'échantillon)

Cadre graphique

• $\text{Math1}_{08/09}$	: 1/8	(1.5%)		• $\text{Math1}_{09/10}$	: 1/32	(1.5%)
• $\text{Phy1}_{08/09}$	: 9/14	(13.5%)		• $\text{Phy1}_{09/10}$	: 3/13	(4.5%)

Cadre analytique

- $\text{Math1}_{09/10}$: 2/32 (3%)

$\mathbf{C}_2$: lien entre la représentation graphique de la fonction $F(x,y)$ et les courbes de niveaux de la figure 2 (51 groupes sur 67 ou 76% de l'échantillon)

Cadre graphique

- $\text{Math1}_{08/09}$: 1/8 (1.5%)
- $\text{Phy1}_{08/09}$: 1/14 (1.5%)
- $\text{Math1}_{09/10}$: 1/32 (1.5%)
- $\text{Phy1}_{09/10}$: 3/13 (4.5%)

Cadre analytique

- $\text{Math1}_{08/09}$: 6/8 (9.5%)
- $\text{Phy1}_{08/09}$: 4/14 (6%)
- $\text{Math1}_{09/10}$: 28/32 (42%)
- $\text{Phy1}_{09/10}$: 7/13 (10.5%)

5.4.2 Question 2 : fonctions implicites

Question Q.2.1. Ecrivez le plus précisément possible, l'équation de la tangente à la courbe d'équation $F(x,y) = 11$ au(x) points d'abscisse $x = 2$

Ce que révèlent les narrations des étudiants

Nous avons pu remarquer que tous les étudiants ou presque, ont débuté leur narration en recherchant analytiquement les images de la courbe déquation $F(x,y) = 11$ en l'abscisse $x = 2$. Leur raisonnement leur a permis d'identifier les trois points

$$(2,1) \quad \left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right).$$

Un groupe ayant vérifié graphiquement les valeurs obtenues par cette résolution analytique s'est aperçu que le point $\left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right)$ n'apparaissait pas sur la figure 3. Il s'est alors demandé si cela était normal.

Les travaux des étudiants ont alors pris des directions différentes. Voici les principales approches retrouvées dans les copies analysées :

- $\mathbf{A}_1$: approche graphique ;
- $\mathbf{A}_2$: association de l'équation de la tangente à l'expression

$$T \equiv y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

- $\mathbf{A}_3$: association de l'équation de la tangente à l'expression $y = mx + p$;
- **Autres** : autres approches utilisées.

L'objectif à présent est de donner davantage de signification aux approches que nous venons de citer et d'expliciter en détail les différentes stratégies auxquelles elles ont donné lieu.

A_1 : approche graphique

Huit (2 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 1 en $\text{Phy1}_{09/10}$ et 5 en $\text{Math1}_{09/10}$) groupes d'étudiants ont choisi de déterminer graphiquement l'équation des différentes tangentes. Pour y parvenir, ils se sont basés sur la figure 3 représentant un zoom de la courbe de niveau $F(x,y) = 11$. Cette méthode a permis aux étudiants d'obtenir une équation approximative des tangentes aux points $(2,1)$ et $\left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right)$ de la courbe (le point de coordonnées $\left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right)$ n'apparaissant pas sur la figure citée).

A_2 : association de l'équation de la tangente à l'expression $T \equiv y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Ces 23 groupes d'étudiants (8 en $\text{Math1}_{08/09}$, 5 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 1 en $\text{Phy1}_{09/10}$ et 9 en $\text{Math1}_{09/10}$) ont tout d'abord eu l'idée d'associer l'équation de la tangente en un point d'une courbe à l'expression $T \equiv y - f(a) = f'(a)(x-a)$, connue depuis la fin du cycle secondaire. Différentes stratégies sont alors apparues.

Huit (3 en $\text{Math1}_{08/09}$, 3 en $\text{Phy1}_{08/09}$ et 2 en $\text{Math1}_{09/10}$) d'entre eux ont pensé en premier lieu qu'il était possible de réduire la fonction $F(x,y)$ à une fonction d'une variable $f(y)$ lorsqu'ils se trouvaient aux points de coordonnées $(2,y)$. Selon eux, comme l'abscisse x était fixée à 2 en chacun des points à analyser, ils pouvaient la « supprimer » car elle *n'occupait plus son rôle de variable dans la fonction* $F(x,y)$.
Après avoir remplacé x par 2 dans la fonction $F(x,y) = 3x^2 - y^3$, ils ont donc obtenu l'expression $F(2,y) = 12y - y^3$ qu'ils ont « réduite » à une fonction d'une variable $f(y)$ en l'écrivant $f(y) = 12y - y^3$. En procédant de cette manière, ils ont pensé obtenir facilement la dérivée $f'(y)$ (d'expression $f'(y) = 12 - 3y^2$) de cette fonction et l'évaluer aux trois points calculés dans la première partie du raisonnement pour finalement déterminer le coefficient angulaire de chacune des tangentes recherchées. Les groupes ayant choisi ce type de résolution ont trouvé au point $(2,1)$ une tangente d'équation [5]

$$\begin{array}{rlcl} T & \equiv y - f(2) & = & f'(2)(x-2) \\ & \Leftrightarrow y - 1 & = & 9(x-2) \\ & \Leftrightarrow y & = & 9x - 17. \end{array}$$

Ce résultat les a très vite interpellés car lorsqu'ils ont voulu vérifié graphiquement leur réponse, ils se sont aperçus que le coefficient angulaire calculé différait totalement de celui qu'ils obtenaient en traçant la tangente à la courbe au point $(2,1)$ de la figure 3.

Les 15 autres groupes (5 en $\text{Math1}_{08/09}$, 2 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 1 en $\text{Phy1}_{09/10}$ et 7 en $\text{Math1}_{09/10}$) ont essayé de généraliser l'expression de la tangente T afin de traiter les fonctions de deux variables. Ils ont alors hésité entre deux équations

$$T \equiv z - f(2,y) = f'_x(2,y)(x-2)$$

et

$$T \equiv z - f(2,y) = f'_y(2,y)(x-2)$$

5. Remarquons qu'en pratique, les étudiants font défaut au raisonnement qu'ils ont établi car ils évaluent f et f' en 2 et non pas en la valeur 1 qui est pourtant la valeur prise par la variable y au point qu'ils considèrent.

en s'interrogeant sur l'utilité du gradient de la fonction $F(x, y)$ et en se demandant quelle dérivée partielle utiliser. En effet, le changement de dimension lié à la généralisation effectuée les a arrêtés dans leur démarche car la fonction $F(x, y)$ qu'ils devaient traiter était *une fonction de plusieurs variables à analyser en trois points différents.*

A_3 : association de l'équation de la tangente à l'expression $y = mx + p$

Les 18 (5 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 2 en $\text{Phy1}_{09/10}$ et 11 en $\text{Math1}_{09/10}$) groupes repris dans ce point ont poursuivi la question *Q.2.1.* de l'activité en considérant que pour trouver les tangentes recherchées, il leur suffirait d'associer leur équation à l'expression générale d'une droite $y = mx + p$. Différents modes de raisonnement ont alors émergé.

Pour 10 d'entre eux (2 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 2 en $\text{Phy1}_{09/10}$ et 6 en $\text{Math1}_{09/10}$), puisque la tangente est une droite de la forme $y = mx + p$ n'ayant qu'un seul point de contact avec la courbe étudiée, *égaler l'équation de la courbe à celle de la tangente* [permettrait de trouver] *les valeurs de m et p en chaque point de tangence identifié.* Le raisonnement suivi par ces étudiants a donné lieu aux relations suivantes :

> *En un point de coordonnées $(2, y)$ (point de tangence), la tangente et la fonction $F(x, y)$ ont la même valeur. Nous pouvons écrire*
>
> $$\begin{cases} y &= 2m + p \\ F(2, y) &= 12y - y^3 \end{cases}$$
>
> *ou encore :*
>
> $$2m + p = 12y - y^3.$$
>
> *Nous pourrons ensuite trouver les coefficients m et p de chaque tangente.*

Les 8 autres (3 en $\text{Phy1}_{08/09}$ et 5 en $\text{Math1}_{09/10}$) ont essayé de résoudre un système constitué de l'équation de chaque tangente à découvrir. Pour y parvenir, ils ont commencé par remplacer x et y par les coordonnées des points $(2, 1)$, $\left(2, \frac{-1+\sqrt{45}}{2}\right)$ et $\left(2, \frac{-1-\sqrt{45}}{2}\right)$. Dans le système qu'ils ont obtenu

$$\begin{cases} 1 &= 2a + b \\ \frac{-1+\sqrt{45}}{2} &= 2c + d \\ \frac{-1-\sqrt{45}}{2} &= 2e + f \end{cases}$$

les coefficients a, c et e correspondent à la pente de chaque tangente. Selon eux, il est possible de les calculer en dérivant l'expression $F(2, y)$ et en l'évaluant en chaque point de tangence. Le seul problème que ces étudiants ont relevé dans leur méthode est le fait qu'ils n'ont pas réussi à déterminer de relation leur permettant de calculer les ordonnées à l'origine b, d et f.

Autres approches utilisées

Les 18 (2 en $\text{Phy1}_{08/09}$, 9 en $\text{Phy1}_{09/10}$ et 7 en $\text{Math1}_{09/10}$) groupes d'étudiants dont nous parlons dans ce dernier point ont poursuivi le problème en employant dans leur raisonnement, certains des outils qui leur ont été enseignés dans leur cours de *Calcul différentiel et intégral.*

Huit groupes (1 en $\mathrm{Phy1}_{08/09}$, 3 en $\mathrm{Phy1}_{09/10}$ et 4 en $\mathrm{Math1}_{09/10}$) ont voulu déterminer l'équation des différentes tangentes en essayant de résoudre un système

$$\begin{cases} F(x,y) &= 11 \\ z &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

dans lequel z correspond au *plan formé par les dérivées partielles de* $F(x,y)$.

Un groupe du public $\mathrm{Phy1}_{08/09}$ a commencé par se souvenir que l'équation de la tangente à une courbe en un point (x_p, y_p) de celle-ci correspond à une droite de la forme

$$T \equiv y - y_p = m(x - x_p)$$

où m est la pente de cette tangente. Les étudiants de ce groupe ont ensuite relevé le fait que le gradient $\nabla F(x,y)$ est un vecteur perpendiculaire à la courbe à étudier. Selon eux, cette propriété allait leur permettre de déterminer la pente des différentes tangentes à la courbe en chaque point d'abscisse $x = 2$. Ils ont donc poursuivi leur raisonnement *en posant* $m' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *la pente*[6] *de* $\nabla F(x,y)$. Ils ont fait de même avec la pente des tangentes à déterminer qu'ils ont nommée m et dont ils ont déduit l'expression

$$m = -\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

en tenant à nouveau compte de l'orthogonalité entre le gradient et la courbe :

> *Comme le gradient est perpendiculaire à la courbe, il l'est aussi à la tangente à cette courbe. Le produit mm' de leur pentes vaut donc -1.*

Enfin, le fait de pouvoir déterminer l'expression du gradient $\nabla F(x,y)$ aux trois points de tangence leur a permis de clore leur raisonnement pour retrouver les équations demandées. Voici les principales étapes de leur démarche au point $(2,1)$:

1. évaluation du gradient de $F(x,y)$ au point $(2,1)$: $\nabla F(2,1) = (12,9)$;
2. valeur de la *pente* du gradient de $F(x,y)$ au point $(2,1)$: $m' = \frac{3}{4}$;
3. valeur de la pente de la tangente au point $(2,1)$: $m = -\frac{4}{3}$;
4. équation de la tangente au point $(2,1)$:

$$\begin{aligned} T \;\equiv\; y-1 &= -\tfrac{4}{3}(x-2) \\ \Leftrightarrow \quad y &= -\tfrac{4}{3}x + \tfrac{11}{3}. \end{aligned}$$

Les 9 derniers groupes (3 en $\mathrm{Phy1}_{09/10}$ et 6 en $\mathrm{Math1}_{09/10}$) repris dans cette catégorie ont, pour leur part, tenté de calculer le coefficient angulaire de chaque tangente en évaluant la norme du gradient

$$\|\nabla F(x,y)\| = \sqrt{(6xy)^2 + (3x^2 - 3y)^2}$$

en les différents points d'abscisse $x = 2$.

6. Cette *pente* identifiée par les étudiants correspond en réalité au rapport entre les composantes en y et les composantes en x du vecteur $\nabla F(x,y)$.

Les tendances les plus retrouvées

La question que nous venons de traiter nous a permis de découvrir différentes méthodes imaginées par les étudiants de notre étude pour essayer de déterminer l'équation de la tangente en un point d'une courbe définie de manière implicite.
Afin de porter un regard synthétique sur les résultats que nous venons d'analyser, le descriptif ci-dessous reprend chacune de ces méthodes en leur associant la proportion de chaque groupe d'étudiants les ayant employées ainsi que le pourcentage que cette proportion représente par rapport à la totalité du public interrogé.

A$_1$: approche graphique (12% de l'échantillon)

- $\text{Math1}_{08/09}$: 0/8 (0%)
- $\text{Phy1}_{08/09}$: 2/14 (3%)
- $\text{Math1}_{09/10}$: 5/32 (7.5%)
- $\text{Phy1}_{09/10}$: 1/13 (1.5%)

A$_2$: association de l'équation de la tangente à l'expression $T \equiv y - f(a) = f'(a)(x - a)$ (34% de l'échantillon)

- $\text{Math1}_{08/09}$: 8/8 (12%)
- $\text{Phy1}_{08/09}$: 5/14 (7.5%)
- $\text{Math1}_{09/10}$: 9/32 (13%)
- $\text{Phy1}_{09/10}$: 1/13 (1.5%))

A$_3$: association de l'équation de la tangente à l'expression $y = mx + p$ (26.5% de l'échantillon)

- $\text{Math1}_{08/09}$: 0/8 (0%)
- $\text{Phy1}_{08/09}$: 5/14 (7.5%)
- $\text{Math1}_{09/10}$: 11/32 (16%)
- $\text{Phy1}_{09/10}$: 2/13 (3%)

Autres approches utilisée (26.5% de l'échantillon)

- $\text{Math1}_{08/09}$: 0/8 (0%)
- $\text{Phy1}_{08/09}$: 2/14 (3%)
- $\text{Math1}_{09/10}$: 7/32 (10.5%)
- $\text{Phy1}_{09/10}$: 9/13 (13%)

Question Q.2.2. Calculez les dérivées partielles de $F(x, y)$ et évaluez-les au(x) point(s) considéré(s) à la question précédente

Dans la dernière partie de cette activité, nous avons demandé aux étudiants d'identifier et d'évaluer le gradient de $F(x, y)$ aux points d'abscisse $x = 2$.

Ce que révèlent les narrations des étudiants

Au moment où les étudiants ont participé à cette expérience, la notion de gradient ne leur était pas inconnue et ils savaient comment la manipuler. Les raisonnements retrouvés dans les narrations analysées se sont donc révélés plus systématiques et plus mathématiques que dans les questions précédentes. Ici, les étudiants n'ont pas pris la peine de détailler en français les différentes étapes de leur développement car ils savaient comment procéder. Un seul des groupes interrogés a néanmoins continué à réfléchir en suivant la logique de la narration de recherche

> [...] *dès que nous obtenons l'expression analytique du gradient de* $F(x, y) = 3x^2y - y^3$, *nous pouvons y remplacer x par 2 et y par les valeurs trouvées* [...]

Une majorité des étudiants (les 8 groupes du public $\text{Math1}_{08/09}$, 7 groupes du public $\text{Phy1}_{08/09}$, 7 groupes du public $\text{Phy1}_{09/10}$ et 17 étudiants inscrits en $\text{Math1}_{09/10}$) sont parvenus à déterminer l'expression analytique du gradient

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy \\ 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

que nous leur demandions. Ils sont cependant moins nombreux à l'avoir évalué aux différents points demandés. Seuls 7 des 8 groupes du public $\text{Math1}_{08/09}$ nous ont fourni toutes les valeurs que nous attendions. Les autres ne sont pas allés plus loin que l'expression analytique ou l'évaluation du gradient au point $(2,1)$.

Nous avons également remarqué qu'une erreur récurrente revenait chez 5 des 67 groupes interrogés. Ceux-ci exprimaient la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}$ de la manière suivante

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6xy - y^3$$

en oubliant d'annuler la dérivée du terme constant (par rapport à x) y^3.

5.5 Conclusions

En écrivant ce chapitre, nous avons voulu accéder aux conceptions préalables qu'ont les étudiants ayant participé à nos expérimentations sur les fonctions implicites. Pour y parvenir, nous leur avons proposé de rédiger une narration de recherche : une pratique pédagogique à laquelle ils n'avaient jamais été confrontés jusqu'alors mais qui nous a aidés à identifier les raisonnements, les stratégies de résolution mais aussi les réflexions que chacun d'entre eux étaient à même de développer face à une situation-problème faisant intervenir de nouvelles notions.

Si nous nous sommes autant intéressés à ces conceptions, c'est parce qu'elles jouent un rôle important dans l'accès au savoir. En effet, elles sont à la base de nombreux raisonnements et productions d'étudiants. Y accéder peut dès lors nous aider à détecter et comprendre leurs difficultés. Leur identification peut également se révéler très utile à l'enseignant qui, au travers de ses pratiques, contribue à leur émergence. S'il en tient compte et essaie de les anticiper, son enseignement n'en sera que meilleur.

Finalement, au terme de cette activité, ce n'est pas tant le nombre de « bonnes » réponses aux exercices proposés qui nous importe. Nous avons surtout cherché à déterminer le(les) type(s) de stratégie(s) que des étudiants à qui l'on présente des problèmes que leurs seules connaissances ne suffisent pas à résoudre, sont à même d'imaginer. Nous avons pu nous apercevoir que ceux-ci sont loin d'être sans ressource et n'hésitent pas à inventer de nouvelles techniques de résolution, quitte à se tromper. Basées sur des notions connues depuis le cycle secondaire ou apprises durant les premiers mois de leur cursus universitaire, ces stratégies, qui ne fonctionnent pas toujours, sont originales et pour le moins surprenantes, comme l'ont montré nos analyses antérieures. En outre, certaines d'entre elles se sont révélées d'une grande richesse didactique et nous ont permis de prendre conscience de l'intérêt de la narration de recherche dans l'identification des conceptions que nous avons cherché à établir. Grâce à cette expérience nous avons pu, le temps d'un exercice, accéder à ce qu'il se passe dans la tête d'étudiants mis face à une situation-problème dans laquelle les fonctions implicites interviennent, avant même d'être enseignées. Il s'agit désormais de savoir si les étudiants se sont rendus compte du domaine de validité de ces stratégies car même si certaines d'entre elles ont fourni des résultats satisfaisants, il n'est pas dit que les étudiants aient compris pourquoi elles fonctionnaient dans la situation dans laquelle ils travaillaient. Qu'en aurait-il été si le cadre de travail avait été différent ? Auraient-ils été capables d'adapter leurs raisonnements ?

Chapitre 6

Le théorème des fonctions implicites, un savoir appris

Comme son titre l'indique, ce chapitre a pour but de décrire la dernière étape de la transposition didactique du théorème des fonctions implicites. Celle-ci traduit ce que l'étudiant a réellement appris, compris et retenu du savoir qu'on lui a enseigné. Comme nous l'avons déjà évoqué, de nombreux facteurs influent sur ce savoir appris. Des facteurs sur lesquels les différents acteurs de la transposition didactique ont prise mais aussi des éléments indépendants de la seule volonté de l'enseignant comme les caractéristiques cognitives et psychologiques de l'étudiant qui impactent sur sa manière de traiter les informations qu'il reçoit. De ce fait, l'accès au savoir appris se révèle difficile pour l'enseignant qui ne peut s'immiscer dans le cerveau de ses étudiants. Cependant, accéder à « ce qui subsiste dans la tête de l'étudiant » entre le moment où le savoir lui a été communiqué et celui où il doit l'étudier, le manipuler ou même l'évoquer pourrait aider l'enseignant à mettre le doigt sur ses interrogations, ses difficultés et les imprécisions émanant de ses réponses afin d'améliorer l'enseignement qu'il lui prodigue.
Pour nous rendre compte de ce que les informations issues de cette phase de la transposition didactique peuvent nous apporter, nous avons décidé d'interroger une dernière fois les étudiants que nos expérimentations nous ont amenés à rencontrer en soumettant chacun à un questionnaire distribué au mois de mars 2011.

6.1 Conception et description des questionnaires

C'est dans le but d'identifier le savoir appris relatif au théorème des fonctions implicites que ces questionnaires ont été élaborés. En effet, nous avons pensé que ce type de production serait un bon support pour découvrir (au moins en partie) ce que les étudiants avec lesquels nous avons travaillé conservent du théorème des fonctions implicites une ou deux années après l'avoir étudié.

6.1.1 Contexte de travail

Avant de nous engager plus en avant dans cette section, nous pouvons commencer par rappeler brièvement les principales caractéristiques des 129 étudiants qui nous ont permis de mener à bien la totalité du dispositif expérimental de ce mémoire. Répartis en quatre groupes :

- $\text{Math1}_{08/09}$: les 25 étudiants de $1^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences mathématiques inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2008-2009 ;
- $\text{Math1}_{09/10}$: les 35 étudiants de $1^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences mathématiques inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2009-2010 ;
- $\text{Phy1}_{08/09}$: les 39 étudiants de $1^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences physiques inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2008-2009 ;
- $\text{Phy1}_{09/10}$: les 30 étudiants de $1^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences physiques inscrits aux FUNDP durant l'année académique 2009-2010

tous ont participé à la narration de recherche qui a introduit les notions de courbe de niveau et de fonction implicite. Par contre, seul le public $\text{Math1}_{09/10}$ a réalisé un travail de groupe qui lui a permis, grâce aux concepts de l'analyse non-standard, de construire une « nouvelle » démonstration du théorème des fonctions implicites. Nous avons donc supposé que ce groupe qui a davantage travaillé le théorème, porte un regard sans doute plus aiguisé que celui de ses pairs sur ce résultat.

6.1.2 Conception des questionnaires

Deux questionnaires différents ont été rédigés en tenant compte des considérations que nous venons de rappeler. Le premier, distribué aux publics $\text{Math1}_{08/09}$, $\text{Phy1}_{08/09}$ et $\text{Phy1}_{09/10}$ comporte 5 questions ouvertes, d'ordre général sur le théorème des fonctions implicites. Le second questionnaire, distribué quant à lui aux étudiants ayant réalisé le travail de groupe, contient les 5 questions citées précédemment auxquelles s'ajoutent 4 questions comparant la preuve du théorème vue au cours à celle qu'ils ont établie. Ces deux questionnaires sont respectivement repris dans les annexes B.3 et B.4 du présent document.

L'analyse que nous avons réalisée porte sur la partie commune des questionnaires distribués. Celle-ci, construite autour des points suivants :

- l'identification des éléments composant l'énoncé du théorème des fonctions implicites ;
- les outils utiles à la démonstration du théorème des fonctions implicites ;
- l'utilité et l'importance du résultat en mathématiques

est donc scindée en trois catégories de questions que nous allons expliciter dans le point suivant. En outre, et afin que la démarche entreprise prenne tout son sens, nous avons demandé aux étudiants interrogés de justifier au mieux chacune des réponses données.

6.1.3 Description des questionnaires

Reprenons dans ce point l'énoncé de chaque question traitée au cours de cette expérimentation en les regroupant dans les trois catégories que nous venons de définir.

Catégorie 1 : Identification des éléments composant l'énoncé du théorème

Q.1. Selon vous, à quoi se réfère le théorème des fonctions implicites ?

Q.2. Etes-vous en mesure de me donner les principaux éléments constituant l'énoncé de ce théorème ? Si oui, quels sont-ils ?

Catégorie 2 : Outils utiles à la démonstration du théorème

Q.3. Etes-vous capable de me donner les notions et outils utiles à la démonstration du théorème ? Si oui, quels sont-ils ?

Catégorie 3 : Utilité et importance du théorème en mathématiques

Q.4. D'après vous, quelle est l'utilité du théorème des fonctions implicites (applications dans le cours d'analyse ou dans d'autres cours,...) ?

Q.5. Pensez-vous qu'il s'agisse d'un résultat important de l'analyse mathématique ? Pourquoi ?

6.1.4 Limites de l'expérimentation

L'expérience décrite dans ce chapitre ne mène ni à une description ni à une analyse complètes du savoir appris en jeu dans ce mémoire pour une triple raison. D'une part, la seule élaboration d'un questionnaire ne peut nous permettre d'accéder aux multiples facettes associées au savoir appris. En effet, ici, seuls les évocations et les souvenirs qu'ont les étudiants du théorème des fonctions implicites sont abordés. A notre stade, nous ne pouvons donc émettre la moindre hypothèse quant à la partie du savoir appris liée à la manipulation ou à l'étude même de ce résultat. D'autres dispositifs (comme l'analyse d'un exercice ou celle d'une question d'examen sur le théorème) auraient pu être proposés et enrichir nos interprétations ultérieures. D'autre part, une grande partie des questionnaires ne nous est pas revenue car certains des étudiants interrogés [1] n'ont pas pris la peine de remplir et nous restituer celui qu'ils avaient reçu. En effet, seuls 25 questionnaires nous ont été retournés :

- 9 pour le public $\mathrm{Math1}_{08/09}$;
- 10 pour le public $\mathrm{Phy1}_{08/09}$;
- 6 pour le public $\mathrm{Math1}_{09/10}$;
- 0 pour le public $\mathrm{Phy1}_{09/10}$.

Il faut finalement savoir que la taille de notre échantillon initial a diminué entre le début de nos expérimentations (décembre 2008 pour les publics $\mathrm{Math1}_{08/09}$ et $\mathrm{Phy1}_{08/09}$, décembre 2009 pour les publics $\mathrm{Math1}_{09/10}$ et $\mathrm{Phy1}_{09/10}$) et le moment où chaque groupe a reçu son propre questionnaire (mars 2011). Nous faisons référence ici aux étudiants ayant raté une ou deux années ou à ceux ayant abandonné le cursus entrepris.

6.2 Description et analyse des résultats

Dans les lignes qui suivent, nous allons tout d'abord reprendre chaque question faisant l'objet de notre analyse et détailler les réponses des étudiants en les répertoriant dans 3 ou 4 classes différentes afin de mettre en évidence les principales tendances ressortant de l'expérience menée. Ces tendances sont ensuite résumées dans un récapitulatif dans lequel nous avons associé chaque

1. Pour des raisons pratiques, nous avions demandé aux étudiants de compléter le questionnaire reçu à domicile et de nous le ramener ensuite.

type de réponse rencontré au nombre d'étudiants de chaque groupe y ayant répondu ainsi q'au pourcentage que cette proportion représente par rapport à l'entièreté de l'échantillon sondé. Signalons également que nous avons repris les mêmes notations que celles utilisées par les étudiants pour évoquer les différents éléments apparaissant dans l'énoncé du théorème vu au cours de J.-J. Strodiot [24]. Ainsi, nous avons noté :

- f, la fonction numérique de classe $\mathcal{C}^k$ définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$;
- φ, la fonction implicite définie par l'équation $f(x,y) = 0$ sur un intervalle I de R.

6.2.1 Catégorie 1 : Identification des éléments composant l'énoncé du théorème

Q.1. Selon vous, à quoi se réfère le théorème des fonctions implicites ?

