**DOCTEUR EN SCIENCES**

**Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématique et en économie**

Xhonneux, Sebastian

*Award date:*
2011

*Awarding institution:*
Universite de Namur

**Université de Namur**
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

# Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie

Thèse présentée par

**Sebastian Xhonneux**

en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

**Composition du jury**

| | |
|---|---|
| Jacques Bair | |
| France Caron | |
| Valérie Henry | (Promoteur) |
| Maria-Alessandra Mariotti | |
| Jean-Jacques Strodiot | (Co-promoteur) |
| Suzanne Thiry | |

**Novembre 2011**

Rempart de la Vierge, 13
B - 5000 Namur (Belgique)



Imprimé en Belgique

ISBN : 978-2-87037 -730-7
Dépôt légal: D / 2011 / 1881 / 35

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Faculté des Sciences
Rue de Bruxelles, 61
B - 5000 Namur (Belgium)

# Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie

par Sebastian Xhonneux

**Résumé :** L'optimisation joue un rôle important en recherche opérationnelle, dans les mathématiques appliquées, en analyse et en analyse numérique, en statistique, dans la recherche de stratégies optimales en théorie des jeux ou encore en théorie du contrôle et de la commande. Par ses applications, elle est un sujet central non seulement en mathématiques, mais aussi en économie. La recherche d'extremum sous contraintes d'égalité est présentée à l'université dans la plupart des cours de calcul différentiel et intégral destinés à des étudiants non seulement en mathématiques mais aussi en économie. En tant qu'enseignant face aux étudiants en sciences mathématiques mais aussi en sciences économiques, nous avons souhaité élargir le champ des recherches en didactique des mathématiques vers l'étude du Théorème de Lagrange. Nos travaux visent à apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

- Quelles formes d'enseignement du Théorème de Lagrange rencontre-t-on ?
- Quel rôle joue la preuve du Théorème de Lagrange dans l'enseignement mais aussi dans l'apprentissage du Théorème de Lagrange ?
- À quelles difficultés un étudiant en mathématiques ou en économie est-il confronté lorsque le Théorème de Lagrange lui est enseigné ?

La transposition didactique et les notions fondamentales de la Théorie Anthropologique du Didactique sont les bases théoriques de nos analyses didactiques.

**Mots-clés:** Théorème de Lagrange, optimisation, transposition didactique, Théorie Anthropologique du Didactique, modèle épistémologique de référence

Dissertation doctorale en Sciences mathématiques
Date : 02/11/2011
Département de Mathématique
Promoteur : Prof. Valérie Henry

# Institutional approach to the didactic transposition of Lagrange's Theorem in mathematics and in economics

by Sebastian Xhonneux

**Abstract :** Because of its many uses, the constrained optimization problem is presented in most calculus courses for undergraduate mathematics and economics students. Since the Theorem of Lagrange and the consequential method of Lagrange multipliers (named after Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)) provide an appealing strategy for finding the maxima and minima of a function subject to equality constraints, we are interested in studying the teaching of this theorem in both branches of study, mathematics and economics. In particular, this thesis aims to answer the following questions :

- What are the main characteristics of the mathematical organizations around Lagrange's Theorem ?
- What important part does the proof of Lagrange's Theorem play in the teaching and understanding of Lagrange's Theorem ?
- What kind of difficulties do mathematics and economics students encounter when being taught Lagrange's Theorem ?

Didactic transposition and the Anthropological Theory of Didactics are our main theoretical frames and guide most of our analysis.

**Keywords:** Lagrange's Theorem, optimization, didactic transposition, Anthropological Theory of Didactics, epistemological reference model

Doctoral dissertation (Ph.D. thesis in Mathematics)
Date : 2011-11-02
Department of Mathematics
Advisor : Prof. Valérie Henry

*"Il y a un art de savoir, et un art d'enseigner."*

*Marcus Tullius Cicero*
*De Legibus, livre II, chapitre XIX (53 - 51 avt J.-C.)*

# Remerciements

Je peux l'avouer maintenant : je n'ai pas toujours été sûr d'arriver un jour à ces quelques pages, à la fois les premières et les dernières. Pourtant, ces mots me tiennent particulièrement à cœur car la thèse est une expérience qui marque profondément et qui est faite de partages. Je voudrais donc remercier les personnes qui ont rendu possible l'aboutissement de ce projet.

Je voudrais remercier tout d'abord mon promoteur de thèse, Valérie Henry. Savait-elle à quoi elle s'engageait en acceptant de m'encadrer dès son arrivée à Namur ? Quoiqu'il en soit, je n'y serais pas arrivé sans ses lectures, ses relectures, ses questions et tous ses commentaires interpellants et me guidant dans la bonne direction. Depuis le premier jour, son implication, son dynamisme et sa motivation m'ont permis de me lancer dans ce projet complexe et de m'initier au monde de la didactique des mathématiques. Il m'est difficile d'imaginer une autre personne qui aurait réussi à me motiver autant ! J'espère que cette première expérience en tant que promoteur l'encouragera à encadrer encore de nombreuses thèses et ainsi faire avancer la didactique des mathématiques en Belgique.

Je remercie également mon co-promoteur de thèse, Jean-Jacques Strodiot, qui m'a fait découvrir le monde de la recherche en mathématiques, plus particulièrement en optimisation. Bien qu'il y ait eu, en cours de thèse, une petite déviation vers la didactique de l'optimisation, il est resté à mes côtés et a contribué avec rigueur, précision et gentillesse à me procurer une formation poussée en analyse et en optimisation.

Je suis également très reconnaissant envers Suzanne Thiry qui m'a "initié à la démarche mathématique" de façon précise et rigoureuse. Les nombreux échanges sur les défis de l'enseignement universitaire ont suscité en moi un vif intérêt pour les problèmes didactiques et pédagogiques.

Je tiens aussi à remercier Jacques Bair pour toutes ses remarques très constructives et ses recherches bibliographiques qui m'ont été utiles. Qu'il soit remercié pour l'intérêt qu'il a marqué à l'égard de mes ambitions dès ma décision d'aborder le Théorème de Lagrange.

Un tout grand merci est adressé à Maria-Alessandra Mariotti. Notre rencontre à l'école d'été YESS5 en 2010 a été décisive pour la direction que prendrait ma thèse. Sa compétence, sa disponibilité, ses encouragements, son enthousiasme et son humour ont élargi ma vision du monde didactique. Je la remercie également pour son accueil chaleureux lors de mes deux séjours à Sienne.

Je remercie spécialement France Caron d'avoir accepté d'être membre du jury de cette thèse. J'essaierai de mettre à profit ses questions et remarques si fines et si pertinentes.

Merci aussi à tous les professeurs, étudiants et collègues qui ont accepté d'expliciter les difficultés propres à l'enseignement du Théorème de Lagrange et qui m'ont apporté le matériau sans lequel je n'aurais eu que des intuitions.

Merci à tous mes collègues du Département de Mathématique qui m'ont encouragé tout au long de ce travail. En particulier, je remercie Annick Sartenaer pour sa lecture et ses commentaires enrichissants concernant le domaine de l'optimisation, Pascale Hermans pour l'organisation de mon souper de thèse et Martine De Vleeschouwer pour ces longues discussions échangées non seulement sur toute sorte de questions liées à l'enseignement mais aussi sur le vin et l'art culinaire qui m'ont apporté divertissement et soutien. Merci également à mes anciennes collègues du Département, Katia Demaseure, Caroline Sainvitu et Emilie Wanufelle, qui m'ont encouragé à aller au bout de cette thèse.

Merci à Joffray Baune qui a dépassé depuis longtemps le stade de simple collègue. Il est devenu durant ces quatre dernières années un véritable ami. Ses conseils, ses questions, ses encouragements ont été précieux et sources d'inspiration.

Merci enfin à Anne-Sophie Libert qui a joué un rôle important dans la réalisation de ma thèse. Collègue de bureau pendant sept ans, correctrice orthographique et stylistique de français d'une centaine de mails, de rapports et de lettres, interlocutrice de prédilection, elle a vécu cette aventure à mes côtés et pourrait sans aucun doute en raconter les hauts et les bas. Merci pour tous ces moments partagés !

Many thanks go to Angela, Ljerka and Sonia, my dear friends from WG2 at YESS5. I am very grateful for the stimulating discussions on learning and teaching mathematics we have on Skype. I remember our discovering of this whole universe of mathematics education that seems to be bigger than we have imagined before our arrival at Palermo.

Ein ganz spezielles Dankeschön geht an Jasmin, Valérie, Verena und Wim. Man sagt, dass mit Freunden an seiner Seite jedes Hindernis bewältigt werden kann. Die Doktorarbeit aus dem Weg zu räumen, wäre ohne ihren Rückhalt für mich nicht möglich gewesen. Meinen Dank aussprechen möchte ich aber auch all meinen anderen Freunden, an die ich mich wenden kann, wann immer ich möchte. Besonders möchte ich mich bei Martha Orban bedanken, die im letzten Jahr die Rolle des "Coachs" übernommen und mich angetrieben hat, "das Ding nun endlich fertigzustellen".

Nicht namentlich unerwähnt darf Frank Vandenrath bleiben, den ich als Person und Freund sehr schätze. Indem er seine Ratschläge, seine Weisheiten und seinen Erfahrungsschatz mit mir teilt, trägt er ganz entscheidend dazu bei, meine Ansichten und Ideen zu den verschiedensten Themen zu prägen. Danken möchte ich ihm auch für die vielen gemeinsamen Momente, die mir regelmäßig Abwechslung vom Schreiben der Doktorarbeit verschafft haben.

Je tiens aussi à remercier Isabelle et Jean-Luc Foucart pour l'accueil qu'ils me réservent chez eux. Je me souviendrai des journées passées à la rédaction de la thèse dans leur salon.

Un immense merci à mes parents et mon frère qui m'ont toujours soutenu avec amour, confiance et affection. Je pense aux nombreux trajets en voiture pour venir me chercher à la gare, à la quantité de linge à laver et à repasser, aux envois de documents oubliés et aux autres services qu'ils m'ont rendus. Ils ont accompagné ce travail, en ont permis la réalisation et m'ont encouragé tout au long des sept années sans jamais douter du résultat final. J'espère qu'ils en sont aussi fiers que moi.

Je remercie enfin Clémence, qui depuis plus de trois ans maintenant a toujours été à mes côtés, lors des moments joyeux, mais aussi lors des moments de remise en question, et surtout pendant les mois de rédaction de la thèse. Sans elle, sans son amour, sans sa présence, je ne serais pas arrivé au bout de ce chemin. Elle m'a apporté - et m'apporte toujours - l'équilibre et l'énergie qui m'ont permis de persévérer. Pour tout ce soutien, cette complicité entre nous et la confiance qu'elle a en moi, je l'aime de tout mon cœur !

Sebastian

# Table des matières

# Introduction

La problématique de l'enseignement des mathématiques dans le supérieur prend une place de plus en plus importante parmi les recherches en didactique. Tout naturellement, c'est vers les mathématiques enseignées en première année postsecondaire que la plupart des travaux se sont tournés (Bridoux, 2009 ; Dorier, 2000 ; De Vleeschouwer, 2010 ; Gueudet, 2008 ; Henry, 2003 ; Nardi, 2008 ; Winsløw, 2006). À notre connaissance, peu de travaux en didactique [1] se sont intéressés aux mathématiques dites avancées, enseignées au delà de la première année universitaire.

Parallèlement, les travaux sur les liens entre l'enseignement des mathématiques et celui des autres disciplines se répandent progressivement (Artaud, 1993 ; Ba & Dorier, 2010 ; Dorier, 1993 ; Mizony, 2006 ; Rogalski, 2006) et font, de plus en plus régulièrement l'objet de groupes de travail dans les colloques spécialisés. Ainsi, la présentation du Groupe de Travail "Enseignement et apprentissage des mathématiques : interactions avec les autres disciplines scolaires et les pratiques professionnelles" du Colloque EMF 2012 souligne l'importance de ce thème [2] :

> *Ce sujet revient pour une quatrième fois dans le cadre de l'EMF. Une telle longévité s'explique en partie par l'importance de ce thème dans l'énoncé des principes directeurs qui ont guidé l'élaboration des programmes éducatifs actuels de la francophonie : contextualisation des apprentissages, interdisciplinarité, intégration des matières, apprentissage par projets, développement de compétences, etc. Elle trouve aussi sa justification dans les défis et problèmes que continuent de poser les interactions entre les disciplines enseignées au sein des institutions de formation, tant générale que professionnelle.*

Il n'en reste pas moins que dans ces deux domaines, les avancées restent marginales si l'on considère l'immensité des travaux potentiels (Nardi, González-Martin, Gueudet, Iannone, & Winsløw, 2012, à paraître).

Dans cette recherche, nous nous intéressons à un domaine particulier des mathématiques, l'optimisation. L'optimisation joue un rôle important en recherche opérationnelle, dans les mathématiques appliquées, en analyse et en analyse numérique, en statistique,

1. Citons tout de même (Castela & Romo Vázquez, 2011 ; Romo Vázquez, 2011 ; Montiel, Wilhelmi, Vidakovic, & Elstak, 2009).

2. http://www.emf2012.unige.ch/index.php?option=com_content&view=article&id=37, Bessot Annie, Ba Cissé, Caron France, Squalli Hassane (consulté le 11 octobre 2011).

dans la recherche de stratégies optimales en théorie des jeux ou encore en théorie du contrôle et de la commande. Par ses applications, elle est un sujet central non seulement en mathématiques, mais aussi en économie. Elle figure donc parmi les thèmes abordés dans la formation de tout futur mathématicien mais également des futurs économistes et gestionnaires.

Du point de vue didactique, si on trouve des travaux sur les fonctions d'une seule variable réelle, la généralisation aux fonctions de plusieurs variables reste peu étudiée et, alors que les liens entre mathématiques et physique semblent naturels, les études sur l'exploitation des théories mathématiques en économie, même si elles existent (Artaud, 1993 ; Henry, 2004), sont encore peu nombreuses.

Notre thèse s'insère donc, dès le départ, dans un contexte peu exploré en didactique puisqu'elle plonge dans des mathématiques dites avancées et qu'elle se propose d'investiguer l'enseignement de l'optimisation pour les mathématiciens mais également pour les futurs économistes et gestionnaires.

Ce choix est loin d'être sécurisant puisque, comme nous le verrons, très peu d'études s'inscrivent à un niveau de mathématiques sur lequel nous aurions pu nous appuyer. Ainsi, des concepts tels que la notion de fonction implicite ou d'extremum local pour des fonctions de plusieurs variables, qui sont à la base du thème qui nous occupe, n'ont que très peu fait l'objet de recherches en didactique.

Pour restreindre notre champ d'étude, nous avons choisi le thème du Théorème de Lagrange que nous considérons comme un véritable *savoir fondamental* (Artaud, 1993) pour l'économie. La maximisation de l'utilité du consommateur sous une contrainte budgétaire ou la minimisation du coût du producteur sous la contrainte de production sont deux exemples d'application parmi d'autres, dans le champ économique, des problèmes d'optimisation sous contraintes dont la résolution nécessite souvent le recours, implicite ou explicite, au Théorème de Lagrange. D'autre part, ce thème est également au programme de la formation de la plupart des mathématiciens. Il s'intègre généralement dans un cours d'analyse à plusieurs variables ou, plus spécifiquement, dans un cours d'optimisation.

Néanmoins, de nombreuses difficultés nous semblent accompagner l'apprentissage de ce théorème et plus largement du traitement des problèmes d'optimisation sous contraintes. Premièrement, la conceptualisation de ce type de problème nous apparaît déjà comme difficile et liée au délicat problème, plus général, de la modélisation, que ce soit au sein des mathématiques ou en provenance du domaine économique, voire d'un autre champ d'application. Plus spécifiquement, la forte composante technique du théorème, en ce sens que son application peut se réduire assez rapidement à la mise en œuvre de procédures algorithmisées, nous paraît de nature à occulter les nombreux éléments technologiques nécessaires à la conceptualisation (Sfard, 1991) du théorème, en particulier le fait que celui-ci fournit une condition nécessaire mais non suffisante déterminer un extremum. Enfin, le statut des multiplicateurs de Lagrange, outil important dans le domaine économique, reste, d'après notre expérience, très flou pour les apprenants. Toutes ces considérations ne pourront pas être traitées dans ce travail mais nous espérons néanmoins apporter quelques éléments de réponse. Pour cela, nous avons choisi de nous focaliser sur les trois questions suivantes.

– Quelles formes d'enseignement du Théorème de Lagrange rencontre-t-on ?
– Quel rôle joue la preuve du Théorème de Lagrange dans l'enseignement mais aussi dans l'apprentissage du Théorème de Lagrange ?

- A quelles difficultés un étudiant en mathématiques ou en économie est-il confronté lorsque le Théorème de Lagrange lui est enseigné ?

Afin de fournir des éléments de réponses aux questions posées ci-dessus et au vu de nos premières observations, le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1991, 1992) et en particulier la transposition didactique nous ont semblé particulièrement adapté pour fournir une base solide à nos analyses. Néanmoins, nous nous permettrons d'élargir, dès que cela s'avérera opportun, notre champ de travail au point de vue cognitif de l'apprentissage.

Le présent travail est scindé en deux parties. La première sera consacrée à la mise en place des fondements théoriques nécessaires à nos analyses. Ainsi, le Chapitre 1 aura pour objet la mise en place du cadre mathématique sur lequel se basera notre description du savoir savant tandis que le Chapitre 2 s'intéressera aux outils théoriques de la didactique des mathématiques qui soutiendront nos expérimentations. La transposition didactique et les notions fondamentales de la Théorie Anthropologique du Didactique seront ainsi les bases théoriques de nos analyses didactiques. Nous serons alors en mesure de préciser les trois questions de recherches auxquelles notre travail se propose d'apporter des éléments de réponse (Chapitre 3).

Ces éléments de réponse sont l'objet de la deuxième partie. La transposition didactique guidera la présentation et la discussion de nos données. Une analyse du savoir savant autour du Théorème de Lagrange (Chapitre 4) nous permettra de proposer une première version du modèle épistémologique de référence (MER) qui servira de fil conducteur à nos analyses (Chapitre 5). L'analyse du savoir à enseigner, issu des manuels de cours, visera à identifier différentes organisations didactiques autour du Théorème de Lagrange (Chapitre 6) et nous permettra d'affiner notre MER en lui ajoutant un aspect dynamique (Chapitre 7). Le savoir enseigné, recueilli lors de l'observation de séances de cours, sera confronté aux résultats obtenus relativement aux étapes précédentes de la transposition didactique et servira à affiner les modèles d'organisations didactiques identifiées (Chapitre 8). Enfin, nous nous intéresserons à la dernière étape de la transposition didactique et tenterons de faire émerger quelques caractéristiques du savoir appris au travers de questionnaires et d'évaluations (Chapitre 9).

La conclusion de cette recherche est l'occasion d'une synthèse des principaux résultats obtenus de cette étude de la transposition didactique du Théorème de Lagrange. Nous proposons certaines pistes de réflexion et perspectives qui vont au-delà des limites de ce travail mais que celui-ci a permis de mettre en lumière.

# Première partie

# Cadre de la recherche

Chapitre 1

# Théorie de l'optimisation

## Sommaire

Les problèmes d'optimisation apparaissent dans de nombreux domaines de la vie, comme l'économie, les sciences humaines ou l'industrie. Ils se présentent de manière très variée : optimisation d'un trajet, de la forme d'un objet, de la construction d'un navire, d'une réaction chimique, d'un prix de vente, du rendement d'un appareil, du fonctionnement d'un moteur, de la gestion des lignes ferroviaires ou encore du choix des investissements économiques. C'est pourquoi l'optimisation constitue à l'heure actuelle une branche importante des mathématiques qui traite ces problèmes de décision(s) optimale(s). Le dictionnaire Larousse fournit la définition suivante du mot *optimum : (du latin* optimus*, le meilleur) état, degré de développement de quelque chose jugé le plus favorable au regard de circonstances données.* Dans un cadre mathématique, la définition précédente nécessite quelques précisions : comment définir le *quelque chose* ? Comment juger que l'état est *le plus favorable* ? Ou encore, comment décrire formellement les *circonstances* ?

Ce premier chapitre vise à définir, dans un premier temps, les ingrédients d'un problème d'optimisation, fixe le cadre mathématique et doit ainsi se comprendre comme une introduction à la discussion de notre sujet de recherche. En même temps, il permet des regards épistémologiques sur l'optimisation et clarifie quelques concepts concernant les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité dans le cadre de l'optimisation sans et avec contraintes. Enfin, il est consacré à une brève introduction à l'analyse de sensibilité.

## 1.1 Terminologie mathématique

Mathématiquement parlant, un problème d'optimisation assemble des *variables (d'état)*[3], $x$, un ensemble, $C$, défini par des *contraintes* sur ces variables, et une *grandeur à optimiser* appelée *fonction objectif*, $f$. Dans la suite, nous serons amenés à présenter un problème d'optimisation sous la forme (générale) suivante :

$$(P)\begin{cases} \text{Optimiser} & f(x)\,, \\ \text{sous la contrainte} & x \in C. \end{cases}$$

Le processus qui permet l'identification de la fonction objectif, des variables et des contraintes d'un problème d'optimisation donné relève du domaine de la *modélisation mathématique*. La construction d'un modèle mathématique approprié est le premier pas - souvent d'une grande importance - dans la résolution du problème.

Précisons la nature des différents éléments intervenant dans $(P)$.

**Les variables :** Les *variables*, $x$, sont les composantes du système concerné sur lesquelles il est possible d'agir. La solution du problème d'optimisation, appelée par la suite *optimum*, est alors recherchée parmi les variables qui appartiennent à un ensemble $C$, lui-même compris dans un espace vectoriel $X$, où $X$ est l'*espace des variables* ($x \in X$). Si ces variables sont au nombre de $n$, elles sont représentées par un vecteur. Très souvent $X = \mathbb{R}^n$. Cependant, le problème d'optimisation $(P)$ peut être également posé en dimension infinie ; $X$ est alors un espace vectoriel de dimension infinie. Toutefois, nous nous limiterons dans ce travail aux problèmes en dimension finie. De même, nous ne considérerons pas ici les problèmes d'optimisation où les

3. ou *variables de décision.*

variables sont des entiers ($X = \mathbb{N}$ ou $X = \mathbb{Z}$), qui sont du ressort de l'*optimisation discrète* ou de l'*optimisation combinatoire.*

**La fonction objectif :** Nous supposons qu'il est possible d'identifier une expression, une fonction fournissant une mesure quantitative de qualité d'un candidat à l'optimum. Le but de l'optimisation est de rendre cette *fonction objectif* la plus petite possible ou la plus grande possible. Dans notre cadre de travail, cette fonction est définie par $f : X \to \mathbb{R} : x \rightsquigarrow f(x)$, où $X = \mathbb{R}^n$ dans la suite. Le moment venu, nous préciserons les hypothèses sur cette fonction $f$ (continuité, convexité, différentiabilité, ...) qui détermineront en même temps notre cadre de travail.

**L'ensemble des contraintes :** Les *contraintes* décrivent mathématiquement les circonstances imposées aux variables, précisent les valeurs que les variables peuvent prendre. L'ensemble $C$ qui contient les variables $x$ satisfaisant les contraintes du problème, porte le nom de *domaine admissible* du problème ($C \subseteq X$). Par conséquent, tout point $x \in X$ vérifiant $x \in C$ est appelé *point admissible* du problème $(P)$ et le problème $(P)$ est dit *réalisable* si $C \neq \emptyset$. Si $C$ est l'espace $X$ tout entier, nous parlerons d'*optimisation sans contraintes.*

Résoudre un problème d'optimisation consiste alors à déterminer les variables (de décision) conduisant aux "meilleures conditions" de la fonction objectif tout en respectant les contraintes éventuellement imposées.

Notons que déterminer les "meilleures conditions" revient à ***minimiser*** ou à ***maximiser f sur** C*. Dans la suite, nous considérons principalement des problèmes de minimisation puisque maximiser $f$ revient à minimiser $-f$ :

$$\left\{\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{SC}^{4} & x \in C\,, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \min & -f(x) \\ \text{SC} & x \in C\,. \end{array}\right.$$

Pour pouvoir définir la "solution" d'un problème d'optimisation, nous notons $f^*$ la *borne inférieure* (ou *infimum*) de $f$ sur $C$ :

$$f^* = \inf_{x \in C} f(x)\,.$$

Lorsque nous recherchons $f^*$, rien ne nous garantit que cette valeur soit finie, et encore moins qu'elle soit atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $x^* \in C$ tel que $f(x^*) = f^*$. Dans le cas où la valeur (finie) $f^*$ est atteinte en un point $x^* \in C$, on appelle $f^*$ la *valeur minimale* de $f$ sur $C$ et on dit que le problème de minimisation admet une solution $x^* \in C$. Dans le cas où $f^* = -\infty$, le problème de minimisation est dit *non borné (inférieurement).*

Ces premières notions nous amènent aux "solutions d'un problème de minimisation" [5] :

**Définition 1.1.1 (Minimum de $f$ sur $C$)** (Strodiot, 2006, p.6)
*On dit que $f$ admet un minimum sur $C$ au point $x^* \in C$ si on a :*

$$\forall\, x \in C : f^* = f(x^*) \leq f(x)\,.$$

*Le point $x^* \in C$ est un* minimum *de $f$ sur $C$.*

4. L'abréviation SC signifie *sous (les) contrainte(s).* Dans la littérature anglo-saxonne, on trouve S.T. pour *subject to.*

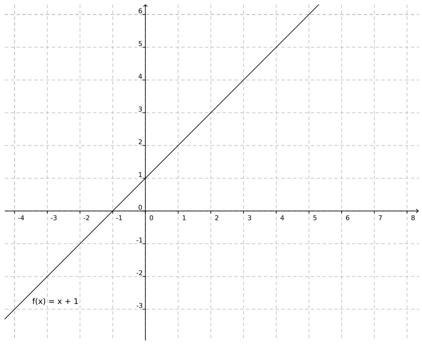
5. Une solution d'un problème d'optimisation est appelée *extremum* ou *optimum* et est soit un minimum, soit un maximum de $f$ sur $C$.

Résoudre un problème de minimisation consiste donc à rechercher le ou les points de $C$ où la fonction $f$ atteint sa valeur minimale. Une fonction $f$ peut admettre un minimum sur $C$, plusieurs minima sur $C$ ou peut ne pas en admettre. Nous illustrons ce propos avec quelques exemples.

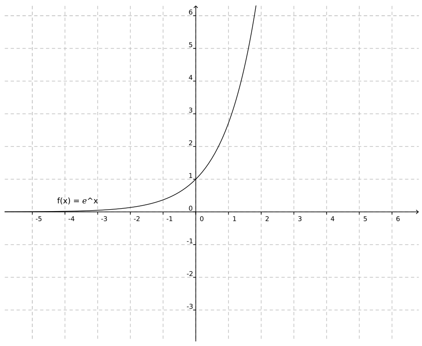
**Exemples 1.1.1**

1. *Le problème* minimiser $f(x) = x + 1$ sur $\mathbb{R}$ *n'admet pas de solution car $f^*$ n'est pas finie. En effet,*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,.$$

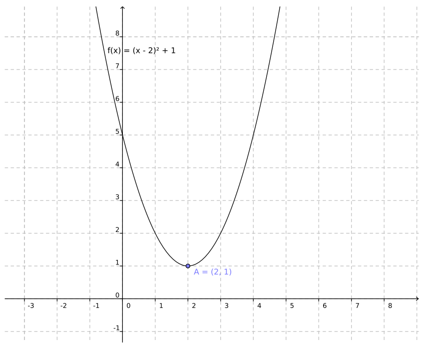



2. *Le problème* minimiser $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$ *n'admet pas de solution car l'infimum de $f$ sur $\mathbb{R}$ est égal à 0 mais n'est atteint en aucun réel.*




3. *Le problème* minimiser $f(x) = (x-2)^2 + 1$ *sur $\mathbb{R}$ admet une solution. En effet, $f$ atteint un minimum sur $\mathbb{R}$ au point $x^* = 2$ car*

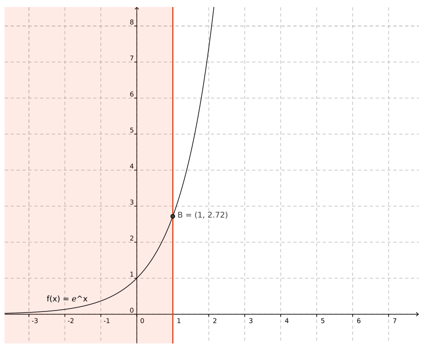
$$\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) = (x-2)^2 + 1 \geq 1 = f(2)\,.$$




4. *Le problème*

$$\begin{cases} \min & e^x \\ \text{SC} & x \geq 1 \end{cases}$$

*admet une solution. La fonction $f$ atteint un minimum sur $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$ au point $x^* = 1$.*



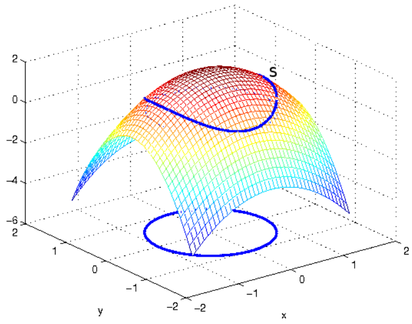
5. *Le problème*

$$\begin{cases} \min & 2 - x^2 - 2y^2 \\ \text{SC} & x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

*admet deux solutions. En effet, la fonction $f$ atteint deux minima sur*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

*aux points* $(x_1^*, y_1^*) = (0, 1)$ *et* $(x_2^*, y_2^*) = (0, -1)$.



Remarquons dès maintenant que suivant les auteurs et les contextes d'utilisation, on trouve d'autres appellations des solutions :
- $f$ présente en $x^*$ un minimum (ou une valeur minimale) sur $C$ (Stewart, 2006) ;
- $x^*$ minimise $f$ sur $C$ (Hiriart-Urruty, 2009) ;
- $x^*$ est un minimiseur ou un minimisant ou un minimant de $f$ sur $C$ (Bonnans, Gilbert, Lemaréchal, & Sagastizábal, 1998 ; Bair, 2003) ;
- $x^*$ est un point de minimum de $f$ sur $C$ (Allaire, 2006).

En raison de leur caractère répandu aux cours des Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur (FUNDP, Belgique), lieu principal de nos expérimentations, nous utiliserons l'appellation *$x^*$ est un minimum de $f$ sur $C$* et *$f$ admet un minimum sur $C$ au point $x^*$*. La valeur $f(x^*) = f^*$ sera appelée *la valeur minimale (ou optimale) de $f$ sur $C$*.

Nous soulevons dès maintenant que ces appellations, et plus généralement le choix de la terminologie, peuvent constituer une source de problèmes pour l'élève. L'utilisation du mot "minimum", par exemple, tant pour la valeur $x^*$ de la variable que pour celle, $f(x^*)$, de la fonction renvoie quelquefois aussi au point $(x^*, f(x^*))$ et montre que la terminologie de l'optimisation n'est pas dégagée de tout questionnement. Dans le cas précis du mot "minimum", nous notons que certains enseignants semblent être conscients de la difficulté. Ainsi, nous lisons dans (Bair, 2003) :

> *Pour une formulation correcte (malheureusement fort rare), il convient d'introduire encore un nouveau terme relatif aux extrema. (Bair, 2003, p.71)*

À notre connaissance, aucun travail n'a étudié, en termes didactiques, l'importance du choix d'un vocabulaire approprié en optimisation à ce jour. Citons simplement le travail connexe d'Ouvrier-Buffet (2008) sur la construction de définitions en mathématiques.

## 1.2 Terminologie économique

Au fil des siècles, l'économie mathématique s'est appropriée un vocabulaire propre relatif aux problèmes d'optimisation issus de l'économie. Nous expliquons brièvement ces quelques éléments.

**Les variables :** Les arguments de la fonction objectif sont appelés les *variables de contrôle* ou *variables de commande*. L'agent décideur a la capacité de manipuler les grandeurs économiques que représentent ces variables, et son choix final (sa décision finale) sera $x^*$ qui optimise la fonction objectif.

**La fonction objectif :** Elle représente un critère essentiel pour l'agent décideur, par exemple, le niveau de satisfaction pour un consommateur, l'utilité collective pour les pouvoirs publics d'un pays ou le coût de production d'un bien pour une firme, etc. Selon les cas, l'objectif à atteindre doit être maximisé (par exemple l'utilité ou le profit) ou minimisé (par exemple le coût).

**Les contraintes :** L'ensemble $C$ contient les valeurs admissibles. Il met en évidence le fait que les variables de commande sont soumises à des contraintes de nature économique ou extra-économique. Ainsi, on a par exemple qu'un ménage ne peut consommer ou s'endetter plus que son budget ne le permet ou qu'une firme doit tenir compte de sa contrainte technologique ou de sa capacité de remboursement quand elle décide d'investir. Une contrainte souvent non mentionnée explicitement est la positivité des variables. En effet, un grand nombre de grandeurs économiques que représentent les variables doivent être positives pour correspondre à une situation réelle (par exemple : le capital, le travail, des quantités de production, etc.).

Signalons que l'écriture très générale d'un problème d'optimisation cache la présence de paramètres dans quasi tous les problèmes. Ce sont des données pour l'agent décideur, des grandeurs économiques ou extra-économiques qu'il n'est pas en mesure de modifier et qui sont pourtant essentielles dans la détermination de son choix. Par exemple, les prix unitaires de biens, le taux d'intérêt ou le revenu des employés peuvent être des paramètres fondamentaux dans les décisions d'un consommateur.

Nous obtenons la comparaison suivante entre la terminologie mathématique et la terminologie économique.

| | Mathématiques | Économie |
|---|---|---|
| $x \in X$ | variables (de décision) | variables de contrôle ou variables de commande |
| $f : X \to \mathbb{R}$ | fonction objectif | fonction coût, fonction profit, fonction d'utilité, etc. |
| $C$ | contraintes de nature mathématique | contraintes de nature économique |

## 1.3 Solution globale et solution locale

Soit $X = \mathbb{R}^n$. Nous avons dit plus haut que résoudre un problème de minimisation consistait à trouver un ou plusieurs point(s) où la fonction objectif atteint sa valeur minimale, c'est-à-dire le ou les point(s) $x^* \in C$ tel(s) que $\forall\, x \in C : f(x^*) \leq f(x)$ . Ceci est l'objectif de l'*optimisation globale*. Cependant, la localisation des extrema reste une tâche assez ardue en pratique. En effet, il se trouve que la théorie mathématique de l'optimisation est très complète pour les fonctions au moins deux fois continûment différentiables sur un ouvert [6]. Or la différentiabilité est une propriété locale. Lorsqu'on suppose que l'adjectif *local* a un sens mathématique précis [7], on constate que la partie la plus élaborée de la théorie de l'optimisation donne des propriétés locales d'une solution (c'est-à-dire dans un voisinage proche de la solution) et se trouve démunie pour caractériser les optima que l'on qualifie de *globaux*. Seules les fonctions qui sont en plus munies de propriétés telles que la convexité ou la concavité permettent d'obtenir des résultats au niveau global (Strodiot, 2006 ; Gilbert, 2003).

**Définition 1.3.1 (Ensemble convexe)** (Strodiot, 2006, p.9)
*Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$. L'ensemble $C$ est* convexe *si et seulement si*

$$\forall\, x, y \in C, \forall\, \lambda \in ]0,1[ : \lambda x + (1-\lambda)y \in C\,.$$

**Définition 1.3.2 (Fonction convexe/strictement convexe)**
(Strodiot, 2006, pp.9,27)
*Soient $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexe et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction.*

– *$f$ est convexe sur $C$ si et seulement si*

$$\forall\, x, y \in C, \forall\, \lambda \in ]0,1[ : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

– *$f$ est strictement convexe sur $C$ si et seulement si*

$$\forall\, x, y \in C, x \neq y, \forall\, \lambda \in ]0,1[ : f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.$$

Les définitions suivantes permettent de distinguer les minima globaux des minima locaux.

**Définition 1.3.3 (Minimum global, minimum local de $f$ sur $C$)** (Strodiot, 2006, p.6)

1. $f$ admet un minimum global [8] en $x^* \in C$ *si et seulement si*

$$\forall\, x \in C : f(x^*) \;\leq\; f(x)\,.$$

2. $f$ admet un minimum global strict en $x^* \in C$ *si et seulement si*

$$\forall\, x \in C,\, x \neq x^* : f(x^*) \;<\; f(x)\,.$$

3. $f$ admet un minimum local [9] en $x^* \in C$ *si et seulement s'il existe une boule ouverte de rayon $r$ autour de $x^*$, $B(x^*, r)$, telle que :*

$$\forall\, x \in C \cap B(x^*, r) : f(x^*) \;\leq\; f(x)\,.$$

6. Le lecteur qui désire avoir plus d'informations concernant la définition de la différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables réelles est renvoyé aux manuels de cours (Strodiot, 2006 ; Gilbert, 2003).

7. On suppose définie sur l'ensemble de référence $C$ une structure topologique. Plus particulièrement, $X$ est un espace topologique.

8. Le qualificatif d'*absolu* est également utilisé. Voir, par exemple, (Stewart, 2006).

9. Le qualificatif de *relatif* est également utilisé. Voir, par exemple, (Chatterji, 1997).

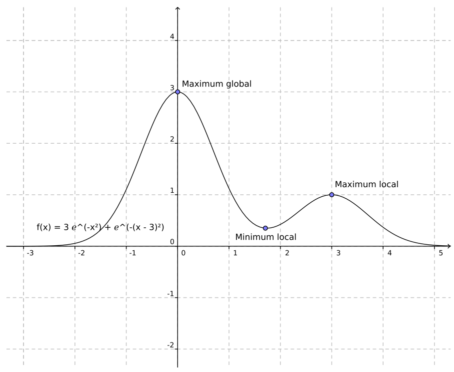
4. $f$ admet un minimum local strict en $x^* \in C$ *si et seulement s'il existe une boule ouverte de rayon* $r$ *autour de* $x^*$, $B(x^*, r)$, *telle que :*

$$\forall\, x \in C \cap B(x^*, r),\; x \neq x^* : f(x^*) \;<\; f(x)\,.$$

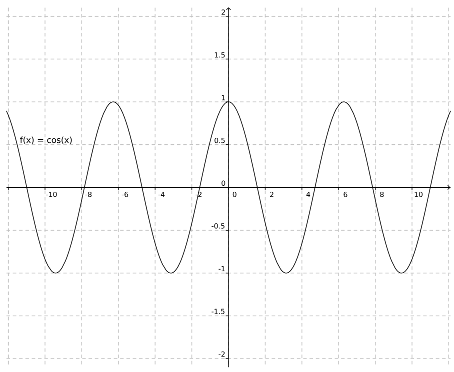
En d'autres termes, un point $x^*$ est un minimum local s'il existe un voisinage de $x^*$ dans lequel toutes les valeurs de la fonction, $f(x)$, sont plus grandes que la valeur au point $x^*$, $f(x^*)$. Naturellement, on constate que tout minimum global est un minimum local. Enfin, les notions de maximum global, de maximum global strict, de maximum local et de maximum local strict sont définies de façon tout à fait similaire ; il suffit de renverser les inégalités dans les définitions qui précèdent pour les obtenir. Nous illustrons ces définitions au moyen de trois exemples.

**Exemples 1.3.1**

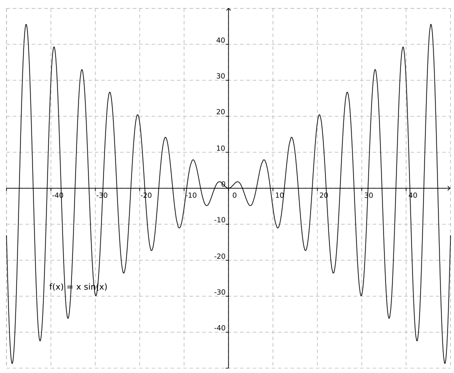
1. *La fonction* $f(x) = 3e^{-x^2} + e^{-(x-3)^2}$ *admet des minima et maxima (locaux et/ou globaux) sur* $\mathbb{R}$.




2. *La fonction* $f(x) = \cos(x)$ *admet une infinité de minima et maxima globaux sur* $\mathbb{R}$.




3. *La fonction* $f(x) = x\sin(x)$ *admet une infinité de minima et maxima locaux sur* $\mathbb{R}$ *mais aucun minimum ou maximum global sur* $\mathbb{R}$.



La nature des problèmes économiques conduit à privilégier la recherche d'un optimum global plutôt que des optima locaux. On peut penser que pour détecter le minimum (respectivement le maximum) global, il suffit de déterminer tous les extrema locaux puis de repérer parmi ceux-ci le plus petit (respectivement le plus grand). Cette stratégie est pertinente mais parfois difficile à mettre en œuvre, surtout dans les problèmes théoriques.

Concernant l'opposition entre les extrema et les extrema stricts, les sciences économiques ont un intérêt particulier pour les optima globaux stricts. En effet, l'hypothèse de rationalité des agents décideurs mène à rechercher une décision qui permette d'optimiser un objectif dans un environnement contraint. Si la résolution du problème amenait plusieurs solutions possibles, cela signifierait que l'agent a encore le choix entre plusieurs décisions. Ce problème ne se présente pas quand l'optimum est strict.

La distinction entre une étude locale et une étude globale en optimisation n'a pas encore été travaillée, à nos connaissances, dans le cadre des recherches en didactique des mathématiques. Nous mentionnons le travail de Rogalski (2008) qui montre que l'étude des fonctions fait appel à plusieurs points de vue : un point de vue ponctuel, un point de vue global et un point de vue local. Il nous semble que ce travail pourrait être élargi afin d'étudier les difficultés liées à la recherche de solutions locales et globales dans le cadre de l'optimisation.

## 1.4 Existence et unicité des solutions

Comme dans de nombreux problèmes mathématiques, la première question qui se pose dans un problème d'optimisation est celle de l'existence d'au moins une solution. A priori, un problème d'optimisation peut n'admettre aucune solution et rien ne sert en effet d'essayer de résoudre numériquement un problème qui n'a pas de solution.

En toute généralité, aucun argument mathématique ne garantit l'existence de solution(s) d'un problème d'optimisation. Cependant nous rappelons un critère d'existence simple mais qui ne concerne que les fonctions continues sur un compact $C \subseteq \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire un ensemble fermé et borné en dimension finie).

**Théorème 1.4.1 (Théorème de Weierstrass)** (Strodiot, 2006, p.19)
*Soit $f : C \to \mathbb{R}$ et $C$ un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Si $f$ est continue sur $C$, alors $f$ est bornée inférieurement et supérieurement sur $C$ et $f$ admet au moins un minimum global et un maximum global sur $C$.*

En pratique, l'hypothèse de continuité et surtout celle de compacité sont assez restrictives. Néanmoins, elles peuvent être (un peu) affaiblies et donnent ainsi naissance à de multiples extensions intéressantes du Théorème de Weierstrass.

En dimension finie, par exemple, on peut remplacer $C$ compact par $C$ fermé et une hypothèse de croissance à l'infini de $f$ pour assurer l'existence d'un minimum global de $f$ :

$$\lim_{\substack{x \in C \\ \|x\| \to +\infty}} f(x) = +\infty \,. \tag{1.1}$$

**Corollaire 1.4.1** (Strodiot, 2006, p.21)
*Soit $f : C \to \mathbb{R}$ et $C$ un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Si $f$ est une fonction continue sur $C$ vérifiant (1.1), alors $f$ admet au moins un minimum global sur $C$.*

La question de l'unicité d'une solution est moins essentielle et reste très souvent d'un intérêt théorique même s'il s'agit d'une propriété appréciée par beaucoup de chercheurs spécialisés en optimisation. Le résultat le plus simple, mais bien utile, nécessite des hypothèses de convexité et se formule comme suit.

**Théorème 1.4.2 (Unicité de solution)** (Gilbert, 2003, p.37)
*Si $C$ est une partie convexe d'un espace vectoriel $X$ et si $f$ est strictement convexe sur $C$, alors $f$ admet au plus un minimum sur $C$.*

Combinant les Théorèmes 1.4.1 et 1.4.2, nous obtenons une condition suffisante d'existence et d'unicité de la solution d'un problème d'optimisation $(P)$.

## 1.5 Conditions d'optimalité

Les deux résultats mentionnés à la fin de la section précédente ne donnent aucune information quant à la recherche d'une ou des solution(s) d'un problème d'optimisation. Il a donc été nécessaire d'établir des critères analytiques d'optimalité sous la forme d'un ensemble d'équations et/ou d'inéquations qui pourraient aider à résoudre le problème et qui serviraient à identifier les solutions. Ces critères se présentent comme des conditions d'optimalité nécessaires, suffisantes ou nécessaires et suffisantes.

La présente section clarifie quelques concepts concernant les conditions nécessaires et les conditions suffisantes d'optimalité. Pour ce faire, nous nous inspirons d'une part du livre *Les mathématiques du mieux faire* écrit par Hiriart-Urruty (2007) afin d'expliquer d'un point de vue logique en quoi consistent les conditions d'optimalité. D'autre part, nous exposons, de façon pratique, les différentes conditions d'optimalité existantes dans le cadre de l'optimisation sans et avec contraintes.

### 1.5.1 Considérations logiques

Le concept de conditions d'optimalité est directement lié à la notion d'implication mathématique, voire à l'équivalence mathématique. Enseignée rarement en tant qu'objet mathématique, l'implication mathématique est au centre de toute activité mathématique. Citons le travail de Deloustal-Jorrand (2004) sur l'implication mathématique qui, en termes didactiques, a étudié cet objet particulier. Comme nous constaterons, les conditions d'optimalité sont toutes des propositions de type implication ou équivalence mathématique.

#### Conditions nécessaires d'optimalité

Une condition nécessaire de minimalité est un énoncé du type :

*Si $x^* \in C$ est un minimum local de $f$ sur $C$, alors $A_N$* [10].

10. $A_N$ désigne un "attribut" (dans le sens de propriété) de type condition "nécessaire".

Plus la propriété $A_N$ est précise, plus cela facilite la recherche d'un minimum de $f$ sur $C$. En effet, la contraposée de l'énoncé précédent s'écrit : si $A_N$ n'est pas vérifiée, alors $x^*$ n'est pas un minimum local de $f$ sur $C$. Détecter les points vérifiant une condition nécessaire d'optimalité est ainsi un pas important dans la résolution du problème d'optimisation $(P)$. Le théorème suivant fournit une illustration d'une condition nécessaire d'optimalité [11] célèbre dans $\mathbb{R}$.

**Théorème 1.5.1**
*Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.*
*Si $x^*$ est un minimum local de $f$, alors $f'(x^*) = 0$ et $f"(x^*) \geq 0$.*

Toutefois, il faut rester vigilant face à une conclusion quant à l'existence de solutions du problème d'optimisation. Soit la fonction $f(x) = x^3$. Le seul point de $\mathbb{R}$ vérifiant la condition nécessaire de minimalité citée dans la condition nécessaire ci-dessus est $x^* = 0$. En effet, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, $f''(0) = 6 \cdot 0 \geq 0$ et aucun autre point $x$ n'est tel que $f'(x) = 0$. Cependant, la fonction $f(x) = x^3$ n'admet ni minimum local, ni maximum local sur $\mathbb{R}$. Il s'agit justement d'une condition nécessaire et non suffisante d'optimalité.

Notons au passage que nous venons de rencontrer un des enjeux de l'enseignement de l'optimisation consistant à faire précisément la distinction entre une condition nécessaire (qui est une implication et qui donne une caractéristique d'une solution) et une condition nécessaire et suffisante (qui donne un critère pour identifier une solution).

### Conditions suffisantes d'optimalité

Une condition suffisante de minimalité est un énoncé du style :

> *Si $A_S$ [12], alors $x^* \in C$ est un minimum local de $f$ sur $C$.*

Moins la propriété $A_S$ est précise, plus il est facile de s'en servir. En général, les formulations de conditions suffisantes diffèrent de celles des conditions nécessaires mais conservent avec elles un lien de parenté. Le théorème suivant fournit une illustration d'une condition suffisante d'optimalité célèbre dans $\mathbb{R}$.

**Théorème 1.5.2**
*Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.*
*Si $f'(x^*) = 0$ et $f"(x^*) > 0$, alors $x^*$ est un minimum local de $f$.*

Nous remarquons que le point $x^* = 0$ de l'exemple précédent ne vérifie pas les hypothèses de ce théorème. Le théorème ne permet donc pas d'affirmer qu'il s'agit d'un minimum local de $f$ sur $\mathbb{R}$. Par contre, $x^* = 0$ est un minimum local de la fonction $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ car $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2 > 0$.

11. Une discussion plus détaillée et mathématique des conditions d'optimalité se trouvera dans la Section 1.5.2.
12. $A_S$ désigne un "attribut" (dans le sens de propriété) de type condition "suffisante".

### Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

En général, on dispose d'une condition nécessaire d'optimalité, notée $A_N$, et d'une condition suffisante d'optimalité, notée $A_S$, qui diffèrent et "encadrent" les solutions du problème d'optimisation (l'ensemble des solutions est noté $S$). Un point $x^* \in C$ peut alors vérifier $A_N$ et ne pas vérifier $A_S$. C'est une situation où on ne peut conclure sur base des seules informations disponibles : le point $x^*$ peut être une solution (exemple du point $x_1^* \in S$ sur la Figure 1.1) ou ne pas l'être (exemple du point $x_2^* \notin S$ sur la Figure 1.1) comme indiqué sur le schéma de la Figure 1.1.

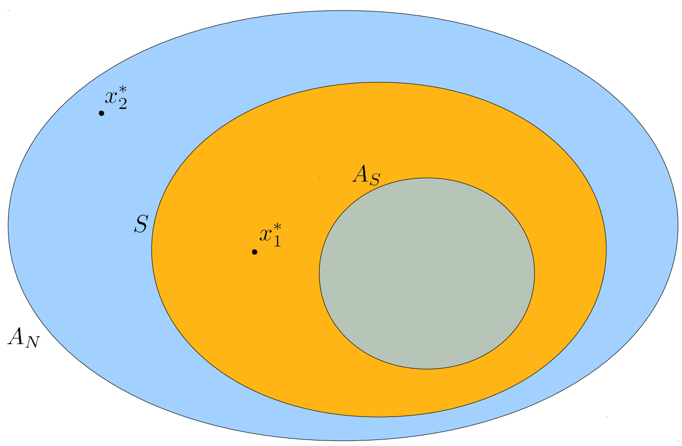



FIGURE 1.1 – Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Pour mieux cerner des candidats à être extremum, il faudra donc considérer des conditions nécessaires d'optimalité plus fines et des conditions suffisantes d'optimalité moins contraignantes. Il arrive toutefois qu'on puisse mettre en évidence une propriété $A_E$ qui caractérise les solutions de $(P)$ :

*$x^* \in C$ est un minimum local de $f$ sur $C$ si et seulement si $A_E$* [13].

Disposer alors d'une condition nécessaire et suffisante d'optimalité est une situation de confort qui pousse à utiliser $A_E$ pour trouver les solutions du problème d'optimisation.

### Comment utiliser les conditions d'optimalité en pratique ?

Sans vouloir entrer dans les détails mathématiques à ce niveau de l'explication des conditions d'optimalité, nous remarquons qu'avoir des conditions d'optimalité à sa disposition est utile en pratique pour de nombreuses raisons, par exemple :
- pour calculer analytiquement des solutions d'un problème d'optimisation $(P)$ ;
- pour vérifier l'optimalité éventuelle d'un point $x \in X$ ;
- pour mettre en œuvre des méthodes numériques de résolution d'un type de problèmes d'optimisation.

13. $A_E$ désigne un "attribut" (dans le sens de propriété) de type condition "nécessaire et suffisante" ("équivalente").

Un autre contexte important, fortement présent en microéconomie, met en avant des analyses basées sur des conditions d'optimalité. Les économistes ne s'intéressent souvent pas aux valeurs de la solution optimale mais souhaitent plutôt connaître l'impact qu'un changement de données dans le problème a sur cette solution optimale. Ce type d'analyse est connu en mathématiques appliquées sous le terme d'*analyse de sensibilité* et sera présenté plus en détails dans la dernière section de ce chapitre (voir Section 1.6).

Passons maintenant à la description mathématique des conditions d'optimalité qui permettra alors d'expliquer et d'illustrer les différentes utilisations mentionnées ci-dessus.

### 1.5.2 Mise en pratique des conditions d'optimalité

Nous nous intéressons à la question suivante :

> **Supposons que nous disposions d'une solution admissible $x^*$ d'un problème d'optimisation $(P)$. Quelles sont les conditions (nécessaires, suffisantes, nécessaires et suffisantes) pour que $x^*$ soit une solution optimale ?**

Historiquement, on peut montrer que le calcul différentiel est né au 17$^{\text{ème}}$ siècle, notamment pour résoudre des problèmes d'optimisation (Goldstine, 1980 ; Hiriart-Urruty, 2008). Il n'est donc pas surprenant que les concepts du calcul différentiel interviennent dans l'écriture des conditions d'optimalité. Précisément, pour des fonctions $f \in \mathcal{C}^1$ (une fois continûment différentiables), et plus loin pour des fonctions $f \in \mathcal{C}^2$ (deux fois continûment différentiables), on peut reconnaître un minimum local en examinant le gradient de la fonction $f$ évalué en $x^*$,

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

et la matrice Hessienne de la fonction $f$ évaluée en $x^*$,

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

C'est pourquoi on parlera de conditions d'optimalité *du premier ordre* lorsque celles-ci ne font intervenir que les dérivées premières (le gradient) de la fonction objectif $f$ et des fonctions définissant l'ensemble admissible au point $x^*$. Quant aux conditions d'optimalité *du second ordre*, elles font intervenir les dérivées premières et secondes de ces fonctions (le gradient et la matrice Hessienne) au point $x^*$. Les conditions d'optimalité d'ordre plus élevé ne sont pas traitées dans cette thèse. Dans la suite, nous allons supposer que les fonctions intervenant dans le problème d'optimisation sont au moins une fois, voire deux fois, continûment différentiables dans un voisinage du point $x^*$.

D'un point de vue pratique nous sommes intéressés par des conditions d'optimalité *locales* et *vérifiables*. Le caractère local signifie que les conditions devraient être exprimées en termes de propriétés locales des fonctions définissant le problème d'optimisation (comme la continuité ou la différentiabilité en un point donné, ...) et le caractère vérifiable exprime le fait que nous devrions pouvoir vérifier efficacement si la condition est ou n'est pas satisfaite (en supposant connues les valeurs et les valeurs des dérivées en $x^*$ des fonctions définissant le problème). Nous n'obtenons donc, à défaut d'autres informations sur le problème, aucune condition d'optimalité qui permet de trouver une solution globale.

### 1.5.3 Optimisation sans contraintes

Mathématiquement parlant, l'optimisation sans contraintes consiste à minimiser ou maximiser une fonction sur l'ensemble de toutes les variables possibles ($C = X$). Pour fixer les idées nous prendrons $X = \mathbb{R}^n$. Le problème d'optimisation sans contraintes $(P_U)$ s'écrit alors

$$(P_U) \; \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \, ,$$

où $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Du point de vue pratique, les Définitions 1.3.3 ne sont pas très utiles pour s'assurer que $x^*$ est bien un minimum local. En effet, il faudrait parcourir tous les $x$ dans le voisinage de $x^*$, ce qui est trop coûteux, voire impossible à réaliser.

Le Théorème de Taylor constitue un outil utile dans la recherche de conditions d'optimalité.

**Théorème 1.5.3 (Théorème de Taylor)** (Nocedal & Wright, 1999, p.15)
*Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $p \in \mathbb{R}^n$. Alors on a*

$$f(x+p) \; = \; f(x) + \nabla f(x+tp)^T p \, ,$$

*où $t \in ]0,1[$. De plus, si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on a*

$$\nabla f(x+p) \; = \; \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x+tp) \, dt \, ,$$

*et*

$$f(x+p) \; = \; f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x+tp) p \, ,$$

*où $t \in ]0,1[$.*

À l'aide des développements limités d'ordre 1 et d'ordre 2 de la fonction $f$, nous pouvons énoncer des conditions nécessaires et une condition suffisante d'obtention d'un minimum local. En effet, comme montré par le Théorème de Taylor, l'idée de la différentiation du premier ordre est d'approcher $f(x+p)$ au voisinage du point $x \in \mathbb{R}^n$ par la fonction affine $f(x) + \nabla f(x+tp)^T p$. La conséquence en est que l'on peut déduire de cette information une condition nécessaire du premier ordre quant à l'optimalité du point $x^* \in \mathbb{R}^n$.

**Théorème 1.5.4 (CN [14] du premier ordre)** (Nocedal & Wright, 1999, p.15)
*Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage ouvert de $x^*$. Si $x^*$ est un minimum local de $f$, alors*

$$\nabla f(x^*) = 0 .$$

La condition nécessaire du premier ordre joue un rôle central en optimisation : elle permet de sélectionner un certain nombre de points candidats à être des extrema locaux, appelés *points stationnaires de $f$* (ou *points critiques de $f$*). Parmi eux, figurent des minima locaux, des maxima locaux et d'autres points qui ne sont ni l'un, ni l'autre, appelés *points selle*.

**Définition 1.5.1 (Point stationnaire)** (Nocedal & Wright, 1999, p.16)
*Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Tout point $x^* \in \mathbb{R}^n$ vérifiant*

$$\nabla f(x^*) = 0$$

*est appelé* point stationnaire *de $f$.*

Tout minimum local doit donc être un point stationnaire. Mais attention, le Théorème 1.5.4 énonce seulement une condition nécessaire : tout point stationnaire n'est pas nécessairement un extremum local !

Le Théorème 1.5.4 est appelé très souvent *Règle de Fermat* (ou *Théorème de Fermat*) en l'honneur de Pierre de Fermat qui a établi en 1637 ce genre de condition pour des fonctions polynômiales et trigonométriques. Notons encore que ce théorème fait l'objet de quelques recherches en didactiques des mathématiques. Citons le travail de Rouy (2007) sur la formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur qui s'est intéressé, entre autres, à ce théorème particulier.

Bien qu'il y ait moyen de donner des corollaires ou des résultats connexes de cette condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, nous nous limiterons à présenter cet unique résultat, vu les cours de base à l'université dans le domaine du calcul différentiel qui constituent le cadre institutionnel de notre recherche. Nous omettrons donc des considérations sur l'optimisation de fonctions non différentiables, sur la caractérisation d'extrema globaux ou encore sur l'optimisation multicritère (optimiser une fonction *vectorielle*). Le lecteur intéressé par une description plus complète des conditions d'optimalité du premier ordre peut trouver des informations complémentaires dans les références (Hiriart-Urruty, 2003, 2007).

La condition d'optimalité du premier ordre peut être affinée lorsque la fonction objectif est au moins deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

**Théorème 1.5.5 (CN du second ordre)** (Nocedal & Wright, 1999, p.16)
*Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage ouvert de $x^*$. Si $x^*$ est un minimum local de $f$, alors*

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0 \text{ et} \\ \nabla^2 f(x^*) \text{ est semi-définie positive}^{15}. \end{cases}$$

14. Condition nécessaire.

*Si $x^*$ est un maximum local de $f$, alors*

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0 \text{ et} \\ \nabla^2 f(x^*) \text{ est semi-définie négative}^{16}. \end{cases}$$

Les conditions suffisantes du second ordre ressemblent aux conditions nécessaires du second ordre.

**Théorème 1.5.6 (CS [17] du second ordre)** (Nocedal & Wright, 1999, pp.16-17)
*Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage ouvert de $x^*$.*

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \nabla f(x^*) = 0 \text{ et} \\ \nabla^2 f(x^*) \text{ est définie positive}^{18}, \end{array}\right\} \text{alors } x^* \text{ est un minimum local strict de } f.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \nabla f(x^*) = 0 \text{ et} \\ \nabla^2 f(x^*) \text{ est définie négative}^{19}, \end{array}\right\} \text{alors } x^* \text{ est un maximum local strict de } f.$$

En comparant les conditions nécessaires et les conditions suffisantes, nous pouvons conclure que si $\nabla^2 f(x^*)$ n'est ni semi-définie positive ni semi-définie négative (c'est-à-dire que $\nabla^2 f(x^*)$ a au moins deux valeurs propres de signe contraire), alors on est sûr qu'un point stationnaire $x^*$ n'est ni minimum ni maximum local de $f$. De même, un cas reste incertain : si $\nabla f(x^*) = 0$ et $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive (respectivement semi-définie négative) mais pas définie positive (respectivement définie négative), alors nous ne pouvons pas conclure en ce qui concerne la qualité du point stationnaire $x^*$ sur base de nos conditions d'optimalité.

Un exemple de cette dernière situation est donné par la minimisation de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^4$ sur $\mathbb{R}^2$. Le point $(0, 0)$ est tel que $\nabla f(0, 0) = 0$ et $\nabla^2 f(0, 0)$ est semi-définie positive, la condition suffisante d'optimalité ne permet pas de conclure. Cependant, c'est la définition d'un minimum local (et même global) qui rend ici une conclusion possible : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons $f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$ et donc le point $(0, 0)$ est un minimum global de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

### 1.5.4 Optimisation avec contraintes

Cette section est consacrée uniquement aux conditions d'optimalité du premier ordre pour des problèmes d'optimisation avec contraintes. Le lecteur intéressé est renvoyé aux livres (Hiriart-Urruty, 2007 ; Sundaram, 1996 ; Nocedal & Wright, 1999) pour plus d'informations sur les conditions d'optimalité du second ordre.

15. Une matrice $M$ symétrique réelle d'ordre $n$ est *semi-définie positive* si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

16. Une matrice $M$ symétrique réelle d'ordre $n$ est *semi-définie négative* si et seulement si toutes ses valeurs propres sont négatives.

18. Une matrice $M$ symétrique réelle d'ordre $n$ est *définie positive* si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

19. Une matrice $M$ symétrique réelle d'ordre $n$ est *définie négative* si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement négatives.

19. Condition suffisante.

Le passage de l'optimisation sans contraintes à l'optimisation avec contraintes est, d'après notre expérience, un passage difficile pour les étudiants. Plusieurs éléments peuvent expliquer ces difficultés. En particulier, le fait que l'optimisation avec contraintes n'ait pas de véritable équivalent pour les fonctions d'une seule variable rend compliquée la formation d'images mentales liées à ce sujet. Ceci est à relier à la difficulté plus générale du passage du cadre des fonctions d'une variable à celui des fonctions de plusieurs variables. À ce jour, nous n'avons pas connaissance de travaux didactiques relatifs à ce sujet.

Le but de l'optimisation avec contraintes consiste - comme dans le cas de l'optimisation sans contraintes - à trouver, parmi les variables admissibles, les valeurs des variables qui minimisent ou maximisent la fonction objectif. Stricto sensu, nous ne recherchons pas la valeur optimale de $f$, mais bien les valeurs minimales ou maximales de $f$ SUR le domaine admissible défini en termes de restrictions, appelées *contraintes*, auxquelles sont soumises les variables. Mathématiquement parlant, les contraintes sont très souvent de type *inégalité*

$$C = \{x \in X \,|\, h(x) \leq 0\}\,,$$

ou *égalité*

$$C = \{x \in X \,|\, g(x) = 0\}\,,$$

où $h : X \to \mathbb{R}^p$ et $g : X \to \mathbb{R}^k$. Une fois de plus nous considérons $X = \mathbb{R}^n$ dans cette section. Le problème d'optimisation avec contraintes $(P_{IE})$[20] s'écrit alors

$$(P_{IE}) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, k\,, \\ & h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, p\,, \end{cases}$$

où $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, où $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, où $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, p$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. L'ensemble admissible s'écrit dans ce cas

$$C = \{x \in \mathcal{U} \,|\, g(x) = 0 \text{ et } h(x) \leq 0\}\,.$$

En l'absence de contraintes, le Théorème de Fermat affirme qu'une fonction a son gradient qui s'annule en un minimum $x^*$. Toutefois, la condition nécessaire d'optimalité 1.5.4 n'est plus valable comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 1.5.1**
*Soit le problème* minimiser $f(x) = (x+3)^2$ sous la contrainte d'inégalité $x \geq 2$. *La solution de ce problème est $x^* = 2$, et pourtant : $f'(2) = 10 \neq 0$.*

Nous cherchons donc à généraliser la condition du Théorème 1.5.4 au problème sous contraintes $(P_{IE})$.

Pour mieux comprendre les conditions d'optimalité que l'on trouvera, il est utile d'introduire le concept de *contrainte active*. Une contrainte d'inégalité $h_j(x) \leq 0$ est dite *active* en $x$ si $h_j(x) = 0$ et *inactive* en $x$ si $h_j(x) < 0$. Par convention, toute contrainte d'égalité est une contrainte active en un point $x$ admissible. Nous remarquons ensuite que

20. Problème d'optimisation sous contraintes d'égalité et d'inégalité.

seules les contraintes actives en un point admissible $x$ influencent l'admissibilité de points dans un voisinage de $x$ tandis que les contraintes inactives n'ont a priori pas d'impact. En conséquence, hormis l'admissibilité d'une solution $x^*$ (les contraintes doivent être vérifiées au point $x^*$), seules les contraintes actives en $x^*$ interviennent dans les conditions d'optimalité. Ceci est illustré sur la Figure 1.2 où on constate que les propriétés locales vérifiées par $x^*$ ne dépendent visiblement pas des contraintes $h_2(x^*) \leq 0$ et $h_3(x^*) \leq 0$.

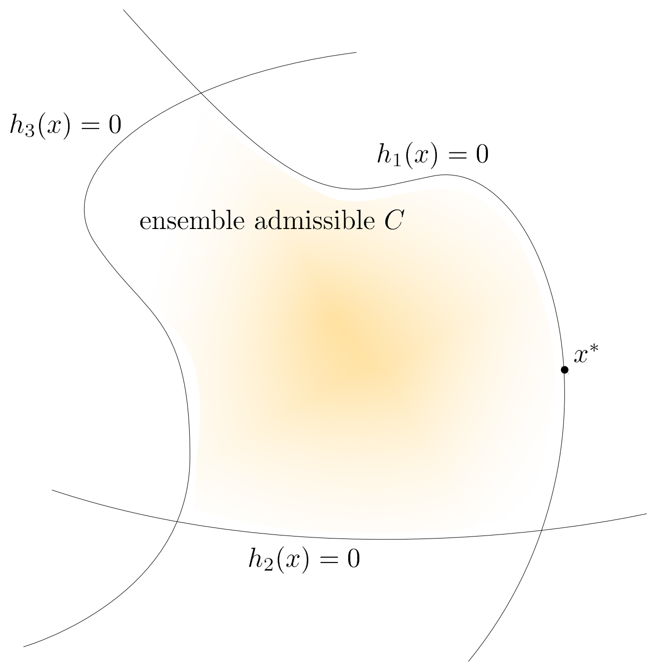



FIGURE 1.2 – La contrainte $h_1(x^*) \leq 0$ est active, les contraintes $h_2(x^*) \leq 0$ et $h_3(x^*) \leq 0$ sont inactives

Un deuxième commentaire préliminaire s'impose. Parlant des contraintes, il est à remarquer que la mise en équation de l'ensemble admissible $C$ n'est pas unique. Il est souvent possible de modéliser un même ensemble admissible par différentes fonctions définissant les contraintes. Par exemple, l'ensemble

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_1 + x_3 = 0\}$$

définit le même ensemble admissible que

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 = 0\},$$

alors que les fonctions qui définissent ce même ensemble $C$ diffèrent (deux contraintes linéaires dans le premier cas, une seule contrainte quadratique dans le deuxième cas). Nous sommes alors confrontés au problème que toutes les modélisations d'un ensemble admissible ne se prêtent pas à exprimer (facilement) l'optimalité d'un point $x^*$. Afin de retenir seulement les représentations "adéquates" (le mathématicien dirait "non dégénérées") de l'ensemble admissible en un point $x^*$, nous introduisons la notion de *qualification des contraintes*. Les contraintes d'un problème d'optimisation sont dites *qualifiées en $x^*$* lorsque la représentation de l'ensemble admissible est telle que l'on peut conclure quant à l'optimalité du point $x^*$. Malheureusement, la qualification des contraintes est difficile à écrire et à vérifier en pratique. Ce problème est contourné en considérant des conditions suffisantes de cette qualification des contraintes. Ainsi, un exemple d'une condition suffisante pour garantir la qualification des contraintes est donné par la propriété suivante.

**Définition 1.5.2 (QC-IL[21])** (Nocedal & Wright, 1999, p.328)
*Soit $x^*$ un point admissible du problème $(P_{IE})$ $(x^* \in C)$. La condition* (QC-IL) *est vérifiée en $x^*$ si et seulement si l'ensemble des gradients des contraintes actives en $x^*$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants.*

Cette condition, aussi appelée *condition de régularité*, entraine la qualification des contraintes en $x^*$. Un point vérifiant la condition (QC-IL) est appelé *point régulier.*

**Définition 1.5.3 (Point régulier)**
*Un point $x^* \in C$ est dit* point régulier *des contraintes si et seulement si la condition* (QC-IL) *est vérifiée en $x^*$.*

Il existe d'autres conditions suffisantes de la qualification des contraintes (condition de Slater, condition de Mangasarian-Fromovitz, ...) mais nous renvoyons le lecteur intéressé au manuel (Gilbert, 2003) pour de plus amples informations.

Le problème de la qualification des contraintes est propre à l'optimisation avec contraintes et peut être érigé, d'après nous, en obstacle épistémologique comme nous verrons à la Section 4.4. Nous nous attendons en conséquence à retrouver des traces de difficultés s'y rapportant au niveau de l'enseignement et de l'apprentissage de l'optimisation.

Notons encore que nous retrouvons des ambiguïtés au niveau des appellations à ce stade de nos explications. La forme habituelle d'un problème d'optimisation sous contraintes suppose les membres de droite des égalités et inégalités nulles. Il est alors commun d'identifier, par exemple, une contrainte de type "$h_j(x) \leq 0$" par simple notation de "$h_j(x)$". De temps à autre il est toutefois possible que le problème n'est pas présenté sous sa forme standard ayant donc des contraintes où les membres de droite sont différents de zéro (par exemple : en programmation linéaire les contraintes d'inégalité s'écrivent $Ax \leq b$). Ces notations "changeantes" pour l'ensemble des contraintes d'un problème d'optimisation risque d'être une source de difficultés pour les étudiants confrontés à un apprentissage de l'optimisation.

### La généralisation du Théorème de Fermat

La généralisation du Théorème de Fermat dans le cas des problèmes d'optimisation avec contraintes peut être obtenue en tenant compte des remarques faites ci-dessus. Cette condition d'optimalité nécessaire a été attribuée dans la littérature mathématique à Karush, Kuhn et Tucker et porte leur nom à l'heure actuelle[22].

21. "Qualification des Contraintes - Indépendance Linéaire".

22. Dans la littérature, le théorème traitant les conditions d'inégalité seules et le théorème traitant les conditions d'égalité et d'inégalité conjointement sont souvent dénommés de la même façon et appelés "Théorème de Karush-Kuhn-Tucker". Dans la suite, nous ne ferons pas de différence d'appellation.

**Théorème 1.5.7 (CN du premier ordre, Théorème de KKT)**

(Nocedal & Wright, 1999, p.328)

*Soit* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ensemble ouvert* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, *soit* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *et* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, *où* $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ *et* $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$ *sont des fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathcal{U}$. *Soit* $x^*$ *un minimum local du problème*

$$(P_{IE}) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k\,, \\ & h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p\,. \end{cases}$$

*Supposons en plus que les contraintes soient qualifiées en* $x^*$. *Alors il existe un vecteur* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*) \in \mathbb{R}^k$ *et un vecteur* $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_p^*) \in \mathbb{R}^p$ *vérifiant*

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \nabla h_i(x^*) &= 0\,, && (1.2) \\ \mu_j^* h_j(x^*) &= 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, p\,, && (1.3) \\ \mu_j^* &\geq 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, p\,, && (1.4) \\ g(x^*) &= 0\,, && (1.5) \\ h(x^*) &\leq 0\,. && (1.6) \end{aligned}$$

Observons d'abord que l'on retrouve bien la condition $\nabla f(x^*) = 0$ s'il n'y a pas de contrainte ou si aucune contrainte n'est active en $x^*$ (ce qui implique que seules des contraintes d'inégalité sont présentes dans le problème $(P_{IE})$). Ceci est réalisé dans le cas d'un point $x^*$ se trouvant à l'*intérieur* du domaine admissible. En effet, pour un problème d'optimisation sans contraintes les conditions (1.3), (1.4), (1.5) et (1.6) disparaissent et l'équation (1.2) se réduit à $\nabla f(x^*) = 0$. Pour un problème d'optimisation avec contraintes où toutes les contraintes sont inactives en $x^*$ (absence de contraintes d'égalité), la condition (1.5) disparaît et les conditions (1.6) sont vérifiées strictement. Ceci implique que $\mu^* = 0$ dans (1.3) et (1.2) devient alors $\nabla f(x^*) = 0$. Nous retrouvons l'affirmation selon laquelle seules les contraintes actives influencent les propriétés que vérifie une solution admissible d'un problème d'optimisation sous contraintes.

Notons encore que les équations (1.3) sont appelées *conditions de complémentarité*. Elles expriment que si la $j^{\text{ème}}$ contrainte d'inégalité est inactive ($h_j(x^*) < 0$), alors le multiplicateur associé $\mu_j^*$ doit être nul. Et si un multiplicateur $\mu_j^*$ est strictement positif, alors la contrainte associée est forcément active ($h_j(x^*) = 0$).