Ce que révèlent les résultats

Nous avons constaté que près de la moitié des étudiants associent directement « ce à quoi se réfère » le théorème des fonctions implicites au résultat auquel il aboutit. En effet, 7 (1 en $\mathrm{Math1}_{08/09}$, 2 en $\mathrm{Phy1}_{08/09}$ et 4 en $\mathrm{Math1}_{09/10}$) des 11 étudiants ayant fourni ce type de réponse pensent que le théorème *permet de déterminer* une fonction définie de manière implicite qui approxime localement une courbe donnée. Un étudiant en particulier a illustré sa réponse au travers de l'exemple suivant :

> [...] *déterminer une fonction alors qu'on a une expression liant x et $f(x)$ du type*
>
> $$x^3 + 3x^2 \sin(f(x)) + f(x) = 0.$$

Trois autres étudiants (un de chaque groupe interrogé) mettent en évidence la dérivation implicite (sans toutefois en donner la formule) qui constitue la seconde assertion de la version du théorème vue au cours théorique[2]. Un dernier évoque quant à lui les deux parties du résultat. La deuxième classe de réponse que nous avons définie pour cette question montre que pour 6 des 9 étudiants du groupe $\mathrm{Math1}_{08/09}$, le théorème des fonctions implicites permet de démontrer le théorème de Lagrange. Enfin, 8 étudiants ne sont pas en mesure de répondre de manière précise à cette question. Ils mettent en avant le fait qu'ils ne se souviennent pas ou ne savent pas à quoi correspond le résultat. Parmi eux, nous retrouvons une grande partie du groupe $\mathrm{Phy1}_{08/09}$.

Récapitulatif des principales tendances retrouvées

1. Référence à la thèse du théorème	• $\mathrm{Math1}_{08/09}$	: 2/9	(8%)
	• $\mathrm{Phy1}_{08/09}$	: 3/10	(12%)
	• $\mathrm{Math1}_{09/10}$	: 6/6	(24%)
2. Démontrer le théorème de Lagrange	• $\mathrm{Math1}_{08/09}$	: 6/9	(24%)
3. Aucun souvenir	• $\mathrm{Math1}_{08/09}$	: 1/9	(4%)
	• $\mathrm{Phy1}_{08/09}$	: 7/10	(28%)

2. Voir le chapitre 10 *Fonctions implicites* de l'ouvrage de J.-J. Strodiot [24].

Q.2. Etes-vous en mesure de me donner les principaux éléments constituant l'énoncé de ce théorème ? Si oui, quels sont-ils ?

Ce que révèlent les résultats

Nous pouvons remarquer que les souvenirs des 9 étudiants ayant répondu « positivement » à la question *Q.2* de cette expérience sont davantage orientés vers les hypothèses du théorème des fonctions implicites. Bien entendu, aucun d'entre eux ne les a toutes énumérées mais une grande majorité d'entre elles se retrouve dans les questionnaires dépouillés. Nous pouvons également souligner qu'une des hypothèses revient de manière récurrente chez chacun des étudiants : celle qui impose à la fonction f d'être une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Une autre hypothèse retenue par certains porte sur la valeur non-nulle de la dérivée partielle f'_y de cette même fonction. Nous avons également pu voir que pour 2 des 9 étudiants dont nous parlons ici, les éléments qui constituent le théorème des fonctions implicites sont à associer à l'une ou l'autre de ses assertions. La dernière remarque que nous pouvons faire sur les résultats de cette question concerne le nombre important d'étudiants ayant répondu par la négative. Comme pour la question *Q.1.*, les étudiants du public $\text{Phy1}_{08/09}$ y sont majoritaires (9 étudiants sur les 10 que compte le groupe).

Récapitulatif des principales tendances retrouvées

1. Référence aux hypothèses du théorème
   - $\text{Math1}_{08/09}$: 4/9 (16%)
   - $\text{Phy1}_{08/09}$: 1/10 (4%)
   - $\text{Math1}_{09/10}$: 4/6 (16%)
2. Référence à la thèse du théorème
   - $\text{Math1}_{08/09}$: 1/9 (4%)
   - $\text{Phy1}_{08/09}$: 1/10 (4%)
3. Aucun souvenir
   - $\text{Math1}_{08/09}$: 5/9 (20%)
   - $\text{Phy1}_{08/09}$: 9/10 (36%)
   - $\text{Math1}_{09/10}$: 2/6 (8%)

6.2.2 Catégorie 2 : Outils utiles à la démonstration du théorème

Q.3. Etes-vous capable de me donner les notions et outils utiles à la démonstration du théorème ? Si oui, quels sont-ils ?

Ce que révèlent les résultats

Commençons tout d'abord par rappeler que même si le théorème des fonctions implicites fait partie du cursus des étudiants interrogés, sa démonstration n'a jamais dû être étudiée par ces derniers. Seuls son énoncé et certaines remarques[3] à son sujet apparaissent dans le syllabus de J.-J. Strodiot [24]. Cela pourrait justifier le nombre, à nouveau conséquent, d'étudiants ne se souvenant plus des outils et notions permettant de démontrer le résultat. En effet, les 9 étudiants du groupe $\text{Math1}_{08/09}$ ainsi que 8 des 10 étudiants du public $\text{Phy1}_{08/09}$ se retrouvent dans cette situation. Par contre, un seul étudiant inscrit en $\text{Math1}_{09/10}$ fait partie de cet échantillon. Ce dernier groupe qui a vu le théorème des fonctions implicites en décembre 2009 et a réalisé un

3. Ces remarques sont également mentionnées et expliquées au quatrième chapitre de ce mémoire dans lequel nous avons analysé certains manuels d'enseignement.

travail de groupe sur celui-ci entre les mois de février et mars 2010, semble donc conserver plus de souvenirs sur les principes de sa démonstration. Les 5 autres étudiants de ce public se souviennent d'outils de l'analyse classique ou évoquent une autre méthode pour démontrer le théorème. Nous pouvons les répartir de la manière suivante.

- Trois font uniquement référence à la méthode employée dans le travail de groupe : notions de l'analyse non-standard (nombres hyperréels) et développement de Taylor ;
- Un cite uniquement des notions de l'analyse classique qui permettent de démontrer le théorème : différentiabilité et calcul de limites ;
- Un appuie sa réponse d'éléments de l'analyse classique et de notions utilisées dans le travail de groupe (il est donc repris 2 fois dans le récapitulatif ci-dessous).

Enfin, 2 étudiants du groupe $\mathrm{Phy1}_{08/09}$ évoquent le théorème du point fixe et le principe de récurrence comme moyens de démontrer le théorème des fonctions implicites.

Récapitulatif des principales tendances retrouvées

1. Notions et outils de l'analyse « classique » • $\mathrm{Math1}_{09/10}$: 2/6 (8%)
2. Autre
   - $\mathrm{Phy1}_{08/09}$: 2/10 (8%)
   - $\mathrm{Math1}_{09/10}$: 4/6 (16%)
3. Aucun souvenir
   - $\mathrm{Math1}_{08/09}$: 9/9 (36%)
   - $\mathrm{Phy1}_{08/09}$: 8/10 (32%)
   - $\mathrm{Math1}_{09/10}$: 1/6 (4%)

6.2.3 Catégorie 3 : Utilité et importance du théorème en mathématiques

Q.4. D'après vous, quelle est l'utilité du théoréme des fonctions implicites (applications dans le cours d'analyse ou dans d'autres cours,...) ?

Ce que révèlent les résultats

Pour une majorité des étudiants interrogés, l'utilité du théorème des fonctions implicites est liée soit au résultat auquel il aboutit, soit à ses applications. Ainsi, 5 étudiants estiment qu'il s'agit d'un résultat utile car il permet de *créer et dériver une fonction implicite.*
La plupart des étudiants pour qui cette utilité se reflète au travers des applications auxquelles mène le résultat, justifient leur réponse en évoquant le fait que le théorème des fonctions implicites permet de démontrer le théorème de Lagrange. Cette justification provient surtout du public $\mathrm{Math1}_{08/09}$ qui a eu l'occasion d'étudier de manière approfondie ce dernier résultat. Abordé dans leur cours d'optimisation et contrôle, le théorème de Lagrange a fait l'objet d'un travail de groupe réalisé dans le cadre de la thèse de S. Xhonneux [27]. Pour les autres étudiants repris dans cette classe de réponses, le théorème des fonctions implicites est utile car il est possible de l'employer en économie (présence de nombreuses courbes de niveau), en mécanique (association indirecte au Lagrangien) ou dans des domaines liés à l'activité des ingénieurs (thermodynamique). Mais à cette question aussi, certains n'ont su que répondre. Il s'agit essentiellement d'étudiants en physique qui ne se souviennent pas avoir rencontré explicitement le théorème des fonctions

implicites dans d'autres de leurs cours. C'est pourquoi ils ne savent pas si le résultat qu'ils ont vu près de deux ans auparavant est d'une grande utilité.

Récapitulatif des principales tendances retrouvées

1. Utilité associée à la thèse du théorème
   - $Phy1_{08/09}$: 2/10 (8%)
   - $Math1_{09/10}$: 3/6 (12%)
2. Utilité associée aux applications du théorème
   - $Math1_{08/09}$: 8/9 (32%)
   - $Phy1_{08/09}$: 1/10 (4%)
   - $Math1_{09/10}$: 1/6 (4%)
3. Ne sait pas
   - $Math1_{08/09}$: 1/9 (4%)
   - $Phy1_{08/09}$: 7/10 (28%)
   - $Math1_{09/10}$: 2/6 (8%)

Q.5. Pensez-vous qu'il s'agisse d'un résultat important de l'analyse mathématique ? Pourquoi ?

Ce que révèlent les résultats

De manière générale, les réponses apportées à cette dernière question montrent que les étudiants interrogés pensent que le théorème des fonctions implicites est un résultat important. Cependant, 15 d'entre eux ne sont pas en mesure de justifier leurs idées. On retrouve à nouveau parmi ces derniers la quasi totalité du groupe $Phy1_{08/09}$ ainsi que plus de la moitié du public $Math1_{09/10}$ et 3 des 9 étudiants inscrits en $Math1_{08/09}$.
De même qu'à la question précédente, les étudiants caractérisent l'importance du théorème des fonctions implicites d'une part en termes de ce qu'il permet de faire :

> *Le théorème des fonctions implicites est important car il permet de créer une fonction implicite φ.*
>
> *Le théorème des fonctions implicites est important car il permet de dériver une fonction implicite φ.*

d'autre part, par rapport à ses applications et domaines d'application :

> *Le théorème des fonctions implicites est important car il permet de démontrer le théorème de Lagrange.*
>
> *Le théorème des fonctions implicites est important car il est employé en optimisation.*
>
> *Le théorème des fonctions implicites est important car il est employé en théorie des équations différentielles ordinaires.*

Enfin, 2 étudiants ne pensent pas que le théorème soit d'une grande importance en mathématiques. Pour l'un, il est surtout contraignant à cause de *la force de ses hypothèses qui limitent son utilisation.* Pour le second, le résultat n'est pas important tout simplement car il ne se souvient pas l'avoir utilisé dans d'autres de ses cours.

Récapitulatif des principales tendances retrouvées

1. Résultat important (avec justification)
   - $\text{Math1}_{08/09}$: 5/9 (20%)
   - $\text{Math1}_{09/10}$: 1/6 (4%))
2. Résultat important (sans justification)
   - $\text{Math1}_{08/09}$: 3/9 (12%)
   - $\text{Phy1}_{08/09}$: 8/10 (32%)
   - $\text{Math1}_{09/10}$: 4/6 (16%)
3. Résultat sans importance
   - $\text{Phy1}_{08/09}$: 1/10 (4%)
   - $\text{Math1}_{09/10}$: 1/6 (4%)
4. Ne sait pas
   - $\text{Math1}_{08/09}$: 1/9 (4%)
   - $\text{Phy1}_{08/09}$: 1/10 (4%)

6.3 Conclusions

Nous avons rédigé ce chapitre afin de tenter d'identifier ce que les étudiants en sciences mathématiques et en sciences physiques des FUNDP retiennent à relativement long terme du théorème faisant l'objet de ce mémoire. Le questionnaire proposé aux trois groupes interrogés nous a servi de support pour y parvenir. Plus concrètement, les résultats qu'il a permis de recueillir nous ont fourni des éléments constituant le savoir appris des étudiants à propos

- des éléments composant l'énoncé du théorème des fonctions implicites ;
- des outils utiles à la démonstration du théorème des fonctions implicites ;
- de l'utilité et de l'importance du résultat en mathématiques.

En effet, aux questions abordant l'énoncé du théorème des fonctions implicites, les étudiants mettent tout d'abord en évidence le résultat auquel il aboutit. Notre attention se porte plus particulièrement vers ceux qui pensent que c'est un théorème permettant de *déterminer* (ou de *créer*, pour reprendre les termes de certains) une fonction implicite. En réalité, il assure simplement l'existence de cette fonction qu'on ne peut pas toujours exprimer *à l'aide de fonctions élémentaires* (J.-J. Strodiot, [24]). D'autre part, certaines des hypothèses nécessaires à l'utilisation du théorème semblent avoir marqué l'esprit des étudiants. Nous pensons par exemple à celle qui impose à la fonction de départ f d'être de classe C^k ou celle portant sur la valeur non nulle de la dérivée partielle f'_y de cette même fonction. D'autres enfin font une association directe entre ce dont traite le théorème et le rôle qu'on lui connaît dans la démonstration du théorème de Lagrange.

Les réponses apportées à la question relative aux outils sur lesquels repose la démonstration du théorème montrent quant à elles que le calcul de limites et la différentiabilité sont les principales notions retenues par les étudiants. De plus, le public $\text{Math1}_{09/10}$ qui a réalisé un travail de groupe sur le théorème des fonctions implicites mentionne les concepts essentiels de la méthode qu'ils ont dû employer pour construire la démonstration qui leur était demandée. Enfin, des réponses plus interpellantes, peut-être parce que les méthode auxquelles elles se réfèrent ne figurent ni dans les cours ni dans des travaux réalisés par les étudiants, nous apprennent que certains connaissent des démonstrations du théorème faisant appel au théorème du point fixe ou au principe de ré-

currence [4].
Enfin, une majorité d'étudiants pensent que le théorème des fonctions implicites est un résultat utile et important en mathématiques. Pour les uns, ces caractéristiques s'expliquent de par la nature même du résultat. Pour les autres, elles se reflètent davantage au travers des diverses applications du théorème. Cependant, de nombreux étudiants ne sont pas en mesure de justifier l'origine de cette utilité et de cette importance. Certains enfin associeraient le théorème à un résultat parmi d'autres car il ne semble pas apparaître dans d'autres cours [5] et est d'utilisation contraignante.

Certains éléments de réponse récoltés grâce à cette expérience nous ont permis de caractériser le savoir appris de chacun des groupes interrogés. En particulier, nous pouvons dire que les étudiants du public $\text{Math1}_{08/09}$ conservent des souvenirs corrects des principales idées liées au théorème des fonctions implicites. Seule la question, peut-être plus technique, sur la démonstration du théorème leur a réellement posé problème. Cela peut s'expliquer par le fait que seuls quelques éléments de démonstration figuraient dans le cours d'analyse de ces étudiants. De plus, il s'est écoulé un laps de temps assez considérable entre le moment où cette matière a été vue et celui où le questionnaire a été passé. Cependant, ce facteur temps s'est aussi révélé bénéfique pour les étudiants qui ont pu prendre du recul et acquérir un bagage leur ayant permis de juger la portée du théorème dans d'autres domaines des mathématiques. En témoignent les références fréquentes au théorème de Lagrange qui occupe un pan important du cours d'*Optimisation*, au programme du cursus de 3$^{\text{ème}}$ année du bachelier.
Le savoir appris dégagé chez les étudiants du groupe $\text{Phy1}_{08/09}$ révèle que ceux-ci semblent moins concernés par le théorème des fonctions implicites qui n'est que rarement employé dans l'ensemble de leurs cours. Les souvenirs de ces étudiants qui associent l'importance d'un résultat à l'emploi qu'on en fait, se sont donc, au fil du temps, quelque peu estompés. En effet, une grande partie de leurs réponses étaient assez globales et très approximatives.
Enfin, le groupe $\text{Math1}_{09/10}$ qui a abordé le théorème des fonctions implicites un an avant de répondre au questionnaire a davantage travaillé le résultat que les autres groupes. C'est pourquoi, les souvenirs de ces étudiants à propos de l'énoncé ou des méthodes permettant de le démontrer sont relativement intacts (même si la rigueur mathématique ne transparaît pas toujours dans leurs réponses). Par contre, les questions relatives à l'utilité et à l'importance du théorème leur ont posé plus de problèmes. En effet, même si pour une majorité le résultat est important, très peu ont réussi à expliquer leur réponse car le théorème ne sera repris et appliqué qu'ultérieurement dans leur formation.

4. Nous avons retrouvé la première de ces méthodes lorsque nous avons analysé le manuel de J. Mawhin, [19] dans le chapitre 4 de ce mémoire. L'évocation de la seconde méthode peut quant à elle nous laisser plus perplexes car nous n'avons pas retrouvé de démonstration récente du théorème la faisant intervenir. Par contre, il semblerait qu'elle apparaisse dans le *Théorème de l'Inversion de Lagrange*, apparenté à la première vraie preuve du théorème des fonctions implicites (voir le chapitre 3 de ce travail).

5. Cet argument est souvent mis en évidence par des étudiants du groupe $\text{Phy1}_{08/09}$.

Conclusion

Dans cette *Etude didactique du théorème des fonctions implicites au cours du premier cycle universitaire*, nous avons voulu établir un bilan du savoir associé à ce résultat en portant notre attention sur sa transposition didactique. Ce processus est ainsi devenu le fil conducteur des chapitres dont vous venez de terminer la lecture. En y ayant recours, nous avons espéré accéder aux transformations apportées au théorème entre chacune des phases de la transposition envisagée et y déceler l'origine des difficultés liées à son enseignement. Afin de mettre en évidence les résultats les plus importants de notre travail, nous nous proposons de passer en revue les caractéristiques des principales phases de la transposition didactique du théorème des fonctions implicites.

Depuis ses premiers balbutiements au XVII$^{\text{ème}}$ siècle jusqu'à la formulation de son exposé initial au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, le savoir savant relatif au théorème des fonctions implicites a connu de nombreuses évolutions avant de devenir l'outil d'analyse que l'on connaît à l'heure actuelle. Intervenant dans la résolution de certains problèmes liés à des domaines spécifiques des mathématiques ou employé dans des disciplines comme les sciences économiques et les sciences appliquées, son enseignement fait aujourd'hui partie des cours de mathématiques d'étudiants inscrits dans des cursus très différents.
Envisager la transposition didactique de ce résultat prend dès lors tout son sens puisqu'il nécessite des modes d'enseignement adaptés à la finalité des cursus cités. L'analyse des manuels effectuée dans le chapitre 4 de notre travail nous a permis de constater qu'à l'université, les balises et les normes caractérisant ces modes d'enseignement dépendent de l'optique dans laquelle souhaite évoluer l'enseignant. Nous avons ainsi rencontré, au cours de nos recherches, deux façons différentes d'aborder la théorie des fonctions implicites. La première en propose une approche explicative et est destinée à des étudiants universitaires davantage intéressés par la manipulation des fonctions implicites et l'utilisation de leur théorème que par la démonstration de celui-ci. Nous pensons ici à de futurs économistes, gestionnaires, ingénieurs et mathématiciens appliqués. Dans leurs syllabus, la démonstration du résultat n'est pas (ou peu) développée, les interprétations occupent une place non négligeable et les références à des situations concrètes sont bien présentes. La seconde tendance est quant à elle orientée vers l'obtention et la vérification de la preuve du théorème. Les supports de cours correspondants la développent et en proposent une, voire deux généralisations. Cependant, leurs auteurs les rédigent dans un seul type de cadre et ne font généralement appel qu'à un seul mode de représentation ; ce qui ne facilite pas l'accès aux objets mathématiques en jeu. De plus, ils n'en envisagent ni interprétation, ni illustration.
Nous avons apporté, dans les deux derniers chapitres de ce mémoire, une dimension plus concrète à la problématique étudiée. Nous nous sommes focalisés sur des étudiants de première année des bacheliers en sciences mathématiques et en sciences physiques des FUNDP. Le cours que ces

étudiants ont suivi sur le théorème des fonctions implicites était basé sur le syllabus de J.-J. Strodiot [24] et avait donc une visée explicative. La première expérience que nous leur avons proposée (reportée dans le chapitre 5) nous a permis d'accéder à quelques-unes de leurs conceptions sur les fonctions implicites. Certaines d'entre elles se sont révélées interpellantes. Nous pensons notamment à ces étudiants qui pensaient devoir travailler dans l'espace à trois dimensions parce que la fonction qu'on leur présentait était du troisième degré. Nous nous rappelons également de ces étudiants physiciens, les seuls à avoir trouver un moyen de déterminer analytiquement l'équation des tangentes qui leur étaient demandées ou encore de ceux qui, pour déterminer le coefficient angulaire d'une courbe définie implicitement voulaient mesurer la norme du gradient de la fonction qu'elle identifiait. Nous nous sommes rendus compte que ces conceptions préalables pouvaient être éterminantes dans les phases de la transposition didactique situées en amont du savoir appris. En effet, c'est au travers elles que les étudiants vont interpréter et s'approprier les propos de l'enseignant. Certaines de ces conceptions pourraient donc expliquer leurs questionnements, leurs interrogations, leurs incompréhensions mais aussi nous aider à comprendre l'origine de certaines de leurs erreurs.
Enfin, la dernière expérience du dispositif créé dans le cadre de ce mémoire nous a aidés à identifier ce qu'ont réellement appris et retenu les étudiants au terme de l'enseignement qui leur a été inculqué. Afin d'illustrer au mieux cette dernière phase de la transposition didactique, nous nous sommes penchés sur les souvenirs qu'ont conservés les étudiants sur le théorème des fonctions implicites. Pour y parvenir, nous leur avons proposé un questionnaire articulé autour des points suivants : les éléments composant l'énoncé du théorème des fonctions implicites, les outils utiles à sa démonstration et son utilité en mathématiques. De cette manière, nous avons pu caractériser le savoir appris des différents groupes interrogés et nous sommes aperçus que chaque groupe s'était approprié le savoir appris d'une façon particulière. Ainsi, les souvenirs conservés par les étudiants du public $\text{Math1}_{08/09}$ se sont révélés relativement corrects sur les principales idées du théorème des fonctions implicites ainsi que sur sa portée dans d'autres domaines que les mathématiques. Seule la question liée à sa démonstration leur a posé problème. Les étudiants du public $\text{Phy1}_{08/09}$ ont eu davantage de problèmes pour répondre aux questions et ont semblé moins concernés par le résultat. Enfin, le groupe $\text{Math1}_{09/10}$ a davantage travaillé le théorème que les autres groupes et a été plus à même de répondre aux questions concernant les outils employés dans sa démonstration.

Au terme de cette étude, nous avons pu constater la place occupée par les conceptions préalables des étudiants dans leurs modes de raisonnement. La manière d'appréhender et concevoir la notion de fonction implicite en dépend donc fortement. Prendre conscience de ces idées « déjà-là », comprendre qu'elles sont induites par l'enseignement transmis et essayer de les anticiper pourrait permettre de se diriger vers des méthodes d'enseignement favorisant la compréhension du théorème des fonctions implicites.

Au vu de la diversité des outils que propose la didactique des mathématiques, nous pensons qu'il existe de nombreuses pistes susceptibles d'améliorer et/ou approfondir les résultats issus de notre production. En effet, les expérience réalisées ces derniers mois ne représentent qu'une partie de ce qu'il est possible de mettre en œuvre pour s'approprier une problématique didactique. Nous pourrions par exemple envisager d'autres façons d'accéder au savoir appris par les étudiants comme leur proposer un test (ou une question d'examen) sur les fonctions implicites et analyser ce qu'il en ressort ou exploiter davantage le travail de groupe réalisé par le public

Math$1_{09/10}$.

Notre objectif initial était de dresser un état des lieux de l'enseignement du théorème des fonctions implicites au travers de sa transposition didactique. Nos expérimentations nous ont permis de percevoir l'importance des conceptions des étudiants dans l'apprentissage de cette partie du cours d'analyse. Cependant, une des phases de la transposition étudiée, le *savoir enseigné*, nous a échappé. Ce savoir, établi durant les heures de cours est entièrement régi par l'enseignant et ses conceptions personnelles. Dès lors, nous pourrions, à l'instar de ce qui a été fait avec les étudiants, recueillir l'avis de certains professeurs quant aux méthodes d'enseignement qu'ils proposent, les objectifs qu'ils poursuivent, les raisons pour lesquelles ils privilégient un type d'enseignement en particulier,... Recueillir ces informations pourrait s'avérer utile et nous permettre d'établir de nouveaux liens entre les conceptions des étudiants, leurs difficultés et les phases de la transposition didactique encadrant le savoir enseigné.
Nous pensons également qu'élargir notre horizon de recherche en proposant notre dispositif expérimental à des étudiants inscrits dans les autres institutions citées tout au long de ce travail, pourrait être un bon moyen de compléter, enrichir, généraliser et donner davantage de pertinence à nos observations et par conséquent, à nos résultats.
Cependant, les moyens dont nous disposions et l'optique dans laquelle nous avons évolué ne nous ont pas permis de porter à ces idées l'intérêt qu'elles auraient peut-être mérité. Nous les laissons donc en perspective pour d'éventuelles futures recherches.

Bibliographie

[1] Bair J. (1995) *ANALYSE MATHEMATIQUE à l'usage des étudiants inscrits en : seconde candidature en administration des affaires, seconde candidature en science économique, diplôme complémentaire en administration des affaires.* Belgique : Point de vue Editions.

[2] Barbeau E. & Hanna G. *Proof in mathematics.* University of Toronto.

[3] Balacheff N. (Septembre 2002, n°58) *Les cahiers du laboratoire Leibniz. Cadre,registre et conception. Note sur les relations entre trois concepts clés de la didactique.* Laboratoire Leibniz-IMAG, 46 av. Félix Viallet, 38000 Grenoble. France.

[4] Charlier E. & Romainville M. (2011-2012) *Psychopédagogie.* FAGRM402. FUNDP.

[5] Chevalier A. & Sauter M. *Narrations de recherche.* IREM. Université de Montpellier II.

[6] Chevallard Y. (1991) *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

[7] Delhez E. (2005) *ANALYSE MATHEMATIQUE (1re Partie)* Liège : Centrale des Cours de l'A.E.E.S.

[8] Douady R.(Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement) *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères. IREM n°6.* IREM de Paris VII.
(`www.univ-irem.fr/reperes/articles/6_article_40.pdf`.
Date de consultation : 19 Juin 2012).

[9] Dupin J.-J. & Johsua S. (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques.* Presses Universitaires de France.

[10] Duval R. *Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres.* Université du Littoral. IUFM. Nord Pas de Calais.

[11] Elstak I., Montiel M., Vidakovic D. & Wilhelmi M.R. (2010) *Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning in a multivariate context.* France. INRP Lyon.

[12] Grenier D. (2007) *La théorie des champs conceptuels et le modèle de conception. Didactique des Sciences.* UE TC1 Eléments d'épistémologie et de didactique. Notes de cours. Master2 R et P IC2A. Grenoble.
(`http ://prevert.upmf-grenoble/Specialite DEMS/Cours%202007/UE1/coursTCC%20Conceptions.]`
Date de consultation : 19 Juin 2012.

[13] Henry V. (2004) *Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes.* Thèse doctorale en didactique des mathématiques.

[14] Henry V. (2010-2011) *Pratiques de la didactique des mathématiques.* SAGRM216. FUNDP.

[15] Henry V. (2011-2012) *Enseigner une autre discipline que les mathématiques.* SAGRM217. FUNDP.

[16] Hitt F. (2004) *Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique.* Revue des sciences de l'éducation, vol. 30, n°2, pp. 329-354.
(`http ://id.erudit.org/iderudit/012672ar`)
Date de consultation : 18 Juin 2012.

[17] (Octobre 2003) Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques. *Revue MNEMOSYNE, n° 18.* Université Denis Diderot. Paris VII.

[18] Krantz S. G. & Parks H. R. *THE IMPLICIT FUNCTION THEOREM. History, theory and applications.* Birkhäuser. Boston. Basel. Berlin.

[19] Mawhin J. (1992) *Analyse. Fondements, techniques, évolution.* Belgique : De Boeck-Wesmael.

[20] Pourtier A. *La narration de recherche en mathématiques. Etre son propre observateur, mettre par écrit les différentes étapes de sa recherche.*

[21] Roger P. (2006) *Mathématiques pour l'économie et la gestion. Applications avec Excel.* France : Pearson Education.

[22] Sauter M. *Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège.* IREM. Université de Montpellier II.

[23] Sauter M. *Narrations de recherche. Une nouvelle pratique pédagogique.* Repères IREM 30, 9-21. TOPIQUES Editions Pont à Mousson.

[24] Strodiot J.-J. (1997) *Analyse (2ème Partie).* Namur : Librairie des Sciences.

[25] Thiry S. (2006) *Mathématiques pour l'économie et la gestion I.* Namur : Librairie des Sciences.

[26] Schneiders J.-P. (2007) *Analyse III (1re Partie).* Liège.

[27] Xhonneux S. (2011) *Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie.* Namur : Presses Universitaires.

[28] `http ://www.pixlines.com/ mireilleb/sfodem/BibliothequeSfodem/sfodem HTML/Chap2/fth3r1.htmlnarrationderecherche`

[29] `http ://www.pixlines.com/ mireilleb/sfodem/BibliothequeSfodem/sfodem_HTML/ Chap2/fth2r2.html`
Date de consultation : 03 Novembre 2011.

[30] `http ://www.irem.univ-montp2.fr/Historique-des-narrations-de`
Date de consultation : 23 Mars 2011.

[31] `http ://eppee.ouvaton.org/spip.php?article417&var_recherche=narration%20de%20recherche`
Date de consultation : 23 Mars 2011.

[32] `http ://www.math.ens.fr/culturemath/`
Date de consultation : 23 Mars 2011.

[33] http ://www.irem.univ-montp2.fr/
Date de consultation : 24 Mars 2011.

[34] lionelkaufmann.ch/histoire/MHS31Docs/Seance1/TranspositionDidactique.pdf
Date de consultation : 06 Avril 2012.

[35] www.ldes.unige.ch/publi/rech/concep/concep.htm
Date de consultation : 17 Avril 2012.

[36] www.irem.univ-rennes1.fr/ressources/docs_themes/ens-demo/texte/questessenpreu.pdf
Date de consultation : 21 Juin 2012.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Les manuels d'enseignement

A.1 Manuel de J. Bair (1995)

Chapitre IV

Quelques fonctions spéciales

IV.1 Fonctions implicites

Une fonction n'est pas toujours définie explicitement sous la forme classique $y = f(x)$, mais peut être donnée implicitement à l'aide d'une relation du type $F(x,y) = 0$. C'est notamment le cas, en économie, pour les courbes d'indifférence et d'Engel relatives à un consommateur disposant de deux biens, ainsi que pour les isoquantes et le chemin d'expansion d'une firme produisant un output à l'aide de deux inputs.

Penchons-nous tout d'abord sur le cas particulier d'une fonction y d'une seule variable indépendante x, définie implicitement par $F(x,y) = 0$. Remarquons d'emblée que toute égalité $F(x,y) = 0$ ne garantit pas l'existence d'une fonction bien définie; par exemple, $F(x,y) = x$ permet à y de prendre n'importe quelle valeur pour $x = 0$, ce qui est en contradiction avec la définition même d'une fonction. D'un autre côté, il peut exister plusieurs fonctions introduites par une même expression du type $F(x,y) = 0$; c'est le cas pour $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, qui donne naissance à deux fonctions définies sur l'intervalle $[-1,1]$, à savoir $+\sqrt{1-x^2}$ et $-\sqrt{1-x^2}$; toutefois, la solution est "localement unique", en ce sens que, pour tout point $M^* = (x^*, y^*)$ du cercle centré sur l'origine et de rayon unitaire (avec néanmoins $-1 < x^* < 1$), il existe un intervalle $]x^* - \varepsilon,\ x^* + \varepsilon[$, inclus dans $]-1,1[$, où la fonction $y = f(x)$ est parfaitement définie par la formule $x^2 + y^2 = 1$ et qui prend la valeur y^* pour $x = x^*$: ainsi,

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{pour} \quad M^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

tandis que

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{pour} \quad M^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

L'existence et l'unicité locale de la fonction $y = f(x)$ sont garanties par le théorème suivant (qui sera donné sans preuve).

Théorème d'existence des fonctions implicites. *Soit $F(x,y)$ une fonction qui s'annule pour les valeurs $x = x^*$ et $y = y^*$, et qui est continûment dérivable dans un voisinage de $M^* = (x^*, y^*)$. Si $\frac{\partial F}{\partial y}(M^*) \neq 0$, il existe, pour x suffisamment proche de x^*, une et une seule fonction $y = f(x)$ telle que $y^* = f(x^*)$ et $F(x, f(x)) = 0$.*

Lorsque l'existence d'une fonction définie implicitement est assurée, ses dérivées successives peuvent être calculées de proche en proche (si elles existent bien sûr) en égalant à zéro les dérivées successives de $F(x,y)$ par rapport à x, ces dérivées étant obtenues grâce à la formule de dérivation des fonctions composées, ce qui donne

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial F}{\partial y}y'' = 0, \ldots$$

On dispose également de cet important résultat.

Théorème de dérivation des fonctions implicites. *Soit y une fonction d'une variable indépendante x, définie implicitement par $F(x,y) = 0$. Sous réserve d'existence, les dérivées successives de y sont données par*

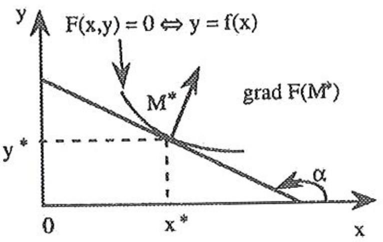
$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} \text{ et } y'' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & F'_x & F'_y \\ F'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ F'_z & F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}}{(F'_y)^3}$$

Remarquons que la dérivée première y' de y peut encore être obtenue par le calcul de la différentielle totale de F; de fait, $F(x,y) = 0$ entraîne

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F'_x}{F'_y};$$



en particulier, la valeur de la dérivée de y en x^*, à savoir

$$\frac{dy}{dx}(x^*) = f'(x^*),$$

donne la pente (égale à $\operatorname{tg}\alpha$) de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse x^*;

l'opposé de la dérivée y', c'est-à-dire le rapport $\frac{F'_x}{F'_y}$, joue un rôle important en économie et est souvent appelé taux marginal de substitution.

Ce raisonnement montre que le gradient de F est perpendiculaire à la tangente à la courbe d'équation implicite $F(x,y) = 0$, puisque *grad* $F \times (dx, dy) = 0$: le gradient de F au point $M^* = (x^*, y^*)$ indique donc bien la direction de la perpendiculaire à la tangente et donc la direction de la normale à la courbe $F(x,y) = 0$ en M^*.

Par ailleurs, la dérivée seconde y'' de y, dont le signe détermine le sens de la concavité de y, peut être obtenue directement par le calcul de la dérivée de $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$; on obtient successivement, en tenant compte des égalités $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ et $F''_{xy} = F''_{yx}$ (théorème de Schwarz),

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right) = -\frac{F'_y\frac{d}{dx}F'_x - F'_x\frac{d}{dx}F'_y}{(F'_y)^2} = -\frac{F'_y(F''_{xx} + F''_{xy}y') - F'_x(F''_{yx} + F''_{yy}y')}{(F'_y)^2} \\ &= \frac{-F'_yF''_{xx} + F'_yF''_{xy}\frac{F'_x}{F'_y} + F'_xF''_{yx} - F''_{yy}F'_x\frac{F'_x}{F'_y}}{(F'_y)^2} = \frac{\left|\overline{\mathcal{H}F}\right|}{(F'_y)^3}, \end{aligned}$$

où $\left|\overline{\mathcal{H}F}\right|$ désigne le "hessien bordé" de F, à savoir

$$\left|\overline{\mathcal{H}F}\right| = \begin{vmatrix} 0 & F'_x & F'_y \\ F'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ F'_y & F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}.$$

En guise d'illustration, considérons la relation implicite $F(x,y) = y^3 + xy + 1 = 0$: elle détermine univoquement une fonction $y = f(x)$ définie pour tout x non négatif et qui vaut -1 pour $x = 0$. Les deux premières dérivées de y peuvent être obtenues comme suit : $y + (3y^2 + x)y' = 0$, puis $2y' + 6y(y')^2 + (3y^2 + x)y'' = 0$, d'où

$$y' = -\frac{y}{3y^2 + x}$$

et

$$y'' = -\frac{2y' + 6y(y')^2}{3y^2 + x} = \frac{2xy}{(3y^2 + x)^3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y & 3y^2 + x \\ y & 0 & 1 \\ 3y^2 + x & 1 & 6y \end{vmatrix}}{(3y^2 + x)^3}.$$

Pour une fonction implicite y de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, définie par l'équation $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$, le calcul des dérivées partielles se fait, aux notations près, en suivant le même procédé que pour le cas $n = 1$. En égalant à zéro la dérivée partielle de F par rapport à x_i (calculée en traitant les variables x_j, autres que x_i, comme des constantes, mais x_i et y comme des fonctions de x_i), la formule de dérivation des fonctions composées donne, si $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad \text{pour tout} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur peuvent être obtenues par la même voie.

Par exemple, considérons la fonction z, des variables indépendantes x et y, définie implicitement par $e^{x+y+z} = xyz$. En dérivant par rapport à x les deux membres de l'égalité $e^{x+y+z} - xyz = 0$, on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+y+z} - yz}{e^{x+y+z} - xy}$$

qui, au moyen de l'équation proposée, se réduit à

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z(x-1)}{x(z-1)};$$

de même,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z(y-1)}{y(z-1)};$$

pour calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, reprenons $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z(x-1)}{x(z-1)}$ et dérivons par rapport à y cette fois, sachant que $-\frac{x-1}{x}$ joue le rôle de facteur constant; il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{x-1}{x} \frac{(z-1)\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial z}{\partial y}}{(z-1)^2} = \frac{x-1}{x} \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{(z-1)^2} \\ &= \frac{x-1}{x} \frac{\left[\frac{-z(y-1)}{y(z-1)}\right]}{(z-1)^2} = -\frac{(x-1)(y-1)z}{xy(z-1)^3}. \end{aligned}$$

Plus généralement, penchons-nous sur le cas de m fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$, qui dépendent chacune de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et qui sont définies implicitement par m relations du type $F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$.

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses, il existe m fonctions f_j telles que $y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$; ce résultat permet théoriquement l'élimination des y_j à partir d'équations ($F_j = 0$) non nécessairement linéaires.

S'il n'est pas toujours aisé d'écrire les y_j explicitement en fonction des x_i, il est néanmoins possible de calculer les dérivées partielles des y_j par rapport aux variables x_i. De fait, on obtient, comme précédemment, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et pour tout $j = 1, 2, \ldots, m$,

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0;$$

il reste alors à résoudre ce système linéaire de m équations par rapport à $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_i}$; ce système est cramérien en les inconnues $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ lorsque est non nul le *jacobien*

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

Comme pour le cas $n = m = 1$, cette dernière condition $J \neq 0$ garantit l'existence de fonctions f_j, ainsi qu'en atteste le résultat suivant (encore donné sans preuve).

Théorème général des fonctions implicites. *Si le jacobien*

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$$

ne s'annule pas en un point $M^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *et si toutes les fonctions* $F_1, F_2, \ldots, F_m$ *sont continûment dérivables dans un voisinage de* M^* *(situé dans l'espace* $\mathbb{R}^{n+m}$*), il existe* m *fonctions* $f_j(x_1, \ldots, x_n)$ *telles que* $y_j^* = f_j(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *pour tout* $j = 1, 2, \ldots, m$*, ces fonctions* f_j *étant uniques et définies sur un voisinage* V *du point* $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$*, avec* $F_j(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ *pour tout* $j = 1, 2, \ldots, m$ *et pour tout point* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *de* V.

Pour illustrer ce qui précède, introduisons les fonctions y et z de la variable indépendante x, définies implicitement par le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

Comme les valeurs $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ vérifient ces deux équations, il existe deux fonctions $y = f(x)$ et $z = g(x)$, définies au voisinage de 0, telles que $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$; en effet, le jacobien des fonction $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $F_2(x, y, z) = x + y + z - 1$, par rapport aux variables y et z, vaut

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

et est donc non nul pour $y = 1$ et $z = 0$. En dérivant comme indiqué ci-dessus les deux égalités $F_1 = 0$ et$F_2 = 0$, il vient

$$\begin{cases} 2x + 2yy' + 2zz' = 0 \\ 1 + y' + z' = 0 \end{cases},$$

ou, en résolvant sur y' et z' :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{z - x}{y - z} \\[2ex] z' = \dfrac{x - y}{y - z} \end{cases}.$$

IV.2 Enveloppes

Considérons une famille de courbes planes C qui dépendent d'un paramètre λ et sont définies par l'équation $F(x, y, \lambda) = 0$. Si toutes ces courbes C restent tangentes à une courbe déterminée $\mathcal{E}$, cette dernière s'appelle l'*enveloppe* de la famille et les courbes C sont dites les *enveloppées.*

Pour illustrer très simplement cette notion, analysons la famille des courbes caractérisées par l'équation $(x - \lambda)^2 = y$.

A.2 Manuel de P. Roger (1996)

Vérifions que $H_U(x)$ est définie négative en calculant $y^T H_U(x) y$, où y est un vecteur non nul quelconque de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} y^T H_U(x) &= (y_1, y_2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{y_1}{x_1^2}, -\frac{y_2}{x_2^2} \right) \\ y^T H_U(x) y &= \left(-\frac{y_1}{x_1^2}, -\frac{y_2}{x_2^2} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\frac{y_1^2}{x_1^2} - \frac{y_2^2}{x_2^2} \end{aligned}$$

On a $y^T H_U(x) y < 0$. Cela montre que U est strictement concave. On retrouve, comme dans le cas des fonctions d'une variable, l'interprétation économique de l'utilité marginale décroissante. L'utilité supplémentaire obtenue par un accroissement de la consommation diminue quand le niveau de cette consommation augmente.

8.3 Fonctions implicites et fonctions homogènes

8.3.1 *Le théorème des fonctions implicites*

Il n'est pas rare que plusieurs variables économiques soient liées par une relation fonctionnelle mais qu'il soit impossible d'exprimer (explicitement) une variable en fonction des autres. Nous avons vu à plusieurs reprises un exemple de ce type : le taux actuariel r d'une obligation est lié à son prix p et aux flux $F_1, ..., F_T$ qu'elle engendre sous forme de coupons et de prix de remboursement. Il est pourtant impossible d'exprimer explicitement r comme une fonction de l'ensemble de variables $(p, F_1, ..., F_T)$. De même, la satisfaction d'un individu liée à la consommation d'un panier de biens $(x_1, ..., x_p)$ est mesurée par une fonction d'utilité à valeurs réelles $U(x_1, ..., x_p)$. Pour un niveau d'utilité fixé u, l'égalité $U(x_1, ..., x_p) = u$ induit une relation entre x_1 et les $p-1$ autres variables. Il n'est pas toujours possible d'exprimer cette relation de manière explicite.

Les résultats de cette section fournissent un outil permettant de néanmoins mesurer la sensibilité d'une variable par rapport à une variation d'une autre variable. Nous présentons d'abord le cas le plus simple d'une relation émanant d'une fonction de deux variables seulement.

Définition 8.27 *Soit F une fonction définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$. On dit que l'équation $F(x, y) = 0$ définit une fonction implicite s'il existe une fonction $g(x) = y$, définie sur un intervalle et à valeurs dans un intervalle, telle que $F(x, g(x)) = 0$.*

Le caractère implicite de la relation entre x et $y = g(x)$ apparaît lorsqu'il n'est pas possible d'exprimer (explicitement) g.

Proposition 8.28 *Théorème des fonctions implicites (2 variables)*

Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et définit une fonction implicite g par la relation $F(x, y) = 0$, on a :

$$g'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

La notation $\frac{\partial y}{\partial x}$ peut paraître surprenante : c'est un abus de langage (ou d'écriture !) mais elle est d'utilisation courante, c'est pourquoi nous la mentionnons. De même, les notations $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ peuvent sembler imprécises puisque le point auquel ces dérivées partielles sont calculées n'est pas spécifié. Elles sont cependant aussi d'usage permanent dès que le contexte évite l'ambiguïté. Ici, par exemple, on sait que ces dérivées sont calculées aux points (x, y) tels que $F(x, y) = 0$.

Ce théorème est utilisé dans les modèles économiques pour faire de la « statique comparative ». Cela consiste à maintenir une fonction de deux variables (production, utilité, coût, valeur actuelle nette) à un niveau donné, et à analyser l'impact de la variation d'une variable sur le niveau de l'autre variable.

Exemple 8.10 Le taux interne de rentabilité (TIR)

Un projet d'investissement nécessite, dans la configuration la plus courante, une dépense initiale qui va engendrer des rentrées futures. Notons F_0 la dépense initiale ($F_0 < 0$ car c'est une dépense) et $F_t, t = 1, ..., T$ les flux futurs ($F_t > 0$ car c'est une recette), T désignant la durée du projet. La **valeur actuelle nette** de ce projet, pour un taux d'actualisation r, est définie par :

$$VAN(r) = \sum_{t=0}^{T} \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

Le **taux interne de rentabilité** (TIR) est le taux r^* qui annule la VAN. r^* est donc solution de l'équation :

$$VAN(r) = 0$$

Cette relation définit une fonction implicite entre r et n'importe quel flux du projet. Cette fonction est implicite car on ne sait pas exprimer la fonction f suivante :

$$r^* = f(T, F_t, t = 0, ..., T)$$

En revanche, le théorème des fonctions implicites nous autorise à calculer la sensibilité du TIR à une variation des flux. Par exemple :

$$\frac{\partial r}{\partial F_0} = -\frac{\frac{\partial VAN}{\partial F_0}}{\frac{\partial VAN}{\partial r}} = -\frac{1}{\frac{\partial VAN}{\partial r}}$$

Or, on a :

$$\frac{\partial VAN}{\partial r} = -\sum_{t=0}^{T} \frac{tF_t}{(1+r)^{t+1}}$$

On aboutit à :

$$\frac{\partial r}{\partial F_0} = \frac{1}{\sum_{t=0}^{T} tF_t(1+r)^{-t-1}}$$

Une lecture trop rapide pourrait amener le lecteur à trouver étrange qu'un TIR soit une fonction croissante du coût initial du projet (la dérivée ci-dessus est positive). Il faut garder à l'esprit que $F_0 < 0$. Par conséquent, un accroissement marginal de F_0 correspond à une diminution marginale du coût du projet.

La proposition 8.28 se généralise pratiquement sans modification au cas de fonctions de p variables, quand on souhaite étudier l'impact des variations d'une variable sur celles d'une autre variable, et qu'on a, par exemple, une relation $F(x) = 0$ qui définit une fonction implicite entre deux variables x_j et x_k.

Proposition 8.29 *Théorème des fonctions implicites (p variables)*

Soit F une fonction de classe C^1, définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^p$. On suppose que F définit une fonction implicite liant x_j et x_k par l'intermédiaire de la relation $F(x) = 0$. On a alors :

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial x_k}}$$

Dans cette formulation, x_k désigne la k-ième variable et x_j la j-ième. Cette proposition n'est pas très différente de la proposition 8.28 puisque les variables autres que x_k et x_j ne jouent aucun rôle. C'est « comme si » on travaillait avec une fonction de deux variables en considérant les $(p-2)$ autres variables comme des constantes.

8.3.2 Fonctions homogènes et théorème d'Euler

Les fonctions homogènes apparaissent dans de nombreuses situations en économie mais l'exemple le plus courant, et au contenu concret le plus évident, est celui des fonctions de production. Posez-vous la question suivante : comment évolue la production d'une entreprise quand on double le personnel, le matériel, en bref, l'ensemble des facteurs de production ? Vous répondrez peut-être intuitivement que la production va doubler. Choisir cette réponse revient à supposer que la fonction de production de l'entreprise est homogène de degré 1. La définition suivante formalise et généralise cette remarque.

Définition 8.30 *Soient f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et D^* un sous-ensemble de D. f est **homogène** de degré α sur D^* si pour tout $x \in D^*$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ on a :*

$$\lambda x \in D \text{ et } f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$$

Notez que si $\alpha = 1$, si $x^T = (x_1, ..., x_p)$ représente des quantités de facteurs de production (aussi appelés « inputs ») et si $f(x)$ désigne la quantité produite (aussi appelée « output »), on a $f(2x) = f(2x_1, 2x_2, ..., 2x_p) = 2f(x_1, x_2, ..., x_p) = 2f(x)$. En doublant les quantités d'inputs, on a doublé la quantité d'output.

Quand une fonction de production est homogène de degré $\alpha > 1$, cela signifie que le doublement des quantités d'inputs fait plus que doubler le volume d'output. On évoque alors les « économies d'échelle », c'est-à-dire la diminution du coût de production unitaire quand la quantité produite augmente.

En constatant l'égalité $f(2x) = 2f(x)$, on peut être tenté d'assimiler les fonctions homogènes de degré 1 et les formes linéaires présentées au chapitre 7. Ce serait une

A.3 Manuel de S. Thiry (2006)

tion de production devient

$$Q(K(t), L(t), T(t)) .$$

Grâce à (3.15), on peut écrire

$$\frac{dQ}{dt}(t) = Q'_K(K(t), L(t), T(t))\ K'(t) + Q'_L(K(t), L(t), T(t))\ L'(t) + Q'_T(K(t), L(t), T(t))\ T'(t) .$$

Si $Q(K, L, T)$ est la fonction de Cobb-Douglas,

$$Q(K, L, T) = A\ K^a\ L^b\ T^c \qquad (A, a, b, c = \text{constantes} > 0),$$

alors

$$\frac{dQ}{dt}(t) = a\ A\ K^{a-1}\ L^b\ T^c \cdot K'(t) + b\ A\ K^a\ L^{b-1}\ T^c \cdot L'(t) + c\ A\ K^a\ L^b\ T^{c-1} \cdot T'(t) .$$

Divisons les deux membres de cette égalité par Q pour obtenir le taux de variation relatif de la fonction de production. On obtient :

$$\frac{\frac{dQ}{dt}}{Q}(t) = a\ \frac{K'(t)}{K(t)} + b\ \frac{L'(t)}{L(t)} + c\ \frac{T'(t)}{T(t)} .$$

Le taux de variation relatif de la production est donc une somme pondérée des taux de variation relatifs du capital, du travail et de la superficie des terres cultivées. Les facteurs de poids sont les exposants respectifs a, b et c.

3.7. Dérivation implicite

Certaines fonctions ne sont pas décrites explicitement mais sont définies comme solution d'une équation de plusieurs variables. C'est à l'étude de ces fonctions, et plus particulièrement au calcul de leurs dérivées, que nous consacrons ce paragraphe.

3.7.1 Pente d'une courbe de niveau et dérivée d'une fonction d'une variable définie implicitement

Considérons une fonction de deux variables $F(x, y)$ ainsi que l'équation

$$F(x, y) = c \qquad (c \text{ est une constante}).$$

Cette équation représente une courbe de niveau de la fonction F (voir §2.2.2). Supposons que cette équation définisse y implicitement comme une fonction d'une variable $y = f(x)$ sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ ainsi qu'illustré à la figure 3.11. Cela signifie que

$$\forall x \in I : \qquad F(x, f(x)) = c . \tag{3.16}$$

Si f est dérivable, que vaut $f'(x)$? Si la courbe de niveau est telle que celle de la figure 3.11, le problème revient donc à déterminer la pente de la courbe en chaque point P de coordonnées $(x, f(x))$, c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point.

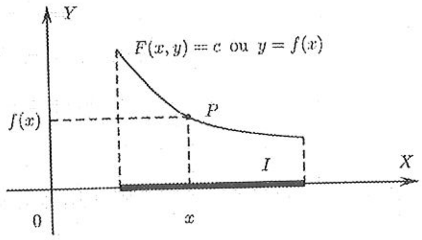


Figure 3.11. Quelle est la pente en P ?

Pour déterminer $f'(x)$, il nous suffit d'utiliser la règle de la chaîne décrite au §3.6. (cas 2) et de calculer la dérivée totale (par rapport à x) de chacun des deux membres de (3.16). On obtient, si F est différentiable :

$$F'_x(x,f(x))\cdot\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1}+F'_y(x,f(x))\cdot\underbrace{\frac{df(x)}{dx}}_{f'(x)}=0\,.$$

Et donc

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}\qquad\text{si}\quad F'_y(x,f(x))\neq 0\,.$$

Cette formule nous donne à la fois la dérivée de la fonction $y=f(x)$ définie implicitement pour $F(x,y)=c$ et la pente de la courbe de niveau $F(x,y)=c$ au point (x,y). Ce résultat est résumé dans la proposition suivante :

Proposition 3.13 (Pente en un point d'une courbe de niveau et dérivée d'une fonction d'une variable définie implicitement)

Soit $F(x,y)$ une fonction différentiable.

Si

$$\underbrace{F(x,y)=c}_{(3.17)}\qquad\Rightarrow\qquad y=f(x)=\text{fonction dérivable sur un intervalle } I \text{ de } I\!R$$

alors la pente de la courbe de niveau définie par (3.17) est donnée par

$$y'=f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\qquad\text{pour tout } (x,y) \text{ tel que } F(x,y)=c \text{ et } F'_y(x,y)\neq 0.$$

Exemple 3.11

Considérons la courbe d'équation

$$x^3+x^2y-2y^2-10y=0\,.\tag{3.18}$$

Nous allons déterminer la pente et l'équation de la tangente au point $(x,y)=(2,1)$.

Pour cela, nous définissons

$$F(x,y) = x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y \ .$$

L'équation (3.18) est équivalente à

$$F(x,y) = 0$$

qui est une courbe de niveau de F .

- Nous commençons par vérifier que le point de coordonnées $(x,y) = (2,1)$ est bien sur cette courbe de niveau, c'est-à-dire que

$$F(2,1) = 0 \ .$$

- La proposition 3.13 nous permet d'écrire

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 4y - 10} \text{ pour } (x,y) \text{ tel que } F(x,y) = 0 \text{ et } x^2 - 4y - 10 \neq 0$$

Pour $(x,y) = (2,1)$ on obtient donc $y' = 8/5$.