Lorsqu'on évoquera les conditions (1.2) à (1.6), mentionnées ci-dessus, on parlera des *conditions de KKT* et $\lambda^*$ et $\mu^*$ seront appelés *multiplicateurs de Lagrange* (ou *de Lagrange-KKT*). Notons qu'on peut remplacer la qualification des contraintes dans les hypothèses du Théorème 1.5.7 par la condition de régularité (CQ-LI) par exemple. Ce théorème connaît une version où aucune hypothèse de régularité ou de qualification des contraintes n'est faite. Ces conditions d'optimalité nécessaires ont été établies par Carathéodory et John et sont plus faibles que celles de Karush-Kuhn-Tucker. Le lecteur qui cherche plus d'informations à ce propos est renvoyé à l'article (Pourciau, 1980).

Pour les problèmes d'optimisation convexe (fonction objectif convexe sur $\mathcal{U}$, contraintes d'inégalité convexes sur $\mathbb{R}^n$ et contraintes d'égalité affines sur $\mathbb{R}^n$), les conditions de KKT sont suffisantes pour entraîner l'optimalité globale comme le spécifie le Théorème 1.5.8.

**Théorème 1.5.8 (CS du premier ordre)** (Strodiot, 2006, p.41)
*Si le problème $(P_{IE})$ est convexe et s'il existe $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ vérifiant les conditions de Karush, Kuhn et Tucker, alors $x^*$ est un minimum global de $(P_{IE})$.*

Ainsi dans le cas convexe, en supposant une condition de qualification des contraintes vérifiée, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont toujours nécessaires et suffisantes.

Historiquement, les mathématiciens n'ont pas développé la théorie de l'optimisation sous contraintes en présence de contraintes d'égalité et d'inégalité (voir le Chapitre 4). C'est pourquoi nous présentons maintenant l'essentiel de l'optimisation sous contraintes d'égalité, suivi de quelques commentaires à propos de l'optimisation sous contraintes d'inégalité.

### Contraintes d'égalité

Lorsque que l'on traite des problèmes d'optimisation avec contraintes où seules des contraintes d'égalité interviennent, le Théorème 1.5.7 se réduit au théorème suivant, appelé *Théorème de Lagrange.*

**Théorème 1.5.9 (Théorème de Lagrange)** (Gilbert, 2003, p.89)
*Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, et soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, où $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. Soit $x^*$ un extremum local du problème*

$$(P_E) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, k\,. \end{cases}$$

*Supposons en plus que les contraintes soient qualifiées en $x^*$. Alors il existe un vecteur $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*) \in \mathbb{R}^k$ vérifiant*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0.$$

Dans la version de ce théorème donnée par Carathéodory et John, aucune condition de qualification des contraintes n'est présente.

**Théorème 1.5.10 (Règle des multiplicateurs de Carathéodory)**
(Pourciau, 1980, p.441)
*Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, et soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, où $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ $(n \geq k)$. Supposons que $x^*$ est un extremum local du problème*

$$(P_E) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, k\,. \end{cases}$$

*Alors il existe un vecteur $\gamma^* = (\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_k^*) \in \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$, $\gamma_0^* \geq 0$, tel que*

$$\gamma_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* \nabla g_i(x^*) = 0. \tag{1.7}$$

Le cas particulier important du Théorème 1.5.10 qui est le Théorème de Lagrange (ou Règle des multiplicateurs de Lagrange) suppose la condition de qualification des contraintes. Cette qualification des contraintes peut être obtenue lorsque la matrice Jacobienne $J_g(x^*)$ est de rang $k$. Expliquons brièvement comment retrouver ce résultat.

Sachant que la *matrice Jacobienne* d'une fonction vectorielle $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ en un point $x^*$ est définie par la matrice $(k \times n)$ composée des dérivées partielles premières de $g$, nous avons

$$\begin{aligned} J_g(x^*) &= (\nabla g_1(x^*)\ \nabla g_2(x^*)\ \ldots\ \nabla g_k(x^*))^T, \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k(x^*)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_k(x^*)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_k(x^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La condition de régularité (QC-IL) étant équivalente à l'hypothèse que la matrice Jacobienne $J_g(x^*)$ est de rang $k$, nous supposons vérifiée cette dernière hypothèse pour expliquer comment passer du Théorème 1.5.10 au Théorème 1.5.9. Soit $\gamma^* = (\gamma_0^*, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_k^*) \in \mathbb{R}^{k+1} \backslash \{0\}$ qui est donné par la règle des multiplicateurs de Carathéodory. Si $\gamma_0^* = 0$, on trouve que $(\gamma_1^*, \ldots, \gamma_k^*) \neq 0$ et

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$$

ce qui contredit la condition de régularité. Nous avons donc $\gamma_0^* \neq 0$ et la thèse du Théorème de Lagrange s'en déduit en posant

$$\forall\, i = 1, \ldots, k : \lambda_i^* = \frac{\gamma_i^*}{\gamma_0^*}.$$

Remarquons que, si $\gamma_0^* = 0$, la condition (1.7) n'exprime qu'une relation entre les $\nabla g_i(x^*)$ sans aucune référence à la fonction objectif $f$ du problème $(P_E)$. Les conditions d'optimalité nécessaires sont alors faibles et peu informatives au niveau de l'optimalité du point $x^*$. C'est pourquoi, la possibilité d'avoir $\gamma_0^* = 0$ est souvent écartée en assurant $\gamma_0^* > 0$ par une hypothèse de *qualification des contraintes* en $x^*$.

### Contraintes d'inégalité

Lorsque l'on considère des problèmes d'optimisation avec contraintes sous forme d'inégalité seulement, l'ensemble admissible a un intérieur non vide (contrairement à l'ensemble admissible défini par des égalités uniquement). Nous sommes alors confrontés à deux situations : si un point $x^*$, candidat à être extremum, se trouve à l'intérieur de $C$, il doit vérifier, par le Théorème de Fermat, la condition $\nabla f(x^*) = 0$. Si ce même $x^*$ se trouve sur la frontière de $C$, les fonctions définissant les contraintes doivent intervenir dans les conditions d'optimalité (ou au moins celles qui sont actives). Le Théorème 1.5.7 se réduit dans ce cas à la formulation suivante.

**Théorème 1.5.11 (Théorème de Karush-Kuhn-Tucker)**

(Pourciau, 1980, p.441)

*Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, où $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. Soit $x^*$ un minimum local du problème*

$$(P_I) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, p\,. \end{cases}$$

*Supposons en plus que les contraintes soient qualifiées en $x^*$. Alors il existe un vecteur $\mu^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_p^*) \in \mathbb{R}^p$ vérifiant*

$$\begin{gathered} \nabla f(x^*) + \textstyle\sum_{i=1}^p \mu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0, \\ \mu_i^* h_i(x^*) = 0, \quad \forall\, j = 1, \ldots, p, \\ \mu_i^* \geq 0, \quad \forall\, j = 1, \ldots, p, \\ h(x^*) \leq 0. \end{gathered}$$

La version de ce théorème donnée par John ne présente aucune condition de qualification des contraintes et peut être trouvée dans l'article de Pourciau (1980, p.440).

### Présentation des conditions d'optimalité dans les manuels de cours

Bien que notre présentation soit partie du cas le plus général (contraintes d'égalité et d'inégalité) pour être ensuite particularisée, d'autres organisations sont également rencontrées dans les ouvrages dédiés à l'optimisation. Nous observons en effet trois courants dans la littérature :

1. Présentation des conditions d'optimalité du premier ordre d'abord avec contraintes sous forme d'égalité, ensuite avec contraintes sous forme d'inégalité et enfin avec des contraintes sous forme d'égalité et d'inégalité.
   - Du point de vue mathématique, il est évident que si on savait *a priori* quelles étaient les contraintes actives en une solution du problème d'optimisation, la solution serait un extremum local du problème où nous ignorons toutes les contraintes inactives et où toutes les contraintes sont considérées comme contraintes d'égalité. Donc, tout problème pourrait être regardé comme problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
   - Du point de vue didactique, un traitement des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité peut être abordé en expliquant, dans des cas simples, la méthode de substitution, méthode connue par les étudiants depuis le secondaire. L'impossibilité de résoudre tous les problèmes de cette forme par substitution des contraintes motive ensuite l'écriture du théorème de Lagrange. Le cas des contraintes d'égalité peut donc être considéré comme "plus simple" car se basant

sur des savoirs acquis. Le théorème de Karush-Kuhn-Tucker se présente alors comme une généralisation des deux cas vus précédemment quand on ajoute les contraintes sous forme d'inégalité.

2. Présentation des conditions d'optimalité du premier ordre d'abord avec contraintes sous forme d'inégalité, ensuite avec contraintes sous forme d'égalité et enfin avec des contraintes sous forme d'égalité et d'inégalité.
   – Mathématiquement, cette démarche s'appuie sur le fait qu'une contrainte d'égalité $g_i(x) = 0$ est équivalente à deux contraintes d'inégalité, à savoir $g_i(x) \leq 0$ et $g_i(x) \geq 0$, ce qui permet de se ramener au cas des problèmes sous contraintes d'inégalité avant d'aborder le cas des problèmes sous contraintes d'égalité et le cas le plus général.
3. Présentation des conditions d'optimalité du premier ordre avec contraintes sous forme d'égalité et d'inégalité.
   – Il s'agit, dans une démarche purement mathématique, de présenter le cas le plus général duquel les différents cas particuliers peuvent se déduire.

### 1.5.5 Comment utiliser les conditions d'optimalité en pratique ? (suite)

Revenons aux utilisations des conditions d'optimalité. Disposer d'expressions analytiques de l'optimalité d'un point $x^*$ est utile, entre autres, pour les raisons suivantes :

– pour calculer analytiquement des solutions d'un problème d'optimisation $(P)$ ;
– pour vérifier l'optimalité éventuelle d'un point $x \in X$ ;
– pour mettre en œuvre des méthodes numériques de résolution d'un problème d'optimisation $(P)$.

Nous avons maintenant suffisamment de connaissances mathématiques pour décrire brièvement chacune de ces trois utilisations.

**Pour calculer analytiquement des solutions de $(P)$ :** Plusieurs méthodes pour résoudre un problème d'optimisation existent. Une première, probablement la plus naturelle et évidente lorsqu'on utilise les conditions d'optimalité, est la suivante :

1. Trouver tous les points vérifiant une condition d'optimalité nécessaire (souvent du premier ordre) et ainsi identifier les candidats à être extremum du problème $(P)$.
2. Ensuite, vérifier une condition d'optimalité suffisante (souvent du second ordre) afin de sélectionner les solutions parmi tous les candidats à être extremum.

Pourvu que l'on possède d'autres informations sur le problème d'optimisation en question (par exemple la convexité du problème $(P)$, la coercivité de la fonction objectif, la compacité de l'ensemble admissible, ...), on peut donner des variantes de cette première méthode. Supposons, par exemple, que le Théorème de Weierstrass permette de garantir d'avance l'existence d'un minimum global. Alors on procède de la manière suivante :

1. Trouver tous les points vérifiant une condition d'optimalité nécessaire (souvent du premier ordre) et ainsi identifier les candidats à être extremum du problème $(P)$.

2. Ensuite, déclarer le(s) point(s) donnant la plus petite valeur à $f$ comme minimum (minima) global (globaux) du problème d'optimisation $(P)$.

Le choix d'une méthode appropriée dépend en pratique de la nature de la fonction objectif $f$, de ses propriétés spécifiques, de la connaissance de voisinages de ses extrema, mais aussi des contraintes caractérisant l'ensemble admissible.

**Exemple 1.5.2**
*Soit le problème d'*optimiser la fonction $f(x) = x^2 - x^4$ *sur* $\mathbb{R}$.

1. *La condition d'optimalité nécessaire du premier ordre 1.5.4 permet d'identifier les candidats à être extremum :*
$$\nabla f(x^*) = f'(x^*) = 2x^* - 4x^{*^3} = 0 \Leftrightarrow x^* = 0 \text{ ou } x^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x^* = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$
2. *La condition d'optimalité suffisante du second ordre 1.5.6 nous informe sur la nature des trois candidats :*
$$\nabla^2 f(x) = f''(x) = 2 - 12x^{*^2}$$
*Si* $x^* = 0$*, alors* $f''(x) = 2 > 0$*. Le point* $x^* = 0$ *est un minimum local de* $f$*.*
*Si* $x^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$*, alors* $f''(x) = -4 < 0$*. Le point* $x^* = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *est un maximum local de* $f$*.*
*Si* $x^* = \frac{-\sqrt{2}}{2}$*, alors* $f''(x) = -4 < 0$*. Le point* $x^* = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ *est un maximum local de* $f$*.*
3. *En plus, une analyse de la fonction fournit l'information que les deux maxima sont des maxima globaux, tandis que le minimum local n'est pas un minimum global car la fonction n'est pas bornée inférieurement (*$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$*).*

**Pour vérifier l'optimalité d'un point $x \in X$ donné :** Lorsqu'on possède un candidat à être extremum du problème $(P)$, disposer d'une condition d'optimalité suffisante permet d'affirmer l'optimalité du point si la condition est vérifiée, mais ne l'infirme pas dans le cas contraire. Seule une condition d'optimalité nécessaire et suffisante donne le moyen d'affirmer ou d'infirmer l'optimalité. A nouveau, des connaissances spécifiques sur le problème d'optimisation en question peuvent intervenir sur la décision de l'optimalité du candidat.

**Pour mettre en œuvre des méthodes numériques d'optimisation :** Un algorithme d'optimisation cherche à déterminer numériquement les valeurs des variables qui sont contraintes à respecter l'admissibilité du problème et donnant à la fonction objectif sa valeur maximale ou minimale. Il cherche donc une solution du problème $(P)$. Au moyen d'un ordinateur, on résout aussi bien des problèmes sans contraintes qu'avec contraintes. Les conditions d'optimalité fournissent alors un ensemble d'équations et d'inéquations qui peuvent être résolues numériquement par des algorithmes d'optimisation. Étant donnée la complexité de beaucoup de problèmes d'optimisation, l'algorithme veille souvent à chercher d'abord un candidat à être extremum (vérifiant une condition nécessaire) en examinant soit à la fin, soit au fur et à mesure, des propriétés du type condition suffisante. Ainsi, on garantit, après convergence de l'algorithme, que le point trouvé est une solution du problème d'optimisation et non seulement un point stationnaire.

## 1.6 Analyse de sensibilité

Lorsque les données d'un problème d'optimisation $(P)$ sont légèrement perturbées la solution du problème perturbé n'est en général pas radicalement différente de celle du problème non perturbé. L'*analyse de sensibilité* est l'étude systématique de ces modifications dans les solutions qu'engendrent de petites variations dans les données. En effet, l'idée de base est d'être capable de répondre aux questions suivantes :

- Si la fonction objectif est un peu modifiée, comment varient les valeurs des variables de la solution ?
- Si les contraintes sont perturbées légèrement, quel en sera l'impact sur la solution du problème d'optimisation ?
- Si on rajoute une contrainte à l'ensemble des contraintes, comment se comporte la solution du problème d'optimisation ?

Une manière de répondre à ces questions est de résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation qui tiennent compte de ces légères modifications et perturbations dans les données. Cependant, cela peut s'avérer coûteux et difficile à réaliser. Dans le cadre de la deuxième question mentionnée ci-dessus, ce sont les conditions d'optimalité qui constituent un outil précieux pour réaliser une analyse de sensibilité.

Ayant établi les conditions d'optimalité pour les problèmes d'optimisation avec et sans contraintes, nous ne nous sommes pas encore intéressés aux multiplicateurs de Lagrange (et de KKT), et plus particulièrement aux résultats donnant du sens à ces multiplicateurs. Pour l'instant, les multiplicateurs de Lagrange ont été rencontrés comme des "objets relativement abstraits", des variables auxiliaires qui semblent ne servir qu'à l'écriture des conditions d'optimalité [23]. Or, dans le cas de perturbations des contraintes, ces variables constituent mais un véhicule d'information quant à l'impact des perturbations sur la solution optimale. Il est alors possible d'obtenir une signification des multiplicateurs de Lagrange comme mesure de l'impact d'une perturbation des contraintes sur la fonction objectif, sans devoir "ré-optimiser". Cette signification est fortement utilisée en économie.

Mathématiquement, nous supposons une perturbation des contraintes $\delta \in \mathbb{R}^{k+p}$. Soit alors le problème de minimisation perturbé $(P_{IE_\delta})$ :

$$(P_{IE_\delta}) \left\{ \begin{array}{ll} \min\limits_{x\in\mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & g_i(x) + \delta_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k\,, \\ & h_j(x) + \delta_j \leq 0, \quad j = 1, \ldots, p\,. \end{array} \right.$$

On note $C_\delta$ l'ensemble admissible du problème perturbé $(P_{IE_\delta})$. Nous définissons la *fonction valeur* associée au problème perturbé $(P_{IE_\delta})$.

**Définition 1.6.1 (Fonction valeur)** (Gilbert, 2003, p.116)
*On appelle* fonction valeur *associée au problème perturbé* $(P_{IE_\delta})$ *la fonction* $v$ *définie par*

$$v\ : \mathbb{R}^{k+p} \ \rightarrow\ \mathbb{R}\ \cup\ \{+\infty, -\infty\} : \delta \rightsquigarrow v(\delta) = \inf_{x\in C_\delta} f(x)\,.$$

23. Le statut des multiplicateurs de Lagrange sera traité en détail dans la suite de cette thèse.

La fonction valeur permet de mesurer la variation de la valeur optimale de la fonction objectif lorsque la perturbation $\delta$ varie. En effet, sous des circonstances appropriées, on peut montrer que les multiplicateurs de Lagrange $\lambda^*$ et $\mu^*$ du problème d'optimisation $(P_{IE})$ s'interprètent comme le gradient de la fonction valeur lorsque $\delta = 0$ (c'est-à-dire en absence de perturbations) (Gilbert, 2003, p.117).

Comme conséquence, nous pouvons démontrer que la valeur de $\lambda_i^*$ (respectivement $\mu_j^*$) donne la variation de la valeur optimale de la fonction objectif suite à une perturbation de la $i^{\text{ème}}$ contrainte d'égalité (respectivement de la $j^{\text{ème}}$ contrainte d'inégalité). Ainsi, le cas d'un multiplicateur nul est particulièrement intéressant. Il peut arriver :

- quand la contrainte est inactive. Dans ce cas, on savait déjà que le multiplicateur correspondant était nul et on comprend bien qu'une petite perturbation de la contrainte n'aura d'incidence ni sur la solution, ni sur la valeur optimale de la fonction objectif,
- quand la contrainte est active. On peut alors éliminer la contrainte en question sans remettre en cause l'optimalité au premier ordre de la solution $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$. Ceci dit, la valeur optimale de la fonction objectif ne varie pas au premier ordre bien que la solution du problème puisse être affectée par une perturbation de la contrainte associée au multiplicateur nul.

À titre d'exemple, nous donnons une illustration de l'interprétation du multiplicateur de Lagrange en économie. Soit le problème du consommateur soumis à une contrainte budgétaire :

$$(P_{consommateur}) \begin{cases} \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} & U(x,y) \\ \text{SC} & px + qy = R\,, \end{cases}$$

où $U$ est la fonction d'utilité du consommateur, $R$ est son revenu et $p > 0$ et $q > 0$ les prix unitaires respectifs des biens $x$ et $y$. En écrivant la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) - \lambda(px + qy - R)$$

et en résolvant le système d'équations des conditions nécessaires du premier ordre, nous obtenons la solution du problème d'optimisation $(x^*, y^*, \lambda^*)$ telle que :

$$\lambda^* = \frac{U'_x(x^*, y^*)}{p} = \frac{U'_y(x^*, y^*)}{q}\,.$$

Le multiplicateur de Lagrange $\lambda^*$ représente alors le taux de variation de la valeur de la fonction d'utilité à l'optimum par rapport au paramètre de la contrainte, à savoir le revenu $R$,

$$\lambda^*(R) = \frac{\partial U}{\partial R}(x^*(R), y^*(R))\,.$$

Ainsi, il indique l'utilité marginale du revenu. En effet, lorsque la contrainte est "relâchée" d'une unité (augmentation ou diminution d'une unité du revenu), l'utilité maximale varie approximativement de $\lambda^*$.

Enfin, les multiplicateurs de Lagrange mesurent des prix ou des coûts marginaux en économie, raison pour laquelle ils sont encore appelés *prix fictifs*, *prix implicites* ou *prix ombres* (*shadow prices*).

Après avoir présenté le cadre mathématique de la présente étude, nous proposons maintenant une présentation des différents cadres théoriques qui précisent le contexte didactique dans lequel se place notre recherche.

Chapitre 2

# Outils théoriques en didactique des mathématiques

## Sommaire

Après avoir détaillé les notions mathématiques qui seront utilisées dans la suite, ce chapitre décrit dans un premier temps l'essentiel des cadres de l'inscription théorique de notre recherche, à savoir la théorie de la transposition didactique (TD) et la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Ceux-ci s'appuient conjointement sur des travaux de l'école francophone de didactique des mathématiques. Dans un deuxième temps, nous présentons brièvement les autres cadres théoriques qui nous ont permis de travailler. Une explication plus détaillée de ces cadres sera fournie dans les chapitres ultérieurs.

Avant de commencer, il est nécessaire de définir le rapport entre les "mathématiques comme discipline d'enseignement" et les "mathématiques comme discipline scientifique de référence". Tout comme beaucoup d'autres chercheurs dans le domaine de la didactique, nous estimons qu'il est impossible d'interpréter ce rapport sans prendre en compte le processus de reconstruction des mathématiques "scientifiques" dans un but de les enseigner ensuite.

> *Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner.* (Chevallard, 1991, p.38)

Il y a donc une nécessité de considérer les contenus de savoirs à enseigner - et finalement enseignés - comme produit d'un processus qui "transpose" un certain savoir d'une institution en-dehors de l'établissement scolaire vers cet établissement dans le but social de le diffuser, de l'enseigner. Nous devons la formalisation du concept de *transposition didactique* (TD) au didacticien français Yves Chevallard qui fît remarquer, dès la première édition de son œuvre *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné* en 1985, que de nouveaux savoirs arrivent périodiquement dans le système d'enseignement. Partant de cette constatation, il posa les questions suivantes : d'où viennent ces nouveaux objets enseignés et comment sont-ils arrivés là ? Pour y répondre, Chevallard définit la transposition didactique comme suit :

> *Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique.* (Chevallard, 1991, p.38)

La TD témoigne de l'intervalle qui sépare les deux formes de savoir qui sont le *savoir savant* et le *savoir enseigné*. Le savoir savant est le savoir élaboré au cours du temps dans des lieux destinés à la recherche. Ce savoir est accessible sous forme d'articles dans des revues scientifiques ou de communications dans des colloques organisés par la communauté scientifique. Quant au savoir enseigné, c'est celui qui est proposé aux élèves et aux étudiants par le biais de leçons données dans des salles de cours. Nous constatons donc aisément que les "mathématiques enseignées" ne sont pas une réduction des mathématiques "discipline scientifique de référence", mais plutôt une réadaptation de ces dernières dans le but de les enseigner.

## 2.1 La transposition didactique

Le processus de transposition didactique démarre loin des écoles. Une première étape consiste à choisir parmi les savoirs existants ceux qui seront transmis. Ensuite, les différents éléments du savoir sélectionné subissent des opérations d'adaptation, de démantèlement et de reconstruction afin de rendre le savoir "enseignable" tout en gardant son essence. Enfin, ce dernier est l'objet d'un enseignement à l'école ou à l'université. Plusieurs personnes et acteurs interviennent dans le processus de la transposition didactique qui peut être représenté par le schéma de la Figure 2.1 :

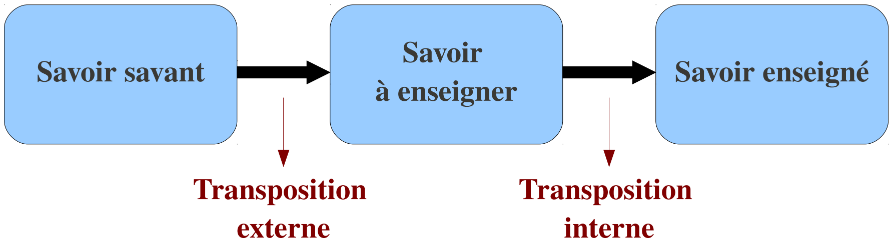



FIGURE 2.1 – Le processus de transposition didactique

Le "savoir savant" et le "savoir enseigné" peuvent être considérés respectivement comme point de départ et point d'arrivée de la transposition didactique. Expliquons chacun des termes utilisés dans le schéma de la Figure 2.1 :

**Savoir savant :** savoir de la communauté scientifique. Ce savoir est élaboré dans une institution productrice de ces savoirs et validé par cette communauté scientifique qui le légitime et qui lui accorde un certain intérêt. Le savoir savant mathématique trouve ses sources au coœur des recherches en mathématiques, mais aussi dans des problèmes que cherchent à résoudre d'autres disciplines (la physique, l'économie, etc.) qui constituent dans de nombreux cas les raisons d'être de ces savoirs. Il est présenté dans des publications scientifiques spécifiques ou lors de congrès scientifiques.

**Savoir à enseigner :** savoir décrit et précisé dans l'ensemble des textes "officiels" et qui doit être enseigné. Le savoir à enseigner peut se trouver dans des programmes de cours, des instructions officielles ou encore dans des documents d'accompagnement comme les polycopies et syllabi de cours.

**Savoir enseigné :** savoir enseigné aux élèves par les professeurs comme indiqué par son nom. Il est construit par l'enseignant et mis en œuvre dans des classes ou des auditoires. Nous disons qu'il s'agit du savoir qui est dispensé pendant les heures de cours. Ce savoir dépend fortement des connaissances du professeur et de ses conceptions de l'apprentissage.

Remarquons dès à présent que nous introduirons plus loin une forme supplémentaire du savoir : le *savoir appris* qui est l'ensemble des savoirs acquis par les apprenants. Ce savoir apparaît à la fin du processus didactique et ouvre le champ sur des nouvelles questions que le didacticien se pose. La Théorie Anthropologique du Didactique (expliquée plus loin) postule qu'il est impossible d'interpréter les caractéristiques du savoir appris sans tenir compte des différentes étapes de la transposition didactique. Notons encore que le savoir appris ne peut être expliqué sans tenir compte des composantes psychologiques et cognitives des apprenants.

Parlons à présent des acteurs du schéma de la Figure 2.1.

**Noosphère :** ensemble des personnes et des groupes qui sont impliqués de près ou de loin dans la transposition didactique (externe), notamment les universitaires qui s'intéressent aux problèmes d'enseignement, les porte-paroles de l'institution scolaire, les représentants du pouvoir politique, les spécialistes de la discipline, les auteurs de manuels, les parents, les professeurs, etc. Leur rôle est de s'intéresser aux contenus disciplinaires (et moins aux méthodes pédagogiques employées). Chevallard en donne la définition suivante :

> *[...] une instance essentielle au fonctionnement didactique, sorte de coulisses du système d'enseignement, véritable sas par où s'opère l'interaction entre ce système et l'environnement sociétal. [...] la sphère où l'on pense [...] le fonctionnement didactique.* (Chevallard, 1991, pp.24-25)

D'après cette définition, la noosphère constitue l'institution productrice du savoir à enseigner.

**Professeur :** enseignant, personne chargée de transmettre des connaissances à autrui. L'institution scolaire, et plus précisément le professeur, est le responsable de la production du savoir enseigné. Le professeur peut avoir un double rôle lorsqu'il fait partie de la noosphère - ceci est d'autant plus vérifié dans l'enseignement universitaire - puisqu'il est en même temps le seul responsable de la transposition didactique interne car en charge du savoir enseigné.

Il nous reste à expliciter les deux formes de transposition didactique qui apparaissent dans la Figure 2.1 :

**Transposition externe :** cette première transposition est dite externe puisqu'elle se fait en dehors du système d'enseignement (hors de la classe) et est réglée par la noosphère. Les acteurs de la noosphère choisissent les contenus qui doivent être enseignés ou médiatisés, définissent les programmes de cours et les documents d'accompagnement et analysent les pratiques de tous les acteurs de la transposition didactique. Cette action est faite en fonction des nouvelles connaissances dans la discipline, des pratiques sociales et des différentes valeurs de la société, et est influencée par les conceptions de chacun de ses intervenants.

**Transposition interne :** cette deuxième transposition consiste à adapter et transformer les savoirs à enseigner, tels qu'ils apparaissent dans les programmes et les manuels, en savoirs enseignés. On peut donc affirmer que le savoir enseigné est issu du savoir à enseigner qui lui-même trouve sa racine dans le savoir savant. La transposition interne est l'activité des enseignants et témoigne de leurs pratiques dans les classes. De ce fait, les savoirs enseignés sont difficiles à connaître. Nous faisons l'hypothèse que les savoirs enseignés sont nécessairement différents des savoirs savants car ils n'ont ni la même origine, ni la même fonction, ni la même destination. La transposition interne dépend de différents facteurs comme la connaissance de la part de l'enseignant de l'objet du savoir, les traditions d'enseignement, les exigences du programme officiel ou encore la vision propre de l'enseignant quant au profil des étudiants.

Ces deux formes de transposition peuvent être réalisées plus ou moins séparément. Dans l'enseignement secondaire en Belgique, par exemple, les deux processus (interne et externe) sont distincts. Dans l'enseignement universitaire, par contre, aucun programme de cours officiel n'existe et le choix de la matière vue revient principalement aux enseignants en charge du cours. Ceci dit, comme mentionné plus tard, depuis la restructuration de l'enseignement supérieur suite au Décret Bologne, un consensus existe entre les universités francophones belges sur le contenu général d'une formation d'un étudiant en termes de crédits. Cette particularité de l'enseignement universitaire[24] trouvera forcément son expression dans nos analyses de la transposition didactique.

Pour illustrer le processus de TD avec un exemple concret, le lecteur intéressé trouvera ci-dessous une transposition didactique possible (parmi d'autres) de la méthode d'Euler. Cet exemple témoigne de l'existence d'une "distance" qui sépare le savoir savant du savoir enseigné et qui peut être considérée par le didacticien comme un objet d'étude à part entière.

1. Le mathématicien Euler publie dans son œuvre "Institutionum Calculi Integralis" en 1768 une procédure numérique pour résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. Il s'agit d'un savoir savant particulier considéré comme le premier procédé d'intégration numérique.
2. Ce savoir est validé en 1820 par Cauchy qui donne une preuve rigoureuse de la méthode dans ses *Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique.*
3. Depuis, la *méthode d'Euler* a obtenu le statut de savoir à enseigner dans l'enseignement supérieur. Parallèlement, d'autres techniques plus performantes ont été développées pour résoudre numériquement des équations différentielles et pour pallier les insuffisances de la méthode d'Euler. Ainsi, on rencontre à l'heure actuelle des formes plus évoluées du savoir savant, telles les méthodes dites de "Runge-Kutta".
4. En France, au moment des réformes de l'enseignement en 2002, les autorités décident de mettre la méthode d'Euler au programme des cours de Terminale S (classe de Terminale Scientifique). Ce programme propose d'introduire la fonction exponentielle en partant de l'étude de l'équation différentielle $f' = kf$. En voici les deux extraits (en Analyse) qui concernent la méthode d'Euler :
   - **Modalités :** *L'étude de ce problème (à savoir la résolution de l'équation différentielle) pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables $f$ telles que $f(x+y) = f(x)f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentants graphiques approchées de $f$ dans le cas où $k = 1$ ; on comparera divers tracés avec des pas de plus en plus petits.*

24. Notons qu'en Belgique "enseignement supérieur" n'est pas synonyme d'"enseignement universitaire". En effet, l'enseignement universitaire est une forme particulière de l'enseignement supérieur qui se passe dans les institutions universitaires telles l'Université de Louvain-la-Neuve, de Namur ou de Liège. Les Hautes-Écoles sont les institutions responsables de l'enseignement supérieur non-universitaire. Notre travail s'intéresse uniquement à l'enseignement universitaire.

- **Commentaires :** *La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.*

(Murillo Lopez, 2003, p.70)

5. C'est à partir de ce moment, semble-t-il, que certains manuels français font appel à la méthode d'Euler comme approche de la fonction exponentielle et pour étudier l'équation différentielle $y' = ay + b$. Ainsi, les auteurs des manuels *Maths* de la Collection Terracher (Hachette Education) incluent la méthode d'Euler dans le manuel de cours pour les élèves en Terminale S (Terracher & Ferachoglou, 2002, p.64, p.153).
6. En se basant sur le programme, un professeur de mathématiques conçoit un exemple d'épreuve pratique traitant de la méthode d'Euler [25] (voir Annexe E.1).
7. Un autre, en s'inspirant du manuel (Terracher & Ferachoglou, 2002), crée une séquence didactique basée sur la méthode d'Euler qui permet de rechercher des primitives, et l'enseigne dans sa classe [26] (voir Annexe E.2).
8. À l'heure actuelle, dans de nombreux universités, la méthode d'Euler continue à être enseignée dans le cadre de cours concernant la résolution des *équations différentielles* ou l'*algorithmique mathématique* [27] sous ses formes initiale et améliorée. Différentes utilisations et transformations se sont donc opérées au fur et à mesure du processus de transposition didactique de la méthode d'Euler. La méthode d'Euler est devenue un savoir enseigné dans différentes institutions.

Comme montré dans l'exemple, le savoir en question - la méthode d'Euler - subit différentes modifications et adaptations avant d'arriver dans le cahier d'un élève à l'école ou d'un étudiant à l'université. Autrement dit, la transposition didactique s'opérant en plusieurs étapes, selon des processus plus ou moins indéchiffrables (par exemple de la notion théorique aux instructions officielles, puis aux manuels scolaires, de là au professeur, et finalement à la classe), l'écart entre le savoir savant et le savoir enseigné se creuse, et le professeur ne contrôle souvent plus, en dernier ressort, que les contenus déjà modifiés et adaptés. Il est donc important que le savoir enseigné ne rende pas impossible le passage ultérieur au savoir savant qui est visé par l'enseignement.

Toute transposition comporte donc des risques de déformation, de réduction, voire même de falsification. Ces phénomènes du processus de transposition didactique sont considérés par Chevallard (1991, pp.21-22) comme incontournables. Pour rendre les savoirs accessibles aux apprenants, au prix d'une simplification et d'une vulgarisation en rapport avec leur âge et leurs acquis préalables, la transposition didactique passe, entre autres, par

- une *dépersonnalisation* soulignée par l'oubli du nom de l'inventeur de l'objet,

25. Voir sur le site `http://education.ti.com/france`, menu *Ressources pédagogiques*, consulté le 4 octobre 2011.

26. Voir sur le site `http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/Lycee_fichiers/CoursT.htm#ED`, consulté le 4 octobre 2011.

27. Voir, par exemple, sur les sites `http://www.fundp.ac.be/etudes/cours/page_view/SMATB222/` et `http://www.fundp.ac.be/etudes/cours/page_view/SMATB306/`, consultés le 4 octobre 2011. Les équations différentielles apparaissent comme l'un des thèmes "phares" dans le cursus des étudiants en mathématiques et en physique aux FUNDP.

– une *décontextualisation* faisant en sorte que les raisons d'être de l'objet finissent souvent par s'évanouir dans la mise en texte du savoir.

Nous disons encore que le savoir savant fait l'objet d'une extraction de son contexte d'origine (décontextualisation) pour venir prendre place (re-contextualisation) dans l'organisation des savoirs à enseigner et pour devenir un objet "étudiable" par les élèves. De même, le travail de dé-re-contextualisation fait naître un détachement de l'objet des individus qui l'ont inventé et travaillé indépendamment et avant qu'il ne soit préparé pour l'étude de l'élève (de-re-personnalisation). Plus d'informations à ce sujet peuvent être trouvées dans (Verret, 1975).

Ces considérations montrent bien que des transformations du savoir savant ont nécessairement lieu et il est donc légitime que le didacticien étudie ces transformations qui se manifestent dans l'enseignement. D'ailleurs, il est clair qu'en tant qu'enseignant nous ne sommes pas confrontés à la question de transposer ou de ne pas transposer, mais plutôt à la question du comment transposer.

Durant les 25 dernières années, la transposition didactique de branches importantes des mathématiques (à enseigner) a été analysée en rapport avec les enseignements primaire et secondaire[28], et plus récemment aussi avec l'enseignement universitaire. Vu le nombre important de travaux déjà réalisés, nous affirmons que la TD et les phénomènes associés se trouvent au cœur de tout problème didactique. L'objectif de cette thèse est d'étudier la transposition didactique d'un thème particulier des mathématiques : le Théorème de Lagrange.

## 2.2 La Théorie Anthropologique du Didactique

De la théorie de la transposition didactique naît une autre question à laquelle Chevallard essaie de répondre dès le début des années 90 : quel est concrètement cet objet d'étude qu'est l'activité mathématique si nous constatons que cet objet n'est pas tout à fait le même d'une institution à une autre et que nous ne l'utilisons pas pour faire les mêmes choses ? Y a-t-il moyen d'analyser l'activité mathématique, et plus généralement n'importe quelle activité humaine ?

Pour répondre à ces questions, Chevallard pose qu'une analyse des savoirs mathématiques soit accompagnée d'une étude des activités qui font intervenir ce savoir. En adoptant un point de vue institutionnel, où le mot *institution* se comprend par endroit où sont conçus, développés, exploités, diffusés, enseignés et appris les savoirs, Chevallard propose un modèle qui s'énonce en termes de *praxéologies*. Ces praxéologies détaillent l'activité en distinguant la *praxis*, le savoir-faire méthodologique (les tâches et les techniques) et le *logos*, le discours correspondant au savoir en jeu (la technologie et la théorie).

### 2.2.1 Notions fondamentales

À la base de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) se trouve la phrase que *"tout est objet"* : l'université, le professeur, le théorème de Weierstrass, etc. Le concept d'*objet* est la première notion fondamentale de la TAD. Il s'agit de

28. Voir, par exemple, (Bosch & Gascón, 2006, p.58).

> *toute entité, matérielle ou immatérielle, qui existe pour au moins un individu. Tout est donc objet, y compris les personnes.* (Chevallard, 2003, p.1)

Ce concept est très général. Ainsi, une voiture, un graphique, le concept d'intégrale, un souvenir, le chiffre 7, la sensation de joie, mais aussi le Théorème de Lagrange dont il est question ici, sont des objets. En particulier,

> *toute œuvre, c'est-à-dire tout produit intentionnel de l'activité humaine, est un objet.* (Chevallard, 2003, p.1)

Le système de toutes les interactions qu'un individu $x$ peut avoir avec un objet $o$ constitue son *rapport personnel à l'objet*, noté $R(x, o)$. Le rapport personnel inclut toutes les interactions que $x$ peut avoir avec $o$ : le penser, le toucher, le calculer, le manger, en parler, etc. Chevallard (2003) dit que $o$ existe pour $x$ si $x$ établit un rapport personnel avec $o$, ou encore que le rapport personnel précise la manière dont l'individu "connaît l'objet".

Bien que nous en ayons déjà utilisé le terme, l'*institution* est un autre concept fondamental de la TAD. C'est

> *un dispositif social total, [...] qui permet et impose à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes $x$ qui viennent y occuper les différentes positions $p$ offertes dans $I$, la mise en jeu de manières de faire et de penser propres.* (Chevallard, 2003, p.2)

Une institution $I$ désigne une structure d'organisation d'origine humaine [29]. Nous dirons que notre monde est composé de plusieurs institutions et que chacune admet un environnement qui est un univers culturel. Ainsi, une classe de mathématiques de 6$^{\text{ème}}$ secondaire est une institution (composée d'individus qui y occupent la position d'élève ou la position de professeur), un établissement scolaire est une institution (où apparaissent en plus d'autres personnes comme le directeur, l'éducateur ou le secrétaire administratif) ou encore l'université de Namur est un exemple d'institution.

Alors que le rapport personnel est individuel, il est possible de définir, pour un objet $o$, le *rapport institutionnel* pour une position $p$ donnée dans l'institution $I$, noté $R_I(p, o)$. Idéalement, ce rapport devrait être celui des sujets de l'institution dans cette position. Autrement dit, le rapport institutionnel comprend ce qu'on juge nécessaire dans l'institution pour assumer le rôle d'un individu dans cette position donnée. Par exemple, le rapport institutionnel d'un étudiant par rapport au Théorème de Lagrange n'est pas le même au début de l'année qu'après avoir suivi le cours lui expliquant les différents enjeux du Théorème de Lagrange. C'est pourquoi nous disons que les différentes facultés sont des institutions qui ont comme objectif de rendre les rapports personnels de leurs étudiants par rapport à certains objets d'études conformes aux rapports institutionnels correspondants. En venant occuper ces positions, les personnes deviennent les *sujets* des institutions. Impliqués au premier rang, les sujets contribuent à faire vivre les institutions.

Nous donnons à titre d'exemple une illustration des différentes notions mentionnées ci-dessus dans le cas du Théorème de Lagrange. Ce dernier est un thème d'étude et notre objet $o$. Notre étude s'intéresse à l'enseignement universitaire en mathématiques et en économie qui constitue donc le cadre institutionnel. A priori, nous sommes en présence de deux cadres institutionnels différents : l'enseignement universitaire en mathématiques,

29. D'après Chevallard, la notion d'institution n'est pas prise au sens bureaucratique dans lequel on l'entend souvent (l'armée, l'Église, l'État, etc.) mais plus généralement.

attaché à l'institution "Faculté des Sciences, étudiants en sciences mathématiques" (notée ci-après $I_{\text{Math}}$), et l'enseignement universitaire en économie, attaché à l'institution "Faculté de Sciences Économiques et de Gestion, étudiants en sciences économiques et de gestion et ingénieur de gestion" (notée ci-après $I_{\text{Éco}}$). Étant donné les rapports institutionnels $R_{I_{\text{Math}}}(p, \text{Théorème de Lagrange})$ et $R_{I_{\text{Éco}}}(p, \text{Théorème de Lagrange})$, nous choisissons deux étudiants en première année de bachelier (BAC1), $x_1$ et $x_2$, d'un même auditoire (occupant la même position $p$) au cours de mathématiques en sciences économiques et de gestion aux FUNDP [30] (l'institution $I_{\text{FUNDP-Éco}}$). Pour ces deux étudiants, l'objectif du cours est de rendre leur rapport personnel $R(x_1, o)$ et $R(x_2, o)$ adéquats au $R_{I_{\text{FUNDP-Éco}}}(p, \text{Théorème de Lagrange})$. Si nous changeons l'institution $I$ ou encore la position $p$ des deux individus $x_1$ et $x_2$, les différents rapports changeront vraisemblablement.

Ainsi, nous pouvons envisager différentes situations d'étude à partir de notre exemple : analyser les points communs et les différences entre les rapports personnels et les rapports institutionnels vis-à-vis du Théorème de Lagrange

- en fonction des positions occupées (étudiants ou professeurs) ;
- en fonction des différentes institutions que l'on peut trouver dans l'enseignement universitaire en Belgique. Deux institutions peuvent différer
  1. au niveau de l'université considérée (exemple : cours de Mathématiques en BAC1 Sciences économiques et de gestion aux FUNDP et cours de Mathématiques en BAC1 Sciences économiques et de gestion à l'ULg [31]),
  2. au niveau de la faculté considérée au sein d'une même université (exemple : cours de Mathématiques en BAC1 Sciences économiques de gestion aux FUNDP et cours de Mathématiques en BAC1 Sciences biologiques aux FUNDP),
  3. au niveau des professeurs en charge du cours et qui ainsi contribuent à définir le cadre institutionnel (exemple : M. Dupont et M. Legrand donnent respectivement le cours de Mathématiques en BAC1 Sciences économiques aux FUNDP deux années consécutives. M. Dupont a une formation de mathématicien, M. Legrand a une formation d'économiste. De ce fait, les exigences demandées aux étudiants varient.),
  4. au niveau de l'année d'étude considérée (exemple : M. Dupont donne respectivement un cours de Mathématiques en BAC1 Sciences économiques et de gestion aux FUNDP et en BAC2 Sciences économiques et de gestion aux FUNDP.).

Étant donnés un objet de savoir mathématique et une institution, la notion de rapport renvoie non seulement aux pratiques enseignantes qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu cet objet, mais aussi aux rapports que le savoir mathématique entretient avec les savoirs pratiques et professionnels. D'après Bosch et Chevallard (1999),

*connaître un objet c'est avoir à faire avec - et souvent avoir affaire à - cet objet.*

Signalons que ces pratiques enseignantes peuvent différer fortement d'une institution à l'autre. Elles peuvent en particulier refléter les pratiques professionnelles de référence (les pratiques de l'économiste ou du mathématicien) ce qui change la façon dont les problèmes

30. Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, Belgique.
31. Université de Liège, Liège, Belgique.

sont abordés ou résolus. Néanmoins, vu la complexité de ce sujet, nous ne pourrons que l'aborder dans cette thèse.

### 2.2.2 Praxéologie, un modèle de l'activité humaine

Afin d'analyser et modéliser les pratiques institutionnelles et sociales, en particulier l'activité mathématique, la TAD considère que

> *toute activité humaine consiste à accomplir une tâche $t$ d'un certain type $T$, au moyen d'une technique $\tau$, justifiée par une technologie $\theta$ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie $\Theta$.* (Chevallard, 2002b, p.1)

Ainsi, lorsqu'on veut faire naître ou évoluer le rapport d'un individu $x$ (d'une institution $I$) à un objet $o$, il faut mettre en place des activités qui font intervenir l'objet $o$ :

> *Un objet $o$ est mobilisé dans l'exécution d'une certaine tâche $t$ lorsqu'on effectue cette tâche selon une certaine technique $\tau$ relative au type $T$ sous lequel l'institution où la tâche $t$ s'accomplit la pense.* (Chevallard, 2007, p.6)

Le postulat émis par Chevallard est alors que toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on note $[T, \tau, \theta, \Theta]$ et que l'on nomme *praxéologie* ou *organisation praxéologique*. Nous pouvons lire dans un hommage à Yves Chevallard [32] que

> *les praxéologies sont un modèle fondamental qui permet de comprendre les objets de savoirs, d'étudier leurs transformations, de rendre compte de ce qui se fait dans telle institution avec ces objets et rend explicite le modèle épistémologique de référence qui nourrit les analyses des phénomènes de transposition.*
>
> *C'est dans cette dualité entre* formes de praxis *et* formes d'articulation *que réside l'originalité de l'analyse praxéologique (et, bien sûr, son nom).* (Winsløw, 2006, p.3)

Expliquons chacune des notions introduites.

#### Tâche

Au point de départ de la notion de praxéologie, il y a les notions de tâche, $t$, et de type de tâches, $T$. Une tâche $t$ réfère à une action qui est communément énoncée par un verbe. Par exemple, *nettoyer* la salle de bain, *lire* un livre de Sartre, *multiplier* un entier par un autre, *résoudre* une équation différentielle du premier ordre. Le verbe, à lui seul, définit le *genre de tâches - nettoyer*, *lire*, etc. - tandis qu'une tâche doit s'appliquer à un objet bien précis. Par exemple, *résoudre une équation*, tout court, n'est pas une tâche, mais *résoudre l'équation du premier degré* $3x + 56 = -12$ en est une. Quand les tâches précisent l'objet sur lequel s'effectuera l'action sans le particulariser, nous parlerons de *type de tâches* $T$. Ainsi, *minimiser la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \rightsquigarrow f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ et *minimiser la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \rightsquigarrow f(x) = 3x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2$ sont des tâches de la même "famille de tâches" $T$ définie par *minimiser une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \rightsquigarrow f(x)$.

32. `http://www.ardm.eu/contenu/yves-chevallard`, Wozniak Floriane, Bosch Marianna, Artaud Michèle (consulté le 2 décembre 2010).

### Technique

Quel que soit le type $T$ de la tâche $t$ à effectuer, la réalisation de $t \in T$ suppose la mise en œuvre d'une technique $\tau$ (du grec *tekhnê*, savoir-faire), c'est-à-dire d'une "manière de faire" adaptée à $T$. Cette manière d'accomplir, de réaliser la tâche pourra varier dans le temps, mais aussi de pays à pays et, plus généralement, d'une institution à l'autre.

Faisons deux commentaires sur la notion de technique. Premièrement, il se peut que seule une partie des tâches du type $T$ puisse être résolue avec la technique $\tau$ à laquelle elle renvoie. Cette partie est nommée *portée de la technique.* Ainsi on a, par exemple, que

> *toute technique de calcul sur* $\mathbb{N}$ *échoue-t-elle à partir d'une certaine taille de nombres. Le fait qu'on ne sache pas en général factoriser un entier donné est notamment à la base de certaines techniques de cryptographie.* (Chevallard, 1999, p.2)

Ensuite, nous remarquons qu'en général seul un petit nombre de techniques est reconnue dans une institution $I$ donnée pour résoudre des tâches $t$ d'un type de tâches $T$ donné. Institutionnellement, nous disons que chaque institution favorise certaines techniques en excluant des techniques alternatives possibles (qui peuvent évidemment exister dans d'autres institutions).

À titre d'exemple, nous pouvons dégager deux techniques différentes qui peuvent être issues d'une institution "école secondaire, cours de mathématiques, 4ème année" (technique 1) et d'une institution "université, cours d'analyse, première année de bachelier en sciences mathématiques". Minimiser la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \rightsquigarrow f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ peut se faire par les deux techniques suivantes :

| Technique 1 | Technique 2 |
|---|---|
| Le sommet $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ détermine le seul minimum ou maximum d'une parabole. Déterminons l'abscisse du sommet : $$\frac{-b}{2a} = \frac{5}{6}.$$ $x = \frac{5}{6}$ est donc le seul minimum de $f$ (car $a = 3 > 0$). | Dans notre cas, $$\nabla f(x) = f'(x) = 6x - 5\,.$$ La solution de l'équation $6x - 5 = 0$ fournit alors l'abscisse du seul point stationnaire de $f$, à savoir $x = \frac{5}{6}$. La matrice Hessienne de $f(x)$ au point $x = \frac{5}{6}$, $\nabla^2 f(x) = 6$, indique alors que le candidat est le seul minimum de $f$. |

En considérant *type de tâches* et *technique*, nous disons qu'une praxéologie contient un "bloc" $[T, \tau]$ appelé *bloc practico-technique.* Ce bloc est identifié en général à ce qu'on nomme dans la langue courante un "savoir-faire" : un certain type de tâches, $T$, et une certaine manière, $\tau$, d'accomplir les tâches $t$ de ce type. Ce bloc invoque donc la pratique ou la *praxis* de l'activité.

### Technologie

Toute technique $\tau$ appelle en principe une justification. C'est pourquoi, pour justifier "rationnellement" une technique donnée qui permet d'accomplir les tâches du type $T$, nous

nous servons d'un "discours raisonné" (*logos*). Ce discours sur la technique est nommé *technologie* et est noté généralement $\theta$.

Reprenons notre exemple de recherche des points stationnaires d'une parabole. Quand on cherche les minima de $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ selon la première technique, on utilise le discours :

> La courbe représentative de la fonction $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ est une parabole qui est tournée vers le haut car le coefficient du terme $x^2$ est positif. Son sommet est alors le seul minimum de la fonction. Comme pour toute parabole d'équation $f(x) = ax^2 + bx + c$ ce sommet a pour abscisse $\frac{-b}{2a}$, cette abscisse donne le seul minimum de $f(x)$..

Quant à la deuxième technique, on peut donner la justification suivante :

> Trouver tous les minima de la fonction $f(x)$ revient à trouver tous les points stationnaires de $f(x)$ et à utiliser ensuite une condition suffisante d'optimalité pour déterminer la nature des points stationnaires. Or, trouver les points stationnaires d'une fonction consiste à trouver les points $x$ qui annulent le gradient $\nabla f$. Comme il s'agit d'une fonction à une seule variable, le gradient $\nabla f(x)$ est égal à la dérivée de $f$ en $x$. Le point stationnaire est alors la solution de l'équation $f'(x) = 0$.
> La matrice Hessienne est égale à la dérivée seconde de $f$. Cette dérivée seconde est partout positive, le candidat trouvé est alors le seul minimum de $f(x)$.

Cette technologie s'appuie sur le Théorème 1.5.6 ainsi que sur la définition d'un point stationnaire,

**Définition 2.2.1**
*Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction.*
*Le point $a$ est un point stationnaire de $f$ si et seulement si $\nabla f(a) = 0$.*

Deux commentaires, relevés par Chevallard (1999), s'imposent. Premièrement, le style de rationalité du discours technologique est relatif à l'institution dans laquelle il est produit et peut ainsi varier d'une institution à l'autre. Ainsi, Chevallard note que l'on peut retrouver des éléments technologiques intégrés en une technique dans une institution donnée tandis que ces mêmes éléments technologiques peuvent figurer uniquement dans le bloc technologico-théorique dans une autre institution. Il souligne encore que le discours sur la technique assume deux rôles :

> *on notera ensuite qu'une deuxième fonction de la technologie est d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique. Si la première fonction - justifier la technique - consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction consiste à exposer pourquoi il en est bien ainsi. On notera que ces deux fonctions sont inégalement assumées par une technologie donnée. De ce point de vue, en mathématiques, la fonction de justification l'emporte traditionnellement, par le biais de l'exigence démonstrative, sur la fonction d'explication.* (Chevallard, 1999, p.4)

### Théorie

À son tour, le discours technologique contient des assertions qui appellent une justification supportée par un discours de niveau supérieur. Un tel discours, dont le caractère est de justifier la technologie $\theta$, sera appelé une théorie $\Theta$ dans la TAD. On peut voir que le rôle d'explication que joue la théorie pour la technologie est celui que joue la technologie pour la technique. Comme on peut le remarquer en pratique, la justification d'une technologie est souvent donnée par simple renvoi à une autre institution qui est censée disposer de ces justifications. Ainsi, nous entendons dire le professeur d'un cours d'optimisation "Nous avons vu au cours de calcul différentiel et intégral que ..." ou encore le professeur de physique mécanique dire "On démontre en mathématiques...".

Dans notre exemple, nous avons à justifier les deux technologies pour compléter les deux praxéologies. En ce qui concerne la première technologie, l'étude des fonctions polynômiales, en particulier des polynômes du deuxième ordre, permet de déterminer les coordonnées du sommet : $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$. Ensuite, le calcul différentiel permet de montrer que le sommet d'une parabole est le seul extremum de celle-ci et que l'abscisse du sommet vaut $x = \frac{-b}{2a}$.

En ce qui concerne la deuxième technologie, l'analyse des fonctions de plusieurs variables est le domaine des mathématiques dont sont issues la condition nécessaire à propos des extrema d'une fonction et la définition d'un point stationnaire. La théorie concernant la résolution de systèmes d'équations complète la théorie associée à la deuxième technologie au sein d'un cours à l'université.

Les deux éléments, technologie et théorie, forment ensemble un bloc $[\theta, \Theta]$ que nous appelons *bloc technologico-théorique*. Ce bloc est identifié en général à ce qu'on nomme dans la langue courante "un savoir" et définit le "logos" pour la "praxis" en question. Les articulations de la praxis et du logos forment ensemble ce que Chevallard nomme une *organisation praxéologique*, ou seulement une *praxéologie* $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Quand une organisation praxéologique est relative à un *type de tâches mathématiques*, on la nomme une *organisation mathématique* ($OM$).

### Groupement de praxéologies

Lorsque nous observons une praxéologie $[T, \tau, \theta, \Theta]$ relative à un unique type de tâches $T$, nous sommes en présence de praxéologies dites *ponctuelles*. En pratique, on ne rencontre que rarement des praxéologies ponctuelles. Comme le remarque Chevallard :

> *Généralement, en une institution $I$ donnée, une théorie $\Theta$ répond de plusieurs technologies $\theta_j$, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques $\tau_{ij}$ correspondant à autant de types de tâches $T_{ij}$.* (Chevallard, 1999, p.5)

Des praxéologies ponctuelles correspondent à un *sujet* mathématique particulier traité au cours. Les organisations ponctuelles qui se regroupent autour d'une même technologie $\theta$ donnée sont appelées *organisations locales* $\sum_i [T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$. En ce qui concerne les organisations locales correspondant à une même théorie $\Theta$, Chevallard les nomme *organisations régionales* $\sum_{ij} [T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$. Enfin, quand on fait un agrégat de plusieurs organisations régionales dans une institution donnée, Chevallard parle d'une *organisation globale* $\sum_{ijk} [T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$.

Ainsi, les types de tâches "*trouver les points stationnaires d'une fonction* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \rightsquigarrow f(x)$" et "*déterminer les candidats à être extremum de la fonction* $f(x)$ *sous contrainte* $g(x) = 0$" peuvent être à l'origine d'organisations ponctuelles. Ces organisations ponctuelles peuvent être regroupées à leur tour dans une organisation locale autour d'un discours technologique "règle de Fermat". L'organisation régionale correspond alors à un discours théorique sur les "conditions d'optimalité dans le cadre de l'optimisation différentiable". Finalement, nous pouvons regrouper ces organisations dans une organisation globale qui recouvre le domaine de l'optimisation. Dans ce sens, notre étude de la transposition didactique du Théorème de Lagrange consiste en une étude d'un thème particulier, à savoir le Théorème de Lagrange, et les organisations que nous rencontrerons sont des $OM$ locales composées de différentes $OM$ ponctuelles.

### Registres de représentations sémiotiques

De quoi sont faits les ingrédients qui composent une technique, une technologie, une théorie dans une $OM$ ? Raymond Duval remarque que

> *d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible.* (Duval, 1993, p.38)

Des recherches en didactique des mathématiques ont mis en avant l'importance des représentations dans le processus d'apprentissage. Parce qu'il ne peut travailler directement sur les objets mathématiques (et donc sur les concepts eux-mêmes), le mathématicien a l'habitude de manipuler leurs *représentations sémiotiques.* Ainsi, les objets mathématiques tels que droites, cercles, nombres, fonctions ne sont pas des objets réels ou physiques. Pour les manipuler, les élèves doivent les appréhender à travers leurs représentations, mentales et sémiotiques. La question qui se pose alors est de savoir comment, au niveau de l'enseignement, on peut amener les enseignants à prendre conscience du rôle que jouent les représentations sémiotiques dans la pratique mathématique.

**Définition 2.2.2 (Représentation sémiotique)**
*Les* représentations sémiotiques *sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système (sémiotique) de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement.*

Duval regroupe différentes représentations sémiotiques dans des *registres de représentation sémiotique.*

**Définition 2.2.3 (Registre de représentation sémiotique)**
*Un* registre *de représentation sémiotique est un ensemble cohérent de représentations permettant de désigner un objet dans une perspective sémiotique (associant les signes à leurs significations).*

Nous manipulons en mathématiques plusieurs types de registres : le registre du langage naturel, celui des écritures numériques, des écritures algébriques ou des représentations graphiques. La droite, par exemple, possède plusieurs représentations sémiotiques : son équation, sa représentation graphique, son écriture symbolique par deux de ses points, etc.

Selon Duval, l'absence d'une coordination entre registres limite la compréhension d'une notion mathématique au contexte sémiotique d'un seul registre et entraîne nécessairement une confusion entre l'objet et sa représentation. Il est donc clair que la coordination de registres sémiotiques est une condition nécessaire de la compréhension.

### 2.2.3 Organisations mathématiques et organisations didactiques

Après avoir décrit les organisations praxéologiques relatives aux activités mathématiques ou *organisations mathématiques*, Chevallard propose de passer à une analyse du processus didactique en lui-même en termes de praxéologie. Selon l'approche anthropologique, le professeur, dans sa pratique enseignante, réalise différents types de tâches en se basant sur une ou plusieurs techniques particulières. Ces techniques sont caractérisées notamment par leur portée et leur efficacité. Expliquer, justifier ces techniques et les utiliser pour en produire d'autres nécessitent une analyse, des références théoriques mais aussi une connaissance des situations susceptibles de les solliciter. Une telle étude des activités du professeur comporte donc deux aspects différents : d'un côté le versant des savoir-faire (la *praxis*) et de l'autre côté le versant des discours, des savoirs (le *logos*).

> *Étant donné un thème d'étude mathématique* $\theta$ [33]*, on considérera successivement a) la* réalité mathématique *qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème, b) la* manière *dont peut se construire cette réalité mathématique, c'est-à-dire la manière dont peut s'y réaliser l'étude du thème* $\theta$*. Le premier objet - "la réalité mathématique qui..." - n'est rien d'autre qu'une praxéologie mathématique ou organisation mathématique [...]. Le second objet - "la manière dont..." - est ce qu'on nommera une organisation didactique [...].* (Chevallard, 1999, p.8)

La notion de praxéologie permet donc de reformuler et d'étudier aussi la tâche que la société attribue aux professeurs de mathématiques : enseigner ou, en termes de la TAD, faire reconstruire aux étudiants des organisations mathématiques. Pour accomplir cette tâche particulière, les différentes formes possibles dans une institution donnée sont appelées *organisations didactiques* ($OD$). Ainsi, nous pouvons identifier des tâches professorales, des techniques dont l'enseignant dispose ou qu'il élabore et adapte, ainsi que des systèmes d'argumentations justificatives et interprétatives de ces techniques.

Les organisations didactiques s'intéressent aux phénomènes liés à l'enseignement, la transmission et la diffusion des mathématiques. Une $OD$ renvoie donc à la reconstruction ou la transposition d'une $OM$ en classe. Comme les $OD$ sont supposées soutenues par les différentes $OM$, il est clair que les deux objets d'étude - organisations mathématiques et organisations didactiques - doivent être décrits ensemble. Nous faisons alors l'hypothèse que, d'un côté, les organisations didactiques imposent des contraintes sur l'émergence et l'évolution des organisations mathématiques qu'elles mettent en place mais que, de l'autre côté, elles se soumettent à des contraintes dictées par ces différentes organisations mathématiques.

Il se pose alors la question de savoir quels sont les types de tâches didactiques. Chevallard nous informe que

> *quel que soit le cheminement de l'étude, certains types de situations sont nécessairement présents, même s'ils le sont de manière très variable [...]. De tels types de situations seront appelés ici* moments de l'étude *ou* moments didactiques *parce qu'on peut dire que, quel que soit le cheminement suivi, il arrive forcément un moment où tel ou tel "geste d'étude" devra être accompli : où, par exemple, l'élève devra "fixer" les éléments élaborés (moment de l'institutionnalisation) ; où il devra se demander "ce que vaut" ce qui s'est construit jusque-là (moment de l'évaluation) ; etc.*

33. C'est-à-dire correspondant à une organisation locale autour d'un même discours technologique.

(Chevallard, 1999, p.19)

Chevallard (1999, pp.19-23) définit six moments de l'étude qui permettent de décrire une organisation didactique. Les six moments sont :

**la première rencontre avec l'organisation enjeu de l'étude :** c'est le moment de la première rencontre avec l'organisation mathématique étudiée ;

**l'exploration du type de tâches $T_i$ et l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches :** c'est le moment de construire une première technique. L'étude et la réalisation d'un problème de type donné va toujours de pair avec la constitution d'un embryon de technique, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger ;

**la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à $T_i$ :** c'est le moment de la mise en relation avec un environnement technologico-théorique antérieurement élaboré, ou avec des germes d'un nouvel environnement qui se précisera dans une relation dialectique avec l'émergence de la technique ;

**le travail de la technique :** c'est le moment d'améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable et d'accroître la maîtrise que l'on en a ;

**l'institutionnalisation :** c'est le moment de préciser ce qu'est exactement l'organisation mathématique élaborée, en distinguant notamment, d'une part, les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas pour autant intégrés, et d'autre part les éléments qui entreront de manière définitive dans l'organisation mathématique visée ;

**l'évaluation :** c'est le moment où il faut faire l'état des lieux des connaissances acquises ou non.

D'après Chevallard, ces moments doivent être prévus et organisés par le professeur dans le cadre des activités en classe. Ainsi, le modèle des moments constitue non seulement une grille pour l'analyse des processus didactiques mais permet aussi de poser clairement le problème de la réalisation des différents moments de l'étude.

### 2.2.4 Le modèle épistémologique de référence (MER)

En se basant sur les considérations institutionnelles que nous venons de présenter, il est clair que nous tâcherons, dans la suite, d'analyser des organisations didactiques du Théorème de Lagrange. Cependant, le modèle présenté s'avère encore très descriptif. Il n'est, en effet, assez explicatif ni d'un point de vue épistémologique, ni d'un point de vue didactique. Nous devons le confronter d'une part à une vision épistémologique du savoir savant que nous irons chercher du côté de l'institution "savante", et d'autre part à une vision didactique des contraintes de l'institution de l'enseignement que nous chercherons directement dans la classe. Ainsi, nous cherchons maintenant à décrire l'*unité d'analyse* qui permettra de définir le rapport entre le cadre théorique et les données empiriques de notre recherche.

> L'unité d'analyse *des processus didactiques doit contenir une organisation didactique scolaire qui permette de mettre en place, au moins, une OM* locale relativement

complète[34]. *En d'autres termes, pour décrire et interpréter les faits didactiques, il faut les référer à une séquence du processus didactique qui inclut, au moins, la reconstruction d'une telle OM locale.* (Bosch & Gascón, 2005, p.116)

C'est dans ce sens que nous complétons notre schéma de la transposition didactique par le *modèle épistémologique de référence* (MER) comme proposé sur le schéma de la Figure 2.2 (Bosch & Gascón, 2005, p.117). En même temps, l'organisation didactique y est rajoutée.

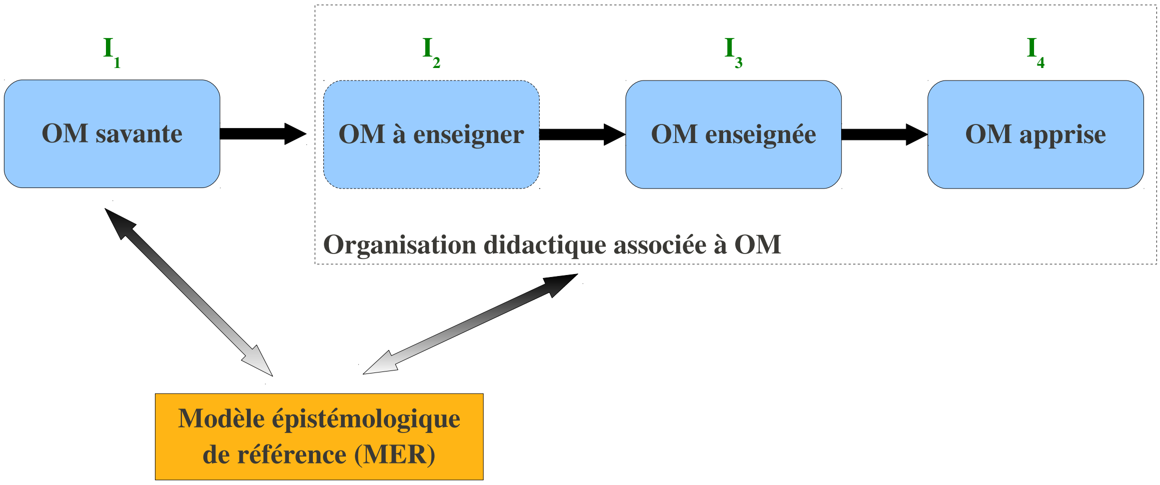



FIGURE 2.2 – L'unité d'analyse des processus didactiques

Donnons quelques explications à propos de la Figure 2.2. $I_1$ représente l'institution auteure du savoir mathématique savant, $I_2$ la noosphère, $I_3$ l'institution scolaire et plus particulièrement le professeur et $I_4$ l'ensemble des élèves ou des étudiants communément appelé *classe*. Précisons que $I_1$ peut être une institution demandeuse, utilisatrice ou potentiellement adaptatrice du savoir mathématique savant. En effet, nous pouvons supposer, par exemple, qu'un même savoir savant ne se développe pas au cours du temps de la même façon dans la sphère des mathématiciens et dans la sphère des économistes.

D'après la Figure 2.2, il est clair que l'organisation didactique inclura les contraintes qui proviennent des différentes étapes de la transposition didactique. Il est également évident que nous serons amenés à donner une description différente pour chaque *OD* rencontrée dans nos analyses puisque chaque *OD* sera dépendante de l'institution considérée[35]. Notons encore que l'*OD* dépend non seulement des objectifs que l'institution définit à propos des caractéristiques du savoir appris auquel doit conduire le processus didactique mais aussi des *OM* disponibles dans la classe.

Pourquoi a-t-on ajouté une unité d'analyse dans le schéma ? Dans le processus de la

34. Une *OM* est *locale relativement complète* lorsqu'elle inclut les différents ingrédients praxéologiques qui permettent d'intégrer et d'articuler les *OM* ponctuelles qui les composent (Bosch, Fonseca, & Gascòn, 2004).

35. Dans le cadre de cette thèse, il nous est impossible d'explorer toutes les institutions productrices d'*OD* relatives au Théorème de Lagrange dans l'enseignement universitaire belge. Il nous semble donc opportun de faire un choix logique et cohérent au moment de la présentation du savoir à enseigner.

transposition didactique, l'$OM$ à enseigner a un rôle central. Elle se trouve à la base de l'$OD$ bien que ni le professeur, ni l'institution ne disposent explicitement de cette $OM$.

> *Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une organisation mathématique* de référence *dont la description se fait généralement à partir des OM* savantes *légitimant le processus d'enseignement.* (Bosch & Gascón, 2005, p.117)

En conséquence, notre étude du Théorème de Lagrange passe nécessairement par la définition d'un modèle épistémologique de référence (MER) qui est l'organisation mathématique que nous définissons comme base de notre analyse. Le MER relatif au Théorème de Lagrange nous permettra d'interpréter et de décrire, de manière relativement précise, l'activité mathématique qui s'y rapporte. Cette étape est importante puisque, de la description de l'$OM$ dépendra l'analyse que nous fournirons des $OD$ qui y sont liées. Inversement, la description des $OD$ nous fournira des informations sur cette $OM$. S'inscrivant dans le cadre de la TAD, ce MER se formule en termes d'organisations mathématiques.

Enfin, notons que le défi le plus important à relever dans tout enseignement est sans doute d'arriver à susciter un changement conceptuel dans le rapport des étudiants au savoir. C'est l'apprenant qui comprend, apprend et ... personne ne peut le faire à sa place ! Dans ce sens, nous parlerons de *savoir appris* pour parler du savoir que les étudiants ont réellement acquis au terme du processus didactique. Il est composé des éléments praxéologiques qui devraient être utilisés dans la résolution de nouveaux types de tâches. Bien que nous ne puissions inférer à propos du savoir appris qu'au travers de son utilisation lors de réponses à des questions, de résolutions de problèmes, d'interviews, etc. il nous semble intéressant de compléter le schéma de la transposition didactique par le savoir appris comme proposé sur la Figure 2.2.

Le moment est venu de préciser le modèle de la Figure 2.2 relativement au cas particulier qui nous occupe. Comme il n'existe a priori pas de programme de cours aux universités belges, le le professeur en charge du cours est un des acteurs de la transposition didactique externe. Dès lors, une $OD$ relative à un enseignement universitaire englobera toutes les étapes de la transposition didactique.

De plus, il est clair que les deux institutions $I_{\text{Math}}$ et $I_{\text{Éco}}$ se réfèrent différemment au savoir savant qu'est le Théorème de Lagrange. Ainsi, le thème de l'optimisation avec contraintes pourrait-il, suivant les institutions considérées, être enseigné aux futurs économistes (ou ingénieurs de gestion), soit par un mathématicien, soit par un économiste. Dans notre étude, cette dernière éventualité n'a été rencontrée que marginalement [36]. Le schéma de la Figure 2.3 reflète ces caractéristiques propres à notre étude.

Précisons que les mathématiciens en charge d'un cours de mathématiques destiné à des futurs économistes ne peuvent faire abstraction totale de l'institution économique. En effet, les contenus du cours de mathématiques sont définis par l'$I_{\text{Éco}}$ en concertation avec le professeur de mathématiques. Cependant, nous n'avons pu recueillir de données relativement aux $OD$ produites par des économistes. Notre regard du Théorème de Lagrange se focalisera dès lors principalement sur les $OD$ produites par des professeurs issus

36. Voir Chapitre 3 pour une liste détaillée des professeurs sondés dans nos expérimentations et à la page 177 pour le profil de ces professeurs.

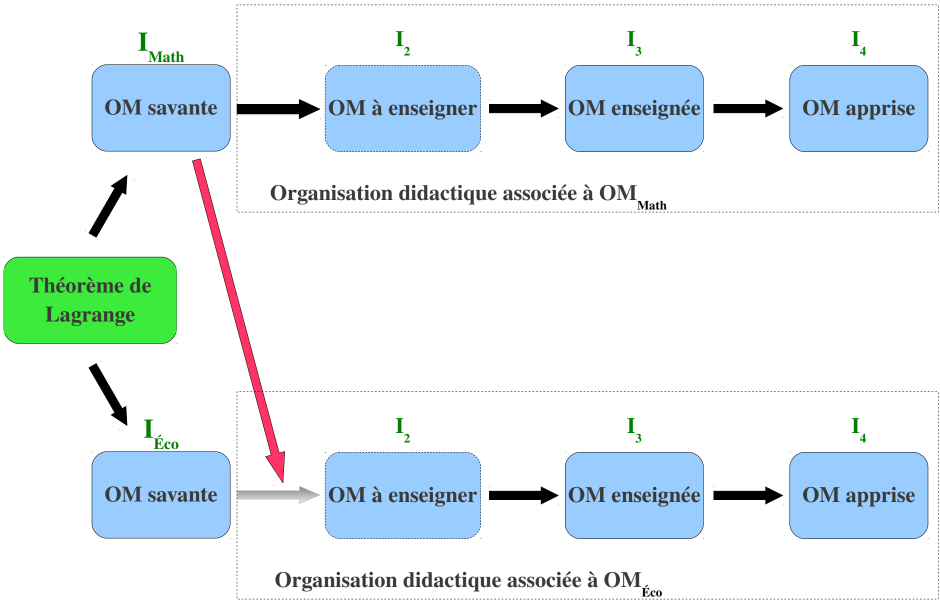



FIGURE 2.3 – L'unité d'analyse des processus didactiques adaptée à notre étude

d'$I_{\text{Math}}$. Cette restriction est illustrée par la "disparition" de la transposition didactique externe au sein de l'$I_{\text{Éco}}$ qui est remplacée par une transposition didactique externe "inter-institutionnelle" sur la Figure 2.3. Il est donc probable que, dans nos analyses, toutes les "raisons d'être" d'une organisation mathématique locale $OM_{\text{Éco}}$ ne seront pas prises en compte dans l'$OD$ correspondante au vu de la formation de l'enseignant responsable de la transposition didactique.