- L'équation de la tangente à la courbe au point $(2,1)$ est donc

$$y - 1 = \frac{8}{5}\,(x-2) \ .$$

Remarque importante :
La courbe est représentée à la figure 3.12 (dessinée par un programme d'ordinateur). On remarque que pour plusieurs valeurs de x , il existe plus qu'une valeur de y telle que (x,y) soit situé sur la courbe. Par exemple, $(2,1)$ et $(2,-4)$ sont tous deux sur la courbe. Cela signifie qu'une équation $F(x,y) = c$ peut définir plus qu'une fonction $f(x)$ telle que

$$F(x, f(x)) = c \ .$$

Dans l'exemple ci-contre, la pente de la courbe au point $(2,-4)$ est donnée par $y' = 0.4$.

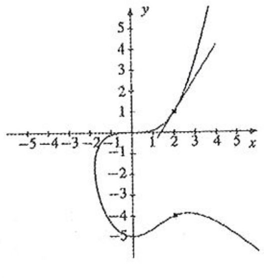


Figure 3.12. Graphe de $x^3 + x^2y - 2y^2 - 10y = 0$

L'équation $F(x,y) = c$ ne permet pas toujours d'obtenir une expression analytique de $y = f(x)$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.12

Supposons que l'équation

$$e^{xy^2} - 2x - 4y = c$$

définisse implicitement une fonction dérivable $y = f(x)$.
Nous allons déterminer une valeur de c *telle que* $f(0) = 1$ *et ensuite déterminer* $y'(0) = f'(0)$.

Définissons

$$F(x,y) = e^{xy^2} - 2x - 4y\,.$$

L'équation définissant implicitement $y = f(x)$ est

$$F(x,y) = c\,.$$

Puisque $f(0) = 1$, on obtient

$$F(0,1) = e^0 - 4 = c \qquad \text{et donc} \quad c = -3\,.$$

La proposition 3.13 permet d'écrire

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\,.$$

Or, $F'_x(x,y) = y^2\, e^{xy^2} - 2$ et $F'_y(x,y) = 2xy\, e^{xy^2} - 4$

$$y'(x) = -\frac{y^2\, e^{xy^2} - 2}{2xy\, e^{xy^2} - 4} \qquad \text{où} \quad y = f(x)\,.$$

Et

$$y'(0) = f'(0) = -\frac{1\, e^0 - 2}{0 - 4} = -\frac{1}{4}\,.$$

Remarquons que dans cet exemple, il n'est pas possible de déterminer analytiquement la fonction $f(x)$ mais que, malgré cela, il est possible de déterminer sa dérivée.

3.7.2 Dérivées d'une fonction de deux variables et définie implicitement

Considérons une fonction de trois variables $F(x,y,z)$ ainsi que l'équation

$$F(x,y,z) = c \qquad (c \text{ est une constante}).$$

En général, cette équation représente une surface dans l'espace à trois dimensions $I\!R^3$, constituée par tous les triplets (x, y, z) qui satisfont à l'équation. Cette surface est appelée le **graphe** de l'équation. Supposons que cette équation définisse z implicitement comme une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ sur un certain domaine A de $I\!R^2$.

Cela signifie que

$$\forall (x, y) \in A : \qquad F(x, y, f(x, y)) = c\,. \tag{3.19}$$

Si F est différentiable, nous pouvons utiliser la règle de la chaîne décrite au §3.6. (cas 4) pour calculer les dérivées partielles par rapport à x et à y des deux membres de (3.19). On obtient

* en dérivant par rapport à x :

$$F'_x(x, y, f(x, y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} + F'_y(x, y, f(x, y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{0} + F'_z(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,;$$

* en dérivant par rapport à y :

$$F'_x(x, y, f(x, y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{0} + F'_y(x, y, f(x, y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{1} + F'_z(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,.$$

Si $F'_z(x, y, f(x, y)) \neq 0$, les dérivées partielles de $z = f(x, y)$ sont donc

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}\,.$$

Ces résultats sont résumés dans la proposition suivante.

Proposition 3.14 (Dérivées partielles d'une fonction de deux variables définie implicitement)
Soit $F(x, y, z)$ une fonction différentiable.
Si

$$F(x, y, z) = c \quad \Rightarrow \quad z = f(x, y) = \textit{fonction différentiable sur un domaine } A \subseteq I\!R^2$$

alors

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \end{aligned}\right\} \textit{pour tout } (x, y, z) \textit{ tel que } F(x, y, z) = c \textit{ et } F'_z(x, y, z) \neq 0\,.$$

…cice 3.12

…quation

$$x - 2y - 3z + z^2 = -2 \tag{3.20}$$

…finit $z = f(x, y)$ comme une fonction deux fois différentiable (c'est-à-dire que la fonction … différentiable ainsi que toutes ses dérivées partielles). *Déterminer z'_x et z'_y ainsi que z''_{xx}, … et z''_{yy}. Calculer ensuite la valeur de ces dérivées lorsque $(x, y, z) = (0, 0, 2)$.*

…ution

…ient $F(x, y, z) = x - 2y - 3z + z^2$ et $c = -2$.

* Nous commençons par vérifier que le point de coordonnées $(x, y, z) = (0, 0, 2)$ est bien sur la surface décrite par l'équation (3.20), c'est-à-dire que

$$F(0, 0, 2) = -2 .$$

* Nous allons ensuite utiliser la proposition 3.14 pour calculer z'_x et z'_y. On obtient

$$F'_x = 1 , \qquad F'_y = -2 , \qquad F'_z = -3 + 2z$$

et donc

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{2z-3} \\ z'_y &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-2}{2z-3} = \frac{2}{2z-3} \end{aligned}\right\} \quad \text{si } z \neq \frac{3}{2}.$$

* Nous pouvons maintenant utiliser ces deux expressions pour calculer les dérivées partielles secondes, en gardant bien à l'esprit le fait que z est une fonction de (x, y).

On obtient

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(z'_x) = \frac{2}{(2z-3)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2}{(2z-3)^3} ,$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{1}{2z-3}\right]$$

$$= \frac{2}{(2z-3)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{(2z-3)^2}\, z'_y = \frac{4}{(2z-3)^3} ,$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2}{2z-3}\right]$$

$$= \frac{-4}{(2z-3)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4}{(2z-3)^2}\, z'_y = \frac{-8}{(2z-3)^3} .$$

Pour $(x, y, z) = (0, 0, 2)$, on obtient

$$z'_x = -1\,, \qquad z'_y = 2\,,$$
$$z''_{xx} = -2\,, \qquad z''_{xy} = 4\,, \qquad z''_{yy} = -8\,.$$

3.7.3 Dérivées d'une fonction de n variables définie implicitement

Les propositions 3.13 et 3.14 peuvent être étendues à des fonctions de plusieurs variables comme indiqué dans la proposition suivante.

Proposition 3.15 (Dérivées partielles d'une fonction de n variables définie implicitement)
Soit $F(x_1, \ldots, x_n, z)$ une fonction différentiable.
Si

$$F(x_1, \ldots, x_n, z) = c \quad \Rightarrow \quad z = f(x_1, \ldots, x_n) = \textit{fonction différentiable sur } A \subseteq I\!R^n$$

alors, pour $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, z)}{F'_z(x_1, \ldots, x_n, z)}$$

$$\textit{pour tout } (x_1, \ldots, x_n, z) \textit{ tel que } \begin{cases} F(x_1, \ldots, x_n, z) = c \\ \quad \textit{et} \\ F'_z(x_1, \ldots, x_n, z) \neq 0\,. \end{cases}$$

3.8. Fonctions homogènes

3.8.1 Fonctions homogènes : définition et exemples

Une classe de fonctions particulièrement importante en économie est celle des fonctions homogènes. Elles sont définies comme suit :

Définition 3.12 (Fonction homogène)
Soient α un nombre réel et $f : D \subseteq I\!R^n \to I\!R$ une fonction de n variables.
On suppose que le domaine D vérifie la condition

$$\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in D \quad \text{et} \quad \forall\, t > 0 : \qquad t(x_1, \ldots, x_n) \in D\,.$$

On dit que f est homogène de degré α si

$$\forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in D \quad \text{et} \quad \forall\, t > 0 : \qquad f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha\, f(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Fonctions définies implicitement

35. Les équations suivantes définissent implicitement z comme une fonction de (x, y). Calculez pour chaque cas les dérivées partielles z'_x et z'_y.

(a) $3x + y - z = 0$

(b) $xyz + xz^3 - xy^2z^5 = 1$

(c) $e^{xyz} = 3xyz$

36. La fonction F est définie pour tout x, y par $F(x, y) = x\, e^{y-3} + xy^2 - 2y$.

(a) Montrez que le point de coordonnées $(1, 3)$ se trouve sur la courbe de niveau d'équation $F(x, y) = 4$.

(b) Déterminez l'équation de la droite tangente à cette courbe au point de coordonnées $(1, 3)$.

37. Chacune des équations suivantes définit implicitement y comme une fonction de x. Dans chaque cas, calculez $\dfrac{dy}{dx}$.

(a) $y^5 + x^2y^3 = 1 + y\, e^{x^2}$

(b) $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

(c) $\sin x + \cos y = \sin x \cos y$

38. Même question qu'à l'exercice 35 pour les équations suivantes :

(a) $xy^2 + yz^2 + zx^2 = 3$

(b) $xyz = \cos(x + y + z)$

(c) $x\, e^y + yz + z\, e^x = 0$

(d) $\ln(x + yz) = 1 + xy^2z^3$

39. Vérifiez que les points de coordonnées $(x, y) = (1, 1)$, $(1, 0)$ et $(-2, 1)$ sont sur une courbe de niveau de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ et déterminez la pente de la tangente à la courbe de niveau en chacun de ces points.

Fonctions homogènes

40. Examinez si chacune des fonctions suivantes est homogène et déterminez son degré d'homogénéité.

(a) $f(x, y) = 2x + 5y$

(b) $g(x, y) = 3x + 2y - 1$

(c) $h(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{x + y + z}$

(d) $F(x, y) = \sqrt{xy}\, \ln\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy}\right)$

(e) $G(x, y) = \ln x + \ln y$

(f) $H(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{(x_1x_2x_3)^2}{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4} \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}\right)$

(g) $Q(x_1, x_2, x_3) = (a\, x_1^d + b\, x_2^d + c\, x_3^d)^g$

A.4 Manuel de J. Mawhin (1992)

et dès lors

$$0 \leq (1-\alpha)|y^* - y^{**}|_j \leq 0,$$

ce qui implique $y^* = y^{**}$. Enfin, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, si l'on fait tendre q vers l'infini dans (5.9), on obtient

$$|y_k - y^*|_j \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha}|g(y_0) - y_0|_j.$$

■

Par exemple, pour chaque $a \in]-1,1[$ et chaque $b \in \mathbb{R}$, l'*équation de Kepler*

$$y = a \sin y + b,$$

possède une solution unique $y^* = \lim_{k\to\infty} y_k$ où $y_0 \in \mathbb{R}$ est arbitraire et, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$,

$$y_k = a \sin y_{k-1} + b,$$

puisque l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(y) = a \sin y + b$ est telle que, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $v \in \mathbb{R}$, il existe, par le théorème de Lagrange, $\theta \in]0,1[$ tel que

$$|g(u) - g(v)| = |a||(\sin u - \sin v)| = |a||\cos(u + \theta(v-u))(u-v)| \leq |a||u-v|,$$

et g est donc une contraction sur $\mathbb{R}$ de constante $|a| \in [0,1[$.

5.5 Fonctions implicites : existence

Soit F une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. L'ensemble de ses zéros

$$\Phi = \{(x,y) \in \text{dom } F : F(x,y) = 0\} \tag{5.10}$$

constitue donc un graphe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. L'objet de la théorie des *fonctions implicites* est de déterminer des conditions sur F sous lesquelles le graphe Φ est une *fonction* de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (problème global) ou sous lesquelles la restriction de Φ à un voisinage d'un de ses points est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (problème local). Pour situer la difficulté du problème et motiver les hypothèses du théorème qui donnera la solution du problème local (le problème global est beaucoup plus difficile et ne sera pas abordé ici), considérons tout d'abord le cas où F est une application affine de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle peut donc s'écrire

$$F(x,y) = ax + by + c,$$

où a, b et c sont des réels. Pour que le graphe Φ correspondant soit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il faut qu'à chaque $x \in \mathbb{R}$ corresponde au plus un élément $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$ax + by + c = 0,$$

c'est-à-dire il faut que l'équation linéaire en y

$$by = -ax - c$$

ait au plus une solution; ce sera le cas si et seulement si $b \neq 0$. On notera que pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et chaque $y \in \mathbb{R}$, $b = D_2F(x,y)$ est la dérivée partielle de F par rapport à y en (x,y).

Considérons maintenant une situation simple où F est non linéaire. Soit F l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Le graphe Φ correspondant est la partie de $\mathbb{R}^2$ formée des points du cercle de centre 0 et de rayon 1 et ce n'est pas un graphe fonctionnel, puisque, pour chaque $x \in]-1,1[\subset [-1,1] = \text{dom}\, \Phi$, il existe deux éléments distincts $(x, (1-x^2)^{1/2})$ et $(x, -(1-x^2)^{1/2})$ appartenant à Φ. Pour la même raison, la restriction de Φ à n'importe quel voisinage du point $(-1,0)$ et du point $(1,0)$ de Φ ne sera pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ces points sont les seuls points du graphe de la forme $(x,0)$. Si $(x,y) \in \Phi$ avec $y > 0$ (resp. $y < 0$), on vérifie sans peine que la restriction de Φ au voisinage $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ (resp. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$) de (x,y) est une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de domaine $[-1,1]$ donnée explicitement par $f(x) = (1-x^2)^{1/2}$ (resp. $f(x) = -(1-x^2)^{1/2}$). Notons que, pour chaque $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $D_2F(x,y) = 2y$ et dès lors que la restriction de Φ est une fonction sur un voisinage convenable des points (x,y) tels que $D_2F(x,y) \neq 0$ et n'est une fonction sur aucun voisinage des points (x,y) tels que $D_2F(x,y) = 0$. Il ne faudrait toutefois pas en conclure trop vite que la condition $D_2F(x,y) \neq 0$ est nécessaire et suffisante pour que la restriction de Φ à un voisinage d'un de ses points (x,y) soit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puisque l'exemple de $F(x,y) = y^3 - x$, dont le graphe correspondant

$$\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^3 - x = 0\}$$

est celui de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^{1/3}$, est tel que $D_2F(x,y) = 3y^2$ et donc $D_2F(0,0) = 0$ au point $(0,0)$ de Φ. La condition $D_2F(x,y) \neq 0$ n'est donc pas nécessaire. Toutefois, l'important **théorème des fonctions implicites**, que nous allons démontrer, montre que, sous certaines conditions de régularité sur F, la condition $D_2F(x,y) \neq 0$ est *suffisante* pour que la restriction de Φ à un voisinage suffisamment petit du point (x,y) de Φ soit une fonction. Nous donnerons d'abord le théorème dans le cas particulier où $p = 1$ avant de l'étendre au cas où p est quelconque.

Théorème. *Soit F une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,*

$$\Phi = \{(x,y) \in \text{dom } F : F(x,y) = 0\},$$

$(x_0, y_0) \in$ dom F, $r_0 > 0$, $R_0 > 0$ tels que

$$B_2(x_0; r_0) \times]y_0 - R_0, y_0 + R_0[\subset \text{dom } F$$

et tels que les conditions suivantes soient satisfaites.
1. $F(x_0, y_0) = 0$ (c'est-à-dire $(x_0, y_0) \in \Phi$).
2. La fonction $F(., y_0) : x \mapsto F(x, y_0)$ est continue en x_0.
3. Pour chaque $x \in B_2(x_0; r_0)$ et chaque $y \in]y_0 - R_0, y_0 + R_0[$, $D_2F(x,y)$ existe et la fonction $D_2F : (x,y) \mapsto D_2F(x,y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ correspondante est continue en (x_0, y_0).
4. $D_2F(x_0, y_0) \neq 0$.
Alors il existe $r \in]0, r_0[$ et $R \in]0, R_0[$ tels que la restriction f du graphe Φ à $B_2[x_0; r] \times [y_0 - R, y_0 + R]$ est une application de $B_2[x_0; r]$ dans $[y_0 - R, y_0 + R]$ continue en x_0.

Démonstration. La première partie de la thèse revient à démontrer l'existence de $r \in]0, r_0[$ et $R \in]0, R_0[$ tels que, pour chaque $x \in B_2[x_0; r]$, l'équation

$$F(x,y) = 0 \tag{5.11}$$

en l'inconnue y possède dans $[y_0 - R, y_0 + R]$ une solution unique, que l'on notera alors $f(x)$. La deuxième partie de la thèse revient à prouver que f est continue en x_0. Nous allons construire, pour chaque $x \in B_2(x_0; r_0)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont les points fixes y correspondent aux solutions de (5.11) et pour laquelle le théorème des applications contractantes sera applicable. Si nous posons $L = D_2F(x_0, y_0)$, alors pour chaque $(x,y) \in B_2(x_0; r_0) \times]y_0 - R_0, y_0 + R_0[$, nous avons

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow Ly + F(x,y) - Ly = 0 \Leftrightarrow y = G(x,y),$$

si G est la fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de domaine égal à dom F définie par

$$G(x,y) = -L^{-1}[F(x,y) - Ly].$$

Pour chaque $x \in B_2(x_0; r_0)$, si $u \in]y_0 - R_0, y_0 + R_0[$ et $v \in]y_0 - R_0, y_0 + R_0[$, le théorème de Lagrange appliqué à la fonction $G(x, .) : y \mapsto G(x,y)$ entraîne l'existence d'un $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$G(x,u) - G(x,v) = (u - v) D_2G(x, v + \theta(u - v))$$

$$= -(u-v)L^{-1}[D_2F(x, v+\theta(u-v)) - L]$$
$$= -(u-v)L^{-1}[D_2F(x, v+\theta(u-v)) - D_2F(x_0, y_0)].$$

Par l'hypothèse 3, il existe $r_1 \in]0, r_0[$ et $R \in]0, R_0[$ tels que, pour tout $(x, y) \in B_2[x_0; r_1] \times [y_0 - R, y_0 + R]$ on a

$$|D_2F(x, y) - D_2F(x_0, y_0)| \leq \frac{L}{2},$$

et dès lors, si $x \in B_2[x_0; r_1]$, $u \in [y_0 - R, y_0 + R]$, $v \in [y_0 - R, y_0 + R]$, on aura, pour le θ donné par le théorème de Lagrange, $v + \theta(u - v) \in [y_0 - R, y_0 + R]$, et dès lors,

$$|G(x, u) - G(x, v)| \leq |u - v| L^{-1}\frac{L}{2} = \frac{1}{2}|u - v|,$$

ce qui montre que, pour chaque $x \in B_2[x_0; r_1]$, l'application $G(x, .)$ est lipschitzienne de constante $\frac{1}{2}$ sur $[y_0 - R, y_0 + R]$. Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Banach, il faut encore que $G(x, .)$ soit une application de $[y_0 - R, y_0 + R]$ *dans* $[y_0 - R, y_0 + R]$. On a, pour tout $x \in B_2[x_0; r_1]$ et tout $y \in [y_0 - R, y_0 + R]$,

$$|G(x, y) - y_0| \leq |G(x, y) - G(x, y_0)| + |G(x, y_0) - y_0|$$
$$= |G(x, y) - G(x, y_0)| + |L^{-1}F(x, y_0)|$$
$$\leq \frac{1}{2}|y - y_0| + |L^{-1}F(x, y_0)| \leq \frac{R}{2} + |L^{-1}F(x, y_0)|.$$

Par l'hypothèse 1 et l'hypothèse 2, il existe $r \in]0, r_1]$ tel que, pour tout $x \in B_2[x_0; r]$, on a

$$|L^{-1}F(x, y_0)| = |L^{-1}[F(x, y_0) - F(x_0, y_0)]| \leq \frac{R}{2},$$

et dès lors, pour chaque $x \in B_2[x_0; r]$ et chaque $y \in [y_0 - R, y_0 + R]$, on aura

$$|G(x, y) - y_0| \leq R,$$

ce qui montre que $G(x, .)$ est une application du fermé $[y_0 - R, y_0 + R]$ en lui-même. Le théorème de Banach entraîne donc, pour chaque $x \in B_2[x_0; r]$, l'existence d'un point fixe unique $y \in [y_0 - R, y_0 + R]$ de $G(x, .)$, c'est-à-dire l'existence d'un unique $y = f(x) \in [y_0 - R, y_0 + R]$ tel que $F[x, f(x)] = 0$.

Pour $x = x_0$, l'unicité entraîne en particulier que $f(x_0) = y_0$. Il reste à montrer que f est continue en x_0. Si $x \in B_2[x_0; r]$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| = |G[x, f(x)] - G[x_0, f(x_0)]|$$

$$= |G[x, f(x)] - G[x, f(x_0)] + G(x, y_0) - G(x_0, y_0)|$$

$$\leq \frac{1}{2}|f(x) - f(x_0)| + |L^{-1}[F(x, y_0) - F(x_0, y_0)]|.$$

Dès lors,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2|L^{-1}[F(x, y_0) - F(x_0, y_0)]|,$$

et comme le second membre tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 en vertu de l'hypothèse 2, on voit que f est continue en x_0. ■

Enonçons et démontrons maintenant le théorème dans le cas général. Pour motiver l'énoncé dans ce cas (la démonstration sera très semblable à celle du cas particulier précédent), considérons le cas où F est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Elle peut donc s'écrire

$$F(x, y) = Ax + By,$$

où A est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ et B une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. Pour que le graphe Φ correspondant soit une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, il faut qu'à chaque $x \in \mathbb{R}^n$ corresponde *au plus* un élément $y \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$Ax + By = 0,$$

c'est-à-dire il faut que le système linéaire en y

$$By = -Ax$$

ait au plus une solution. La théorie des équations linéaires nous apprend que ce sera le cas si et seulement si B est injective. Cela entraîne en particulier que $p \leq q$ et nous nous restreindrons au cas le plus simple où $q = p$. Dans ce cas, la condition pour que Φ soit une fonction (en fait une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$) est que B soit inversible, ou encore que $\det B \neq 0$. On notera que si, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, $F(x, .)$ désigne l'application (affine) de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par $F(x, .) = Ax + B(.)$, alors, pour chaque $y \in \mathbb{R}^p$, B est la dérivée totale de $F(x, .)$ en y, c'est-à-dire $B = (F(x, .))'_y$. On doit donc s'attendre, dans le cas non linéaire, à trouver une hypothèse d'inversibilité pour $(F(x_0, .))'_{y_0}$.

Théorème. *Soit F une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$,*

$$\Phi = \{(x,y) \in \text{dom } F : F(x,y) = 0\},$$

$(x_0, y_0) \in$ dom F, $r_0 > 0$, $R_0 > 0$ tels que

$$B_2(x_0; r_0) \times B_2(y_0; R_0) \subset \text{dom } F$$

et tels que les conditions suivantes soient satisfaites.
1. $F(x_0, y_0) = 0$ (c'est-à-dire $(x_0, y_0) \in \Phi$).
2. La fonction $F(., y_0) : x \mapsto F(x, y_0)$ est continue en x_0.
3. Pour chaque $x \in B_2(x_0; r_0)$ la fonction $F(x, .) : y \mapsto F(x, y)$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ est dérivable en chaque $y \in B_2(y_0; R_0)$, et, pour chaque $1 \leq j \leq p$, la fonction $D_{y_j} F : (x, y) \mapsto D_{y_j} F(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ correspondante est continue en (x_0, y_0).
4. L'application linéaire $(F(x_0, .)'_{y_0}$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ est inversible (c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne correspondante

$$(D_{y_j} F_k(x_0, y_0))_{(1 \leq j \leq p;\, 1 \leq k \leq p)}$$

est différent de zéro).
Alors il existe $r \in]0, r_0[$ et $R \in]0, R_0[$ tels que la restriction f du graphe Φ à $B_2[x_0; r] \times B_2[y_0; R]$ est une application de $B_2[x_0; r]$ dans $B_2[y_0; R]$ continue en x_0.

Démonstration. La première partie de la thèse revient à démontrer l'existence de $r \in]0, r_0[$ et $R \in]0, R_0[$ tels que, pour chaque $x \in B_2[x_0; r]$, l'équation

$$F(x, y) = 0 \tag{5.12}$$

en l'inconnue y possède dans $B_2[y_0; R]$ une solution unique, que l'on notera alors $f(x)$. La deuxième partie de la thèse revient à prouver que f est continue en x_0. Nous allons construire, pour chaque $x \in B_2(x_0, r_0)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont les points fixes y correspondent aux solutions de (5.12) et pour laquelle le théorème des applications contractantes sera applicable. Si nous posons $L = (F(x_0, .))'_{y_0}$, (L est donc une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$), alors pour chaque $(x, y) \in B_2(x_0; r_0) \times B_2(y_0; R_0)$, nous avons

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow Ly + F(x, y) - Ly = 0 \Leftrightarrow y = G(x, y),$$

si G est la fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ de domaine égal à dom F définie par

$$G(x, y) = -L^{-1}[F(x, y) - Ly].$$

Pour chaque $x \in B_2(x_0; r_0)$, si $u \in B_2(y_0; R_0)$ et $v \in B_2(y_0; R_0)$, le théorème de la moyenne appliqué à la fonction $G(x,.) : y \mapsto G(x,y)$ entraîne l'existence d'un $\theta \in]0,1[$ tel que

$$|G(x,u) - G(x,v)|_2 \leq |(G(x,.))'_{v+\theta(u-v)}(u-v)|_2$$

$$= |L^{-1}[(F(x,.))'_{v+\theta(u-v)} - L](u-v)|_2$$

$$\leq |L^{-1}|_{2,2}|[(F(x,.))'_{v+\theta(u-v)} - L](u-v)|_2$$

$$\leq |L^{-1}|_{2,2}|(F(x,.))'_{v+\theta(u-v)} - L|_{2,2}|u-v|_2$$

$$= |L^{-1}|_{2,2}[\sum_{j=1}^{p} |D_{y_j}F(x, v+\theta(u-v)) - D_{y_j}F(x_0,y_0)|_2^2]^{1/2}|u-v|_2.$$

Par l'hypothèse 3, il existe $r_1 \in]0, r_0[$ et $R \in]0, R_0[$ tels que, pour tout $(x,y) \in B_2[x_0; r_1] \times B_2[y_0; R]$ et chaque $1 \leq j \leq p$, on a

$$|D_{y_j}F(x,y) - D_{y_j}F(x_0,y_0)|_2 \leq \frac{1}{2p^{1/2}|L^{-1}|_{2,2}},$$

et dès lors, si $x \in B_2[x_0; r_1]$, $u \in B_2[y_0; R]$, $v \in B_2[y_0; R]$, on aura, pour le θ donné par le théorème de la moyenne, $v + \theta(u-v) \in B_2[y_0; R]$, et dès lors,

$$|G(x,u) - G(x,v)|_2 \leq \frac{1}{2}|u-v|_2,$$

ce qui montre que, pour chaque $x \in B_2[x_0; r_1]$, l'application $G(x,.)$ est lipschitzienne de constante $\frac{1}{2}$ sur $B_2[y_0; R]$. Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Banach, il faut encore que $G(x,.)$ soit une application de $B_2[y_0; R]$ *dans* $B_2[y_0; R]$. On a, pour tout $x \in B_2[x_0; r_1]$ et tout $y \in B_2[y_0; R]$,

$$|G(x,y) - y_0|_2 \leq |G(x,y) - G(x,y_0)|_2 + |G(x,y_0) - y_0|_2$$

$$= |G(x,y) - G(x,y_0)|_2 + |L^{-1}F(x,y_0)|_2$$

$$\leq \frac{1}{2}|y-y_0|_2 + |L^{-1}F(x,y_0)|_2 \leq \frac{R}{2} + |L^{-1}F(x,y_0)|_2.$$

Par l'hypothèse 1, l'hypothèse 2 et la continuité des applications linéaires, il existe $r \in]0, r_1]$ tel que, pour tout $x \in B_2[x_0; r]$, on a

$$|L^{-1}F(x,y_0)|_2 = |L^{-1}[F(x,y_0) - F(x_0,y_0)]|_2 \leq \frac{R}{2},$$

et dès lors, pour chaque $x \in B_2[x_0; r]$ et chaque $y \in B_2[y_0; R]$, on aura

$$|G(x,y) - y_0|_2 \leq R,$$

ce qui montre que $G(x,.)$ est une application du fermé $B_2[y_0; R]$ en elle-même. Le théorème de Banach entraîne donc, pour chaque $x \in B_2[x_0; r]$, l'existence d'un point fixe unique $y \in B_2[y_0; R]$ de $G(x,.)$, c'est-à-dire l'existence d'un unique $y = f(x) \in B_2[y_0; R]$ tel que $F[x, f(x)] = 0$. Pour $x = x_0$, l'unicité entraîne en particulier que $f(x_0) = y_0$. Il reste à montrer que f est continue en x_0. Si $x \in B_2[x_0; r]$, on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)|_2 &= |G[x, f(x)] - G[x_0, f(x_0)]|_2 \\ &= |G[x, f(x)] - G[x, f(x_0)] + G(x, y_0) - G(x_0, y_0)|_2 \\ &\leq \frac{1}{2}|f(x) - f(x_0)|_2 + |L^{-1}[F(x, y_0) - F(x_0, y_0)]|_2.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$|f(x) - f(x_0)|_2 \leq 2|L^{-1}[F(x, y_0) - F(x_0, y_0)]|_2,$$

et comme le second membre tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 en vertu de l'hypothèse 2, on voit que f est continue en x_0. ∎

5.6 Fonctions implicites : régularité

Si l'on impose à F des conditions de continuité ou de dérivabilité plus fortes, on obtient des conditions de continuité ou de dérivabilité plus fortes pour f.

Proposition. *Dans les conditions du théorème des fonctions implicites, si l'on suppose en outre que, pour chaque $y \in B_2(y_0; R_0)$, la fonction $F(.,y)$: $x \mapsto F(x,y)$ est continue sur $B_2(x_0; r_0)$, alors f est continue sur $B_2[x_0; r]$.*

Démonstration. Il suffit d'imiter la fin de la démonstration du théorème des fonctions implicites. Si $a \in B_2[x_0; r]$ et $x \in B_2[x_0; r]$, on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)|_2 &= |G[x, f(x)] - G[a, f(a)]|_2 \\ &= |G[x, f(x)] - G[x, f(a)] + G(x, f(a)) - G(a, f(a))|_2 \\ &\leq \frac{1}{2}|f(x) - f(a)|_2 + |L^{-1}[F(x, f(a)) - F(a, f(a))]|_2.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$|f(x) - f(a)|_2 \leq 2|L^{-1}[F(x, f(a)) - F(a, f(a))]|_2,$$

et comme le second membre tend vers 0 lorsque x tend vers a en vertu de l'hypothèse de continuité sur $F(., f(a))$, on voit que f est continue en a. ■

Proposition. *Dans les conditions du théorème des fonctions implicites, si l'on suppose en outre que F est dérivable en (x_0, y_0), alors f sera dérivable en x_0 et*

$$f'_{x_0} = -[(F(x_0, .))'_{y_0}]^{-1}(F(., y_0))'_{x_0}.$$

Démonstration. La dérivabilité de F en (x_0, y_0) entraîne l'existence d'une fonction α de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ de domaine au moins égal à $(\text{dom } F - (x_0, y_0)) \setminus \{(0,0)\}$, tendant vers zéro lorsque son argument tend vers zéro et telle que

$$F(x_0 + h, y_0 + l) = F(x_0, y_0) + F'_{(x_0,y_0)}(h, l) + |(h, l)|_2\alpha(h, l)$$

$$= F(x_0, y_0) + (F(., y_0))'_{x_0}(h) + (F(x_0, .))'_{y_0}(l) + |(h, l)|_2\alpha(h, l),$$

pour tout $(h, l) \in (\text{dom } F - (x_0, y_0)) \setminus \{(0, 0)\}$. Dès lors, si $h \in \mathbb{R}^p$ est tel que $|h|_2 \leq r'$ avec $r' \in]0, r]$ tel que $|f(x_0 + h) - f(x_0)|_2 \leq R$ lorsque $|h|_2 \leq r'$ (un tel r' existe toujours puisque f est continue en x_0), il résulte de la définition de f et de l'égalité précédente avec $l = f(x_0 + h) - f(x_0)$ que

$$0 = (F(., y_0))'_{x_0}(h) + (F(x_0, .))'_{y_0}(f(x_0 + h) - f(x_0))$$

$$+|(h, f(x_0 + h) - f(x_0))|_2\alpha[h, f(x_0 + h) - f(x_0)];$$

dès lors, puisque $(F(x_0, .))'_{y_0}$ est inversible,

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$= -[(F(x_0, .))'_{y_0}]^{-1}(F(., y_0))'_{x_0}(h) + |(h, f(x_0 + h) - f(x_0))|_2\beta(h)], \quad (5.13)$$

où β est définie par

$$\beta(h) = -[(F(x_0, .))'_{y_0}]^{-1}(\alpha[h, f(x_0 + h) - f(x_0)]),$$

et tend donc vers 0 lorsque h tend vers zéro. En particulier, on peut trouver un $r'' \in]0, r']$ tel que, pour tout $0 < |h|_2 \leq r''$, on ait

$$|\beta(h)|_2 \leq \frac{1}{2},$$

et dès lors, pour ces mêmes valeurs de h, on déduit de (5.13) que

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|_2 \leq |[(F(x_0,.))'_{y_0}]^{-1}(F(.,y_0))'_{x_0}(h)|_2$$

$$+\frac{1}{2}|h|_2+\frac{1}{2}|f(x_0+h)-f(x_0)|_2,$$

c'est-à-dire,

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|_2 \leq 2|[(F(x_0,.))'_{y_0}]^{-1}[(F(.,y_0))'_{x_0}(h)|_2+|h|_2.$$

Il en résulte aussitôt que la fonction $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{|h|_2}$ est localement bornée en 0. Dès lors (5.13) peut s'écrire

$$f(x_0+h)-f(x_0)$$

$$=-[(F(x_0,.))'_{y_0}]^{-1}(F(.,y_0))'_{x_0}(h)+|h|_2|(\frac{h}{|h|_2},\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{|h|_2})|_2\beta(h)$$

$$=-[(F(x_0,.))'_{y_0}]^{-1}(F(.,y_0))'_{x_0}(h)+|h|_2\gamma(h),$$

où la fonction γ définie par

$$\gamma(h)=|(\frac{h}{|h|_2},\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{|h|_2})|_2\beta(h),$$

tend vers 0 lorsque h tend vers 0 comme produit d'une fonction localement bornée en 0 par une fonction tendant vers zéro. Par la caractérisation de la dérivabilité totale, f est dérivable en x_0 et

$$f'_{x_0}=-[(F(x_0,.))'_{y_0}]^{-1}(F(.,y_0))'_{x_0}.$$

■

Remarque. Lorsque $n=p=1$, la formule donnant la dérivée d'une fonction implicite peut évidemment s'écrire, en termes de dérivées ordinaires

$$f'(x_0)=-\frac{D_1F(x_0,y_0)}{D_2F(x_0,y_0)}.$$

En faisant des hypothèses de dérivabilité plus fortes sur F, on obtient des propriétés correspondantes de dérivabilité pour f.

Proposition. *Supposons que, outre les conditions du théorème des fonctions implicites, F soit dérivable en chaque point de $B_2(0;r_0) \times B_2(y_0;R_0)$ et que les fonctions $(x,y) \mapsto D_{x_i}F(x,y)$, $(1 \leq i \leq n)$ et $(x,y) \mapsto D_{y_j}F(x,y)$, $(1 \leq j \leq p)$ soient continues sur $B_2(0;r_0) \times B_2(y_0;R_0)$. Alors il existe $\tilde{r} \in]0,r]$ tel que f soit dérivable en chaque point x de $B_2(0;\tilde{r})$ et tel que les fonctions $x \mapsto D_i f(x)$, $(1 \leq i \leq n)$, soient continues sur $B_2(0;\tilde{r})$.*

Démonstration. Par hypothèse, la fonction $(x,y) \mapsto \det(F(x,.))'_y$ est continue sur $B_2(0;r_0) \times B_2(y_0;R_0)$ et telle que $\det(F(x_0,.)'_{y_0} \neq 0$. Comme, en outre, f est continue sur $B_2(0;r_0)$, la fonction $x \mapsto \det(F(x,.))'_{f(x)}$ est continue sur $B_2(0;r_0)$ et telle que

$$\det(F(x_0,.))'_{f(x_0)} = \det(F(x_0,.))'_{y_0} \neq 0.$$

En conséquence, il existe $\tilde{r} \in]0,r_0]$ tel que $\det(F(x,.))'_{f(x)} \neq 0$ pour tout $x \in B_2(x_0;\tilde{r})$ et la Proposition précédente est applicable en un tel x, entraînant la dérivabilité de f en x et la formule

$$f'_x = -[(F(x,.))'_{f(x)}]^{-1}(F(.,f(x)))'_x.$$

Dès lors, en utilisant les formules reliant dérivée totale et dérivées partielles, la continuité des dérivées partielles de F et les formules donnant l'inverse et le produit de deux matrices, on en déduit la continuité des dérivées partielles $D_i f$, $(1 \leq i \leq n)$ en chaque point de $B_2(x_0;\tilde{r})$. ∎

Remarque. Dans le cas où $n = p = 1$ et où f est dérivable sur un voisinage de x_0, la formule donnant la dérivée de f en x peut se retrouver à partir de l'identité

$$F(x,f(x)) = 0,$$

en utilisant le théorème de dérivation d'une fonction composée, qui entraîne ici

$$0 = \frac{d}{dx}[F(x,f(x)] = D_1F(x,f(x)) + D_2F(x,f(x))f'(x),$$

dont on déduit aussitôt

$$f'(x) = -\frac{D_1F(x,f(x))}{D_2F(x,f(x))}.$$

5.7 Fonction réciproque

A.5 Manuel de J.-P. Schneiders (2007)

1 Systèmes d'équations de classe C_k $(k \geq 1)$

1.1 Introduction

Notre but principal dans ce chapitre est l'étude des systèmes d'équations du type

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{cases}$$

où $f_1, \ldots, f_m$ sont des fonctions réelles de classe C_k $(k \geq 1)$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Le cas d'une équation à une inconnue ayant déjà été traité dans d'autres cours, nous commencerons par discuter le cas d'une équation à deux inconnues puis nous étendrons les résultats obtenus au cas général.

1.2 Étude d'une équation à deux inconnues

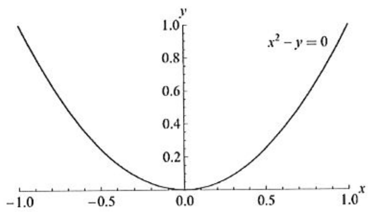
Pour nous faire une idée du problème, considérons d'abord quelques exemples
(a) Posons

$$f(x, y) = x^2 - y$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$$

peut se représenter par :



(b) Posons

$$f(x, y) = x^2 - y^3.$$

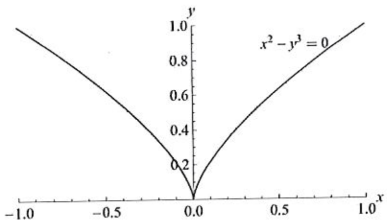
Dans ce cas,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, \sqrt[3]{x^2}) : x \in \mathbb{R}\}$$

est le graphe de la fonction

$$x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$$

et peut se représenter par :



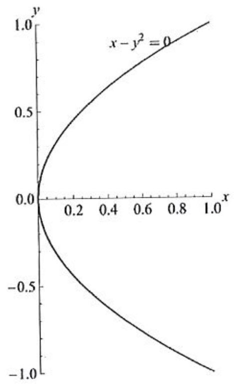
(c) Posons

$$f(x, y) = x - y^2$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(y^2, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

et peut se représenter par :



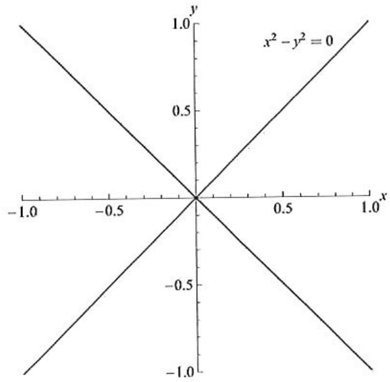
(d) Posons

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\} = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$$

et peut se représenter par :



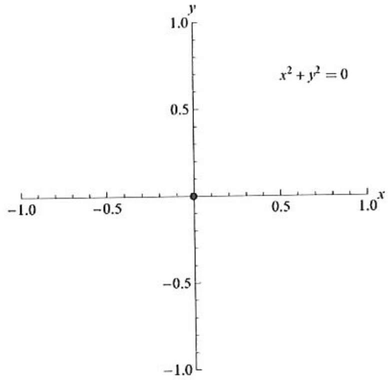
(e) Posons

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas,

$$\{(x,y) : f(x,y) = 0\} = \{(0,0)\}$$

et peut se représenter par :



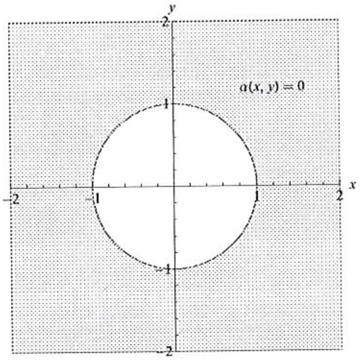
(f) Posons

$$f(x,y) = \alpha(x,y) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2-y^2)} & \text{si } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

et peut se représenter par :



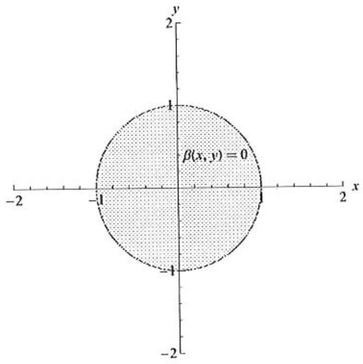
(g) Posons

$$f(x,y) = \beta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \alpha\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et peut se représenter par :



Ces quelques exemples montrent que l'ensemble des solutions d'une équation du type

$$f(x, y) = 0$$

peut prendre des formes très variées même lorsque f est de classe C_∞ sur $\mathbb{R}^2$. On ne peut donc espérer en général un résultat aussi simple que pour les équations affines puisque dans ce cas,

$$f(x, y) = ax + by - c$$

et

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

est toujours une droite affine de $\mathbb{R}^2$ lorsque f n'est pas constant. Cependant, puisque f admet une approximation affine en chacun des points de son domaine de différentiabilité Ω, il est naturel d'espérer que l'étude locale de

$$\{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = 0\}$$

au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ pour lequel $d_{(x_0,y_0)}f \neq 0$ soit assez facile. Cela s'avère être réellement le cas comme le montre le résultat suivant :

Proposition 1.2.1. *Soit f une fonction de classe C_1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et soit (x_0, y_0) un point de Ω tel que $f(x_0, y_0) = 0$. Supposons que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe un voisinage produit $U \times V$ de (x_0, y_0) dans Ω sur lequel

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

ne s'annule pas et pour lequel il existe une unique fonction $\varphi : U \to V$ telle que

$$\{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}.$$

De plus, φ est de classe C_1 sur U et on a

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))/\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$$

pour tout $x \in U$.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0.$$

Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

est continu sur Ω, il existe $\eta_0 > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ pour lesquels

$$[x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0] \times [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$$

est une partie de Ω sur laquelle

$$\frac{\partial f}{\partial y} > 0.$$

Il en résulte que $f(x, y)$ est strictement croissant en y pour tout $x \in [x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0]$. Comme $f(x_0, y_0) = 0$, on en tire que

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0 \qquad \text{et que} \qquad f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0.$$

En utilisant la continuité de $f(x, y_0 - \varepsilon_0)$ et $f(x, y_0 + \varepsilon_0)$ en x, on voit que, quitte à diminuer η_0, on peut supposer que

$$f(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0 \qquad \text{et que} \qquad f(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0$$

pour tout $x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on voit alors aisément que l'équation

$$f(x, y) = 0$$

possède une et une seule solution y dans $]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[$ pour tout x fixé dans $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$. Il s'ensuit qu'il existe une unique fonction

$$\varphi :]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\to]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[$$

pour laquelle

$$\begin{aligned}\{(x,y) \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\times]y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0[: f(x,y) = 0\} \\ = \{(x, \varphi(x)) : x \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[\}\end{aligned}$$

et la première partie du résultat est établie.

Montrons maintenant que φ est continu sur $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$. Pour cela, fixons $x_1 \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ et posons $y_1 = \varphi(x_1)$. Fixons également $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$[y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1] \subset [y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0].$$

En remplaçant x_0 par x_1 et ε_0 par ε_1 dans le raisonnement précédent, on voit directement qu'il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[\subset]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[.$$

et pour lequel

$$\varphi(]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[) \subset]y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1[.$$

Cela suffit pour établir la continuité de φ en x_1.

Pour établir que φ est dérivable sur $]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$, fixons de nouveau $x_1 \in]x_0 - \eta_0, x_0 + \eta_0[$ et posons de nouveau $y_1 = \varphi(x_1)$. Comme f est de classe C_1 sur Ω, le théorème des accroissements finis nous dit que pour tout (x, y) suffisamment voisin de (x_1, y_1), il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned}f(x,y) = f(x_1, y_1) &+ (x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + \theta(x - x_1), y_1 + \theta(y - y_1)) \\ &+ (y - y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + \theta(x - x_1), y_1 + \theta(y - y_1)).\end{aligned}$$

On en tire que pour x suffisamment voisin de x_1, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned}0 = (x - x_1)&\frac{\partial f}{\partial x}(x_1 + \theta(x - x_1), \varphi(x_1) + \theta(\varphi(x) - \varphi(x_1))) \\ &+ (\varphi(x) - \varphi(x_1))\frac{\partial f}{\partial y}(x_1 + \theta(x - x_1), \varphi(x_1) + \theta(\varphi(x) - \varphi(x_1))).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{x-x_1} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1+\theta(x-x_1), \varphi(x_1)+\theta(\varphi(x)-\varphi(x_1)))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_1+\theta(x-x_1), \varphi(x_1)+\theta(\varphi(x)-\varphi(x_1)))}.$$

Comme $\varphi(x) \to \varphi(x_1)$ si $x \to x_1$, on en tire que

$$\varphi'(x_1) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1, \varphi(x_1))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_1, \varphi(x_1))}.$$

Pour conclure, il suffit alors de tenir compte de la continuité des fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \varphi$$

et du fait que

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

ne s'annule pas sur $]x_0-\eta_0, x_0+\eta_0[\times]y_0-\varepsilon_0, y_0+\varepsilon_0[$. □

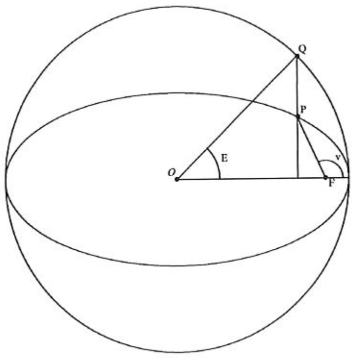
Exemple 1.2.2. Considérons le mouvement d'une planète autour du soleil et négligeons les interactions des autres planètes. L'orbite est alors une ellipse d'excentricité $e \in [0, 1[$. La mécanique céleste nous apprend de plus que le mouvement de notre planète est régi par l'équation de Kepler

$$E - e\sin E = M.$$

Rappelons que dans cette relation. M désigne l'anomalie moyenne donnée par la formule

$$M = \frac{2\pi(t-t_0)}{T}$$

où t_0 est le temps de passage au périhélie et où T est la période du mouvement planétaire encore appelée année tropique. Quant à la grandeur E, il s'agit de l'anomalie excentrique dont la définition est clarifiée par la figure ci-dessous :



Fixons $e \in]-1, 1[$ et $M \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\frac{\partial(E - e\sin E)}{\partial E} = 1 - e\cos E > 0$$

il est clair que la fonction

$$E \mapsto E - e\sin E$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, comme la fonction sinus varie dans $[-1, 1]$, on a aussi

$$\lim_{E \to \pm\infty} (E - e\sin E) = \pm\infty.$$

Il s'ensuit qu'il existe un et un seul $E(e, M)$ tel que

$$E(e, M) - e\sin E(e, M) = M.$$

Étudions à présent la dépendance de $E(e, M)$ en e. Fixons donc $M \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction

$$e \mapsto E(e, M).$$

Vu ce qui précède, cette fonction est définie implicitement par l'équation

$$E - e\sin E - M = 0$$

et comme la dérivée partielle par rapport à E de cette équation est toujours non nulle, on peut déduire de la proposition précédente que $E(e, M)$ est de classe C_1 en e sur $]-1, 1[$ et que

$$\frac{\partial E(e, M)}{\partial e} = \frac{\sin E(e, M)}{1 - e\cos E(e, M)}.$$

Il s'ensuit que $E(e, M)$ est en fait de classe C_2 en e sur $]-1, 1[$ et que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial e^2} = \frac{(1 - \cos E \cos E \frac{\partial E}{\partial e} - \sin E(-\cos E + e \sin E \frac{\partial E}{\partial e})}{(1 - e\cos E)^2}.$$

En continuant de la sorte, on voit aisément que $E(e, M)$ est de classe C_∞ en e sur $]-1, 1[$ et on obtient des relations permettant de calculer

$$\frac{\partial^k E(e, M)}{\partial e^k}$$

à partir de

$$E(e, M), \quad \frac{\partial E(e, M)}{\partial e}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1} E(e, M)}{\partial e^{k-1}}.$$

En particulier, on peut obtenir le développement de Taylor de $E(e, M)$ en 0. Par exemple, en prenant $e = 0$ dans les formules ci-dessus on voit que

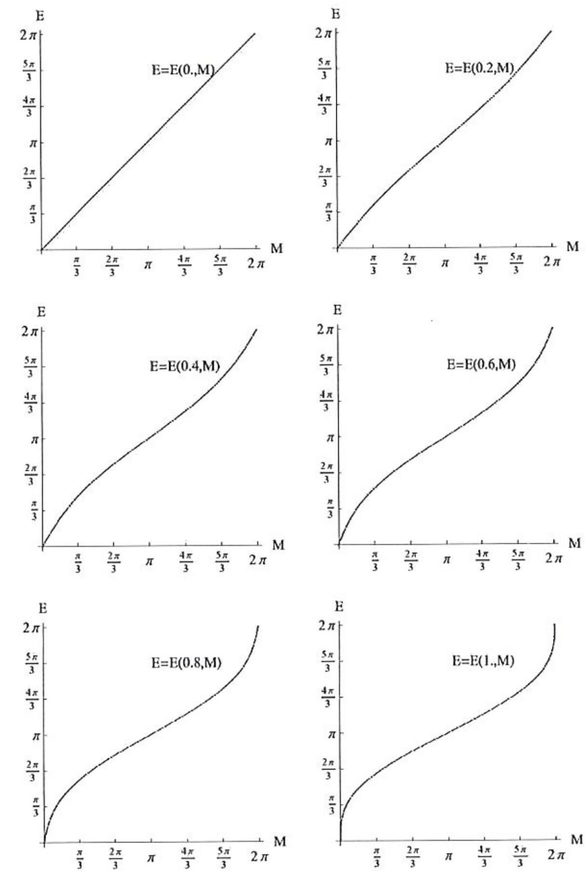
$$\begin{aligned} E(0, M) &= M \\ \frac{\partial E}{\partial e}(0, M) &= \sin M \\ \frac{\partial^2 E}{\partial e^2}(0, M) &= \sin 2M. \end{aligned}$$

Ainsi,

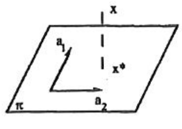
$$E(e, M) = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + o(e^2)$$

pour $M \in \mathbb{R}$ fixé et $e \to 0$.

Pour terminer, on trouvera, ci-dessous, les graphes de la fonction $M \mapsto E(e, M)$ pour quelques valeurs de e.


E=E(0.,M)
E=E(0.2,M)
E=E(0.4,M)
E=E(0.6,M)
E=E(0.8,M)
E=E(1.,M)
E
M

A.6 Manuel de J.-J. Strodiot (1997)



10 Fonctions implicites

Certaines fonctions ne sont pas décrites explicitement mais sont définies comme solution d'une équation de plusieurs variables. C'est à l'étude de ces fonctions que nous consacrerons ce paragraphe.

10.1 Cas d'une équation de deux variables réelles

10.1.1. Définitions

Considérons l'équation

$$f(x,y)=0$$

où f est une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points (x,y) que vérifient cette équation détermine une courbe de $\mathbb{R}^2$, que nous notons C .

L'équation

$$f(x,y)=0$$

est appelée *équation implicite de la courbe* C .

On appelle *fonction implicite définie par l'équation*

$$f(x,y)=0$$

toute fonction ϕ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x,\phi(x))=0\,, \quad \forall\, x\in I\,.$$

10.1.2. Exemples

1. Considérons l'équation implicite du cercle centré à l'origine et de rayon unité

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \,.$$

Les trois fonctions suivantes définies sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont des fonctions implicites définies par l'équation du cercle

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \sqrt{1-x^2}\,, \\ \phi_2(x) &= -\sqrt{1-x^2}\,, \\ \phi_3(x) &= \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \geq 0\,, \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{si } x < 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut, à l'aide de l'équation du cercle, définir une infinité de fonctions implicites et que celles-ci s'expriment en fonctions élémentaires.

2. L'équation

$$x^3 + y^3 - xy - 1 = 0$$

définit au moins une fonction implicite

$$y = \phi(x)$$

car, pour chaque x , l'équation en y , de degré impair, admet au moins une solution.

Dans ce dernier exemple, il n'est pas possible d'expliciter la fonction ϕ à l'aide de fonctions élémentaires. Le théorème suivant nous fournit des conditions pour assurer l'existence, l'unicité et la différentiabilité d'une fonction implicite.