## 2.3 Autres cadres théoriques

En marge du cadre théorique principal présenté ci-dessus, nos réflexions ont également, et de manière plus ponctuelle, été basées sur d'autres travaux en didactique. Nous présentons brièvement ci-dessous la liste des autres cadres théoriques sollicités par notre étude. Ces concepts seront explicités en détail dans les chapitres où ils sont utilisés. Nous abordons successivement :

**Le rôle de la preuve en mathématiques** (Hanna, 1990) et (Duval, 1992) (voir Chapitre 4).

**La dialectique outil-objet et les jeux de cadres** (Douady, 1986) (voir Chapitre 4).

**La réification des concepts mathématiques** (Sfard, 1991) (voir Chapitre 5 et Chapitre 7).

**La transition du concret à l'abstrait en analyse réelle** (Winsløw, 2006) (voir Chapitre 5).

**Le contrat didactique et l'action didactique conjointe du professeur et des élèves** (Brousseau, 1998 ; Chevallard, 1988) et (Sensevy & Mercier, 1976) (voir Chapitre 8).

**Le modèle de l'espace des organisations didactiques possibles** (Bosch & Gascón, 2002) (voir Chapitre 8).

Le lecteur trouvera les articulations entre le cadre théorique principal de ce travail et ceux mentionnés ci-dessus respectivement dans les chapitres indiqués.

Nous précisons, dans le chapitre suivant, en termes de notre cadre théorique principal, la problématique qui nous intéresse, la méthodologie de notre travail et la liste de nos questions de recherche en indiquant en quoi les différents cadres théoriques seront utilisés dans la réalisation de nos analyses.

Chapitre 3

# Questions de recherche et méthodologie

## Sommaire

Dans ce chapitre, nous repartons de nos questions de recherche établies à la fin de la présentation du cadre mathématique et donnons une traduction de ces questions en termes de notre cadre théorique. Ensuite, nous en déduisons la méthodologie de travail que nous adopterons dans la seconde partie de la présente étude pour tenter de fournir des réponses aux questions de recherche. Nos questions initiales étaient les suivantes :

- Quelles formes d'enseignement du Théorème de Lagrange rencontre-t-on ?
- Quel rôle joue la preuve du Théorème de Lagrange dans l'enseignement mais aussi dans l'apprentissage du Théorème de Lagrange ?
- A quelles difficultés un étudiant en mathématiques ou en économie est-il confronté lorsque le Théorème de Lagrange lui est enseigné ?

## 3.1 Première question de recherche

| $Q_1$ **Quelles formes d'enseignement du Théorème de Lagrange rencontre-t-on ?** |
|---|

La première question de recherche touche de près la problématique des pratiques enseignantes. Cette problématique peut être exprimée, d'après Chevallard,

> *par un schéma générique articulant quatre grands types de tâches. Étant donné un objet o relatif aux pratiques enseignantes, il s'agira en effet d'abord d'observer l'objet o ($T_1$), puis de décrire et analyser l'objet o ($T_2$), ensuite d'évaluer l'objet o ($T_3$), enfin de développer l'objet o ($T_4$).* (Chevallard, 1999, p.8)

Le premier type de tâches (l'observation) a été effectué tout au long de notre recherche par le recours aux données d'observation (questionnaires, interviews, observation de manuels, de cours magistraux et de séances d'exercices). Le quatrième type de tâches (le développement) sera abordé mais se présentera davantage à l'horizon de notre recherche qu'en son cœur. En effet, au centre de notre travail, nous placerons les deuxième et troisième types de tâches, à savoir la description, l'analyse et l'évaluation de certains objets *o* relatifs aux pratiques enseignantes concernant le Théorème de Lagrange.

Le Théorème de Lagrange étant un thème d'étude mathématique $\theta_{Lagrange}$, le travail d'étude à réaliser concerne donc principalement les deux tâches suivantes au niveau de $T_2$ :

1. décrire et analyser l'organisation mathématique $OM_{\theta_{Lagrange}}$ qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le Théorème de Lagrange ;
2. décrire et analyser l'organisation didactique $OD_{\theta_{Lagrange}}$ qui peut être mise en œuvre dans une classe de mathématiques où l'on étudie le Théorème de Lagrange.

Quant à l'évaluation des organisations mathématiques et didactiques, nous nous limiterons à établir une évaluation a priori d'organisations mathématiques et didactiques observées dans la littérature (manuels, etc.) et dans les classes. Les critères d'évaluation suivants ont été évoqués par Chevallard (1999, pp.25-27) et nous seront utiles dans la suite :

**Évaluer des types de tâches :** voici une liste non exhaustive de critères donnés par Chevallard :

> Critère d'identification : *les types de tâches $T_i$ sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ? [...]*
> Critère des raisons d'être : *les raisons d'être des types de tâches $T_i$ sont-elles explicitées ? Ou au contraire ces types de tâches apparaissent-ils immotivés ?*
> Critère de pertinence : *les types de tâches considérés fournissent-ils un bon découpage relativement aux situations mathématiques les plus souvent rencontrées ? Sont-ils pertinents au regard des besoins mathématiques des élèves, pour aujourd'hui ? Pour demain ? Ou au contraire apparaissent-ils comme des "isolats" sans lien véritable - ou explicite - avec le reste de l'activité (mathématique et extramathématique) des élèves ?* (Chevallard, 1999, p.25)

**Évaluer des techniques :** Chevallard note encore :

> *les techniques proposées sont-elles effectivement élaborées, ou seulement ébauchées ? Sont-elles faciles à utiliser ? Leur* portée *est-elle satisfaisante ? Leur* fiabilité *est-elle acceptable étant donné leurs conditions d'emploi ? Sont-elles suffisamment intelligibles ? Ont-elles un avenir, et pourront-elles évoluer de manière convenable ?* (Chevallard, 1999, pp.25-26)

**Évaluer des technologies :** les formes de justification utilisées sont-elles cohérentes et rigoureuses ? Sont-elles adaptées à leurs conditions d'utilisation ? Les justifications explicatives sont-elles favorisées ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement et de façon optimale exploités ?

**Évaluer des théories :** y a-t-il des éléments théoriques explicites ? Implicites ? Que permettent-ils d'éclairer ? De justifier ?

**Évaluer une organisation didactique :** quelques critères à considérer, parmi d'autres, sont l'existence de contraintes mésogénétiques, chronogénétiques et topogénétiques ainsi que la question de la prise en charge des différents moments de l'étude comme étudiés plus haut. Ainsi, comment réaliser concrètement la première rencontre avec une $OM$ donnée ? Avec quel type de tâches ? Comment conduire l'étude exploratoire d'un type de tâches donné ? Comment mener à bien l'institutionnalisation ?

Après ces explications, nous constatons la nécessité de la construction d'une unité d'analyse pour penser le Théorème de Lagrange, à savoir la construction d'un modèle épistémologique de référence (MER). Après une description du savoir savant relatif au Théorème de Lagrange et légitimant son enseignement, nous établirons une première version de notre MER. Ce modèle épistémologique de référence nous permettra ensuite d'analyser les $OM$ à enseigner existantes dans les manuels de cours. Après une révision et une validation du MER à partir de nos analyses empiriques (questionnaires distribués auprès de professeurs), nous donnerons une explication de la construction des $OD$ empiriques sur base de l'observation du savoir enseigné (observations de cours magistraux et de travaux d'étudiants). Enfin, une analyse du savoir appris débouchera sur l'évaluation des $OM$ et $OD$ rencontrées relatives au Théorème de Lagrange et ouvrira la porte vers des perspectives d'ingénieries didactiques.

## 3.2 Deuxième question de recherche

| $Q_2$ - **Quel rôle joue la preuve du Théorème de Lagrange dans l'enseignement et dans l'apprentissage du Théorème de Lagrange ?** |
|---|

Il existe, à l'heure actuelle, différentes manières de penser et de justifier la technique des multiplicateurs de Lagrange menant toutes au même résultat, à savoir le Théorème de Lagrange. Partant du Théorème de Lagrange comme thème d'étude mathématique $\theta_{Lagrange}$, l'énoncé technologique n'est en fait que la conclusion d'un "discours technologique" plus vaste, qui le justifie ou qui le démontre, comme le dit Chevallard. Notons que ce choix de considérer une preuve comme faisant partie de la technologie, nous a interpellé longtemps (la démonstration n'est-elle pas un élément théorique ?), mais sera maintenu tout au long de la thèse.

En partant de la formulation que Lagrange a donné du théorème qui porte à l'heure actuelle son nom, le monde mathématique a développé différentes techniques pour le justifier et le prouver. La deuxième question de recherche s'intéresse alors à analyser l'impact du choix d'une preuve sur la construction des $OM$ et $OD$. D'un point de vue mathématique, la démonstration d'une proposition est le moyen dont le mathématicien dispose pour se convaincre, et pour convaincre ses pairs, de la vérité de ce résultat, dans le cadre d'une rationalité propre aux mathématiques. Il n'est donc pas étonnant que ce type d'activité fasse partie des activités mathématiques enseignées à l'école, mais surtout à l'université. Lorsqu'il est question de décrire et d'analyser les différentes preuves du Théorème de Lagrange, nous sommes amenés à définir des critères. Sur base des travaux de Hanna (1990), nous remarquons que la *démonstration* peut assumer différents rôles. Hanna affirme qu'il semble intéressant de distinguer différentes perceptions d'une preuve et propose de distinguer les preuves qui prouvent et les preuves qui expliquent :

> *A proof that proves shows only* ***that*** *a theorem is true ; it provides evidential reasons alone. [...] A proof that explains, on the other hand, also shows* ***why*** *a theorem is true ; it provides a set of reasons that derive from the phenomenon itself.* (Hanna, 1990, p.9)

Dans ce sens, une démonstration peut avoir différentes fonctions dont entre autres, une fonction de vérification (démontrer ou donner la valeur de vérité d'une conjecture, etc.) ou encore d'explication (permettre un meilleur aperçu du pourquoi le résultat est vrai, etc.). Nous essaierons d'identifier le rôle de la preuve du Théorème de Lagrange dans les deux disciplines, en mathématiques et en économie.

## 3.3 Troisième question de recherche

| $Q_3$ - **A quelles difficultés un étudiant en mathématiques ou en économie est-il confronté lorsque le Théorème de Lagrange lui est enseigné ?** |
|---|

La troisième question témoigne de notre intérêt pour une approche cognitive relative au Théorème de Lagrange. Lorsqu'on veut mieux connaître, voire améliorer les pratiques enseignantes, l'étude des *conceptions mathématiques* des étudiants (mais aussi des professeurs) devient incontournable.

> *Dans l'approche cognitive, l'intégration du "mathématique" dans l'étude du "pédagogique" s'est faite à travers l'étude des conceptions des élèves, dans l'objectif de mieux connaître, et d'améliorer, les processus d'apprentissage.* (Bosch & Gascón, 2002, p.7)

C'est pourquoi nous nous posons la question de savoir s'il est possible de décrire les difficultés auxquelles un étudiant en mathématiques ou en économie est confronté lorsque le Théorème de Lagrange lui est enseigné. Cette question est intimement liée à l'état des connaissances des étudiants par rapport au Théorème de Lagrange et donc aux rapports personnels de ceux-ci au théorème en question. Nous pourrons alors, dans le meilleur des cas, voir quelles technologies sont utilisées par les étudiants pour accomplir les types de tâches se rapportant au Théorème de Lagrange.

D'autres questions sont : quelles difficultés rencontrent les étudiants dans leur apprentissage ? Ces difficultés résultent-elles des choix d'enseignement ou sont-elles constitutives du Théorème de Lagrange ? En termes de la TAD, quelles sont les modifications éventuelles opérées sur le savoir savant pour le rendre accessible en tant que savoir enseigné ? L'accès au savoir savant est-il toujours possible dans les OD considérées ? Quels sont, dans chacune des deux institutions (en mathématiques et en économie), les écarts entre :

- le savoir savant "Théorème de Lagrange" et le savoir à enseigner ?
- le savoir à enseigner et le savoir enseigné ?
- le savoir enseigné et le savoir appris ?

Enfin, lorsqu'on s'intéresse aux difficultés liées aux conceptions mathématiques en général et du Théorème de Lagrange en particulier, il est possible d'inférer sur ces difficultés, par exemple, à partir d'évaluations d'examens. La question à poser est : notre MER permet-il de décrire ces difficultés ?

Notons encore que nous aurions pu nous intéresser non seulement aux conceptions des étudiants mais aussi aux conceptions des professeurs. Dans ce contexte, nous aurions pu nous interroger sur les conceptions spontanées des professeurs sur la démonstration, la géométrie du problème, ou encore sur les mathématiques qui y sont impliquées globalement, voire sur le processus d'enseignement lui-même et l'apprentissage des mathématiques chez les étudiants. La question qui se pose alors est de savoir quelles difficultés rencontrent les enseignants dans leurs pratiques d'enseignement.

Partant des différentes questions de recherche énoncées ci-dessus et des sous-questions relevées, nous constatons que le Théorème de Lagrange dans l'enseignement universitaire ne fait pas exception et s'inscrit bien dans le processus complexe de la transposition didactique (Chevallard, 1991). Le MER du Théorème de Lagrange, vu comme unité d'analyse des *OD* contenant cette *OM* locale autour du Théorème de Lagrange dans toutes les étapes de sa transposition didactique, sera alors le fil conducteur des chapitres suivants.

## 3.4 Méthodologie

Dans cette section, nous présentons le contexte expérimental de notre travail et les différentes étapes de la démarche méthodologique que nous allons suivre au long de cette étude pour répondre aux questions de notre problématique.

Ainsi, nous présentons d'abord la méthodologie de notre travail ainsi que l'articulation des différents cadres théoriques. Nous détaillons ensuite les différentes institutions choisies, les acteurs et publics associés, les manuels de cours y analysés et les cours y observés. Nous précisons également les données recueillies : questionnaires, questions d'examen, notes manuscrites, enregistrements vidéo, et la façon dont ces données ont été analysées. Nous terminons ce chapitre par une première réflexion sur les potentialités et limites de cette méthodologie.

### 3.4.1 Démarche méthodologique

Compte tenu de notre cadre théorique et de nos questions de recherche, l'étude du Théorème de Lagrange vise tout particulièrement à mettre en évidence les praxéologies mathématiques et didactiques qui interviennent dans son enseignement en mathématiques et en économie. Ce sont les différentes étapes de la transposition didactique (de la description du savoir savant jusqu'à l'observation du savoir appris) qui fourniront tout au long de cette thèse des éléments de réponse à nos questions de recherche.

Ainsi, nous présenterons dans le Chapitre 4 une étude historique et épistémologique du Théorème de Lagrange. Cette description sera le point de départ qui nous permettra, dans la suite, de repérer les évolutions entre le savoir savant et le savoir à enseigner. Nous nous intéressons à la formulation initiale du Théorème, à l'évolution de ce dernier au sein des mathématiques et à l'émergence de l'utilisation du Théorème dans l'économie mathématique. Notons qu'il n'est pas possible dans le cadre de notre étude d'explorer toutes les institutions productrices des savoirs et savoir-faire auxquelles pourrait se référer un enseignement du Théorème de Lagrange. En conséquence, nous choisissons de présenter seulement les savoirs issus principalement du cadre mathématique qui sont les plus influents sur l'enseignement du Théorème de Lagrange dans les institutions observées par la suite.

Ce même Chapitre 4 nous familiarisera aussi avec les différentes preuves existantes du Théorème de Lagrange. Il existe, en effet, différentes façons de penser et justifier le Théorème de Lagrange. Une comparaison de ces différentes preuves en termes de

- vérification et explication (Hanna, 1990) et preuve et argumentation (Duval, 1992),
- registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993),
- cadres (Douady, 1986) et
- présence/absence du Théorème des fonctions implicites

permettra de montrer la richesse du Théorème de Lagrange au niveau de sa conceptualisation mathématique.

Les informations tirées du savoir savant seront utilisées dans le Chapitre 5 pour construire une première version de notre modèle épistémologique de référence (MER) du Théorème de Lagrange. En effet, nous dégagerons du savoir savant un ensemble de cinq types de tâches relatifs au Théorème de Lagrange qui constitueront chacun le premier élément des différentes $OM$ élémentaires de notre modèle épistémologique de référence. Cette construction ouvrira un premier champ de questions sur le MER, ainsi que sur les choix opérés par les enseignants dans leurs pratiques enseignantes.

En particulier, nous relèverons dans ce chapitre des spécificités de l'enseignement universitaire qui nous inciteront à intégrer une différenciation entre des *tâches procédurales* et des *tâches structurales* (Sfard, 1991) dans notre MER pour créer une catégorisation des types de tâches associés aux praxéologies identifiées. Cette catégorisation sera soutenue par le cadre théorique présenté par Winsløw (2006) pour penser la transition secondaire-supérieur.

Au Chapitre 6, le MER sera utilisé pour analyser le savoir à enseigner tel que présenté dans les manuels de cours. Le savoir à enseigner, résultat de la transposition didactique externe, témoignera d'une première transformation du savoir savant ainsi que du rapport institutionnel au Théorème de Lagrange. Comme il n'existe a priori pas de programme de cours dans les universités belges, ce savoir est issu de manuels, de syllabi et de supports provenant des différents cours de mathématiques que nous analyserons. Contrairement à l'institution "Enseignement secondaire", le professeur en charge du cours est, la plupart du temps, un des acteurs de cette transposition, notamment en tant qu'auteur du syllabus de référence pour le cours concerné. Nous nous intéresserons donc aux différents choix effectués par les auteurs des manuels par rapport à notre modèle épistémologique de référence et considérerons ces éléments comme composantes des $OD$ empiriques relatives au Théorème de Lagrange. Les résultats de cette analyse permettront de décrire différents "comportements" dans les manuels. Une comparaison entre les différents types de manuels, complétée par des réponses à un questionnaire distribué auprès des enseignants, donnera quelques conclusions et ouvrira le débat sur le savoir enseigné au travers des hypothèses formulées à propos de l'incidence des manuels sur ce dernier.

Avant d'analyser le savoir enseigné, nous enrichirons notre MER au Chapitre 7 en y incorporant une dynamique partant des liens existants et observés dans les manuels entre les différentes $OM$ qui composent le MER. Le concept de réification (Sfard, 1991) enrichira le cadre théorique de la TAD et nous permettra de structurer les cinq $OM$ de notre MER selon une dynamique "naturelle" qui pourrait mener à une analyse de la genèse et l'évolution d'une $OD$.

Le savoir enseigné, réalité de la classe et résultat de la transposition interne, sera analysé au Chapitre 8. En observant trois unités de cours, nous essayerons de décrire le plus précisément possible le savoir enseigné à l'aide de notre MER. Nous déterminerons dans quelle mesure les six moments de l'étude (Chevallard, 1999) sont présents dans les organisations didactiques à évaluer. Cette analyse touchera implicitement au contrat didactique (Chevallard, 1988). Comme les actions du professeur qui consistent à concevoir comment aménager, pour l'élève, les conditions d'adaptation au processus didactique, sont soumises à des contraintes, nous inclurons également une analyse des trois unités de cours en termes de chronogenèse, topogenèse et mésogenèse (Chevallard, 1991 ; Sensevy & Mercier, 1976).

La description de ce savoir enseigné permettra de créer à nouveau une typologie des $OD$ empiriques que nous confronterons à notre analyse des manuels. Cette typologie est basée sur un *modèle de l'espace des organisations didactiques possibles* (Bosch & Gascón, 2002). Enfin, nous décrirons dans ce même chapitre une expérimentation réalisée à l'université de Namur avec des étudiants en troisième année de bachelier en sciences mathématiques.

Au Chapitre 9, nous présenterons tout d'abord les enquêtes conçues pour inférer sur le savoir appris, mais aussi pour déceler les difficultés éventuelles des étudiants confrontés à l'enseignement du Théorème de Lagrange en mathématiques ou en économie. Les difficultés repérées seront alors reliées à notre MER.

### 3.4.2 Analyses et expérimentations réalisées

Pour permettre au lecteur de cette thèse un regard global sur les différents dispositifs expérimentaux, nous en précisons dans cette section les caractéristiques et les contraintes institutionnelles dans lesquelles ils ont été développés. En particulier, nous tenons à expliciter l'articulation des expérimentations menées. À cette fin, nous donnons, d'une part, une brève description des lieux, des manuels analysés et des publics que nous avons eu l'occasion d'interroger ou qui ont participé à nos expérimentations, d'autre part, nous détaillons ces dispositifs expérimentaux.

#### Institutions observées

Nos expérimentations ont eu lieu dans les universités suivantes :

**UCL :** Université de Louvain-la-Neuve, Belgique,

**FUNDP :** Université de Namur, Belgique,

**ULg :** Université de Liège, Belgique.

Ces trois institutions comptent, à elles trois, environ la moitié des étudiants francophones de Belgique. Plus particulièrement nous avons eu la possibilité de récolter des données à propos de :

$I_{\textbf{UCL-Math-Bac1}}$ **:** Institution attachée au cours d'Analyse mathématique 2, $1^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences mathématiques, UCL.

$I_{\textbf{UNa-Math-Bac1}}$ **:** Institution attachée au cours de Calcul différentiel et intégral I, $1^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences mathématiques, FUNDP.

$I_{\textbf{UNa-Math-Bac3}}$ **:** Institution attachée au cours d'Optimisation et contrôle, $3^{\text{ème}}$ année de bachelier en sciences mathématiques, FUNDP.

$I_{\textbf{UNa-Éco-Bac1}}$ **:** Institution attachée au cours de Mathématiques pour l'économie et la gestion I, $1^{\text{ère}}$ année de bachelier en sciences économiques et de gestion et ingénieur de gestion, FUNDP.

$I_{\textbf{ULg-Éco-Bac2}}$ **:** Institution attachée au cours de Mathématiques pour ingénieurs de gestion : partim II, $2^{\text{ème}}$ année de bachelier en ingénieur de gestion, ULg.

Rappelons que l'enseignement universitaire en mathématiques, attaché à l'institution "Faculté des Sciences, étudiants en sciences mathématiques", sera notée $I_{\text{Math}}$ ("institution mathématique") et que l'enseignement universitaire en économie, attaché à l'institution "Faculté de Sciences Économiques et de Gestion, étudiants en sciences économiques et de gestion et ingénieur de gestion", sera notée $I_{\text{Éco}}$ ("institution économique") tout au long de la thèse.

#### Manuels

Afin d'analyser le savoir à enseigner au Chapitre 6, les cinq manuels analysés sont :

($M_{\textbf{UCL-Math}}$) (Ponce & Van Schaftingen, 2010) "Analyse mathématique 2 - Fonctions de variables vectorielles" (Université de Louvain-la-Neuve, Belgique)

($M_{\textbf{UNa-Math}}$) (Strodiot, 1997) "Analyse (2ème partie)" (Université de Namur, Belgique)

($M_{\textbf{UNa-Éco}}$) (Thiry, 2006) "Mathématiques pour l'économie et la gestion I" (Université de Namur, Belgique)

($M_{\textbf{ULg-Éco}}$) (Bair, 2003) "Analyse mathématique" (Université de Liège, Belgique)

($M_{\textbf{LSE-Éco}}$) (van den Heuvel, 2010) "Course notes of MA208 Optimisation Theory" (Université de Londres, Royaume-Uni)

Deux manuels s'adressent à un public d'étudiants inscrits en sciences mathématiques et physiques en première année de bachelier (($M_{\text{UCL-Math}}$) et ($M_{\text{UNa-Math}}$)), tandis que les trois autres manuels s'adressent à des étudiants en sciences économiques et de gestion en première année de bachelier ($M_{\text{UNa-Éco}}$), en deuxième année de bachelier ($M_{\text{ULg-Éco}}$) et en deuxième ou troisième année de bachelier ($M_{\text{LSE-Éco}}$). Remarquons que ces cinq manuels s'adressent à cinq publics d'étudiants différents dont quatre dans les institutions dans lesquelles nous avons recueilli nos données. Le dernier manuel ($M_{\text{LSE-Éco}}$), quant à lui, a été choisi pour la singularité de la présentation du Théorème de Lagrange qu'il propose.

### Publics cible

Nous présentons ci-dessous des informations au sujet des individus concernés par nos expérimentations :

**Professeurs :** Nous avons contacté 19 professeurs qui enseignent le Théorème de Lagrange au sein des différentes universités belges francophones et de l'université du Luxembourg parmi lesquels 13 ont participé à nos expérimentations (7 professeurs s'adressant à un public dans $I_{\text{Éco}}$, 6 professeurs s'adressant à un public dans $I_{\text{Math}}$). Sur les treize professeurs, douze sont docteurs en mathématiques. Un seul professeur qui enseigne le Théorème de Lagrange est docteur en sciences économiques appliquées. Ceci explique pourquoi certains éléments de la transposition didactique externe au sein de la sphère économique ne nous seront pas accessibles. Le seul ingénieur de gestion n'est d'ailleurs pas membre du personnel d'une des trois universités qui ont été nos lieux d'expérimentations. Comme mentionné à la page 53, les enseignants qui s'adressent à des futurs économistes restent vraisemblablement ouverts aux demandes de l'institution $I_{\text{Éco}}$, mais il n'en reste pas moins vrai que leur formation mathématique surtout influence leurs pratiques enseignantes.

**Étudiants en sciences mathématiques :**

($P_{\textbf{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$) **:** Étudiants en première année de bachelier en sciences mathématiques, UCL. Ce public est constitué de 33 étudiants inscrits durant l'année académique 2009-2010.

($P_{\textbf{UNa-Math-Bac3}_{08/09}}$) **:** Étudiants en troisième année de bachelier en sciences mathématiques, FUNDP. Ce public est constitué de 17 étudiants inscrits durant l'année académique 2008-2009.

($P_{\textbf{UNa-Math-Bac3}_{10/11}}$) **:** Étudiants en troisième année de bachelier en sciences mathématiques, FUNDP. Ce public est constitué de 15 étudiants inscrits durant l'année académique 2010-2011.

**Étudiants en sciences économiques et de gestion et en ingéniorat de gestion :**

($P_{\textbf{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) **:** Étudiants en première année de bachelier en sciences économiques et de gestion et en ingénieur de gestion, FUNDP. Ce public est constitué de 189 étudiants inscrits durant l'année académique 2008-2009.

($P_{\textbf{UNa-Éco-Bac1}_{10/11}}$) **:** Étudiants en première année de bachelier en sciences économiques et de gestion et en ingénieur de gestion, FUNDP. Ce public est constitué d'étudiants inscrits durant l'année académique 2010-2011.

($P_{\textbf{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) **:** Étudiants en deuxième année de bachelier en ingéniorat de gestion, ULg. Ce public est constitué de 66 étudiants inscrits durant l'année académique 2008-2009.

($P_{\textbf{ULg-Éco-Bac2}_{10/11}}$) **:** Étudiants en deuxième année de bachelier en ingéniorat de gestion, ULg. Ce public est constitué d'étudiants inscrits durant l'année académique 2010-2011.

Le lecteur intéressé trouvera plus d'informations concernant les différents publics au moment de nos analyses et descriptions des dispositifs expérimentaux (voir les Chapitres 6, 8 et 9). Nous remarquons d'ores et déjà que, pour une même institution, nos expériences ont parfois porté sur différents publics. Nous sommes conscients des limites introduites dans nos analyses par cet état de fait mais les difficultés inhérentes à la collecte des données ne nous ont pas permis de faire autrement. En conséquence, il sera difficile à plusieurs reprises de comparer des résultats de différentes expérimentations entre-eux.

### Cours observés

Le choix des trois cours s'est effectué en fonction de nos manuels analysés. Ainsi, nous avons observé les trois cours, associés aux manuels ($M_{\text{UCL-Math}}$), ($M_{\text{ULg-Éco}}$) et ($M_{\text{UNa-Éco}}$) respectivement :

($C_{\textbf{UCL-Math}}$) MAT1122 Analyse mathématique 2, UCL, Louvain-la-Neuve, Belgique, le mardi 27 avril 2010 (8h30-10h30). Professeur : Prof. A.
Il s'agit du public ($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$) qui a assisté au cours observé. L'institution correspondante est $I_{\text{UCL-Math-Bac1}}$.

($C_{\textbf{ULg-Éco}}$) MATH0058-2 Mathématiques pour ingénieurs de gestion : partim II, ULg, Liège, Belgique, le jeudi 14 octobre 2010 (9h-10h30). Professeur : Prof. B.
Il s'agit du public ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{10/11}}$) qui a assisté au cours observé. L'institution correspondante est $I_{\text{ULg-Éco-Bac2}}$.

($C_{\textbf{UNa-Éco}}$) ECGE B151 Mathématiques pour l'économie et la gestion I, FUNDP, Namur, Belgique, le jeudi 5 mai 2011 (10h40-12h40). Professeur : Prof. C.[37]
Il s'agit du public ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{10/11}}$) qui a assisté au cours observé. L'institution correspondante est $I_{\text{UNa-Éco-Bac1}}$.

37. Ces notations, Prof. A., Prof. B. et Prof. C., seront utilisées tout au long de la thèse afin de préserver l'anonymat des professeurs observés.

Ainsi, notre sélection comporte un cours donné en sciences mathématiques ($C_{\text{UCL-Math}}$) et deux cours présentés en sciences économiques et ingéniorat de gestion (($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$)). Deux cours s'adressent à des étudiants en première année de bachelier (($C_{\text{UCL-Math}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$)), le cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) s'adresse à un public d'étudiants inscrits en deuxième année de bachelier. Chacun des cours se donne dans une université différente en Belgique.

### Expérimentations

Les différentes expérimentations réalisées au cours de cette thèse visent principalement à comparer les processus transpositifs dans les différentes institutions analysées. Les dispositifs expérimentaux sont décrits brièvement ci-dessous. On trouvera une description détaillée dans les différentes sections consacrées à ces expérimentations.

**Analyse des manuels :** Nous dégagerons, à partir de l'examen de cinq manuels universitaires, des praxéologies de référence autour du Théorème de Lagrange. Cette étape est nécessaire car le savoir à enseigner qui nous intéresse ne se trouve pas, à l'université, dans des programmes officiels mais plutôt dans ces manuels et supports de cours à disposition des étudiants. Ce sont ces textes qui définissent les contenus et les méthodes rencontrés ensuite en classe. Notons qu'il ne s'agit probablement pas du seul endroit où l'on trouve ce savoir à enseigner. Des manuels d'exercices, des compléments, etc. peuvent tout aussi bien contenir des éléments de ce savoir. La description des différentes *OM* dans les cinq manuels est réalisée à l'aide de la TAD et a eu lieu en 2011. (Voir Section 6.2)

**Analyse des cours :** L'analyse des cours observés est réalisée avec l'objectif de mettre en rapport les praxéologies mathématiques identifiées lors de l'analyse des manuels avec les praxéologies correspondantes vivant dans les enseignements en mathématiques et en économie. Ainsi, nous analyserons le savoir enseigné relatif au Théorème de Lagrange tel qu'il apparaît dans trois institutions observées à l'université ($I_{\text{UCL-Math-Bac1}}$, $I_{\text{ULg-Éco-Bac2}}$ et $I_{\text{UNa-Éco-Bac1}}$). Nous donnerons dans cette analyse une description du savoir qui est effectivement transmis aux étudiants et donc des praxéologies mathématiques que le professeur cherche à diffuser auprès de ses étudiants. (Voir Section 8.2)

**Questionnaire des enseignants :** Afin d'identifier le plus précisément possible l'environnement et les conditions de l'enseignement du Théorème de Lagrange, ainsi que les liens existant entre les manuels et les cours analysés, les résultats d'un questionnaire distribué au sein du groupe des professeurs sont exploités. Ce questionnaire comportait 27 questions ouvertes ou à choix multiples et a été proposé à 17 professeurs parmi lesquels 11 ont répondu. Les enseignants étaient tous concernés dans leur cours par le Théorème de Lagrange mais s'adressaient à des publics divers : étudiants de première ou deuxième année de bachelier, en mathématiques, mathématiques appliquées, économie ou ingénieur de gestion. Le questionnaire a été proposé en 2008 et les professeurs ont répondu par écrit. Notons que seuls deux des cinq auteurs des manuels analysés ont répondu ce qui rend difficile un regroupement des données en fonction des institutions concernées. (Voir Section 6.4 et Section 8.3.3)

**Jeu de rôle :** Dans l'enseignement, le jeu de rôle est un outil qui a pour objectif la mémorisation et l'apprentissage de savoirs par l'intermédiaire d'une situation dans laquelle les connaissances et les compétences des élèves sont sollicitées de manière active (Mucchielli, 1983 ; Noyé & Piveteau, 2000). Nous avons demandé aux 15 étudiants du public ($P_{\text{UNa-Math-Bac3}_{10/11}}$) de se baser sur un manuel pour construire une séquence de cours, destinée à des étudiants de Bac 1, portant sur le Théorème de Lagrange. Nous avons mis en place ce jeu de rôle pour identifier les rapports que des étudiants construisent vis-à-vis du rôle du professeur, mais aussi vis-à-vis d'un manuel de cours (un savoir à enseigner particulier). Nous espérons pouvoir :

1. Cerner l'état des connaissances à propos du Théorème de Lagrange chez les étudiants :
   - Quelles définitions retiennent les étudiants à propos de l'optimisation sous contraintes d'égalité ?
   - Quels moyens utilisent-ils pour expliquer et pour justifier le Théorème de Lagrange et les multiplicateurs de Lagrange ?
   - Quelle importance accordent-ils aux différents éléments praxéologiques intervenant dans les définitions, dans les explications, dans les théorèmes et dans les exercices relatifs au Théorème de Lagrange ?
2. Étudier la disponibilité des notions mentionnées ci-dessus chez les étudiants dans leur explications.
3. Observer les éventuelles difficultés que les étudiants rencontrent avec le Théorème de Lagrange (erreurs qui proviennent directement du Théorème de Lagrange et erreurs pouvant être dues à l'usage d'autres notions).

Les 15 étudiants ont été repartis en 6 groupes (3 groupes de 2 et 3 groupes de 3 personnes) travaillant chacun sur un des manuels suivants : ($M_{\text{UCL-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$). Ces trois manuels correspondent aux trois institutions $I_{\text{UCL-Math-Bac1}}$, $I_{\text{ULg-Éco-Bac2}}$ et $I_{\text{UNa-Éco-Bac1}}$. Au total nous avons eu deux exposés de cours par manuel. La durée maximale de l'exposé était fixée à 90 minutes au moment de la présentation orale. Il nous a malheureusement été impossible d'organiser les présentations devant de réels étudiants de Bac1. L'approche interactive entre l'étudiant-professeur et le professeur-étudiant était donc fortement limitée. Les résultats de nos analyses sont présentés à la suite des analyses de cours. (Voir Section 8.6)

**Question d'examen :** Recueillir des productions d'étudiants à l'examen (réponses à une tâche de type $T_{22}$) afin de pouvoir identifier les types de réponses et de techniques appliquées, ainsi que d'inférer sur des difficultés éventuelles dans la résolution de tâches procédurales, telle était notre souhait pour compléter notre analyse des processus transpositifs du Théorème de Lagrange. Nous avons donc tenté de mettre en place visant à identifier les éléments du savoir appris qui semblent être indépendants, ou au contraire dépendants, de l'$OD$ à laquelle les étudiants sont confrontés. Nous n'avons pu soumettre une question d'examen que dans les institutions auxquelles nous avions accès au moment de l'évaluation finale. La question d'examen créée a ainsi été soumise aux étudiants des publics ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) et ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) dans le cadre de l'examen de première session. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les deux publics sont dans la même filière d'études et reçoivent le même type d'enseignement de mathématiques mais ont des enseignants différents et ne sont pas dans la même année d'études (le public ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) est en deuxième année de formation et a donc déjà suivi plus d'heures de mathématiques à l'université que le public ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$)). Nous distinguerons les deux publics dans nos analyses pour rendre compte de particularités de l'*OD* empirique qui se trouve derrière les réponses recensées. Malheureusement, nous n'avons pas pu soumettre une question d'examen dans les institutions $I_{\text{Math}}$. Ce manque de données rend une comparaison directe entre les institutions $I_{\text{Math}}$ et $I_{\text{Éco}}$ impossible. (Voir Section 9.2)

**Questionnaire des étudiants :** Afin de confronter les différentes *OD* empiriques que nous avons observées dans $I_{\text{UCL-Math-Bac1}}$, $I_{\text{ULg-Éco-Bac2}}$ et $I_{\text{UNa-Éco-Bac1}}$ aux attitudes et comportements des étudiants, les résultats d'un questionnaire distribué auprès des étudiants ont été utilisés. Ce questionnaire était basé sur le questionnaire distribué au sein des professeurs et comportait soit 14, soit 11 questions ouvertes ou à choix multiples en fonction du public. Il a été proposé aux étudiants des publics suivants : ($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$), ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) et ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$).
Ainsi, 255 étudiants inscrits dans des études économiques ont répondu au questionnaire comportant 14 questions et 33 étudiants inscrits en sciences mathématiques ont répondu à celui comportant 11 questions. La différence du nombre de questions est liée aux divergences entre les manuels et les cours qui sont adressés aux différents publics. Notons les différences entre les années de passation du questionnaire et celles de l'observation des cours qui rendent une confrontation entre nos observations dans $I_{\text{UCL-Math-Bac1}}$, $I_{\text{ULg-Éco-Bac2}}$ et $I_{\text{UNa-Éco-Bac1}}$ et les résultats du questionnaire difficile. (Voir Section 9.4)

**Travail de groupe traitant la preuve du Théorème de Lagrange :** Le Chapitre 4 s'intéressant entre autres aux différentes justifications du Théorème de Lagrange, nous avons profité d'un travail de groupe en troisième bachelier en sciences mathématiques pour nous intéresser aux perceptions des étudiants face aux différentes preuves. En effet, l'activité de démonstration occupe une place importante dans l'univers mathématique, et, de ce fait, se trouve au cœur de la réalité des étudiants qui sont confrontés aux cours de mathématiques à l'université. Les résultats de ce travail de groupe, réalisé par les 17 étudiants du public ($P_{\text{UNa-Math-Bac3}_{08/09}}$) sont présentés pour compléter nos analyses. Nous espérons pouvoir inférer sur l'importance que les étudiants accordent à l'activité de démontrer en mathématiques et en économie. Notons que nous nous intéressons dans cette partie de notre travail aux avis des étudiants. Nous entrons donc dans le domaine des perceptions et des préjugés (Maaß & Schlöglmann, 2009) qui nous apporte certes des éclairages intéressants, mais ne nous permet pas, à ce stade des expérimentations, de tirer des conclusions générales et nous éloigne donc du point de vue institutionnel annoncé. (Voir Section 9.3)

En conclusion, il est clair qu'un premier niveau de difficulté de la recherche réalisée dans cette thèse tient à la multiplicité des institutions auxquelles nous avons été confrontés. Ainsi, différents professeurs, différents étudiants, différentes années et différentes filières ont été analysés. D'un côté, cela rend possible un regard très large sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange dans les institutions mathématique et économique. D'autre part, il convient de prendre des précautions dans l'interprétation des résultats. Cependant, nous espérons que nos analyses permettront de situer le Théorème de Lagrange dans différentes institutions et de rendre compte des différentes contraintes et des processus transpositifs ayant lieu dans la formation des futurs mathématiciens et économistes.

# Deuxième partie

# Présentation et discussion des résultats

Chapitre 4

# Le Théorème de Lagrange comme savoir savant

## Sommaire

> *Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme.* (Lagrange, 1811, p.i)

ENTRE la découverte de la technique pour résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité à la fin du 18$^{\text{ème}}$ siècle et les cours magistraux qui l'enseignent à l'heure actuelle, le savoir mathématique en question a évolué et changé de forme. Lagrange publie son principe pour maximiser une fonction à $n$ variables sous une ou plusieurs contraintes dans sa "Théorie des fonctions analytiques" en 1797 et depuis, des mathématiciens émanant de différents domaines mathématiques ont donné des formulations diversifiées (mais cohérentes et mathématiquement équivalentes) du Théorème, appelé aujourd'hui *Théorème de Lagrange* (en optimisation).

Nous nous interrogeons dans ce chapitre sur le point de départ de la transposition didactique qu'est le savoir savant. Nous nous intéressons à la formulation initiale du Théorème, à l'évolution de ce dernier au sein des mathématiques et à l'émergence de l'utilisation du Théorème dans l'économie mathématique. De plus, différentes justifications du Théorème de Lagrange seront explicitées dans le but de répondre à notre deuxième question de recherche. Ces considérations nourriront notre modèle épistémologique de référence et, en même temps, permettront de définir le savoir à enseigner. Notons qu'il n'est pas possible dans le cadre de notre étude d'explorer toutes les institutions productrices des savoirs et savoir-faire auxquelles pourrait se référer un enseignement du Théorème de Lagrange. En conséquence, nous choisissons de présenter seulement les savoirs les plus influents sur l'enseignement du Théorème de Lagrange dans les institutions observées par la suite. Ce choix a été fait en relation avec les manuels universitaires analysés et avec les publics qui ont participé à nos expérimentations.

## 4.1 Rappels mathématiques

Comme expliqué précédemment, le Théorème de Fermat (Théorème 1.5.4) a fourni une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local d'une fonction réelle $f$ qui n'est soumise à aucune contrainte. Le Théorème de Lagrange (Théorème 1.5.9) de son côté donne une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local d'une fonction $f$ qui est soumise à des contraintes d'égalité. La présente section rappelle les notions mathématiques qui seront rencontrées dans l'analyse du savoir savant.

Soit le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité

$$(P_E)\ \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, k\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. L'ensemble admissible est donc donné sous la forme

$$C = \{x \in \mathcal{U} \,|\, g(x) = 0\}, \tag{4.2}$$

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est la fonction regroupant toutes les fonctions $g_i$, $i = 1, \ldots, k$.

En utilisant ces notations et en choisissant la condition de régularité *(QC-IL)* (Définition 1.5.2) comme condition suffisante de la qualification de contraintes, le Théorème de Lagrange peut être formulé comme suit :

**Théorème 4.1.1 (Théorème de Lagrange)**
*Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et soient $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ $(n \geq k)$. Supposons que $x^*$ est un extremum local du problème $(P_E)$. Supposons en plus que la matrice Jacobienne $J_g(x^*)$ est de rang $k$. Alors il existe un vecteur $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*) \in \mathbb{R}^k$ vérifiant*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0. \tag{4.3}$$

Supposer le rang plein de cette matrice revient intuitivement à supposer que les gradients $\nabla g_i$ forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants au point $x^*$. Autrement dit, les gradients $\nabla g_i$ engendrent un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k$. L'hypothèse sur le rang de la matrice Jacobienne revient alors à dire que $x^*$ est un point régulier (Définition 1.5.3) des contraintes $g(x) = 0$ et joue un rôle important dans la construction des preuves du Théorème de Lagrange. Le lien avec l'algèbre linéaire nous laisse dès maintenant affirmer qu'une bonne connaissance de cette dernière discipline est indispensable (outre la connaissance du calcul différentiel) dans la compréhension (ou plutôt dans l'explication et l'interprétation) du Théorème de Lagrange. Enfin, remarquons encore que nous pouvons formuler la thèse du Théorème en utilisant les notations définies auparavant :

$$\nabla f(x^*) + J_g(x^*)^T \lambda^* = 0.$$

Par la suite, nous référons à l'*approche standard*, $\theta_{L_{stand}}$[38], lorsque nous évoquons la forme particulière ci-dessus du Théorème de Lagrange.

Une autre forme du Théorème de Lagrange, qui sera dénommée dans la suite *approche par fonction lagrangienne*, $\theta_{L_{flagr}}$[39], peut être donnée et trouve son origine dans les œuvres de Lagrange. Soit le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité $(P_E)$ comme défini ci-dessus. Nous définissons la *fonction lagrangienne* comme suit :

**Définition 4.1.1 (Fonction lagrangienne)**
*Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle* fonction lagrangienne associée *à* $f$ et $g$ *la fonction $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x) \,,$$

*où $x \in \mathbb{R}^n$ et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ et $(g_i)_{1 \leq i \leq k}$ désignent respectivement les composantes du vecteur $\lambda$ de $\mathbb{R}^k$ et de la fonction $g$.*

38. L'approche du Théorème de Lagrange est *standard* dans le sens où elle est habituellement présentée dans les manuels de cours. Elle est notée par l'indice "stand".

39. L'approche du Théorème de Lagrange par "fonction lagrangienne" sera notée par l'indice "flagr".

À l'aide de cette définition, le Théorème de Lagrange se formule de la façon suivante :

**Théorème 4.1.2**
*Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et soient $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ $(n \geq k)$. Supposons que $x^*$ est un extremum local du problème $(P_E)$. Supposons en plus que la matrice Jacobienne $J_g(x^*)$ est de rang $k$. Alors il existe un vecteur $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*)$ de $\mathbb{R}^k$ tel que le point $(x^*, \lambda^*)$ est un point stationnaire de la fonction lagrangienne $\mathcal{L}$. Les composantes du vecteur $\lambda^*$ sont les multiplicateurs de Lagrange.*

En effet, on remarque que le système d'équations formé de l'équation 4.3

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$$

et des contraintes d'égalité $g(x^*) = 0$ constitue un système d'équations en les inconnues $x^*$ et $\lambda^*$. En utilisant la définition de la fonction lagrangienne, on peut réécrire ce système comme suit :

$$\begin{aligned}
\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) &= \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0\,, \\
\nabla_\lambda \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) &= g(x^*) = 0\,,
\end{aligned}$$

ce qui revient à dire que $\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$ ou encore que le point $(x^*, \lambda^*)$ est un point stationnaire de la fonction lagrangienne $\mathcal{L}$.

Nous passons maintenant à l'évolution historique du Théorème de Lagrange et des notions s'y rapportant.

## 4.2 L'origine du Théorème de Lagrange

A la fin du $18^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Joseph Louis Lagrange (1736-1813) figure sans doute parmi les mathématiciens les plus connus à l'époque. Il a laissé d'importants travaux concernant la théorie des nombres, les fonctions, les équations algébriques, les équations différentielles, la mécanique et le calcul des variations. Le *calcul des variations*[40] lui doit d'ailleurs sa formulation générale grâce à un apport purement analytique. L'œuvre phare de Lagrange, "Mécanique analytique" (Lagrange, 1811), résumant sous une forme rigoureuse toutes les connaissances acquises en mécanique depuis Newton, est une approche entièrement algébrique de la mécanique, qui a annoncé et préparé la grande révolution conceptuelle de l'algèbre au siècle suivant. C'est dans ce célèbre livre qu'il introduit les multiplicateurs de Lagrange pour la première fois.

Il peut paraître bizarre que le monde mathématique se soit attaqué aux problèmes d'optimisation dans l'espace infini des fonctions réelles (calcul des variations) avant de

40. Le *calcul des variations* (ou *calcul variationnel*) est un ensemble de méthodes pour trouver une solution $y(x)$ au problème suivant : déterminer quelle fonction, parmi une certaine classe donnée, minimise ou maximise une intégrale donnée (une *fonctionnelle*).

traiter la question plus facile des extrema d'une fonction à deux variables réelles par exemple. Une raison possible en est que la notion de *fonction* n'est à cette époque pas encore formalisée telle que nous la connaissons aujourd'hui. La définition non-formelle suivante en est l'illustration :

> *On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.* (Lagrange, 1813, p.1)

Nous nous attendons donc à une formulation "littéraire" du Théorème de Lagrange dans les travaux originaux de Lagrange. Curieusement, il n'a pas donné la formulation initiale de sa méthode des multiplicateurs de Lagrange dans le contexte de l'optimisation avec contraintes, mais dans le cadre d'un problème de statique, à savoir l'étude des conditions d'équilibre d'un système de particules (système dynamique) soumis à des conditions données par la nature du système. Dans la quatrième section de "Mécanique analytique", Lagrange propose de déduire de la résolution du problème d'équilibre

> *des formules analytiques qui renferment la solution de tous les problèmes sur l'équilibre des corps, [...] en réduisant en quelque manière tous les cas à celui d'un système entièrement libre.* (Lagrange, 1811, p.44)

### 4.2.1 Première écriture de la méthode des multiplicateurs

L'idée de la règle des multiplicateurs réside dans l'étude du problème de statique comme exposé dans la première partie de "Mécanique analytique" (Lagrange, 1811, pp.44-49).

Soit un système de particules ayant comme coordonnées "$x$, $y$, $z$ ; $x'$, $y'$, $z'$ ; etc." Lorsque le système est contraint aux conditions "$L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc.", la formule générale d'un équilibre du système est donnée par

$$\text{"}Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} = 0\text{"},$$

où $P$ (respectivement $Q$ et $R$) est la force agissant sur le point $(x, y, z)$ avec un déplacement virtuel $dp$ (respectivement $dq$ et $dr$), etc. (Lagrange appelle les quantités $Pdp$, $Qdq$, $Rdr$, etc. "moments"). Pour résoudre cette équation, Lagrange procède par substitution des variables (élimination des variables en utilisant les conditions du système) et trouve finalement des identités que l'équilibre du système doit satisfaire. Cependant, il remarque lui-même que

> *l'élimination immédiate des variables ou de leurs différences, par le moyen des équations de condition, peut conduire à des calculs trop compliqués* (Lagrange, 1811, p.45)

et propose de présenter la même méthode sous une forme plus simple, introduisant ainsi la méthode des multiplicateurs.

> *De là résulte donc cette règle extrêmement simple pour trouver les conditions de l'équilibre d'un système quelconque proposé. On prendra la somme des* moments *de toutes les puissances qui doivent être en équilibre, et on y ajoutera les différentes fonctions différentielles qui doivent être nulles par les conditions du problème, après*

> *avoir multiplié chacune de ces fonctions par un coefficient indéterminé ; on égalera le tout à zéro, et l'on aura ainsi une équation différentielle qu'on traitera comme une équation ordinaire* de maximis et minimis, *et d'où l'on tirera autant d'équations particulières finies qu'il y aura de variables ; ces équations étant ensuite débarrassées, par l'élimination, des coefficients indéterminés, donneront toutes les conditions nécessaires pour l'équilibre.*
> *L'équation différentielle dont il s'agit sera donc de la forme,*
>
> $$Pdp + Qdq + Rdr + etc. + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + etc. = 0\,,$$
>
> *dans laquelle $\lambda$, $\mu$, $\nu$, etc. sont des quantités indéterminées ; nous la nommerons dans la suite,* équation générale de l'équilibre.
> *Cette équation donnera, relativement à chaque coordonnée, telle que $x$, de chacun des corps du système, une équation de la forme suivante :*
>
> $$P\frac{dp}{dx} + Q\frac{dq}{dx} + R\frac{dr}{dx} + etc. + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + etc. = 0\,;$$
>
> *en sorte que le nombre de ces équations sera égal à celui de toutes les coordonnées des corps. Nous les appellerons* équations particulières de l'équilibre. (Lagrange, 1811, pp.46)

Dans la suite de cette section, Lagrange applique sa méthode à la "formule de l'équilibre des corps continus, dont tous les points sont tirés par des forces quelconques" (Lagrange, 1811, pp.49-58) et tente une analogie des problèmes de ce genre avec ceux *de maximis et minimis* (des problèmes d'optimisation qui cherchent les maxima et minima de fonctions). Notons que, dû au fait que Lagrange était à la fois mathématicien et physicien, nous retrouvons une raison d'être du Théorème de Lagrange qui est extérieure aux mathématiques.

## 4.2.2 Applications à d'autres problèmes

Après avoir développé la technique des multiplicateurs dans le domaine de la mécanique analytique pour étudier l'équilibre d'un système de particules, Lagrange l'introduit aussi dans d'autres contextes, notamment dans celui du calcul des variations. Le lecteur intéressé est renvoyé au chapitre 19 du livre (Fraser, 2005) pour trouver une explication détaillée des problèmes du calcul variationnel traités par Lagrange.

Un autre champ d'application de la méthode des multiplicateurs est présenté dans la "Théorie des fonctions analytiques" de Lagrange, publiée en 1797, et est d'un intérêt particulier pour notre recherche. Lagrange applique dans la seconde partie de son ouvrage, chapitre XII, sa technique aux problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité, c'est-à-dire à la recherche des minima et maxima de fonctions de plusieurs variables $f(x, y, z, \dots)$ sous contrainte que $\phi(x, y, z, \dots) = 0$. Ce principe pour maximiser une fonction à $n$ variables sous une ou plusieurs contraintes, généralise alors la condition nécessaire d'optimalité de Fermat. En plus, il s'applique non seulement à des fonctions du plan mais également à des fonctions définissant des courbes, des surfaces curvilignes et leurs généralisations multi-dimensionnelles. Il s'annonce comme suit :

> *On peut les réduire à ce principe général. Lorsqu'une fonction de plusieurs variables doit être un maximum ou minimum, et qu'il y a entre ces variables une ou plusieurs équations, il suffira d'ajouter à la fonction proposée les fonctions, qui doivent être nulles, multipliées chacune par une quantité indéterminée, et de chercher ensuite le maximum ou minimum comme si les variables étaient indépendantes ; les équations que l'on trouvera combinées avec les équations données, serviront à déterminer toutes les inconnues.* (Lagrange, 1813, p.268)

Bien que le terme *multiplicateur de Lagrange* soit celui utilisé le plus fréquemment à l'heure actuelle, le terme utilisé durant les 19ème et 20ème siècles est *multiplicateur indéterminé*[41]. L'approche proposée par Lagrange suggère l'utilisation de la fonction lagrangienne comme fonction définie à l'aide de la fonction objectif et des contraintes. C'est la raison pour laquelle nous référons par la suite à l'*approche par fonction lagrangienne* pour parler de cette forme particulière du Théorème de Lagrange.

Continuant notre progression historique, nous constatons que les deux siècles suivants n'apportent plus guère de résultats purement théoriques dans le domaine de l'optimisation. Néanmoins, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) propose une méthode de résolution itérative pour des problèmes de minimisation de fonctions à plusieurs variables sans contraintes. Cette méthode est publiée dans l'article "Méthodes générales pour la résolution des systèmes d'équations simultanées" en 1847 et porte le nom de *méthode du gradient.*

Cependant, c'est à cette époque que les méthodes mathématiques, et en particulier la méthode des multiplicateurs de Lagrange, font leur percée en économie comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

Il faut par contre attendre la Seconde Guerre mondiale pour retrouver le besoin de rechercher des méthodes qui solutionnent un nouveau type de problèmes d'optimisation, celui des problèmes sous contraintes d'inégalité.

## 4.3 Le Théorème de Lagrange et l'économie mathématique

L'application des mathématiques au service d'autres disciplines scientifiques nous fait penser en premier lieu à la longue et intense collaboration entre les mathématiques et la physique. D'autres collaborations sont plus nouvelles. Par exemple, les rapports entre les mathématiques et les sciences humaines sont beaucoup plus récents en raison de la grande complexité des phénomènes humains et du plus grand nombre de paramètres présents dans les problèmes de sciences humaines. Dans cette thèse, nous nous intéressons à un domaine particulier des sciences humaines : l'économie. En effet, lorsqu'on analyse les apparitions du Théorème de Lagrange dans l'enseignement universitaire, le domaine de l'économie devient incontournable. C'est pourquoi nous nous intéressons à l'histoire des mathématiques en économie, et plus particulièrement au Théorème de Lagrange comme *savoir fondamental*[42]. Cette histoire débute avec un ouvrage pionnier, paru en 1838, les

41. Voir par exemple (Courant, 1937, pp.190-192).
42. Artaud (2003) définit un savoir fondamental comme suit :

> *Étant donné un savoir $S$, il existe ordinairement des savoirs $S'$, $S''$, etc., utilisés de*

"Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses" (Cournot, 1838), dont l'auteur est Antoine Augustin Cournot (1801-1877).

Jusqu'au 19ème siècle, les économistes raisonnent de façon essentiellement littéraire. A cette époque Antoine Augustin Cournot, mathématicien inspiré par les travaux de Laplace et Leibniz, est persuadé de la nécessité d'utiliser les mathématiques en économie. Dans la préface de son plus célèbre livre, il exprime que l'économie est probablement la science qui a le plus besoin des mathématiques et que c'est l'économie qui a le plus négligé les mathématiques jusque là. Dans cet ouvrage, Cournot parvient à réunir les idées mathématiques existantes avec les théories de l'économie politique et, en cela, peut être vu comme le fondateur de l'économie mathématique. Trente ans plus tard, Walras et Jevons créent, simultanément mais indépendamment, le concept d'*utilité marginale* et favorisent ainsi l'offensive de l'économie mathématique.

### 4.3.1 Premières applications du Théorème de Lagrange en économie

En économie, plusieurs problèmes fondamentaux se ramènent à optimiser une fonction particulière tout en respectant certaines contraintes. Ainsi un consommateur souhaitera-t-il maximiser sa satisfaction, modélisée par sa fonction d'utilité, tout en étant limité par des contraintes budgétaires. De même un producteur cherchera à minimiser son coût de production en étant astreint à produire une quantité définie. Ce genre de problème se modélise dans beaucoup de cas par un problème d'optimisation avec contraintes d'égalités pour lequel la méthode de Lagrange fournit une méthode de résolution. Nous nous attendons donc à trouver des traces dans la littérature de l'emploi de cette méthode en économie mathématique.

Effectivement, la première utilisation de la méthode de Lagrange a été publiée en 1876 par Westergaard dans le journal "Tidsskrift for Mathematik" et est intitulée "Den moralske formue og det moralske haab" (Westergaard, 1876), soit presque cent ans après la publication de la "Mécanique analytique" de Lagrange. Westergaard utilise la méthode des multiplicateurs pour résoudre le problème du *plus grand bonheur du plus grand nombre*[43]. Pour plus d'informations concernant les premières utilisations du Théorème de Lagrange en économie, le lecteur intéressé est renvoyé aux articles (Creedy, 1980 ; Davidsen, 1986 ; Harris, 2007).

Notons que pendant longtemps Edgeworth a été considéré comme le premier à avoir

> *fait pour produire ce savoir et/ou pour le mettre en œuvre (comme système de production de connaissances). [...] Nous dirons alors que, lorsqu'un savoir $S$ entretient avec des savoirs $S'$, $S''$, etc., des relations du style évoqué plus haut, les savoirs $S'$, $S''$, etc. sont des savoirs fondamentaux pour $S$.* (Artaud, 2003, p.1)

Plus loin, elle affirme que

> *le fait que les mathématiques sont un savoir fondamental, notamment pour l'économie et pour la physique, se concrétise dans l'existence de praxéologies qui mêlent mathématiques et une autre discipline.* (Artaud, 2003, p.2)

43. Appellation d'un problème économique important par les utilitaristes classiques comme Mill et Bentham. Voir (Guibet Lafaye, 2009).

utilisé la méthode de Lagrange dans ses publications "New and Old Methods of Ethics" (1877) et "Mathematical Psychics" (1881). Dans le premier, Edgeworth discute, en termes mathématiques, la nature de la fonction d'utilité (à savoir de la fonction objectif) du problème du *plus grand bonheur du plus grand nombre* et fait remarquer que la dérivée première est positive et la dérivée seconde négative. Plus loin dans la résolution du problème, il applique la méthode de Lagrange sans pour autant définir les multiplicateurs de Lagrange et expliquer la méthode. Curieusement, c'est le même problème économique qui amène Westergaard et Edgeworth à utiliser la méthode de Lagrange. Quatre ans après la première publication d'Edgeworth, le second problème d'optimisation considéré par ce dernier est de maximiser la fonction d'utilité d'une personne en gardant celle d'une deuxième personne constante. A nouveau, la méthode des multiplicateurs de Lagrange apporte une solution au problème, renforçant l'idée que les mathématiques peuvent confirmer la théorie économique de façon élégante et scientifique.

Sachant que Lagrange a publié sa méthode des multiplicateurs de Lagrange pour la première fois en 1788, nous constatons qu'à peine un siècle a été nécessaire pour que la théorie de l'optimisation se mette au service de l'économie. Depuis cette période, l'optimisation est devenue un pilier des mathématiques appliquées et le foisonnement des techniques est tel qu'il ne saurait être résumé en quelques lignes.

Ajoutons à ce propos encore une remarque concernant cette "utilisation" des mathématiques en économie. Si les mathématiques constituent, a priori, un savoir fondamental pour l'économie, il n'en reste pas moins vrai que les recherches en économie ont à leur tour provoqué le développement de certaines disciplines purement mathématiques par la suite. La recherche opérationnelle, par exemple, domaine qui est apparu au 20$^{\text{ème}}$ siècle avec la Seconde Guerre mondiale, a, depuis ces dernières décennies, un impact énorme sur la programmation mathématique ou encore sur les théories des graphes.

## 4.4 La condition de régularité

Comme toute technique classique de raisonnement, un théorème en mathématiques se développe souvent par la mise en parallèle d'une thèse et de son antithèse pour tenter ensuite de dépasser la contradiction qui en résulte au niveau d'une synthèse finale. Cette forme de raisonnement trouve son expression dans le célèbre *plan dialectique* dont la structure est *thèse-antithèse-synthèse*[44]. Il en est ainsi pour le Théorème de Lagrange. Le principe établi par Lagrange peut être considéré comme la thèse. Les premières applications du Théorème de Lagrange (en mathématiques et en économie) aboutissent à la construction d'exemples qui contredisent le Théorème de Lagrange. Il s'agit de l'antithèse qui met en défaut le Théorème de Lagrange. La condition de régularité, ou encore la condition de qualification des contraintes qui n'était pas présente dans les travaux originaux de Lagrange, constitue l'élément qui permet d'écrire et de valider à nouveau l'énoncé du Théorème de Lagrange comme il est connu à l'heure actuelle. En effet, nous considérons la condition de régularité comme l'élément qui a garanti la synthèse.

44. "Je pose (thèse), j'oppose (antithèse) et je compose (synthèse) ou dépasse l'opposition".

### 4.4.1 Mise en défaut du Théorème de Lagrange

Bien qu'il ne soit probablement pas le premier mathématicien qui s'en soit rendu compte, nous nous référons au livre de Courant (1937, pp.188-203) pour une analyse de la condition de régularité dans un contexte historique.

En effet, Courant fait remarquer que la conclusion du Théorème de Lagrange

> *may fail, e.g. when the curve $\psi = 0$ has a singular point, say a cusp [...], at the point $(\eta, \nu)$ which it meets a curve $f = c$ with the greatest or the least possible c. In this case, however, we have both*
>
> $$\psi'_x(\eta,\nu) = 0 \text{ and } \psi'_y(\eta,\nu) = 0\,.$$
>
> (Courant, 1937, pp.189-190)

Courant donne l'illustration suivante (Figure 4.1) de cette remarque (Courant, 1937, p.190) et en tient compte pour énoncer le Théorème de Lagrange.

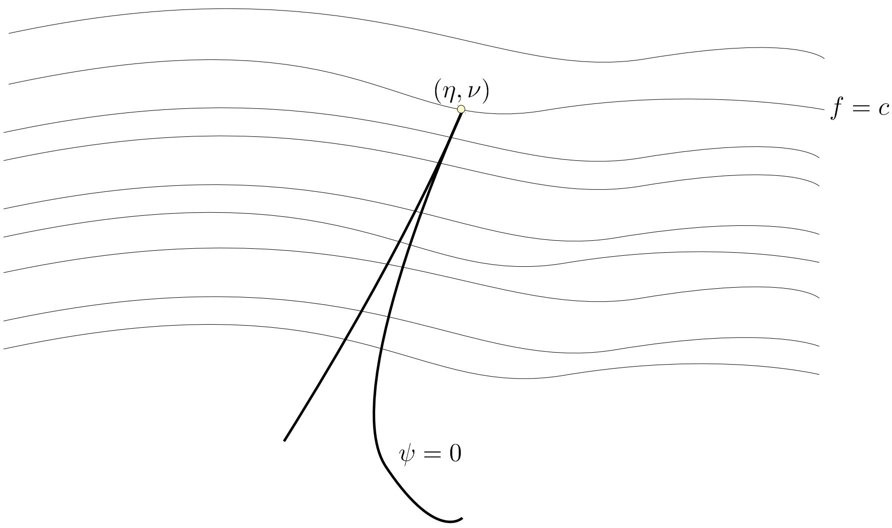



FIGURE 4.1 – Extremum sous contraintes en un point singulier de la courbe $\psi = 0$

> *In order that an extreme value of the function $f(x, y)$ may occur at the point $x = \eta, y = \nu$ with the subsidiary condition $\psi(x, y) = 0$, the point $(\eta, \nu)$ being such that the two equations*
>
> $$\psi'_x(\eta,\nu) = 0 \text{ and } \psi'_y(\eta,\nu) = 0$$
>
> *are* not *both satisfied, it is necessary that there should be a constant of proportionality such that the two equations*
>
> $$f'_x(\eta,\nu) + \lambda\psi'_x(\eta,\nu) = 0 \text{ and } f'_y(\eta,\nu) + \lambda\psi'_y(\eta,\nu) = 0$$
>
> *are satisfied, together with the equation*
>
> $$\psi(\eta,\nu) = 0\,.$$
>
> (Courant, 1937, p.190)

Après avoir prouvé la "méthode des multiplicateurs indéterminés", il présente l'exemple analytique qui montre l'importance de la condition de régularité, à savoir

$$(P)\ \begin{cases} \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} & x^2+y^2 \\ \text{SC} & g(x,y)=0\,, \end{cases}$$

où $g(x,y) = (x-1)^3 - y^2$. Donnons quelques éléments de résolution pour comprendre l'enjeu de la condition de régularité. La distance la plus courte entre l'origine est le point de la courbe $(x-1)^3 - y^2 = 0$ est obtenue pour le point $(1,0)$ comme on peut s'en apercevoir sur le graphique de la Figure 4.2.

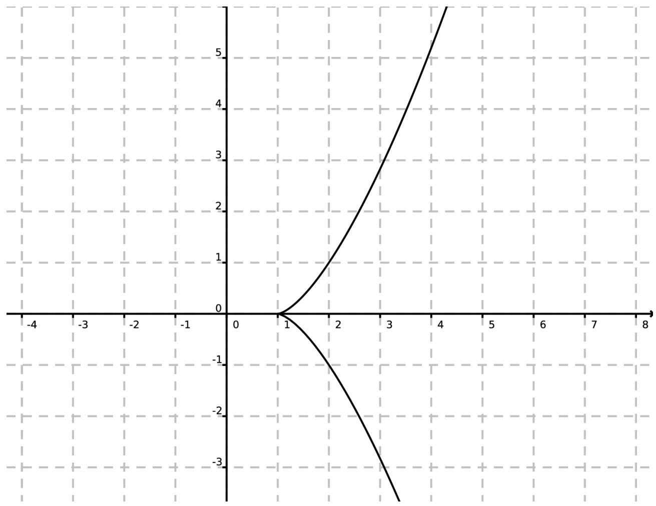


FIGURE 4.2 – Représentation de la courbe $(x-1)^3 - y^2 = 0$

Ce point $(x,y) = (1,0)$, minimum du problème d'optimisation sous contrainte d'égalité, vérifie l'équation $g(1,0) = 0$. Cependant, comme

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x-1)^2 \\ -2y \end{pmatrix}\,,$$

nous observons que $f'_y(1,0) - \lambda g'_y(1,0) = 0$ quelque soit la valeur qu'on attribue à $\lambda$ tandis que $f'_x(1,0) - \lambda g'_x(1,0) = 2 \neq 0$ ! La conclusion du Théorème de Lagrange n'est donc pas vérifiée. En effet, le point $(1,0)$ est un point singulier de la contrainte étant donné le fait que $\nabla g(1,0) = (0,0)$. La contrainte de régularité n'étant donc pas satisfaite, le Théorème de Lagrange ne s'applique pas.

Quant à la généralisation aux problèmes d'optimisation sous plusieurs contraintes d'égalité, Courant introduit la matrice Jacobienne des contraintes qui permet d'énoncer la condition de régularité (Courant, 1937, p.198). Enfin, notons que Courant est soucieux du fait que la méthode des multiplicateurs de Lagrange fournit seulement une condition nécessaire d'optimalité.

> *The rule gives us an elegant formal method for determining the points where extremal values occur, but it merely gives us a* necessary condition. *The further question arises whether and when the points which we find by means of the multiplier method do actually give us a maximum or a minimum of the function.* (Courant, 1937, p.198)

Une autre possibilité de gérer les points singuliers est considérée dans la section suivante.

### 4.4.2 Méthode des multiplicateurs de Carathéodory

Au $20^{\text{ème}}$ siècle, la méthode des multiplicateurs de Lagrange voit apparaître les apports de Carathéodory (1935). Mathématicien grec, auteur d'importants travaux en théorie des fonctions à variables réelles, calcul des variations et théorie de la mesure, Carathéodory met en avant l'importance de la règle des multiplicateurs pour l'optimisation et établit des conditions nécessaires d'optimalité qui ne supposent aucune hypothèse de régularité. En particulier, sa condition nécessaire d'optimalité pour des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité s'énonce comme suit :

**Théorème 4.4.1 (Méthode des multiplicateurs de Carathéodory)** (Pourciau, 1980, p.441)
*Suppose $U$ is an open subset of $\mathbb{R}^n$, and $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_q$ are $q+1$ real functions on $U$, each strongly differentiable at $a \in U$. Whenever $a \in U$ minimizes $\psi_0$ subject to the equality constraints $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_q = 0$ some nonzero $l = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ in $\mathbb{R}^{q+1}$ satisfies*

1. *if $\psi = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i \psi_i$, then $\psi'(a) = 0$ and*
2. *$\lambda_0 \geq 0$.*

L'article de Pourciau (1980) détaille clairement les liens que les mathématiciens ont établi entre les différentes conditions d'optimalité nécessaires pour l'optimisation avec contraintes et le lecteur intéressé par les développements mathématiques est renvoyé à cet article pour de plus amples informations. Notons encore que Pourciau présente le Théorème de Lagrange comme corollaire de la méthode des multiplicateurs de Carathéodory :

**Théorème 4.4.2 (Euler-Lagrange Multiplier Rule)** (Pourciau, 1980, p.441)
*If the derivatives $\psi_1'(a), \ldots, \psi_q'(a)$ are linearly independent, then the conclusions of the Carathéodory Multiplier Rule hold with a positive $\lambda_0$.*

Nous retrouvons la condition de régularité qui a été mise en avant par Courant et qui est présente à l'heure actuelle dans presque toutes les œuvres traitant l'optimisation sous contraintes d'égalité.

## 4.5 Le multiplicateur de Lagrange comme objet mathématique

Nous tâchons maintenant d'étudier le concept de multiplicateur de Lagrange comme élément du savoir savant. Historiquement, il a fallu attendre le $20^{\text{ème}}$ siècle pour que réapparaisse la nécessité de développer les théories de l'optimisation. Ces recherches, plutôt récentes, menèrent à des avancées en théorie de la dualité et favorisèrent ainsi le développement du multiplicateur de Lagrange comme objet mathématique à part entière.

Comme mentionné à la fin de la première section de ce chapitre, c'est durant la Seconde Guerre mondiale que des équipes de chercheurs anglais, et plus tard américains, rencontrèrent de nombreuses questions - qualifiées aujourd'hui de problèmes de programmation linéaire - liées à l'allocation des ressources des armées, tant humaines que matérielles. En même temps, les développements techniques et économiques apportèrent rapidement des problèmes de décision complexes dans tous les domaines économiques. Par conséquent, les méthodes classiques de détermination des décisions optimales ne suffisaient plus.

De ces questions naissent la *programmation linéaire*, domaine central de l'optimisation à l'heure actuelle, et la *recherche opérationnelle* (RO), discipline visant à résoudre scientifiquement des problèmes d'implantation dans les entreprises et les administrations. La recherche opérationnelle propose des modèles pour analyser les situations complexes et permet aux décideurs de faire les choix les plus efficaces.

Cette naissance de la programmation linéaire fait avancer la théorie de l'optimisation et on assiste rapidement à la découverte du résultat qui permet de caractériser une solution d'un problème d'optimisation non-linéaire avec contraintes d'inégalité. En 1951, Harold William Kuhn (1925- ), mathématicien et économiste américain, et Albert William Tucker (1905-1995), mathématicien américain, présentent leur travail intitulé "Nonlinear programming" [45] au Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Cet article donne des conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes d'optimisation non-linéaire avec contraintes non-linéaires. En démontrant le théorème qui porte aujourd'hui leur nom, Kuhn et Tucker écrivent les fondements théoriques de cette branche de l'optimisation. Notons qu'en 1939, William Karush (1917-1997), mathématicien américain, avait en réalité déjà démontré ce même théorème dans un mémoire de maîtrise inédit à l'University of Chicago.