10.1.3. Théorème des fonctions implicites :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^k sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ (avec $k \geq 1$).
Considérons un point (a, b) de D tel que

$$\begin{cases} f(a,b) &= 0\,, \\ f'_y(a,b) &\neq 0\,. \end{cases}$$

Alors, il existe deux intervalles $]a-\alpha, a+\alpha[$ et $]b-\beta, b+\beta[$ vérifiant les deux assertions suivantes :

1. Pour chaque x dans l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$, l'équation en la variable y

$$f(x,y) = 0$$

admet une solution unique dans l'intervalle $]b-\beta, b+\beta[$, notée $\phi(x)$.
On peut alors définir une fonction implicite ϕ comme suit :

$$\begin{array}{llll} \phi : &]a-\alpha, a+\alpha[& \to &]b-\beta, b+\beta[\,, \\ & x & \rightsquigarrow & \phi(x) \text{ tel que } f(x,\phi(x)) = 0\,. \end{array}$$

2. La dérivée partielle f'_y ne s'annule pas dans

$$]a-\alpha, a+\alpha[\, \times \,]b-\beta, b+\beta[\,,$$

la fonction implicite ϕ est de classe C^k sur l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ et

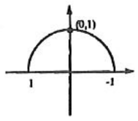
$$\phi'(x) = -\frac{f'_x(x,\phi(x))}{f'_y(x,\phi(x))}\,, \qquad \forall\, x \in]a-\alpha, a+\alpha[\,.$$

Commentaires et exemples

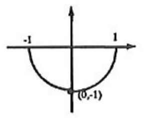
1. Il découle immédiatement de la première assertion du théorème que

$$\phi(a) = b\,.$$

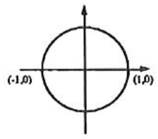
2. Le théorème des fonctions implicites est un théorème d'existence locale; la fonction implicite ne permet pas en général de caractériser l'entièreté de la courbe.
   Afin d'éclaircir cette remarque, reprenons l'équation implicite du cercle centré à l'origine et de rayon unité
   $$x^2 + y^2 - 1 = 0\,.$$
   Le point $(0,1)$ satisfait aux hypothèses du théorème. Dès lors, pour chaque x dans l'intervalle $]-1,1[$, l'équation en y
   $$x^2 - y^2 - 1 = 0$$
   admet une solution unique dans l'intervalle $]0,2[$.
   On peut donc définir
   $$\begin{array}{rcl}\phi: \;]-1,1[& \to &]0,2[\,, \\ x & \leadsto & \phi(x) \text{ tel que } x^2 + \phi(x)^2 = 1\,.\end{array}$$
   Dans ce cas, ϕ s'exprime à l'aide de fonctions élémentaires
   $$\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$$
   et décrit le demi-cercle supérieur :



   D'autre part, le point $(0,-1)$ satisfait également aux hypothèses du théorème, ce qui nous permet de définir une autre fonction implicite
   $$\begin{array}{rcl}\psi: \;]-1,1[& \to &]-2,0[\,, \\ x & \leadsto & \psi(x) \text{ tel que } x^2 + \psi(x)^2 = 1\,.\end{array}$$
   Dans ce cas, ψ décrit le demi-cercle inférieur
   $$\psi(x) = -\sqrt{1 - x^2}\,.$$



Par contre, les points $(-1,0)$ et $(1,0)$ ne satisfont pas aux hypothèses du théorème.



Il est intéressant de constater que, pour chaque x dans un intervalle de la forme $]1-\alpha, 1+\alpha[$ ou $]-1-\alpha, -1+\alpha]$, l'équation en y

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

soit n'admet aucune solution, soit admet deux solutions dans tout intervalle du type $]-\beta, \beta[$, à savoir

$$\phi_1(x) = \sqrt{1-x^2}\ ,$$

et

$$\phi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}\ .$$

3. Le théorème assure l'existence locale et l'unicité de la fonction implicite mais n'en donne pas son expression. Néanmoins, il permet d'affirmer que la fonction implicite est de classe C^k , de calculer sa dérivée au point a .
Illustrons ceci en considérant la courbe d'équation

$$f(x,y) = 0$$

où

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - xy - 1\ .$$

Le point $(1,1)$ satisfait aux hypothèses du théorème des fonctions implicites. Dès lors, nous pouvons définir une fonction implicite unique

$$\begin{array}{rcl} \phi :\ ]1-\alpha, 1+\alpha[& \to &]1-\beta, 1+\beta[\,, \\ x & \leadsto & \phi(x) \text{ tel que } x^3 + \phi(x)^3 - x\phi(x) - 1 = 0 \,. \end{array}$$

Dans ce cas, la fonction ϕ ne peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. Il est cependant possible de calculer sa dérivée première

$$\phi'(x) = -\frac{f'_x(x,\phi(x))}{f'_y(x,\phi(x))} = -\frac{3x^2 - \phi(x)}{3\phi(x)^2 - x} = \frac{\phi(x) - 3x^2}{3\phi(x)^2 - x} \,.$$

Dès lors,

$$\phi'(1) = -1$$

et ϕ est décroissante autour du point $a = 1$.

Nous pouvons, à l'aide de la dérivée première, calculer la dérivée seconde de ϕ :

$$\phi''(x) = \frac{(\phi'(x) - 6x)(3\phi(x)^2 - x) - (\phi(x) - 3x^2)(6\phi(x)\phi'(x) - 1)}{(3\phi(x)^2 - x)^2} \,.$$

Dès lors,

$$\phi''(1) = -\frac{11}{2}$$

et ϕ est concave autour du point $a = 1$.

Son développement limité autour du point $a = 1$ vaut

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(1) + \phi'(1)x + \phi''(1)\frac{x^2}{2} + 0(x^2) \\ &= 1 - x - \frac{11}{2}x^2 + 0(x^2) \,. \end{aligned}$$

4. Lorsque la dérivée première $f'_x(a,b)$ n'est pas nulle, l'équation

$$f(x,y) = 0$$

définit aussi x comme fonction implicite de y .

Il suffit d'échanger les rôles des variables x et y dans l'énoncé du théorème.

Dans l'exemple du cercle centré à l'origine et de rayon unité, on peut exprimer x en fonction de y autour des points $(1,0)$ et $(-1,0)$. On obtient alors, dans le premier cas,

$$\phi(y) = \sqrt{1 - y^2}$$

et dans le second cas,

$$\phi(y) = -\sqrt{1-y^2} .$$

Par conséquent, lorsque le gradient de f au point (a,b) ne s'annule pas, on peut exprimer soit y en fonction de x , soit x en fonction de y .

10.1.4. Equation de la tangente à une courbe définie implicitement

Proposition :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$.
Considérons un point (a,b) de D sur la courbe C d'équation

$$f(x,y) = 0$$

où le gradient $\nabla f(a,b)$ ne s'annule pas.
Alors la tangente à la courbe C au point (a,b) a pour équation

$$f'_x(a,b) \cdot (x-a) + f'_y(a,b) \cdot (y-b) = 0 .$$

Preuve :
Supposons que

$$f'_y(a,b) \neq 0 .$$

En vertu du théorème des fonctions implicites, on peut définir une fonction implicite unique

$$\begin{array}{llll} \phi : &]a-\alpha, a+\alpha[& \to &]b-\beta, b+\beta[, \\ & x & \leadsto & \phi(x) \text{ tel que } f(x,\phi(x)) = 0 . \end{array}$$

De plus, la fonction ϕ est de classe C^1 et

$$\phi'(a) = -\frac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)} .$$

L'équation de la tangente à la courbe C au point (a,b) s'écrit donc

$$y - b = -\frac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)} \, (x-a) ,$$

i.e.

$$f'_x(a,b)\cdot(x-a)+f'_y(a,b)\cdot(y-b)=0\,.$$

Le cas où

$$f'_x(a,b)\neq 0$$

se traite de manière analogue. ∎

Remarque

On peut maintenant donner une interprétation géométrique de l'hypothèse

$$f'_y(a,b)\neq 0$$

du théorème des fonctions implicites.
Elle signifie que la tangente à la courbe

$$f(x,y)=0$$

au point (a,b) n'est pas verticale.

10.1.5. Interprétation géométrique du gradient

Proposition :

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$.
Considérons un point (a,b) où

$$\nabla f(a,b)\neq 0\,.$$

Alors le gradient de f au point (a,b) est perpendiculaire à la courbe de niveau de f passant par (a,b) :

$$f(x,y)=f(a,b)\,.$$

Preuve :
Ecrivons l'équation de la tangente à la courbe

$$f(x,y) - f(a,b) = 0$$

au point (a,b).
Posons

$$g(x,y) = f(x,y) - f(a,b).$$

La fonction g ainsi définie est de classe C^1 sur D et

$$\nabla g(x,y) = \nabla f(x,y), \quad \forall (x,y) \in D.$$

Dès lors, la tangente à la courbe

$$g(x,y) = 0$$

au point (a,b) a pour équation

$$f'_x(a,b) \cdot (x-a) + f'_y(a,b) \cdot (y-b) = 0.$$

Cette égalité peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\langle \nabla f(a,b), (x,y) - (a,b) \rangle = 0$$

d'où la thèse. ∎

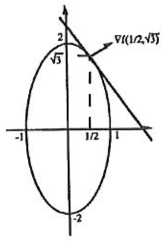
Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}.$$

Considérons le point $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ et la courbe de niveau passant par ce point, i.e. l'ellipse d'équation

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$



Puisque le gradient de f au point $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ vaut $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, l'équation de la tangente à l'ellipse en ce point s'écrit

$$(x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y - \sqrt{3}) = 0 ,$$

i.e.,

$$x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2 = 0 .$$

Le vecteur $\nabla f(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ est bien perpendiculaire à cette droite.

10.2 Cas d'une équation de $n+1$ variables réelles

10.2.1. Définition

Considérons l'équation

$$f(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$$

où f est une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}^{n+1}$.

On appelle *fonction implicite définie par l'équation*

$$f(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$$

toute fonction ϕ définie sur une boule B de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$f(x_1, \cdots, x_n, \phi(x_1, \cdots, x_n)) = 0 , \quad \forall\, (x_1, \cdots, x_n) \in B .$$

10.2.2. Première généralisation du théorème des fonctions implicites

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de classe C^k sur un ouvert D de $\mathbb{R}^{n+1}$ (avec $k \geq 1$).
Soient a un élément de $\mathbb{R}^n$ et b un réel tels que

$$\begin{cases} (a,b) \in D\,, \\ f(a,b) = 0\,, \\ f'_y(a,b) \neq 0\,. \end{cases}$$

Alors, il existe une boule ouverte B de centre a et de rayon α dans $\mathbb{R}^n$ et un intervalle $]b-\beta, b+\beta[$ qui vérifient les deux assertions suivantes :

1. *Pour chaque x dans la boule $B(a,\alpha)$, l'équation en la variable y*

   $$f(x,y) = 0$$

   admet une solution unique dans l'intervalle $]y-\beta, y+\beta[$, notée $\phi(x)$. On peut alors définir

   $$\begin{array}{rcl} \phi : \ B(a,\alpha) & \to &]b-\beta, b+\beta[\,, \\ x & \leadsto & \phi(x) \text{ tel que } f(x,\phi(x)) = 0\,. \end{array}$$

2. *La dérivée partielle $f'_y(x,y)$ ne s'annule pas dans*

   $$B(a,\alpha) \times]b-\beta, b+\beta[\,,$$

   la fonction implicite ϕ est de classe C^k sur $B(a,\alpha)$ et ses dérivées partielles sont données par

   $$\phi'_{x_i}(x) = -\frac{f'_{x_i}(x,\phi(x))}{f'_y(x,\phi(x))}\,, \qquad \forall\, x \in B(a,\alpha)\,.$$

10.2.3. Exemple

Considérons, dans $\mathbb{R}^3$ l'équation implicite de la sphère de centre zéro et de rayon unité

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 .$$

Le point $(0,0,1)$ satisfait aux hypothèses du théorème. On peut donc définir une fonction implicite unique

$$\begin{array}{rlcl} \phi : & B((0,0),\alpha) & \to &]1-\beta, 1+\beta[\,, \\ & (x_1, x_2) & \leadsto & \phi(x_1,x_2) \text{ tel que } x_1^2 + x_2^2 + (\phi(x_1,x_2))^2 = 1 . \end{array}$$

Dans ce cas, la fonction ϕ s'exprime à l'aide de fonctions élémentaires et

$$\phi(x_1,x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} .$$

Les points qui ne satisfont pas aux hypothèses du théorème sont les points du plan

$$x_3 = 0 .$$

10.2.4. Equation du plan tangent à une surface définie implicitement

Proposition :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^3$.
Considérons un point (a,b,c) de la surface S d'équation

$$f(x,y,z) = 0$$

où le gradient $\nabla f(a,b,c)$ ne s'annule pas.
Alors, le plan tangent à la surface S au point (a,b,c) a pour équation

$$f_x'(a,b,c) \cdot (x-a) + f_y'(a,b,c) \cdot (y-x) + f_z'(a,b,c) \cdot (z-c) = 0 .$$

Preuve :
Supposons que

$$f'_z(a,b,c) \neq 0 .$$

En vertu du théorème des fonctions implicites, on peut définir une fonction implicite unique

$$\begin{array}{rlll} \phi : & B((a,b),\alpha) & \to &]c-\beta, c+\beta[, \\ & (x,y) & \leadsto & \phi(x,y) \text{ tel que } f(x,y,\phi(x,y)) = 0 . \end{array}$$

La fonction ϕ est de classe C^1 et l'équation

$$z = \phi(x,y)$$

est l'équation de la surface S dans le cylindre

$$B((a,b),\alpha) \times]c-\beta, c+\beta[.$$

L'équation du plan tangent à la surface S au point (a,b,c) s'écrit donc

$$z - c = \phi'_x(a,b) \cdot (x-a) + \phi'_y(a,b) \cdot (y-b) ,$$

i.e.

$$z - c = -\frac{f'_x(a,b,c)}{f'_z(a,b,c)} \cdot (x-a) - \frac{f'_y(a,b,c)}{f'_z(a,b,c)} \cdot (y-b) ,$$

d'où la thèse. ∎

10.2.5. Interprétation géométrique du gradient

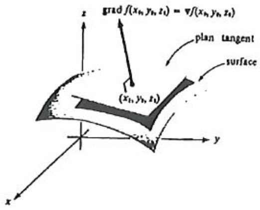
Proposition :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^3$.
Considérons un point (x_0,y_0,z_0) où

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq 0 .$$

Alors le gradient de f au point (x_0,y_0,z_0) est perpendiculaire à la surface de niveau de f passant par (x_0,y_0,z_0)

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) .$$



Preuve :
Elle est analogue à celle de la Proposition 10.1.5. ∎

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \ .$$

Considérons le point $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.
Nous pouvons calculer que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

et que l'équation du plan tangent à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

au point considéré s'écrit

$$x + y + z - \sqrt{3} = 0 \ .$$

Nous pouvons alors vérifier que le gradient de f au point (x_0, y_0, z_0) est bien perpendiculaire au plan

$$x + y + z - \sqrt{3} = 0 \ .$$

10.3 Cas des systèmes de p équations à $n+p$ variables

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la courbe définie comme intersection des deux surfaces suivantes :

$$\begin{cases} x - \sin y - \cos z &= 0\,, \\ x + e^y + z - 2 &= 0\,. \end{cases}$$

On voudrait décrire localement cette courbe par des équations du type

$$y = \phi_1(x)\,,$$
$$z = \phi_2(x)\,.$$

10.3.1. Définition

Considérons le système d'équations

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_p) &= 0\,, \\ & \vdots \\ f_p(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_p) &= 0\,, \end{cases}$$

où les fonctions $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ désignent les composantes d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$.

On appelle *fonction implicite définie par ce système* toute fonction ϕ définie sur une boule B de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et telle que

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n,\phi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\phi_p(x_1,\cdots,x_n)) &= 0\,, \\ \vdots & \\ f_p(x_1,\cdots,x_n,\phi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\phi_p(x_1,\cdots,x_n)) &= 0\,, \end{cases}$$

10.3.2. Seconde généralisation du théorème des fonctions implicites

Soit $f : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k sur un ouvert D de $\mathbb{R}^{n+p}$ (avec $k \geq 1$). Considérons a un élément de $\mathbb{R}^n$ et b un élément de $\mathbb{R}^p$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} (a,b) \in D\,, \\ f(a,b) = 0\,, \\ \text{le déterminant de la matrice } J \text{ d'ordre } p \text{ définie par} \\ \qquad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p}(a,b) \end{pmatrix} \\ \qquad \text{n'est pas nul.} \end{array}\right.$$

Alors il existe une boule ouverte $B(a,\alpha)$ de $\mathbb{R}^n$ et une boule ouverte $B(b,\beta)$ de $\mathbb{R}^p$ qui vérifient les deux assertions suivantes :

1. *Pour chaque x dans la boule $B(a,\alpha)$, le système défini par l'équation*

   $$f(x,y) = 0$$

   et considéré en les variables $y_1, \cdots, y_p$ admet une solution unique dans la boule $B(b,\beta)$, notée $\phi(x)$.
   On peut alors définir

   $$\begin{array}{rcll} \phi : B(a,\alpha) \subset \mathbb{R}^n & \to & B(b,\beta)\,, \\ x & \leadsto & \phi(x) \text{ tel que } f(x,\phi(x)) = 0\,. \end{array}$$

2. *La fonction ϕ ainsi définie est de classe C^k sur la boule $B(a,\alpha)$.*

10.3.3. Exemple

Reprenons le cas de la courbe déterminée par l'intersection des deux surfaces

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - \sin y - \cos z & = & 0\,, \\ x + e^y + z - 2 & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Cette courbe est donc définie implicitement par l'équation

$$f(x,y,z)=0$$

où

$$\begin{array}{rcl} f: \ \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 , \\ (x,y,z) & \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} x-\sin y-\cos z \\ x+e^y+z-2 \end{pmatrix} . \end{array}$$

Le point $(1,0,0)$ se situe sur cette courbe.
La matrice J en ce point vaut

$$J=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant n'est pas nul.
Dès lors, il existe une fonction implicite unique

$$\begin{array}{rcl} \phi: \ ]1-\alpha,1+\alpha[& \rightarrow & B(0,\beta)\subset \mathbb{R}^2 , \\ x & \rightsquigarrow & (\phi_1(x),\phi_2(x)) \text{ tel que } f(x,\phi_1(x),\phi_2(x))=0 . \end{array}$$

Les deux composantes de ϕ ne sont fonctions que d'une seule variable réelle. Calculons leur dérivée au point $x=1$.
En dérivant par rapport à x les deux égalités

$$\begin{cases} x-\sin\phi_1(x)-\cos\phi_2(x) & = 0 , \\ x+e^{\phi_1(x)}+\phi_2(x)-2 & = 0 , \end{cases}$$

nous calculons que

$$\begin{cases} 1-\cos\phi_1(x)\phi_1'(x)+\sin\phi_2(x)\phi_2'(x) & = 0 , \\ 1+e^{\phi_1(x)}\phi_1'(x)+\phi_2'(x) & = 0 . \end{cases}$$

En tenant compte du fait que

$$\phi_1(1)=\phi_2(1)=0 ,$$

nous obtenons le système

$$\begin{cases} 1-\phi_1'(1) & = 0 , \\ 1+\phi_1'(1)+\phi_2'(1) & = 0 . \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \phi_1'(1) &= 1\,, \\ \phi_2'(1) &= -2\,. \end{aligned}$$

11 Extrema sous contraintes

Supposons qu'un consommateur disposant d'un revenu R désire acheter deux produits dont les prix unitaires sont respectivement désignés par p et q . La satisfaction du consommateur lorsqu'il achète les quantités x et y de chaque produit est mesurée par une fonction $U(x,y)$, appelée *fonction d'utilité*. Le problème du consommateur est alors de déterminer les quantités x et y de sorte que sa satisfaction soit maximale et que sa contrainte de budget soit respectée. Ce problème peut se formaliser comme suit :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & U(x,y) \\ \text{sous la contrainte} & px+qy=R\,. \end{array}$$

C'est à ce type de problème que nous consacrerons ce paragraphe.

11.1 Définitions

Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ et $g : I\!R^n \to I\!R^p$.

Un point a de $I\!R^n$ est appelé *minimum* (resp. *maximum*) *local de f sous la contrainte* $g(x) = 0$ si

1. le point a satisfait à la contrainte, i.e. $g(a) = 0$;
2. il existe une boule ouverte B de centre a dans laquelle

$$f(a) \le f(x) \quad (\text{resp. } \ge), \quad \forall\, x \text{ t.q. } g(x) = 0\,.$$

Un point a est appelé *extremum local de f sous la contrainte* $g(x) = 0$ si a est un minimum local ou un maximum local de f sous la contrainte $g(x) = 0$.

A.7 Manuel de E. Delhez (2005)

et

$$\sigma_2 = \frac{-Pr-1+\sqrt{(Pr+1)^2-4Pr(1-r)}}{2}$$

La constante Pr étant positive, si $r < 1$, les deux solutions σ_1 et σ_2 sont négatives. Les solutions correspondantes

$$\delta X(t) = \delta X_0 \, e^{\sigma_1 t} \qquad \text{et} \qquad \delta X(t) = \delta X_0 \, e^{\sigma_2 t}$$

décroissent donc exponentiellement et le système retourne progressivement vers son état de repos x_0. L'état x_0 est alors qualifié de *stable*.

Par contre, on voit que σ_2 devient positive dès que r est supérieur à 1. Dans ce cas, les solutions correspondantes $\delta X(t) = \delta X_0 \, e^{\sigma_2 t}$ croissent exponentiellement et le système s'éloigne de son état de repos. On dit que l'état x_0 est *instable*.

La validité de la solution est évidemment limitée par l'approximation associée à la linéarisation du système d'équations différentielles. Lorsque les termes non linéaires des équations différentielles ne sont pas négligeables, c'est-à-dire lorsque δX, δY et δZ cessent d'être petits, la solution du système linéarisé n'est plus valable. La linéarisation des équations différentielles permet cependant d'obtenir des informations importantes sur le comportement initial des perturbations $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$. ◇

Dans le cas général, on peut également simplifier l'écriture de la formule de Taylor en utilisant les notations

$$F''(t)\Big|_{t=0} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(\mathrm{x})\Delta x_{i_1}\Delta x_{i_2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(\mathrm{x}) = (\Delta \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\nabla)^2 f(\mathrm{x}) \tag{3.94}$$

et plus généralement

$$F^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = (\Delta \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\nabla)^k f(\mathrm{x}) \tag{3.95}$$

Dès lors,

$$f(\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(\Delta \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\nabla)^k f(\mathrm{x})}{k!} + \frac{(\Delta \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\nabla)^p f(\mathrm{x})}{p!}\Bigg|_{\mathrm{x}+\theta\Delta\mathrm{x}} \tag{3.96}$$

3.10 Fonctions implicites.

Une équation du type

$$0 = f(x,y) \tag{3.97}$$

définit implicitement une fonction $y(x)$ sur un sous-ensemble $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ si, $\forall x \in \mathrm{E}$, l'équation (3.97) possède une solution y unique.

Dans ce cas, on est tenté d'écrire

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} f(x,y(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))y'(x) \end{aligned} \tag{3.98}$$

et donc

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))} \quad \text{si} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x)) \neq 0 \tag{3.99}$$

A priori, on ne dispose pas d'informations suffisantes pour écrire les expressions précédentes. Rien ne nous assure en effet de l'existence de $y(x)$, de sa continuité ou de sa dérivabilité.

Le théorème des fonctions implicites, cité ici sans démonstration, donne une réponse locale à ces questions :

> Si $(a,b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ vérifie le système de n équations à $n+m$ inconnues
>
> $$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_n) = 0 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_n) = 0 \end{cases}$$
>
> si les fonctions f_i sont k fois continûment dérivables dans un voisinage de (a,b) et si
>
> $$\left|\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\right|_{(x,y)=(a,b)} \neq 0$$
>
> alors il existe n fonctions $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de a tels que
> - $\varphi_j \in C_k(\mathcal{V}) \quad (j=1,\ldots,n)$,
> - $\varphi_j(a) = b_j \quad (j=1,\ldots,n)$,
> - $f_i(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)) = 0$ dans $\mathcal{V} \quad (i=1,2,\ldots,n)$.

L'expression

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\right|$$

apparaissant dans l'énoncé de ce théorème est appelée le *déterminant Jacobien*, ou plus simplement le *Jacobien*, des fonctions $f_1,f_2\ldots,f_n$. Le Jacobien est le déterminant de la *matrice Jacobienne*

$$\left(\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \tag{3.100}$$

EXEMPLE 3.31 Soit le système d'équations

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

On vérifie que $(x,y,z,u,v) = (1,1,1,1,1)$ satisfait à ces équations. Recherchons si on peut définir des fonctions $u(x,y,z)$ et $v(x,y,z)$ au voisinage du point $(1,1,1)$.

Soit donc

$$f(x,y,z,u,v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3$$
$$g(x,y,z,u,v) = x^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2$$

La matrice Jacobienne de ces deux fonctions par rapport à u et v est donnée par

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} xz & 2yv \\ -2uv^2 & 2x - 2u^2v \end{pmatrix}$$

On a

$$\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|_{(1,1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

ce qui nous assure, via le théorème des fonctions implicites, que le système d'équations proposé peut être résolu par rapport à u et v, dans un certain voisinage de $(1,1,1,1,1)$. De plus, les fonctions f et g étant continûment dérivables, il en est de même des fonctions $u(x,y,z)$ et $v(x,y,z)$ et, par dérivation implicite,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} f(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= (y^2 + zu) + (xz)\frac{\partial u}{\partial x} + (2yv)\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} g(x,y,z,u(x,y,z),v(x,y,z)) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= (3x^2yz + 2v) + (-2uv^2)\frac{\partial u}{\partial x} + (2x - 2u^2v)\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Ces deux équations peuvent être résolues par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ afin d'obtenir l'expression des dérivées partielles de u et v. Ainsi, au point $(x,y,z) = (1,1,1)$, celles-ci vérifient les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = -2 \\ 2\frac{\partial u}{\partial x} = 5 \end{cases}$$

et donc

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = \frac{5}{2}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = -\frac{9}{4}$$

En procédant de la même façon, on peut également calculer les dérivées partielles par rapport à y et z. On trouve

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2} \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} = -\frac{7}{4}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} = \frac{1}{2} \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} = -\frac{3}{4}$$

Dès lors, par la formule de Taylor, il vient[10]

$$u(x,y,z) = 1 + \frac{5}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}(z-1) + o[(x-1),(y-1),(z-1)]$$
$$v(x,y,z) = 1 - \frac{9}{4}(x-1) - \frac{7}{4}(y-1) - \frac{3}{4}(z-1) + o[(x-1),(y-1),(z-1)]$$

◇

Remarquons que l'hypothèse de non-annulation du Jacobien intervenant dans le théorème des fonctions implicites apparaît naturellement lorsque l'on essaye d'évaluer les dérivées partielles des fonctions définies implicitement. On a, en effet,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx_j} f_i(\mathrm{x}, \varphi_1(\mathrm{x}), \ldots, \varphi_n(\mathrm{x})) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}, \varphi_1(\mathrm{x}), \ldots, \varphi_n(\mathrm{x})) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\mathrm{x}, \varphi_1(\mathrm{x}), \ldots, \varphi_n(\mathrm{x})) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, m$.

Sous forme matricielle, cette relation peut s'écrire ($j = 1, 2, \ldots, m$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

[10] La notation $o[(x-1),(y-1),(z-1)]$ est utilisée pour désigner les termes négligeables par rapport à $x-1$, $y-1$ ou $z-1$.

où les dérivées partielles sont évaluées en (a,b) ou a selon leur nature. Ce système possède une solution unique à condition que

$$\left|\frac{\partial(f_1,f_2\ldots,f_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}\right|_{(\mathsf{a},\mathsf{b})} \neq 0$$

qui est précisément l'hypothèse principale du théorème. En utilisant la règle de Cramer, on peut alors exprimer les solutions sous la forme

$$\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right)(\mathsf{a}) = -\frac{\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k,\ldots,f_n)}{\partial(y_1,\ldots,x_j,\ldots,y_n)}\right|_{(\mathsf{a},\mathsf{b})}}{\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_k,\ldots,f_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_k,\ldots,y_n)}\right|_{(\mathsf{a},\mathsf{b})}} \tag{3.101}$$

EXEMPLE 3.32 En thermodynamique, l'équation d'état d'un gaz

$$f(P,V,T)=0$$

où P,V et T désignent respectivement la pression, le volume et la température implique que chaque variable d'état P,V ou T peut être exprimée comme une fonction des deux autres. On écrira donc selon les besoins

$$P=P(V,T) \qquad V=V(P,T) \qquad T=T(P,V)$$

Par la règle de dérivation des fonctions implicites, il vient

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial V}}{\frac{\partial f}{\partial P}} \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T}}{\frac{\partial f}{\partial V}} \qquad \frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial P}}{\frac{\partial f}{\partial T}}$$

On en déduit que ces dérivées partielles sont reliées par la relation

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$$

◇

3.11 Changement de variables.

Il existe souvent plusieurs façons de décrire un même système qui diffèrent par les variables utilisées pour représenter l'état de ce système. Il est important de pouvoir passer d'une représentation, d'un choix de variables d'état à un autre et de déterminer les règles de transformation associées à un tel *changement de variables.*

Annexe B

Le dispositif expérimental

B.1 Enoncé de la narration de recherche

Consignes

Chaque groupe devra rendre à Sebastian Xhonneux une « narration de recherche ». Dans ce type de travail, il est demandé de ne pas vous contenter de donner la réponse mais de raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver. Vous décrirez tous les essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont pas abouti. Racontez sur votre feuille les différentes étapes de votre recherche, les remarques, les aides, les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait changer de méthode ou qui vous ont permis de progresser.

Le professeur du cours ne verra pas cette feuille !

Question 1 : courbes de niveaux

Soit la fonction suivante que l'on écrit $z = F(x, y)$.

$$\begin{array}{rcll} F & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \rightsquigarrow F(x,y) = 3x^2y - y^3 \end{array}$$

La représentation graphique d'une fonction à deux variables est une surface qui est définie par l'ensemble des points dont les coordonnées sont $(x, y, F(x, y))$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La figure suivante montre la représentation graphique de la fonction $F(x, y)$ définie ci-dessus.

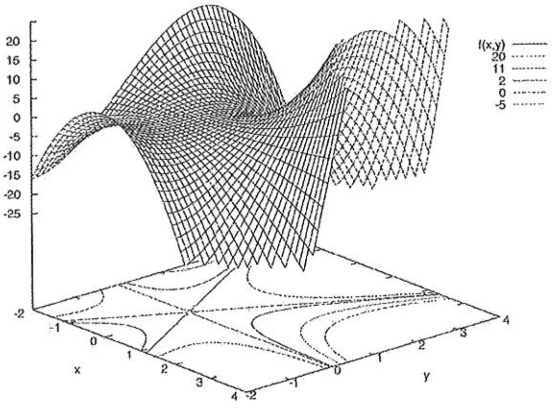


FIG. 1 – $F(x, y) = 3x^2y - y^3$

Les courbes représentées dans le plan Oxy peuvent être définies à partir de la fonction $F(x, y)$ et sont reprises sur la figure suivante :

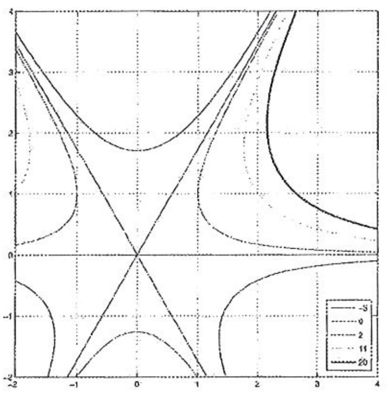


FIG. 2 – Quelques courbes définies à partir de $F(x, y)$

Q.1. Donnez les équations analytiques de toutes les courbes représentées à la figure 2.

Question 2 : fonctions implicites

Considérons maintenant l'équation $F(x, y) = 11$. Ce qui importe désormais est l'ensemble des couples (x, y) qui satisfont cette équation. Appelons T l'ensemble de tous ces couples

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2y - y^3 = 11\right\}.$$

Q.2.1. Ecrivez le plus précisément possible, l'équation de la tangente à la courbe d'équation $F(x, y) = 11$ au(x) point(s) d'abscisse $x = 2$.

Q.2.2. Calculez les dérivées partielles de $F(x, y)$ et évaluez-les au(x) point(s) d'abscisse considéré(s) à la question précédente.

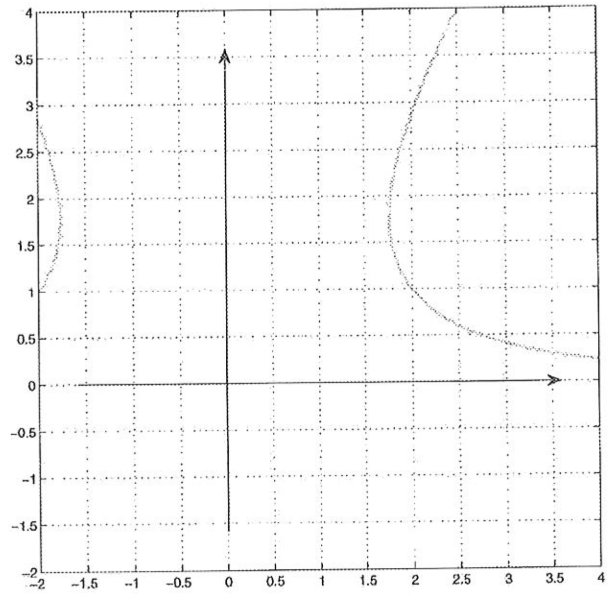


FIG. 3 – $F(x,y) = 11$

B.2 Travail de groupe réalisé par les étudiants du public $\mathbf{Math1}_{09/10}$

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix Février 2010
1er Baccalauréat en Sciences Mathématiques

Travail de Groupe d'Analyse : Le théorème des fonctions implicites

Objectif

Dans le cadre des fonctions de plusieurs variables réelles, nous nous intéressons dans ce travail à l'analyse infinitésimale et au théorème des fonctions implicites plus particulièrement.

Consignes

- L'assistant responsable du travail de groupe est Sebastian Xhonneux (Département de Mathématique, Bureau 131).
- Lors de l'évaluation de ce travail, nous tiendrons compte de la rigueur et des justifications dans les réponses aux questions ainsi que de la clarté de la rédaction.
- Le travail se divise en deux parties qui sont à remettre respectivement
  1. pour le mardi 23 février au plus tard,
  2. et pour le vendredi 5 mars au plus tard,
- Deux consultations avec Sebastian Xhonneux sont obligatoires. La deuxième aura lieu lors de la remise de la deuxième partie du travail. Ainsi, la première consultation est prévue pour la semaine du mardi 16 au mardi 23 février, la deuxième aura lieu dès le début de la semaine du 8 mars. Une feuille suivra pour les horaires précis.
- Lors de la remise de la dernière partie du travail, des exercices seront prévues afin d'évaluer la compréhension de chacun.

Chaque groupe devra rendre à Sebastian Xhonneux pour chaque partie du travail une "narration de recherche". Il est demandé de ne pas vous contenter de donner la réponse mais de raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver. Vous décrirez tous les essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont pas abouti. Racontez sur votre feuille les différentes étapes de votre recherche, les remarques, les aides, les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait changer de méthode ou qui vous ont permis de progresser.

1 Analyse infinitésimale

En 1961 A. ROBINSON introduit l'Analyse non standard, une théorie mathématique du calcul infinitésimal, qui rend rigoureux l'usage des infiniment petits et des infiniment grands introduit par G.W. LEIBNIZ (vers 1690) et largement utilisé par Euler. Pour cela on étend le champ $\mathbb{R}$ des réels pour obtenir une extension $^*\mathbb{R}$ dont les éléments sont appelés hyperréels et qui contient notamment des nombres infiniment petits et grands possédant les mêmes propriétés que les éléments de $\mathbb{R}$. Même si la construction de l'ensemble $^*\mathbb{R}$ nécessite le recours aux outils parmi les plus sophistiqués de la logique mathématique, les définitions et les propriétés des nombres hyperréels sont très proches de l'intuition. Dans ce travail, nous accepterons l'existence de ces nombres hyperréels (et ne montrerons pas leur existence) pour profiter du gain en intuition que nous pouvons en tirer.

1.1 Présentation intuitive de la droite numérique hyperréelle

De nouveaux nombres (par rapport aux réels) seront considérés. Ils sont appelés *hyperréels* et forment l'ensemble noté $^*\mathbb{R}$. Leur introduction vise simultanément les trois objectifs suivants :
- étendre les réels, en ce sens que $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $^*\mathbb{R}$;
- pouvoir appliquer aux nombres hyperréels les mêmes règles du calcul algébrique que celles valables au sein de l'ensemble des réels;
- garantir l'existence d'au moins un nombre hyperréel positif mais inférieur à tout nombre réel positif.

Une première étape va livrer une représentation géométrique de ces nouveaux nombres au départ de la droite numérique réelle. Bien sûr, les hyperréels non réels ne sont pas directement repérables sur la droite numérique classique puisque les points de cette droite correspondent exactement aux réels. Toutefois, tout se passe comme si l'utilisation d'un MICROSCOPE (VIRTUEL) "INFINIMENT PUISSANT" dont l'oculaire serait pointé sur l'origine de la droite numérique permettait de découvrir des nombres invisibles à l'oeil nu (et donc non réels), mais infiniment petits puisqu'ils sont "infiniment proches" de 0; ils forment le "halo" de 0 et peuvent être inférieurs ou supérieurs à 0 selon qu'ils sont vus à gauche ou à droite de l'origine de la droite numérique (Figure 1).

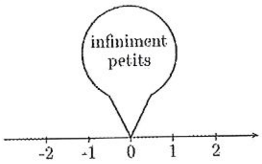


FIG. 1 – Nombres infiniment petits

Cette manipulation peut être recommencée en "translatant" le microscope virtuel considéré ci-dessus pour le pointer sur un nombre réel r quelconque : apparaissent ainsi une infinité de nombres non réels "infiniment proches" de r ; ils forment le "halo" de r (Figure 2). Algébriquement, ces nombres peuvent être obtenus en ajoutant à un réel un infiniment petit.

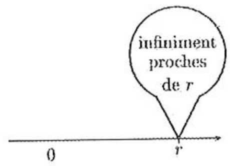


FIG. 2 – Halo d'un réel non-nul

Dans le même ordre d'idées peuvent être introduits des nombres non réels "infiniment grands", c'est-à-dire supérieurs à n'importe quel nombre réel : ils peuvent être construits algébriquement en prenant "l'inverse" d'un infiniment petit positif.
Il existe en réalité de nombreux nombres infiniment grands, qui peuvent être positifs (au sens donné ci-dessus) ou négatifs (en ce sens que leur opposé est un infiniment grand positif) ; ils ne peuvent pas être "observés à l'oeil nu" sur la droite numérique, mais peuvent être imaginés au moyen d'un "TÉLESCOPE INFINIMENT PUISSANT" pointé vers la droite ou vers la gauche de manière à rencontrer des nombres, forcément non réels, mais respectivement supérieurs ou inférieurs à tous les réels.

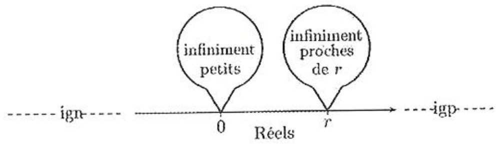


FIG. 3 – La droite hyperréelle

Au total, le recours à des microscopes et télescopes infiniment puissants permet d'imaginer les nombres hyperréels associés aux points d'une *droite numérique hyperréelle* composée des points de la droite numérique réelle, chacun de ceux-ci étant accompagné de tout un halo de points infiniment proches, en plus des points "infiniment éloignés" situés (sur les traits en pointillés) vers la droite ou vers la gauche.

1.2 Ordres de grandeur et définitions de base

Nous avons adjoint aux nombres réels classiques, encore appelés *standards*, de nouveaux nombres qualifiés de *non standards*, de manière à former l'ensemble $^*\mathbb{R}$ qui inclut strictement $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathbb{R}$ se voit prolongé en $^*\mathbb{R}$, mais de manière à en conserver les principales propriétés : par exemple, toutes les opérations algébriques valables sur $\mathbb{R}$ vont "s'étendre naturellement" sur $^*\mathbb{R}$. Désormais, tout élément de $^*\mathbb{R}$, qu'il soit standard ou non standard, sera nommé *nombre hyperréel*, ou plus simplement *nombre*. Pour éviter toute éventuelle confusion, nous veillerons, dans la mesure du possible, à noter les nombres non standards d'une autre façon que les réels (standards). Ces derniers seront notés classiquement par des lettres : $a, b, c, \ldots$ pour des constantes et $x, y, z, t, u, r, n, p, \ldots$ pour des variables ou paramètres. Tandis qu'on désignera le plus souvent les nombres non standards soit par une lettre grecque : $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta, \varepsilon, \omega, \ldots$, soit par une lettre latine précédée du signe * : $^*x$, $^*y$, $^*z$...

Les nombres hyperréels sont répartis dans trois "catégories" en fonction de leur *ordre de grandeur*. Intuitivement, les nombres sont
- "extrêmement" petits au point d'être trop petits pour être effectivement distingués de 0,
- non nuls mais d'une grandeur "à l'échelle humaine",
- "extrêmement" grands au point d'être trop grands pour être effectivement observés par l'homme.

En analyse non standard, ces nombres sont respectivement qualifiés d'*infiniment petits*, *appréciables* et *infiniment grands*; ils se manipulent suivant des règles différentes selon leur ordre de grandeur : par exemple, conformément à l'intuition, un nombre appréciable n'est (pratiquement) pas modifié si on lui ajoute un infiniment petit, mais fournit un infiniment grand quand on lui ajoute un infiniment grand.

Définition 1.1 (Infiniment petit)
- *Un nombre* infiniment petit *(en abrégé, ip) est un hyperréel* $^*x$[1] *non nul qui est plus proche de 0 que tout réel.*

$$\epsilon \text{ est ip si } \forall r \in \mathbb{R}_0^+, 0 < |\epsilon| < r.$$

  ϵ est alors un infiniment petit positif (en abrégé, ipp) ou un infiniment petit négatif (en abrégé, ipn) selon qu'il est positif ou négatif.
- *Un nombre infinitésimal (en abrégé if) est nul ou infiniment petit.*
- *Le halo de 0 est l'ensemble, noté $H(0)$, composé de tous les nombres infiniment petits.*

Définition 1.2 (Infiniment proche)
Deux hyperréels distincts $^*x$ et $^*y$ sont dits infiniment proches, *ce qui se note $^*x \approx {}^*y$, lorsque $^*x - {}^*y$ est infiniment petit.*

Le halo de 0 contient une infinité de nombres hyperréels négatifs et une infinité de nombres hyperréels positifs; chacun de ses éléments est un nombre non standard qui est infiniment proche du réel standard 0. De même, il existe des nombres non standards qui sont infiniment proches d'un réel arbitraire et dont ce dernier est, pour ainsi dire, la partie effectivement observable.

[1]Il est encore courant de noter un infiniment petit par la lettre grecque ε.

Définition 1.3 (Halo d'un nombre hyperréel)
Soit r un réel quelconque.

- *On appelle* halo de r, l'ensemble, noté $H(r)$, de tous les hyperréels non standards qui sont infiniment proches de r.
- Un hyperréel standard ou non standard est qualifié d'appréciable (en abrégé, ap) lorsqu'il est égal à ou infiniment proche d'un réel non nul ; un tel nombre peut être positif (en abrégé, app) ou négatif (en abrégé, apn).

Comme c'était le cas pour 0, le halo d'un réel non nul ne contient aucun nombre réel, mais une infinité de nombres non standards qui lui sont inférieurs ou supérieurs.

Étant donné qu'un hyperréel infiniment petit positif est, par définition, non nul mais strictement inférieur à tout réel standard positif, il est possible d'en prendre son inverse qui est alors toujours positif, mais plus grand que tout réel positif. Un tel nombre est donc non standard et est appelé un infiniment grand positif. Nous pouvons procéder de même en inversant un infiniment petit négatif, ce qui nous conduit aux définitions :

Définition 1.4 (Infiniment grand)

- *Un nombre hyperréel $^*x$ qui est supérieur (resp. inférieur) à tout réel positif (resp. négatif) est appelé un* infiniment grand positif, *en abrégé igp*[2] *(resp. un* infiniment grand négatif, *en abrégé ign).*

$$\omega \text{ est igp (resp. ign) si } \forall r \in I\!R : \omega > r (\text{resp. } \omega < r) .$$

- *Un infiniment grand (en abrégé ig) est soit un infiniment grand positif, soit un infiniment grand négatif.*
- *L'ensemble de tous les nombres infiniment grands est noté $H(\infty)$; de même, on écrit $H(+\infty)$ et $H(-\infty)$ pour désigner respectivement l'ensemble de tous les hyperréels infiniment grands positifs et celui des infiniment grands négatifs.*

Un hyperréel infiniment grand est qualifié de *non limité*, tandis qu'un hyperréel est dit *limité* (noté *lm*) lorsqu'il n'est pas infiniment grand. Comme on peut aisément vérifier, il existe un unique réel r qui est infiniment proche ou égal à $^*x$. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.1
Pour tout hyperréel $^*x$ limité, il existe un unique réel r qui est infiniment proche ou égal à $^*x$

Preuve : Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq s$ tels que $^*x \cong r$ et $^*x \cong s$. Par définition, il existe ε, η infinitésimaux tels que $^*x = r + \varepsilon$ et $^*x = s + \eta$. Dès lors, on a $r - s = \varepsilon - \eta$. Le premier membre étant réel, le deuxième membre ne peut être que nul, ce qui entraîne $r = s$ alors que nous les avions supposés différents. □

[2] Il est encore courant de noter un infiniment grand (positif ou négatif) par la lettre grecque ω.

Définition 1.5 (Partie standard d'un hyperréel limité)
Pour tout hyperréel $^*x$ *limité, l'unique réel* r *qui est infiniment proche ou égal à* $^*x$ *est appelé la* partie standard[3] de $^*x$ et se note $\mathrm{st}(^*x)$.

Bien entendu, tout réel est sa propre partie standard. Par ailleurs,
- si ε est un infiniment petit, sa partie standard coïncide avec le nombre 0 ;
- si $^*x$ est un hyperréel appréciable, sa partie standard est un réel non nul ;

Insistons encore sur ces deux points :
- seules les parties standards des hyperréels limités peuvent être observées concrètement ;
- un hyperréel infiniment grand ne possède pas de partie standard puisqu'il n'est infiniment proche d'aucun réel standard.

1.3 Opérations et fonctions sur $^*\mathbb{R}$

Les opérations algébriques traditionnelles permettent de construire de nouveaux nombres en partant d'un nombre non standard infiniment petit positif, noté par exemple ε ; par exemple, les nombres tels que $2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$ sont également infiniment petits positifs, tandis que $\varepsilon + 2$ est appréciable et que $\frac{1}{\varepsilon}$ est infiniment grand positif.

Des règles régissent les ordres de grandeur pour les opérations arithmétiques traditionnelles ;elles ont été découvertes par Leibniz et sont dès lors appelées *règles de Leibniz*. Comme elles sont fort naturelles et très faciles à illustrer à l'aide d'exemples et bien qu'elles puissent toutes être aisément démontrées rigoureusement à partir des définitions de base nous allons nous contenter de les énoncer :

+	0	ip	ap	ig
0	0	ip	ap	ig
ip	ip	ip	ap	ig
ap	ap	ap	lm	ig
ig	ig	ig	ig	?

TAB. 1 – L'addition

×	0	ip	ap	ig
0	0	0	0	0
ip	0	ip	ip	?
ap	0	ip	ap	ig
ig	0	?	ig	ig

TAB. 2 – La multiplication

Disposant d'une algèbre sur les hyperréels, nous sommes en mesure d'étudier des fonctions algébriques sur $^*\mathbb{R}$, c'est-à-dire des lois $^*f : {}^*x \mapsto {}^*f(^*x)$, qui, à certains hyperréels $^*x$ appartenant à un ensemble $^*D$, appelé le domaine de $^*f$, associent l'hyperréel $^*f(^*x)$, où $^*f$ désigne une expression algébrique formée de sommes, de différences, de produits, de quotients et de puissances de $^*x$ ainsi que de nombres constants. Par exemple, le polynôme

$$^*x \mapsto 2\,(^*x)^2 - 3\,^*x + 2$$

[3] Bien que l'appellation *partie standard* soit la plus courante les mots *partie observable* pourraient aussi avantageusement remplacer cette dénomination.

est défini sur tout $^*\mathbb{R}$, tandis que la fraction rationnelle $^*x \mapsto \frac{1}{^*x-1}$ est définie pour tout hyperréel $^*x$ différent de 1.

Il nous sera encore utile d'étendre les fonctions élémentaires classiques pour les définir sur $^*\mathbb{R}$: par exemple, il conviendra, d'un point de vue théorique, de manipuler le sinus d'un infiniment petit ou encore le logarithme népérien d'un infiniment grand...

> **Règle d'extension.** Toute fonction réelle f d'une variable, définie sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) I, admet une extension naturelle, notée (provisoirement) $^*f$ définie sur $^*I$, dont les valeurs sont des hyperréels et dont la restriction aux réels est f ; cette dernière condition signifie que si r désigne un réel quelconque, $^*f$ est définie en r si et seulement si f est définie en r, auquel cas on doit avoir $^*f(r) = f(r)$; en résumé
>
> $$^*f : {^*I} \to {^*\mathbb{R}} \text{ telle que } {^*f(r)} = f(r)\ \forall r \in I.$$

Reprenons l'exemple de la fonction polynomiale f considérée dans le paragraphe précédent et définie par $f(x) = x^2 + x - 2$ pour tout réel x. Son extension naturelle $^*f$ est définie pour tout hyperréel $^*x$ par

$$^*f(^*x) = (^*x)^2 + {^*x} - 2.$$

On a notamment les propriétés suivantes de cette extension :
- $^*f(^*x) = (^*x+2)(^*x-1)$ pour tout $^*x \in {^*\mathbb{R}}$;
- $^*f(^*x) = 0$ si et seulement si $^*x = -2$ ou $^*x = 1$;
- $^*f(x) \leqslant 0$ pour tout $^*x \in {^*[-1,2]}$;
- $^*f$ est strictement croissante sur $^*[-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Ainsi, plusieurs propriétés vérifiées par le polynôme f sur $\mathbb{R}$ le sont également par $^*f$ sur $^*\mathbb{R}$.
Bien plus, il importe de transférer les propriétés classiques de toutes les fonctions réelles à leurs extensions naturelles sur $^*\mathbb{R}$. Plus généralement, toute "proposition standard" qui est vraie dans les réels est également vraie dans les hyperréels[4].

> **Règle de transfert.** Toute proposition standard qui est vraie dans les réels est également vraie dans les hyperréels, pour autant que les variables hyperréelles $(^*x, {^*y}, \ldots)$ soient mises à la place de leurs homologues réelles $(x, y, \ldots)$ et que les fonctions réelles soient remplacées par leurs extensions naturelles, et toutes choses égales par ailleurs.

[4] Il convient toutefois de rester vigilant. En effet, la règle de transfert n'est valable que pour les propositions standards et certains résultats ne sont plus valables lorsque l'on travaille dans l'ensemble $^*\mathbb{R}$ des hyperréels.

1.4 Exercices

Résolvez les exercices suivants en utilisant les définition et propriétés vues :

1. Soient ε un infiniment petit positif et ω un infiniment grand positif. Placer sur la droite hyperréelle les nombres suivants :

$$\frac{1}{2\varepsilon},\ 0,\ 3\varepsilon,\ -\frac{1}{\omega},\ \sqrt{2}-\varepsilon^2,\ 3-\omega,\ \frac{1}{\omega^2}+\sqrt{2}$$

2. Trouver l'ordre de grandeur des nombres suivants, où ω désigne un infiniment grand positif et ε un infiniment petit positif.

a) $100^{100}+\frac{3}{\omega+2}$	b) $\sqrt{2}-\varepsilon^2$	c) $3\omega^2-10\omega+4$	d) $\frac{5\omega^2+3}{7-2\omega}$
e) $\frac{3\omega-4}{5\omega^2+2}$	f) $\frac{5\omega^2+3\omega-4}{3\omega^2-2\omega+7}$	g) $\frac{\omega+\varepsilon}{\varepsilon^2}$	h) $\frac{1}{\varepsilon-1}$
i) $\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$	j) $\frac{4\varepsilon^3-5\varepsilon^2+\varepsilon+1}{2\varepsilon^2-3\varepsilon+3}$	k) $\frac{\varepsilon^3}{\omega}+10^{-100}$	l) $\frac{\varepsilon}{1-\omega}$

3. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
   a) Entre deux hyperréels, il existe un réel.
   b) Entre deux hyperréels, il existe un hyperréel.
   c) La différence de deux hyperréels peut être réelle.

4. Sachant que ε et ω désignent respectivement un infiniment petit et un infiniment grand arbitraires, repérer les propositions vraies parmi les suivantes :
   a) $1+\varepsilon \approx 1$
   b) $2+10^{-100} \approx 2+\varepsilon$
   c) $\varepsilon+\omega \approx \omega+3\varepsilon$
   d) $100^{100} \approx \omega$

5. Sachant que r désigne un réel non nul et que ε est un infiniment petit, trouver, sous réserve d'existence, la partie standard des nombres suivants :
   a) $3r+4\varepsilon^2$; b) $r^2\varepsilon$; c) $\frac{r^3}{\varepsilon}$; d) $\frac{5\varepsilon}{r^2}$; e) $\sqrt{r^2-\varepsilon^3}$.

1.5 Étude de courbes planes

Soit C une courbe située dans le plan rapporté à un repère orthonormé : c'est l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient une équation du type

$$F(x,y)=0,$$

où F désigne une fonction à deux variables.

Nous allons faire appel à l'*extension naturelle* ${}^*C$ de la courbe C d'équation $F(x,y)=0$: il s'agit de l'ensemble des points hyperréels ${}^*P=({}^*x,{}^*y)$ dont les coordonnées hyperréelles vérifient l'équation suivante, qui est obtenue par les règles d'extension et de transfert :

$${}^*F({}^*x,{}^*y)=0,$$

où ${}^*F$ désigne l'extension naturelle de la fonction F.

Nous étudierons le **comportement local** de C au "voisinage" d'un de ses points $P = (r, s)$. À cet effet, nous considérerons les points ${}^*P = ({}^*x, {}^*y)$ qui sont situés sur ${}^*C$ et qui sont *infiniment proches* de P en ce sens que leur distance à P, égale à

$$d\,({}^*P, P) = \sqrt{({}^*x - r)^2 + ({}^*y - s)^2},$$

est un hyperréel infiniment petit positif. Ces points ${}^*P$ sont bien entendu indiscernables de P à l'oeil nu. C'est pourquoi, à l'instar d'un biologiste qui utilise un microscope pour agrandir de minuscules microbes, nous recourerons à un microscope "virtuel" pour "zoomer" sur la courbe autour du point P et ainsi pouvoir distinguer des points infiniment proches. Nous verrons que, généralement, la courbe étudiée sera vue sous la forme d'une droite passant par l'origine de l'oculaire du microscope.