Au même moment de l'histoire, l'intérêt pour la programmation linéaire est vif et commence même à se propager à différents secteurs économiques. Le mathématicien John von Neumann (1903-1957), entre autres, aide à perfectionner le processus de résolution des problèmes de programmation linéaire et la théorie correspondante, mais réussit aussi à mettre la programmation linéaire en rapport avec la théorie des jeux. C'est le développement de la théorie de von Neumann qui apporte un nouvel élément du Théorème de Lagrange en tant que savoir savant.

### 4.5.1 Variable duale

Initialement, la notion de dualité en optimisation est introduite par von Neumann en octobre 1947 lors de conversations avec George Dantzig (1914-2005), un des développeurs d'un premier modèle de programmation linéaire et d'un processus général de résolution : la méthode du simplexe. Quelques semaines plus tard, von Neumann publie un papier reprenant implicitement l'idée de la dualité. Le mérite d'avoir démontré rigoureusement pour la première fois le "Théorème de la dualité" revient à Dantzig bien que cette preuve ne soit pas publiée. C'est pourquoi nous mentionnons aujourd'hui les noms de Gale, Kuhn et Tucker comme mathématiciens ayant formulé et prouvé rigoureusement le Théorème de la dualité en 1951 (Gale, Kuhn, & Tucker, 1951). Les propriétés fondamentales des problèmes de dualité sont définies par Gale en 1956 et Goldman et Tucker en 1951.

Nous donnons une brève explication du concept de la dualité en optimisation. Soit le problème d'optimisation de départ, appelé problème primal, de minimiser une fonction objectif $f(x)$ sous la contrainte $g(x) = 0$. À l'intérieur des techniques de résolution, nous

45. Le titre choisi par Kuhn et Tucker pour leur publication introduit pour la première fois le terme *Programmation non-linéaire* dans la littérature mathématique.

sommes confrontés à la définition d'une fonction à partir de $f(x)$ : la fonction lagrangienne $\mathcal{L}$ qui est fonction des variables $x$, mais aussi des multiplicateurs de Lagrange $\lambda$. On peut alors démontrer que la fonction lagrangienne est liée non seulement à un, mais à deux problèmes d'optimisation : le premier est notre problème de départ qui est fonction des variables $x$, et le second est un problème de maximisation qui est fonction des variables $\lambda$. Sans entrer plus en détail, ces deux problèmes sont dits *duaux* l'un de l'autre. Autrement dit, le problème dual est un problème d'optimisation associé au problème dit "primal" qui fait apparaître, en quelque sorte, un autre aspect de celui-ci. En effet, le multiplicateur de Lagrange associé à une contrainte donnée indique une forme d'influence de cette contrainte sur la solution du problème primal. Il indique la sensibilité de la fonction objectif du problème primal aux variations des contraintes imposées.

Par conséquent, les premiers pas des mathématiciens en direction de la dualité en optimisation ont réussi à attester aux multiplicateurs de Lagrange le statut de variables non seulement dans la fonction lagrangienne, mais surtout dans le problème dual associé au problème primal. Mieux encore, les recherches mathématiques ont montré que la théorie de la dualité ouvre la porte à un autre type d'informations. L'analyse de sensibilité ou autrement dit les effets éventuels induits par des changements dans les données (contraintes) d'un problème de programmation (linéaire ou non) sur la solution du problème, s'exprime en termes des variables duales et permet d'éviter de devoir résoudre un nouveau problème d'optimisation. C'est cette dernière utilité qui apporte à l'économie mathématique l'intérêt d'exploiter les problèmes duaux et l'interprétation du multiplicateur de Lagrange. En particulier, le problème dual, obtenu avec des techniques purement mathématiques, révèle l'existence de critères économiques très importantes.

### 4.5.2 Coûts marginaux

Tout comme les mathématiciens, les économistes ont développé un intérêt pour les techniques de résolution de problèmes non-linéaires. Ils y font de nombreuses contributions tant au niveau de la théorie que des algorithmes. Ainsi, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker font partie aujourd'hui du bagage intellectuel de tous ceux qui s'intéressent à la théorie économique. Étant donné les interprétations économiques de la dualité en programmation linéaire et les nombreuses applications qui en sont faites, les économistes ne pouvaient pas manquer de se pencher sur la dualité en programmation non-linéaire. Cependant, les économistes se sont confinés au cas convexe et ont laissé aux mathématiciens, par exemple Rockafellar et autres, le soin d'apporter les derniers raffinements à une théorie générale de la dualité. Le lecteur intéressé trouve plus d'informations à ce sujet dans l'article (Truchon, 1988).

D'une manière très schématique, on peut dire que le problème primal et le problème dual d'un problème économique correspondent à deux conceptions concurrentes de l'économie qui conduisent néanmoins à un résultat identique, compromis accepté par les deux parties (par exemple, le vendeur et l'acheteur). Nous choisissons un exemple classique pour présenter une des interprétations possibles du multiplicateur de Lagrange en économie.

Soit le problème, qualifié de primal, de maximiser la production sachant que les ressources intervenant dans le processus de production sont limitées. Créer le problème dual consiste à introduire de nouvelles variables, les prix ou coûts "virtuels" - encore ap-

pelés "implicites", "comptables" ou "ombre" (*shadow prices* en anglais) - des ressources, et à minimiser le coût total de ces ressources tout en respectant la contrainte que le prix "virtuel" des facteurs de production est au moins égal à leur rendement marginal.
Pour illustrer l'importance de l'optimisation au sein de l'économie mathématique, nous présentons dans la section suivante quelques problèmes économiques fondamentaux.

### 4.5.3 Problèmes économiques fondamentaux

Nous mentionnons ici deux problèmes importants en économie utilisant les méthodes d'optimisation pour mettre en avant le caractère fondamental des mathématiques pour l'économie mathématique.

**Le problème du consommateur :** Ce problème est issu de la théorie du consommateur qui est la modélisation économique du comportement d'un agent économique en tant que consommateur de biens et de services. Supposons qu'un consommateur disposant d'un revenu $R$ désire acheter deux produits dont les prix unitaires sont respectivement désignés par $p$ et $q$. La satisfaction du consommateur lorsqu'il achète les quantités $x$ et $y$ de chaque produit est mesurée par une fonction $U(x, y)$, appelée *fonction d'utilité*. Le problème du consommateur est alors de déterminer les quantités $x$ et $y$ de sorte que sa satisfaction soit maximale et que sa contrainte de budget soit respectée. Ce problème peut se formaliser comme suit :

$$(P_{consom}) \left\{ \begin{array}{cc} \text{maximiser} & U(x,y) \\ \text{sous la contrainte budgétaire} & px + qy = R\,. \end{array} \right.$$

**Le problème du producteur :** La théorie du producteur est le pendant de la théorie du consommateur. Il s'agit d'une modélisation économique du comportement d'un agent économique en tant que producteur de biens et de services. En analogie avec le problème du consommateur, on peut voir le problème du producteur comme la maximisation du profit, ou inversement comme une minimisation du coût de production qu'il devra supporter pour pouvoir réaliser sa production. Le coût de production s'exprime mathématiquement comme la somme des rémunérations de chaque facteur. Notons $w$ le salaire versé pour chaque unité de travail et $r$ le taux de rémunération normal du capital. Si le travail et le capital sont les deux seuls facteurs variables, le coût de production s'écrit :

$$C(K, L) = rK + wL + f,$$

où $f$ représente la rémunération de l'ensemble des facteurs fixes de l'entreprise.

- **Le producteur contraint par son marché :** Lorsque le producteur connaît le niveau maximal de production qu'il peut écouler sur le marché, il possède à l'avance l'information sur le montant de sa recette $pQ(K, L)$, où $Q(K, L)$ est la *fonction de production*. La maximisation du profit implique donc la minimisation des coûts :

$$(P_{produc1}) \left\{ \begin{array}{cc} \text{minimiser} & C(K,L) \\ \begin{array}{c}\text{sous la contrainte} \\ \text{d'un niveau de production}\end{array} & Q(K,L) = \overline{Q}\,. \end{array} \right.$$

- **Le producteur contraint par son budget :** Le producteur peut se trouver dans une configuration alternative où il connaît son budget maximal. Les coûts ne pouvant excéder cette somme, le coût maximal de production est connu et la recherche du profit le plus élevé possible passe par la maximisation de la recette. Le producteur va donc chercher la combinaison productive qui maximise le volume de production tout en respectant la contrainte de coût. Ce problème s'exprime mathématiquement sous la forme d'un programme de maximisation de la production sous contrainte d'un niveau de coût :

$$(P_{produc2}) \left\{ \begin{array}{cc} \text{maximiser} & Q(K,L) \\ \begin{array}{c}\text{sous la contrainte} \\ \text{d'un niveau de coût}\end{array} & rK + wL + f = \overline{C}\,. \end{array} \right.$$

Lorsque nous considérons le problème du consommateur ($P_{consom}$), nous retrouvons aisément la signification particulière du multiplicateur de Lagrange. À l'optimum, il peut s'interpréter comme l'utilité marginale du revenu $R$, c'est-à-dire le supplément d'utilité procuré par la dépense d'une unité supplémentaire de revenu. En effet, le Théorème de Lagrange permet d'écrire après calculs que

$$U'_x(x^*, y^*) = p\lambda^* \quad \text{et} \quad U'_y(x^*, y^*) = q\lambda^*\,.$$

L'utilité marginale du revenu s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R} = \lambda^*\,.$$

De façon générale, chaque multiplicateur de Lagrange s'interprète comme un taux marginal de variation de la fonction objectif par rapport à la contrainte.

## 4.6 Des justifications du Théorème de Lagrange

Il existe, à l'heure actuelle, différentes façons de penser et justifier la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Partant du Théorème de Lagrange comme thème d'étude mathématique $\theta_{Lagrange}$ ($\theta_{L_{stand}}$ ou $\theta_{L_{flagr}}$), cette section s'intéresse aux "discours technologiques" qui mènent aux énoncés technologiques du théorème. Autrement dit, nous tentons une présentation et une analyse des différentes démonstrations du Théorème de Lagrange. En se basant sur la littérature mathématique existante, différents arguments fournissant une justification du Théorème de Lagrange ainsi que leurs interprétations géométriques seront présentés. Comme nous sommes en présence de deux formulations différentes, il est clair que nous trouvons des démonstrations pour chacun des deux énoncés $\theta_{L_{stand}}$ et $\theta_{L_{flagr}}$.

Ayant été repris par beaucoup de mathématiciens, le Théorème de Lagrange connaît un vaste éventail de démonstrations différentes. C'est pourquoi nous ne présentons ici que certains des arguments dans un souci de clarté et de pertinence pour notre travail. Le lecteur intéressé par les argumentations et preuves complètes associées ainsi que les preuves non présentées est renvoyé à la littérature mathématique ((Bertsekas, 1999 ; Douchet & Zwahlen, 1986 ; Sundaram, 1996), etc.) ainsi qu'aux articles dont les références bibliographiques se trouvent à la fin de cette thèse ((Kalman, 2009a ; Klein, 2010 ; Knoerr, 1998), etc.).

La discussion suivante est organisée comme suit. Nous commençons avec quelques mots à propos de l'intuition en mathématiques dans la Section 4.6.1. Ensuite, nous poursuivons avec une présentation détaillée des deux énoncés $\theta_{L_{stand}}$ et $\theta_{L_{flagr}}$ dans la Section 4.6.2, avant de fournir notre grille de comparaison des différentes justifications (Section 4.6.3). Enfin, cinq justifications de $\theta_{L_{stand}}$ et deux de $\theta_{L_{flagr}}$ seront exposées et comparées dans les Sections 4.6.4 et 4.6.5 respectivement.

### 4.6.1 Intuition en mathématiques

Avant de passer à la présentation des différentes argumentations, nous nous permettons un commentaire sur l'*intuition* en mathématiques. Bien qu'une idée intuitive ne soit pas une preuve rigoureuse pour le mathématicien, l'enseignement des mathématiques passe inévitablement par ces idées dans un but de rendre les mathématiques abordables aux étudiants. Ainsi, malgré qu'il soit discutable de parler de "réelle connaissance", l'histoire des mathématiques regorge de témoignages de mathématiciens racontant des expériences durant lesquelles un résultat ou une solution à un problème se sont imposés spontanément à l'esprit, sans raisonnement préalable. Poincaré (1916-1965) exprime cette dialectique entre la rigueur et l'intuition en termes de "formel" et "réel". L'opposition entre le formel et le réel, malgré leur appui mutuel (le formel permet de connaître le réel, le réel fournit son contenu au formel), correspond à celle entre la rigueur (formelle) et l'intuition (réelle), ou encore entre la démonstration et l'invention. Pour lui, l'intuition est nécessaire :

> *C'est par la logique qu'on démontre, mais c'est par l'intuition qu'on invente.*
> (Poincaré, 1916-1965, p.132)

L'intuition en mathématiques est ce qui permet de

> *combler l'abîme qui sépare le symbole de la réalité. [...]* [Sans l'intuition,] *le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées.* (Poincaré, 1916-1965, p.132)

C'est dans le sens précisé ci-dessus que nous définissons l'intuition comme étant une idée qui, dès son apparition, convainc le mathématicien et rend un résultat plausible. Même si le mathématicien ne peut pas encore affirmer que son intuition constitue un réel résultat (pour cela il faudrait qu'un raisonnement rigoureux se rajoute), cela n'empêche qu'il est fortement persuadé d'être sur le bon chemin. Dans cette optique, nous considérons l'intuition dans cette section comme l'idée fournissant du contenu au formel du problème suivant : comment démontrer le Théorème de Lagrange ?

### 4.6.2 Deux énoncés différents

La formulation du Théorème de Lagrange donnée par le Théorème 4.1.1 est probablement la plus classique et la plus *standard* dans le sens où de nombreux traités sur le calcul différentiel et intégral la présentent [46]. Nous argumentons que cette approche est adaptée

46. Voir, par exemple, (Douchet & Zwahlen, 1986 ; Stewart, 2006).

pour justifier la forme particulière des équations, initialement trouvées par Lagrange, de la façon suivante.

> "Supposons qu'il s'agit de trouver la valeur optimale d'une fonction $f(x)$ sous contrainte que $g(x) = 0$, où $g$ est la fonction regroupant toutes les fonctions $g_i$, $i = 1, \ldots, k$. Sous des hypothèses appropriées, le Théorème de Lagrange affirme qu'au point $x^*$, solution du problème, le vecteur gradient $\nabla f(x^*)$ doit nécessairement être une combinaison linéaire des vecteurs gradients $\nabla g_i(x^*)$, $i = 1, \ldots, k$. Mis ensemble avec la condition d'admissibilité $g(x^*) = 0$, nous obtenons la condition nécessaire d'optimalité pour le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité :
> il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$ tel que
>
> $$\begin{cases} \nabla f(x^*) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*)\,, \\ g_i(x^*) &= 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, k." \end{cases} \tag{4.4}$$

Dans le cas particulier d'une fonction objectif de plusieurs variables soumise à une seule contrainte d'égalité, la condition nécessaire d'optimalité devient que les vecteurs $\nabla f(x^*)$ et $\nabla g(x^*)$ sont multiples l'un de l'autre au point $x^*$, optimum du problème. Comme mentionné au départ de ce chapitre, nous nous référons au discours technologique $\theta_{L_{stand}}$ quand nous évoquons cette justification des équations de Lagrange. L'approche standard donne donc une explication de la méthode des multiplicateurs de Lagrange en termes de vecteurs et fait intervenir séparément le gradient $\nabla f$ et l'ensemble des vecteurs $\{\nabla g_i\}_{i=1}^{k}$.

Cependant, la condition nécessaire d'optimalité, comme décrite dans les travaux originaux de Lagrange, est plutôt le résultat de l'utilisation de la fonction lagrangienne. En effet, c'est l'approche par fonction lagrangienne, $\theta_{L_{flagr}}$, qui reflète directement l'idée ingénieuse de Lagrange "*d'ajouter à la fonction proposée les fonctions qui doivent être nulles, multipliées chacune par une quantité indéterminée*" (Lagrange, 1813, p.268) et qui conduit aux équations $\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0$.

> "Nous sommes amenés dans l'approche par fonction lagrangienne à annuler les dérivées partielles premières de la fonction $\mathcal{L}(x, \lambda)$, comme si on cherchait ses candidats à être minimum ou maximum. Cette technique mène donc à la condition nécessaire d'optimalité pour le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité suivante :
> il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$ tel que
>
> $$\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) \;=\; 0\,, \tag{4.5}$$
>
> où $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$."

Remarquons que la dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à $\lambda$ exprime l'admissibilité du point $x^*$, c'est-à-dire $g(x^*) = 0$. Cette approche du Théorème de Lagrange par fonction lagrangienne nécessite une vision de la fonction lagrangienne comme dépendant des variables $x$ et $\lambda$, c'est-à-dire une vision où les multiplicateurs de Lagrange sont considérés comme des variables indépendantes. Historiquement, il a fallu du temps pour reconnaître les multiplicateurs de Lagrange en tant que variables "sur le même pied" que les variables $x$ du problème de départ. Cette reconnaissance aboutit à une présentation des multiplicateurs comme *variables duales* et a été présentée brièvement dans la Section 4.5.

Bien que les deux approches soient mathématiquement équivalentes, elles semblent émerger de conceptions différentes. L'approche standard peut facilement être comprise et interprétée en termes de notions algébriques et géométriques, et différentes idées intuitives permettent de justifier la forme particulière des équations de Lagrange. Quant à l'approche par fonction lagrangienne, elle se prête à des explications issues du cadre de l'analyse plutôt que géométriques et est - malheureusement - souvent accompagnée d'une interprétation incorrecte (mais attrayante du point de vue analytique), à savoir que trouver l'extremum du problème d'optimisation de départ se réalise en recherchant un extremum de la fonction lagrangienne. Kalman appelle cette mauvaise conception *transformation fallacy* (Kalman, 2009b, p.108). Nous reviendrons sur cette idée lors de la présentation des justifications de l'approche par fonction lagrangienne.

### 4.6.3 Des discours technologiques variés

*Prouver* ou *démontrer* est une des activités essentielles du mathématicien et est donc inévitablement connecté au savoir savant. Historiquement, et cela est encore vérifié à l'heure actuelle, on peut dire que démontrer une proposition est le moyen que le mathématicien a pour se convaincre, et pour convaincre ses pairs, de la vérité d'un résultat, dans le cadre d'une rationalité propre aux mathématiques. Il est donc incontestable que ce type d'activité fait partie des activités mathématiques enseignées à l'école, mais surtout à l'université. Le Théorème de Lagrange ne fait pas exception à cette règle générale et nous trouvons différentes *argumentations* ou *preuves* (ou *discours technologiques* d'après la TAD de Chevallard (1991)) de ce théorème dans la littérature mathématique. Comme mentionné dans le chapitre précédent (Section 3.2), nous distinguons deux rôles que peut assumer une démonstration : une fonction de *vérification* et une fonction d'*explication* (Hanna, 1990, p.9).

En tant que mathématiciens, nous différencions deux sortes de démonstration, la *preuve* et l'*argumentation*. Cette distinction témoigne de la distance qui peut exister entre une démonstration très formelle et une démonstration beaucoup moins formelle. La distinction adoptée est celle proposée par Duval (1992). La divergence entre la vérification empirique d'une affirmation et un raisonnement déductif bien fondé a été identifiée comme source de problèmes dans l'apprentissage et a amené Duval à opposer les *preuves* aux *argumentations* dans les discours des mathématiciens.

L'objectif d'une *argumentation* est de convaincre le lecteur intéressé. À l'intérieur d'une démarche d'argumentation, on constate que chaque pas du raisonnement est en relation avec la conclusion et s'ajoute aux autres pas. La continuité sémantique repose sur des rapprochements et des oppositions entre les différents arguments présentés. Un adjectif adéquat pour qualifier une argumentation est "pertinent".

Quant à la notion de *preuve*, Duval précise qu'une preuve - contrairement à une argumentation - veut atteindre l'objectif de prouver une affirmation donnée. Pour cela, chaque pas de la démarche s'appuie sur un énoncé tiers qui a le statut de "définition" ou de "théorème". La cohérence du raisonnement provient du modèle rhétorique utilisé qu'est le *raisonnement déductif*. L'adjectif qui qualifie le mieux une preuve est "valide". En combinant les distinctions de Hanna et de Duval, nous obtenons un tableau à quatre entrées (Tableau 4.1) pour classifier les différentes démonstrations, selon qu'il s'agisse d'une argumentation ou d'une preuve et qu'elles remplissent leur fonctionnalité explicative ou justificative.

| | | Fonctionnalité | |
|---|---|---|---|
| | | Explication | Vérification |
| Type | Argumentation | argumentation qui explique | argumentation qui vérifie |
| | Preuve | preuve qui explique | preuve qui vérifie |

TABLEAU 4.1 – Différents types de démonstration

Nous constatons qu'un développement technologique peut *assurer* que la technique des multiplicateurs de Lagrange fonctionne (vérification), mais aussi *comprendre* pourquoi le phénomène en question se produit (explication). La fonction d'explication, productrice d'intelligibilité, sera mise en avant dans les justifications présentées. Nous nous concentrons dans ce qui suit sur la présentation des arguments clés (intuitifs) de chaque démonstration.

Outre ces distinctions entre vérification et explication et entre preuve et argumentation, nous présentons maintenant les différents critères qui serviront de grille de comparaison des différentes justifications du Théorème de Lagrange.

### Quelques éléments de comparaison

Afin de comparer les différentes démonstrations, voici une liste de critères auxquels nous nous référerons :

**Explication ou vérification ?** Les différentes justifications rencontrées sont toutes des résolutions de la tâche *démontrer le Théorème de Lagrange*. C'est dans la forme et dans le choix des idées développées que nous observerons des différences. Le premier critère est utilisé pour distinguer les raisonnements à forte composante explicative de ceux à forte composante justificative. En effet, nous présenterons - dans le but de rester compréhensible pour tous les lecteurs - surtout des argumentations. Le lecteur intéressé trouvera les renvois à la littérature mathématique qui expliquent les preuves (justificatives et explicatives) basées sur ces argumentations.
Remarquons encore qu'une démonstration est rarement achevée parce qu'on peut toujours retoucher le style de rédaction, la longueur, la profondeur des détails, les outils utilisés (parfois radicalement différents), voire modifier simplement l'usage des règles logiques et le discours théorique sur lequel est basée la démonstration. Par ailleurs, une démonstration peut ne pas être formelle tout en étant considérée comme correcte dans les grandes lignes, alors que des points resteraient à expliciter en toute rigueur ou seraient entachés d'erreurs "mineures". On rédige une démonstration pour être lue et convaincre les lecteurs, et le niveau de détails nécessaire n'est pas le même suivant les connaissances de ceux-ci.

**Différents registres ?** De quels ingrédients est composé un discours technologique ? La réponse que nous avons déjà donnée est que les organisations mathématiques sont faites d'objets mathématiques et de leurs représentations sémiotiques. En plus, nous manipulerons souvent plusieurs types de registres pour un même objet mathématique comme mentionné à la Section 2.2.2.0. Comme la coordination de registres sémiotiques est, selon Duval, une condition nécessaire de la compréhension, nous

nous intéresserons à la question de savoir quels types de registres sont mis en place pour rédiger une démonstration et quels registres sont possibles dans l'argumentation.

**Différents cadres ?** Au sein d'une activité mathématique,

> *le* changement de cadre *consiste à traduire un problème dans un domaine de travail autre que celui que la première présentation du problème permet d'identifier. Car le problème en question doit pouvoir se formuler "dans au moins deux cadres différents".* (Douady, 1986, p.13)

D'après Douady, le mot "cadre" est à prendre au sens usuel qu'il a lorsqu'on se place dans le cadre graphique, dans le cadre de l'algèbre, de la géométrie analytique, de l'analyse numérique ou encore de l'analyse fonctionnelle. Nous mentionnons le cadre graphique, le cadre de l'algèbre, le cadre du calcul différentiel (appelé encore cadre de l'analyse) et le cadre de la géométrie lorsque nous considérons des discours technologiques basés sur des illustrations graphiques ou construits sur des arguments issus de l'algèbre, du calcul différentiel ou de la géométrie, respectivement.

**Définition 4.6.1 (Cadre)** (Douady, 1986, p.10)
*Un* cadre *est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée.*

Le premier cadre mentionné, i.e. le cadre graphique, n'a pas le même statut que les trois autres. Alors que les trois autres font référence à des branches des mathématiques, l'*algèbre*, la *géométrie* et l'*analyse*, le cadre graphique est celui des représentations visuelles des concepts mathématiques. En effet, ce cadre graphique est développé principalement dans les logiciels de géométrie dynamique. Dans nos explications, des illustrations seront utilisées seulement pour soutenir des affirmations mathématiques et non pour donner des raisonnements mathématiques rigoureux complets. En conséquence, du fait que le registre des représentations graphiques est plus approprié dans notre étude, nous ne mentionnerons plus le cadre graphique. Quant aux trois autres cadres, ils se servent abondamment des objets (et outils) mathématiques définis au sein de la branche des mathématiques qui leur correspond et serviront de critère de comparaison.
La prise en compte des images mentales telle qu'elle est envisagée par Douady peut expliquer pourquoi les apprenants ont beaucoup de mal à décontextualiser des savoirs et à utiliser, notamment en économie, des notions récemment acquises en mathématiques. En effet, l'enseignant a un devoir de chaperonner les étudiants pour les aider à véhiculer des concepts d'un cadre à l'autre. Signalons dès maintenant que ce sont justement les changements de cadre qui conduisent les étudiants à des activités où ils doivent transférer et réinvestir leurs connaissances. Ces changements de cadre, appelés *jeux de cadre* par Douady, sont provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des étudiants.

**Théorème des fonctions implicites ou non ?** Le Théorème des fonctions implicites joue un rôle très important dans le développement des discours technologiques sur le Théorème de Lagrange. À l'intérieur de chacune des approches, nous pourrons distinguer des démonstrations avec et sans utilisation du Théorème des fonctions implicites. En pratique, le Théorème des fonctions implicites est souvent mentionné sans donner plus de détails. Bien qu'une preuve se basant sur ce théorème ne soit pas nécessairement longue, "il n'y a pas de quoi rire" au sujet du Théorème des fonctions implicites comme le dit van den Heuvel (2010) :

> *Although that proof is not too long, it depends on the Implicit Function Theorem [...]. And a look at that theorem will convince you that this is no laughing matter.*
> (van den Heuvel, 2010, p.3)

Dans le même sens, l'utilisation du Théorème des fonctions implicites peut paraître sophistiquée aux étudiants étant donnée la "mystériosité" de ce dernier à leurs yeux. Or, il y a moyen d'éviter le Théorème des fonctions implicites en utilisant d'autres résultats classiques - pas pour autant moins célèbres - à savoir le Théorème de Bolzano-Weierstrass ou le Théorème de Taylor. C'est pourquoi nous distinguerons les démonstrations qui, de façon habituelle, ont recours au Théorème des fonctions implicites pour prouver le Théorème de Lagrange, des autres.
Bien que ce dernier critère puisse être considéré comme inhérent au cadre choisi (et donc faisant partie du critère précédent), nous avons choisi de le laisser comme quatrième critère dans notre grille d'analyse.

Notons encore que notre présentation des différents discours technologiques est inspirée du livre (Kalman, 2009b). Le contenu de ce livre permet une première analyse des différentes argumentations justifiant le Théorème de Lagrange, soit sous la forme d'approche standard, soit sous la forme d'approche par fonction lagrangienne, et élargit notre horizon concernant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Nous compléterons les démonstrations avec celles trouvées dans des manuels de cours présentant un intérêt didactique pour nos recherches. Le lecteur souhaitant plus d'informations que celles présentées dans cette thèse est renvoyé à (Kalman, 2009b).

Nous sommes maintenant en mesure d'exposer les cinq justifications de l'approche $\theta_{L_{stand}}$ et les deux justifications de l'approche $\theta_{L_{flagr}}$ recueillies dans ces différentes sources. Pour unifier et simplifier les écritures, nous partirons chaque fois du même problème d'optimisation sous contraintes d'égalité :

$$(P_E^n) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{SC} & g(x) = 0\,, \end{cases} \tag{4.6}$$

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Lorsque la preuve aura recours à des illustrations graphiques, nous nous placerons dans le cas d'un problème de minimisation à 2 variables réelles ($n = 2$) sous une seule contrainte d'égalité ($k = 1$) ou un problème de minimisation à $n$ variables réelles sous une seule contrainte d'égalité ($k = 1$). Dans le cas tout à fait général, nous résolvons un problème ($P_E^n$) où $k \geq 1$. Nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

- la fonction $f$ admet un minimum local sous la contrainte $g = 0$ au point $x^*$ [47]. En plus, ce minimum n'est pas un minimum de $f$ sans contraintes, c'est-à-dire le point $x^*$ ne vérifiera pas l'équation de Lagrange en prenant $\lambda^* = 0$ ;
- la valeur minimale est notée $f(x^*) = M$.

### 4.6.4 Discours technologiques sur l'approche standard

La forme standard du Théorème de Lagrange, $\theta_{L_{stand}}$, fait intervenir la fonction objectif $f$ et les contraintes $g$ définies sur un domaine de définition dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, nous considérerons la fonction objectif $f$ et les contraintes $g$ séparément, dans le sens où nos justifications feront intervenir la fonction et les notions s'y rapportant (comme le gradient) indépendamment de celles des contraintes. Ceci peut être réalisé de différentes façons : observer les graphes des fonctions, examiner les contours des fonctions intervenant dans l'espace $\mathbb{R}^n$, analyser l'expression explicite ou paramétrique des différentes fonctions, substituer les contraintes dans la fonction objectif pour réduire le nombre de variables ou encore, combiner la fonction objectif avec les contraintes, définir ainsi une nouvelle fonction et considérer une dimension de l'image augmentée. Pour chacune des argumentations présentées, des considérations graphiques compléteront l'exposé et permettront de comprendre le pourquoi des équations de Lagrange, fournissant un indice de la richesse du cadre graphique (et géométrique) pour le Théorème de Lagrange.

Les cinq technologies de l'approche standard présentées sont les suivantes :

1. Courbes de niveau tangentes ;
2. Utilisation du Théorème de Taylor ;
3. Utilisation du Théorème des fonctions implicites ;
4. Paramétrisation d'une courbe tracée sur l'ensemble admissible ;
5. Mapping combiné.

Rappelons encore que le but de l'approche standard est de montrer qu'au point $x^*$ le vecteur gradient $\nabla f(x^*)$ doit nécessairement être une combinaison linéaire des vecteurs gradients $\nabla g_i(x^*)$, $i = 1, \ldots, k$, ou encore, dans le cas $k = 1$, que les vecteurs $\nabla f(x^*)$ et $\nabla g(x^*)$ sont multiples l'un de l'autre au point $x^*$, optimum du problème.

#### Courbes de niveau tangentes

Considérons le problème d'optimisation $(P_E^2)$ $(k = 1)$. Le but est de trouver les valeurs minimales de la fonction $f$ sous contrainte que $g = 0$. Les points $x \in \mathbb{R}^2$ qui réalisent cette dernière condition sont les points de la courbe de niveau particulière d'équation $g = 0$ (courbe rouge sur la Figure 4.3). Pour trouver la valeur minimale de $f$, il faut rechercher la plus petite valeur de $c$ telle que la courbe d'équation $f = c$ coupe la courbe d'équation $g = 0$. En conséquence, si le point $x^*$ est solution du problème de minimisation sous contrainte que $g = 0$, il se trouve non seulement sur la courbe de niveau $g = 0$ mais aussi sur le contour de la fonction $f$ associée à la valeur minimale $M$ : $f = M$. La figure

47. Pour ne pas alourdir les notations, la fonction $f(x)$ sera notée $f$ et les contraintes d'égalité $g(x) = 0$ seront notées $g = 0$.

ci-dessous (Figure 4.3) montre que, au moins localement en $x^*$, la courbe de niveau $f = M$ sépare le plan en deux parties : $f < M$ et $f > M$. Nous observons que le minimum $x^*$ ne peut être atteint en un point où la courbe $g = 0$ *croise* la courbe de niveau $f = M$ car cela entraînerait la possibilité de trouver une valeur plus petite dans la partie $f < M$ au voisinage proche de $x^*$ tout en restant sur la contrainte $g = 0$. C'est pourquoi il est nécessaire qu'en $x^*$, optimum du problème de minimisation sous contrainte d'égalité $g = 0$, les deux courbes aient une tangente commune. Le point $x^*$ solution du problème doit donc être tel que

- $g = 0$,
- la pente de la tangente à la courbe d'équation $g = 0$ au point $x^*$ est égale à la pente de la tangente à la courbe de niveau de $f$ en ce point.

Cette situation est représentée sur la Figure 4.3.

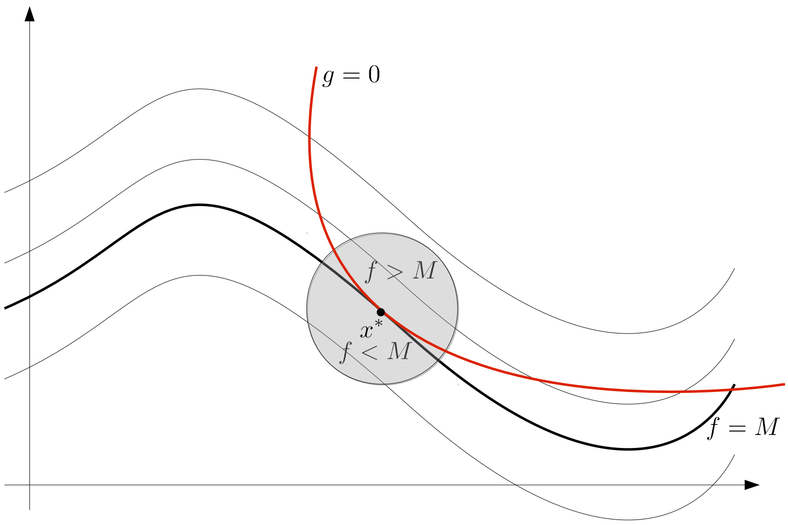



Figure 4.3 – Condition de tangence entre les courbes de niveau (Kalman, 2009b, p.103)

La tangence entre les deux courbes montre qu'elles ont la même direction normale au point $x^*$. Comme $\nabla f$ est perpendiculaire à la courbe de niveau $f = M$ et $\nabla g$ est perpendiculaire à la courbe $g = 0$, nous concluons que ces deux vecteurs doivent être parallèles au point $x^*$. C'est la condition de Lagrange donnée dans le Théorème 4.1.1.

Analysons cette justification selon nos quatre critères :

**Explication ou vérification ?** Cette justification basée sur les courbes de niveau se prête a priori comme argumentation, et non comme preuve, avec une forte composante d'explication. Ceci est justifié, par exemple, par le fait que la condition de régularité n'intervient souvent pas dans l'explication et que le support utilisé est celui des graphes et dessins. L'argumentation de Klein (2010) est un exemple d'article mathématique traitant le Théorème de Lagrange du point de vue "tangence entre les courbes de niveau" à un niveau d'argumentation qui explique. Le livre (Simon & Blume, 1998) donne une preuve analytique de cette argumentation.

**Différents registres ?** Le registre du langage naturel est invoqué tout comme le registre graphique. Il serait intéressant de compléter cette argumentation avec des représentations sémiotiques issus d'autres registres, notamment des registres algébrique et symbolique. Par exemple : dans le registre du langage naturel, la phrase "ces deux vecteurs doivent être parallèles au point $x^*$" se traduit dans le registre algébrique par "$\exists\, l \in \mathbb{R} : \nabla f(x^*) = l \nabla g(x^*)$", ou encore dans le registre symbolique par "$\nabla f(x^*) \,/\!/\, \nabla g(x^*)$". Cette justification est adaptée pour faire des changements de registres.

**Différents cadres ?** Le cadre principal est celui du calcul différentiel et intégral : courbe de niveau, tangente à une fonction en un point donné, etc., sont des notions issues de l'analyse. Cette justification s'insère donc principalement dans un cours d'analyse. Les concepts de parallélisme et de perpendicularité sont issus du cadre de la géométrie et peuvent trouver leurs explications dans cette branche des mathématiques.

**Théorème des fonctions implicites ou non ?** Donner une expression analytique des pentes des tangentes se réalise en lien étroit avec la conclusion du Théorème des fonctions implicites. L'utilisation de ce théorème dans une preuve rigoureuse est donc incontournable.

### Utilisation du Théorème de Taylor

Pour ne pas utiliser le Théorème des fonctions implicites, il est possible de développer un raisonnement basé sur le Théorème de Taylor (Théorème 1.5.3). Notons que l'idée d'utiliser un développement limité d'ordre 1 revient à linéariser les fonctions concernées autour de $x^*$ et de considérer, en conséquence, leur approximation linéaire.

Supposons que $x^*$ soit un minimum du problème d'optimisation de $f$ sous contrainte que $g = 0$, $(P_E^n)$ où $k \geq 1$. En écrivant le développement limité de Taylor d'ordre 1 de $f$ autour du point $x^*$, on obtient

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \textit{ reste}\,,$$

où nous omettons une description plus précise du reste [48]. Ensuite, écrivons $x = x^* + a$ avec $\|a\|$ suffisamment petit pour garantir que $x^* + a$ reste dans le domaine de définition de $f$. On a

$$f(x^* + a) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T a + \textit{ reste}\,.$$

Le point $x^*$ étant un minimum local de $f$ sous contrainte que $g = 0$, on a $f(x^* - a) \geq f(x^*)$ et $f(x^* + a) \geq f(x^*)$ pour $\|a\|$ suffisamment petit et vérifiant $g(x^* + a) = 0$ et $g(x^* - a) = 0$ (pour rester dans le domaine admissible). En substituant ces inégalités dans l'égalité ci-dessus et en négligeant le reste, on obtient

$$\nabla f(x^*)^T a \geq 0 \quad \text{ et } \quad \nabla f(x^*)^T (-a) \geq 0\,,$$

ce qui donne la condition nécessaire suivante :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^n,\ x^* + a \text{ admissible et } \|a\| \text{ suffisamment petit } : \nabla f(x^*)^T a = 0\,. \tag{4.7}$$

48. Une écriture détaillée du reste peut être obtenue par le Théorème de Taylor (Théorème 1.5.3).

Il reste à interpréter ce que veut dire "$x^* + a$ admissible". Si on regarde les fonctions définissant les contraintes $g_1, g_2, \ldots, g_k$ et leurs développements de Taylor au point $x^*$, on obtient que :

$$\forall\, i = 1, \ldots, k : g_i(x^* + a) = g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T a + \textit{ reste}\,.$$

Des développements limités d'ordre 1, on tire l'information que seuls les points vérifiant $\nabla g_i(x^*)^T a + \textit{ reste } = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, k$, restent intéressants. Une fois de plus, en négligeant le reste, le résultat suivant est obtenu :

$$\text{Afin d'avoir } x^* + a \text{ admissible pour } a \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|a\| \text{ suffisamment petit,}$$
$$\text{il faut que } \forall\, i = 1, \ldots, k : \nabla g_i(x^*)^T a = 0\,.$$

On note que si on a un point $a$ vérifiant $\nabla f(x^*)^T a = 0$ ou $\nabla g_i(x^*)^T a = 0$, alors le résultat reste vérifié pour tout point $\nu a$, où $\nu \in \mathbb{R}$. On peut donc laisser tomber la condition "$\|a\|$ suffisamment petit" pour obtenir la conclusion combinant (4.7) et (4.8).

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^n : (\forall\, i = 1, \ldots, k : \nabla g_i(x^*)^T a = 0) \Rightarrow \nabla f(x^*)^T a = 0\,. \tag{4.8}$$

On peut montrer que la seule façon d'avoir l'implication (4.8) est que $\nabla f(x^*)$ soit une combinaison linéaire de $\nabla g_1(x^*)$, $\nabla g_2(x^*)$, ..., $\nabla g_k(x^*)$. Alors, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que $\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \nabla g_i(x^*)$. Cette égalité donne la conclusion du Théorème de Lagrange 4.1.1 :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

où on pose $\forall\, i = 1, \ldots, k : \lambda_i^* = \alpha_i$.

Voici quelques éléments d'analyse selon notre grille d'évaluation :

**Explication ou vérification ?** Cette deuxième justification se présente comme une argumentation avec une forte composante de vérification, même si le mathématicien pourrait contester le manque de rigueur dans l'explication du reste du Théorème de Taylor pour ne pas lui donner le statut de preuve. La fonction de vérification domine sur celle d'explication car le raisonnement s'appuie sur des raisonnements déductifs et n'essaie pas à toutes les étapes de permettre un meilleur aperçu du pourquoi le résultat est vrai. L'argumentation ci-dessus est issue de (van den Heuvel, 2010) et est un exemple de support de cours reprenant l'idée de développer une argumentation du Théorème de Lagrange grâce au Théorème de Taylor.

**Différents registres ?** Les registres algébrique et symbolique sont principalement invoqués, bien qu'il y ait aussi possibilité d'exprimer le raisonnement dans le registre du langage naturel. Le registre graphique est absent. Ainsi, les différentes conclusions se basent sur des équations algébriques faisant intervenir des quantificateurs et d'autres notations symboliques (comme le gradient ou la norme d'un vecteur), et se mélangent aux propositions du type "$\|a\|$ suffisamment petit" et "$x^* + a$ admissible" issues du registre du langage naturel.

**Différents cadres ?** Le cadre principal est celui du calcul différentiel et intégral et l'argumentation y reste tout au long du raisonnement déductif. L'élément clé est le Théorème de Taylor, célèbre théorème de l'analyse. Le cadre de l'algèbre est évoqué explicitement pour démontrer la dernière implication, tandis que le cadre de la géométrie n'y intervient pas.

**Théorème des fonctions implicites ou non ?** Cette preuve évite tout au long une utilisation du Théorème des fonctions implicites, théorème qui est, d'après le professeur van den Heuvel, très peu saisi par les étudiants (van den Heuvel, 2010, p.3).

### Utilisation du Théorème des fonctions implicites

On peut considérer que l'approche standard consiste principalement à appliquer une substitution. En effet, les $k$ contraintes d'égalité du problème d'optimisation peuvent être considérées comme un système de $k$ équations à $n$ inconnues et permettent, sous des hypothèses appropriées, d'exprimer $k$ variables en termes des $n-k$ variables restantes. Ce faisant, on réduit le problème d'optimisation sous contraintes à un problème d'optimisation sans contraintes. Remarquons que cette substitution est loin d'être anodine : rares sont les cas en pratique où on peut effectuer cette substitution explicitement. Le Théorème des fonctions implicites fournit un outil théorique pour garantir l'existence d'une telle substitution.

Plus analytiquement, supposons que $x^*$ soit un minimum local du problème de minimisation sous contraintes d'égalité ($P_E^n$), où $k = 1$. Supposons en plus que la seule contrainte $g_1 = g = 0$ permette d'exprimer, sans perdre de généralité, $x_n$ en fonction des $n-1$ premières variables (la condition de régularité permet, en outre, de garantir l'existence de cette substitution). Le Théorème des fonctions implicites affirme alors qu'il existe une fonction $y(x_1, \ldots, x_{n-1})$ telle que

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0\,.$$

Autrement dit, il existe une fonction $\Psi$ définie par

$$\Psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

telle que la fonction composée $g \circ \Psi$ est la fonction nulle.

Par conséquent, rechercher le minimum de $f$ sous contrainte $g = 0$ revient à rechercher le minimum de $f \circ \Psi$ sans contraintes sur le domaine de définition de $y$. Pour un problème d'optimisation à deux variables ($n = 2$), la fonction $f \circ \Psi$ dépend d'une seule variable comme illustré par la Figure 4.4. En effet, seule la variable $x$ varie et permet de déterminer d'abord les coordonnées du point $(x, y(x))$ vérifiant la contrainte d'égalité et ensuite les coordonnées du point $(x, y(x), f(x, y(x)))$ situé sur la surface de $f$.

Comme $x^*$ est un minimum local du problème de minimisation sous contraintes d'égalité et comme le problème de minimiser $f \circ \Psi$ n'a plus de contrainte, la règle de Fermat (Théorème 1.5.4) entraîne que le gradient de $f \circ \Psi$ s'annule en $x^*$. Or, la règle de la dérivation en chaîne permet d'affirmer que

$$\nabla(f \circ \Psi)(x^*) = J_\psi(x^*)^T \nabla f(x^*) = 0,$$

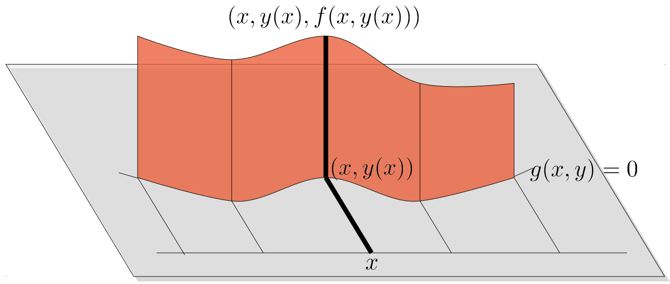



FIGURE 4.4 – Graphe de $f$ avec $y$ définie implicitement (Kalman, 2009b, p.104)

où $J_\Psi(x^*)_{(n\times n-1)}$ est la matrice Jacobienne de la fonction $\Psi$ au point $x^*$. D'autre part, comme $g \circ \Psi$ est la fonction nulle, on doit avoir $\nabla(g \circ \Psi)(x^*) = 0$, ou encore

$$J_\Psi(x^*)^T \nabla g(x^*) = 0.$$

En conséquence, les vecteurs $\nabla f(x^*)$ et $\nabla g(x^*)$ doivent être tous les deux orthogonaux aux lignes de la matrice Jacobienne $J_\Psi$ au point $x^*$. Comme $J_\Psi$ a seulement $n-1$ lignes linéairement indépendantes (par construction de la fonction $\Psi$), les deux vecteurs $\nabla f(x^*)$ et $\nabla g(x^*)$ doivent être parallèles.

À l'aide de notre grille de comparaison, nous donnons l'analyse suivante de ce discours technologique :

**Explication ou vérification ?** L'argumentation présentée ci-dessus remplit principalement sa fonctionnalité de vérification bien qu'il y ait aussi des éléments explicatifs présents. Développer cette argumentation pour lui donner le statut de preuve ne nécessite pas beaucoup d'effort. En effet, le cas général s'obtient moyennant quelques développements mathématiques (le gradient est remplacé par la matrice Jacobienne, la conclusion du Théorème des fonctions implicites se complexifie) et donnerait à l'argumentation le statut d'une preuve rigoureuse. Les livres (Sundaram, 1996; Douchet & Zwahlen, 1986) donnent un exemple d'utilisation du Théorème des fonctions implicites pour démontrer rigoureusement le Théorème de Lagrange.

**Différents registres ?** Nous retrouvons un mélange de registres différents dans cette argumentation : du langage naturel, symbolique et algébrique. Une représentation graphique vient compléter cette approche, mais essaie d'expliquer en premier lieu le Théorème des fonctions implicites à la place du Théorème de Lagrange.

**Différents cadres ?** Le cadre de l'analyse est le cadre dominant dans cette argumentation. Le cadre de l'algèbre, au contraire, intervient dans la mention de l'indépendance linéaire des colonnes de la matrice $J_\Psi$. Quant au cadre de la géométrie, l'orthogonalité entre vecteurs y est inscrite. Le cadre du calcul différentiel est mentionné, en outre, par la composée entre fonctions, la matrice Jacobienne ou encore la règle de Fermat.

**Théorème des fonctions implicites ou non ?** Cette argumentation place le Théorème des fonctions implicites au cœur de son raisonnement qui constitue donc un élément incontournable.

**Paramétrisation d'une courbe tracée sur l'ensemble admissible**

Supposons que $x^*$ soit un minimum du problème d'optimisation de $f$ sous contrainte que $g = 0$ ($k = 1$). Supposons $C$ l'ensemble admissible du problème et considérons une courbe $S$ dans $C$. Une paramétrisation de la courbe $S$ est donnée par $r(t)$ telle que, pour un $t^*$ donné, $x^* \in S$ ($r(t^*) = x^*$). Comme $x^*$ est un minimum local du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité, $x^*$ doit aussi être un minimum local de $f$ sur $S$, c'est-à-dire de la fonction $f(r(t))$. Par la règle de Fermat (Théorème 1.5.4), nous concluons que la dérivée de $f(r(t))$ doit être nulle en $t = t^*$. Par la dérivation en chaîne, nous obtenons que

$$\nabla f(r(t^*))^T \cdot r'(t^*) = 0\,,$$

où $r'(t^*)$ est la matrice Jacobienne de $r$ au point $x^*$ (comme $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, la matrice Jacobienne de $r$ est un vecteur colonne). Géométriquement, cette dernière égalité exprime que le gradient de $f$ est orthogonal au vecteur $r'(t^*)$ au point $x^*$. Or, ce dernier est le vecteur tangent à la courbe tracée par $r(t)$ et, par conséquent, aussi à l'ensemble admissible $C$. Dès lors, on peut affirmer que le vecteur $\nabla f(x^*)$ est orthogonal à tout vecteur tangent de $C$ et est donc orthogonal à l'ensemble $C$ lui-même. En même temps, $\nabla g(x^*)$ est orthogonal à l'ensemble $C$ parce qu'il s'agit d'une courbe de niveau ($g = 0$). Hormis quelques cas dégénérés où il y a plusieurs directions orthogonales à une courbe de niveau, il existe une seule direction orthogonale à une courbe de niveau d'une fonction. C'est pourquoi il découle du raisonnement qu'en un point $x^*$, solution du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité, les vecteurs $\nabla f$ et $\nabla g$ sont tous les deux orthogonaux à $C$ et, en conséquence, parallèles. C'est la conclusion du Théorème de Lagrange 4.1.1. La figure ci-dessous (Figure 4.5) illustre le cas d'un problème à trois variables sous une contrainte d'égalité.

Selon nos quatre critères nous obtenons l'analyse suivante de cette justification :

**Explication ou vérification ?** Le raisonnement présenté est a priori une argumentation et non une preuve pour la raison suivante : nous avons passé à plusieurs reprises des détails techniques nécessaires pour construire une preuve rigoureuse du Théorème de Lagrange. Par exemple, la non-dégénérescence garantie par la condition de régularité n'est pas exposée, tout comme l'existence de la paramétrisation $r(t)$ telle que $r(t^*) = x^*$ a été admise. Quant à la distinction entre explication et justification, les deux fonctionnalités sont présentes. Le raisonnement ainsi que l'appui sur le graphique nous laisse dire que l'argumentation couvre en tout cas bien sa fonctionnalité explicative, mais aussi vérificative. Une preuve rigoureuse utilisant cette idée intuitive de paramétrisation peut être trouvée dans (Luenberger, 2004 ; Knoerr, 1998).

**Différents registres ?** Le registre du langage naturel est principalement invoqué, mais alterne de temps en temps avec les registres algébrique et symbolique. À la fin, le

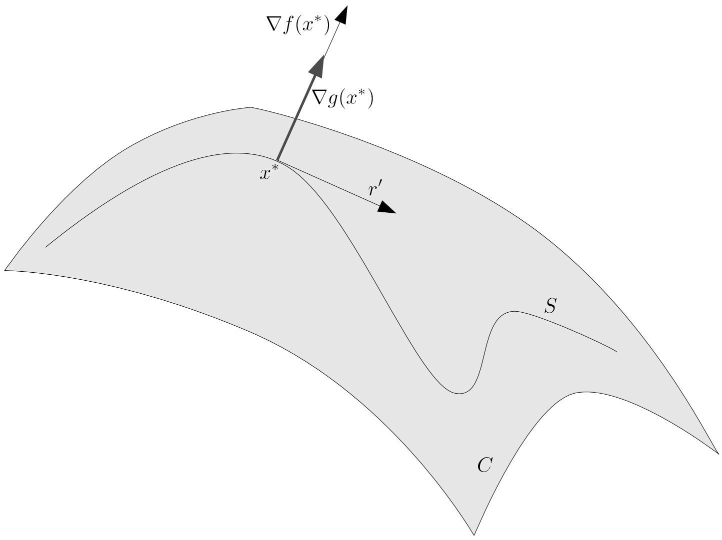



FIGURE 4.5 – Paramétrisation d'une courbe tracée sur l'ensemble admissible (Kalman, 2009b, p.104)

registre graphique vient compléter l'argumentation et donne un appui supplémentaire.

**Différents cadres ?** Le cadre principal est celui de la géométrie avec quelques éléments issus du cadre de l'analyse. Cependant, les arguments importants sont tous issus du cadre de la géométrie : l'espace tangent en un point de l'ensemble admissible permet de caractériser ce dernier indépendamment des fonctions qui le définissent, paramétrer une courbe dans l'ensemble admissible devient la clé de la démonstration et l'orthogonalité entre vecteurs rend une définition de l'espace tangent possible. Le cadre de l'algèbre n'est pas mentionné explicitement bien que nous y trouvions les concepts d'espace tangent et d'espace orthogonal à un ensemble, notions qui sont utilisées dans une preuve rigoureuse basée sur cette approche par paramétrisation.

**Théorème des fonctions implicites ou non ?** Le Théorème des fonctions implicites n'apparaît pas explicitement. C'est en effet l'existence de la paramétrisation de la courbe $S$ qui peut être démontrée en utilisant le Théorème des fonctions implicites. Cependant, son utilisation peut être évitée, une fois de plus, lorsque d'autres résultats mathématiques sont consultés. Le livre (Luenberger, 2004) fait appel au Théorème des fonctions implicites, tandis que l'article de Knoerr (1998) passe par la théorie des équations différentielles ordinaires pour démontrer l'existence d'une paramétrisation de la courbe.

## Mapping combiné

Une dernière argumentation de l'approche standard que nous présentons est issue de l'article de Carathéodory (1935). Nous l'incluons dans nos travaux en référence à la règle des multiplicateurs de Carathéodory (Théorème 1.5.10). Elle se distingue des autres argumentations par son idée de combiner les deux mappings[49] (de $f$ et de $g$) dans un seul mapping. Considérons le cas d'un problème de minimisation à deux variables sous une seule contrainte d'égalité ($n = 2, k = 1$). Comme précédemment, nous cherchons le minimum de $f$ sous la contrainte $g = 0$. Carathéodory propose de définir la fonction suivante :

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \rightsquigarrow (f(x, y), g(x, y))\,.$$

Supposons que $(x^*, y^*)$ soit un minimum local du problème considéré. La Figure 4.6 illustre l'action de la fonction $\Psi$ sur un couple $(x, y)$.

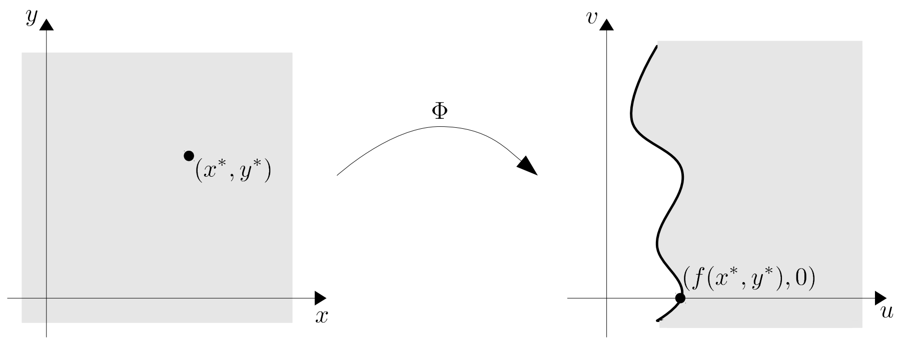



FIGURE 4.6 – Mapping combiné (Kalman, 2009b, p.106)

La partie grisée sur le graphique de gauche indique le domaine de définition de la fonction $\Psi$. Sur le graphique de droite, la partie grisée correspond à l'ensemble image du mapping $\Psi$ et les axes sont indicés par les variables $u$ et $v$ définies respectivement par

$$\begin{cases} u &= f(x, y)\,, \\ v &= g(x, y)\,. \end{cases}$$

Nous constatons que l'ensemble des points vérifiant la contrainte est envoyé par la fonction $\Psi$ sur l'axe des $u$. Pour minimiser $f$ sous la contrainte $g = 0$, nous cherchons donc le point sur l'axe des $u$ appartenant à l'ensemble image de la fonction $\Psi$ et se trouvant le plus à gauche possible. Si le problème d'optimisation a une solution en $(x^*, y^*)$, alors $(u^*, 0) = \Psi(x^*, y^*)$ doit se trouver sur la frontière de l'ensemble image. En effet, par l'absurde, supposons que $(u^*, 0)$ ne soit pas sur la frontière de l'ensemble image. Alors, il doit y avoir un point $(u, 0) = (f(x, y), g(x, y))$ tel que $u < u^*$. Ceci implique à son tour qu'il existe un point $(x, y)$ tel que $f(x, y) < f(x^*, y^*)$ et $g(x, y) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $(x^*, y^*)$ est un minimum local de $f$ sous la contrainte $g = 0$.

À l'étape suivante, nous considérons la matrice Jacobienne de la fonction $\Psi$ :

$$J_\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

49. Nous utilisons le mot *mapping* comme synonyme de *fonction continue* pour insister sur le fait que nous donnerons des représentations graphiques de ces fonctions.

En un point $(x, y)$ tel que la matrice $J_\Psi(x, y)$ est une matrice inversible, la théorie des fonctions différentiables permet d'affirmer qu'un voisinage de ce point est envoyé, par l'action de la fonction $\Psi$, sur un voisinage de $\Psi(x, y)$. Le point $\Psi(x, y)$ se trouve donc à l'intérieur de l'ensemble image. Comme nous avons constaté qu'en un extremum du problème d'optimisation $f$ sous la contrainte $g = 0$, l'image $\Psi(x^*, y^*)$ doit être sur la frontière de l'ensemble image de $\Psi$, nous déduisons que la matrice Jacobienne au point $(x^*, y^*)$ doit être singulière, ce qui veut dire que les lignes de cette matrice sont linéairement dépendantes. Cette dépendance linéaire des lignes se traduit encore par le fait que $\nabla f$ et $\nabla g$ sont parallèles au point $(x^*, y^*)$.

Voici l'analyse de ce dernier discours technologique de l'approche standard :

**Explication ou vérification ?** Nous considérons cette argumentation comme expliquant et vérifiant le Théorème 1.5.10. En effet, elle réussit à vérifier la conclusion du Théorème 1.5.10 tout en présentant un aperçu du pourquoi le résultat est vrai. Néanmoins, nous référons à l'article (Carathéodory, 1935) pour une démonstration rigoureuse de cette idée intuitive.

**Différents registres ?** Le registre du langage naturel est principalement évoqué dans cette argumentation, et l'utilisation des registres algébrique et symbolique est réduit à un minimum. Le registre graphique complète l'argumentation et peut être considéré comme outil de visualisation des idées présentées dans l'argumentation. Dans une autre présentation de cette idée intuitive, les registres algébrique et symbolique prendraient probablement plus d'ampleur.

**Différents cadres ?** Le cadre dominant est celui de l'analyse et de la différentiabilité des fonctions à plusieurs variables réelles en particulier. Le cadre de l'algèbre (l'ensemble image, la dépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs) apporte à la fin du raisonnement la conclusion du théorème.

**Théorème des fonctions implicites ou non ?** Tout au long de l'argumentation, l'utilisation du Théorème des fonctions implicites est évitée. D'autres résultats du calcul différentiel et intégral sont mis en valeur dans le raisonnement qui est basé sur la construction du mapping combinant les fonctions $f$ et $g$.

La section suivante présente deux justifications de l'approche par fonction lagrangienne qui seront analysées selon les mêmes quatre critères que ceux de la présente section.

### 4.6.5 Discours technologiques sur l'approche par fonction lagrangienne

Bien que la forme que Lagrange a donnée du théorème qui porte aujourd'hui son nom soit celle de l'approche par fonction lagrangienne $\theta_{L_{flagr}}$, elle n'est que rarement illustrée ou justifiée. L'énoncé est plutôt présenté comme corollaire de l'approche standard, $\theta_{L_{stand}}$, pour donner -̃après définition de la fonction lagrangienne-̃ aux multiplicateurs de Lagrange le statut de variables.

Nous partageons cependant l'avis de Kalman (2009b) selon lequel il est regrettable que l'approche par fonction lagrangienne n'est que rarement visualisée graphiquement au sein d'un enseignement du Théorème de Lagrange. Kalman propose en conséquence une preuve permettant une illustration attrayante et justifiant la conclusion du Théorème 4.1.2 dans l'article (Kalman, 2009a). Outre cette argumentation géométrique de Kalman, nous exposons une deuxième idée plus analytique dans cette section. Les deux discours technologiques étudiés sont :

1. Pénalisation ;
2. Ajustement du terrain.

**Pénalisation**

Le mathématicien parle de *pénalisation* pour un problème d'optimisation avec contraintes lorsqu'il évoque le principe suivant : négliger les contraintes tout en ajoutant un terme de pénalisation à la fonction objectif si les contraintes sont violées. Autrement dit, remplacer un problème avec contraintes par un problème sans contraintes dont la fonction objectif "décourage" en quelque sorte les points non admissibles. Les méthodes de pénalisation sont très utilisées, surtout dans les méthodes numériques d'optimisation. Mathématiquement, on remplace le problème avec contraintes

$$(P_C) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathcal{U}} & f(x) \\ \text{SC} & x \in C \end{cases}$$

par un problème sans contraintes

$$(P_C^\epsilon) \left\{ \min_{x \in \mathcal{U}} \quad f(x) + \tfrac{1}{\epsilon}\alpha(x) \right. ,$$

où $\alpha : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}$ est une fonction de pénalisation (inexacte[50]) des contraintes et $\epsilon > 0$. Le premier objectif est de trouver des fonctions $\alpha(x)$ telles que les problèmes $(P_C)$ et $(P_C^\epsilon)$ soient équivalents, c'est-à-dire tels qu'ils aient les mêmes solutions lorsque $\epsilon \to 0$ (violer les contraintes doit être de plus en plus pénalisé pour garantir une solution admissible du problème initial). Ensuite, ayant deux problèmes équivalents, le mathématicien recherche la solution du problème *pénalisé* sans contraintes et construit, pour une suite de valeurs $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$, la suite $(x_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$. En passant à la limite lorsque $k \to +\infty$, $(\epsilon_k) \to 0$, et la suite $(x_k^*)$ converge vers la solution du problème d'optimisation avec contraintes. Nous remarquons que ce procédé est itératif pour trouver la solution du problème $(P_C)$. Cette composante itérative se retrouve encore dans les preuves analytiques du Théorème de Lagrange qui sont basées sur le principe de la pénalisation.

Supposons qu'on veuille minimiser $f$ sous contrainte $g = 0$ $(n = 2, k = 1)$. Nous construisons la fonction *augmentée*[51] $F(x, y) = f(x, y) + \frac{\sigma}{2}(g(x, y))^2$ et cherchons le minimum de la fonction sans contrainte. Nous espérons que la contribution du terme $\frac{\sigma}{2}(g(x, y))^2$ soit nulle en la solution. Pour ce faire, nous augmentons la valeur de $\sigma$ successivement dans

50. On dit qu'une fonction de pénalisation associé au problème sous contraintes $(P_C)$ est *exacte* si toute solution de $(P_C)$ minimise $f(x) + \frac{1}{\epsilon}\alpha(x)$ et qu'elle est *inexacte* dans le cas contraire (il y a des solutions de $(P_C)$ qui ne minimisent pas $f(x) + \frac{1}{\epsilon}\alpha(x)$). (Gilbert, 2003, p.376)

51. Cette fonction est encore appelée *fonction de pénalisation quadratique* (Nocedal & Wright, 1999, p.492).

une optique de forcer le terme $(g(x, y))^2$ à diminuer et, ainsi, de minimiser la fonction $F$. En exécutant ce procédé itérativement, la fonction $g(x, y)$ prend des valeurs (en valeur absolue) de plus en plus petites justifiant le choix du mot *pénalisation* : plus on s'éloigne des points admissibles (vérifiant $g = 0$), plus on "pénalise". En permettant à $\sigma$ de prendre des valeurs qui tendent vers $+\infty$, les chercheurs spécialisés en optimisation ont démontré que la suite des solutions du problème de minimiser $F$ sans contraintes tend vers la solution du problème de minimisation de $f$ sous la contrainte $g = 0$. Sans entrer dans les détails, ce même procédé permet, à l'intérieur d'une preuve analytique, de démontrer le Théorème de Lagrange 4.1.2.

Des explications plus détaillées ainsi que des démonstrations rigoureuses reprenant l'idée de la pénalisation peuvent être trouvées dans (McShane, 1973 ; Bertsekas, 1999). Le concept de fonction de pénalité est exposé dans (Hestenes, 1975, pp.255-261).

Nous donnons quelques commentaires à propos de ce discours technologique :

**Explication ou vérification ?** Nous n'avons pas exposé un discours technologique de $\theta_{L_{flagr}}$ proprement dit. Notre intention était plutôt de présenter l'idée clé et intuitive qui guide la construction de la conclusion du Théorème 4.1.2 que de développer une preuve rigoureuse. En effet, une preuve utilisant le concept de pénalisation est très technique et moins intuitive que les argumentations données pour l'approche standard. Nous qualifions donc notre présentation d'argumentation vérificative sans pour autant être aussi informative que les argumentations exposées précédemment.

**Différents registres ?** Bien que les preuves utilisant une approche par fonction de pénalité soient toutes analytiques et s'inscrivent, en conséquence, dans les registres symbolique et algébrique, nous avons tenté de donner une explication du concept de base dans le registre du langage naturel. Les registres symbolique et algébrique ont aidé à présenter cette idée de pénalisation. Dans une preuve rigoureuse (par exemple, dans (McShane, 1973)), les registres symbolique et algébrique sont dominants. Nous n'avons pas rencontré le registre graphique dans cette approche.

**Différents cadres ?** Le cadre principal est celui de l'analyse et de la différentiabilité des fonctions à plusieurs variables réelles en particulier. En particulier, le concept de fonction de pénalité induit une utilisation du cadre de l'analyse qui empêche en même temps l'utilisation du cadre de la géométrie. L'approche par pénalisation semble fonctionner exclusivement dans le cadre de l'analyse.

**Théorème des fonctions implicites ou non ?** Il y a moyen d'éviter le Théorème des fonctions implicites en utilisant d'autres résultats classiques de l'analyse comme le Théorème de Bolzano-Weierstrass dans l'exemple de la preuve de McShane (1973).

### Ajustement du terrain

La dernière argumentation analysée est tirée d'une idée du mathématicien Kalman, présentée dans (Kalman, 2009b, 2009a) et appelée *"ajustement du terrain de jeu"*[52]. Dans cet article, Kalman fait remarquer que, traditionnellement, l'approche par fonction lagrangienne "manque d'une véritable interprétation géométrique" (Kalman, 2009b, p.107). En

52. "Leveling the playing field".

plus, elle est souvent présentée avec une idée fausse qu'il appelle *transformation fallacy*[53]. Cette première idée erronée consiste à prétendre que "chercher les extrema de la fonction $f$ sous la contrainte $g = 0$" revient à "chercher les extrema de la fonction lagrangienne". Autrement dit, le problème d'optimisation de $f$ sous la contrainte $g = 0$ peut être transformé, d'après cette méprise, en un problème d'optimisation sans contrainte, à savoir "optimiser la fonction lagrangienne". Or, nous rappelons que le Théorème de Lagrange est seulement une condition nécessaire d'optimalité (et non une condition suffisante). Il affirme donc uniquement que les solutions se trouvent parmi les points stationnaires de la fonction lagrangienne et ne donne aucune indication sur l'optimalité éventuelle de ces points pour la fonction lagrangienne. Kalman va plus loin dans son raisonnement et prouve le théorème suivant.

**Théorème 4.6.1** (Kalman, 2009a, p.191)
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions de deux variables, deux fois continûment différentiables sur $\mathbb{R}^2$. Soit la fonction $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Si $(x^*, y^*, \lambda^*)$ est un point stationnaire de $F$ tel que $\nabla g(x^*, y^*) \neq 0$, alors $F$ admet un point-selle en $(x^*, y^*, \lambda^*)$.*

Du fait que le Théorème de Lagrange est une condition nécessaire d'optimalité, il est judicieux de préciser que la *recherche* des candidats à être extremum du problème initial est équivalente à la *recherche* des points stationnaires de la fonction lagrangienne, mais que les candidats trouvés ne sont à aucun moment des extrema de la fonction lagrangienne. Notons encore que la méprise apparaît uniquement lorsqu'on considère la fonction lagrangienne comme fonction des variables $x$ et $\lambda$. Quand on la regarde comme fonction des variables $x$ uniquement, il est possible de démontrer qu'un point stationnaire $x^*$ de la fonction lagrangienne qui est minimum local (respectivement maximum local) de $F$, est aussi un minimum local (respectivement maximum local) de $f$ sous la contrainte $g = 0$.

Pour lutter contre l'idée du *transformation fallacy*, l'auteur milite pour une démonstration de l'approche par fonction lagrangienne aussi "forte" que celles de l'approche standard, dans le sens où l'idée intuitive exposée et véhiculée dans la preuve doit être persuasive, convaincante et avec support graphique si possible. L'idée de son argumentation géométrique est de considérer la règle des multiplicateurs de Lagrange comme une technique d'"ajustement du terrain de jeu".

Considérons une dernière fois la recherche du maximum d'une fonction $f$ sous la contrainte $g = 0$[54]. Soit le point $(x^*, y^*)$, solution du problème. Il se peut que ce point soit non seulement le maximum de $f$ sous la contrainte $g = 0$, mais aussi le maximum de $f$ (sans contrainte). Si tel est le cas, le plan tangent de la fonction $f$ au point $(x^*, y^*)$ est horizontal. Le résultat justifiant cette observation est la Règle de Fermat (Théorème 1.5.4).

Cependant, cette configuration n'apparaît généralement pas lors d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. Représentons la courbe de niveau définie par $g(x, y) =$

53. "Première idée erronée induite par la transformation".

54. Kalman propose un problème de maximisation au lieu d'un problème de minimisation dans (Kalman, 2009b, pp.115-117).

0 sur la surface de la fonction $f$ et appelons cette courbe $S$. Soit l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \min & f(x,y) = 2 - x^2 - 2y^2 \\ \text{SC} & g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\,. \end{cases}$$

La Figure 4.7 nous montre que le maximum de la fonction $f$ sous la contrainte $g = 0$ arrive en deux "points élevés" de la courbe $S$ sans avoir un plan tangent de la fonction $f$ horizontal en ces points. En effet, quand on se déplace sur la surface de $f$ le long de la courbe $S$, on rencontre une tangente horizontale dans la direction de $S$ aux points optimaux (correspondant aux minima et maxima de $f$ sous la contrainte $g = 0$) sans avoir pour autant un plan tangent de la fonction $f$ horizontal en ces points.

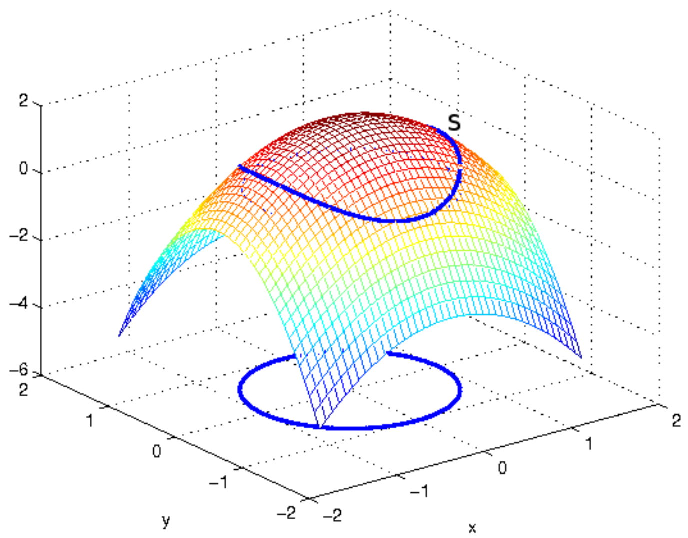



FIGURE 4.7 – Un exemple de problème d'optimisation sous contrainte d'égalité

La question est alors de savoir s'il y a moyen de "déformer" localement la fonction $f$ pour obtenir un plan tangent horizontal en ces points qui nous intéressent sans toucher pour autant à la contrainte $g(x,y) = 0$ (car sinon on bouge éventuellement la position du maximum sur la courbe $S$). Autrement dit, on accepte de modifier les valeurs de la fonction $f$ lorsqu'on n'est pas sur la courbe $S$. Kalman propose de pivoter la surface définie par $f$ autour de la tangente à la courbe $g(x,y) = 0$ au point $(x^*, y^*)$ jusqu'à l'obtention d'un plan tangent horizontal en ce point. Lorsqu'il est possible d'atteindre cet objectif, la condition d'optimalité nécessaire sera du style "Règle de Fermat", à savoir un gradient qui s'annule nécessairement en la (les) solution(s) du problème d'optimisation.

Pour effectuer cette déformation analytiquement, il suffit d'additionner une perturbation à la fonction $f$. Mais en même temps, nous ne voulons pas changer les valeurs de $f$ le long des points satisfaisant la contrainte $g(x,y) = 0$. Comme $g = 0$ le long de cette courbe $S$, la fonction $g(x,y)$ convient comme perturbation. Mieux encore, ajouter un multiple de cette fonction a le même effet : les valeurs de la fonction $f$ sont modifiées mais restent inchangées le long de la courbe $S$. Définissons maintenant cette fonction perturbée :

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)\,.$$

Pour l'instant, la fonction $F$ est vue comme une fonction à deux variables, ou plutôt une famille de fonctions à deux variables. En effet, nous avons une fonction $F$ pour chaque valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette situation est représentée sur la Figure 4.8.