En guise d'introduction, traitons deux exemples élémentaires. Considérons tout d'abord la parabole d'équation $y = x^2$; elle passe notamment par l'origine $O = (0.0)$. Demandons à un ordinateur (ou à une calculatrice graphique) de représenter cette courbe lorsque l'abscisse x parcourt des intervalles de plus en plus restreints centrés sur 0. Travaillons, par exemple, sur les intervalles [-1 , 1], [-0.2 , 0.2], [-0.1 , 0.1] et [-0.01 , 0.01] ; les graphiques obtenus sont représentés sur la Figure 4.

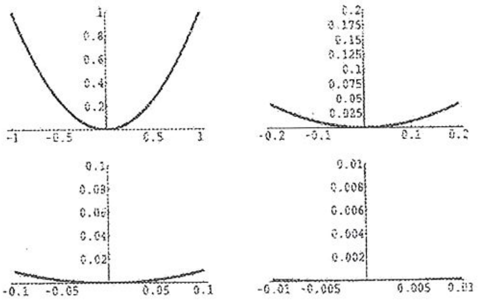


FIG. 4 – Zooms successifs sur la parabole d'équation $y = x^2$ autour de l'origine

Procédons de même avec la parabole d'équation $y = 2x^2$ au voisinage du point $P = (1, 2)$. Des zooms successifs autour de P donnent les résultats de la Figure 5. Un examen de ces deux cas nous permet d'observer notamment ce phénomène caractéristique : la courbe semble "se rectifier" progressivement pour se présenter finalement sous la forme d'une droite qui ne sera plus modifiée par des zooms ultérieurs.

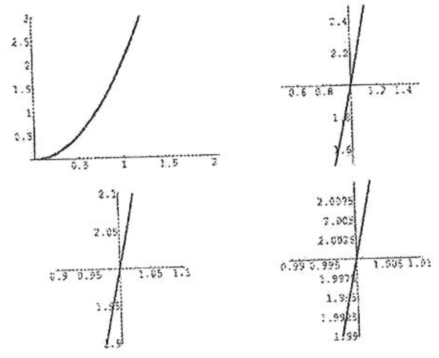


FIG. 5 – Zooms successifs sur la parabole d'équation $y = 2x^2$ autour du point $P = (1, 2)$

Pour bien comprendre ce phénomène important, analysons d'abord le mode de fonctionnement de "microscopes virtuels".

1.5.1 Microscope virtuel

Plaçons-nous en premier lieu sur la droite numérique réelle et considérons un petit intervalle symétrique centré autour de l'origine, par exemple $I = [-0.001, 0.001]$: à l'oeil nu, cet intervalle semble réduit à un point, à savoir l'origine de l'axe réel. Par contre, si on multiplie par 1000 tout nombre x de I, les résultats obtenus, notés $X = 1000x$, sont compris entre -1 et 1 et forment dès lors un nouvel intervalle de longueur 2. En d'autres termes,

$$x \in [-0.001, 0.001] \Longleftrightarrow X \in [-1, 1].$$

Nous pouvons nous ramener "par translation" à cette situation dans le cas d'un petit intervalle symétrique centré sur un nombre autre que zéro. Par exemple, pour tout nombre $x \in J = [0.999, 1.001]$, $x - 1 \in I$, de sorte que $X = 1000(x - 1) \in [-1, 1]$. Le processus d'agrandissement peut être illustré par la Figure 6.

Cette idée peut être adaptée, dans le contexte des nombres hyperréels, de manière à visualiser des éléments du halo $H(r)$ d'un réel r. À cet effet, considérons un hyperréel ω infiniment grand positif. Imaginons un ω-microscope, c'est-à-dire un microscope qui agrandit ω fois chaque longueur sur la droite numérique réelle. En pointant ce

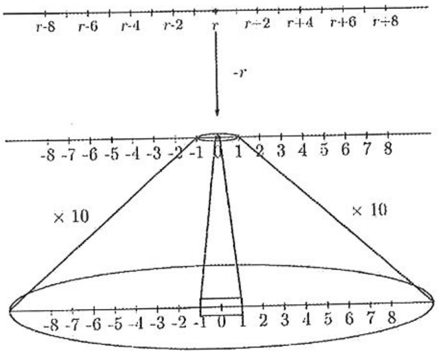


FIG. 6 – Agrandissement d'un petit voisinage de r

ω-microscope sur le point de la droite numérique représentatif du nombre r, certains éléments de $H(r)$ correspondent maintenant à des points visibles dans l'oculaire et distincts de r. Par exemple, les nombres $r - \frac{1}{\omega}$ et $r + \frac{1}{\omega}$, qui se confondent avec r à l'oeil nu, sont vus distinctement dans l'oculaire à une distance unitaire de r.

Plus généralement, dans l'oculaire d'un ω-microscope pointé sur r, un hyperréel $^*x$ situé dans $H(r)$ est observable si et seulement si $\omega(^*x - r)$ est limité, et $^*x$ possède une image distincte de r si et seulement si $\omega(^*x - r)$ est appréciable : dans ce cas, l'image de $^*x$ dans l'oculaire est éloignée de r d'une distance égale à la valeur absolue de la partie standard de ce nombre $\omega(^*x - r)$.
Nous notons $M_\omega(r)$ l'ensemble composé de tous les hyperréels distincts de r et dont l'image dans l'oculaire d'un ω-microscope pointé sur r est observable ; en d'autres termes,

$$M_\omega(r) = \{^*x \in {}^*\mathbb{R} : \omega(^*x - r) \text{ est limité}\}.$$

Il est facile de voir que $M_\omega(r)$ est strictement inclus dans $H(r) \cup \{r\}$; par exemple,

$$r + \frac{1}{\omega^2} \text{ et } r - \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

sont dans $H(r)$, mais, dans l'oculaire du ω-microscope, $r + \frac{1}{\omega^2}$ est indiscernable de r car sa distance à r est, dans le nouveau repère, égale à $\frac{1}{\omega}$ et est infiniment petite, tandis que $r - \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ est "infiniment éloigné" de r et en conséquence non visible puisque sa distance, dans le nouveau repère, est alors égale à $\sqrt{\omega}$ et est infiniment grande.

Ainsi, grâce au ω-microscope, dans l'oculaire pointé sur r, tout hyperréel $^*x$ de $M_\omega(r)$ est transformé en

$$^*X = \omega\,(^*x - r)$$

ce nombre est toutefois vu à l'abscisse nouvelle X qui est la partie standard de $^*X$. Par exemple, le nombre $^*x = r + \frac{2-\varepsilon}{\omega}$, où ε est un infiniment petit positif, est vu, dans l'oculaire, à deux unités de longueur portées sur la droite du point r.

Des considérations semblables peuvent être émises dans le plan en appliquant un microscope infiniment puissant à chacune des deux coordonnées des points.

Fixons notre attention sur un point standard, c'est-à-dire un point à coordonnées standards, $P = (r, s)$ et appelons *halo* de P l'ensemble, noté $H(P)$, de tous les points de $^*\mathbb{R}^2$ qui sont infiniment proches de P ; à l'oeil nu, tous les points de $H(P)$ se confondent avec P. Essayons d'en distinguer certains en utilisant un ω-microscope pointé sur P, avec ω un hyperréel infiniment grand positif. Cet ω-microscope agrandit ω fois chaque longueur sur chacun des deux axes de coordonnées. Concentrons notre attention sur les points de ce que nous noterons $M_\omega(P)$, à savoir l'ensemble

$$M_\omega(r) \times M_\omega(s);$$

en effet, le ω-microscope pointé sur P fournira de tout point de $M_\omega(P)$ une image observable.
D'un point de vue plus formel, l'utilisation d'un ω-microscope dirigé sur le point $P = (r, s)$ de $\mathbb{R}^2$ consiste à transformer tout point hyperréel $^*P = (^*x, ^*y)$ situé dans $M_\omega(P)$ en un point du plan muni d'un nouveau repère ; de façon plus précise, on introduit une application notée $\mathcal{M}_\omega^P$ (pour microscope de puissance ω pointé sur P), définie sur $M_\omega(P)$ par

$$\mathcal{M}_\omega^P : (^*x, ^*y) \in M_\omega(P) \mapsto (^*X, ^*Y) \in {}^*\mathbb{R}^2$$

avec

$$^*X = \omega(^*x - r) \Leftrightarrow {}^*x = r + \frac{^*X}{\omega}$$

$$^*Y = \omega(^*y - s) \Leftrightarrow {}^*y = s + \frac{^*Y}{\omega};$$

dans les faits, on observe toutefois, comme image de $^*P = (^*X, ^*Y)$, le point dont les nouvelles coordonnées X et Y sont des nombres réels égaux à la partie standard de $^*X$ et de $^*Y$ respectivement. En guise d'exemple, prenons le point $P = (1, 2)$, ainsi que le point $^*P = \left(1 + \frac{2+\varepsilon}{\omega}, 2 + \frac{1-\varepsilon}{\omega}\right)$ pour ω infiniment grand positif et ε infiniment petit positif : on a évidemment $P \approx {}^*P$, de sorte que les deux points semblent à première vus confondus ; par contre, dans l'oculaire du microscope $\mathcal{M}_\omega^P$, l'image de P coïncide avec l'origine du nouveau repère tandis que celle de $^*P$ apparaît au point $(2, 1)$

1.5.2 Tangente à une courbe

Comme exemple introductif, considérons à nouveau la parabole C d'équation $y = 2x^2$ et observons son image dans l'oculaire d'un microscope $\mathcal{M}_\omega^P$, dirigé vers le point $P = (1,2)$ et dont la puissance est l'infiniment grand ω. Par les règles d'extension et de transfert, on peut caractériser l'extension naturelle $^*C$ au moyen de l'égalité $^*y = 2\,(^*x)^2$. L'application du microscope $\mathcal{M}_\omega^P$ correspond au passage des anciennes coordonnées $^*x, {^*y}$ aux nouvelles $^*X, {^*Y}$ définies par

$$^*X = \omega\,(^*x - 1) \Leftrightarrow {^*x} = 1 + \frac{^*X}{\omega} \text{ et } {^*Y} = \omega\,(^*y - 2) \Leftrightarrow {^*y} = 2 + \frac{^*Y}{\omega}.$$

On obtient de la sorte

$$2 + \frac{^*Y}{\omega} = 2\left(1 + \frac{^*X}{\omega}\right)^2 \Longleftrightarrow {^*Y} = 4\,{^*X} + 2\frac{^*X^2}{\omega}.$$

Bien entendu, les seuls points de cette courbe qui peuvent être observés dans l'oculaire du microscope ont des coordonnées $^*X$ et $^*Y$ limitées ; de plus, la partie observable de cette courbe comprend les points de coordonnées X et Y qui sont respectivement les parties standards de $^*X$ et $^*Y$; comme $\frac{^*X^2}{\omega}$ est infiniment petit, on obtient dès lors

$$Y = 4X$$

ou encore, en repassant aux coordonnées de départ,

$$y - 2 = 4(x - 1);$$

il s'agit en réalité de la *tangente* à la parabole au point P considéré.

Ces considérations nous amènent à donner une définition à la fois générale, rigoureuse et intuitive de la tangente à une courbe.

Définition 1.6 *Une courbe C, admet une (demi-)tangente en un point $P = (r, s)$ si, quel que soit ω infiniment grand positif, la partie standard de l'image de C dans l'oculaire de $\mathcal{M}_\omega^P$ est une (demi-)droite dont une équation s'écrit*

$$aX + bY = 0,$$

avec $X = st(^*X)$ et $Y = st(^*Y)$. Dans ce cas, une équation de la tangente s'écrit

$$a(x - r) + b(y - s) = 0.$$

Illustrons cette définition en considérant la lemniscate de Gerono C d'équation

$$x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0.$$

Pointons tout d'abord un microscope de puissance infiniment grande ω sur le point $P_1 = (1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ qui appartient à cette courbe. L'image de $^*C$ par $\mathcal{M}_\omega^{P_1}$ est définie par

$$\left(1 + \frac{^*X}{\omega}\right)^4 - 4\left(1 + \frac{^*X}{\omega}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{^*Y}{\omega}\right)^2 = 0.$$

Développons le premier membre sachant que les termes indépendants vont s'éliminer et que les termes contenant en dénominateur une puissance de ω d'exposant au moins égal à 2 sont regroupés dans le reste "..." : il suffit donc de n'écrire que les termes en $\frac{1}{\omega}$, ce qui donne

$$\frac{4^{*}X}{\omega} - \frac{8^{*}X}{\omega} + \frac{4\sqrt{3}^{*}Y}{\omega} + \ldots = 0.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par ω, puis en prenant la partie standard, on obtient, avec des notations introduites antérieurement, la droite d'équation

$$-X + \sqrt{3}Y = 0;$$

le point P_1 est dit *régulier* pour C : la tangente en ce point est unique et d'équation

$$-(x-1) + \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Dirigeons à présent un microscope de puissance ω sur le point $P_2 = (0,0)$. L'image de ${}^{*}C$ par le microscope $\mathcal{M}_{\omega}^{P_2}$ est fournie par l'égalité

$$\frac{{}^{*}X^4}{\omega^4} - 4\frac{{}^{*}X^2}{\omega^2} + 4\frac{{}^{*}Y^2}{\omega^2} = 0.$$

Partant, la courbe réellement observée est définie par

$$X^2 = Y^2.$$

Le point P_2 est dit *singulier* pour C : il s'agit d'un "nœud" où la courbe possède deux tangentes, à savoir les deux droites définies, dans le repère initial, par

$$y = x \text{ et } y = -x.$$

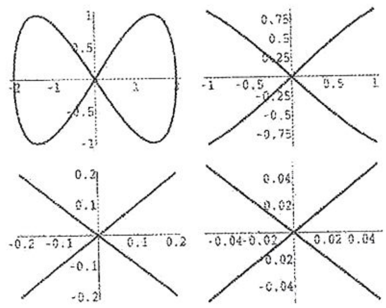


FIG. 7 – "Zooms" successifs sur la courbe d'équation $x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$ au point P_2

1.6 Exercices

1. Que voit-on dans l'oculaire d'un microscope infiniment puissant pointé sur un point de la courbe dans les cas suivants :
   (a) $\mathcal{C} \equiv y = x^2 + 3x - 2$ au point d'abscisse 1 ;
   (b) $\mathcal{C} \equiv y = \frac{x^3}{1+x^2}$ au point d'abscisse $\sqrt{3}$;
   (c) $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 = 1$ aux points d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (resp. 0 ; 1) ;

   Pour ces courbes, rechercher une équation de la (des) tangente(s) aux points considérés (sous réserve d'existence).

2. On considère la courbe (lemniscate de Gerono) $\mathcal{C}$ d'équation
$$x^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$$
   (a) Montrer que le point $P = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ est situé sur $\mathcal{C}$.
   (b) Rechercher une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point P.

3. On considère la courbe (appelée *quartique piriforme*) donnée par l'équation :
$$y^2 = x^3(2-x)$$
   (a) Que voit-on de cette courbe dans l'oculaire d'un microscope infiniment puissant dirigé vers le point $(0,0)$?
   (b) Même question si le microscope est dirigé vers le point $(2,0)$.
   (c) En quel(s) point(s) cette courbe admet-elle une tangente horizontale ?
   (d) En quel(s) point(s) cette courbe admet-elle une tangente parallèle à la bissectrice du premier quadrant ?
   (e) En exploitant les résultats ci-dessus, tracer sommairement cette courbe.

A SUIVRE...

2 Le théorème des fonctions implicites

Revenons à une courbe C située dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Nous savons qu'il s'agit d'un ensemble de points dont les coordonnées x et y vérifient une équation du type

$$f(x,y)=0,$$

où f désigne une fonction à deux variables. Peut-on décrire l'ensemble des couples (x,y) satisfaisant cette équation ?

Donnons un exemple. L'application $f(x,y)=y-10\sin(x)$ a pour représentation graphique :

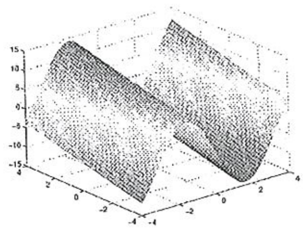


FIG. 8 – $f(x,y)=y-10\sin(x)$ $(-4\leqslant x\leqslant 4,\ -4\leqslant y\leqslant 4)$

Dans ce cas, la réponse à notre question est affirmative car il est évident que $y-10\sin(x)=0$ peut s'écrire $y=10\sin(x)$. On reconnaît là une fonction sinusoïdale. On constate donc que les solutions de notre équation de départ $f(x,y)=0$ peuvent être décrites par une application $y=\phi(x)$.

Ce premier exemple n'est pas spécialement intéressant. Dans certains cas, l'équation $f(x,y)=0$ est tellement "compliquée" qu'on ne sait pas expliciter la fonction f[5] comme le montre l'exemple suivant

$$f(x,y)=x(x^2+y^2)-10(x^2-y^2).$$

En effet, à tout x on associe *deux* y. Inversement, à un y on associe parfois *deux* x. Il semble donc que l'équation $f(x,y)=0$ ne permette pas, dans le cas présent, de définir une fonction. Cependant, cette réponse est inexacte. Supposons qu'on restreigne l'étude aux x et y positifs. Dans ce cas, il est clair qu'on obtient bien une fonction $y=\phi(x)$.

[5] Soit $y=\phi(x)$, soit $x=\psi(y)$.

Il est donc généralement difficile de dire si l'équation $f(x, y) = 0$ cache une *fonction implicite*. C'est ici que nous énonçons le théorème des fonctions implicites qui permet d'affirmer que - sous certaines conditions - il existe une fonction implicite. Il s'agit d'un théorème d'existence[6] qui ne vaut que localement[7]. Écrivons le théorème des fonctions implicites dans le cas des fonctions de deux variables :

Théorème 2.1 (Théorème des fonctions implicites)
Soit $f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $C^k(B)$ $(k \geqslant 1)$,

soit $(a, b) \in B$ tel que $\begin{cases} f(a,b) = 0, \\ f'_y(a,b) \neq 0. \end{cases}$

Alors il existe $]a-\alpha, a+\alpha[$ et $]b-\beta, b+\beta[$ tel que

1. *$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[$, l'équation en y, $f(x, y) = 0$, admet une solution unique $\phi(x)$ dans $]b-\beta, b+\beta[$ dont l'expression est donnée par*

$$\phi :]a-\alpha, a+\alpha[\to]b-\beta, b+\beta[: x \rightsquigarrow \phi(x) \text{ tel que } f(x, \phi(x)) = 0$$

(On a donc $\phi(a) = b$).

2. • $\forall (x, y) \in]a-\alpha, a+\alpha[\times]b-\beta, b+\beta[: f'_y(x, y) \neq 0$.
   • *$\phi \in C^k$ sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ et*

$$\phi'(x) = -\frac{f'_x(x, \phi(x))}{f'_y(x, \phi(x))} \quad \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[. \qquad (1)$$

Démontrer la formule (1) en suivant la démarche suivante :

1. (a) Soit ω un igp. Pointer un microscope de puissance infiniment grande ω sur le point (a, b).
   (b) Appliquer le théorème de Taylor d'ordre 1 à f au point (a, b) pour obtenir $f\left(a + \frac{X}{\omega}, b + \frac{Y}{\omega}\right)$.
   (c) Prendre la partie standard des deux membres de l'équation ainsi obtenue et identifier le coefficient angulaire de la tangente (non verticale) à la courbe $f(x, y) = 0$ au point (a, b).
2. (a) La première partie du théorème des fonctions implicites garantit l'existence d'une fonction ϕ telle que $\phi(a) = b$ (le graphe de ϕ est un sous-ensemble de la courbe $f(x, y) = 0$). Regarder le graphe de ϕ au travers d'un microscope de puissance infiniment grande ω au point (a, b).
   (b) Appliquer le théorème de Taylor d'ordre 1 à ϕ au point a pour obtenir $\phi\left(a + \frac{X}{\omega}\right)$.
   (c) Prendre la partie standard des deux membres dans l'équation ainsi obtenue.
3. Déduire des deux raisonnements précédents que

$$\phi'(x) = -\frac{f'_x(x, \phi(x))}{f'_y(x, \phi(x))}.$$

[6] En appliquant ce théorème on sait qu'une fonction *existe*. On ne sait pas quelle est cette fonction.

[7] La fonction existe dans un *voisinage* d'un point. Ce voisinage est parfois très petit.

2.1 Exercices

1. Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y^2 = 0$ définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite ϕ de x dont on donnera l'équation de la tangente en $x = 0$.
2. Donner l'allure de $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 = 2\}$ au voisinage du point $(1, 1)$. À l'aide de trois méthodes différentes, calculer la pente de la tangente en $(1, 1)$.

2.2 Questions

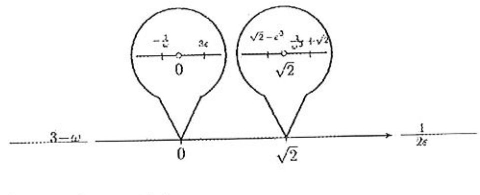
Répondre de façon individuelle aux questions suivantes :

1. Si vous deviez étudier une des deux preuves de la formule de dérivation implicite, laquelle choisiriez-vous ? Pourquoi ?
2. Quels sont les plus grandes différences entre ces deux preuves ? Quels sont les points communs ?
3. Qu'apporte chacune des deux preuves à votre vision du théorème des fonctions implicites ?
4. Expliquer **en français** ce que le théorème des fonctions implicites permet de faire !

BON TRAVAIL !

Éléments de solutions

1. Les différents nombres sont représentés sur la droite hyperréelle ci-dessous :



2. a) app b) app c) igp d) ign
   e) ipp f) app g) igp h) apn
   i) igp j) app k) app l) ipn
3. a) Faux (considérer un contre-exemple).

   b) Vrai.

   d) Vrai (donner un exemple).
4. Solutions :
   a) Vrai b) Faux c) Vrai d) Faux
5. a) $3r$;b) 0 ;c) le nombre n'est pas limité et n'a donc pas de partie standard ;d) 0 ;e) $|r|$.

B.3 Questionnaire distribué aux publics $\mathbf{Math1}_{08/09}$ et $\mathbf{Phy1}_{08/09}$

THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

3ème Baccalauréat en Sciences Mathématiques & 3ème Baccalauréat en Sciences Physiques

Deux ans plus tard... De quoi vous-souvenez vous ?

Il y a deux ans, votre cours d'analyse vous a menés à l'étude des fonctions de plusieurs variables réelles. Vous vous êtes alors penchés sur le théorème des fonctions implicites que vous aviez introduit par une narration de recherche.

Aujourd'hui, je vous propose de répondre à quelques questions relatives aux souvenirs que vous gardez de ce théorème.

Le questionnaire qui suit est à compléter individuellement et anonymement. En outre, aucune réponse ne sera considérée comme bonne ou mauvaise. Il vous est simplement demandé d'y répondre le plus consciencieusement possible.

Merci...

Questionnaire

1. Selon vous, à quoi se réfère le théorème des fonctions implicites ?

2. Etes-vous en mesure de me donner les principaux éléments constituant l'énoncé de ce théorème ?
   Si oui, quels sont-ils ?

3. Etes-vous capable de me donner les notions et outils utiles à la démonstration du théorème ?
   Si oui, quels sont-ils ?

4. D'après vous, quelle est l'utilité du théorème des fonctions implicites (applications dans le cours d'analyse ou dans d'autres cours,...) ?

5. Pensez-vous qu'il s'agisse d'un résultat important de l'analyse mathématique ? Pourquoi ?

B.4 Questionnaire distribué au public $\mathbf{Math1}_{09/10}$

THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES
2ème Baccalauréat en Sciences Mathématiques

Un an plus tard... De quoi vous-souvenez vous ?

Il y a un an, votre cours d'analyse vous a menés à l'étude des fonctions de plusieurs variables réelles. Vous vous êtes alors penchés sur le théorème des fonctions implicites ; théorème ayant fait l'objet d'un travail de groupe.

Aujourd'hui, plus de travail de groupe mais quelques questions relatives aux souvenirs que vous gardez de celui-ci et du théorème des fonctions implicites, en général.

Le questionnaire qui suit est à compléter individuellement et anonymement. En outre, aucune réponse ne sera considérée comme bonne ou mauvaise. Il vous est simplement demandé d'y répondre le plus consciencieusement possible.

Merci...

Questionnaire

1. Selon vous, à quoi se réfère le théorème des fonctions implicites ?

2. Etes-vous en mesure de me donner les principaux éléments constituant l'énoncé de ce théorème ?
   Si oui, quels sont-ils ?

3. Etes-vous capable de me donner les notions et outils utiles à la démonstration du théorème ?
   Si oui, quels sont-ils ?

4. D'après vous, quelle est l'utilité du théorème des fonctions implicites (applications dans le cours d'analyse ou dans d'autres cours,...) ?

5. Pensez-vous qu'il s'agisse d'un résultat important de l'analyse mathématique ? Pourquoi ?

6. Vous avez dû étudier 2 preuves de la formule de dérivation implicite.
   Globalement, quels souvenirs en gardez-vous ?

7. Quelles étaient les difficultés relatives à chacune de ces preuves ?
   Pourquoi ?

8. Vous souvenez-vous des différences et points communs entre ces 2 preuves ?
   Si oui, pouvez-vous en citer quelques-uns ?

9. Quel a été l'apport du travail de groupe réalisé l'année dernière quant à votre vision et votre compréhension du théorème des fonctions implicites ?
   Vous a-t-il semblé plus clair après ce travail ? Pourquoi ?

Annexe C

Glossaire

Nous présentons dans cette annexe certains résultats rencontrés dans les domaines d'application des fonctions implicites[1]. La majorité d'entre eux apparaissent dans le chapitre 3 de ce mémoire *Le théorème des fonctions implicites, un savoir savant.*

Enoncé du théorème de l'inversion de Lagrange :

Si z est une fonction de x, y et d'une fonction f telle que

$$z = x + yf(z).$$

Alors pour toute fonction g, on a

$$g(z) = g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} \Big(f(x)^k g'(x)\Big)$$

pour y petit. Si g est la fonction identité on obtient alors

$$z = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k-1} \Big(f(x)^k\Big).$$

Fonction uniforme (ou uniformément continue) :

Soit f, une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f est dite uniforme sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x, y \in I, |x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Enoncé du théorème d'inversion locale :

Soit f une application de U dans F, où U est un ouvert d'un espace de Banach réel et F un espace de Banach et $x \in U$. Si f est de classe C^p avec p, un entier strictement positif et si la différentielle de f au point x est un isomorphisme bicontinu, alors il existe un voisinage

1. Nous avons trouvé ces définitions et ces énoncés sur les sites `http ://perso.univ-rennes1.fr/karim.bekka/CDHO/Week%20by%20week/CDHO7.pdf` et `http ://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Gevrey_class`.

ouvert V de x et un voisinage W de $f(x)$ tels que f se restreigne à une bijection de V dans W dont la réciproque est de classe C^p.

Ce résultat indique que si f est continûment différentiable en un point, si sa différentielle en ce point est une bijection bicontinue (i.e. si la différentielle et sa réciproque sont continues) alors f est localement inversible et son inverse est différentiable.

Classe de Gevrey :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $s \geq 1$. La classe de Gevrey $G^s(\Omega)$ correspond à l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que pour chaque sous-ensemble $K \subset \Omega$, il existe une constante $C = C_{K,f} > 0$ telle que

$$\max_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)| \leq \mathcal{C}^{|\alpha|+1}(|\alpha!|)^s$$

où $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Lorsque $s = 1$, l'espace obtenue correspond à l'espace des fonctions analytiques réelles sur Ω.