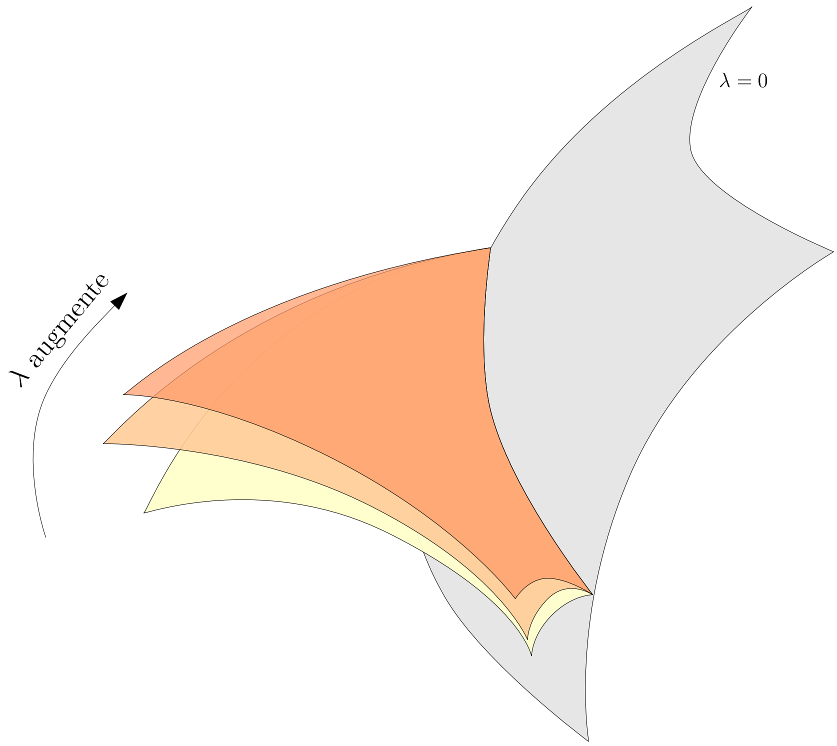



FIGURE 4.8 – Graphiques de la fonction $F$ pour différentes valeurs de $\lambda$ (Kalman, 2009b, p.116)

La surface de $F$ correspondant à la valeur $\lambda = 0$ est la fonction $f$ sans perturbation. Toutes les autres surfaces croisent celle-ci le long de la courbe $S$ ce qui entraîne que le maximum de $f$ sous la contrainte $g = 0$ est toujours le point $(x^*, y^*)$, point le plus élevé sur la courbe $S$. La Figure 4.8 illustre donc que prendre différentes valeurs de $\lambda$ permet de réaliser le pivotage désiré. Intuitivement, il paraît clair - une étude plus analytique permet la démonstration rigoureuse - qu'il existe un choix de $\lambda^*$ qui rend le plan tangent de la fonction perturbée $F$ horizontal au point $(x^*, y^*)$. Autrement dit, nous obtenons $\nabla F(x^*, y^*) = 0$ pour la valeur $\lambda^*$ fixée, ce qui entraîne que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + \lambda^* \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & = & 0\,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + \lambda^* \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) & = & 0\,, \\ g(x^*, y^*) & = & 0\,. \end{cases}$$

Lorsqu'on incorpore le paramètre $\lambda$ comme troisième variable de la fonction $F$, on trouve que le système d'équations ci-dessus n'est rien d'autre que la conclusion du Théorème de Lagrange 4.1.2.

Cette argumentation donne une interprétation intuitive du discours technologique $\theta_{L_{flagr}}$ et introduit le multiplicateur de Lagrange optimal de façon plus transparente que les méthodes de pénalisation. En plus, il est possible de retrouver, par la méthode d'ajustement, une interprétation connue du multiplicateur de Lagrange. Nous la présentons après l'analyse de cette démonstration.

Voici notre analyse basée sur la grille de comparaison établie au début de la section :

**Explication ou vérification ?** Le discours technologique ci-dessus est une argumentation explicative qui passe, certes, par des éléments vérificatifs mais qui assume principalement son rôle d'explication. Prouver rigoureusement le Théorème de Lagrange par la méthode d'ajustement du terrain nécessite plus de détails quant à la définition du pivotage, la preuve de l'existence d'une valeur $\lambda^*$ optimale, etc.

**Différents registres ?** Le registre du langage naturel domine dans cette argumentation. Il est complété par les registres symbolique et algébrique, qui deviendraient plus dominants si l'on décidait de rédiger une preuve prenant appui sur cette idée intuitive. Notons que le registre graphique peut être sollicité pour donner des visualisations graphiques des affirmations mathématiques comme effectué ci-dessus.

**Différents cadres ?** Le cadre de l'analyse est évoqué, ainsi que le cadre de la géométrie qui intervient à travers les notions de surface, de courbe ou de pivotage. Cependant, le cadre du calcul différentiel et intégral, en particulier les concepts de l'optimisation, reste la base de cette argumentation. Nous ne trouvons pas de trace du cadre de l'algèbre.

**Théorème des fonctions implicites ou non ?** Le Théorème des fonctions implicites n'intervient pas explicitement.

L'idée de l'approche par ajustement de terrain permet de retrouver l'interprétation du multiplicateur comme taux marginal (voir Section 4.5) lorsqu'on est dans le cas d'une seule contrainte d'égalité. En effet, le concept de dérivée directionnelle permet de retrouver cette interprétation économique.

**Définition 4.6.2 (Dérivée directionnelle)** (Nocedal & Wright, 1999, p.583)
*Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle* dérivée directionnelle *de $f$ au point $a \in \mathbb{R}^n$ et dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$ la limite :*

$$D_x f(a; d) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hd) - f(a)}{h}$$

*si elle existe.*

Géométriquement, la dérivée directionnelle $D_x f(a; d)$ est la pente de la tangente au graphe de $f$ dans la direction $d$ au point $(a, f(a))$. Analytiquement, la dérivée directionnelle $D_x f(a; d)$ est le taux de variation de $f$ dans la direction $d$ au point $a$. On a alors (Nocedal & Wright, 1999, p.178) que

$$D_x f(a; d) = \nabla f(a)^T d\,.$$

Rappelons que l'idée de l'ajustement est de pivoter la fonction $f$ autour de la courbe $S$ au point $x^*$ pour trouver un plan tangent horizontal. Autrement dit, si $x^*$ est une solution du problème d'optimisation sous contrainte, alors il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que toutes les dérivées directionnelles de la fonction perturbée $F$ sont nulles en ce point :

$$\exists\, \lambda^* \in \mathbb{R}, \forall\, d \in \mathbb{R}^n : D_x F(x^*; d) = D_x f(x^*; d) + \lambda^* D_x g(x^*; d) = 0\,.$$

Comme nous avons supposé que $f$ n'a pas de plan tangent horizontal en $x^*$, la direction normale à la courbe $S$ définit une direction où $D_x F(x^*; d)$ est différent de 0. Soit $d_n$ cette direction normale de telle sorte que $\|d_n\| = 1$. En même temps, par définition, la direction $d_n$ a la même direction que $\nabla g(x^*)$ et

$$D_x g(x^*; d_n) = \nabla g(x^*)^T d_n \neq 0$$

par la condition de régularité dans les hypothèses du théorème. Nous trouvons le résultat suivant :

$$D_x F(x^*; d_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda^* = -\frac{D_x f(x^*; d_n)}{D_x g(x^*; d_n)}\,.$$

Cette dernière égalité nous montre que la valeur de $\lambda^*$ indique le taux de variation de la fonction objectif $f$ par rapport au taux de variation de la fonction $g$, contrainte du problème. Autrement dit, étant donné une perturbation au point $x^*$ dans une direction perpendiculaire à la courbe définie par la contrainte, le multiplicateur de Lagrange indique comment une variation de la contrainte implique une variation éventuelle de la valeur optimale du problème. Comme mentionné à la section précédente, l'économiste interprète cette signification comme le taux marginal de variation de la valeur optimale par rapport à une variation de la contrainte.

> *Leveling the graph of $f$ using the Lagrangian function $F$ offers an attractive way to think about Lagrange multipliers. It gives a clear and convincing intuitive justification of the Lagrangian approach. It also makes the existence of the necessary $\lambda^*$ transparent, while leading naturally to the interpretation of $\lambda^*$ as the marginal rate of change of the objective function relative to the constraint.* (Kalman, 2009b, p.117)

### 4.6.6 Comparaison des différentes argumentations

En conclusion des différentes argumentations analysées, nous présentons un tableau récapitulatif pointant les principales caractéristiques. Ce tableau est complété avec quelques commentaires que les auteurs des références analysées ont fournis concernant la preuve du Théorème de Lagrange.

#### Tableau récapitulatif

Afin de présenter une comparaison des différentes argumentations de façon synthétique, nous reprenons ci-dessous nos quatre critères de comparaison et donnons une analyse résumée.

Toutes les argumentations ont été présentées en analysant leurs fonctionnalités explicative et vérificative. Nous avons trouvé une dominance dans les différentes justifications au niveau

**explicatif :** courbes de niveau tangentes, paramétrisation, mapping combiné et ajustement de terrain ;

**vérificatif :** utilisation du Théorème de Taylor, utilisation du Théorème des fonctions implicites, paramétrisation, mapping combiné et pénalisation.

Notons que les approches par courbes de niveau tangentes et en utilisant le Théorème des fonctions implicites se combinent facilement (voir, par exemple, (Simon & Blume, 1998)) pour garantir une justification à forte composante explicative et justificative. D'ailleurs, la présence d'un autre théorème au cœur du raisonnement nous fait dire qu'il est difficile d'assumer la fonctionnalité explicative, comme c'est le cas de l'utilisation du Théorème de Taylor et de l'utilisation du Théorème des fonctions implicites. Les étudiants doivent en effet avoir compris ces théorèmes avant de pouvoir comprendre l'essentiel du Théorème de Lagrange. Dans ce contexte, un de nos étudiants à l'université de Namur a rapporté lors d'une expérimentation la remarque suivante en comparant deux justifications différentes :

> *Même si elle* [la justification par paramétrisation sans utilisation du Théorème des fonctions implicites] *est plus longue, elle évite le recours au théorèmes des fonctions implicites, théorème qui n'a été que rapidement vu en premier bac et qui, par conséquent, me semble encore un peu "obscur".*

Quant aux registres, toutes les argumentations se servent du langage naturel pour expliquer et justifier. Le registre symbolique montre la puissance des mathématiques à rédiger des raisonnements de façon concise et le registre algébrique permet la construction de raisonnements valides dans un langage propre aux mathématiciens.

Au niveau des cadres utilisés et applicables, trois cadres nous semblent adéquats dans l'analyse des justifications du Théorème de Lagrange et sont rencontrés dans les différentes approches. Voici une liste des cadres sollicités avec mention des argumentations qui s'y inscrivent. Notons que nous avons trouvé que plusieurs cadres peuvent intervenir dans une même argumentation :

**cadre de l'algèbre :** utilisation du Théorème de Taylor, utilisation du Théorème des fonctions implicites, mapping combiné ;

**cadre de la géométrie :** courbes de niveau tangentes, paramétrisation, ajustement du terrain ;

**cadre de l'analyse :** courbes de niveau tangentes, utilisation du Théorème de Taylor, utilisation du Théorème des fonctions implicites, paramétrisation, mapping combiné, pénalisation.

Le Théorème des fonctions implicites a été rencontré dans les démonstrations suivantes :

**Présence du Théorème des fonctions implicites :** courbes de niveau tangentes, utilisation du Théorème des fonctions implicites, paramétrisation.

La table récapitulative se trouve dans le Tableau 4.2.

La présentation des différentes justifications est une première étape dans la description du rôle de la preuve du Théorème de Lagrange, question qui motive particulièrement

| | Approche | | Fonction | | Registre | | | Cadre | | | Thm. des fcts. implicites | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | standard | par fct. lagr. | explicative | vérificative | langage naturel | symb. et algébr. | graphique | algèbre | géométrie | analyse | oui | non |
| Courbes de niveau tang. | x | | x | | x | x | x | | x | x | x | |
| Thm. de Taylor | x | | | x | x | x | | x | | x | | x |
| Thm. des fcts. implicites | x | | | x | x | x | x | x | x | x | x | |
| Paramétrisation | x | | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x |
| Mapping combiné | x | | x | x | x | x | x | x | | x | | x |
| Pénalisation | | x | | x | x | x | | | | x | | x |
| Ajustement du terrain | | x | x | | x | x | x | | x | x | | x |

Tableau 4.2 – Comparaison entre les différentes argumentations

notre recherche. L'incidence du choix d'une preuve particulière sur l'enseignement et l'apprentissage du Théorème de Lagrange sera analysée plus en détails lors de la description des différentes étapes de la transposition didactique du Théorème de Lagrange.

### Quelques commentaires

Terminons la comparaison entre les différentes argumentations par quelques commentaires issus des références consultées. Ces remarques illustrent les objectifs poursuivis par les auteurs dans la présentation de leur justification respective.

La justification du Théorème de Lagrange donnée par Klein (2010) est probablement celle qui est la plus distante d'une preuve rigoureuse. Ceci n'est pas étonnant étant donné l'intention du manuel de Klein.

> *This tutorial assumes that you [...] are more interested in getting the intuitions and central ideas. It contains nothing which would qualify as a formal proof, but the key ideas need to read or reconstruct the relevant formal results are provided.* (Klein, 2010, p.1)

Autrement dit, bien que la preuve rigoureuse ne soit pas fournie, l'article présente suffisamment d'éléments pour comprendre l'enjeu du Théorème de Lagrange. Ceci confirme son rôle d'argumentation explicative dans le sens où cet article essaie de convaincre le lecteur intéressé et chaque pas du raisonnement est en relation avec la conclusion et s'ajoute aux précédents. De plus, il semble aller de soi d'utiliser abondamment le registre du langage naturel ainsi que le registre graphique pour présenter une explication du Théorème de Lagrange. Bien que le Théorème des fonctions implicites ne soit pas mentionné explicitement par Klein, il mentionne le processus de substitution qui est

> *usually very hard to do.* (Klein, 2010, p.3)

En observant la représentation graphique des courbes de niveau, le Théorème des fonctions implicites permet d'exprimer la tangence entre les différentes courbes de niveau. Ce sont les cadres de l'analyse et de la géométrie qui hébergent ce raisonnement.

Dans la conclusion de son article, Knoerr (1998) précise lui-même dans quel cadre il conçoit sa preuve. De même, l'auteur prévoit les notions et concepts mathématiques qui sont considérés comme acquis pour garantir la bonne compréhension du raisonnement logique.

> *This proof is intended for a course on multivariable calculus [...], although it would also be suitable for courses on optimization. Knowledge of linear algebra [...] is assumed. Some familiarity with systems of ordinary differential equations is required.* (Knoerr, 1998, p.944)

Nous trouvons dans ce commentaire un indice de l'importance du cadre de l'analyse et de l'optimisation pour développer la preuve du Théorème de Lagrange. Mais aussi, il est mis en avant que les jeux de cadre sont une habilité mentale importante que doit maîtriser tout mathématicien. Il est donc compréhensible que ces jeux de cadre figurent aussi dans l'enseignement des mathématiques.

Remarquons que la preuve de Knoerr (1998) est la seule démonstration qui prouve, outre l'existence, l'unicité des multiplicateurs de Lagrange associés à l'extremum $x^*$. Cette propriété des multiplicateurs est d'ailleurs rarement citée lorsqu'on présente le Théorème de Lagrange.

Notre troisième commentaire touche à la première idée erronée induite par la transformation comme mentionnée par Kalman. Dans son livre (Kalman, 2009b), l'auteur se demande pourquoi cette mauvaise conception est si attrayante aux yeux des auteurs et enseignants, tant en mathématiques qu'en économie.

> *Perhaps, some authors accepted the fallacy when they were students, and never questioned it. Others likely know quite well that the solutions to the constrained optimization problem can only be associated with critical points (not necessarily local maxima or minima) of the Lagrangian, but choose to gloss over this point. It is enough, they might argue, if the students can remember and apply the Lagrange multiplier technique. No need to confuse them with epistemological technicalities. I disagree.* (Kalman, 2009b, p.115)

Les dernières phrases de cette citation laissent bien sous-entendre que Kalman attribue beaucoup d'importance aux discours technologiques de l'activité mathématique. En plus, il propose, de façon plus générale, de sensibiliser les étudiants à être critiques par rapport aux techniques en mathématiques :

> *But as a matter of reflex, we (students) should ask* why *? How exactly does that work ? Teachers should encourage this reflex in their students, and be prepared to answer the questions it provokes.* (Kalman, 2009b, p.115)

Atteindre cet objectif est probablement la plupart du temps une mission impossible, mais tenter de l'accomplir devrait être une des missions de chaque enseignant. Dans cet esprit, Kalman propose un rôle à donner à la preuve du Théorème de Lagrange.

> *Heuristic arguments can be an effective way to communicate ideas, but they must be correct, and they should guide us to correct proofs. Seeing how the formal proof reflects the intuitive core strengthens our understanding of both the proof and the intuition.* (Kalman, 2009b, p.115)

Nous nous intéresserons au rôle de la preuve du Théorème de Lagrange dans les organisations didactiques observées.

Nous voudrions terminer la présentation des différents discours technologiques du Théorème de Lagrange avec un commentaire donné par Knoerr à la fin de son article :

> *To be worth teaching, a proof should be enlightening in its own right.* (Knoerr, 1998, p.944)

Cette remarque nous semble pertinente pour résumer l'enjeu de l'enseignement des mathématiques et en particulier de la preuve du Théorème de Lagrange. En effet, pourvu qu'une compréhension du Théorème de Lagrange soit visée, le choix d'une preuve adaptée peut aider à trouver différents accès à ce concept mathématique.

## 4.7 Et à l'heure actuelle ?

Ce survol du savoir savant relatif au Théorème de Lagrange nous montre que l'optimisation est incontestablement une discipline qui est, à l'heure actuelle, très ramifiée et qui permet d'un côté aux chercheurs en mathématiques de faire encore de nombreuses découvertes (autant du côté théorique que du côté implémentation d'algorithmes d'optimisation) et de l'autre côté de mettre tous ces résultats au profit des autres disciplines qui se voient confrontées à des problèmes d'optimisation. Dans ce sens, nous pouvons considérer le Théorème de Lagrange comme une petite pièce d'un grand puzzle. Néanmoins, nous retenons son importance pour la théorie de l'optimisation et pour ses nombreuses applications pratiques.

Notre étude continue maintenant avec la description, ainsi que l'analyse et l'évaluation des organisations mathématiques "à enseigner" se rapportant au Théorème de Lagrange. Ces organisations sont constituées d'éléments praxéologiques provenant du savoir savant qui a été présenté dans ce chapitre. Ceci veut dire qu'à partir d'$OM$ savantes, que nous identifions dans le chapitre suivant, nous définirons une première version de notre modèle épistémologique de référence (MER) du Théorème de Lagrange qui nous permettra d'interpréter et de décrire par la suite, de manière relativement précise, l'activité mathématique relative au Théorème de Lagrange.

Chapitre 5

# Modèle épistémologique de référence

## Sommaire

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une analyse épistémologique et historique du Théorème de Lagrange afin de cerner celui-ci en tant que savoir savant. En tant que point de départ de la transposition didactique, le savoir savant nous met en position de construire empiriquement une première version d'un modèle épistémologique de référence (MER) relatif au Théorème de Lagrange. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes d'organisations mathématiques. Ce MER permettra de témoigner des liens institutionnels aux objets de savoir impliqués dans les praxéologies à enseigner et enseignées dans une institution donnée. En même temps, il sera construit de telle sorte qu'il permette de comprendre les contraintes qui agissent sur cette institution.

Notre MER inclut cinq organisations mathématiques, $OM_1$, $OM_2$, $OM_3$, $OM_4$ et $OM_5$, relatives aux types de tâches suivants :

- $T_1$ Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- $T_2$ Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- $T_3$ Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange.
- $T_4$ Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange.
- $T_5$ Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange.

Comme nous verrons, ces cinq $OM$ regroupent chacune différents types de tâches autour d'une même technologie. Nous les qualifierons dans la suite d'$OM$ locales mais nous les considérerons comme intégrées dans une $OM$ locale plus grande [55] construite autour du thème d'étude "le Théorème de Lagrange". En effet, le Théorème de Lagrange sera le point commun entre les cinq $OM$. À défaut d'une terminologie adéquate, nous appelons "organisations mathématiques locales élémentaires" les cinq organisations mathématiques, $OM_1$, $OM_2$, $OM_3$, $OM_4$ et $OM_5$. Notre MER est alors une "$OM$ locale" à propos du Théorème de Lagrange. Enfin, nous évitons de parler d'"organisations mathématiques ponctuelles" à propos des cinq $OM$ car

> *la mise en place d'une organisation mathématique ponctuelle* $[T, \tau, \theta, \Theta]$ *ne se rencontre par exemple qu'exceptionnellement dans les cours d'études réels : il n'existe guère de thèmes d'étude* $\theta$ *qui ne renvoient qu'à un type de tâches* $T$*. Cette abstraction existe sans doute un peu plus pour l'élève parce que, dans l'état actuel des choses, celui-ci est évalué en priorité à propos de types de tâches* $T$ *dont chacun définit pour lui un sujet d'études à part entière, quasi indépendants des autres.* (Chevallard, 2002a, p.2)

Dans ce chapitre, nous dégageons un ensemble de praxéologies mathématiques vivantes sur base de l'analyse des textes dits "savants" (voir Chapitre 4). Ces praxéologies sont utilisées pour construire un modèle structurant l'ensemble des pratiques mathématiques en lien avec le savoir à enseigner et enseigné. Dans le chapitre suivant, nous affinerons notre MER grâce à l'analyse de manuels et traités universitaires, témoins d'une première transposition du Théorème de Lagrange (voir Figure 2.2). Bien que la construction du MER anticipe l'analyse des manuels de cours, nous ne pouvons pas ignorer les contraintes imposées par l'institution. C'est pourquoi nous espérons obtenir - après analyse du savoir à enseigner et raffinement du MER - un modèle dynamique qui définit soigneusement types

55. La TAD ne prévoit pas le cas d'$OM$ locales qui se regroupent en une $OM$ locale "plus grande".

de tâches, techniques, technologies et théories relatives aux activités mathématiques impliquant le Théorème de Lagrange.

La deuxième section de ce chapitre attirera l'attention sur notre démarche d'identification et de construction des différentes $OM$ locales élémentaires et introduira une distinction entre deux sortes de types de tâches différentes. Les troisième et quatrième sections exposeront les cinq $OM$ locales élémentaires dégagées du savoir savant qui seront utilisées dans nos analyses des savoirs à enseigner et enseigné.

## 5.1 Précisions sur les outils théoriques

Le rôle du modèle épistémologique de référence est de légitimer le savoir à enseigner que nous rencontrons dans l'enseignement universitaire. Notre MER se formule en termes de la TAD et consiste précisément en cinq praxéologies mathématiques locales élémentaires, $OM_1$, $OM_2$, $OM_3$, $OM_4$ et $OM_5$, ayant comme sujet, d'une façon ou d'une autre, le Théorème de Lagrange. Chaque $OM$ assume un rôle différent qui sera expliqué précisément. Avant d'arriver à la description de notre MER, nous donnons plusieurs remarques qui permettent de raffiner le cadre théorique de la TAD.

### 5.1.1 L'outil d'analyse : la TAD

Rappelons qu'une $OM$ est constituée du quadruplet : type de tâches $T$ présent dans une institution donnée, technique $\tau$ permettant d'accomplir les tâches de $T$, technologie $\theta$ justifiant la technique $\tau$ et théorie $\Theta$ justifiant la technologie $\theta$. Dans ce qui suit, il sera de temps en temps suffisant de distinguer le bloc practico-technique $\Lambda = [T, \tau]$ du bloc technologico-théorique $\Pi = [\theta, \Theta]$ d'une organisation mathématique. Une $OM$ sera alors noté $[T, \tau, \theta, \Theta]$ ou $[\Lambda, \Pi]$.

Rappelons que chaque organisation mathématique est identifiée par le type de tâches dont il est question dans l'activité mathématique. Les cinq $OM$ locales élémentaires décrites sont toutes des organisations autour d'une même famille de tâches qui se décompose en différents sous-types de tâches. Ce type de tâches $T$, intitulé de l'$OM$, sera considéré comme l'élément unificateur entre les différentes tâches autour desquels s'organise cette praxéologie mathématique. Pour chacune des $OM$ locales élémentaires, nous établirons une liste (exhaustive) de tâches $t$ rencontrées.

En outre, nous avons fait remarquer que technique, technologie et théorie ne sont pas nécessairement uniques dans une praxéologie mathématique donnée (voir Section 2.2.2). À un même type de tâches peuvent être associées différentes techniques, et en conséquence aussi différents bloc technologico-théoriques (en se rappelant que le Théorème de Lagrange reste la technologie privilégiée dans notre étude). Quand il est opportun, nous indiquons les différentes techniques qui permettent d'accomplir la tâche (ou le type de tâches) en question.

Enfin, nous insistons sur le fait qu'une organisation mathématique est toujours constituée de tous les éléments praxéologiques. Cependant ces éléments peuvent être rendus plus ou moins explicites dans la pratique des enseignants (à l'intérieur d'un syllabus, durant des heures de cours, etc.). Par exemple, nous pouvons imaginer des praxéologies ponctuelles qui ne mentionnent pas la théorie associée ou encore une praxéologie qui développe la technologie et la théorie sans mentionner explicitement la tâche sous-jacente. Dans la description de notre modèle épistémologique de référence, nous donnons un aperçu de l'entièreté de l'organisation mathématique tandis que dans notre analyse du savoir à enseigner et du savoir enseigné, nous relevons les moments et endroits où les éléments praxéologiques sont (quasiment) absents. Nous dirons encore que notre MER est l'$OM$ de référence qui est supposée locale et "absolument complète" dans le sens où elle est construite autour du thème "le Théorème de Lagrange" et où tous les éléments praxéologiques sont identifiés (relatifs à notre choix d'$OM$ locales élémentaires).

### 5.1.2 La double nature des concepts mathématiques

L'étude de l'enseignement du Théorème de Lagrange selon une approche anthropologique, qui est liée étroitement à l'étude des choix et des pratiques institutionnelles, ne peut ignorer les changements qui se produisent sur le plan cognitif des apprenants. De très nombreux travaux de recherche se sont intéressés à la dimension cognitive de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Nous nous intéressons dans cette thèse particulièrement aux travaux de Sfard (1991).

Anna Sfard propose en effet de faire une distinction entre les conceptions procédurales et les conceptions structurales, distinction qui s'avérera pertinente pour notre MER comme nous le verrons par la suite. Prenons, pour illustrer, l'exemple d'un concept mathématique issu du calcul différentiel et intégral : la suite numérique. Pour savoir ce qu'est une suite numérique, nous constatons qu'

> une suite numérique peut être le résultat de procédés illimités de calculs.

On trouve ces procédés illimités de calculs, par exemple, dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie. Cette explication se trouve au niveau *procédural* de la conception d'une suite numérique. En effet, l'explication fait intervenir des processus, des algorithmes ou encore des actions sur l'objet plutôt que l'objet lui-même.

D'autre part, nous pouvons donner l'explication suivante d'une suite numérique :

> une suite numérique est une famille de nombres réels indexée par les entiers naturels.

Cette explication se trouve au niveau structural de la conception d'une suite numérique car elle fait intervenir la définition mathématique du concept. Bien entendu, les deux explications n'ont pas le même statut. La deuxième est une véritable définition mathématique ce qui n'est pas le cas de la première. Mais toutes les deux atteignent le même objectif : expliquer et rendre intelligible le concept de suite numérique. Certes, le mathématicien dira que cette distinction n'apporte guère au concept de "suite numérique" car reconnaître les concepts et objets mathématiques dans leur nature structurale fait partie de son travail et de ses capacités mentales. Mais au niveau de l'apprentissage des mathématiques, ceci est une constatation importante car l'enseignement essaie justement - par l'intermédiaire de conceptions accessibles - de faciliter l'accès aux concepts et idées mathématiques.

Il est donc important de considérer l'enseignement, et dans notre cas la transposition didactique des mathématiques, à travers la formation des conceptions, appelée *conceptuali-*

*sation.* Historiquement, il peut être montré (Sfard, 1991) que la formation des conceptions mathématiques se réalise la plupart du temps

**du procédural au structural**,

et de nombreux exemples dans les différents domaines des mathématiques en témoignent : le concept de nombre (naturel, rationnel, réel, complexe), le concept de fonction, etc. [56]

Cette idée nous amène à distinguer deux sortes de types de tâches différents relatifs au Théorème de Lagrange. L'idée est de classifier les types de tâches comme suit.

**Procédural :** Le qualificatif "procédural" résume le caractère à la fois "dynamique, séquentiel et détaillé" (Sfard, 1991, p.4) dans les tâches proposées. Un type de tâches est dit "procédural" lorsqu'il fait appel au caractère outil d'un concept mathématique (le concept comme processus). Les types de tâches procédurales expriment une suite d'opérations qu'il faut effectuer pour accomplir la tâche demandée. Nous associons la mise en fonctionnement d'un concept mathématique au niveau procédural d'une tâche, où l'élève utilise les processus liés à la connaissance de ce concept, sans que ces processus soient nécessairement transformés en objet.

**Structural :** La construction des opérations sur des procédures détermine, pour une part importante, l'appropriation des apprentissages. C'est pourquoi un type de tâches est dit "structural" lorsqu'il fait appel au caractère objet d'un concept mathématique (le concept comme objet). Ce sont les types de tâches qui se définissent par "expliquer", "interpréter", "définir", "analyser", "résumer", etc.

La distinction entre tâches procédurales et structurales, ainsi que l'observation que la formation des conceptions mathématiques se fait la plupart du temps "du procédural au structural", organisent de façon naturelle la présentation de nos cinq $OM$ locales élémentaires. Parmi les $OM$ que nous identifions, trois sont associées à des types de tâches procédurales et deux à des types de tâches structurales :

**Types de tâches procédurales :**

- $T_1$ Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- $T_2$ Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- $T_3$ Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange.

**Types de tâches structurales :**

- $T_4$ Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange.
- $T_5$ Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange.

Notons encore que l'on peut supposer que l'activité mathématique essaie d'allier le côté structural au côté procédural dans l'enseignement des mathématiques. Cependant, l'importance accordée à chacun de ces deux aspects de l'activité mathématique dans les processus d'enseignement et dans la réalisation des tâches inhérentes à chaque type d'activités varie d'une institution à l'autre. La mesure de cette importance sera un des critères dans

56. Voir (Sfard, 1991, pp.11-16).

nos analyses des savoirs à enseigner et enseigné.

Notre dernier commentaire avant la présentation des différentes *OM* locales élémentaires concerne la distinction entre le caractère *outil* et le caractère *objet* d'un concept mathématique chez Douady (1986). Cette idée rejoint directement l'idée de Sfard :

- Il est *outil* parce qu'il sert à résoudre des problèmes. Un concept est outil lorsque l'intérêt est focalisé sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème ou pour poser des questions. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes et plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.
- Il est *objet* parce qu'il s'intègre dans un corps de connaissances. Un concept est objet lorsqu'il est considéré d'un point de vue culturel, qu'il a une place dans l'édifice structuré des connaissances reconnues socialement.

Les deux facettes outil et objet d'un concept se développent de façon dialectique mais généralement c'est par la facette outil que s'initie le développement conceptuel.

## 5.2 Trois familles de tâches procédurales

Nous sommes maintenant en mesure de présenter les cinq *OM* qui constituent notre MER. Nous basant sur les activités mathématiques décrites dans le chapitre précédent, nous identifions trois organisations mathématiques locales élémentaires de type procédural autour des questions de

$T_1$ **:** Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité ;

$T_2$ **:** Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité ;

$T_3$ **:** Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange.

Ces trois *OM* s'organisent autour de trois problématiques rencontrées dans l'histoire de l'optimisation en mathématiques et en économie.

### 5.2.1 Chercher des candidats à être extremum

La première *OM* locale élémentaire que nous décrivons s'intitule "Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité". Sur base des extraits des œuvres de Lagrange (Section 4.2), nous observons que la méthode des multiplicateurs de Lagrange apparaît initialement comme une *technique* particulière pour résoudre une tâche bien précise dans le livre "Mécanique analytique". Ensuite, Lagrange utilise sa technique pour résoudre d'autres problèmes (Fraser, 2005). Nous retrouvons donc bien le côté procédural de la tâche dans les intentions de Lagrange. Les familles de tâches suivantes apparaissent dans les publications de Lagrange :

$T_{\textbf{Mécanique}}$ **:** Trouver les conditions de l'équilibre d'un système quelconque.

$T_{\textbf{Calculus}}$ **:** Trouver les équations du maximum ou minimum d'une fonction quelconque de plusieurs variables lorsqu'il y a "entre elles une ou plusieurs équations".

$T_{\textbf{CalculDesVariations}}$ **:** Trouver la courbe qui, parmi une certaine classe donnée, minimise ou maximise une fonction donnée de $x$, $y$, $y'$, $y''$, etc.

Comme nous nous intéressons dans cette thèse à l'enseignement de l'optimisation de fonctions de plusieurs variables, nous ne considérons dans la suite que la famille de tâches $T_{\text{Calculus}}$ qui sera identifiée à celle de $T_1$.

Remarquons que la réalisation d'une tâche de cette famille peut utiliser ou ne pas utiliser la technique des multiplicateurs de Lagrange selon le problème initial. Seulement, si le Théorème de Lagrange est évoqué, c'est sa nature de condition nécessaire d'optimalité (en particulier sa forme contraposée) qui apporte les éléments de résolution et de justification. En effet, sous des hypothèses appropriées, le Théorème de Lagrange fournit une condition que doit vérifier un extremum du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. Sous sa forme contraposée, le Théorème de Lagrange permet alors d'identifier les candidats qui sont potentiellement solution du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.

### Fiche caractéristique

Le Tableau 5.1 reprend le contenu de la première $OM$ locale élémentaire, $OM_1$.

**OM$_1$ : Chercher les candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité**

| | | Description |
|---|---|---|
| **Type de tâches** | $T_1$ | Identifier tous les candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. |
| **Technique** | $\tau_{11}$ | Appliquer la méthode de substitution ; |
| | $\tau_{12}$ | Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange sous l'approche standard ($\tau_{L_{stand}}$) ; |
| | $\tau_{13}$ | Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange sous l'approche par fonction lagrangienne ($\tau_{L_{flagr}}$) ; |
| | $\tau_{14}$ | Chercher tous les points singuliers du problème. |
| **Technologie** | $\theta_{11}$ | Méthode de substitution et recherche des candidats dans les problèmes d'optimisation sans contraintes ; |
| | $\theta_{121}$ | $\theta_{L_{stand}}$ à l'aide des courbes de niveaux tangentes ; |
| | $\theta_{122}$ | $\theta_{L_{stand}}$ à l'aide du Théorème des fonctions implicites ; |
| | $\theta_{123}$ | $\theta_{L_{stand}}$ à l'aide d'une paramétrisation ; |
| | $\theta_{124}$ | $\theta_{L_{stand}}$ à l'aide du Théorème de Taylor ; |
| | $\theta_{125}$ | $\theta_{L_{stand}}$ à l'aide de mappings combinés ; |
| | $\theta_{131}$ | $\theta_{L_{flagr}}$ à l'aide d'une méthode de pénalisation ; |
| | $\theta_{132}$ | $\theta_{L_{flagr}}$ à l'aide d'un ajustement du terrain ; |
| | $\theta_{14}$ | Définition d'un point singulier et explicitation de la condition de régularité du Théorème de Lagrange. |
| **Théorie** | $\Theta_1$ | Théorie de l'optimisation faisant intervenir l'algèbre, le calcul différentiel ou encore la géométrie. |

TABLEAU 5.1 – $OM_1$ : Chercher des candidats à être extremum

Voici quelques éléments d'explication concernant le Tableau 5.1 :

**Type de tâches** Le type de tâches principal est :

$T_1$ **:** Chercher les candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.

En général, la réalisation d'une tâche de cette famille invoque les conditions d'optimalité du premier ordre. Il s'agit d'identifier, parmi tous les points de l'ensemble admissible, ceux qui sont les candidats à être solution du problème d'optimisation. Ce type de tâches sera rencontré aussi dans $T_2$ : "résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité". En effet, après avoir identifié tous les candidats, il faut encore déterminer quels candidats sont effectivement solution.

**Technique** Il est possible de résoudre les tâches de $T_1$ en appliquant différentes techniques. Dans de nombreux problèmes, on a le choix d'appliquer l'une ou l'autre méthode selon la nature et la structure du problème d'optimisation en question. Ainsi, la première technique, $\tau_{11}$, s'applique lorsque les contraintes d'égalité sont des fonctions "simples" (par exemple linéaires) et permettent de réaliser la substitution "facilement". Cependant, cette technique - comme le mentionne Lagrange lui-même - arrive relativement vite au bout de ses limites. En effet, le processus de substitution ne serait pas aussi simple si la contrainte était par exemple donnée par une fonction dite "compliquée" où il n'est pas possible d'exprimer une variable à l'aide de fonctions élémentaires en les autres variables (exemple : $g(x, y) = e^{3xy} - \cos x^2 + y^2 + 2xy^3 = 0$). Néanmoins, la technique de substitution permet d'identifier des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation.
Le Théorème de Lagrange donne une condition nécessaire pour qu'un point corresponde à un extremum. Les points obtenus en résolvant les équations de Lagrange sont donc des candidats à être extremum du problème d'optimisation. Selon l'approche choisie, nous parlons de technique $\tau_{12}$ ou technique $\tau_{13}$.
Parmi les hypothèses du Théorème de Lagrange figure la condition de régularité. Les points qui ne vérifient pas cette condition ne sont pas pris en compte par le théorème. Or, rien ne nous dit que de tels points ne peuvent correspondre à des extrema. Si nous voulons déterminer TOUS les candidats à être extremum, il nous faut donc prendre en compte ces points qui ne vérifient pas la condition de régularité. Cette technique est nommée $\tau_{14}$. Ceci implique que, pour trouver tous les candidats, il faut appliquer conjointement les techniques $\tau_{12}$ et $\tau_{14}$ ou $\tau_{13}$ et $\tau_{14}$.

**Technologie** Chacune des techniques mentionnées, $\tau_{11}$, $\tau_{12}$, $\tau_{13}$ et $\tau_{14}$, admet un discours technologique. Nous avons, pour les techniques $\tau_{12}$ et $\tau_{13}$, les discours technologiques relatifs au Théorème de Lagrange comme décrits dans le chapitre précédent (voir Section 4.6). Rappelons que chacune des justifications met en avant un aspect différent du Théorème de Lagrange et s'inscrit ainsi dans des cadres et registres différents [57]. Notons encore que $\tau_{13}$ nécessite la construction de la fonction lagrangienne, fonction qui n'est pas sollicitée dans $\tau_{12}$. Quant à la technologie relative à la méthode de substitution, $\tau_{11}$, il s'agit principalement d'un discours algébrique relatif à la résolution de systèmes d'équations, combiné au thème de l'optimisation sans

57. Seuls les discours technologiques de la Section 4.6 ont été retenus dans la classification car ils présentent un intérêt pour notre recherche.

contraintes, en particulier la Règle de Fermat. Enfin, lorsqu'on veut trouver TOUS les candidats à être extremum, la technique $\tau_{14}$ se justifie par l'énoncé même du Théorème de Lagrange.

**Théorie** Les fondements théoriques des discours technologiques reposent principalement sur la théorie de l'optimisation comme décrite dans le cadre de la recherche. Implicitement, nous touchons au calcul différentiel, à l'algèbre et à la géométrie qui sont trois des branches importantes des mathématiques.

L'organisation mathématique $OM_1$ décrite ci-dessus est suggérée par les travaux originaux de Lagrange. Elle n'épuise pas encore les contenus mathématiques que nous trouvons actuellement dans l'enseignement universitaire du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie. D'autres organisations mathématiques sont nécessaires pour résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité et pour interpréter le multiplicateur de Lagrange. Cependant, la tâche d'$OM_1$ est la première tâche rencontrée dans l'histoire de l'optimisation.

### 5.2.2 Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité

Comme nous l'avons vu, le 19$^{\text{ème}}$ siècle est marqué par l'intérêt croissant des économistes pour les mathématiques. Ceux-ci mettent en place des modèles économiques qu'il convient d'optimiser, ce qui accélère le développement des mathématiques. Ainsi, les mathématiques prennent très vite le rôle de *savoir fondamental* (Artaud, 2003, p.1) en économie. Or, la résolution d'un problème d'optimisation passe non seulement par l'identification de candidats à être extremum mais aussi par la recherche de la nature de ces candidats. Notre deuxième organisation mathématique, $OM_2$, se charge de décrire les éléments praxéologiques associés à cette activité de trouver une solution à un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.

La résolution des tâches de type $T_1$ ne garantit en rien, en effet, d'avoir effectivement une solution du problème d'optimisation associé (sans autres informations à propos du problème). Il faut prendre en compte qu'il n'est pas certain que les candidats trouvés soient effectivement un extremum (sous contraintes) pour la fonction objectif. En considérant des contraintes d'égalité, le seul cas facile à résoudre complètement est celui impliquant des contraintes affines. Mathématiquement, un ensemble de contraintes affines définit un domaine admissible convexe ce qui facilite la résolution du problème. Dans tous les autres cas, il n'est pas toujours facile de décider de la nature des candidats. Nous sommes donc confrontés au problème de ne pas savoir, a priori, après avoir accompli $T_1$, si nous sommes en présence d'un minimum, d'un maximum ou de ni l'un ni l'autre. Il n'existe malheureusement aucune recette universelle capable de déterminer si un point repéré est un extremum local de $f$ sous contraintes d'égalité, ce qui nous amène à distinguer différentes techniques associées au type de tâches de résoudre un problème d'optimisation sous contrainte d'égalité.

Notons encore que le Théorème de Lagrange intervient dans les justifications des différentes techniques mais peut aussi être évité (voir les techniques $\tau_{24}$ et $\tau_{25}$).

**Fiche caractéristique**

Le Tableau 5.2 reprend le contenu de la deuxième $OM$ locale élémentaire, $OM_2$.

| **$\mathbf{OM_2}$ : Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité** | | |
|---|---|---|
| | | Description |
| **Type de tâches** | $T_{21}$ | Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité sous forme mathématique ; |
| | $T_{22}$ | Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité non-modélisé. |
| **Technique** | $\tau_{21}$ | Dans l'ordre, il faut passer par les étapes suivantes :<br>1. (Modéliser mathématiquement le problème) ;<br>2. Montrer l'existence d'au moins un extremum ;<br>3. Chercher tous les candidats à être extremum (à savoir accomplir une tâche de type $T_1$) ;<br>4. Comparer les valeurs de $f$ aux points repérés. |
| | $\tau_{22}$ | Dans l'ordre, il faut passer par les étapes suivantes :<br>1. (Modéliser mathématiquement le problème) ;<br>2. Chercher tous les candidats à être extremum (à savoir accomplir une tâche de type $T_1$) ;<br>3. Étudier le signe de $f(x) - f(x^*)$ dans un voisinage de $x^*$ ou sur $C$ tout entier, $x^*$ étant un candidat à être extremum. |
| | $\tau_{23}$ | Dans l'ordre, il faut passer par les étapes suivantes :<br>1. (Modéliser mathématiquement le problème) ;<br>2. Chercher les candidats à être extremum (à savoir accomplir une tâche de type $T_1$) ;<br>3. Utiliser une condition d'optimalité suffisante du premier ou du second ordre pour sélectionner parmi les candidats repérés ceux qui sont effectivement un extremum de la fonction $f$ sous la contrainte $g(x) = 0$. |

*Suite page suivante*

| *Début page précédente* | | |
|---|---|---|
| | | Description |
| | $\tau_{24}$ | Appliquer la méthode de substitution pour retrouver un problème d'optimisation sans contraintes. Résoudre ensuite celui-ci en tenant compte des contraintes éventuelles. |
| | $\tau_{25}$ | Résoudre graphiquement le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. |
| **Technologie** | $\theta_{21}$, $\theta_{22}$, $\theta_{23}$ | Chaque technique possède un discours technologique spécifique qui reprend, par exemple, le Théorème de Weierstrass, les conditions suffisantes d'optimalité, etc. En particulier, on y retrouve aussi le discours technologico-théorique d'$OM_1$ et le Théorème de Lagrange. |
| | $\theta_{24}$ | Discours sur la technique $\tau_{24}$. En particulier, on y trouve une discussion sur la résolution des systèmes d'équations ainsi que sur les conditions d'optimalité des problèmes sans contrainte ; |
| | $\theta_{25}$ | Discours sur la technique $\tau_{25}$. En particulier, on y trouve une discussion sur les concepts inscrits au registre des représentations graphiques. |
| **Théorie** | $\Theta_2$ | Théorie de l'optimisation faisant intervenir l'algèbre, le calcul différentiel ou encore la géométrie. |

TABLEAU 5.2 – $OM_2$ : Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité

Voici quelques éléments d'explication concernant le Tableau 5.2 :

**Tâche** La tâche principale de cette organisation mathématique élémentaire est :

$T_2$ **:** Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.

Nous distinguons deux types de tâches procédurales différentes à l'intérieur de ce type de tâches : les problèmes modélisés (sous forme mathématique où il y a eu une modélisation mathématique), $T_{21}$, et les problèmes d'optimisation non-modélisés et les problèmes émanant d'autres horizons (mathématiques ou non) qui se laissant modéliser sous forme d'un problème d'optimisation avec contraintes d'égalité, $T_{22}$. Ainsi, "chercher le maximum de la fonction d'utilité $U(x,y) = xy$ sous la contrainte budgétaire $g(x,y) = x^2 + y^2 = 10$" est un problème d'optimisation modélisé car l'expression de la fonction objectif et des contraintes est donnée explicitement. "Trouver la distance minimale entre l'origine et le plan d'équation $\alpha \equiv x+y+z = 1$" est un problème d'optimisation non-modélisé car nous ne sommes pas directement en présence de la fonction à minimiser. "Montrer que la moyenne géométrique est toujours plus petite que la moyenne arithmétique" est également un problème d'optimisation non-modélisé bien que la formulation initiale ne montre pas le lien direct avec les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité.

La distinction entre ces types de tâches s'impose puisque les problèmes d'optimisation se présentent rarement dans la réalité sous un format mathématique. On parlera de la *modélisation* d'un problème d'optimisation pour parler des démarches

mathématiques qui visent la compréhension et permettent la mise en équations d'un problème. La communauté scientifique de la didactique des mathématiques attribue un intérêt particulier à la modélisation (voir, par exemple, (Coulange, 1997)). Dans le cadre de notre recherche, la modélisation intervient surtout dans le cadre de l'enseignement des mathématiques en économie, étant donnée l'importance des problèmes fondamentaux en économie (voir Section 4.5.3), mais aussi des problèmes d'optimisation en mathématiques lorsque l'objectif est de travailler sur des problèmes concrets.
Bien que nous soyons conscients de la problématique de la modélisation dans la résolution de problèmes d'optimisation, notre étude du Théorème de Lagrange ne porte pas sur les difficultés liées à la modélisation d'un tel problème et nous ne la prendrons donc pas en compte dans cette recherche.

**Technique** Les techniques sont très variées et une liste exhaustive ne pourra probablement pas être établie. "Modéliser mathématiquement le problème" est une étape nécessaire dans la résolution des tâches $T_{22}$. Quant à la détection des candidats à être extremum, nous retrouvons la réalisation d'une tâche d'$OM_1$ à l'intérieur des techniques $\tau_{21}$, $\tau_{22}$ et $\tau_{23}$. C'est pour choisir, parmi les candidats à être solution, ceux qui sont effectivement solution du problème d'optimisation que nous mentionnons certaines techniques fréquemment utilisées, sur base d'un tableau issu de (Bair, 2003, p.77). Ces méthodes indiquent leur portée (trouver une solution locale ou globale) et les points repérés pris en charge (les candidats que l'on peut analyser avec cette méthode) :

| Principe de la méthode | Portée | Points repérés pris en charge |
|---|---|---|
| Étude du signe de $f(x)-f(x^*)$ pour tout point $x^*$ repéré | locale ou globale | points stationnaires de la fonction lagrangienne ainsi que les points singuliers (= non-réguliers) de $C$ |
| Comparaison des valeurs de $f$ aux points repérés si le minimum (ou le maximum) de $f$ sur $C$ est assuré | globale | points stationnaires de la fonction lagrangienne ainsi que les points singuliers (= non-réguliers) de $C$ |
| Examen de la matrice Hessienne de la fonction lagrangienne $\mathcal{L}(x)$ [58] | locale | points stationnaires de la fonction lagrangienne |
| Examen d'une condition d'optimalité suffisante du deuxième ordre [59]. Par exemple, examiner le "Hessien bordé", c'est-à-dire $\nabla^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ | locale | points stationnaires de la fonction lagrangienne |

Tableau 5.3 – Choisir, parmi les candidats, les solutions d'un problème d'optimisation (Bair, 2003, p.77)

De ce tableau, nous avons tiré les techniques reportées dans la fiche caractéristique d'$OM_2$ (Tableau 5.2) pour résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité [60]. Comme notre recherche se focalise principalement sur le Théorème de

60. Les troisième et quatrième techniques dans ce tableau ont été regroupées, par facilité d'écriture, pour devenir la technique $\tau_{23}$ bien qu'il s'agisse de techniques différentes.

Lagrange, nous n'expliciterons pas plus en détails les différentes techniques présentées. Remarquons seulement que toutes les méthodes ne sont pas appropriées pour décider de la nature d'un candidat identifié par la technique $\tau_{14}$.
Une dernière remarque concerne les techniques $\tau_{24}$ et $\tau_{25}$. Pour la méthode de substitution, nous remarquons qu'une partie de la résolution se retrouve dans la technique $\tau_{11}$, et donc dans la réalisation du type de tâches d'$OM_1$. Pour la résolution graphique, il est difficile de préciser le contexte dans lequel elle peut ou ne peut pas être appliquée. Cela dépend fortement du problème considéré. En conséquence, ces deux dernières techniques ont une portée assez limitée dans le sens où elles s'appliquent uniquement à des problèmes bien particuliers. Notons encore que ces techniques évitent l'utilisation du Théorème de Lagrange.

**Technologie** Les discours technologiques sont variés. Comme nous n'avons pas pour objectif de réaliser une analyse exhaustive des méthodes de sélection, nous renvoyons le lecteur intéressé aux pages 77 à 87 du manuel (Bair, 2003) qui se trouve dans l'Annexe A.4. Les différents discours technologiques y sont expliqués en détail et illustrés à l'aide de plusieurs exemples. Remarquons, à titre d'exemple, que l'on peut utiliser le théorème de Weierstrass pour démontrer l'existence d'un extremum d'une fonction sur un ensemble compact comme décrit dans la partie théorique (Section 1.4).

**Théorie** La théorie de l'optimisation convexe et non convexe, la recherche opérationnelle, la théorie des formes quadratiques et le calcul différentiel et intégral de fonctions à plusieurs variables sont des exemples de théories mathématiques qui peuvent héberger - et en même temps justifier - cette organisation mathématique.

Les organisations mathématiques $OM_1$ et $OM_2$ se présentent évidemment comme intimement liées. La réalisation d'une tâche de type $T_1$ est intégrée dans la technique de résolution d'une tâche de type $T_2$. Nous dirons que la praxéologie $OM_1$ est partiellement contenue dans la praxéologie $OM_2$.

### 5.2.3 Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange

Le 20$^{\text{ème}}$ siècle a donné un nouveau statut aux multiplicateurs de Lagrange qui ont, dès lors, commencé à être considérés comme des objets mathématiques à part entière. De plus, la dualité en optimisation a permis le développement de la théorie relative aux multiplicateurs de Lagrange. Depuis, on trouve une utilisation des multiplicateurs de Lagrange non seulement en mathématiques, où ils ont le statut de variables duales, mais aussi dans d'autres domaines. Ainsi nous identifions deux types de tâches différents qui mettent en avant une utilisation des multiplicateurs de Lagrange.

#### Fiche caractéristique

Le Tableau 5.4 reprend le contenu de la troisième $OM$ locale élémentaire, $OM_3$.

Voici quelques éléments d'explication concernant le Tableau 5.4 :

| **$\mathbf{OM_3}$ : Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange** | | |
|---|---|---|
| | | Description |
| **Type de tâches** | $T_{31}$<br>$T_{32}$ | Écrire et résoudre le problème dual ;<br>Étudier la sensibilité du problème du minimum (ou maximum) par rapport à une variation de la contrainte. |
| **Technique** | $\tau_{31}$ | Écrire la fonction lagrangienne, chercher l'expression de la fonction duale et donner l'expression du problème dual associé. Résoudre ensuite ce problème d'optimisation par une des méthodes d'optimisation. |
| | $\tau_{32}$ | Résoudre le problème d'optimisation pour connaître la valeur des multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des contraintes. Le produit entre la variation de la contrainte et le multiplicateur associé donne une estimation de l'influence de la contrainte dans le "coût" de la solution. |
| **Technologie** | $\theta_{31}$ | En particulier, ce discours technologique comprend "justifier la construction de la fonction lagrangienne", "décrire l'utilité du problème dual" et "argumenter les techniques de résolution du problème dual" ; |
| | $\theta_{32}$ | Propriété des multiplicateurs de Lagrange relative à une modification marginale de la contrainte. On y retrouve aussi un discours technologique d'$OM_2$ et la preuve du Théorème de Lagrange puisqu'elle construit les multiplicateurs. |
| **Théorie** | $\Theta_3$ | Théorie de l'optimisation et plus particulièrement la théorie de la dualité, mais aussi l'économie, la théorie du contrôle optimal, la physique ou encore la mécanique lorsqu'il s'agit d'interpréter les multiplicateurs dans leur contexte. |

TABLEAU 5.4 – $OM_3$ : Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange

**Type de tâches** Les familles de tâches proposées peuvent se classer en deux groupes différents :

- La famille de tâches $T_{31}$ est issue du cadre mathématique et de l'optimisation. L'enjeu principal réside dans les notions de problèmes primal et dual et dans la théorie de la dualité qui explique les passages entre le primal et le dual. Ce type de tâches ne nous intéresse pas dans cette thèse car les praxéologies autour de ce type de tâches ne seront pas rencontrées dans nos classes. En effet, ce type de tâches relève d'un enseignement de la théorie de la dualité.
- La famille de tâches $T_{32}$ peut être issue de l'optimisation mais est aussi rencontrée dans tous les domaines qui utilisent l'interprétation du multiplicateur de Lagrange pour donner des informations supplémentaires à propos des problèmes d'optimisation. Ainsi, nous retrouvons cette famille de tâches (avec une formulation adaptée au langage propre du domaine des mathématiques) en contrôle optimal, en écono-

mie, en physique ou encore en mécanique. Ce type de tâches attire notre attention car il est étroitement lié à l'enseignement du Théorème de Lagrange. Calculer le gain d'utilité lorsqu'une contrainte (budgétaire) est "relâchée" est un exemple parmi d'autres.

**Technique** Effectuer des tâches de la famille $T_{31}$ peut se faire de différentes façons, aussi bien numériquement qu'analytiquement : utiliser le théorème des écarts complémentaires, appliquer des méthodes primal-dual, etc. Le lecteur intéressé trouvera des informations complémentaires ainsi que des discours technologiques à propos des problèmes duaux et de leur résolution dans (Gilbert, 2003).

Quant à la technique associée à $T_{32}$, rappelons tout d'abord qu'il est possible de réaliser une analyse de sensibilité en résolvant un nouveau problème d'optimisation. Cependant, une deuxième résolution n'est pas toujours souhaitée et les effets éventuels induits par des changements dans les données (contraintes) d'un problème de programmation sur la solution du problème peuvent s'exprimer en termes des variables duales (voir Section 4.5). Ces variables duales sont les multiplicateurs de Lagrange obtenus comme résultat d'une tâche préalable de type $T_2$. Exploiter l'interprétation des multiplicateurs de Lagrange (dans le but de faire une analyse de sensibilité) sera donc une tâche impossible sans connaître la solution (y compris les multiplicateurs de Lagrange) du problème d'optimisation. La technique associée à $T_{32}$ passe donc par une des technique d'$OM_2$ suivie d'une démarche semblable à celle décrite dans la Section 4.5.

**Technologie** La théorie de la dualité a apporté les justifications nécessaires pour expliquer le lien entre problème primal et problème dual et pour rendre intelligible la technique $\tau_{31}$. Elle n'est pas l'objet de cette thèse.

La Section 4.5 fournit plus d'informations quant au discours technologique de $\tau_{32}$. Ainsi, nous trouvons par exemple la Proposition 4.12 dans (Thiry, 2006, p.172) quant à la signification du multiplicateur de Lagrange.

**Théorie** La théorie de l'optimisation, mais surtout la théorie de la dualité, s'inscrivent dans cette praxéologie. Il est évident que nous devons rajouter des discours théoriques propres au domaine d'étude pour compléter la théorie proposée pour étudier l'analyse de sensibilité.

La réalisation d'une tâche de type $T_2$ est intégrée dans la technique de résolution d'une tâche de type $T_{32}$. En ce qui concerne notre MER du Théorème de Lagrange, nous dirons que la praxéologie $OM_2$ est partiellement contenue dans la praxéologie $OM_3$.

## 5.3 Deux familles de tâches structurales

Après avoir décrit les trois $OM$ autour de types de tâches procédurales, nous identifions maintenant deux $OM$ structurales relatives au Théorème de Lagrange. Ces $OM$ posent la question de

$T_4$ Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange.

$T_5$ Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange.

Pourquoi avons-nous besoin de distinguer ces types de tâches structurales des autres ? Des critiques pourraient argumenter que ces activités sont incluses dans le bloc technologico-théorique des tâches $T_i$, $i = 1, 2, 3$. Il est en effet exact que nous retrouvons dans les types de tâches structurales des activités mathématiques qui constituent le bloc technologico-théorique de tâches procédurales. Cependant, nous considérons qu'au niveau universitaire, "démontrer", "définir" sont des actions qui constituent, à elles seules, une tâche à effectuer. La conceptualisation du Théorème de Lagrange et des multiplicateurs de Lagrange donnent en conséquence naissance à deux types de tâches structurales. Un cadre théorique, basé sur les travaux de Winsløw (2006), nous semble opportun pour rendre intelligible notre modèle épistémologique de référence construit et le choix de nos cinq $OM$ en particulier. Dans ses travaux, Winsløw étudie la transition secondaire-supérieur en termes de praxéologies.

> *Ce n'est [...] qu'au début de l'université que l'on demande aux étudiants de maîtriser des praxéologies mathématiques complètes, y compris la formulation et la démonstration de théorèmes (mais, bien sûr, non pas leur construction).* (Winsløw, 2006, p.3)

Ceci l'amène à faire la distinction entre deux types de transition dans les organisations mathématiques. La première est une transition qui explique le passage d'une activité mathématique fortement axée sur le bloc practico-technique $\Lambda = [T, \tau]$ vers une activité mathématique reprenant des organisations mathématiques plus complètes, c'est-à-dire intégrant non seulement un bloc practico-technique mais aussi la partie technologico-théorique. Ceci est particulièrement pratiqué dans l'enseignement universitaire. Le second type de transition identifié par Winsløw est le suivant. Le bloc technologico-théorique $\Pi = [\theta, \Theta]$ d'une organisation mathématique connue devient le bloc practico-technique $\Lambda = [T, \tau]$ d'une nouvelle praxéologie. C'est ce deuxième type de transition qui nous intéresse particulièrement. En effet, les deux $OM$ structurales témoignent de cette transition où les blocs technologico-théoriques d'$OM_1$ (et d'$OM_2$) et d'$OM_3$ apparaissent dans les blocs practico-techniques d'$OM_4$ et d'$OM_5$ et deviennent donc sujets d'activités mathématiques à part entière. Ceci veut dire que les blocs technologico-théoriques deviennent eux-mêmes des tâches constituant de nouvelles organisations mathématiques (structurales).

> *Il s'agit dans les deux cas [...] de transformer la théorie en tâches.* (Winsløw, 2006, p.4)

Dans ce sens, les blocs technologico-théoriques d'$OM_1$ et d'$OM_2$ (respectivement d'$OM_3$) constitueront les tâches d'$OM_4$ (respectivement d'$OM_5$). D'où la nécessité de créer des praxéologies structurales qui tâchent de décrire ces activités mathématiques. Le fait de travailler des tâches structurales permet ainsi la constitution des technologies des tâches procédurales.

Contrairement à la description des praxéologies procédurales, nous nous contentons de donner une liste des types de tâches qui sont regroupées autour de $T_4$ et de $T_5$. Il s'agit des activités mathématiques qui sont nécessaires pour développer les blocs technologico-théoriques de nos $OM$ procédurales mais qui deviennent tâches de praxéologies structurales indépendantes dans le sens où elles font l'objet des manuels et des pratiques enseignantes en classe. Cependant, les différentes techniques associées à ces tâches structurales ont été exposées précédemment (voir Chapitre 1 et Chapitre 4), tout comme leurs blocs technologico-théoriques qui réfèrent au fonctionnement interne des mathématiques, à la théorie de la logique et aux fondements mêmes des mathématiques. Une analyse de ces blocs technologico-théoriques dépasserait, en conséquence, largement le cadre de cette thèse.

### 5.3.1 Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange

Savoir appliquer le Théorème de Lagrange est une chose ; savoir l'expliquer et développer son environnement théorique fait partie d'une organisation mathématique qui, la plupart du temps, est assurée par le professeur en classe.

#### Fiche caractéristique

Le Tableau 5.5 reprend les types de tâches de la quatrième $OM$ locale élémentaire, $OM_4$.

**OM$_4$ : Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange**

| | | Description |
|---|---|---|
| **Type de tâches** | $T_{401}$ | Définir les multiplicateurs de Lagrange ; |
| | $T_{402}$ | Démontrer le Théorème de Lagrange ; |
| | $T_{403}$ | Définir la fonction lagrangienne ; |
| | $T_{404}$ | Définir les équations de Lagrange ; |
| | $T_{405}$ | Trouver/énoncer la condition d'optimalité du premier ordre pour les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité ; |
| | $T_{406}$ | Expliciter la condition de régularité ; |
| | $T_{407}$ | Relever l'importance du fait que le Théorème de Lagrange est une condition nécessaire d'optimalité ; |
| | $T_{408}$ | Relever le fait que le Théorème de Lagrange permet seulement de trouver des extrema locaux ; |
| | $T_{409}$ | Lier l'approche standard à l'approche sous fonction lagrangienne ; |
| | $T_{410}$ | Généraliser le Théorème de Lagrange à $n$ dimensions sous $k$ contraintes d'égalité ; |
| | $T_{411}$ | Définir un point régulier ; |
| | $T_{412}$ | Expliquer l'idée première erronée induite par la transformation ; |
| | $T_{413}$ | Illustrer graphiquement la conclusion du Théorème de Lagrange. |

Tableau 5.5 – $OM_4$ : Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange

Voici quelques éléments d'explication concernant le Tableau 5.5 :

**Type de tâches** Tous les types de tâches de cette organisation ont comme objet le Théorème de Lagrange, et plus particulièrement les différents éléments qui interviennent soit dans la description de son environnement, soit dans son énoncé, soit dans sa preuve.

- $T_{401}$ : Il s'agit ici de définir les multiplicateurs de Lagrange, expliquer leur provenance (existence et unicité dans la conclusion du Théorème de Lagrange) et donner leur nom.
- $T_{402}$ : Le Chapitre 4 a illustré différentes techniques pour réaliser cette tâche. En plus, nous avons identifié deux approches différentes, $\theta_{L_{stand}}$ et $\theta_{L_{flagr}}$, qui permettent d'accomplir $T_{402}$.
- $T_{403}$ : Définir la fonction lagrangienne est nécessaire lorsqu'on veut présenter $\theta_{L_{flagr}}$ ou introduire la théorie de la dualité.
- $T_{404}$ : Cette tâche définit la conclusion du Théorème de Lagrange comme un système d'équations, appelé "équations de Lagrange".
- $T_{405}$ : Il est question de faire le lien avec les conditions d'optimalité (voir Chapitre 1) et de situer et d'énoncer le Théorème de Lagrange dans son contexte.
- $T_{406}$ : Relever l'importance de la condition de régularité qui est une condition de qualification des contraintes. Cette tâche peut être réalisée à l'aide d'un contre-exemple, d'une explication orale ou littérale ou encore d'une représentation graphique.
- $T_{407}$ : Cette tâche est accomplie lorsque la différence entre une condition d'optimalité nécessaire et une condition d'optimalité suffisante est expliquée, lorsque le Théorème de Lagrange est explicitement mentionné comme condition nécessaire et non suffisante.
- $T_{408}$ : Le fait que le Théorème de Lagrange aide à rechercher une solution locale (et non globale) est souligné.
- $T_{409}$ : Cette tâche fait le pont entre les deux approches du Théorème de Lagrange.
- $T_{410}$ : Cette tâche se présente uniquement si les premiers développements se font dans un cas particulier, par exemple deux variables ($n = 2$) et une seule contrainte d'égalité ($k = 1$).
- $T_{411}$ : La notion de point régulier est invoquée dans la condition de régularité qui figure parmi les hypothèses du Théorème de Lagrange. Notons que cette tâche ne dépend pas nécessairement du Théorème de Lagrange.
- $T_{412}$ : Nous rajoutons cette dernière tâche suite aux explications présentées à propos de la méprise induite par la transformation dans le chapitre précédent.
- $T_{413}$ : Il est question de fournir un support visuel pour justifier le Théorème de Lagrange.

### 5.3.2 Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange

La dernière organisation mathématique que nous avons identifiée est liée directement à la théorie de la dualité et concerne la théorie relative aux multiplicateurs de Lagrange.

**Fiche caractéristique**

Le Tableau 5.6 reprend les types de tâches de la cinquième $OM$ locale élémentaire, $OM_5$.

| **$\mathbf{OM_5}$ : Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange** | | |
|---|---|---|
| | | Description |
| **Type de tâches** | $T_{51}$ | Définir le multiplicateur comme coût implicite ou "shadow price" ; |
| | $T_{52}$ | Démontrer la propriété concernant l'interprétation des multiplicateurs de Lagrange ; |
| | $T_{53}$ | Définir explicitement le multiplicateur de Lagrange comme variable duale (de la fonction lagrangienne) ; |
| | $T_{54}$ | Définir la fonction duale. |

Tableau 5.6 – $OM_5$ : Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange

Voici quelques éléments d'explication concernant le Tableau 5.6 :

**Type de tâches** Tous les types de tâches de cette organisation ont comme objet les multiplicateurs de Lagrange, et plus particulièrement les différents éléments qui interviennent soit dans la description, soit dans le développement, soit dans l'explication de ces multiplicateurs.

- $T_{51}$ : Il s'agit de munir le multiplicateur de Lagrange d'une interprétation économique.
- $T_{52}$ : Démontrer la propriété qui permet de réaliser une analyse de sensibilité fait partie des tâches de cette $OM$.
- $T_{53}$ : Définir le multiplicateur de Lagrange comme variable duale (de la fonction lagrangienne) est une tâche nécessaire pour attribuer au multiplicateur de Lagrange le statut de variable. Nous pensons ici à une définition qui met en avant le statut du multiplicateur comme variable de la fonction lagrangienne.
- $T_{54}$ : Étant nécessaire dans la théorie de la dualité en optimisation, la fonction duale est définie comme fonction dépendant uniquement des variables duales (contrairement à la fonction lagrangienne qui dépend des variables primales et duales).

La tâche $T_{54}$ est différente des trois autres dans le sens où nous la rencontrerions uniquement dans un cours exposant la théorie de la dualité en optimisation. Comme la théorie de la dualité en optimisation n'est pas présentée en première année de bachelier en Belgique, cette tâche ne sera pas rencontrée dans l'analyse des savoirs à enseigner et enseigné. Notons encore que nous sommes obligés de passer par le Théorème de Lagrange pour aboutir aux tâches $T_{51}$, $T_{52}$ et $T_{53}$ définies ci-dessus.

## 5.4 Le MER "Théorème de Lagrange"

En conclusion, notre MER inclut cinq organisations mathématiques, $OM_1$, $OM_2$, $OM_3$, $OM_4$ et $OM_5$, relatives aux types de tâches suivants :

- $T_1$ Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- $T_2$ Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
- $T_3$ Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange.
- $T_4$ Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange.
- $T_5$ Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange.

où les trois premiers sont des types de tâches procédurales, tandis que les deux derniers sont des types de tâches structurales.

Il est possible de décrire les relations qui existent entre ces $OM$, mais nous nous limitons pour le moment aux commentaires suivants : $OM_1$ est issue des œuvres de Lagrange où la méthode des multiplicateurs apparaît comme une technique particulière pour décrire la solution d'un problème bien précis. Cette $OM$ concerne donc le Théorème de Lagrange vu comme condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, tandis que $OM_2$ tâche de résoudre le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. Le Théorème de Lagrange peut ou non intervenir dans la technique de $OM_2$, ce qui entraîne qu'accomplir $OM_1$ peut consister en une première étape pour la réalisation d'$OM_2$. $OM_4$ est considérée comme un type de tâches construit sur les discours technologico-théoriques d'$OM_1$ mais aussi d'$OM_2$. Nous disons qu'$OM_4$ "transforme la théorie en tâches". En ce qui concerne les praxéologies $OM_3$ et $OM_5$, elles considèrent respectivement le multiplicateur de Lagrange comme outil mathématique et comme objet mathématique (Douady, 1986). L'analyse du savoir à enseigner, qui sera effectuée dans le chapitre suivant, permettra d'affiner notre modèle épistémologique de référence en établissant une structure interne entre ces différentes $OM$.

Chapitre 6

# Le Théorème de Lagrange comme savoir à enseigner

## Sommaire

AYANT explicité la première version de notre MER au chapitre précédent, nous l'utilisons dans celui-ci pour décrire et analyser le savoir à enseigner relatif au Théorème de Lagrange comme il apparaît dans les manuels et supports de cours des universités. Nous verrons ici une description du savoir censé être transmis aux élèves et donc des praxéologies que les institutions $I_{\text{Math}}$ et $I_{\text{Éco}}$ peuvent apporter aux étudiants. Pour cela nous ferons une analyse des manuels qui est

> *une entrée incontournable pour comprendre le fonctionnement ou pour caractériser l'état du système à un instant donné.* (Chevallard, 1999)

Celle-ci peut être précédée par l'analyse d'un programme officiel, d'"*une traduction d'une directive institutionnelle*", comme rapporté par Clerc, Minder, et Roduit (2006). Cependant, il est à noter qu'en Belgique, le décret du 23 mars 2004, appelé familièrement "Décret Bologne", est le seul document officiel qui a pour objet l'enseignement supérieur de plein exercice organisé ou subventionné par la Communauté française. Bien que le Décret Bologne s'adresse à l'enseignement universitaire où se déroule notre recherche, il n'est pas le programme officiel définissant l'ensemble des cours et des activités de formation correspondant à un diplôme universitaire. En effet, les programmes d'études sont établis au sein des différentes institutions universitaires.

Nous devons, en conséquence, prendre en compte que la finalisation d'un cours est laissée à la liberté du professeur qui est chargé de l'enseigner. Nous disons encore que beaucoup de choix importants du savoir à enseigner sont dans le *topos* du professeur. Le savoir à enseigner qui nous intéresse ne se trouve donc pas dans des programmes officiels mais plutôt dans des manuels de cours et des supports de cours à disposition des étudiants. Ce sont ces textes qui définissent les contenus et les méthodes rencontrés ensuite en classe. Notons dès maintenant que nous n'affirmons pas qu'il s'agit du seul endroit où l'on trouve ce savoir à enseigner. Des manuels d'exercices, des compléments, etc. peuvent tout aussi bien contenir des éléments de ce savoir. Parce qu'il est assez difficile d'accéder à tous ces documents, nous nous limitons aux manuels de cours dans nos analyses.

La première section de ce chapitre présente quelques consignes pour la lecture de notre analyse des manuels et définit les critères utilisés pour réaliser l'évaluation des *OM* rencontrées dans ces supports de cours. La description des différentes *OM* dans cinq manuels à l'aide de la TAD est ensuite exposée dans la deuxième section. La Section 6.3 tâche de comparer les différents manuels et en propose une typologie. Des réponses à un questionnaire distribué auprès des enseignants fournissent, dans la quatrième section, quelques remarques complémentaires concernant cette typologie. Enfin, la dernière section résume les observations à propos du savoir à enseigner et tire quelques conclusions.

## 6.1 Le savoir à enseigner à la lecture de cinq manuels

Pour décrire les principales organisations mathématiques relatives au Théorème de Lagrange présentées dans cinq manuels de niveau universitaire, nous présentons, dans cette section, quelques commentaires concernant l'outil d'analyse et les critères d'évaluation.

### 6.1.1 Quelques remarques importantes

La TAD, et plus particulièrement notre MER, seront nos outils pour analyser les différents supports de cours. Ceci veut dire que nous tâchons de décrire les organisations mathématiques locales construites dans les cinq manuels et, principalement, les types de tâches autour desquelles celles-ci se bâtissent. Les $OM$ ponctuelles ainsi définies construisent alors l'$OM$ locale du syllabus. Elles seront notées [$t$ ou $T, \tau, \theta, \Theta$] ou $[\Lambda, \Pi]$, où $\Lambda = [T, \tau]$ est le bloc practico-technique et où $\Pi = [\theta, \Theta]$ est le bloc technologico-théorique. Référence sera faite tout au long du chapitre à notre MER pour lequel une description des cinq $OM$ locales élémentaires peut être trouvée de la page 120 jusqu'à la page 134 de cette thèse ainsi que sur les fiches jointes à cette thèse.

Remarquons dès maintenant que nous trouvons rarement des traces de la théorie à l'intérieur des praxéologies. Comme le fait remarquer Chevallard :

> *La théorie, terre d'élection des truismes, tautologies et autres évidences, est même souvent évanouissante : la justification d'une technologie donnée est, en bien des institutions, traitée par simple renvoi à une autre institution, réelle ou supposée, censée détenir une telle justification.* (Chevallard, 1999, p.4)

Dans notre cas, le cours en lui-même peut être considéré comme détenant le discours théorique associé aux différentes praxéologies que nous identifierons. La théorie est ainsi à chercher au sein du fonctionnement même des mathématiques (fondements théoriques, axiomes, logique formelle, théorie des ensembles, etc.). Littéralement, nous trouvons des renvois à un autre chapitre du syllabus, à un autre cours ou à une autre institution en général. Ceci dévoile en même temps une des caractéristiques des mathématiques : les savoirs, les concepts et la pensée mathématiques se construisent les uns à partir des autres. Il est difficile de considérer la théorie d'une $OM$ sans regarder d'autres praxéologies construites antérieurement.

Par conséquent, nous ne rencontrerons pas beaucoup d'éléments théoriques dans les fractions de manuels analysées. C'est pourquoi nous avons décidé de limiter la description des praxéologies aux notions de tâches, de techniques et de technologies, associant ainsi le bloc technologico-théorique aux traces laissées par les différents discours technologiques. Au niveau des notations, cela nous amène à écrire une $OM$ ponctuelle de la façon suivante : [$t$ ou $T, \tau, \Pi$], où dans le bloc technologico-théorique seule la composante $\Pi$ sera rencontrée explicitement.

Au niveau des notations, nous utilisons une barre (notée "/") afin d'indiquer un élément praxéologique absent. Ceci ne veut nullement dire que cet élément est inexistant mais simplement que nous n'en trouvons pas de trace écrite dans le syllabus.

### 6.1.2 Critères d'évaluation

Il est question, dans ce chapitre, de présenter une évaluation de différentes organisations mathématiques. Dans ce contexte, il est important de toujours penser au fait qu'une activité d'évaluation est relative. En effet, dans notre cas, la valeur reconnue aux praxéologies évaluées se réfère toujours, implicitement ou non, à un certain usage de ces praxéologies dans les manuels analysés.

La liste des critères d'évaluation n'est certainement pas exhaustive. Elle constitue plutôt notre grille d'analyse qui permettra de se faire une idée de la mesure dans laquelle les critères sont satisfaits par l'organisation mathématique à évaluer. Nous nous sommes inspirés des travaux de Chevallard (1999) et une explication plus détaillée peut être trouvée dans la Section 3.1.

#### Évaluer des tâches

Relativement aux types de tâches d'une $OM$, nous retenons les critères suivants :

**Identification :** Les types de tâches $T_i$ sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ?

**Raisons d'être :** Les raisons d'être des types de tâches $T_i$ sont-elles explicitées ou ces types de tâches apparaissent-ils immotivés ?

**Pertinence :** Les types de tâches considérés fournissent-ils un bon découpage relativement aux situations mathématiques les plus souvent rencontrées ? Sont-ils pertinents au regard des besoins mathématiques des étudiants ou apparaissent-ils comme des "isolats" sans lien véritable - ou explicite - avec le reste de l'activité ?

#### Évaluer des techniques

Relativement aux techniques d'une $OM$, nous retenons les critères suivants, où les deuxième et troisième critères portent uniquement sur les tâches procédurales :

**Élaboration :** Les techniques proposées sont-elles effectivement élaborées ou seulement ébauchées ?

**Portée et fiabilité VS rigidité :** Leur portée est-elle satisfaisante ou limitée et restreinte à quelques tâches bien précises ? Leur fiabilité est-elle acceptable étant donné leurs conditions d'emploi ? Y a-t-il une certaine rigidité dans l'utilisation des techniques ?

**Procédure algorithmique et intelligibilité :** Les techniques sont-elles rendues intelligibles ? Permettent-elles la compréhension de leur "mécanisme" ou sont-elles réduites à l'application de "procédures algorithmiques", d'une démarche à suivre bien définie comme objet indépendante du savoir ? Ce critère fait le pont avec l'évaluation des technologies dans le sens où nous nous interrogeons sur la coexistence des discours technologiques et des interprétations du fonctionnement des techniques et de leur résultat.

#### Évaluer des technologies

Relativement à la technologie d'une $OM$, nous retenons les critères suivants :

**Cohérence et rigueur :** Le problème de justification est-il bien posé ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Par exemple, les règles d'inférence sont-elles respectées ?

**Explication VS vérification :** Les justifications explicatives sont-elles favorisées ? Ou le discours technologique accomplit-il principalement son rôle de vérification ? Dans ce sens, permet-il de rendre la technique intelligible ?

**Portée des justifications :** La technologie permet-elle d'être efficace dans le sens où elle permet de justifier d'autres tâches et techniques ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement et optimalement exploités ?

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que seules les tâches procédurales seront évaluées selon les neuf critères. L'évaluation des tâches structurales (évaluation des tâches et évaluation des techniques) se réalise en même temps car elles sont directement liées aux technologies des tâches procédurales.

### 6.1.3 Présentation des cinq manuels

Le choix des cinq manuels s'est effectué, premièrement, de façon à obtenir des présentations, aussi variées que possible, du Théorème de Lagrange. Un deuxième critère de choix était l'accessibilité des étudiants auxquels ces manuels s'adressent, en prenant en compte leur diffusion dans l'enseignement universitaire en Belgique. Ainsi, notre sélection comporte des manuels pour étudiants en mathématiques, en économie et ingéniorat de gestion. Remarquons que chacun des cinq ouvrages étudiés constitue le manuel de référence pour le cours associé. L'intégralité des contenus des cinq manuels portant sur le Théorème de Lagrange se trouve en annexe (voir Annexe A).

Les cinq manuels choisis sont :

($M_{\textbf{UCL-Math}}$) (Ponce & Van Schaftingen, 2010) "Analyse mathématique 2 - Fonctions de variables vectorielles" (Université de Louvain-la-Neuve, Belgique)

($M_{\textbf{UNa-Math}}$) (Strodiot, 1997) "Analyse (2ème partie)" (Université de Namur, Belgique)

($M_{\textbf{UNa-Éco}}$) (Thiry, 2006) "Mathématiques pour l'économie et la gestion I" (Université de Namur, Belgique)

($M_{\textbf{ULg-Éco}}$) (Bair, 2003) "Analyse mathématique" (Université de Liège, Belgique)

($M_{\textbf{LSE-Éco}}$) (van den Heuvel, 2010) "Course notes of MA208 Optimisation Theory" (Université de Londres, Royaume-Uni)

Cette sélection de supports de cours comporte trois manuels récents qui sont toujours au programme (($M_{\text{UCL-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$)), un manuel d'un cours qui n'est actuellement plus enseigné ($M_{\text{LSE-Éco}}$) et un manuel qui est encore distribué aux étudiants mais où le cours ne traite plus le Théorème de Lagrange ($M_{\text{UNa-Math}}$)[61]. En effet, la présence d'une section sur l'optimisation sous contraintes dans ($M_{\text{UNa-Math}}$) peut être considérée comme un "résidu" du syllabus. Quatre manuels ont leur source en Wallonie (($M_{\text{UCL-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$)) et sont écrits en français, le cinquième ($M_{\text{LSE-Éco}}$) vient du monde anglo-saxon et est rédigé en anglais. Ce dernier a été choisi pour la singularité de la présentation du Théorème de Lagrange qu'il propose. Deux manuels visent un public de mathématiciens (($M_{\text{UCL-Math}}$) et ($M_{\text{UNa-Math}}$)), les trois autres sont destinés à un public d'économistes (($M_{\text{UNa-Éco}}$), ($M_{\text{ULg-Éco}}$) et ($M_{\text{LSE-Éco}}$)).

61. En raison d'un passage de 90h de cours à 67,5h de cours, le cours de calcul différentiel et intégral a été réduit fortement. Les parties supprimées ont été en grande partie reprises par d'autres cours dans le cursus d'un étudiant en mathématiques. Ainsi, le Théorème de Lagrange n'est vu que sous sa forme plus générale qu'est le Théorème de KKT (Théorème 1.5.7) dans un cours d'optimisation en troisième année d'étude.

Une première approche assez générale du contenu des trois manuels peut être fournie par la description du contenu global du cours qu'ils accompagnent ainsi que par la table des matières de chacun. Deux manuels s'adressent à un public d'étudiants inscrits en sciences mathématiques et physiques en première année de bachelier (($M_{\text{UCL-Math}}$) et ($M_{\text{UNa-Math}}$)), tandis que les trois autres manuels s'adressent à des étudiants en sciences économiques et de gestion en première année de bachelier ($M_{\text{UNa-Éco}}$), en deuxième année de bachelier ($M_{\text{ULg-Éco}}$) et en deuxième ou troisième année de bachelier ($M_{\text{LSE-Éco}}$). Les quatre premiers manuels (($M_{\text{UCL-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$)) sont les accompagnements de cours obligatoires dans le cursus d'un étudiant, tandis que le cinquième manuel ($M_{\text{LSE-Éco}}$) concerne un cours à option. De plus, les quatre premiers sont des manuels de cours d'analyse, alors que le cinquième est le support d'un cours d'optimisation.

Les informations suivantes proviennent respectivement des sites internet des différentes universités, et plus particulièrement des institutions productrices de chacun des supports de cours :

($M_{\textbf{UCL-Math}}$) [62] Objectifs : ce cours constitue une introduction au calcul infinitésimal. En tant que cours de base à l'intention d'étudiants en mathématique ou en physique, il vise l'acquisition des compétences méthodologiques suivantes : maîtrise du langage de base ; rigueur dans l'analyse d'un énoncé, recherche d'exemples et contre-exemples, interprétation graphique et numérique ; précision dans l'expression ; compréhension de différentes techniques de preuve.
Contenu : Le cours d'analyse mathématique 2 est consacré à l'étude des fonctions de plusieurs variables. Après avoir développé les notations locales de limite et de dérivées totales et partielles, on étudie les propriétés globales des fonctions continues et des fonctions dérivables, les fonctions implicites et les développements de Taylor. Les grands thèmes abordés sont : suites de vecteurs ; fonctions continues ; dérivées ; dérivées secondes ; **problèmes d'optimisation**.

($M_{\textbf{UNa-Math}}$) [63] Objectifs : l'initiation à l'analyse mathématique se fait en présentant les outils de base que sont le calcul différentiel et le calcul intégral. L'accent est mis sur l'apprentissage de la rigueur et sur l'initiation à la résolution d'exercices. Quelques exemples tirés de la physique illustrent le cours.
Contenu : les espaces déductifs ; fonctions de plusieurs variables : limites et continuité ; dérivation de fonctions de plusieurs variables ; **optimisation à plusieurs variables** ; introduction aux intégrales doubles.

($M_{\textbf{UNa-Éco}}$) [64] Objectifs : ce cours vise à introduire et étudier les concepts et techniques relatifs aux fonctions de plusieurs variables, utiles dans les problèmes que rencontrent l'économiste et le gestionnaire. Les cas des fonctions de deux ou trois variables auxquels on se limite le plus souvent permettent, entre autres, de traiter les premiers problèmes d'optimisation que se posent le producteur et le consommateur.

62. Voir sur le site `http://sites-final.uclouvain.be/archives-portail/cdc2009/cours-2009-mat1122.html`, consulté le 1 mars 2011
63. Voir sur le site `http://www.fundp.ac.be/etudes/cours/page\_view/SMATB103/`, consulté le 1 mars 2011
64. Voir sur le site `http://www.fundp.ac.be/etudes/cours/page\_view/ECGEB151/`, consulté le 1

Contenu : ce cours donne une introduction aux diverses notions mathématiques importantes qui seront utilisées dans des cours ultérieurs : vecteurs, équations de droites et de plans ; fonctions de plusieurs variables (représentations géométriques, limites, continuité) ; dérivation des fonctions de plusieurs variables ; **optimisation libre ou sous contrainte au moyen des multiplicateurs de Lagrange** ; intégrales doubles.

($M_{\textbf{ULg-Éco}}$) [65] Objectifs : poursuivre la formation en analyse mathématique.
Contenu : notions d'espaces numériques réels et hyperréels, avec des notions de fonctions de plusieurs variables : dérivation partielle, totale et implicite ; fonctions homogènes, concaves (et notions apparentées) ; **extrema libres et avec contraintes** ; intégration multiple ; équations récurrentes et différentielles.

($M_{\textbf{LSE-Éco}}$) [66] Objectifs : the course describes various techniques of optimisation, gives a mathematical presentation of the relevant theory, and shows how they can be applied.
Contenu :
- Introduction and review of relevant mathematical background.
- Introduction to combinatorial optimisation ; shortest paths in directed graphs ; algorithms and their running time.
- Classical results on continuous optimisation : Weierstrass' Theorem on continuous functions on compact set ; optimisation of differentiable functions on open sets ; **Lagrange's Theorem on equality constrained optimisation** ; Kuhn and Tucker's Theorem on inequality constrained optimisation. Linear programming and duality theory (time permitting).
- Finite horizon dynamic programming.

Il est à remarquer que l'étude du Théorème de Lagrange se fait à l'intérieur du cours de calcul différentiel et intégral (communément appelé "Analyse mathématique"), bien que l'optimisation soit une branche à part entière des mathématiques. À l'intérieur de ces manuels, nous pouvons observer une constance quant à la "position" de la présentation du Théorème de Lagrange : la dérivation des fonctions de plusieurs variables est un prérequis nécessaire pour introduire le Théorème de Lagrange. Ceci peut paraître logique étant donné l'utilisation des outils du calcul différentiel dans la théorie de l'optimisation. Quant au Théorème des fonctions implicites, il figure dans trois des cinq manuels (($M_{\text{UNa-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$)). Dans le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$), les auteurs ont décidé de l'écarter de leur cours d'analyse en première année de bachelier, tandis que le manuel ($M_{\text{LSE-Éco}}$) le mentionne seulement sans pour autant l'utiliser dans le développement du Théorème de Lagrange.

Les problèmes d'optimisation sans contraintes sont présentés dans les cinq manuels avant d'entamer les cas des contraintes d'égalité. Seuls trois manuels poursuivent avec les problèmes d'optimisation sous contraintes d'inégalité après la présentation du Théo-

mars 2011

65. Voir sur le site `http://progcours.ulg.ac.be/cocoon/cours/MATH0059-1.html`, consulté le 1 mars 2011

66. Voir sur le site `http://www.lse.ac.uk/resources/calendar/courseGuides/MA/2010\_MA208.htm`, consulté le 1 mars 2011

rème de Lagrange (($M_{\text{UCL-Math}}$), ($M_{\text{ULg-Éco}}$) et ($M_{\text{LSE-Éco}}$)). Les deux autres limitent leur discours à la présentation du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité et à l'application de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le nombre de pages consacrées à la présentation du Théorème de Lagrange varie de 6 à 20 selon les manuels consultés (($M_{\text{UCL-Math}}$) : 6 pages ; ($M_{\text{UNa-Math}}$) : 10 pages ; ($M_{\text{UNa-Éco}}$) : 12 pages ; ($M_{\text{ULg-Éco}}$) : 20 pages et ($M_{\text{LSE-Éco}}$) : 8 pages).

Dans la suite de ce chapitre, nous décrivons plus en détails les organisations mathématiques construites dans les cinq manuels analysés et répertorions particulièrement les différents types de tâches relatifs au thème "Théorème de Lagrange" sur base de notre MER.

## 6.2 Les manuels et le Théorème de Lagrange

Nous proposons dans cette section de dégager les différentes $OM$ présentées dans les cinq manuels analysés en termes de notre MER. Tout comme dans la description de notre MER, nous décrirons les différents éléments praxéologiques ($T, \tau$ et $\Pi$) des praxéologies associées aux tâches procédurales, mais limiterons notre analyse à la mention seule des tâches structurales. Rappelons encore que la description des cinq $OM$ locales élémentaires peut être trouvée de la page 120 jusqu'à la page 134 de cette thèse ainsi que sur les fiches jointes à cette thèse. Notons encore que, dans cette section, toutes les références renvoient, sauf indication contraire, aux chapitres et sections des manuels et non de la présente étude.

### 6.2.1 ($M_{\text{UCL-Math}}$) Ponce et Van Schaftingen (2010)

Le Chapitre 5 dans ce manuel couvre les problèmes d'optimisation. La première section traite les problèmes d'optimisation sans contraintes, tandis que la deuxième et la troisième section analysent respectivement les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité et sous contraintes d'inégalité. Une dernière section recueille des exercices concernant les problèmes d'optimisation. L'extrait du manuel analysé se trouve dans l'Annexe A.1.

#### Description du manuel

Nous considérons ici les six pages du manuel qui parlent de l'optimisation sous contraintes d'égalité (Section 5.2). Premièrement, nous remarquons que chaque chapitre du manuel commence avec les matières traitées, les prérequis et un questionnaire de révision. Les prérequis renvoient l'étudiant

- au Théorème des bornes atteintes (Chapitre 2) et
- aux problèmes d'optimisation d'une variable réelle ("Analyse mathématique 1", Chapitre 5)

et constituent des éléments théoriques rendus explicites. Le questionnaire de révision reprend les tâches suivantes relatives au Théorème de Lagrange :

$t_{intro_1}$ : Interprétez géométriquement les multiplicateurs de Lagrange.

$t_{intro_2}$ : Déterminez les points de minimum et de maximum de la fonction

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow 3x_2 + 4x_1x_2 \in \mathbb{R}$$

sur le cercle d'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

$t_{intro_3}$ : Recherchez les points de minimum et de maximum de la fonction

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{R}$$

sous la contrainte $x_1^4 + x_2^4 = 1$.

$t_{intro_4}$ : Trouvez les points les plus hauts et les plus bas dans $\mathbb{R}^3$ de la courbe d'intersection du plan $2x_1 + 4x_3 = 5$ et de la surface $x_1^2 + x_2^2 = 2x_2$.

Ces questions relèvent, selon notre MER, des trois types de tâches $T_{413}$ (pour l'exercice $t_{intro_1}$), $T_{21}$ (pour $t_{intro_2}$ et $t_{intro_3}$) et $T_{22}$ (pour l'exercice $t_{intro_4}$). Les problèmes du type de tâches $T_{21}$ et $T_{22}$ sont des problèmes à deux variables sous une seule contrainte d'égalité.

À la page suivante, les auteurs démarrent immédiatement sur un discours technologique et donnent l'énoncé du Théorème de Lagrange, appelé "Règle des multiplicateurs de Lagrange", ainsi que sa preuve. Nous considérons que cette tâche relève de l'organisation mathématique $OM_4$ et plus particulièrement des types de tâches $T_{405}$ et $T_{402}$ (Proposition 5.4, (Ponce & Van Schaftingen, 2010, pp.162-164)). Notons encore que les auteurs de ce syllabus ont choisi de présenter, en termes de notre cadre mathématique, la règle des multiplicateurs de Carathéodory qui est la forme plus générale du Théorème de Lagrange où aucune hypothèse de qualification des contraintes n'est faite. La preuve nécessite un lemme (Lemme 5.5, (Ponce & Van Schaftingen, 2010, pp.162-163)) qui est démontré avant de commencer la démonstration de la Proposition 5.4. Les deux preuves ($\tau_{402}$) peuvent être considérées comme des preuves mathématiques rigoureuses du Théorème de Lagrange par des arguments issus de la méthode par "pénalisation", $\theta_{131}$ (voir Section 4.6.5.0 de cette thèse). Remarquons que la fonction lagrangienne n'est introduite à aucun moment bien que le discours technologique s'y prête.

Après avoir démontré la règle des multiplicateurs de Lagrange rigoureusement, un commentaire concernant les valeurs que les multiplicateurs peuvent prendre est donné. En effet, étant donné la présence des multiplicateurs de Carathéodory, les auteurs expliquent comment retrouver les multiplicateurs de Lagrange lorsqu'on est en présence de la condition de régularité. Ceci peut être considéré comme une réalisation du type de tâches $T_{406}$. Aucun autre commentaire n'est fait à propos du Théorème de Lagrange et les auteurs passent à la présentation de deux exemples d'application ainsi que leur résolution, à savoir

$t_{exem_1}$ : Minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4\,,$$

sous la contrainte

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

$t_{exem_2}$ : Montrer que la moyenne arithmétique est plus grande ou égale à la moyenne géométrique, à savoir si $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\sqrt[m]{b_1 \cdot \cdots \cdot b_m} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_m}{m}\,.$$

Ces deux tâches procédurales relèvent respectivement des types de tâches $T_{21}$ et $T_{22}$. Remarquons que le premier exemple est un problème d'optimisation à trois variables sous une seule contrainte d'égalité. Le deuxième exemple est, après modélisation, un problème d'optimisation à $m$ dimensions sous une seule contrainte d'égalité. Les deux problèmes issus d'$OM_2$ sont résolus par la technique $\tau_{21}$.

À la fin du chapitre les auteurs proposent encore d'autres exercices (Section 5.4). La plupart de ces problèmes (Ponce & Van Schaftingen, 2010, pp.172-174) sont exprimés dans le cadre de la géométrie, utilisant les mots "distance", "plan" ou encore "surface". Ces exercices font tous partie du type de tâches $T_{22}$. Notons encore que l'on peut parfois appliquer la technique $\tau_{25}$ sans nécessairement passer par une modélisation mathématique de ces exercices.

En guise de conclusion, nous résumons l'$OM$ locale mise en place. Pour cela, nous dressons la liste des (types de) tâches travaillées et associées à des $OM$ ponctuelles :

- $t_{intro_1}$ ($T_{413}$) : La tâche structurale "Interprétez le multiplicateur de Lagrange géométriquement" fait partie d'une praxéologie incomplète, dans le sens où la technique n'est pas présentée. Seulement, il est clair que, bien qu'il ne soit pas rendu visible, le Théorème de Lagrange intervient dans cette technique.
- $t_{intro_2}$, $t_{intro_3}$ et $t_{intro_4}$ ($T_{21}$) : Ces trois tâches font partie (après modélisation de $t_{intro_4}$) du même type de tâches : $T_{21}$. Ces tâches font l'objet de praxéologies incomplètes. Seul un élément technologique est présent : la formulation de la règle des multiplicateurs ainsi que sa preuve peuvent être considérées comme faisant partie du bloc $\Pi_{21}$, où $\Pi_{21}$ inclut $\theta_{L_{flagr}}$, le Théorème de Lagrange et sa preuve à l'aide d'une approche par pénalisation. Les autres composantes de $\Pi_{21}$, par exemple le Théorème des bornes atteintes identifié comme prérequis, se trouvent dans les chapitres précédant le chapitre relatif à l'optimisation. Notons que nous choisissons $\theta_{21}$ car c'est la technique $\tau_{21}$ que nous retrouvons dans les praxéologies de $t_{exem_1}$ et $t_{exem_2}$ et qui pourrait s'appliquer aux trois tâches. Nous obtenons l'$OM$ ponctuelle (groupé pour les trois tâches) suivante : $[T_{intro_i}, /, \Pi_{21}]$, où $i = 2, 3, 4$ et où la barre mentionne un élément praxéologique qui n'est pas exposé explicitement dans ce chapitre du manuel. Comme la technique $\tau_{21}$ n'est pas rendue intelligible par le discours technologique dans les praxéologies de $t_{exem_1}$ et $t_{exem_2}$, nous ne la mentionnons pas comme technique associée à $T_{intro_i}$, où $i = 2, 3, 4$. En effet, nous retrouvons un indicateur de rigidité (Bosch et al., 2004), à savoir que les techniques ne sont pas indépendantes par rapport aux représentations sémiotiques (à savoir, aux problèmes concrets).
- $t_{exem_1}$ ($T_{21}$) : cette tâche fait partie d'une praxéologie quasi complète : $[t_{exem_1}, \tau_{21}, \Pi_{21}]$ où $\Pi_{21}$ est associé au discours technologique minimal $\theta_{21}$. La seule différence entre $t_{exem_1}$ et les problèmes d'optimisation présentés dans l'introduction est le nombre de variables : les problèmes d'introduction sont des problèmes à deux variables, la tâche $t_{exem_1}$ est un problème à trois variables. Nous pouvons qualifier le discours $\Pi_{21}$ dans ce manuel de "minimal" car seul l'énoncé du Théorème de Lagrange et sa preuve sont présentés pour justifier la technique associée. D'ailleurs, la technique est présentée sans détailler les calculs et justifications.
- $t_{exem_2}$ ($T_{22}$) : cette tâche fait également partie d'une praxéologie quasi complète : $[t_{exem_2}, \tau_{21}, \Pi_{21}]$, où $\tau_{21}$ comprend cette fois-ci la phase de modélisation qui transforme le problème initial en problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. Notons que la technique choisie par les auteurs évite l'utilisation d'une condition d'optimalité suffisante du second ordre en insistant sur le Théorème des bornes atteintes.

Comme avant, $\Pi_{21}$ est associé au discours technologique minimal de type $\theta_{21}$.
- $T_{405}$, $T_{402}$ et $T_{406}$ : trois tâches structurales sont travaillées dans le manuel. Remarquons que, complété par ces quelques tâches structurales, le discours technologique minimal $\theta_{21}$ semble considéré par les auteurs comme suffisant pour justifier la technique $\tau_{21}$. Les techniques associées aux trois tâches structurales mettent en avant la présence de la théorie de l'optimisation et du calcul différentiel et intégral de fonctions à plusieurs variables dans l'$OM$.

Sous la loupe de notre MER, le manuel présente une $OM$ locale composée principalement d'éléments d'$OM_2$ et d'$OM_4$. En effet, la question de "démontrer la règle des multiplicateurs de Lagrange" est issue d'$OM_4$, bien que de nombreuses autres tâches issues de cette $OM$ n'y soient pas présentes. Notons aussi que l'approche montrée est l'approche standard du Théorème de Lagrange (la fonction lagrangienne n'est pas introduite), bien que les auteurs aient choisi de présenter (implicitement, sans le mentionner) une preuve par pénalisation qui favorise la construction de la fonction lagrangienne. Le terme "pénalisation" n'est pas utilisé dans ce manuel. Comme cette praxéologie est présentée avant de résoudre des problèmes d'optimisation concrets de type $T_2$, nous assistons au fait que l'énoncé du Théorème de Lagrange devient le seul élément justifiant la technique associée à ces tâches. Nous ne trouvons pas de traces d'$OM_1$ comme organisation mathématique indépendante d'$OM_2$. Enfin, en ce qui concerne les tâches d'$OM_3$ et d'$OM_5$, elles sont complètement absentes, ce qui veut dire que le multiplicateur de Lagrange n'est pas travaillé en tant qu'objet dans ce manuel.

### Évaluation des praxéologies

Après la description de l'$OM$ locale présentée dans le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$), nous passons à l'évaluation des différents ingrédients praxéologiques :

**Évaluer des tâches**

**Identification :** Les tâches d'$OM_2$ sont clairement dégagées, tout comme les tâches de type $T_{405}$ et $T_{402}$. Seule la tâche $t_{intro1}$ reste peu claire car il n'est pas précisé ce qui est attendu comme réponse. D'ailleurs, le mot "interpréter" doit visiblement se comprendre comme "illustrer" et le mot "géométriquement" comme "graphiquement". Les tâches d'$OM_2$ sont particulièrement nombreuses, mais c'est le type $T_{21}$ qui domine. La tâche de type $T_{406}$ n'est pas identifiée et seule sa réalisation est présente dans le manuel.

**Raisons d'être :** Les raisons d'être des tâches du type $T_{21}$ apparaissent comme une nécessité logique après avoir traité les problèmes d'optimisation sans contrainte. Néanmoins, aucune motivation particulière n'est mentionnée explicitement. En effet, le bloc practico-technique est développé après qu'ait été donné un aperçu du bloc technologico-théorique. À ce moment, le cadre de la géométrie est sollicité pour donner des illustrations du Théorème de Lagrange que nous qualifions d'"applications" mais pas d'"exemples qui motivent". La tâche de type $T_{402}$ témoigne de l'intérêt du mathématicien pour l'activité de démontrer une proposition mathématique.

**Pertinence :** Les tâches du type $T_{21}$ sont pertinentes au regard de l'$OM_2$ et des besoins mathématiques des étudiants. L'intérêt de $T_{405}$ est de fournir une technologie aux techniques de $T_2$. Enfin, le type de tâches $T_{406}$ est pertinent pour l'activité mathématique visée car cela permet de faire le lien entre les multiplicateurs de Carathéodory et les multiplicateurs de Lagrange. C'est la tâche $t_{intro1}$ qui apparaît, vu sa place au début du chapitre, comme un isolat dans l'organisation mathématique. En effet, aucun lien entre cette tâche et les autres praxéologies n'est fait.

**Évaluer des techniques**

**Élaboration :** La technique $\tau_{21}$ mise en place pour les tâches de type $T_2$ est ébauchée dans les grandes lignes, dans le sens où toutes les étapes sont annoncées clairement, mais seul le résultat final de chaque étape figure dans le manuel. Les étapes intermédiaires (principalement calculatoires) sont laissées à charge du lecteur. La technique associée à la tâche de type $T_{402}$ est élaborée clairement.

**Portée et fiabilité VS rigidité :** La portée de la technique $\tau_{21}$ se limite aux problèmes d'$OM_2$ vérifiant que l'ensemble admissible est compact. Elle est donc restreinte à des tâches précises et montre une certaine rigidité dans le champ d'application. Comme nous l'avons déjà noté, les techniques associées à $t_{exem_1}$ et $t_{exem_2}$ ne sont pas indépendantes des représentations sémiotiques utilisées.

**Procédure algorithmique et intelligibilité :** La technique n'est pas suffisamment intelligible pour permettre sa compréhension et un élargissement du champ d'application. Le pourquoi de chacune des étapes n'est pas mis en avant, seul le résultat final - la résolution de la tâche - compte. D'ailleurs les auteurs parlent de la "Règle des multiplicateurs de Lagrange", où le mot "règle" laisse sous-entendre que la stratégie présentée importe le plus.

**Évaluer des technologies**

**Cohérence et rigueur :** Le seul discours technologique, $\theta_{21}$ (ou $\Pi_{21}$), présent dans le manuel est parfaitement cohérent. Cependant, stricto sensu, il ne s'agit pas d'une technologie $\theta_{21}$, mais d'un discours $\theta_{131}$. Le Théorème de Lagrange permet, en effet, de justifier la recherche des candidats à être extremum, tandis que la sélection à l'aide du Théorème des bornes atteintes n'est pas expliquée.

**Explication VS vérification :** Le discours technologique $\theta_{131}$ assume principalement son rôle de vérification. En effet, la réalisation des tâches des types $T_{405}$ et $T_{402}$ est considérée comme suffisante pour rendre intelligible la technique $\tau_{21}$.

**Portée des justifications :** Aucune remarque n'est faite à propos d'autres tâches ou d'autres techniques qui pourraient être justifiées par $\Pi_{21}$.

Sur base de cette évaluation, nous faisons les commentaires suivants :

– Seul le Théorème de Lagrange est visé, le multiplicateur de Lagrange n'est pas étudié en tant qu'objet mathématique.

- La présentation de ce théorème est réalisée à travers deux activités qui apparaissent relativement distinctes : premièrement, la démonstration du Théorème de Lagrange et, deuxièmement, la réalisation des tâches d'$OM_2$. L'$OM_1$ n'est pas travaillée comme organisation mathématique à part entière.
- Les tâches proposées d'$OM_2$ sont des problèmes à deux, trois ou plusieurs variables sous une seule contrainte d'égalité. Aucune généralisation n'est faite pour les problèmes sous plusieurs contraintes d'égalité.
- L'application de la technique $\tau_{21}$ apparaît comme une "procédure algorithmique" pour les tâches $t_{exem_1}$ et $t_{exem_2}$. Elle n'est pas directement rendue intelligible par la démonstration du théorème, afin d'être intelligible aussi pour les problèmes cités dans l'introduction.
- L'approche par la méthode de pénalisation n'est pas exploitée pour rendre intelligible la résolution des tâches de type $T_{21}$ et la forme des équations de Lagrange, mais pour éviter l'utilisation du Théorème des fonctions implicites à l'intérieur de la preuve.
- Une seule technique de résolution de $T_2$ est présentée ($\tau_{21}$), ce qui mène vers une certaine rigidité de penser la résolution des tâches de type $T_{21}$ ainsi que vers une restriction de la fiabilité de la méthode (lorsque l'ensemble admissible n'est pas compact, l'étudiant est dépourvu de méthodes pour accomplir la tâche d'$OM_2$).
- L'énoncé et la preuve du Théorème de Lagrange semblent répondre à toute question éventuelle, ce qui se traduit par une absence de tâches variées d'$OM_4$.

En conséquence, nous dirons que l'$OM$ développée dans ce manuel

- est mono-conceptuelle : seul le Théorème de Lagrange est travaillé ;
- sépare le procédural du structural : le développement des tâches procédurales se fait de manière déconnectée du travail des quelques tâches structurales, en conséquence de quoi les techniques d'$OM_2$ ne sont rendues intelligibles qu'implicitement par les tâches structurales d'$OM_4$ ;
- est focalisée sur le bloc practico-technique $\Lambda$ : la maîtrise de la résolution des tâches procédurales d'$OM_2$ est visée. De même, la preuve du théorème remplit principalement son rôle de technique associée à la tâche de type $T_{402}$.

Notons encore que le processus de modélisation n'est pas guidé dans les exercices. Comme ces exercices sont laissés à charge des étudiants, la modélisation mathématique pourrait devenir un obstacle à la résolution de l'exercice lorsque l'étudiant se voit dans l'impossibilité d'obtenir la bonne formulation mathématique du problème.

### 6.2.2 ($M_{\mathbf{UNa\text{-}Math}}$) Strodiot (1997)

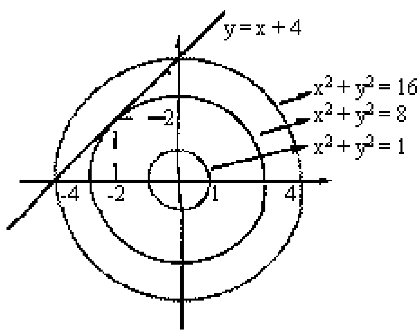
Le Chapitre 6 de ce manuel couvre l'analyse des fonctions de plusieurs variables réelles et plus particulièrement le problème de la différentiabilité. Après avoir traité les dérivées partielles du premier et du second ordre, le problème de la différentiabilité et de la dérivation en chaîne, les fonctions homogènes, le théorème de Taylor, les problèmes d'extrema d'une fonction de plusieurs variables réelles, les fonctions convexes et le théorème des fonctions implicites, une onzième et dernière section traite les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. L'extrait du manuel analysé se trouve dans l'Annexe A.2.

### Description du manuel

Le manuel commence la Section 11 avec l'introduction d'un type de problèmes issu du monde économique, $T_{économ}$, témoignant de l'intérêt que porte l'économie aux problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. Ceci est d'autant plus intéressant que le manuel se destine à des futurs mathématiciens et non à des futurs économistes. L'auteur semble attribuer une importance particulière aux pratiques professionnelles des économistes. Le problème en question est un problème de type $T_{21}$ connu sous le nom de "problème du consommateur" (voir Section 4.5.3 de cette thèse).

Après cette introduction, le syllabus définit un *extremum local de $f$ sous la contrainte* $g(x) = 0$, définition donnée dans le cas général des problèmes d'optimisation à $n$ variables sous $p$ contraintes d'égalité. Il s'agit de la préparation du milieu dans lequel le Théorème de Lagrange sera énoncé.

La Section 2 passe alors à la présentation d'un exemple de problème d'optimisation, appelé dans la suite tâche $t_{strod}$ (de type $T_{21}$).

> *Cherchons les minima de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*
>
> $$f(x, y) = x^2 + y^2$$
>
> *sous la contrainte $g(x, y) = 0$ où $g(x, y) = y - x - 4$. Graphiquement, le problème est de trouver le point de la droite d'équation*
>
> $$y = x + 4$$
>
> *appartenant au plus petit cercle centré à l'origine.*
>
> 
> 
>
> *Ce minimum est atteint par le point $(-2, 2)$ et vaut 8. Une manière de calculer ce minimum est de remplacer dans la fonction $f$ la variable $y$ par sa valeur tirée de la contrainte*
>
> $$y = x + 4 ,$$
>
> *pour ensuite minimiser la fonction d'une seule variable*
>
> $$\overline{f}(x) = x^2 + (x + 4)^2 .$$
>
> *Cette fonction atteint son minimum en $x = -2$, d'où la solution du problème.* (Strodiot, 1997, pp.77-78)

La tâche à résoudre est énoncée clairement. Ensuite, l'auteur propose de résoudre le problème graphiquement, par la technique $\tau_{25}$, et analytiquement, par la technique $\tau_{24}$. Autrement dit, il réalise une même tâche à l'aide de représentations sémiotiques de deux registres différents (le cadre utilisé est celui de l'analyse). Notons que la portée de ces deux techniques est fortement restreinte. Elles s'appliquent dans ce cas car la tâche, de type $T_{21}$, est un problème d'optimisation à deux variables sous une seule contrainte linéaire. L'auteur du syllabus fait remarquer que la technique $\tau_{24}$ n'est pas si simple à appliquer si la contrainte était une fonction plus compliquée

> *où il n'est pas possible d'exprimer $y$ à l'aide de fonctions élémentaires en la variable $x$.* (Strodiot, 1997, p.78)

En guise d'introduction de la Section 3, le Théorème des fonctions implicites est mentionnée comme outil essentiel à la résolution et quelques éléments historiques sont racontés à propos de Joseph-Louis Lagrange. Cette section énonce le Théorème de Lagrange et en donne une démonstration rigoureuse. On est en présence de tâches de type $T_{405}$ et $T_{402}$ respectivement. Dans ce même énoncé, les multiplicateurs de Lagrange ainsi que la condition de Lagrange sont définis ($T_{401}$ et $T_{404}$) explicitement. La preuve est du type $\tau_{122}$ et s'inscrit dans le cadre du calcul différentiel. Deux pages sont nécessaires pour arriver à l'écriture vectorielle de la condition de Lagrange.

La preuve du Théorème de Lagrange est suivie d'une remarque sur la condition de régularité ($T_{406}$). Pour souligner cette remarque, l'auteur choisit de présenter un contre-exemple :

$t_{contre-ex}$ ($T_{21}$) : calculer le minimum de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $g(x,y,z) = (x^2 - 4y, x - y - 1) = (0,0)$.

Cette démarche peut être considérée comme une technique particulière pour réaliser la tâche $T_{406}$ ($\tau_{406}$). Cependant, elle a pour conséquence de ne pas rendre intelligible la technique $\tau_{14}$. Notons encore qu'il s'agit d'un problème à trois variables sous deux contraintes d'égalité.

Ensuite, la Section 4 définit la fonction lagrangienne, tâche de type $T_{403}$, et énonce la condition d'optimalité nécessaire du premier ordre en termes de cette fonction lagrangienne. Il s'agit ici d'une tâche de type $T_{409}$, où la preuve qui suit l'énoncé peut être considérée comme une technique permettant d'établir le lien entre l'approche standard et l'approche par fonction lagrangienne ($\tau_{409}$).

La démonstration est suivie de l'application de la technique des multiplicateurs de Lagrange à l'exemple $t_{strod}$, vue comme tâche d'$OM_1$. La tâche est réalisée par la technique $\tau_{13}$. La technique $\tau_{14}$ n'est pas mentionnée (comme il s'agit d'une contrainte linéaire la technique $\tau_{14}$ est a priori superflue). À la fin de cet exemple, le syllabus remarque l'insuffisance de la réalisation d'une tâche d'$OM_1$ pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.

> *Cette méthode ne nous fournit aucun argument pour savoir si le point* $(-2,2)$ *est un extremum ni, dans l'affirmative, pour déterminer la nature de cet extremum.* (Strodiot, 1997, p.83)

C'est la section suivante qui énonce une condition d'optimalité suffisante du premier ordre dans le cas d'une fonction objectif convexe (ou concave) sous une contrainte d'égalité affine. Son énoncé et sa démonstration peuvent être considérés comme faisant partie d'un discours technologique de type $\theta_{23}$. L'exemple $t_{strod}$ est alors résolu à l'aide de cette condition d'optimalité, considéré cette fois-ci comme issu d'$OM_2$. Nous obtenons une praxéologie ponctuelle quasi complète pour cet exemple : $[t_{strod}, \tau_{13} \cup \tau_{23}, \Pi_{strod}]$, où $\Pi_{strod}$ reprend les différents discours technologiques rencontrés et relatifs au Théorème de Lagrange. La théorie n'est pas rappelée au moment de la présentation du Théorème de Lagrange, bien qu'elle soit bien présente dans l'ensemble du Chapitre 6 à propos des fonctions de plusieurs variables réelles. Enfin, une condition d'optimalité suffisante du second ordre est mentionnée dans cette section sans donner de preuve (technique de type $\theta_{23}$) donnant naissance à une deuxième technique de type $\tau_{23}$.

À la fin, l'auteur revient sur le problème économique, $T_{économ}$, présenté dans l'introduction. Comme il précise alors la fonction objectif ($U(x, y) = xy$), nous le notons dans la suite $t_{économ}$. La résolution de ce problème de type $T_{21}$ est justifiée par la (deuxième) technologie présentée, de type $\theta_{23}$, qui inclut alors le Théorème de Lagrange (sous forme lagrangienne) ainsi que la condition d'optimalité suffisante du second ordre. Le manuel termine avec une tâche de type $T_{413}$ (interpréter graphiquement) relative à la résolution du problème $t_{économ}$. Tenant compte de toute la partie relative au Théorème de Lagrange, nous obtenons une praxéologie quasi complète pour le problème $t_{économ}$.

En guise de conclusion, nous résumons l'$OM$ locale mise en place. Pour cela, nous dressons la liste des (types de) tâches travaillées et associées à des $OM$ ponctuelles :

- $t_{économ}$ ($T_{21}$) : La praxéologie construite est la suivante : $[t_{économ}, \tau_{23}, \Pi_{23}]$, où la technologie $\theta_{13}$ est comprise dans le bloc technologico-théorique.
- $t_{strod}$ ($T_{21}$) : La praxéologie construite est la suivante : $[t_{strod}, \tau_{23}, \Pi_{23}]$, où la technologie $\theta_{13}$ est comprise dans le bloc technologico-théorique. Notons que le manuel propose de résoudre ce problème à l'aide de deux autres techniques : $[t_{strod}, \tau_{24}, /]$ et $[t_{strod}, \tau_{25}, /]$. Ici, les praxéologies sont dépourvues d'un bloc technologico-théorique explicite. En montrant les limites de $\tau_{24}$ et $\tau_{25}$, ces deux dernières praxéologies servent, en effet, à introduire la technologie $\theta_{13}$.
- $t_{contre-ex}$ ($T_{21}$) : Cette tâche est utilisée pour illustrer l'importance de la condition de régularité dans le Théorème de Lagrange en donnant un contre-exemple. La praxéologie construite est la suivante (sans donner le moindre détail calculatoire) : $[t_{contre-ex}, \tau_{24}, /]$, où la technique de substitution n'est pas rendue intelligible.
- De $T_{401}$ à $T_{406}$, $T_{409}$ et $T_{413}$ : Plusieurs tâches structurales sont travaillées dans ce manuel. Il est à remarquer que, étant donné leur nombre plutôt élevé, les tâches structurales peuvent se comprendre comme un discours technologique de $\theta_{23}$ explicatif. Les techniques associées à ces différentes tâches sont à chercher au sein du calcul différentiel et intégral de fonctions à plusieurs variables, ainsi que de l'optimisation.

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches d'$OM_1$, d'$OM_2$ et d'$OM_4$ sont travaillées. Aucune mention n'est faite par rapport aux organisations mathématiques élémentaires $OM_3$ et $OM_5$. Le problème des multiplicateurs de Lagrange est laissé de côté et ces derniers apparaissent uniquement comme variables de la fonction lagrangienne.

### Évaluation des praxéologies

Après la description de l'$OM$ locale présentée dans le manuel ($M_{\text{UNa-Math}}$), nous passons à l'évaluation des différents ingrédients praxéologiques :

#### Évaluer des tâches

**Identification :** Les tâches d'$OM_2$, $t_{strod}$, $t_{économ}$ et $t_{contre-ex}$, sont clairement dégagées, tout comme la plupart des tâches d'$OM_4$. Les tâches de type $T_{406}$ et $T_{409}$ ne sont pas annoncées et se voient seulement réalisées dans le manuel. Quant à la tâche $T_{413}$, elle apparaît plus comme une illustration. Notons aussi que la seule tâche d'$OM_1$ s'annonce comme faisant partie de la résolution de $t_{strod}$ et non pas comme une tâche d'une praxéologie indépendante.

**Raisons d'être :** Le type de problèmes économiques, $T_{économ}$, motive tout le travail de la Section 11 dans ce manuel. L'auteur traite ensuite ce problème du point de vue mathématique à l'aide du problème $t_{strod}$. La tâche $t_{contre-ex}$ trouve sa raison d'être dans la tâche de type $T_{406}$. Les autres tâches structurales sont introduites comme une nécessité logique à l'activité mathématique.
Bien que la fonction lagrangienne joue un rôle de condensation de l'écriture des équations de Lagrange, on ne perçoit pas l'étendue de ce concept. En effet, le multiplicateur de Lagrange n'est pas travaillé comme objet et ne permet donc pas de donner plus de sens à la fonction lagrangienne. Il reste tout au long au rang d'outil.

**Pertinence :** Les trois tâches du type $T_{21}$ sont pertinentes au regard de l'$OM_2$ et des besoins mathématiques des étudiants. En plus, la Section 11 s'inscrit dans la logique du chapitre 6 sur l'analyse des fonctions de plusieurs variables. En ce qui concerne les tâches structurales, elles ont leur place légitime et aident à conceptualiser les différentes notions véhiculées par le Théorème de Lagrange. Seule la tâche de type $T_{406}$ pourrait être vue comme un isolat de l'activité mathématique puisqu'elle n'est pas lié explicitement à la technique $\tau_{14}$.

#### Évaluer des techniques

**Élaboration :** Le manuel ($M_{\text{UNa-Math}}$) élabore principalement la technique $\tau_{23}$ pour résoudre un problème de type $T_{21}$. Bien qu'elle ne soit pas énoncée en une fois, elle est exposée de façon très complète et, hormis des étapes plus calculatoires, les différentes étapes sont expliquées dans au moins deux registres différents. Cette technique est augmentée des techniques $\tau_{24}$ et $\tau_{25}$ dans le cas de problèmes dits "simples".
La réalisation de $T_{409}$ se limite à la preuve du théorème de la Section 11.4.1 (Strodiot, 1997, pp.81-82). Aucune explication supplémentaire n'est donnée. Notons encore que la tâche structurale de type $T_{406}$ est réalisée à l'aide d'un contre-exemple. Néanmoins, ce contre-exemple n'est pas lié explicitement à la technique $\tau_{14}$. Ceci entraîne que $\tau_{14}$ n'est pas élaborée et passe inaperçue à l'intérieur de $\tau_{23}$. De ce fait, cela pourrait induire un "oubli" de candidats à être extremum du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité, dans le cas de contraintes dites plus "compliquées". La technique $\tau_{14}$ passe d'ailleurs

tellement inaperçue qu'il y a absence d'un discours technologique qui permettrait de décider de la nature d'un candidat identifié par cette méthode. En ce qui concerne la technique $\tau_{24}$ associée à $t_{contre-ex}$, elle n'est pas élaborée. En effet, la solution du problème se présente très vite comme suit :

> *Si un point de* $\mathbb{R}^3$ *vérifie la contrainte, il est de la forme* $(2, 1, z)$. *Dès lors, le point* $(2, 1, 0)$ *est la seule solution du problème.* (Strodiot, 1997, p.81)

**Portée et fiabilité VS rigidité :** La portée des deux techniques $\tau_{23}$ se limite aux problèmes d'$OM_2$. Bien qu'un problème économique motive la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité, la modélisation d'un tel problème n'est pas mentionnée. La fiabilité de la technique est bonne, mais rencontre ses limites, notamment lorsque la condition d'optimalité suffisante du second ordre n'est pas vérifiée ou encore lorsqu'on ne tient pas compte des points repérés par la technique $\tau_{14}$. Elle montre donc une certaine rigidité dans le champ d'applications, surtout parce que la possibilité d'appliquer d'autres techniques, comme $\tau_{21}$ et $\tau_{22}$, ne ressort pas des explicitations.

**Procédure algorithmique et intelligibilité :** La technique est rendue intelligible pour permettre sa compréhension à l'aide des différentes tâches structurales. Cependant, toutes les étapes ne bénéficient pas d'un discours technologique développé. Ainsi, par exemple, la conclusion du Théorème de Lagrange n'est pas expliquée et connectée à la représentation graphique de l'exemple $t_{strod}$. Ou encore, $\tau_{14}$ ne bénéficie pas d'un discours technologique et la condition d'optimalité suffisante du second ordre est énoncée sans preuve et constitue donc un discours technologique "minimal".

**Évaluer des technologies**

**Cohérence et rigueur :** Le problème de la justification de $\tau_{23}$ traverse toute la section du manuel comme un fil conducteur. En effet, en suivant la résolution du problème $t_{strod}$, l'auteur justifie au fur et à mesure (avec un discours minimal) les différentes étapes de cette technique. Notons encore que la preuve du Théorème de Lagrange est rigoureuse (si ce n'est que le cas de plusieurs contraintes d'égalité n'est pas traité). Les formes de justification utilisées sont proches des formes canoniques en mathématiques, comme on peut le voir à l'exemple de la preuve et de la construction du contre-exemple.

**Explication VS vérification :** Les vérifications sont favorisées dans les discours technologiques. En effet, les discours technologiques se limitent souvent à énoncer les théorèmes et propositions, et nous ne trouvons que peu d'explications supplémentaires (voir par exemple la réalisation de la tâche de type $T_{406}$).

**Portée des justifications :** Les deux discours technologiques de type $\theta_{23}$ sont adaptés aux problèmes de type $T_{21}$. Cependant, tous les problèmes ne sont pas pris en compte par l'un ou l'autre discours. En plus, aucune remarque n'est faite à propos d'autres tâches ou d'autres techniques qui pourraient être justifiées par $\theta_{23}$. On constate donc une certaine rigidité des techniques.

Sur base de cette évaluation, nous donnons les commentaires suivants :

- Seul le Théorème de Lagrange est visé, le multiplicateur de Lagrange n'est pas abordé. En effet, les multiplicateurs de Lagrange apparaissent uniquement comme variables de la fonction lagrangienne.
- La réalisation d'une tâche de type $T_{21}$ est le fil conducteur qui guide la présentation du Théorème de Lagrange. Ainsi, seul le problème $t_{strod}$ est résolu par différentes techniques.
- Les tâches d'$OM_1$ sont travaillées brièvement comme organisation mathématique indépendante et sont ensuite intégrées dans la réalisation des tâches d'$OM_2$.
- D'un côté, les tâches proposées d'$OM_2$ sont des problèmes à deux ou trois variables sous une ou deux contraintes d'égalité. Aucune généralisation n'est faite pour le cas des problèmes sous plusieurs contraintes d'égalité. De l'autre côté, les tâches d'$OM_4$ liées à des formulations de théorèmes se réalisent dans un cadre plus général (fonctions de $n$ variables).
- La preuve du Théorème de Lagrange n'est pas exploitée pour rendre intelligible les équations de Lagrange. Le seul lien mentionné concerne la technique de substitution qui est liée à l'application du Théorème des fonctions implicites.
- Une seule technique de résolution est présentée ($\tau_{23}$), ce qui mène à une certaine rigidité de penser la résolution des tâches $T_{21}$ ainsi qu'à une restriction de la fiabilité de la méthode (lorsque la condition d'optimalité du second ordre n'est pas vérifiée, l'étudiant est dépourvu de méthodes pour pouvoir accomplir la tâche d'$OM_2$).

En conséquence, nous dirons que l'$OM$ développée dans ce manuel

- est mono-conceptuelle : seul le Théorème de Lagrange est travaillé ;
- lie le procédural au structural : bien que la réalisation de quelques tâches structurales se restreigne à la formulation de "théorèmes avec preuve", les tâches procédurales et les tâches structurales se développent en même temps, permettant ainsi de comprendre les techniques d'$OM_2$ au travers des techniques d'$OM_4$ ;
- est focalisée sur le bloc practico-technique $\Lambda$ : l'accent est mis sur la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité comme le montre l'exemple au début du chapitre. La preuve du Théorème de Lagrange est principalement vu sous sa facette d'outil ($\tau_{402}$).

### 6.2.3 ($M_{\textbf{UNa-Éco}}$) Thiry (2006)

Douze pages dans le syllabus (Thiry, 2006) traitent le Théorème de Lagrange dans le chapitre relatif à l'optimisation de plusieurs variables réelles. Après avoir traité le cas de l'optimisation sans contraintes ainsi que l'optimisation sur un ensemble fermé et borné, l'auteur travaille, dans la dernière section du chapitre, sur le problème de l'optimisation sous contraintes d'égalité. L'extrait du manuel analysé se trouve dans l'Annexe A.3.

#### Description du manuel

Le manuel commence par un problème d'optimisation issu du monde économique : le problème de maximiser l'utilité d'un consommateur (voir Section 4.5.3 de cette thèse).

> *Déterminer $(x, y)$ qui maximise $u(x, y)$ en respectant la contrainte budgétaire $px + y = B$.*
>
> *Un tel problème s'écrit généralement comme suit :*
>
> $$\begin{cases} \text{MAX} & u(x,y) \\ s.c. & px + y = B \qquad \textit{(les abréviations s.c. signifient "sous contrainte")}\,. \end{cases} \tag{6.1}$$
>
> (Thiry, 2006, p.162)

Ce problème, appelé $T_{utilit}$, est du type $T_{21}$ et l'auteur tâche de résoudre ce type de problèmes par la méthode de substitution, trace de la technique $\tau_{24}$.

> *Cependant, lorsque la contrainte est une fonction compliquée ou lorsque plusieurs contraintes doivent être prises en compte simultanément, il peut être difficile, voire impossible, d'utiliser une telle méthode de substitution. Il faudra utiliser d'autres techniques. Pour de tels problèmes, les économistes utilisent fréquemment* **la méthode des multiplicateurs de Lagrange** *décrite ci-dessous.* (Thiry, 2006, p.162)

L'auteur motive clairement l'utilisation du Théorème de Lagrange comme théorème à utiliser dans la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité.

Après cette introduction, le syllabus définit mathématiquement les problèmes d'optimisation qui seront résolus dans la suite :

$$\text{(I)} \begin{cases} \text{MAX} & f(x,y) \\ s.c. & g(x,y) = k \end{cases} \qquad\qquad \text{(II)} \begin{cases} \text{MIN} & f(x,y) \\ s.c. & g(x,y) = k \end{cases}$$

> (Thiry, 2006, p.162)

Ces problèmes d'optimisation, de type $T_{21}$, reprennent des problèmes à deux variables sous une seule contrainte d'égalité.

Nous constatons que le manuel consacre ensuite du temps pour interpréter géométriquement le problème : en se basant sur une approche des lignes de contour de la fonction $f$, on reçoit un aperçu de la technologie $\theta_{121}$ qui justifie la technique des multiplicateurs de Lagrange (principalement dans le registre du langage naturel et des graphiques). Les tâches structurales associées sont des types $T_{405}$ et $T_{413}$. En utilisant le Théorème des fonctions implicites, la conclusion est alors formalisée dans le cadre de l'analyse et donne naissance à la conclusion du Théorème de Lagrange :

> *Finalement, le point $(x_0, y_0)$ solution du problème (I) doit être tel que*
>
> - $g(x_0, y_0) = k$ , (6.2)
> - *il existe un nombre $\lambda$ tel que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda\ \nabla g(x_0, y_0)$.* (6.3)
>
> *Ce nombre $\lambda$ est appelé un* **multiplicateur de Lagrange**. (Thiry, 2006, p.164)

Ce discours technologique a également pour but de définir le multiplicateur de Lagrange, ce qui est une tâche d'$OM_4$, à savoir de type $T_{401}$. Cette condition d'optimalité nécessaire est ensuite énoncée formellement dans la Section 3 du syllabus : "Conditions du premier ordre : le Théorème de Lagrange" ($T_{405}$). Il est à mentionner que, d'après l'auteur, le théorème n'est pas démontré :

> *Dans le paragraphe précédent, l'observation des courbes de niveau nous a permis de constater qu'un point* $(x_0, y_0)$ *correspondant à un extremum de* $f$ *sous la contrainte* $g(x, y) = k$ *devait nécessairement satisfaire aux conditions* (6.2) *et* (6.3). *Nous allons maintenant formuler ces constatations sous forme d'un théorème (que nous ne démontrerons pas ici).* (Thiry, 2006, p.164)

Ainsi, l'auteur ne fournit pas de preuve mais bien une argumentation qui explique le théorème ($T_{402}$). La même section donne ensuite la définition de la fonction lagrangienne et continue ainsi à élaborer l'environnement du Théorème de Lagrange. Il s'agit des deux tâches des types $T_{403}$ et $T_{409}$ relatives à notre MER puisque l'auteur décide de présenter l'énoncé du Théorème de Lagrange aussi en termes de la fonction lagrangienne.

Bien que le syllabus ne mentionne pas explicitement que le Théorème de Lagrange sert à caractériser les solutions d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité, la présente section peut être considérée comme un discours technologico-théorique issu d'$OM_1$. C'est l'objet de la Section 4 de fournir une description détaillée et algorithmique des techniques $\tau_{13}$ et $\tau_{14}$ sous forme de proposition avec mention explicite que l'objectif est de trouver des **candidats** uniquement à un extremum. Cette proposition qui complète une praxéologie ponctuelle d'$OM_1$, est basée sur deux remarques que l'auteur donne au début de la section. La première concerne le Théorème de Lagrange vu comme une condition nécessaire d'optimalité. Elle dit que seuls des candidats à être extremum peuvent être identifiés. Il s'agit d'une trace d'une tâche de type $T_{407}$. La deuxième considère la condition de régularité qui doit être prise en compte lors de la recherche des candidats. Nous disons que les types de tâches $T_{406}$ et $T_{411}$ sont travaillés.

La proposition 4.10 (Thiry, 2006, p.166) énonce finalement la technique pour identifier tous les candidats à être extremum. Nous pouvons considérer que la praxéologie suivante a été construite : $[T_1, \tau_{13} \cup \tau_{14}, \Pi_1]$, où $\Pi_1$ est égal à $\theta_{121} \cup \theta_{14}$. La tâche de type $T_1$ est définie à la première ligne de la Proposition 4.10.

Deux exemples illustrent l'application de cette proposition et fournissent - en tenant compte de l'énoncé du Théorème de Lagrange - deux praxéologies ponctuelles d'$OM_1$ relativement complètes autour des problèmes :

> *Déterminer les candidats à un extremum de la fonction*
>
> 1. $f(x, y) = x^2 y$ *sous contrainte* $g(x, y) = 2x^2 + y^2 = 3$ *;*
> 2. $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ *sous contrainte* $g(x, y) = (x - 1)^3 - y^2 = 0$.
>
> (Thiry, 2006, p.167)

Désignons ces deux tâches par $t_{exem_1}$ et $t_{exem_2}$, de type $T_1$. Concernant le deuxième exemple, l'auteur va plus loin que l'objectif visé et se permet de décider du statut du candidat identifié. Pour cela, elle applique la technique $\tau_{22}$. Cependant, il faut remarquer que cette procédure n'est pas toujours facilement réalisable.

> *Dans l'exemple ci-dessus, nous avons pu montrer qu'un candidat correspondait effectivement à un extremum. Une telle démarche n'est pas toujours possible. Pour pouvoir décider du statut d'un candidat, nous devrons utiliser les dérivées secondes du Lagrangien. C'est l'objet du paragraphe suivant.* (Thiry, 2006, p.169)

La Section 5 est consacrée aux conditions d'optimalité suffisantes du second ordre qui permettent de décider du statut d'un candidat à être extremum. La proposition 4.11

complète la technique de type $\tau_{23}$ pour résoudre des tâches d'$OM_2$. L'objectif du chapitre sur le Théorème de Lagrange n'étant pas les conditions d'optimalité du second ordre, l'auteur ne présente aucun bloc technologico-théorique développé (seul l'énoncé du théorème est donné) et se contente de remarquer que la proposition ne sera pas démontrée. Cette technique est illustrée sur le premier des deux exemples traités précédemment, $t_{exem_1}$ et est considérée maintenant comme tâche d'$OM_2$. Nous obtenons une deuxième praxéologie autour de cette tâche de type $T_{21}$, à savoir $[t_{exem_1}, \tau_{23}, \Pi_{exem_1}]$ où $\Pi_{exem_1}$ comprend le Théorème de Lagrange ainsi que l'énoncé de la condition d'optimalité du second ordre. D'autres éléments technologico-théoriques associés à l'utilisation de la condition d'optimalité suffisante du second ordre ne sont pas accessibles dans le manuel.

Ensuite, le syllabus propose de regarder l'interprétation du multiplicateur dans un contexte économique. Le problème présenté est du type $T_{32}$. Tout comme pour le Théorème de Lagrange, la technologie $\theta_{32}$ est présentée avant d'expliciter la technique $\tau_{32}$. Le développement de la technologie est qualifiée par notre MER de tâche de type $T_{52}$. Elle est ensuite résumée dans la proposition 4.12 (Thiry, 2006, p.171) et la technique associée à $T_{32}$ est exposée dans la proposition 4.13 (Thiry, 2006, p.172). La section est complétée avec un exercice, $t_{exem3}$, qui tâche d'appliquer la technique exposée. Nous obtenons la praxéologie ponctuelle suivante $[t_{exem3}, \tau_{32}, \Pi_{32}]$. Cette interprétation du multiplicateur de Lagrange clôture le chapitre sur l'optimisation de fonctions de plusieurs variables réelles et propose encore une liste d'exercices à résoudre. En ce qui concerne le Théorème de Lagrange, nous y trouvons plusieurs tâches des types $T_{21}$ et $T_{22}$, ainsi que des tâches de type $T_{32}$. Remarquons que le problème de la modélisation n'est pas abordé dans le manuel bien que les tâches proposées nécessitent parfois des démarches de modélisation.

En guise de conclusion, nous résumons l'$OM$ locale mise en place. Pour cela, nous dressons la liste des (types de) tâches travaillées et associées à des $OM$ ponctuelles :

- $T_{utilit}$, (I) et (II) ($T_{21}$) : Ces types de tâches peuvent être vues comme les formulations génériques des problèmes de type $T_{21}$ traités. Faute de l'expression explicite qui manque pour $u(x, y)$, $f(x, y)$ et $g(x, y)$, ces problèmes ne présentent aucune solution analytique. Cependant, leur procédure de résolution peut être expliquée. Notons que la technique de substitution est mentionnée sans donner plus de détails.
- $t_{exem_1}$ ($T_{21}$) : La praxéologie construite est la suivante : $[t_{exem_1}, \tau_{23}, \Pi_{exem_1}]$. La technique $\tau_{23}$ comprend bien les techniques $\tau_{13}$ et $\tau_{14}$ ; le bloc technologico-théorique comprend le Théorème de Lagrange ainsi que l'énoncé de la condition d'optimalité du second ordre.
- $t_{exem_2}$ ($T_{21}$) : La praxéologie construite est la suivante : $[t_{exem_2}, \tau_{22}, \Pi_{exem_2}]$, où $\Pi_{exem_2} = \theta_{121} \cup /$. La barre "/" est mise pour signaler l'absence d'une technologie associée au repérage des solutions parmi les candidats à être extremum.
- $t_{exem3}$ ($T_{32}$) : La praxéologie suivante $[t_{exem3}, \tau_{32}, \Pi_{32}]$ est établie dans ce manuel. Il faut noter que la technique $\tau_{32}$ met clairement en avant qu'il faut d'abord résoudre la tâche associée de type $T_{21}$ afin de connaître la valeur du multiplicateur de Lagrange. Après, il est possible de réaliser l'objectif visé de la tâche $T_{exem3}$.
- $T_{401}$, $T_{402}$, $T_{403}$, $T_{405}$, $T_{406}$, $T_{407}$, $T_{409}$, $T_{411}$ et $T_{413}$ : Plusieurs tâches structurales sont travaillées dans ce manuel.
- $T_{52}$ : une argumentation de la propriété, qui met en valeur la signification du multiplicateur de Lagrange correspondant à une solution, est mise en avant sans pour

autant donner un nouveau statut à ce multiplicateur.
En combinant les différentes praxéologies explicitées ci-dessus, nous constatons que le syllabus est composé de traces laissées par toutes les $OM$ locales élémentaires de notre MER. En effet, bien que le problème motivant l'introduction du Théorème de Lagrange soit celui d'$OM_2$, le syllabus travaille d'abord les activités issues d'$OM_1$ et puis seulement d'$OM_2$. Les tâches structurales d'$OM_4$ servent à compléter les blocs technologico-théoriques des différentes praxéologies. Les traces laissées par $OM_3$ indiquent clairement que l'auteur décide de rester au niveau procédural du multiplicateur de Lagrange. La gamme des tâches structurales d'$OM_5$ est, en conséquence, seulement effleurée.

#### Évaluation des praxéologies

Après la description de l'$OM$ locale présentée dans le manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$), nous passons à l'évaluation des différents ingrédients praxéologiques :

**Évaluer des tâches**

**Identification :** En ce qui concerne les tâches d'$OM_1$, $t_{exem_1}$ et $t_{exem_2}$, elles sont bien identifiées. Par la suite, on les considère comme appartenant à l'$OM_2$. Le problème $t_{exem3}$ est, lui-aussi, bien identifié. Enfin, les tâches structurales d'$OM_4$ sont clairement dégagées dans ce manuel et permettent de comprendre quelles actions sont visées. La tâche $T_{52}$ est directement liée à la proposition 4.13 (Thiry, 2006, p.172).

**Raisons d'être :** Le type de tâches $T_{utilit}$ semble motiver la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. Dans ce sens, les tâches de type $T_{21}$ ont leur raison d'être dans le manuel. Le problème $t_{exem3}$ est utilisé pour illustrer la propriété à propos de la signification du multiplicateur de Lagrange correspondant à une solution. De ce fait, le problème apparaît comme application et non comme motivation de la tâche de type $T_{32}$. Les tâches structurales trouvent leur motivation dans le souhait de rendre les techniques associées aux tâches procédurales intelligibles.

**Pertinence :** Les différentes tâches n'apparaissent pas comme des "isolats" dans le syllabus. Elles ont été choisies en lien avec le reste de l'activité mathématique (optimisation sous contraintes d'égalité) et extra-mathématique (résoudre des problèmes fondamentaux de l'économie mathématique). Quant aux tâches structurales, elles sont pertinentes pour l'activité mathématique.

**Évaluer des techniques**

**Élaboration :** Les techniques associées aux différentes tâches procédurales sont - hormis quelques étapes calculatoires - clairement élaborées dans ce manuel. Les tâches structurales de "démontrer" ne sont, d'après l'auteur, pas élaborées dans le manuel. Nous disons que l'auteur fournit quand même une argumentation du Théorème de Lagrange. Les autres tâches structurales sont bien construites.

**Portée et fiabilité VS rigidité :** Deux techniques différentes sont retrouvées pour résoudre des problèmes de type $T_{21}$ : $\tau_{22}$ et $\tau_{23}$ à l'intérieur desquelles les techniques $\tau_{13}$ et $\tau_{14}$ permettent d'identifier les candidats à être extremum. Nous avons également une technique pour résoudre des problèmes de type $T_{32}$ : $\tau_{23}$. Bien que deux techniques aient été proposées pour résoudre des problèmes d'$OM_2$, seule la deuxième, $\tau_{23}$, continue à être exploitée dans le manuel, montrant une certaine rigidité des techniques. Au niveau de la portée, ces techniques sont uniquement utilisées pour résoudre des problèmes de deux variables à une seule contrainte d'égalité. Aucune généralisation n'est proposée. En ce qui concerne $\tau_{22}$, elle est rigide dans le sens où elle permet seulement, dans le cas précis de $t_{exem_2}$, de déterminer la nature des points identifiés par $\tau_{14}$. Elle n'est pas proposée dans le cas général.

**Procédure algorithmique et intelligibilité :** Après avoir été rendues intelligibles (on retrouve des argumentations explicatives des différentes techniques), les techniques sont érigées en "procédure algorithmique" pour résoudre les différents problèmes. Ainsi, nous retrouvons des passages dans le manuel qui laissent sous-entendre cette caractéristique.

> *Nous allons maintenant déduire une stratégie pour rechercher tous les candidats* $(x_0, y_0)$ *correspondant à un extremum de* $f$ *sous contrainte* $g(x, y) = k$ *[...]* (Thiry, 2006, p.165)

Cette stratégie est formulée comme un algorithme à suivre :

> *Pour rechercher les candidats à un extremum de* $f(x, y)$ *sous contrainte* $g(x, y) = k$ *:*
>
> 1. *Rechercher les points stationnaires de* $g(x, y)$ *[...] Toute solution de ce système qui est admissible est un candidat.*
>
> ... *Si* $(x_0, y_0, \lambda_0)$ *est une solution telle que* $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$*, alors* $(x_0, y_0)$ *est un candidat.*
>
> (Thiry, 2006, p.166)

Plus loin,

> *La proposition suivante (que nous ne démontrerons pas) nous fournit un test [...]* (Thiry, 2006, p.169)

Bien que les éléments du bloc technologico-théorique soient présents, le bloc practico-technique d'une tâche procédurale est clairement mis en avant.
Notons encore qu'après avoir construit les techniques, le fait de les "algorithmiser" peut être considéré dans ce manuel comme une étape d'institutionnalisation.

**Évaluer des technologies**

**Cohérence et rigueur :** Les différents discours technologiques sont cohérents. Cependant tous les blocs technologico-théoriques ne sont pas développés. Ainsi, il y a absence d'un discours technologique clair pour décider de la nature d'un candidat identifié par la méthode $\tau_{14}$.

**Explication VS vérification :** Les explications sont favorisées dans ce manuel par rapport aux discours vérificatifs.

**Portée des justifications :** Le discours technologique $\theta_{23}$ est adapté aux seuls problèmes de type $T_{21}$ qui peuvent être résolus par la technique $\tau_{23}$.

Sur base de cette évaluation, nous donnons les commentaires suivants :
- Le Théorème de Lagrange et le multiplicateur de Lagrange sont visés dans ce manuel. Cependant, le multiplicateur de Lagrange n'a pas de statut objet étant donné l'absence d'un bloc technologico-théorique développé.
- La réalisation d'une tâche de type $T_{21}$ est le fil conducteur qui guide la présentation du Théorème de Lagrange. Vers la fin, cette tâche est augmentée pour devenir une tâche de type $T_{32}$. Dans ce sens, le type de tâches $T_{21}$ est intégré dans l'$OM$ locale par un discours technologique et le développement successif des techniques associées.
- Les tâches d'$OM_1$ sont travaillées brièvement comme organisation mathématique indépendante et sont ensuite intégrées dans la réalisation des tâches d'$OM_2$.
- Les tâches proposées d'$OM_2$ sont des problèmes à deux variables sous une seule contrainte d'égalité et la technique $\tau_{23}$ est formulée dans le cas générique. Aucune généralisation n'est faite pour les problèmes sous plusieurs contraintes d'égalité. Les tâches d'$OM_4$ et d'$OM_5$ travaillent également sur des problèmes à deux variables sous une seule contrainte d'égalité.
- L'argumentation du Théorème de Lagrange est exploitée pour rendre intelligibles les équations de Lagrange. Cette argumentation est basée sur une approche par "courbes de niveau tangentes". Cependant, l'accent est ensuite mis sur le bloc practico-technique et les stratégies de résolution. Le caractère algorithmique de ces stratégies peut tendre à reléguer ainsi les tâches structurales au second plan.
- Deux techniques de résolution sont présentées ($\tau_{22}$ et $\tau_{23}$), mais seule la technique $\tau_{23}$ est rendue intelligible par un discours technologique (minimal). Cette observation mène à une certaine rigidité dans la résolution des tâches de type $T_{21}$ ainsi qu'à une restriction de la fiabilité de la méthode. (Que doit-on faire lorsqu'un candidat est trouvé par $\tau_{14}$ ? Lorsque la condition d'optimalité suffisante du second ordre ne permet pas de conclure ? On est dépourvu de méthodes pour pouvoir accomplir la tâche d'$OM_2$ dans ces cas.)

En conséquence, nous dirons que l'$OM$ développée dans ce manuel
- est bi-conceptuelle : le Théorème de Lagrange et le multiplicateur de Lagrange sont travaillés ;
- lie le procédural au structural : il y a l'intégration du type de tâches $T_{21}$ dans l'$OM$ par un discours technologique qui est développé par différentes tâches structurales et lié au développement successif des techniques associées à $T_{21}$ ;
- est focalisée sur le bloc practico-technique $\Lambda$ : l'accent est mis sur la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité, le caractère algorithmique des stratégies de résolution fait qu'elles peuvent tendre à reléguer les blocs technologico-théoriques développés par les tâches structurales au second plan.

### 6.2.4 ($M_{\textbf{ULg-Éco}}$) Bair (2003)

Le chapitre du syllabus "Analyse mathématique" (Bair, 2003) relatif au Théorème de Lagrange est intitulé "Extrema liés". Il comporte trente-deux pages dont 20 pages qui concernent l'optimisation sous contraintes d'égalité. Le Chapitre V qui précède le chapitre sur le Théorème de Lagrange porte sur l'optimisation sans contraintes ou, autrement dit, sur des problèmes *libres*[67]. Quant au Chapitre VI, il est consacré à la recherche d'*extrema liés*. L'extrait du manuel analysé se trouve dans l'Annexe A.4.

### Description du manuel

La première section présente le problème général (sans formulation mathématique, dans le registre du langage naturel) en faisant un rappel historique : l'auteur présente les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité, étudiés par Joseph-Louis Lagrange, avant d'étudier ceux sous contraintes d'inégalité. Quand on est face à un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité,

> *la première méthode qui vient à l'esprit consiste à tirer des équations des contraintes certaines variables en fonction des autres, de manière à se ramener à un nombre réduit de variables qui ne soient plus liées par des égalités.* (Bair, 2003, p.70)

Le processus de résolution mentionné est celui de la substitution, technique $\tau_{24}$ dans notre MER. Cette technique - si elle s'applique - évite une utilisation du Théorème de Lagrange et l'auteur en donne un exemple concret (avec détails calculatoires). Aucune mention de la tâche d'optimisation n'est faite. De plus, il précise quelques précautions à prendre lors de l'application de cette technique.

> *Quand les égalités de contrainte sont trop complexes pour livrer explicitement certaines variables en fonction des autres, on peut considérer qu'elles les définissent "implicitement". Cette voie, qui repose bien entendu sur le théorème des fonctions implicites, a inspiré à Lagrange un traitement efficace [...]* (Bair, 2003, p.70)

Dès l'introduction, il est donc fait mention de la règle des multiplicateurs de Lagrange comme technique de résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. L'auteur procède ensuite à l'introduction de nouveaux objets dans le milieu de l'optimisation. En effet, il a besoin de définir aussi bien les concepts de *maximant local de la fonction $f$ sur l'ensemble $E$* que de *maximum local de $f$ sur $E$* (respectivement *minimant local* et *minimum local*). Nous disons que le vocabulaire spécifique est précisé pour permettre un langage commun entre le professeur et les étudiants. En même temps, ce vocabulaire permet un accès au savoir savant. Après avoir motivé la recherche des extrema locaux par la recherche des extrema globaux - tâche structurale que nous qualifions d'extérieure par rapport au Théorème de Lagrange - l'auteur du syllabus tâche de trouver des conditions d'optimalité pour optimiser une fonction donnée sous contraintes d'égalité.

Une première remarque énonce que la technique à utiliser pour repérer un candidat à être solution ($T_1$) devra être affinée par rapport à la technique déjà établie pour trouver des points stationnaires d'un problème sans contrainte. Ceci est réalisé à l'aide de deux registres différents : d'un côté le registre littéral et de l'autre côté le registre graphique. Cette explication peut être considérée comme le début d'une réalisation des tâches structurales de type $T_{405}$ et $T_{413}$.

La Section 2 traite directement la règle des multiplicateurs de Lagrange. Bien que le problème d'optimisation soit énoncé dans le cas général d'une fonction de $n$ variables à $m$ contraintes,

67. L'optimisation libre reprend, d'après l'auteur, l'optimisation sans contraintes et l'optimisation sur des compacts, sur des fermés non bornés et sur des ouverts bornés ou non bornés.

> *nous allons nous contenter de donner un aperçu de cette théorie en examinant en détail le cas d'une fonction $f$ à deux variables $x_1$ et $x_2$, qu'il s'agit de maximiser sur un ensemble $E$ défini par une seule égalité de contrainte.* (Bair, 2003, p.72)

Le problème manipulé, appelé $T_{général}$, est donc une tâche de type $T_{21}$ pour laquelle on se propose de trouver une condition d'optimalité (formulée dans le registre du langage naturel et non pas dans les registres symbolique et algébrique). L'auteur propose donc de poursuivre deux objectifs : résoudre une tâche de type $T_{21}$ et caractériser les solution d'un tel problème ($T_{405}$).

Nous lisons ensuite qu'intuitivement

> *le gradient de $f$ est proportionnel au gradient de $g$ en $X^*$, à la condition que le dernier ne soit pas nul.* (Bair, 2003, p.72)

Ce résultat est suivi d'une justification graphique et littérale, qui relève d'une tâche structurale de type $T_{402}$. La stratégie utilisée est celle d'une preuve par l'absurde (basée sur l'approche par courbes de niveau tangentes), technique que nous désignons par $\tau_{402}$. De nouveau, le texte et les graphiques doivent être lus en même temps, ce qui peut être considéré comme une articulation entre différents registres. En plus, les cadres de l'analyse et de la géométrie se mélangent dans la justification. La condition d'optimalité obtenue est alors démontrée rigoureusement à l'aide du théorème des fonctions implicites (c'est toujours une tâche de type $T_{402}$ qui permet de construire en même temps le bloc technologico-théorique d'une praxéologie associée à $T_1$). Quant à sa généralisation au cas d'un problème d'optimisation à $n$ variables sous $m$ contraintes, l'auteur précise :

> *La démonstration de ce résultat dans le cas général (que nous ne détaillerons pas en raison des difficultés techniques qu'elle comporte) est assez semblable (dans son principe) à celle du cas particulier traité ci-dessus ; elle repose également sur le théorème des fonctions implicites (dans sa version la plus générale).* (Bair, 2003, p.74)

La généralisation du Théorème de Lagrange est désignée dans notre MER par la tâche de type $T_{410}$. Bien que la démonstration dans le cas général ne soit pas rendue explicite, le syllabus mentionne que dans le même contexte l'hypothèse supplémentaire du Théorème de Lagrange se généralise aussi : la matrice jacobienne en $X^*$ doit être de rang $m$. Cette remarque relève d'une tâche de type $T_{406}$. À l'aide de cette remarque, deux nouvelles définitions sont introduites, celle d'un point *singulier* et d'un point *régulier* (ou *non singulier*). Il s'agit ici d'une tâche de type $T_{411}$.

Ensuite, le Théorème de Lagrange est formellement énoncé dans le cas général ($T_{410}$ et $T_{405}$), suivi de la définition de la fonction lagrangienne (appelée *lagrangien* dans le syllabus) et des multiplicateurs de Lagrange (type de tâches $T_{401}$ et $T_{403}$). Suit alors une "Règle de sélection" (Bair, 2003, p.75) pour avoir un extrémant de $f$ sur $E$. Cette règle peut être considérée comme l'énoncé générique de la technique pour trouver des candidats à être solution ($\tau_{13} \cup \tau_{14}$).

Nous apercevons une remarque qui caractérise les candidats à être solution : bien qu'ils ne soient pas des points stationnaires de la fonction $f$, ils sont des points stationnaires de la fonction lagrangienne. Dans ce sens,

> *la technique de Lagrange transforme le problème lié de départ en un problème libre, mais en retouchant la fonction à optimiser à l'aide des conditions de contrainte et*

> *en augmentant le nombre de "variables" par l'introduction des multiplicateurs de Lagrange.* (Bair, 2003, p.75)

Cette phrase peut mener les étudiants vers l'idée erronée induite par la transformation ($T_{412}$). Ainsi, il est judicieux de bien présenter cette propriété : il est, en effet, équivalent de "trouver les points candidats à être solution du problème de départ" et de "trouver les candidats à être solution du problème d'optimiser la fonction lagrangienne (sans contraintes)".

L'introduction des multiplicateurs de Lagrange dans la fonction lagrangienne, comme le fait l'auteur, relève d'une tâche d'$OM_5$, à savoir définir les multiplicateurs de Lagrange en tant que variable indépendante de la fonction lagrangienne ($T_{53}$). Cependant, il revient sur sa remarque quasi tout de suite.

> *Si un processus de résolution du système [...] nous livre une solution [...] le vecteur de Lagrange associé [...] n'aura joué dans l'affaire qu'un rôle auxiliaire.* (Bair, 2003, p.76)

Il décide alors de faire deux remarques importantes :

1. Lorsqu'on considère les multiplicateurs de Lagrange comme variables de la fonction lagrangienne, l'approche standard peut être exprimée, de façon équivalente, par l'approche par fonction lagrangienne (tâche de type $T_{409}$).
2. La seconde remarque est une mise en garde envers les points singuliers. Nous disons que l'auteur explicite la condition de régularité et attire le lecteur sur cette hypothèse du Théorème de Lagrange ($T_{406}$) dont la méthode de Lagrange ne peut pas faire abstraction. Notons que l'auteur propose plus loin une tâche procédurale, dûe à Courant, qui met en pratique cette remarque.

En résumé, nous obtenons une praxéologie ponctuelle autour de la tâche qui consiste à trouver des candidats à être solution du problème d'optimisation : $[T_1, \tau_{13} \cup \tau_{14}, \Pi_1]$, où $\Pi_1 = \theta_{12i}$ $(i = 1, 2)$. La tâche a été explicitée uniquement dans le registre du langage naturel. Cette praxéologie est augmentée de nombreux éléments praxéologiques venant d'$OM_4$ qui visent la bonne compréhension du "Théorème de Lagrange".

La Section 3 fournit des méthodes pour sélectionner, parmi tous les candidats à être solution du problème d'optimisation, ceux qui sont réellement solution du problème. L'introduction de cette section réalise en même temps une tâche de type $T_{407}$. Par ailleurs, le tableau à la page 77 de (Bair, 2003) (voir page 5.2 de cette thèse) ainsi que les pages suivantes fournissent des explications à propos du choix de ceux, parmi tous les candidats à être solution, qui sont effectivement solution du problème d'optimisation et constituent des réponses à la tâche $T_{408}$ en particulier. Nous pouvons dire que les onze pages du syllabus à ce propos complètent la technique d'$OM_1$ pour être opérationnel lors de la résolution d'un problème de type $T_{2i}$ $(i = 1, 2, 3)$, exposent en même temps les techniques $\tau_{2i}$ $(i = 1, 2, 3)$ et fournissent des discours technologiques associés (voire des tâches structurales en lien avec ces blocs technologico-théoriques). De plus, le syllabus illustre chacune des méthodes avec deux exemples, ce qui fait un répertoire de huit problèmes de type $T_{2i}$ $(i = 1, 2, 3)$ résolus complètement et pour lesquels une praxéologie (relativement complète) existe (6 problèmes de type $T_{21}$, 1 problème de type $T_{22}$ et 1 problème de type $T_{22}$). Ces huit problèmes sont désignés par $t_{applic}$.

On s'intéresse ensuite, dans la Section 4, aux multiplicateurs de Lagrange et à leur signification. L'auteur montre que les multiplicateurs ont une signification concrète intéressante : ils mesurent en quelque sorte la sensibilité de l'extremum pour des variations dans les constantes des contraintes. La tâche qui est ensuite développée est de type $T_{52}$. Bien que cette interprétation soit jugée importante pour l'économie, aucune tâche procédurale ne la fait intervenir et seule une mention vers des problème de ce type est donnée. Il y a donc absence de tâches pour lesquelles ce qui précède peut intégrer un bloc technologico-théorique. Il est encore mentionné, en raison de cette mesure de sensibilité, que le multiplicateur est appelé "shadow price", "prix virtuel ou "prix ombre" (tâche de type $T_{51}$).

Les Sections 5 et 6 ne concernent plus directement le Théorème de Lagrange et n'ont pas été analysées. Quant à la Section 7, elle reprend des exercices, où huit des dix exercices proposés sont issus d'$OM_2$, soit de type $T_{21}$, soit de type $T_{22}$.

En guise de conclusion, nous résumons l'$OM$ locale mise en place. Pour cela, nous dressons la liste des (types de) tâches travaillées et associées à des $OM$ ponctuelles :

- La technique $\tau_{11}$ apparaît, au début du chapitre, comme le seul élément d'une praxéologie (ou comme technique associée à la tâche de "substituer une variable dans une contrainte donnée").
- $T_1$ : La première praxéologie développée est $[T_1, \tau_{13} \cup \tau_{14}, \Pi_1]$, où $\Pi_1$ reprend entre autres $\theta_{12i}$ $(i = 1, 2)$. Le type de tâches (génériques) est exprimé dans le registre du langage naturel.
- $T_{général}$ $(T_{21})$ : Le type de tâches $T_{général}$ est issu d'$OM_2$. Les techniques et technologies pour résoudre des problèmes d'$OM_2$ sont longtemps exposées et permettent d'obtenir la praxéologie suivante : $[T_{général}, \tau_{2i}, \Pi_{2i}]$, où le discours technologique reprend $\theta_{2i}$ $(i = 1, 2, 3)$.
- $t_{applic}$ $(T_{21}$, $T_{22}$ et $T_{22})$ : Les praxéologies construites pour l'ensemble des huit problèmes d'application sont de la forme suivante : $[t_{applic}, \tau_{2i}, \Pi_{2i}]$, où le discours technologique reprend $\theta_{2i}$ $(i = 1, 2, 3)$.
- $T_{401}$ à $T_{403}$ et $T_{405}$ à $T_{413}$ : Beaucoup de tâches structurales sont travaillées dans ce manuel pour rendre le Théorème de Lagrange intelligible.
- $T_{51}$, $T_{52}$ et $T_{53}$ : le multiplicateur de Lagrange est travaillé en tant qu'objet mathématique bien qu'aucune tâche procédurale associée (d'$OM_3$) ne soit présente dans le manuel.

En considérant notre MER, nous pouvons dire que ce sont les tâches issues des organisations mathématiques élémentaires $OM_1$, $OM_2$, $OM_4$ et $OM_5$ qui dominent le manuel. Les tâches associées à $OM_3$ sont absentes.

### Évaluation des praxéologies

Après la description de l'$OM$ locale présentée dans le manuel ($M_{\text{ULg-Éco}}$), nous passons à l'évaluation des différents ingrédients praxéologiques :

**Évaluer des tâches**

**Identification :** Toutes les tâches présentées dans ce manuel, sauf une, sont bien identifiées. En effet, $T_{général}$ et les huit problèmes $t_{applic}$ sont clairement énoncés dans le manuel. La tâche d'$OM_1$ doit se lire dans le texte et fait très vite partie intégrante d'$OM_2$. Les nombreuses tâches structurales sont bien dégagées puisque leur objectif est clairement énoncé.

**Raisons d'être :** Le problème de la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité apparaît comme une suite logique des problèmes d'optimisation sans contraintes et est au cœur de la réflexion du manuel. Cependant, le souhait de caractériser les solutions d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité met aussi un accent sur les tâches structurales de type $T_{402}$ et $T_{405}$. Vers la fin nous trouvons une motivation économique pour le multiplicateur de Lagrange.

**Pertinence :** La tâche $T_{général}$ est pertinente en vue de la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. Les huit problèmes d'application, $t_{applic}$, sont pertinents à leur tour pour illustrer l'explication des différentes techniques d'$OM_2$. Quant aux tâches structurales, elles sont pertinentes en vue d'établir un bloc technologico-théorique associé aux tâches $T_1$ et $T_2$ assez explicatif.

### Évaluer des techniques

**Élaboration :** Les techniques associées aux différentes tâches procédurales sont - hormis quelques étapes calculatoires - clairement élaborées dans ce manuel. De même, les tâches structurales sont motivées et résolues par des techniques mathématiquement correctes.

**Portée et fiabilité VS rigidité :** Nous retrouvons des techniques variées pour résoudre le problème $T_{général}$. Comme, en plus, ce problème est d'une nature très générique, cela offre une grande portée aux techniques associées. Le choix de la technique est laissé au lecteur, dépend de la situation étudiée et n'est donc pas préétabli complètement à l'avance. Nous disons donc qu'il y a flexibilité entre les techniques. En plus ces techniques sont illustrées sur des problèmes de type $T_{21}$, $T_{22}$ et $T_{22}$.

**Procédure algorithmique et intelligibilité :** Les différentes techniques sont clairement rendues intelligibles (on retrouve des justifications explicatives et vérificatives des différentes techniques). Par endroit, elles sont érigées en une procédure algorithmique pour résoudre les différents problèmes, mais l'intelligibilité reste au premier plan au travers des différentes tâches structurales.

### Évaluer des technologies

**Cohérence et rigueur :** Le problème de la justification traverse toute la section du manuel comme un fil conducteur. En effet, en suivant la résolution du problème $T_{général}$, les différentes tâches structurales aident à rendre intelligibles les différentes étapes de la technique associée à la tâche. Les formes de justification utilisées sont proches des formes canoniques en mathématiques. Nous sommes en présence de beaucoup de tâches structurales qui construisent les différentes technologies permettant de questionner les techniques exposées, questionnements qui sont cohérents par rapport à la présentation du manuel.

**Explication vs vérification :** Les explications sont favorisées dans les discours technologiques. Par exemple, la preuve du Théorème de Lagrange, résultat de la tâche de type $T_{402}$, permet de comprendre la forme des équations de Lagrange.

**Portée des justifications :** La portée des justifications est bonne car la généralisation est visée dans presque tous les discours technologiques.

Sur base de cette évaluation, nous donnons les commentaires suivants :
- Le Théorème de Lagrange et le multiplicateur de Lagrange sont visés dans ce manuel. Cependant, bien que le multiplicateur de Lagrange soit expliqué, nous ne trouvons aucun bloc practico-technique d'$OM_3$ qui pourrait mettre en valeur ces explications.
- La réalisation d'une tâche de type $T_{21}$ est le fil conducteur qui guide la présentation du Théorème de Lagrange. Par conséquent, ce type de tâches, $T_{général}$, permet l'intégration des différentes praxéologies ponctuelles dans l'$OM$ locale développée dans ce manuel. Cette intégration est réalisée par un discours technologique développé par beaucoup de tâches structurales ainsi que par un développement successif des techniques associées à ce type de tâches $T_{21}$.
- Les tâches d'$OM_1$ sont travaillées comme organisation mathématique indépendante et intégrées, à partir de la Section 3, dans la réalisation des tâches d'$OM_2$. Notons qu'une grande diversité de techniques d'$OM_2$ est présentée. D'ailleurs, le traitement des points non-réguliers, identifiés par la technique $\tau_{14}$, est pris en compte par ces techniques.
- L'argumentation du Théorème de Lagrange est exploitée pour rendre intelligibles les équations de Lagrange. Cette argumentation est complétée ensuite par une preuve. Toutes les deux sont basées sur une approche par courbes de niveau tangentes (et l'utilisation du Théorème des fonctions implicites).
- Beaucoup de tâches structurales (d'$OM_4$ et d'$OM_5$) sont présentées dans un but d'interpréter le fonctionnement des techniques d'$OM_2$ et de leur résultat.

En conséquence, nous dirons que l'$OM$ développée dans ce manuel
- est bi-conceptuelle : le Théorème de Lagrange et le multiplicateur de Lagrange sont travaillés ;
- lie le procédural au structural : il y a intégration du type de tâches $T_{21}$ dans l'$OM$ par un discours technologique qui est développé par différentes tâches structurales et lié au développement successif des techniques associées à $T_{21}$ ;
- est focalisée sur $\Lambda$ et $\Pi$ : aussi bien les stratégies de résolution que le développement des blocs technologico-théoriques par des tâches structurales sont mis en avant dans le manuel.

### 6.2.5 ($M_{\textbf{LSE-Éco}}$) van den Heuvel (2009)

Huit pages dans le support du cours (van den Heuvel, 2010) traitent du Théorème de Lagrange. L'extrait analysé, le Chapitre 6, fait exception dans nos manuels choisis en ce sens qu'il est le seul provenant d'un cours d'optimisation. Remarquons encore que les notes de cours sont réalisées sur base d'un livre d'optimisation, à savoir (Sundaram, 1996, pp.112-144). Cet extrait est divisé en sept sections et inclut, à la fin, une liste d'exercices qui proviennent de (Sundaram, 1996). L'extrait du manuel analysé se trouve dans l'Annexe A.5.

### Description du manuel

La première section sert à introduire le problème de l'optimisation sous contraintes (d'égalité et d'inégalité). L'ensemble admissible est défini et plusieurs remarques ont pour intention d'expliquer l'enjeu de chercher des solutions soit à l'intérieur, soit sur la frontière du domaine admissible. En plus, la forme "standard" des contraintes est introduite, suggérant que, dans la suite, seule une contrainte générale de la forme $g(x) = 0$ sera prise en charge. Nous disons que cette première section reprend des types de tâches structurales. En effet, ils définissent l'environnement du Théorème de Lagrange :

- Définir une contrainte d'égalité et une contrainte d'inégalités ainsi que la forme standard des contraintes.
- Définir un problème d'optimisation sous contraintes et l'ensemble admissible associé.

Notons que le manuel n'invoque pas des raisons d'être issues de l'institution $I_{\text{Éco}}$ pour introduire le problème de l'optimisation sous contraintes. Aucune mention n'est faite aux pratiques professionnelles qui débordent de l'institution $I_{\text{Math}}$. Ceci est d'autant plus intéressant que le manuel se destine à des futurs économistes.

La deuxième section a comme sujet le Théorème de Lagrange. Elle commence avec deux remarques concernant la condition de régularité qui peuvent être vues comme une tâche de type $T_{406}$. Notons qu'il n'y a encore aucune exposition du lien entre cette condition de régularité et la recherche de candidats à être extremum à ce stade. En effet, seul le lien entre le rang d'une matrice et l'indépendance linéaire des vecteurs que composent les colonnes (ou les lignes) de cette même matrice est établi. L'auteur précise aussi la définition d'un rang d'une matrice, ainsi que l'importance du cadre algébrique dans toute activité mathématique.

Ensuite il énonce le Théorème de Lagrange formellement, ce qui est une trace du type de tâches $T_{405}$ d'$OM_4$. En même temps il s'agit d'une trace de $T_{410}$ car l'auteur présente directement le cas général du Théorème de Lagrange. L'auteur décide de donner quelques remarques concernant l'énoncé et le Théorème de Lagrange en général avant de passer à la démonstration. Ces remarques relèvent toutes des tâches issues d'$OM_4$, notamment des types $T_{407}$ et $T_{408}$. Le lecteur du manuel est donc averti de ces caractéristiques du Théorème de Lagrange dans la recherche d'extrema.

La section suivante est consacrée à la preuve du Théorème de Lagrange, tâche de type $T_{402}$. L'auteur choisit sciemment de ne pas utiliser le Théorème des fonctions implicites et laisse la place plutôt au Théorème de Taylor (développements limités d'ordre 1) pour démontrer le Théorème de Lagrange. Le théorème et sa preuve, qui vérifie, peuvent être considérés comme une technologie $\tau_{124}$. Cette preuve a besoin d'un lemme qui est fourni immédiatement après la démonstration.

La Section 4 reparle de la condition de régularité et de son importance pour la preuve du Théorème de Lagrange. À nouveau, la tâche est de type $T_{406}$ mais aucun lien entre cette condition et la recherche d'extrema n'est fait. Nous observons que nous restons, tout au long des quatre premières sections, à l'intérieur d'$OM_4$ et développons ainsi la théorie du Théorème de Lagrange. La condition de régularité est accentuée et mise en avant.

Notons encore que cette condition est appelée *qualification des contraintes* par l'auteur.

La cinquième section est consacrée aux multiplicateurs de Lagrange et à leur interprétation. Tout d'abord, les multiplicateurs sont définis explicitement, ce qui relève du type de tâches $T_{401}$. Ensuite, la propriété suivante est énoncée :

> *Suppose $x^*$ is a local optimum of $f$ for which the Lagrangean Theorem with Lagrangean Multipliers $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ holds. Then a small relaxation of the $j$-th constraint, replacing $g_j(x) = 0$ by $g_j(x) + \epsilon = 0$, will give a new optimum $x^*(\epsilon)$ for which we have approximately $f(x^*(\epsilon)) \approx f(x^*) + \lambda_j^* \cdot \epsilon$.* (van den Heuvel, 2010, p.4)

Cette proposition est ensuite démontrée. Il s'agit d'une tâche de type $T_{52}$ issue d'$OM_5$ concernant le développement de la théorie relative aux multiplicateurs de Lagrange. La proposition est ensuite interprétée en termes économiques, ce qui veut dire que le multiplicateur de Lagrange est défini dans un cadre économique comme shadow price (tâche de type $T_{51}$). Notons que ces résultats pourraient figurer dans un bloc technologico-théorique d'une tâche d'$OM_3$ mais ce n'est pas le cas dans ce manuel.

Les conditions suffisantes du deuxième ordre sont l'objet de la Section 6. Comme elles sont "très compliquées", l'auteur fait l'impasse sur une explication détaillée.

> *But this time the Second-Order Conditions are very complicated, both to state them and to use them for actual problems. (And their proof in 5.7 is an experience you want to avoid at all cost.)* (van den Heuvel, 2010, p.6)

Enfin, la dernière section offre une "recette de cuisine" (van den Heuvel, 2010, p.6) pour appliquer le Théorème de Lagrange à des problèmes d'optimisation du type suivant :

> *They all have the form (or can be translated to the form) :*
>
> $$\textit{maximise } f(x), \textit{ subject to } x \in \mathcal{D} = \mathcal{U} \cap \{x \in \mathbb{R}^n | g_1(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0\},$$
>
> *where $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are given $\mathcal{C}^1$ functions, and $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ is an open set.* (van den Heuvel, 2010, p.6)

La définition du problème d'optimisation est une tâche de type $T_{21}$, notée $T_{général}$. Remarquons que l'auteur mentionne la modélisation éventuelle du problème.

En se basant sur le livre de Sundaram (1996), la technique associée à $T_{21}$ est présentée comme une procédure algorithmique. Premièrement, il faut trouver les points qui vérifient la conclusion du Théorème de Lagrange. Il s'agit de la technique $\tau_{12}$ qui est proposée. L'auteur définit ensuite *les équations de Lagrange* comme étant la conclusion du Théorème de Lagrange. Il enchaîne avec la définition de la *fonction lagrangienne* qui permet de simplifier l'écriture de ces équations. Il s'agit ici des tâches $T_{404}$, $T_{403}$ et $T_{409}$. Suite à cette remarque, le lecteur est averti que les solutions des équations de Lagrange sont uniquement des candidats à être solution du problème d'optimisation. La technique $\tau_{12}$, à elle seule, ne suffit donc pas pour résoudre la tâche de type $T_{21}$. Il est donc fait référence implicitement au fait que la réalisation de tâches d'$OM_1$ est comprise dans la réalisation des tâches d'$OM_2$. Il s'agit à nouveau d'une tâche de type $T_{407}$. Enfin, van den Heuvel mentionne la place qu'occupe la condition de régularité dans cette "recette de cuisine". Il avertit le lecteur de ne pas oublier la technique $\tau_{14}$ afin de ne pas oublier les points singuliers qui échappent au Théorème de Lagrange.

Avec ces différentes remarques, l'auteur propose comme conclusion du chapitre une "recette de cuisine améliorée" qui est une écriture détaillée d'une technique qui combine $\tau_{21}$ et $\tau_{23}$. Il est mentionné que d'autres techniques pourraient être utilisées mais aucune précision n'est fournie. En termes praxéologiques, nous obtenons vers la fin une $OM$ (relativement) complète $[T_{général}, \tau_{21} \cup \tau_{23}, \Pi_{général}]$, où $\Pi_{général} = \theta_{23} \cup /$ indiquant que le discours technologique $\theta_{21}$ n'est pas développé dans ce manuel. Notons encore qu'aucune application concrète de cette procédure, c'est-à-dire aucune réalisation de tâches $t \in T_2$, n'est présentée. L'auteur termine, en effet, le chapitre en disant que les étudiants ont intérêt à s'exercer sur la technique :

> *Most of the questions will take a considerable amount of time ; often because it's quite some work to find all solutions for the Lagrangean equations. Make sure you get enough practice.* (van den Heuvel, 2010, p.8)

La pratique est donc laissée au cours et/ou directement aux étudiants.

En guise de conclusion, nous résumons l'$OM$ locale mise en place. Pour cela, nous dressons la liste des (types de) tâches travaillées et associées à des $OM$ ponctuelles :

- $T_{général}$ ($T_{21}$) : La praxéologie construite est la suivante : $[T_{général}, \tau_{21} \cup \tau_{23}, \Pi_{général}]$, où $\Pi_{général} = \theta_{23} \cup /$ indiquant que le discours technologique $\theta_{21}$ n'est pas développé dans ce manuel. Notons encore que $\theta_{124}$ fait partie du discours technologique $\Pi_{général}$.
- $T_{401}$ à $T_{410}$ : Beaucoup de tâches structurales sont travaillées dans ce manuel pour rendre le Théorème de Lagrange intelligible.
- $T_{51}$ et $T_{52}$ : le multiplicateur de Lagrange est travaillé en tant que objet mathématique bien qu'aucune tâche procédurale associée (d'$OM_3$) ne soit présente dans le manuel.

Au regard de notre MER, nous avons analysé un manuel qui met fortement l'accent sur les tâches structurales d'$OM_4$ et d'$OM_5$. En effet, la quasi entièreté des types de tâches répertoriés par notre MER pour l'$OM_4$ est réalisée. Au niveau des tâches procédurales, un seule tâche (générale) d'$OM_2$ est proposée. Les tâches d'$OM_1$ ne sont pas identifiées explicitement, mais l'auteur donne l'avertissement que la résolution d'un problème d'optimisation passe par l'identification des candidats (sans pour autant s'arrêter à ça !). Les tâches issues d'$OM_3$ sont absentes du manuel.

### Évaluation des praxéologies

Après la description de l'$OM$ locale présentée dans le manuel ($M_{\text{LSE-Éco}}$), nous passons à l'évaluation des différents ingrédients praxéologiques :

### Évaluer des tâches

**Identification :** La tâche $T_{général}$ est identifiée clairement avant de présenter sa technique de résolution. Les différentes tâches structurales d'$OM_4$ et d'$OM_5$ sont découvertes tout au long du chapitre. La répartition du chapitre en sept sections permet de bien dégager chacune des tâches structurales.

**Raisons d'être :** Aucune motivation particulière n'est présentée pour $T_{général}$, si ce n'est le développement de la théorie du Théorème de Lagrange qui justifie à la fin la résolution de la tâche $T_{général}$. De même, la signification du multiplicateur est présentée après la démonstration de la propriété associée. C'est donc les formulations mathématiques du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité ainsi que du Théorème de Lagrange même qui peuvent être considérées comme raison d'être principale de l'$OM$ développée.

**Pertinence :** Toutes les tâches structurales semblent être pertinentes pour conceptualiser le Théorème de Lagrange et les multiplicateurs de Lagrange. Le découpage permet de s'attaquer aux différentes tâches une à la fois. Cependant, on pourrait remarquer que le manuel ne fait aucun lien entre les blocs practico-technique et technologico-théorique des tâches d'$OM_2$.

**Évaluer des techniques**

**Élaboration :** La technique $\tau_{23}$ est clairement élaborée mais pas mise en pratique. En effet, la seule tâche procédurale est présentée sous une formulation générique, c'est-à-dire qu'aucune fonction n'est définie de façon explicite, ce qui empêche une résolution analytique. La technique $\tau_{21}$ est seulement énoncée dans la procédure algorithmique et aucun discours technologique ne l'accompagne. Quant aux tâches structurales, elles sont clairement élaborées à l'aide du registre du langage naturel et des registres algébrique et symbolique.

**Portée et fiabilité VS rigidité :** La portée de la technique $\tau_{23} \cup \tau_{21}$ englobe les problèmes d'$OM_2$. Comme la tâche $T_{général}$ se présente sous une forme tout à fait générale, la technique associée peut être considérée comme fiable. Cependant, il y a absence d'une technique claire pour décider de la nature des points identifiés par $\tau_{14}$.

**Procédure algorithmique et intelligibilité :** Bien que la technique de résolution soit présentée comme une procédure algorithmique, les nombreux discours technologiques la rendent implicitement intelligible. Néanmoins, le manuel sépare clairement le procédural du structural. De plus, le choix du mot "recette" suggère que l'on met la technologie au second plan et laisse sous-entendre qu'il "suffit d'appliquer" l'algorithme pour trouver la solution.

**Évaluer des technologies**

**Cohérence et rigueur :** Les raisonnements sont rigoureux et cohérents. Les règles d'inférence sont respectées à l'intérieur des différentes tâches structurales. Notons que, dans les deux preuves (Théorème de Lagrange et propriété des multiplicateurs de Lagrange), quelques détails manquent pour que la présentation des preuves soit entièrement rigoureuse.

**Explication VS vérification :** Les différentes justifications sont parfois des explications, parfois des vérifications. Ainsi, la preuve du Théorème de Lagrange est une preuve qui vérifie, tandis que la condition de régularité fait l'objet de différentes explications. Quant à la tâche $T_{général}$, la technique est rendue intelligible par l'entièreté du chapitre (en particulier par les nombreuses tâches structurales). Notons qu'il y a absence d'un discours technologique clair pour décider de la nature d'un candidat identifié par la technique $\tau_{14}$.

**Portée des justifications :** Les différents résultats technologiques sont effectivement exploités. Nous constatons donc une incidence des éléments technologiques associés à l'$OM$ locale développée sur la pratique mathématique, à savoir le développement de la "recette de cuisine".

Sur base de cette évaluation, nous donnons les commentaires suivants :
- Le Théorème de Lagrange et le multiplicateur de Lagrange sont visés dans ce manuel. D'ailleurs, le manuel met l'accent clairement sur les tâches structurales d'$OM_4$ et d'$OM_5$ qui sont nombreuses à être traitées. Ceci est réalisé au point qu'aucune tâche concrète d'$OM_2$ ou d'$OM_3$ n'est présentée et que seule la technique de résolution dans le cas général est exposée à la fin du chapitre.
- Tout au long du chapitre, le développement théorique est fait dans le cadre général de l'optimisation de fonctions à $n$ variables sous $k$ contraintes d'égalité.
- La preuve du Théorème de Lagrange n'est pas exploitée pour rendre intelligibles les équations de Lagrange. Elle est basée sur une approche par utilisation du Théorème de Taylor.
- Le chapitre aboutit à la procédure algorithmique de la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. Les techniques présentées sont $\tau_{21}$ et $\tau_{23}$, mais seule la technique $\tau_{23}$ est rendue intelligible par le discours technologique qui précède. Il n'est pas explicitement dit par la procédure comment on doit traiter les points identifiés par la technique $\tau_{14}$, c'est-à-dire les points qui ne vérifient pas la condition de régularité.
- Les tâches structurales sont mises au premier plan dans ce manuel.

En conséquence, nous dirons que l'$OM$ développée dans ce manuel
- est bi-conceptuelle : le Théorème de Lagrange et le multiplicateur de Lagrange sont travaillés ;
- sépare le procédural du structural : le développement des tâches procédurales se fait de manière déconnectée du travail de la technique associée à $T_{21}$, en conséquence de quoi les techniques d'$OM_2$ ne sont rendues intelligibles que par quelques commentaires issus des tâches structurales d'$OM_4$ ;
- est focalisée sur le bloc technologico-théorique $\Pi$ : le développement exhaustif des tâches structurales permet la constitution d'un bloc technologico-théorique développé associé à $T_{21}$. De plus, le fait d'avoir travaillé les tâches structurales avant les tâches procédurales peut tendre à identifier la procédure algorithmique à un élément technologique. Il y a donc une quasi-absence du bloc practico-technique associé à $T_{21}$.

## 6.3 Caractéristiques des manuels

Dans cette section nous relevons, pour les cinq manuels, des caractéristiques communes et analysons la diversité des genres rencontrés. Cette présentation simultanée nous semble favoriser la mise en valeur des aspects les plus représentatifs de l'organisation mathématique étudiée selon les manuels choisis.

Nous récapitulons tout d'abord les caractéristiques mises en évidence lors de la description et de l'évaluation des $OM$ présentées dans les différents supports de cours. La comparaison effectuée est ensuite utilisée pour en déduire une typologie des différents manuels.

### 6.3.1 Comparaisons sur base des évaluations

Une première comparaison est obtenue sur base des différentes traces du MER présentes dans les manuels. Nous regroupons ces données dans un tableau (voir Tableau 6.1). Nous y rajoutons des informations à propos du public ciblé par les manuels.

| | | Nombre de pages | Destination | | Organisation mathématique du MER | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Math | Éco | $OM_1$ | $OM_2$ | $OM_3$ | $OM_4$ | $OM_5$ |
| Manuel | ($M_{\text{UCL-Math}}$) | 6 | x | | | x | | x | |
| | ($M_{\text{UNa-Math}}$) | 10 | x | | x | x | | x | |
| | ($M_{\text{UNa-Éco}}$) | 12 | | x | x | x | x | x | x |
| | ($M_{\text{ULg-Éco}}$) | 20 | | x | x | x | | x | x |
| | ($M_{\text{LSE-Éco}}$) | 8 | | x | | x | | x | x |

Tableau 6.1 – Comparaison entre les différents manuels

Nous constatons que tous les manuels travaillent la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité et la théorie associée au Théorème de Lagrange (tâches d'$OM_2$ et d'$OM_4$), ce qui peut être vu comme l'objectif commun entre les cinq manuels. Seuls trois manuels considèrent la recherche des candidats à être extremum comme une tâche d'$OM_1$ à part entière. Ainsi, dans tous les manuels, le Théorème de Lagrange est présenté dans le but de résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité (tâches d'$OM_2$) et non pas, a priori, pour caractériser les solutions d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité (tâches d'$OM_1$). Lorsqu'une tâche d'$OM_1$ est présentée, elle a le rôle d'étape intermédiaire de la réalisation d'une tâche d'$OM_2$. Un seul manuel travaille le côté procédural de la signification du multiplicateur de Lagrange (tâche d'$OM_3$).

Remarquons que, parmi les manuels choisis, les tâches des organisations mathématiques locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$ sont travaillées uniquement lorsque le cours s'adresse à un public de futurs économistes et ingénieurs de gestion. Une raison possible est que les mathématiciens préfèrent voir l'analyse de sensibilité dans un cours d'optimisation et non dans un cours de calcul différentiel. Une autre hypothèse pourrait être le fait que l'économie mathématique trouve un intérêt particulier dans l'analyse de sensibilité qui figure parmi les objectifs d'un cours de mathématiques avancées pour l'économie. Notons encore que les raisons d'être invoquées sont particulièrement changeantes d'un manuel à l'autre et ce quasi indépendamment du public auquel s'adresse le manuel.

Le nombre de pages traitant le Théorème de Lagrange ne permet pas de tirer de conclusions significatives. Notre seule observation est que plus le nombre de pages est élevé, plus les tâches d'$OM$ locales élémentaires du MER sont nombreuses et variées.

Le Tableau 6.2 fournit les caractéristiques relevées après chacune des évaluations de praxéologie.

Le tableau 6.2 nous informe que les tâches procédurales dominent dans les manuels ($M_{\text{UCL-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Math}}$) et ($M_{\text{UNa-Éco}}$). En ce qui concerne le manuel ($M_{\text{LSE-Éco}}$), les

| | | Mono- | Bi- | Sépare | Lie | Focalise sur | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | conceptuelle | | le procédural et le structural | | $\Lambda$ | $\Pi$ |
| Manuel | $(M_{\text{UCL-Math}})$ | x | | x | | x | |
| | $(M_{\text{UNa-Math}})$ | x | | | x | x | |
| | $(M_{\text{UNa-Éco}})$ | | x | | x | x | |
| | $(M_{\text{ULg-Éco}})$ | | x | | x | x | x |
| | $(M_{\text{LSE-Éco}})$ | | x | x | | | x |

Tableau 6.2 – Caractéristiques des différents manuels

tâches structurales l'emportent sur les tâches procédurales qui sont quasiment absentes. Quant au manuel $(M_{\text{ULg-Éco}})$, les tâches y sont réparties de manière égale.

Tous les manuels travaillent les tâches structurales d'$OM_4$, $(M_{\text{ULg-Éco}})$ réalise le plus de tâches structurales, le manuel $(M_{\text{UCL-Math}})$ le moins. Ainsi, la possibilité de constituer des blocs technologico-théorique qui rendent intelligible le fonctionnement des techniques d'$OM_2$ et de leur résultat, est présente dans tous les manuels mais cette tendance est tantôt prononcée (par exemple, dans $(M_{\text{ULg-Éco}})$) et tantôt elle l'est moins (par exemple, dans $(M_{\text{UCL-Math}})$). Cela se traduit aussi par une déconnexion ou non entre la présentation des tâches procédurales et structurales.

Dans les manuels $(M_{\text{UNa-Math}})$, $(M_{\text{UNa-Éco}})$ et $(M_{\text{ULg-Éco}})$, nous ressentons une présence d'éléments technologiques qui permettent de passer d'$OM_1$ à $OM_2$ puis (éventuellement) à $OM_3$ ce qui n'est pas le cas dans $(M_{\text{UCL-Math}})$ où les tâches procédurales apparaissent déconnectées des (quelques) tâches structurales. Nous pouvons encore dire que le discours technologique développé par les tâches structurales est tellement formel qu'il ne résout pas les besoins de justification de la pratique. En ce qui concerne le manuel $(M_{\text{LSE-Éco}})$, il aboutit à la technique associée aux tâches d'$OM_2$ après avoir réalisé toute une série de tâches structurales. Cette conclusion technique tend alors à passer pour un élément technologique d'$OM_2$. Les tâches structurales d'$OM_5$ sont travaillées dans les manuels $(M_{\text{UNa-Éco}})$, $(M_{\text{ULg-Éco}})$ et $(M_{\text{LSE-Éco}})$.

Notons encore que nous trouvons différentes articulations des $OM$ locales élémentaires dans les manuels. Cette observation sera plus détaillée dans la section suivante. En effet, comme nous nous intéressons à l'étude et à l'analyse des praxéologies mathématiques mises en œuvre autour du thème du "Théorème de Lagrange", nous reviendrons sur ces caractéristiques en nous appuyant sur les tableaux ci-dessus pour comparer les différents manuels et pour en dresser une typologie.

## 6.3.2 Différents types de manuels

D'après ce qui précède, nous distinguons, dans les manuels, deux types de discours ainsi que deux modes d'intervention de la pratique.

### Deux types de discours

Les organisations mathématiques élémentaires de notre MER ne sont pas travaillées de la même façon dans les différents manuels. Nous constatons deux tendances. D'une part, dans les manuels ($M_{\text{UCL-Math}}$) et ($M_{\text{LSE-Éco}}$), les tâches structurales sont travaillées avant et constituent alors des blocs technologico-théoriques associés aux tâches procédurales très "formels". De ce fait, ces technologies ne résolvent pas entièrement les besoins de justification de la technique d'$OM_1$ et d'$OM_2$. Nous qualifions ces manuels de *déductifs.* D'autre part, dans les manuels ($M_{\text{UNa-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$), nous observons une coexistence des discours technologiques, tantôt très développés, tantôt moins développés par des tâches structurales, et des interprétations du fonctionnement des techniques et de leur résultat. Nous qualifions ces manuels d'*inductifs.*

*Les manuels déductifs*

Les manuels déductifs séparent le procédural du structural. En effet, on observe une certaine banalisation de l'activité de résolution de problèmes qui apparaît comme une conséquence d'un développement de tâches structurales. Ainsi, dans les manuels déductifs, les premières tâches travaillées sont les activités "définir", "démontrer", "expliciter", etc. (tâches structurales). Les autres tâches se construisent à partir de la donnée de nouvelles définitions et de nouveaux théorèmes et propriétés. Le bloc practico-technique des tâches procédurales découle alors "facilement" de ces activités structurales. Les manuels déductifs peuvent être mis en correspondance avec le point de vue "Euclidien" en philosophie des mathématiques.

> [L'euclidianisme est un] *modèle selon lequel l'activité mathématique serait presque déterminée par le bloc technologico-théorique, d'où découleraient techniques et problèmes en tant que simples "applications" des définitions, axiomes et théorèmes.* (Bosch & Gascón, 2002, p.11)

En effet, les manuels ($M_{\text{UCL-Math}}$) et ($M_{\text{LSE-Éco}}$) séparent le procédural du structural et présentent d'abord un développement des différentes technologies par travail de tâches structurales avant de concrétiser les techniques associées d'$OM_2$. De ce fait, nous observons aussi que les tâches d'$OM_1$ ne sont pas travaillées comme indépendantes de l'$OM_2$. La "banalisation" de l'activité de résolution se traduit dans ($M_{\text{UCL-Math}}$) par la présence de deux tâches procédurales où la simple présence de la Règle du multiplicateur de Lagrange semble suffire pour fournir toute explication de la technique. Dans le manuel ($M_{\text{LSE-Éco}}$), cette banalisation se traduit par la présentation de la technique qui peut tendre à passer pour un élément technologique et par une absence totale de tâches procédurales, tâches qui sont laissées alors à la charge du lecteur :

> *Make sure you get enough practice.* (van den Heuvel, 2010, p.8)

*Les manuels inductifs*

Les manuels inductifs lient le procédural au structural. On observe une description du problème de départ (tâche procédurale) à partir duquel tout développement pratique et théorique démarre. On est à la recherche de justifications qui possèdent un pouvoir explicatif. Il y a coexistence des tâches structurales et des interprétations du fonctionnement des techniques associées aux tâches procédurales et de leur résultat. Du fait qu'une tâche procédurale est le point de départ du développement d'une $OM$, nous rapprochons les manuels inductifs du point de vue "quasi-empirique" en philosophie des mathématiques. Le quasi-empirisme est une orientation de la philosophie des mathématiques qui s'oppose à l'euclidianisme et qui insiste sur les aspects expérimentaux et inductifs de l'activité mathématique (Lakatos, 1976).

En effet, les manuels ($M_{\text{UNa-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$) mettent le problème de résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité au centre de l'activité et des réflexions. La technique associée est alors développée en parallèle d'un développement du bloc technologico-théorique.

### Deux modes d'intervention de la technique

Le travail de la technique ne se fait pas non plus de la même façon dans les différents manuels. D'une part, les manuels ($M_{\text{UCL-Math}}$) et ($M_{\text{UNa-Math}}$) ne présentent que des exemples dits concrets et exercent ainsi une "ponctualisation" des tâches procédurales [68]. Ces manuels ont une tendance à focaliser le processus de résolution sur une technique particulière qui est adaptée aux exemples concrets choisis mais qui ne permet pas forcément de rendre compte de la diversité des problèmes. Nous qualifions ce mode d'intervention de la technique de *ponctuel*. D'autre part, les manuels ($M_{\text{UNa-Éco}}$), ($M_{\text{ULg-Éco}}$) et ($M_{\text{LSE-Éco}}$) réalisent un contact avec une nouvelle technique non seulement au travers d'exemples concrets mais aussi de symboles génériques ($f(x, y)$, $\nabla g(x, y)$, etc.). Nous qualifions ce mode d'intervention de la technique de *générique*.

*Le mode ponctuel*

Le mode ponctuel est invoqué lorsque les étudiants ne voient une technique mathématique qu'à travers un ou plusieurs exemples concrets. On pourrait dire qu'ils doivent extraire les principes de fonctionnement de la technique à la lecture d'un problème "présenté dans un contexte". Nous disons encore que le manuel exerce une "ponctualisation" des tâches procédurales qui rend probablement la réutilisation de la technique dans un nouveau contexte plus difficile. Ce mode, où seuls des exemples concrets sont montrés, ne permet pas toujours de se rendre compte de la diversité des problèmes que l'on peut rencontrer en pratique et se focalise ainsi sur des classes de problèmes bien choisis. Un exemple qui illustre cette dernière remarque peut être trouvé dans ($M_{\text{UNa-Math}}$) où la technique $\tau_{23}$ n'est illustrée qu'à l'aide de problèmes de deux variables sous une seule contrainte d'égalité *linéaire*. Ainsi, nous trouvons les commentaires suivants :

> *Appliquons la méthode fournie par le théorème précédent sur un cas simple, l'exemple énoncé en 11.2.* (Strodiot, 1997, p.82)

et

> *Résolvons le problème posé en guise d'introduction en choisissant comme fonction d'utilité $U(x, y) = xy$.* (Strodiot, 1997, p.85)

*Le mode générique*

Le mode générique est invoqué lorsque le contact avec une nouvelle technique se fait principalement au travers de symboles génériques. Les techniques utilisées développent alors

68. Le terme "ponctualisation" a été utilisé pour la première fois par Bosch et Gascón (2005, p.118) dans l'étude du thème "limites de fonctions" dans l'enseignement espagnol.

une indépendance par rapport aux représentations sémiotiques et facilitent ainsi la réutilisation dans différents contextes. Dans le mode générique, nous pouvons dire que les aspects propres à un problème particulier ne "perturbent" pas l'attention sur le "vrai" problème mathématique, à savoir sur la technique qui est en jeu (absence de détails calculatoires (Comment résoudre le système d'équations ? Comment déterminer le déterminant d'une matrice ? etc.), absence de difficultés liées à l'expression explicite des fonctions (Quelles sont les racines de la fonction $x \ln x^2$ ? Quelle est la dérivée partielle de $f(x, y) = \cos xy^3$ par rapport à $y$ ? etc.)). Aussi, dans le mode générique, l'exposition de la technique peut tendre à passer pour un élément technologique. Il faut faire attention, dans ce cas, que cette exposition de la technique ne devienne pas le seul élément technologique associé à la tâche procédurale si on souhaite rendre la technique suffisamment intelligible. Un exemple qui illustre cette dernière remarque est donné par la proposition 4.11 dans ($M_{\text{UNa-Éco}}$) (Thiry, 2006, p.169) à propos du repérage des solutions parmi touts les candidats à être extremum :

> *La proposition suivante (que nous ne démontrerons pas) nous fournit un test basé sur les dérivées secondes pour décider si un point stationnaire du Lagrangien correspond à un maximum ou à un minimum.* (Thiry, 2006, p.169)

Le mode générique est, d'après nos observations, souvent accompagné d'exemples.

Sur base du Tableau 6.1, nous remarquons que le mode d'intervention des deux manuels destinés aux étudiants en mathématiques est ponctuel et celui des trois manuels destinés aux étudiants en économie et ingéniorat de gestion est générique. Cependant, nous ne faisons aucune généralisation de cette remarque en raison du nombre très limité de manuels analysés. Cette même conclusion peut être faite en terme des objectifs visés par les cours. Les manuels pour mathématiciens visent le Théorème de Lagrange, ceux pour économistes visent le Théorème de Lagrange et le multiplicateur de Lagrange, mais nous ne pouvons pas généraliser cette observation.

En conclusion, nous obtenons la classification de nos cinq manuels qui est reprise dans le Tableau 6.3.

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Mode d'intervention de la technique</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Ponctuel</td><td>Générique</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Type</td><td>Déductif</td><td>($M_{\text{UCL-Math}}$)</td><td>($M_{\text{LSE-Éco}}$)</td></tr>
<tr><td>Inductif</td><td>($M_{\text{UNa-Math}}$)</td><td>($M_{\text{UNa-Éco}}$), ($M_{\text{ULg-Éco}}$)</td></tr>
</table>

TABLEAU 6.3 – Différents styles de manuels

## 6.4 Réflexions des enseignants

Ayant décrit le savoir à enseigner, résultat de la transposition externe, il nous a paru intéressant de recevoir des informations à propos des acteurs en charge de cette transposition. Comme signalé au début du chapitre, en Belgique, ce sont les professeurs des universités qui décident des contenus des cours et des manuels. Nous essayons de voir les liens éventuels entre nos types de manuels et les idées des enseignants relatives au Théorème de Lagrange.

Pour ce faire, nous procédons à une évaluation d'un questionnaire distribué auprès des enseignants au sujet du Théorème de Lagrange. Les réponses obtenues seront analysées et confrontées aux différents types de manuels. Comme le groupe des personnes sondées ne se limite pas aux auteurs des manuels analysés, l'ensemble des réponses servira à soutenir ou à critiquer nos observations. Remarquons dès maintenant que ce questionnaire touche les intuitions et conceptions personnelles des professeurs et que les réponses ne constituent donc pas une vérité absolue mais plutôt une image momentanée de l'enseignement du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie. De plus, comme les personnes sondées sont en même temps les responsables de la transposition interne, donc du savoir enseigné, cette dernière section à propos des réflexions des enseignants formera le pont vers le chapitre suivant.

### 6.4.1 Méthodologie de l'expérimentation

Afin d'identifier le plus précisément possible l'environnement et les conditions de l'enseignement du Théorème de Lagrange, un questionnaire assez détaillé a été distribué au sein des différentes universités belges francophones et de l'université du Luxembourg. Ce questionnaire comportait 27 questions ouvertes ou à choix multiples et a été proposé à 17 professeurs parmi lesquels 11 ont répondu (6 professeurs en économie et en ingénieur de gestion, 5 professeurs en mathématiques). Ces enseignants étaient tous concernés par le Théorème de Lagrange mais s'adressaient à des publics divers : étudiants de première ou deuxième année de bachelier, en mathématiques, mathématiques appliquées, économie ou ingénieur de gestion. De même il s'agissait de cours de mathématiques relativement aux enseignants en économie et de cours d'analyse (ou une fois de géométrie) relativement aux enseignants en mathématiques. Le questionnaire a été proposé en 2008 et les professeurs ont répondu par écrit.

Ce questionnaire était décomposé en différentes sections, chacune d'entre elles portant sur des aspects distincts : conditions générales de l'enseignement du théorème, structuration du cours, aspects didactiques du théorème proprement dit et de sa démonstration, applications pratiques du théorème et perceptions des acquis cognitifs des étudiants au terme du cours.

L'intégralité du questionnaire est placée en annexe (voir Annexe B.1). Le but de cette section sera de reproduire uniquement l'analyse des réponses qui sont pertinentes avec notre analyse du savoir à enseigner et qui nous fournissent des informations supplémentaires à propos des observations réalisées. Notamment, il sera difficile d'obtenir des liens directs entre les manuels et leur(s) auteur(s) étant donné que seuls trois des cinq auteurs ont répondu à nos questions.

### 6.4.2 Profil des enseignants

Les résultats des questionnaires nous permettent de faire les observations suivantes relativement aux caractéristiques générales des professeurs. En particulier, nous analysons dans cette section les Questions 2 et 3 de notre questionnaire.

Sur les onze professeurs, dix sont docteurs en mathématiques après avoir suivi une formation en mathématiques (9) ou d'ingénieur civil en mathématiques appliquées (1). Un seul professeur qui enseigne le Théorème de Lagrange est docteur en sciences économiques appliquées après avoir suivi une formation en ingéniorat de gestion. Ce professeur n'enseigne pas dans une des universités où nous avons observé les processus transpositifs du Théorème de Lagrange.

En ce qui concerne leur domaine de recherche, l'ensemble des professeurs s'orientent vers des recherches en mathématiques (équations différentielles, équations aux dérivées partielles, théorie de la probabilité, géométrie différentielle, etc.), voire vers la didactique des mathématiques. Remarquons que beaucoup s'intéressent à l'optimisation ou à un des domaines connexes (recherche opérationnelle, calcul de variations).

Rappelons que toutes nos analyses précédentes portaient sur des enseignants issus de l'institution $I_{\text{Math}}$. Bien que ceux qui, par la suite, enseignent le Théorème de Lagrange à des futurs économistes restent vraisemblablement ouverts aux demandes de l'institution $I_{\text{Éco}}$, il n'en reste pas moins vrai que leur formation mathématique influence leurs pratiques enseignantes (voir à la page 53).

### 6.4.3 Analyse et observations en lien avec le savoir à enseigner

Les résultats des questionnaires nous permettent de faire les observations suivantes relativement au savoir à enseigner.

Tout d'abord, tous les professeurs interrogés mettent des notes de cours à disposition des étudiants. La première étape de la transposition didactique passe donc par un savoir à enseigner disponible dans un manuel.

*Absence du discours théorique*
Dès le départ, nous avons fait remarquer que la théorie est la plupart du temps implicite et qu'elle est à chercher au sein d'un autre chapitre du syllabus (précédent), d'un autre cours ou d'une autre institution en général. À ce propos, un enseignant fait remarquer que

> *les étudiants doivent (idéalement) comprendre le problème, maîtriser les notions de base du cours (notions topologiques, dérivation des fonctions, notions de courbes de niveaux, de gradient, de matrice hessienne, de matrice jacobienne), ainsi que le théorème d'existence et de dérivation des fonctions implicites.*

La théorie est donc assez naturellement considérée comme faisant partie des prérequis à connaître par les étudiants.

*Importance attribuée au Théorème de Lagrange*
Nous avons posé la question de l'importance que les professeurs attribuent au Théorème de Lagrange dans l'activité mathématique (Question 11). Les professeurs en charge d'un cours destiné à des futurs économistes considèrent le Théorème de Lagrange comme un résultat important car il s'avère utile pour la suite des études. Ainsi, l'un d'eux répond :

> *Le théorème prend une place importante dans mon cours car il me semble* **incontournable** *pour mes étudiants. Il intervient de façon décisive en microéconomie (théorie du consommateur et du producteur) et en finance (marchés efficients).*

Du côté des professeurs de cours de mathématiques, la réaction est différente. Le Théorème de Lagrange est un résultat parmi d'autres, surtout dans un cours d'analyse où il est vu comme corollaire du Théorème des fonctions implicites :

> *C'est un résultat important mais qui dans un cours d'introduction d'analyse ne peut pas prendre toute la place.*

Cela rejoint notre observation que le nombre de pages des extraits varie en fonction du public ciblé. En plus, nous avons observé que les tâches d'$OM_5$ ont été travaillées uniquement dans les manuels destinés à des futurs économistes. Nous retrouvons donc bien le caractère du Théorème de Lagrange (et du multiplicateur de Lagrange) comme savoir fondamental (Artaud, 2003) pour l'économie. Cette même observation se concrétise aussi dans la présence de tâches structurales d'$OM_5$ qui donnent au multiplicateur de Lagrange le rôle de "coûts implicites", "prix implicites", etc.

*Extension aux contraintes d'inégalité*

Nous retrouvons le caractère du Théorème de Lagrange (et du multiplicateur de Lagrange) comme savoir fondamental pour l'économie dans les réponses à la Question 8. Les enseignants en mathématiques se restreignent à une présentation des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. Ceci peut être expliqué en parties par la raison d'être du Théorème de Lagrange dans leur cours : plusieurs disent l'utiliser comme illustration.

> *Mon cours n'est pas spécialement dédicacé à l'étude de l'optimisation. Le Théorème de Lagrange est juste une illustration de l'utilisation des variétés plongées dans $\mathbb{R}^n$.*

Cette tendance est renversée du côté des enseignants en économie et ingéniorat de gestion : trois professeurs voient les contraintes d'inégalité, trois ne les voient pas. Il est intéressant de soulever que, parmi les enseignants qui ne voient pas les contraintes d'inégalité, les contraintes intervenantes sont : le public, le programme, le nombre d'heures de cours mais aussi la demande de l'institution demandeuse qu'est l'institution $I_{\text{Éco}}$.

*Rôle de la fonction lagrangienne*

Le rôle de la fonction lagrangienne est l'objet de la Question 12. Sept professeurs sur onze (5 en économie et 2 en mathématiques) introduisent le concept de fonction lagrangienne. Nous remarquons ainsi que la fonction lagrangienne n'est pas introduite par tous les professeurs (tâche de type $T_{403}$). Un professeur dit qu'il se limite,

> *sans le formaliser, à signaler qu'en ajoutant les contraintes et les multiplicateurs, on est en quelque sorte ramené à la détection des points stationnaires d'une fonction non contrainte. Mais cela ne va pas au-delà d'une observation commode pour les exercices.*

Cette remarque nous fait penser que la fonction lagrangienne est introduite pour simplifier les écritures de la technique de résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. L'intérêt semble donc se porter sur le côté procédural de la fonction lagrangienne. Dans ($M_{\text{UNa-Math}}$) et ($M_{\text{UNa-Éco}}$), on retrouve des traces de ce commentaire. En lien avec la fonction lagrangienne, on retrouve aussi des remarques concernant le multiplicateur de Lagrange en tant que variable de cette fonction :

> *[...] toutes les $n+m$ variables* [de la fonction lagrangienne] *n'ont pas le même rôle ni la même interprétation.*

La fonction lagrangienne peut alors être considérée comme tremplin vers les tâches structurales d'$OM_5$.

Notons que, sans exception, les cinq professeurs en économie présentent la fonction lagrangienne dans le cas d'un problème d'optimisation de deux variables sous une seule contrainte d'égalité. Un seul professeur la généralise - comme les deux professeurs en mathématiques qui font pareil - au cas d'un problème d'optimisation de $n$ variables sous $k$ contraintes d'égalité. Nous faisons l'hypothèse que les professeurs font ce choix en fonction du public auquel ils s'adressent.

*Justifier le Théorème de Lagrange*
Nous nous penchons maintenant sur la justification du Théorème de Lagrange (tâche de type $T_{402}$), objet des Questions 13, 14 et 21. Comme signalé dans nos analyses, nous avons retrouvé dans les manuels une approche par pénalisation ($M_{\text{UCL-Math}}$), deux approches par courbes de niveau tangentes (($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$)), deux approches par utilisation du Théorème des fonctions implicites (($M_{\text{UNa-Math}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$)) et une approche par utilisation du Théorème de Taylor ($M_{\text{LSE-Éco}}$). Dans les questionnaires, deux professeurs parmi onze ne donnent pas de preuve du Théorème de Lagrange dans leur cours. Parmi les neuf autres, nous trouvons une tendance dominante à donner d'abord une illustration graphique du Théorème de Lagrange (une argumentation de type courbes de niveau tangentes qui peut être liée à la tâche de type $T_{413}$) dans le cas d'un problème d'optimisation à deux variables sous une seule contrainte d'égalité. Ensuite le théorème est formellement démontré en utilisant le Théorème des fonctions implicites. Cette tendance se manifeste quasi à l'unanimité chez les enseignants en économie, tandis que les enseignants en mathématiques passent plus facilement au-dessus de l'illustration graphique afin d'aborder directement une preuve analytique dans le cas général.

Le Théorème des fonctions implicites est sujet à discussions dans les institutions $I_{\text{Math}}$ et $I_{\text{Éco}}$.

> *La principale difficulté de la plupart des exposés réside dans l'usage du Théorème des fonctions implicites, un théorème fondamental mais lui-même pas toujours bien compris. Or, on peut isoler son utilisation, en faire un élément extérieur.*

Dans le même contexte, nous rappelons que l'auteur de ($M_{\text{LSE-Éco}}$) constate que

> *Although that proof is not too long, it depends on the Implicit Function Theorem [...]. And a look at that theorem will convince you that this is no laughing matter.*
> (van den Heuvel, 2010, p.3)

D'après notre typologie, l'utilisation du Théorème des fonctions implicites semble bien correspondre aux manuels inductifs. Les auteurs de ($M_{\text{UCL-Math}}$) et ($M_{\text{LSE-Éco}}$), classés de "manuels déductifs" et séparant le procédural du structural, semblent vouloir éviter son utilisation pour enlever une difficulté de compréhension de la preuve. Enfin, nous observons que les auteurs des manuels inductifs cherchent une preuve du Théorème de Lagrange qui facilite en premier lieu la compréhension des tâches procédurales d'$OM_1$ et d'$OM_2$ (en acceptant que l'étape la plus difficile à saisir dans la preuve est l'utilisation du Théorème des fonctions implicites), tandis que ceux des manuels déductifs présentent une preuve du Théorème de Lagrange qui facilite la compréhension de la preuve du théorème en lui-même. Nous pouvons lier ces observations au fait que l'activité de démontrer est aussi importante que la résolution des tâches procédurales dans les manuels déductifs, tandis que le résultat de la tâche $T_{402}$ utilisé comme élément technologique dans les praxéologies procédurales prime sur l'importance de la tâche structurale en elle-même dans les manuels inductifs. Notons encore que nous ne trouvons aucune trace d'une exploitation de l'approche par fonction lagrangienne pour rendre intelligible le Théorème de Lagrange.

*Rôle de la condition de régularité*
Les commentaires suivants concernent la condition de régularité (Question 17) et donc les types de tâches procédurale $T_{14}$ et structurale $T_{406}$. Les avis sont partagés entre les professeurs. Nous trouvons autant de professeurs qui insistent sur ou interprètent cette condition que de professeurs qui ne le font pas, et ce dans les deux institutions $I_{\text{Math}}$ et $I_{\text{Éco}}$. Dans nos manuels, cette qualification des contraintes est à chaque fois mentionnée et explicitée. Deux professeurs mentionnent que, outre le fait de donner une interprétation géométrique, ils insistent sur les implications de cette hypothèse sur le Théorème de Lagrange en justifiant que

> *sans elle, des contre-exemples à la règle de Lagrange peuvent être trouvés.*

Si nous ajoutons à cette remarque que seul le manuel ($M_{\text{ULg-Éco}}$) présente une technique et une technologie pour décider de la nature des points identifiés par $\tau_{14}$, nous concluons que cette condition présente surtout un intérêt "logique" pour le Théorème de Lagrange. En effet, elle a moins d'impact sur les explications de la technique de résolution que sur la tâche structurale de démontrer rigoureusement le Théorème de Lagrange.

*Technique de substitution*
S'il ne faut pas oublier les points identifiés par la technique $\tau_{14}$ lorsqu'on veut utiliser le Théorème de Lagrange dans la résolution des problèmes d'optimisation, il est possible, dans quelques cas, d'appliquer la méthode de substitution pour ne pas devoir y penser (Question 19). Tous les professeurs en économie et trois professeurs en mathématiques la mentionnent dans leur cours, principalement pour motiver l'introduction du Théorème de Lagrange. Deux professeurs en mathématiques ne la voient pas car

> *vu la démonstration, il s'agit de la même méthode.*

Cette méthode de substitution est mentionnée dans les manuels ($M_{\text{UNa-Math}}$), ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$) également pour motiver la méthode des multiplicateurs de Lagrange. D'après un professeur,

> *il est important de relier les deux idées et de les comparer.*

Cependant un autre enseignant nous met aussi en garde qu'

> *il faut en parler mais, surtout, il faut montrer que la substitution ne mène pas à toutes les solutions de tous les problèmes.*

Dans ce dernier commentaire, il est fait mention au savoir enseigné comme complément du syllabus. Effectivement, nous n'avons trouvé aucune remarque dans les manuels, voire aucun discours technologique $\theta_{24}$, qui rend intelligible la technique de substitution. D'après cet enseignant, ce discours risque de se retrouver au cours.

*Le Théorème de Lagrange comme condition d'optimalité nécessaire*
Nous avons également posé la question aux enseignants de savoir comment les étudiants perçoivent que le Théorème de Lagrange n'est pas une condition suffisante d'optimalité (Question 22). Avant de donner les réponses des professeurs, nous rappelons que les trois manuels ($M_{\text{UNa-Éco}}$), ($M_{\text{ULg-Éco}}$) et ($M_{\text{LSE-Éco}}$) font remarquer explicitement que le Théorème de Lagrange permet uniquement de trouver des candidats à être extremum ($T_{407}$). Comme ces trois manuels sont inscrits dans un mode générique d'intervention de la technique, nous faisons l'hypothèse suivante. D'une part, on peut supposer que le travail des tâches d'$OM_1$ en tant qu'organisation mathématique indépendante d'$OM_2$ favorise le travail de la tâche $T_{407}$ (tel est le cas dans ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$)). D'autre part, on peut aussi dire que la procédure algorithmique est ainsi rendue intelligible (tel est le cas dans ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{LSE-Éco}}$)). Nous tirons deux conclusions de cette hypothèse. Premièrement, travailler les tâches d'$OM_1$ met l'accent sur le fait que les points repérés par la méthode de Lagrange sont uniquement des candidats à être solution du problème d'optimisation. Ensuite, présenter une procédure algorithmique de la résolution d'un problème d'optimisation appelle une explication de la présence de deux étapes ("recherche des candidats" et "sélection, parmi les candidats, des solutions").

En observant que ce sont les manuels à destination des étudiants en mathématiques qui ne travaillent pas explicitement la tâche "Relever l'importance du fait que le Théorème de Lagrange est une condition nécessaire d'optimalité", nous donnons l'interprétation suivante. Le concept de "condition nécessaire" fait partie de la logique et est considérée comme concept acquis en mathématiques (où l'étudiant est confronté dès le début des études à cette logique). En revenant maintenant sur les réponses des professeurs, nous constatons que les avis à propos de cette question sont très partagés et aucune tendance claire ne se dégage ni dans l'institution mathématique, ni dans l'institution économique. Voici quelques phrases qui illustrent ces avis divergents. (Question : comment les étudiants perçoivent-ils que le Théorème de Lagrange n'est pas une condition d'optimalité suffisante ?)

- Très bien : *La vraie question est de distinguer les points stationnaires qui sont extrémants et, au préalable, de s'assurer de l'existence d'extrema globaux. C'est la partie difficile.*
- Bien : *Le lien est assez bien fait avec les conditions nécessaires d'optimalité pour les problèmes sans contraintes.*
- De façon satisfaisante : *La logique fait de plus en plus défaut dans la formation des étudiants.*
- Pas bien : *On n'insiste pas à ce niveau !*

Le premier commentaire concerne la technique $\tau_{21}$ où aucune condition d'optimalité suffisante (du premier ou du second ordre) n'est utilisée. Le deuxième commentaire fait le lien vers un autre endroit où le concept de "condition d'optimalité" est rencontré. Le troisième commentaire provient d'un professeur qui s'adresse à un public de futurs économistes qui - contrairement aux étudiants en mathématiques - ne sont pas confrontés tous les jours à la logique des mathématiques. Enfin le quatrième commentaire a été rendu par un professeur en mathématiques qui affirme ne pas insister dessus. D'ailleurs un professeur signale que les étudiants comprennent ce point uniquement lorsqu'on insiste fort au cours. Nous nous attendons donc à retrouver une trace de $T_{407}$ dans le savoir enseigné.

*Évaluation de l'apprentissage du Théorème de Lagrange chez les étudiants*
Une dernière question que nous analysons dans cette section est la suivante : Comment évaluez-vous l'apprentissage de ce théorème chez les étudiants ? (Question 26) Vu les avis des professeurs, aucune distinction entre les enseignants en mathématiques et en économie ne peut être faite. Parmi les neuf réponses reçues, quatre professeurs disent que l'apprentissage est "satisfaisant" ou "moyen". Trois autres enseignants précisent que les étudiants appliquent encore facilement la théorie car le Théorème de Lagrange est essentiellement retenu comme une procédure algorithmique. D'après eux, les problèmes proviennent davantage de la modélisation du problème (si énoncé dans un contexte d'application) et de la résolution algébrique du système des équations de Lagrange. Un professeur attire l'attention sur le fait qu'il s'agit d'une réponse délicate pour un enseignant. Cependant, dans la phrase suivante il affirme quand même que

> *leurs savoir-faire en la matière me semblent bons.*

Enfin, un professeur regrette, parlant du Théorème de Lagrange, que

> *peu d'étudiants perçoivent qu'on utilise des idées très abstraites pour résoudre des problèmes très concrets. La plupart l'utilise sans voir cette beauté.*

Ces quelques conclusions nous permettent de dire que plusieurs professeurs considèrent la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité comme premier (pas nécessairement seul !) objectif de leur enseignement. La présence d'éléments dans les manuels que nous qualifions de "procédure algorithmique" de la résolution soutient l'idée d'une présentation du Théorème de Lagrange principalement comme outil à la résolution de problèmes d'optimisation. Remarquons que les enseignants relèvent le problème de la modélisation, ainsi que d'autres problèmes chez les étudiants qui peuvent être classés d'"extérieurs" au Théorème de Lagrange. Enfin, les réponses à cette question montrent aussi que l'évaluation de l'apprentissage de ce théorème chez les étudiants passe la plupart du temps par des tâches d'$OM_2$, ce qui semble être en accord avec l'objectif du cours que nous ressentons.

Comme les réponses à ce questionnaire doivent s'interpréter aussi à la lumière du cours qui accompagne le manuel, nous y reviendrons dans le Chapitre 8 qui présentera l'analyse du savoir enseigné. À ce moment, nous aurons suffisamment d'informations pour présenter un tableau récapitulatif reprenant notamment les observations principales issues du questionnaire des enseignants.

## 6.5 Conclusions du chapitre

Avant de nous baser sur cette analyse du savoir à enseigner pour affiner notre MER du Théorème de Lagrange, nous présentons quelques conclusions à retenir de ce chapitre. Tout d'abord, nous avons mené notre analyse de cette partie de l'organisation didactique à l'aide de deux sources : d'une part, cinq manuels et, d'autre part, des questionnaires distribués auprès des enseignants.

En ce qui concerne l'analyse des manuels, nous retenons principalement la diversité que nous avons retrouvée. Bien que nous ayons mis en évidence quelques similitudes, nous avons surtout relevé des différences en termes de notre MER. Ainsi, l'articulation et l'intégration des $OM$ locales élémentaires dans l'$OM$ locale mise en place diffère d'un manuel à l'autre. En particulier, nous gardons en mémoire les observations suivantes :

– Deux types de discours ont été identifiés : un type *déductif* et un type *inductif*.
– Deux modes d'intervention de la technique ont été définis : le *mode générique* et le *mode ponctuel*.

Ensuite, en lisant les réponses des enseignants à notre questionnaire, nous avons pu mettre en évidence que le Théorème de Lagrange constitue, d'après les professeurs, un savoir fondamental pour les économistes. En effet, le Théorème de Lagrange n'est pas vu comme un thème "isolé" de son utilisation pour la résolution de problèmes d'optimisation dans les manuels. Quant à la preuve du Théorème de Lagrange, nous avons repéré différentes approches et c'est le rôle que joue le Théorème des fonctions implicites dans la preuve qui est sujet à discussions. Notons encore que nous avons identifié un différence entre les manuels déductifs et inductifs qui donnent, respectivement, un rôle plus grand à la tâche structurale "démontrer le Théorème de Lagrange" en elle-même (manuels déductifs) ou au résultat de cette démonstration vu comme élément technologique associé aux tâches procédurales (manuels inductifs).

Pour terminer, nous formulons quelques questions ouvertes à propos du savoir à enseigner :

– Quelles caractéristiques du savoir à enseigner retrouve-t-on dans le savoir enseigné et dans le savoir appris ?
– Les étudiants sont-ils capables d'utiliser adéquatement les techniques exposées se rapportant à $OM_2$ ? Se rapportent-ils aux justifications technologiques associées et se soucient-ils de la cohérence entre la technique utilisée et la technologie apprise ?

Une autre question qui découle de notre description du savoir à enseigner mais à laquelle nous ne trouverons pas de réponse dans cette thèse, est la suivante :

– Y a-t-il une explication au fait que fait que les manuels en mathématiques s'inscrivent dans le mode ponctuel et que les manuels d'économie pratiquent le mode générique ?

Équipés de cette analyse du savoir à enseigner, nous retournons vers notre MER dans le chapitre suivant et proposons une "dynamique" entre les différentes $OM$ locales élémentaires.

Chapitre 7

# Dynamique du modèle épistémologique de référence

## Sommaire

À partir de notre analyse des organisations mathématiques à enseigner, interprétées comme les traces de notre MER relatif au Théorème de Lagrange, nous enrichissons dans ce chapitre ce modèle en y incorporant une "dynamique" entre les différentes $OM$.

Les éléments praxéologiques développés jusqu'ici ainsi que le critère de l'"ordre interne des $OM$" nous permettent de décrire certains aspects de la dynamique des $OM$ que nous n'avons pas encore incorporés dans notre MER : évolution des praxéologies à partir de variations techniques ou de développements technologiques, apparition de nouvelles tâches et problématisations avant ou après la présentation du bloc technologico-théorique, etc. La description des $OM$ présentes dans les manuels nous a permis de dire, par exemple, que telle $OM$ dans telle institution manque d'éléments techniques adéquats, que telle technique n'a pas une grande portée pour donner lieu à des évolutions intéressantes, ou que telle technologie n'est pas exploitée pour rendre intelligible toute subtilité d'une technique, bref, que tel ingrédient manque alors que tel autre semble redondant ou gênant, etc. Cette analyse s'est faite par contraste avec les $OM$ existant dans les différentes institutions, mais n'a pas encore été mise en rapport avec notre MER. En particulier, nous n'avons pas encore structuré nos cinq organisations mathématiques selon une dynamique "naturelle" qui pourrait permettre une analyse de la genèse et l'évolution d'une $OD$.

Une première distinction a été faite en termes de *procédural* et *structural*. Il est certain que la possibilité de mobiliser le côté adéquat d'un concept mathématique pour la résolution d'une tâche donnée, d'établir et d'organiser des liens entre des tâches procédurales et des tâches structurales ou de passer du niveau procédural au niveau structural, requiert une certaine flexibilité de pensée chez l'étudiant. Selon l'approche de Sfard (1991), cette flexibilité de pensée est liée au développement et à l'évolution des opérations d'*intériorisation* et de *condensation*, ainsi qu'aux possibilités d'organisation et de généralisation des objets construits dans des structures de schémas, ou d'unités cognitives, de plus en plus développés (*réification*), d'où l'introduction de ces concepts dans notre MER.

## 7.1 Transition du procédural vers le structural : le phénomène de réification

La transition des opérations mathématiques vers les objets abstraits ne se réalise pas aisément. Cette particularité de l'activité mathématique est d'ailleurs présente dans l'histoire des mathématiques :

> *again and again, processes performed on already accepted abstract objects have been converted into compact wholes, or* reified *(from the Latin word* res *- a thing), to become a new kind of self-contained static constructs.* (Sfard, 1991, p.14)

De plus,

> *when we broaden our view and look at mathematics (or at least at its big portions) as a whole, we come to realize that it is a kind of hierarchy, in which what is conceived purely operationally at one level should be conceived structurally at a higher level. Such hierarchy emerges in a long sequence of reifications, each one of them starting where the former ends, each one of them adding a new layer to the complex system of abstract notions.* (Sfard, 1991, p.16)

Basé sur des observations historiques, le modèle décrivant le processus de conceptualisation est appliqué ensuite au problème de l'apprentissage. La transition des opérations mathématiques vers les objets abstraits s'effectue, d'après Sfard, en trois étapes : l'intériorisation, la condensation et la réification. À la phase d'intériorisation, l'élève est familiarisé avec des opérations qui lui permettent d'accéder à un nouveau concept à partir d'objets mathématiques déjà conceptualisés (comme le gradient, l'optimisation sans contraintes, etc. dans notre cas). Ensuite, l'élève devient graduellement compétent avec ces opérations. Il atteint à ce moment la phase de condensation. Mais, c'est seulement à partir du moment où l'élève devient capable de penser le concept mathématique comme une entité en soi qu'on peut dire que la notion mathématique a été réifiée. La réification a lieu lorsque l'élève est capable de concevoir l'objet comme faisant partie intégrante d'un ensemble bien défini, et plus seulement en tant qu'outil pour certaines procédures. Autrement dit, nous parlons de réification lorsque l'élève accède à une conception structurale d'un objet mathématique. Une fois l'objet bien conceptualisé, celui-ci pourra ensuite servir de tremplin pour accéder à des notions de niveau supérieur en suivant le même processus. Un exemple de ces trois phases dans la conceptualisation de la notion de fonction est donnée dans (Cazarro, Noël, Pourbaix, & Tilleuil, 2001).

- *Au cours de la phase d'intériorisation, l'élève se familiarise de plus en plus avec la notion étudiée, et cela à travers les procédures élémentaires qui la manipulent. Il ne quitte pas encore le stade procédural. Par exemple, lors de l'apprentissage du concept fonction, il calcule de nombreuses valeurs de fonctions, il analyse les algorithmes utilisés, il rencontre la notion de variable, accepte qu'une lettre puisse prendre des valeurs différentes.*
- *Pour que la phase de condensation puisse avoir lieu, il faut que l'élève ait poussé l'analyse suffisamment loin pour distinguer l'essentiel de l'accessoire, les détails techniques des idées importantes. Sa connaissance des procédures s'organise (se structure). Il perçoit une procédure comme composée d'unités interconnectées dont il connaît l'usage propre et dont il peut retrouver les détails de fonctionnement sans devoir les mémoriser. Il peut ainsi débarrasser son cerveau de ces détails et se concentrer sur la structure. On peut considérer que le concept est apparu même s'il n'est pas encore maîtrisé. Dans le cas des fonctions, la phase de condensation est marquée par le fait que l'élève devient capable de se faire une idée globale du comportement de la fonction considérée, d'en dessiner le graphe, de la manipuler, de lui appliquer une transformation. Il peut par exemple transformer le graphe de la fonction $f(x)$ en celui de la fonction $f(kx)$ ou de la fonction $f(x-2)$. Il peut aussi dessiner le graphe de la fonction réciproque.*
- *L'élève en reste au stade de condensation tant que le concept reste dépendant de la procédure qui lui donne naissance. Ce n'est que lorsque ce cordon ombilical tombe que s'opère la* réification *: l'élève conçoit le nouveau concept comme une entité autonome ayant désormais un caractère statique, la structuration s'achève, les liens entre différentes représentations et entre différents contextes d'apparition sont établis, les objets nouvellement conceptualisés s'organisent en structures, d'autres processus pourront être définis qui les prendront comme données. Par exemple, une fonction numérique peut désormais être reconnue comme une formule, aussi bien comme un ensemble de couples ou comme une courbe coupée en au plus un point par toute parallèle à l'axe des coordonnées, et l'élève est capable de passer d'un de*

> *ces registres à l'autre. De plus, cette fonction peut aussi désormais être reconnue comme un élément d'un ensemble, ce qui permet de considérer en particulier l'intégrale comme une fonction définie sur un ensemble de fonctions. À ce moment, un processus de structuration du niveau supérieur (portant sur l'intégrale), peut commencer.* (Cazarro et al., 2001, pp.41-42)

Schématiquement, nous pouvons représenter le processus de réification comme sur le dessin de la Figure 7.1 (Sfard, 1991, p.22).

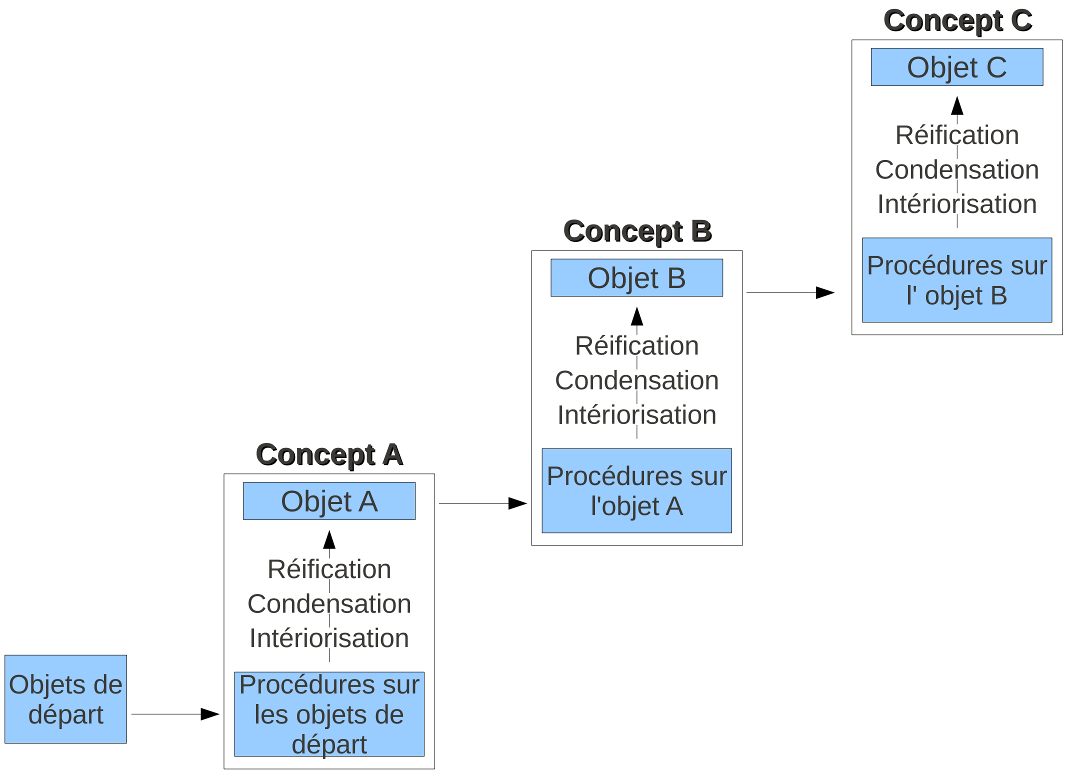



FIGURE 7.1 – Modèle général de formation d'un concept de Sfard (Sfard, 1991, p.22)

Loin d'être le seul modèle expliquant la naissance d'une conception mathématique (ou la représentation d'un concept mathématique), ce modèle met en avant un autre problème lié à l'apprentissage des mathématiques : comprendre parfaitement un certain concept se réalise uniquement après avoir manipulé un certain nombre de fois cet objet. Or, travailler avec un concept mathématique ne peut se faire qu'après avoir compris entièrement l'enjeu du concept. Nous nous trouvons donc face à un paradoxe que Sfard exprime comme suit (Sfard, 1991) :

> *the lower-level reification and the higher-level interiorization are prerequisite for each other.* (Sfard, 1991, p.31)

Ce paradoxe est appelé dans la suite *paradoxe de Sfard*. D'un point de vue cognitif, la phrase ci-dessus a des implications non négligeables. Sfard fait remarquer qu'il semble exister un "cercle vicieux" dans l'apprentissage des mathématiques : pas de conception sans connaissance du concept et pas de connaissance du concept sans conception ! Cela peut expliquer pourquoi les mathématiques sont considérées par de nombreuses personnes uniquement comme un ensemble de règles et formules qui donnent, appliquées correctement, la bonne réponse à une question posée.

L'idée de réification, vue comme outil conceptuel pour décrire l'activité mathématique, donne un ordre à nos cinq $OM$ qui sera présenté dans la section suivante.

## 7.2 Raffinement du MER du Théorème de Lagrange

### 7.2.1 Représentation schématique du modèle

En utilisant la théorie de Sfard, nous construisons notre modèle épistémologique de référence du Théorème de Lagrange comme présenté à la Figure 7.2.

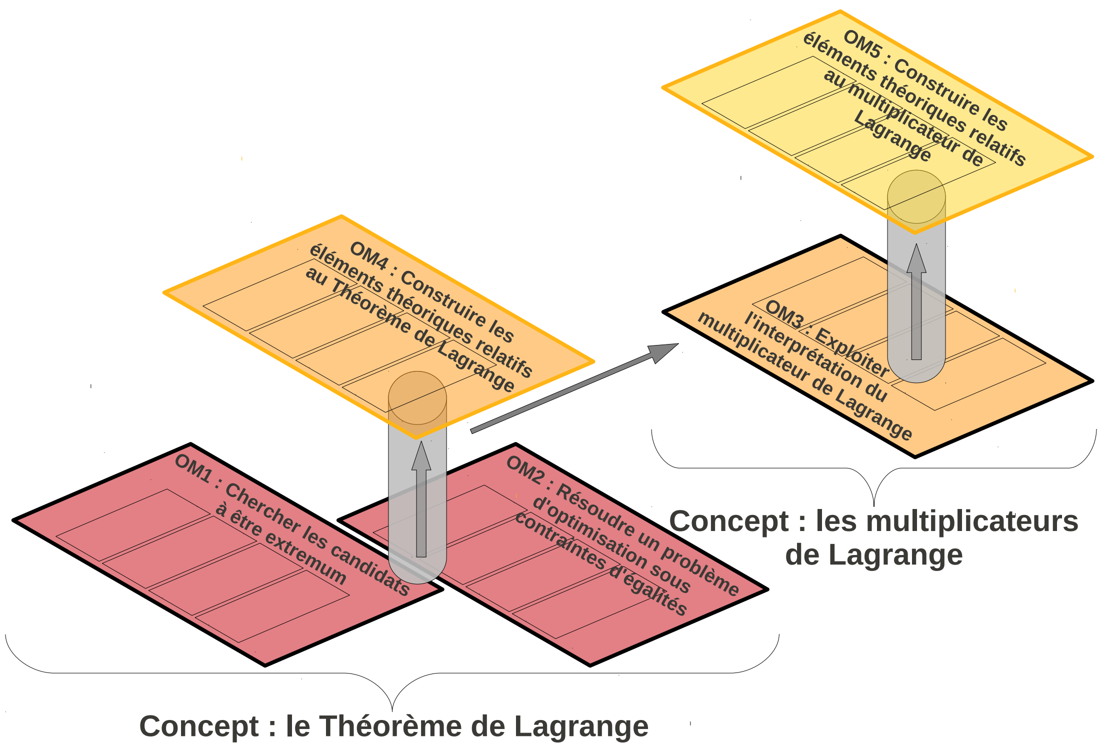



FIGURE 7.2 – Le MER du Théorème de Lagrange

### 7.2.2 Lien entre les différentes $OM$ locales élémentaires

La représentation de notre MER s'interprète de la façon suivante. Le schéma présente trois niveaux : rouge (1er), orange (2ème) et jaune (3ème). Au premier niveau se trouvent $OM_1$ et $OM_2$. En effet, la recherche des candidats à être extremum et la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité font souvent intervenir le Théorème de Lagrange et se réalisent en appliquant des processus élémentaires comme le calcul de dérivées partielles ou la résolution de systèmes d'équations. Le Théorème de Lagrange est alors perçu comme un outil et nous disons que les types de tâches $T_1$ et $T_2$ contribuent au processus d'intériorisation et de condensation du Théorème de Lagrange. Les $OM$ ayant un contour noir sont relatives aux types de tâches procédurales, celles ayant un contour orange relatives aux types de tâches structurales.

La réification est représentée par le passage au niveau supérieur ; nous y trouvons les tâches structurales, de type $T_4$, regroupant les activités qui attribuent au Théorème de Lagrange le statut d'objet mathématique et qui contribuent à "solidifier" un processus en un objet. Ces activités transforment les blocs technologico-théoriques des praxéologies $OM_1$ et $OM_2$ en tâches et techniques comme décrit par Winsløw (2006). Le processus de réification entre les types de tâches procédurales et structurales est indiqué par une flèche grise ascendante sur le schéma de la Figure 7.2.

Nous sommes ensuite en mesure de définir des procédures sur les concepts mathématiques présents dans le Théorème de Lagrange. L'organisation $OM_3$ reprend les tâches procédurales qui travaillent sur les multiplicateurs de Lagrange et qui aident à leurs phases d'intériorisation et de condensation. La mise au point de l'objet "multiplicateur de Lagrange" est alors l'objet de la praxéologie $OM_5$. Une réification de cet objet constitue alors l'accès au troisième niveau. Cette dernière $OM$ complète le processus de conceptualisation des multiplicateurs de Lagrange où ces derniers sont détachés du processus qui les a produits.

### 7.2.3 Les manuels à la lumière du MER affiné.

À la lecture des cinq manuels, considérés comme représentants du savoir à enseigner relatif au Théorème de Lagrange, nous avons identifié deux types de discours, ainsi que deux modes d'intervention de la technique :

- D'une part, les *manuels déductifs* qui font primer les tâches structurales et qui "banalisent" à un certain point l'activité de résolution de problèmes qui apparaît comme conséquence d'un développement de ces tâches. D'autre part, les *manuels inductifs* qui lient le procédural au structural et qui partent d'un problème à partir duquel tout développement pratique et théorique démarre.
- D'une part, le *mode ponctuel* que l'on trouve lorsque les étudiants ne voient une technique mathématique qu'au travers d'un ou plusieurs exemples concrets. D'autre part, le *mode générique* que l'on trouve lorsque le contact avec une nouvelle technique se fait aussi au travers de symboles génériques.

Comme le type de discours est directement lié à l'articulation et l'intégration des $OM$ locales élémentaires, nous expliquons ces deux types de discours à la lumière de notre MER révisé. Tout au long de ses travaux, Sfard précise que son schéma à trois étapes (voir Figure 7.1) doit être interprété comme une hiérarchie. Ainsi, un niveau ne peut être accessible si toutes les étapes antérieures n'ont pas été franchies. Nous supposons alors que chacun des deux discours adopte sa propre stratégie pour accéder aux niveaux supérieurs. En se basant sur le paradoxe de Sfard, les deux types de discours peuvent être mis directement en rapport avec notre MER.

Les manuels déductifs pourraient être décrits de la façon suivante : "pas de conception sans connaissance du concept". Les tâches structurales d'$OM_4$ et d'$OM_5$ doivent être travaillées, a priori, pour connaître l'objet en question. Les tâches procédurales arrivent a posteriori. La réification passe donc par une accentuation des tâches structurales au niveau supérieur pour expliquer et rendre intelligibles les processus du niveau inférieur. Cette progression est fréquente dans les cours de mathématiques qui s'appuient fortement sur un développement hypothético-déductif et où des exemples sont présentés à titre d'illustration. Schématiquement, les manuels déductifs travaillent la réification comme représenté à la Figure 7.3. Nous y retrouvons la caractéristique que le structural est séparé du procédural. La réification est complétée lorsque la flèche grise ascendante est mise sur le schéma.

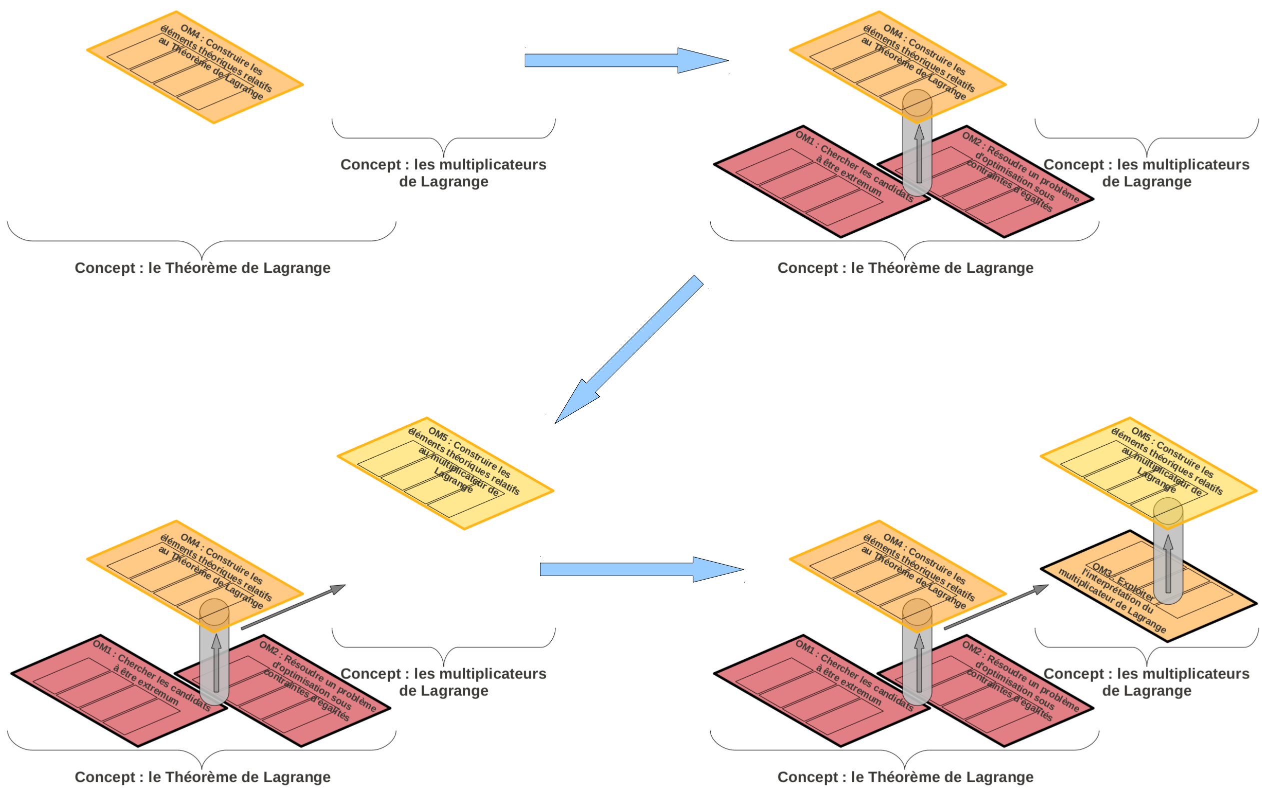



FIGURE 7.3 – Le processus de réification dans les manuels déductifs

Les manuels inductifs pourraient être décrits de la façon suivante : "pas de connaissance du concept sans conception". Les tâches procédurales d'$OM_1$, d'$OM_2$ et d'$OM_3$ sont préalablement exploitées, mais complétées au fur et à mesure par les tâches structurales dont les résultats rendent intelligibles les différentes techniques. Les tâches structurales aident alors à réifier ces concepts parce que la nécessité d'opérer sur ces objets s'impose. Schématiquement, les manuels inductifs travaillent la réification comme représentée à la Figure 7.4. Nous y retrouvons la caractéristique que le procédural est lié au structural.

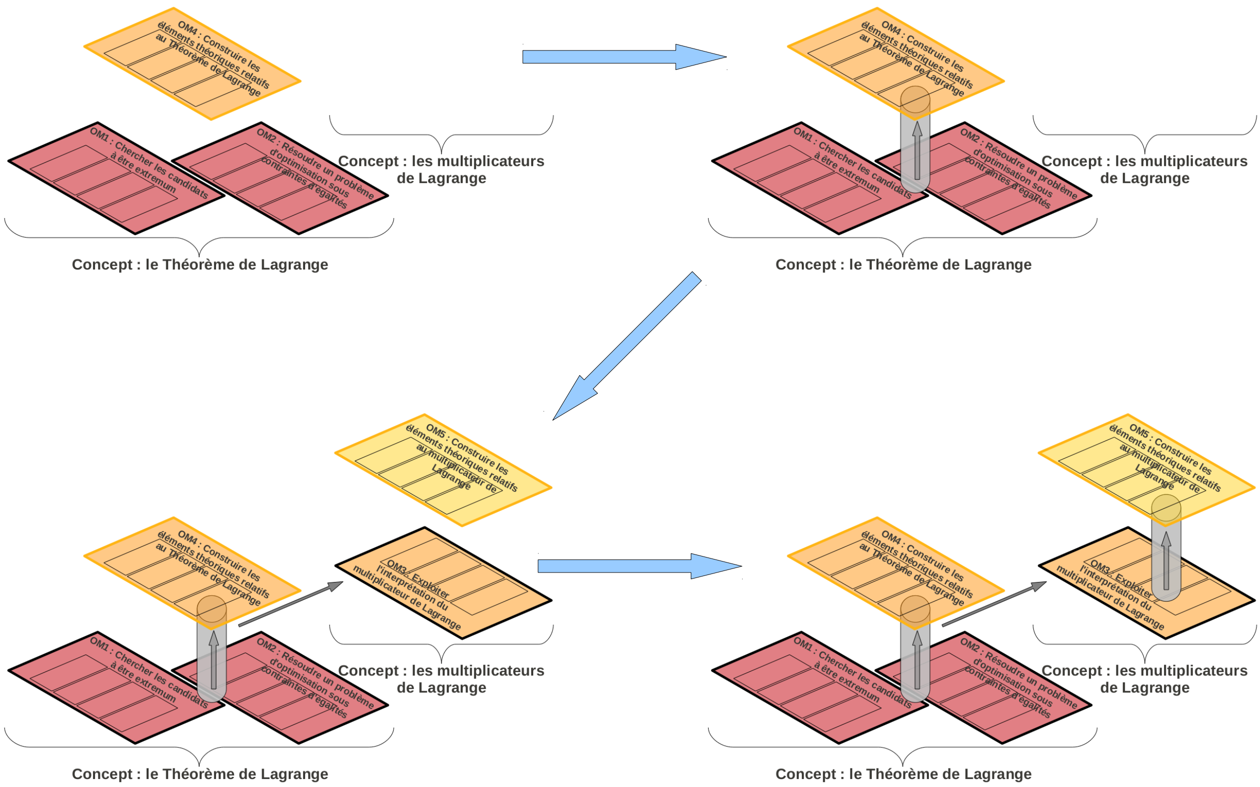



Figure 7.4 – Le processus de réification dans les manuels inductifs

Cette analyse en termes de la réification correspond, pour chacun des manuels, à l'articulation et l'intégration des $OM$ locales élémentaires dans l'$OM$ observée. En ce qui concerne les deux modes d'intervention de la technique, il ne nous semble pas que notre MER puisse expliquer cette distinction. Le travail de la technique est propre à chaque $OM$ et ne peut, en conséquence, pas être rendu intelligible par la dynamique de notre MER.

Après avoir incorporé le processus de réification dans notre MER, nous sommes maintenant en mesure de donner une analyse des organisations didactiques de l'étude du Théorème de Lagrange. De plus, nous tâcherons de mettre les manuels analysés en rapport avec des "modèles enseignants". C'est l'objet du chapitre qui suit.

Chapitre 8

# Le Théorème de Lagrange comme savoir enseigné

## Sommaire

Ayant présenté un raffinement de notre MER au chapitre précédent, nous l'utilisons dans celui-ci pour décrire et analyser le savoir enseigné relatif au Théorème de Lagrange comme il apparaît dans trois classes observées à l'université. Nous verrons ici une description du savoir qui est effectivement transmis aux étudiants et donc des praxéologies mathématiques que le professeur cherche à diffuser auprès de ses étudiants.

Le concept de transposition didactique explicite la manière dont le "savoir savant" doit être transformé afin de pouvoir être enseigné à des étudiants, à des personnes qui sont, a priori, extérieures à la pratique des mathématiques relative au Théorème de Lagrange. Certaines composantes de la transposition externe ont déjà été explicitées puisque nous avons présenté une analyse du savoir à enseigner. Dans ce chapitre, nous expliquerons différents résultats de la transposition interne.

La première section de ce chapitre présente quelques consignes pour la lecture de notre analyse du savoir enseigné et définit les critères utilisés pour réaliser l'évaluation des $OM$ rencontrées, mais aussi l'évaluation de l'organisation didactique ($OD$) empirique dans ces classes. La description, à l'aide de notre MER, des différentes $OM$ est ensuite exposée dans la deuxième section. La Section 8.3.1 tâche de comparer les différents cours et tente de faire des liens entre manuels analysés et cours observés. Nous sommes alors en mesure de proposer une analyse des organisations didactiques ($OD$) empiriques et suggérons une classification des trois $OD$ empiriques selon un "modèle de l'espace des organisations didactiques possibles" (Bosch & Gascón, 2002). Ensuite nous décrivons une expérimentation réalisée à l'université de Namur avec des étudiants en troisième année de bachelier en sciences mathématiques. Enfin, la dernière section résume les observations à propos du savoir enseigné et tire quelques conclusions.

## 8.1 Le savoir enseigné à l'observation de trois cours

Avant de décrire les principales organisations mathématiques relatives au Théorème de Lagrange présentées dans trois cours de niveau universitaire, nous donnons quelques commentaires concernant l'outil d'analyse et les critères d'évaluation.

### 8.1.1 Méthodologie de l'analyse

Précisons dès maintenant que nous n'analysons pas le savoir que le professeur serait censé transmettre et que nous nous concentrons sur le savoir qu'il enseigne effectivement.

La TAD, et plus particulièrement notre MER, seront nos outils pour analyser les différentes séquences de cours. Ceci veut dire que nous tâchons, d'une part, de décrire les organisations mathématiques locales construites dans les trois classes, et, principalement, les types de tâches autour desquelles celles-ci se bâtissent. Les $OM$ ponctuelles ainsi définies construisent alors l'$OM$ locale du cours. D'autre part, en faisant le lien avec l'$OM$ locale du manuel, nous envisageons de retracer l'$OD$ que le professeur met en place dans sa classe. Cette $OD$ empirique est analysée en termes des moments de l'étude (voir Section 2.2.3) et des notions de topogenèse, chronogenèse et mésogenèse.

Comme précédemment, nous ne rencontrerons pas beaucoup d'éléments théoriques explicités dans les cours dans le sens où on trouve le renvoi aux cours précédents, aux livres de référence, etc. et à la pratique du mathématicien en général. Nous limiterons donc une fois de plus la description des praxéologies aux notions de tâches, de techniques et de technologies, associant ainsi le bloc technologico-théorique aux traces laissées par les différents discours technologiques. Au niveau des notations, cela nous amène à écrire une $OM$ ponctuelle de la façon suivante : $[t$ ou $T, \tau, \Pi]$, où du bloc technologico-théorique, $\Pi$, nous n'avons accès qu'aux technologies. De même, nous mettons à nouveau une barre (notée "/") afin d'indiquer un élément praxéologique absent.

### 8.1.2 Critères d'évaluation

La liste des critères d'évaluation des $OM$ observées est celle rencontrée lors de l'analyse du savoir à enseigner (voir Section 6.1.2). Elle constitue la grille d'analyse qui permettra de se faire une idée de la mesure dans laquelle les critères sont satisfaits par l'organisation mathématique à évaluer.

**Évaluer des tâches :** Relativement aux types de tâches d'une $OM$, nous retenons les critères suivants : Identification, Raisons d'être et Pertinence.

**Évaluer des techniques :** Relativement aux techniques d'une $OM$, nous retenons les critères suivants : Élaboration, Portée et fiabilité VS rigidité et Procédure algorithmique et intelligibilité.

**Évaluer des technologies :** Relativement à la technologie d'une $OM$, nous retenons les critères suivants : Cohérence et rigueur, Explication VS vérification et Portée des justifications.

Lors de l'analyse du savoir à enseigner, nous avons donné des précisions à propos des critères. Les mêmes précisions resteront valables pour l'analyse du savoir enseigné : seules les tâches procédurales seront évaluées selon les neuf critères. L'évaluation des tâches structurales (évaluation des tâches et évaluation des techniques) se réalise en même temps car elles sont directement liées aux technologies des tâches procédurales.

Nous rappelons aussi les six moments de l'étude (Chevallard, 1999) qui correspondent aux types de situations permettant de diriger l'étude d'une organisation mathématique déterminée (voir Section 2.2.3). Nous chercherons donc à déterminer dans quelle mesure ces six moments sont présents dans les organisations didactiques à évaluer.

1. la première rencontre avec l'organisation enjeu de l'étude ;
2. l'exploration du type de tâches $T_i$ et l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches ;
3. la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à $T_i$ ;
4. le travail de la technique ;
5. l'institutionnalisation ;
6. l'évaluation.

Notons que seules les tâches procédurales seront analysées en termes de moments de l'étude. Les tâches structurales interviendront dans les moments associés à ces tâches procédurales (presqu'exclusivement dans le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique). Néanmoins, cela ne veut pas dire qu'une analyse de l'étude des tâches structurales est impossible. La première rencontre avec une tâche structurale ou l'élaboration d'une technique relative à cette tâche pourraient, par exemple, être identifiées dans les cours. Seulement, cette étude, que nous qualifierons alors de "méta-étude" du thème "Théorème de Lagrange" dépasserait largement le cadre de cette thèse, et n'est, a priori, pas visée par les cours que nous avons observés. En effet, les cours observés développent des tâches structurales dans le but d'étudier le thème du "Théorème de Lagrange".

Enfin, une dernière liste de critères touche au contrat didactique (Chevallard, 1988). Dans ce contrat, les actions du professeur consistent à concevoir comment aménager, pour l'élève, les conditions d'adaptation au processus didactique. Ces actions sont soumises à des contraintes de type chronogénétique, topogénétique et mésogénétique (Chevallard, 1991 ; Sensevy & Mercier, 1976).

### Contrat didactique

La notion de contrat didactique est probablement une des notions les plus fondamentales en didactique. Elle a été introduite par Brousseau (1998) et peut se décrire de façon résumée comme un "système d'attentes", à propos du savoir et du processus d'enseignement et d'apprentissage, entre le professeur et les élèves.

Une fois que le professeur a la charge de faire acquérir un savoir donné aux élèves, il a la responsabilité de créer des situations permettant à l'élève de s'approprier les connaissances visées. L'enseignant ne doit pas seulement communiquer la connaissance mais plutôt assister à la mise en place de bonnes situations qui permettent l'apprentissage. De son côté, l'élève doit reconnaître l'intérêt de la situation proposée et mettre en œuvre la connaissance visée pour répondre à l'attente du professeur. On voit clairement apparaître un ensemble de responsabilités explicites mais surtout implicites qui déterminent ces attentes réciproques et qui sont regroupées sous le terme de "contrat didactique". Lorsqu'un professeur discute, par exemple, au cours avec les élèves d'une connaissance particulière, ils construisent ensemble un "accord officiel" sur cette connaissance. Le professeur précise ce que l'élève peut faire avec un objet mathématique et dans quelles situations il doit l'utiliser. Ensuite, il évaluera l'élève sur les savoirs qui ont été définis ensemble dans ce contrat didactique. Ainsi, agir en classe, pour le professeur ou pour l'élève, va toujours consister à s'inscrire d'une manière déterminée dans un contrat didactique.

### Mésogenèse, topogenèse et chronogenèse

Quand le but est d'étudier l'action des différents acteurs dans une institution donnée où l'on enseigne et où l'on apprend, il convient de compléter l'analyse en termes des moments de l'étude par des considérations en termes de *topogenèse*, *chronogenèse* et *mésogenèse*. En nous focalisant sur les actions qui se passent en classe, nous tenons compte du fait que ces actions sont réalisées conjointement par le professeur et ses élèves (Sensevy & Mercier, 1976, pp.12-42). Remarquons que cette action conjointe ne suppose pas une "symétrie des positions" tenues par les acteurs : le professeur enseigne et les élèves sont à l'école pour apprendre.

**Chronogenèse :** la *chronogenèse* recouvre le phénomène d'évolution dans le temps du

savoir enseigné dans la classe. En effet, un corps de connaissances est décomposé, dans l'enseignement, en une séquence graduée selon un ordre logique (par exemple du simple au complexe). Enseigner, c'est alors parcourir avec les élèves une telle séquence, une suite orientée d'objets de savoir. Cet agencement du savoir sur l'axe du temps est appelé *temps didactique* ou encore chronogenèse. Notons qu'il ne s'agit pas de créer nécessairement un lien "linéaire" entre différentes praxéologies mais plutôt de choisir de présenter dans un certain ordre ces organisations praxéologiques.
Nous disons qu'une contrainte d'enseignement est *chronogénétique* lorsqu'elle conditionne le temps de déroulement propre à chaque partie du cours. Ce déroulement suppose évidemment une certaine forme de séquentialité dans l'enseignement universitaire.

**Topogenèse :** la *topogenèse* recouvre la part de chacun des acteurs dans l'action conjointe. En effet, à chaque instant de la chronogenèse, le professeur et les élèves prennent une place précise, un *topos*, ainsi chacun réalise un ensemble de tâches dont certaines sont spécifiquement liées à la position de l'acteur. A la base de la topogenèse se trouve donc la question "Qui fait quoi ?". Elle ne peut se comprendre sans la prise en compte de l'environnement dans lequel l'action didactique se réalise.
Par exemple, dans le contrat didactique classique en mathématiques, la démonstration appartient au topos du professeur, la recherche de la solution d'exercices appartient au topos de l'élève. Notons qu'à chaque moment de la chronogenèse est associé un état de la topogenèse. Un autre exemple peut être donné au moment de la correction d'un exercice : après que le professeur ait demandé de démontrer une propriété des suites numériques ($\forall\, n \in \mathbb{N} : P(n)$), deux étudiants proposent des pistes différentes de résolution : une preuve directe et une preuve par récurrence (par exemple). L'action du professeur est de reprendre ces réponses en ouvrant un débat dans l'auditoire puis de le réguler, par exemple en reprenant les avantages et désavantages ou encore le fonctionnement des différentes stratégies de démonstrations. Il clôt ensuite le débat en reprenant les arguments théoriques qui permettent de trancher. Dans cet exemple, la position du professeur et des étudiants vis-à-vis du savoir évolue : lors du débat, les élèves ont la responsabilité de faire avancer la construction du savoir dans la classe alors que, pendant la conclusion, le professeur reprend la responsabilité du discours théorique. Ce rôle de chacun dans l'action didactique ne peut être compris que si l'on restitue les acteurs dans un environnement plus large qui tient compte des différents points de vue des acteurs.
Nous disons qu'une contrainte d'enseignement est *topogénétique* lorsqu'elle détermine les places qu'occupent respectivement le professeur et les étudiants. La question est de savoir qui fait quoi dans la classe.

**Mésogenèse :** le concept de *mésogenèse* est le plus difficile à saisir. La mésogenèse est reliée au *milieu* au sens de la *Théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998), c'est-à-dire à l'environnement incluant les *composantes matérielles* et *symboliques* de la situation dans laquelle les acteurs agissent. Autrement dit, dans le processus didactique, les objets de savoir relatifs à une organisation de connaissance forment un milieu, qui peut être matériel (par exemple l'utilisation d'un compas ou d'une équerre) ou symbolique (par exemple l'explication à l'aide d'un système d'axiomes). Dans une classe, une importante partie du travail du professeur consiste à aménager le milieu, tandis que les élèves à leur tour devront éprouver les nécessités du milieu pour apprendre. Dans cette perspective, expliquer l'action du professeur consiste à penser et à montrer comment celui-ci peut organiser les conditions pour les élèves aux différents moments de l'étude. Faisons la remarque qu'il ne s'agit pas d'innover les formes didactiques à tout moment (par exemple : des nouvelles situations-problèmes). Rien qu'un cours magistral donné à l'université a un fonctionnement didactique propre qui est proposé par le professeur et auquel les étudiants devront s'adapter. C'est de cette construction du milieu que relève la notion de mésogenèse. Une contrainte d'enseignement est *mésogénétique* lorsqu'elle influence l'aménagement du milieu didactique. Dans cette caractéristique du contrat didactique, nous incluons non seulement les installations "matérielles" (tableau, transparents, classe, etc.) mais aussi les aménagements "immatériels" (milieu mathématique, changements de cadres et de registres). L'étude de l'aménagement du milieu didactique renvoie directement aux moments de l'étude, et sera focalisée, la plupart du temps, sur les caractéristiques matérielles sur lesquelles les moments de l'étude insistent moins.

Tous ces critères nous permettent d'évaluer ce que nos observations et notre première analyse auront révélé à propos des trois cours que nous présenterons ci-dessous.

### 8.1.3 Présentation des trois cours

Le choix des trois cours s'est effectué en fonction de nos manuels analysés. Ainsi, nous avons observé les trois cours, associés aux manuels ($M_{\text{UCL-Math}}$), ($M_{\text{ULg-Éco}}$) et ($M_{\text{UNa-Éco}}$) respectivement :

($C_{\textbf{UCL-Math}}$) MAT1122 Analyse mathématique 2, UCL, Louvain-la-Neuve, Belgique, le mardi 27 avril 2010 (8h30-10h30). Professeur : Prof. A.
Il s'agit du public ($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$) qui a assisté au cours observé. L'institution correspondante est $I_{\text{UCL-Math-Bac1}}$.

($C_{\textbf{ULg-Éco}}$) MATH0058-2 Mathématiques pour ingénieurs de gestion : partim II, ULg, Liège, Belgique, le jeudi 14 octobre 2010 (9h-10h30). Professeur : Prof. B.
Il s'agit du public ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{10/11}}$) qui a assisté au cours observé. L'institution correspondante est $I_{\text{ULg-Éco-Bac2}}$.

($C_{\textbf{UNa-Éco}}$) ECGE B151 Mathématiques pour l'économie et la gestion I, FUNDP, Namur, Belgique, le jeudi 5 mai 2011 (10h40-12h40). Professeur : Prof. C.
Il s'agit du public ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{10/11}}$) qui a assisté au cours observé. L'institution correspondante est $I_{\text{UNa-Éco-Bac1}}$.

Ainsi, notre sélection comporte un cours donné en mathématiques ($C_{\text{UCL-Math}}$) et deux cours présentés en économie et ingéniorat de gestion (($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$)). Deux cours s'adressent à des étudiants en première année de bachelier (($C_{\text{UCL-Math}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$)), le cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) s'adresse à un public d'étudiants inscrits en deuxième année de bachelier. Chaque cours se donne dans une université différente en Belgique. Les objectifs des cours peuvent être trouvés à la page 140.

Notons encore que deux professeurs observés sont en même temps auteur de leur support de cours (($C_{\text{UCL-Math}}$) et ($C_{\text{ULg-Éco}}$)), le troisième enseignant est le suppléant du professeur qui a rédigé les notes de cours ($C_{\text{UNa-Éco}}$).

## 8.2 Les séquences de cours

Nous proposons dans cette section de dégager les différentes $OM$ présentées dans les trois cours en termes de notre MER, ainsi que de repérer les différents moments de l'étude évoqués. Afin de réaliser une comparaison entre les cours observés, nous avons observé uniquement la séance de cours qui introduit le Théorème de Lagrange et sa preuve. Les cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$) introduisent le multiplicateur de Lagrange en tant qu'objet dans une deuxième séance de cours que nous ne sommes pas allés voir.
Référence sera faite tout au long de ce chapitre à notre MER pour lequel une description des cinq $OM$ locales élémentaires peut être trouvée de la page 120 jusqu'à la page 134 de cette thèse ainsi que sur les fiches jointes à cette thèse. Tout comme dans la description de notre MER, nous décrirons les différents éléments praxéologiques ($T, \tau$ et $\Pi$) des praxéologies associées aux tâches procédurales, mais limiterons notre analyse à la mention seule des tâches structurales.

### 8.2.1 ($C_{\text{UCL-Math}}$) UCL, 27 avril 2010

Nous avons observé le cours "MAT1122 Analyse mathématique" le mardi 27 avril 2010 (8h30-10h30) à l'université de Louvain-la-Neuve (UCL). Le cours relatif au Théorème de Lagrange s'étale sur une séance de 2h.

#### Description du cours

Le cours se place dans le cadre du calcul différentiel et intégral et le Théorème de Lagrange y est présenté à la suite de l'optimisation libre [69]. Tout d'abord, le professeur rappelle l'objectif du cours qui a été déjà présenté la semaine précédente : la Proposition 5.4 (Ponce & Van Schaftingen, 2010, p.162) qui est "la Règle des multiplicateurs de Lagrange" [70]. De plus, il tâche de minimiser (ou de maximiser) une fonction $f$ sur un ensemble $\{x \in U \subseteq \mathbb{R}^m \,|\, g(x) = 0\}$. D'après notre MER, il poursuit deux objectifs : premièrement, réaliser une tâche de type $T_{405}$ pour, deuxièmement, résoudre une tâche de type $T_2$, c'est-à-dire trouver une méthode de résolution du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.

Le professeur dit ensuite que n'importe quel fermé (et compact) peut s'écrire sous la forme d'un ensemble du type $\{x \in U \subseteq \mathbb{R}^m \,|\, g(x) = 0\}$. Des exemples d'ensembles admissibles sont montrés au tableau :

69. L'optimisation libre reprend, d'après les auteurs du manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$), l'optimisation sans contraintes et l'optimisation sur des ouverts bornés ou non bornés.

70. D'après notre cadre mathématique, ce théorème correspond à la Méthode des multiplicateurs de Carathéodory. Le lecteur intéressé trouve des informations supplémentaires à propos du lien entre cette règle et le Théorème de Lagrange à la Section 4.4.2. Nous retenons ici que le Théorème de Lagrange est un cas particulier du théorème énoncé par Prof. A.

1. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \rightsquigarrow g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$. L'ensemble admissible correspond à une sphère centrée en $(0,0,0)$ de rayon 1 ;
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : x \rightsquigarrow g(x) = x_1 + x_2 + x_3$.

"Expliciter l'ensemble admissible" n'est pas une tâche de notre MER et nous la qualifions d'extérieure au Théorème de Lagrange. Cependant, nous verrons dans la suite qu'en abordant cette tâche, le professeur prépare le milieu didactique pour son discours (caractéristique mésogénétique).

En vue de la conclusion de la Règle des multiplicateurs de Lagrange et en partant de la forme générique d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité, le professeur dessine la Figure 8.1 au tableau et conclut qu'

> *on a envie de dire :* $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$. (Prof. A.)

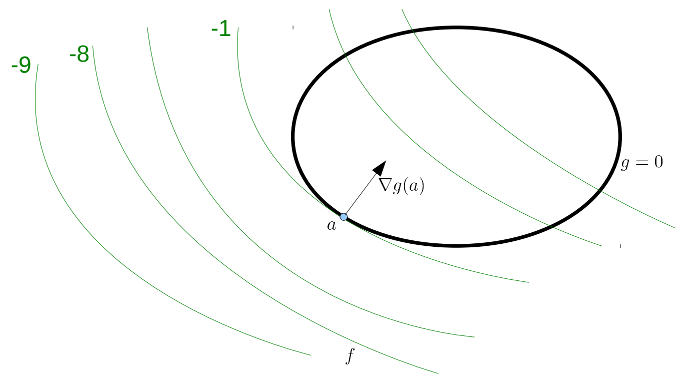



Figure 8.1 – Dessin au tableau (Prof. A.)

Ce dessin et cette explication constituent un premier contact avec les tâches de type $T_{405}$ et $T_{413}$. Notons que la figure n'est liée à aucun problème d'optimisation concret. Cependant, ce ne sera pas cette observation qui permettra de démontrer le théorème ($T_{402}$). En effet, le dessin est utilisé pour donner une ébauche (et justification) de la technique des multiplicateurs de Lagrange, technique que nous associons à $OM_1$. Il n'est pas mentionné explicitement que le critère exploré n'est pas suffisant, à défaut d'autres informations sur le problème, pour résoudre une tâche du type $T_2$. Le discours donné sur ce même graphique peut être, en même temps, considéré comme élément technologique associé à $T_1$, et constitue, d'après notre typologie de justifications, une argumentation et non une preuve (par courbes de niveau tangentes). Ces quelques explications aboutissent à l'énoncé de la Proposition 5.4. ($T_{404}$ et $T_{405}$) et touchent aussi le cas particulier qu'est le Théorème de Lagrange en parlant de la condition de régularité ($T_{406}$) [71].

Après une remarque d'ordre technique concernant les valeurs que peuvent prendre les multiplicateurs (tâche extérieure à notre MER car nous n'avons pas pris en compte la méthode des multiplicateurs de Carathéodory), le professeur rappelle la définition de la

71. La Proposition 5.4 (Ponce & Van Schaftingen, 2010, p.162) est appelée "la Règle des multiplicateurs de Lagrange". Cette règle correspond à la Méthode des multiplicateurs de Carathéodory d'après notre cadre mathématique. Voir Section 4.4.2 pour plus de détails.

dérivée totale qui évitera une utilisation du gradient d'une fonction en un point donné (caractéristique mésogénétique), ainsi que les trois grands problèmes auxquels il s'intéresse dans son cours :

1. Comment calculer les dérivées ? (Appliquer des techniques qui ne sont pas directement liées au Théorème de Lagrange)
2. Que signifie l'équation de Lagrange ? (Justifier le Théorème de Lagrange, $T_{413}$ et $T_{402}$)
3. Comment résoudre le problème ? (Mettre en place une technique pour résoudre un problème de type $T_2$)

En mettant de côté le problème de la constitution de l'environnement technologico-théorique, deux exemples concrets sont alors développés au tableau :

$t_{excours_1}$ : Déterminer le point où la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 + x_2 - x_3$ atteint son minimum restreint à l'ensemble $S = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

$t_{excours_2}$ : Déterminer le point où la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ atteint son minimum sur la droite

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Ici "*on cherche le point de la droite le plus proche de l'origine*" (Prof. A.).

Le premier problème de type $T_{21}$ est résolu par la technique $\tau_{21}$, d'où l'intérêt d'avoir explicité les ensembles admissibles au départ. En effet, le Théorème des bornes atteintes garantit l'existence d'un extremum à condition que l'ensemble admissible soit compact. Nous assistons alors à un moment particulier : le professeur fait remarquer qu'il faut

> *toujours s'assurer de l'existence d'une solution du problème d'optimisation.* (Prof. A.)

Ceci attribue, d'une part, le rôle à la technique $\tau_{21}$ comme l'unique technique mise en place, et doit, d'autre part, expliquer aux étudiants pourquoi la résolution d'une tâche de type $T_1$ donne en même temps la solution à la tâche de type $T_2$ (lorsque l'existence d'une solution du problème est assurée, la solution se trouve parmi les candidats à être extremum). Tous les détails calculatoires sont ensuite fournis et les commentaires ultérieurs du professeurs concernent principalement la procédure de résolution. Nous disons que la résolution est prise en charge par le professeur (caractéristique topogénétique).

Il arrive alors un autre instant particulier. Le professeur dit qu'

> *il n'est pas vraiment nécessaire de connaître $\alpha$ et $\gamma$* (c'est-à-dire les multiplicateurs de Lagrange). *Dans les applications physiques et économiques, on s'intéresse aux valeurs de $\alpha$ et $\gamma$, mais dans les problèmes d'optimisation en mathématiques cela est sans grande importance.* (Prof. A.)

Le professeur se limite donc aux tâches des $OM$ locales élémentaires relatives au Théorème de Lagrange ($OM_1$, $OM_2$ et $OM_4$) et ne se préoccupe pas de celles relatives aux multiplicateurs de Lagrange ($OM_3$ et $OM_5$).

Le deuxième problème est de type $T_{21}$ et est également résolu par la technique $\tau_{21}$. Notons que le professeur énonce lui-même le problème sous une forme "non-modélisée" après avoir écrit l'énoncé "modélisé" au tableau. Comme l'ensemble admissible n'est pas compact, le professeur restreint cet ensemble afin de pouvoir appliquer le Théorème des bornes atteintes pour montrer l'existence d'un extremum. Après cette première étape de $\tau_{21}$, les équations de Lagrange sont explicitées au tableau. Enfin, la résolution du système d'équations est laissée à la charge des étudiants. Il y a changement du partage "topogénétique" entre le professeur et les étudiants (Sensevy, 2001), le professeur n'est plus la seule personne en charge de la résolution, bien que ce deuxième exercice ne soit pas corrigé en classe. Il est fort probable que ce partage soit fondé sur l'intention du professeur de permettre aux étudiants de s'imprégner de la technique de résolution. C'est alors la fin de la première heure et une pause est faite.

La deuxième heure de cours est entièrement consacrée à la constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$ et $T_2$, à savoir prouver rigoureusement le Théorème de Lagrange ($T_{402}$). Cette tâche structurale est entièrement prise en charge par le professeur. La preuve peut être considérée comme étant $\theta_{L_{flagr}}$ à l'aide d'une méthode par pénalisation (comme décrite dans le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$)). Cette tâche apporte les derniers éléments de réponse à la question "que signifie l'équation de Lagrange ?", question émise par le professeur au début du cours. Le cours se termine avec un bref commentaire sur l'optimisation sous contraintes d'inégalité.

En guise de conclusion, nous résumons l'$OM$ locale mise en place. Pour cela, nous dressons la liste des (types de) tâches travaillées associées à des $OM$ ponctuelles :

- $T_2$ : La tâche générique d'$OM_2$ est présentée comme motivation du cours. L'énoncé, la preuve et l'illustration graphique de la Règle des multiplicateurs de Lagrange peuvent être considérées comme figurant dans la technologie associée.
- $t_{excours_1}$ ($T_{21}$) : La praxéologie construite est la suivante : $[t_{excours_1}, \tau_{21}, \Pi_{21}]$, où $\Pi_{21}$ comprend la Règle des multiplicateurs de Lagrange ainsi que le Théorème des bornes atteintes qui est rappelé lors du cours. Notons que l'étape de "comparer les valeurs de $f$ aux points repérés" dans $\tau_{21}$ est réalisée mais n'est pas expliquée.
- $t_{excours_2}$ ($T_{21}$) : La praxéologie construite est la suivante : $[t_{excours_2}, \tau_{21}, \Pi_{21}]$, où $\Pi_{21}$ comprend la Règle des multiplicateurs de Lagrange ainsi que le Théorème des bornes atteintes. La technique a été partiellement prise en charge par les étudiants. Cet exercice n'est pas corrigé au cours.
- $T_{402}$, $T_{404}$, $T_{405}$, $T_{406}$ et $T_{413}$ : Il est à remarquer que le résultat de ces quelques tâches structurales forment le discours technologico-théorique $\Pi_{21}$ qui est utilisé pour résoudre les deux tâches de type $T_{21}$. Une attention particulière est portée à la tâche de type $T_{402}$ qui occupe toute la deuxième heure de cours.

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches d'$OM_2$ et d'$OM_4$ sont travaillées. Les tâches d'$OM_1$ ne sont pas mentionnées explicitement. Aucune mention n'est faite par rapport aux organisations mathématiques locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$. Le problème des multiplicateurs de Lagrange est laissé de côté.

### Évaluation des praxéologies mathématiques et didactique

*Évaluation des praxéologies mathématiques*

Après la description de l'$OM$ locale présentée dans le cours ($C_{\text{UCL-Math}}$), nous passons à l'évaluation des différents ingrédients praxéologiques :

**Évaluer des tâches**

**Identification :** Les tâches d'$OM_2$ sont clairement dégagées, tout comme les tâches structurales d'$OM_4$. En effet, les tâches d'$OM_2$ sont écrites au tableau, les tâches structurales sont annoncées oralement.

**Raisons d'être :** Les raisons d'être des tâches du type $T_{21}$ apparaissent comme une nécessité logique après avoir traité les problèmes d'optimisation libres. Deux questions énoncées durant le cours peuvent être considérées comme motivation de la séquence portant sur le Théorème de Lagrange : "que signifie l'équation de Lagrange ? (Illustrer et justifier le Théorème de Lagrange, $T_{413}$ et $T_{402}$) et "comment résoudre le problème ?" (Mettre en place une technique pour résoudre un problème de type $T_2$).

**Pertinence :** Les tâches du type $T_{21}$ sont pertinentes au regard de l'$OM_2$. Les tâches $T_{405}$ et $T_{402}$ témoignent de l'intérêt des mathématiciens pour l'activité de démontrer une proposition mathématique. Les tâches de type $T_{406}$ et $T_{413}$ apparaissent comme des tâches qui rendent intelligible la conclusion du Théorème de Lagrange et qui peuvent, en conséquence, être considérées comme pertinentes pour l'activité mathématique. Aucune tâche n'intervient comme "isolat" de l'activité mathématique.

**Évaluer des techniques**

**Élaboration :** La technique $\tau_{21}$ mise en place pour les tâches de type $T_{21}$ est élaborée et les deux étapes principales - la preuve de l'existence d'un extremum et la recherche des candidats possibles à être extremum - sont expliquées clairement. Cependant, une attention particulière est portée vers les détails calculatoires qui sont propres aux exemples choisis par le professeur, $t_{excours_1}$ et $t_{excours_2}$, et qui mettent le fonctionnement de la technique $\tau_{21}$ au second plan. D'ailleurs, l'étape de la comparaison des valeurs de $f$ aux points repérés dans $\tau_{21}$ n'est pas explicitement mentionnée et manque ainsi d'un discours technologique.
En ce qui concerne la tâche $T_{406}$, elle est seulement effleurée, tandis que les autres tâches structurales, surtout $T_{402}$, sont rigoureusement travaillées.

**Portée et fiabilité vs rigidité :** Le même commentaire que pour le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$) peut être donné : la portée de la technique $\tau_{21}$ se limite aux problèmes d'$OM_2$ vérifiant que l'ensemble admissible est compact. Elle est donc restreinte à des tâches précises et montre une certaine rigidité dans le champ d'application.

**Procédure algorithmique et intelligibilité :** La technique est rendue intelligible par les commentaires oraux du professeur.

**Évaluer des technologies**

**Cohérence et rigueur :** Le discours technologique, $\theta_{L_{flagr}}$ est rigoureux. Dans $\theta_{21}$, tous les éléments ne sont pas présentés explicitement. Ces discours sont le résultat des quelques tâches structurales travaillées.

**Explication VS vérification :** Le travail des tâches struturales $T_{402}$, $T_{405}$ et $T_{413}$ attribuent au discours technologique les deux rôles d'explication et de vérification de la technique $\tau_{21}$. En effet, le résultat de l'argumentation au début du cours peut être considérée comme discours explicatif ($T_{405}$ et $T_{413}$), la preuve rigoureuse comme discours vérificatif ($T_{402}$).

**Portée des justifications :** Aucune remarque n'est faite à propos d'autres tâches ou d'autres techniques qui pourraient être justifiées par $\theta_{L_{flagr}}$. Ceci est, entre autres, dû au fait qu'une seule technique de résolution des problèmes $T_2$ est visée. La portée des justifications est donc limitée.

Sur base de cette évaluation, nous faisons les commentaires suivants :
- Seul le Théorème de Lagrange est visé, le multiplicateur de Lagrange n'est pas étudié en tant qu'objet mathématique.
- Une seule technique de résolution est présentée ($\tau_{21}$) ce qui mène vers une certaine rigidité de penser la résolution des tâches de type $T_{21}$ ainsi qu'une restriction de la fiabilité de la méthode (lorsque l'ensemble admissible n'est pas compact, l'étudiant est dépourvu de méthodes pour accomplir la tâche d'$OM_2$).
- Le choix d'utiliser le Théorème des bornes atteintes fait éviter le travail des tâches d'$OM_1$ comme organisation mathématique à part entière et nous dirons que $OM_1$ et $OM_2$ se confondent. En effet, les solutions du système d'équations de Lagrange constituent, en raison de l'existence d'au moins un extremum, les solutions du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité après comparaison des valeurs de $f$ aux points repérés.

*Analyse des moments de l'étude*

Le professeur met en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. Un moment de première rencontre avec les enjeux de la séance, à savoir résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité ($T_2$) ainsi que justifier la Règle des multiplicateurs de Lagrange ($T_{402}$).
2. Un bref moment d'élaboration d'une technique relative au type de tâches $T_1$ qui aboutit à la Règle des multiplicateurs de Lagrange, ainsi que des germes d'une constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{21}$ (en particulier la réalisation des tâches de type $T_{402}$ et $T_{413}$).
3. Un moment plus long de travail de la technique associé aux tâches $t_{excours_1}$ et $t_{excours_2}$.
4. Un long moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{21}$, à savoir prouver le Théorème de Lagrange (réalisation de la tâche $T_{402}$ par une preuve qui vérifie).

L'institutionnalisation n'a été à aucun moment explicite durant les deux heures de cours observés puisque le professeur n'a précisé à aucun moment du cours explicitement les informations importantes à retirer de l'$OM$ mise en place.

*Analyse des caractéristiques du contrat didactique*

Au niveau de la chronogenèse, le professeur a prévu un partage équitable entre, d'une part, les moments d'élaboration d'une technique et de travail de cette technique et, d'autre part, le moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{21}$. Comme nous avons fait remarquer dans la description du cours, le professeur est en charge du processus didactique pendant les deux heures sauf à la fin de la première heure où il y a un partage topogénétique pour résoudre le problème $t_{excours_2}$. Ceci dit, la correction de $t_{excours_2}$ n'est pas prise en charge par le professeur.

En se penchant vers la mésogenèse, nous constatons que le professeur utilise principalement le tableau ainsi que le registre du langage naturel. De cette façon la plupart des propositions mathématiques (dans le registre symbolique et algébrique) écrites au tableau sont expliquées oralement et nous disons qu'il y a changement de registres dans le milieu didactique. Lorsque le registre graphique est sollicité, nous retrouvons une même proposition mathématique exprimée dans trois registres différents. Cependant, ce dernier registre n'est utilisé qu'occasionnellement.

En guise de conclusion, nous dirons que l'$OM$ développée dans ce cours

- ponctualise les tâches procédurales : seules des tâches procédurales concrètes (ponctuelles) sont résolues ;
- sépare le procédural du structural : le cours réalise les deux objectifs (trouver une technique de résolution de $T_2$ et démontrer le Théorème de Lagrange) l'un à la suite de l'autre. Le développement des tâches procédurales se fait alors de manière déconnectée du travail des quelques tâches structurales, en conséquence de quoi les techniques d'$OM_2$ ne sont rendues intelligibles qu'implicitement par les tâches structurales d'$OM_4$. D'ailleurs, la pause entre les deux heures marque cette séparation nette. Seuls des germes d'une constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{21}$ ont été trouvés au moment de l'élaboration de la technique de résolution.

Au niveau des pratiques enseignantes, nous dirons que le cours est principalement

- ex-cathedra : le professeur fournit toute la matière, l'étudiant ne doit pas chercher ou classer l'information. Les étudiants n'interagissent pas avec le professeur. Seul le bref moment de partage topogénétique ne correspond pas au caractère ex-cathedra.

Une conclusion relative à l'$OD$ sera présentée après avoir fait le lien entre le cours et le manuel.

### 8.2.2 ($C_{\textbf{ULg-Éco}}$) ULg, 14 octobre 2010

Nous avons observé le cours "MATH0058-2 Mathématiques pour ingénieurs de gestion : partim II" le jeudi 14 octobre 2010 (9h-10h30) à l'université de Liège (ULg). Le cours relatif au Théorème de Lagrange s'étale sur deux séances de 1h30. Nous avons observé la première des deux séances.

### Description du cours

Le cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) se place dans le cadre du calcul différentiel et intégral et le Théorème de Lagrange y est présenté à la suite de l'optimisation libre [72].

Le moment de première rencontre est un exposé sur différents problèmes d'optimisation rencontrés jusque-là et sur leurs techniques de résolution respectives. En particulier, nous retrouvons les problèmes suivants :

1. $t_{excours_1}$ : déterminer les extrema de $f(x, y)$ sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. $t_{excours_2}$ : déterminer les extrema de $f(x, y) = 2x + 3y$ sous contrainte que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y \leq 1$.
3. $t_{utilit}$ : maximiser la fonction d'utilité $U(x, y)$ sous contrainte que $p_1x + p_2y \underset{\leq}{=} b$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

Le premier problème, rencontré au cours précédent comme "problème libre", sert à définir l'optimisation sous contraintes (d'égalité ou d'inégalité). C'est une tâche extérieure au Théorème de Lagrange. Le deuxième problème, issu de la programmation linéaire comme le mentionne le professeur, est résolu selon trois méthodes :

1. graphiquement (en 3D) en représentant le morceau du plan dans l'espace et l'ensemble admissible,
2. analytiquement avec la méthode vue au cours précédent (faire une étude locale à l'intérieur et sur la frontière du domaine admissible) et
3. graphiquement (en 2D) en représentant les courbes de niveau.

Ce problème n'est pas issu d'$OM_2$, il ne sera donc pas regardé plus en détails. Nous nous contentons de remarquer que la présence de l'inégalité est dûe au fait que le professeur voit aussi les conditions d'optimalité pour des problèmes sous contraintes d'inégalité au cours.

Remarquons encore la progression dans les deux problèmes, $t_{excours_1}$ et $t_{excours_2}$, pour arriver au problème qui motive l'introduction du Théorème de Lagrange : $t_{utilit}$ (de type $T_{21}$).

En effet, le troisième problème est également résolu selon trois méthodes :

1. graphiquement (en 3D) ("montagne d'utilité" ; cette méthode sera encore présentée plus loin dans le cours),
2. graphiquement (en 2D) en traçant la courbe budgétaire et les courbes d'indifférence de la fonction d'utilité et
3. analytiquement par la méthode de Lagrange.

Les deux premières techniques correspondent à $\tau_{25}$. Le discours oral qui accompagne la résolution graphique annonce le résultat à trouver :

> *Visiblement la solution est obtenue quand il y a tangence entre les courbes.* (Prof. B.)

72. L'optimisation libre reprend, d'après l'auteur de ($M_{\text{ULg-Éco}}$), l'optimisation sans contraintes et l'optimisation sur des compacts, sur des fermés non bornés et sur des ouverts bornés ou non bornés.

Nous retrouvons donc, à l'aide de l'exemple, un aperçu d'une argumentation par courbes de niveau tangentes du résultat qui sera appelé plus loin "Théorème de Lagrange" ($\theta_{131}$). Le développement de cette argumentation peut être considéré comme des tâches de type $T_{405}$ et $T_{413}$. Cette partie du cours est exprimée principalement dans le registre graphique et du langage naturel. Peu d'éléments sont notés au tableau.

Le professeur annonce ensuite que la méthode de Lagrange permet de formaliser analytiquement ce qui a été observé sur le graphique. Il est intéressant de remarquer que le professeur présente un court discours réflexif sur l'évolution de ce théorème dans l'histoire des mathématiques (critère associé aux modifications opérées sur le savoir savant).

Avant de présenter le Théorème de Lagrange, le professeur définit au tableau le problème général ($n$ variables sous $m$ contraintes d'égalité) qui devra être résolu :

$T_{général_n}$ ($T_{21}$) : déterminer les extrema de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sur

$$E = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_j \text{ pour } j = 1, \ldots, m\} ,$$

Cependant, il se tourne d'abord vers le cas particulier d'une fonction à deux variables sous une contrainte d'égalité ($n = 2$ et $m = 1$). Nous dirons qu'il prépare le milieu mathématique pour une tâche de type $T_{410}$ (caractéristique mésogénétique). Ce problème particulier s'écrit

$$T_{général_2} \begin{cases} \text{MAX} & f(x, y) \\ \text{sc} & g(x, y) = b\,. \end{cases}$$

À l'aide de ce problème particulier, un premier moment d'élaboration d'une technique adaptée au type de tâches $T_2$ est abordé. Le professeur résout le problème selon trois méthodes comme vu précédemment :

1. graphiquement (en 3D) et
2. graphiquement (en 2D).

La résolution, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, est seulement annoncée. Les Figures 8.2 et 8.3 reprennent les dessins qui constituent le support de la technique $\tau_{25}$ (caractéristique mésogénétique). Notons que le professeur mentionne que le discours technologique associé à ces techniques (graphiques) est à chercher dans les cours précédents.

L'élaboration de la troisième méthode de résolution se juxtapose au moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$. En effet, le professeur *"suppose le problème résolu"* (Prof. B.) ce qui montre qu'on est à la recherche d'une condition nécessaire d'optimalité. Plusieurs tâches structurales sont alors abordées. Pour commencer, le professeur dit qu'il faut

*démontrer* grad $f(p)$ // grad $g(p)$. (Prof. B.)

Pour ce faire, il définit d'abord un *extrémant local de $f$ sur $E$* et donne quelques commentaires à propos de cette définition. Ce discours est considéré comme extérieur au Théorème de Lagrange. Nous arrivons ensuite à la tâche $T_{402}$, à savoir démontrer le Théorème de Lagrange. Un plan de la preuve est exposé avant de donner la démonstration formelle en utilisant l'idée des courbes de niveau tangentes, le Théorème des fonctions implicites et le

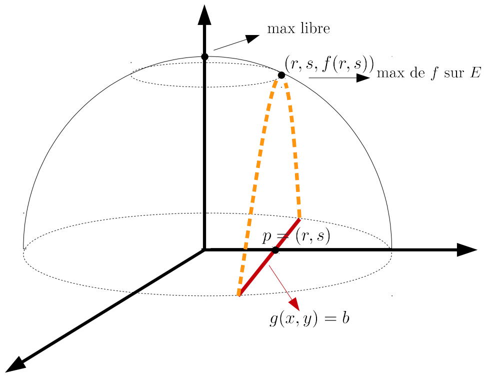



FIGURE 8.2 – Résolution en 3D (Prof. B.)

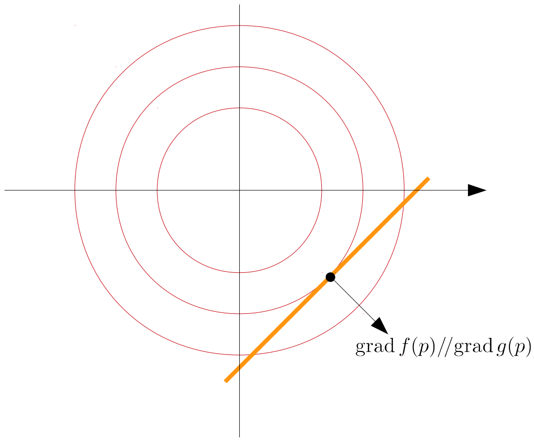



FIGURE 8.3 – Résolution en 2D (Prof. B.)

Théorème de Fermat. Le plan définit aussi le multiplicateur de Lagrange ($T_{401}$), précise que le théorème est une condition nécessaire d'optimalité ($T_{407}$) et annonce la conclusion de la preuve sous forme vectorielle :

$$\text{grad } f(p) = \lambda^* \text{ grad } g(p) .$$

Une fois la conclusion obtenue, le professeur parle de la condition de régularité et explique son rôle pour le Théorème de Lagrange ($T_{406}$). De plus, il fournit un contre-exemple du Théorème de Lagrange lorsque la condition de régularité n'est pas vérifiée pour relever son importance (technique particulière de $T_{406}$) :

– $t_{Courant}$ ($T_{21}$) : maximiser $f(x, y) = y$ sous contrainte que $x^2 + y^3 = 0$.

Cet exemple est appelé *exemple de Courant* et est résolu graphiquement ($\tau_{25}$).

On aboutit alors à un moment d'institutionnalisation. En effet, à la fin de la preuve le professeur revient sur l'organisation mathématique construite et institutionnalise ainsi les nouveaux concepts vus au cours ($T_{405}$). Notons encore que le professeur profite de ce moment pour définir la fonction lagrangienne ($T_{403}$), d'abord comme dépendante des variables $(x, y)$, et puis des variables $(x, y; \lambda)$, où le ";" signifie que le multiplicateur est considéré comme une variable additionnelle. Nous dirons que le travail du multiplicateur de Lagrange s'annonce et que la porte vers l'$OM_3$ et l'$OM_5$ est entrouverte. C'est aussi le moment où le professeur lie l'approche standard à l'approche par fonction lagrangienne ($T_{409}$) et se permet une remarque à propos de la première idée erronée induite par la transformation ($T_{412}$) : à l'aide de la fonction lagrangienne on se ramène à la recherche des points stationnaires d'une fonction libre et

> *on a transformé un problème lié en un problème libre qui est en général plus facile.*
> (Prof. B.)

Rappelons qu'il faut être attentif si on veut présenter le sens exact de cette idée (voir Section 4.6.5.0).

Arrivé à la fin du cours, le professeur annonce que le théorème sera généralisé au cours suivant ($T_{410}$) et qu'il faudra encore décider du statut des candidats identifiés par la méthode de Lagrange (les tâches de type $T_1$ doivent être augmentées d'une étape de repérage parmi tous les candidats possibles). Notons encore que le professeur termine son cours en insistant sur le côté attrayant du Théorème de Lagrange comme théorème en mathématiques. Tout au long de la séquence, le professeur a mené le processus didactique.

En guise de conclusion, nous résumons l'$OM$ locale mise en place. Pour cela, nous dressons la liste des (types de) tâches travaillées associées à des $OM$ ponctuelles :

- $t_{utilit}$ ($T_{21}$) : La tâche est présentée comme motivation du cours. En particulier, elle est résolue par la technique $\tau_{25}$. Son discours technologique est donné oralement.
- $T_{général_n}$, et en particulier $T_{général_2}$ ($T_{21}$) : Le problème $T_{général_n}$ n'est traité que dans le cas des fonctions à deux variables sous une seule contrainte d'égalité. Il est présenté d'abord à l'aide de la technique $\tau_{25}$. Ensuite, la recherche des candidats à être extremum se fait par $\tau_{12}$ ou $\tau_{13}$. Notons que les techniques d'$OM_2$ (étape de repérage des solutions parmi les candidats) ont été clairement annoncées à la fin du cours mais n'ont pas fait l'objet du cours observé. Faire leur évaluation est alors une tâche impossible pour nous. Le bloc technologico-théorique contient la technologie $\theta_{121}$ ainsi que le résultat de nombreuses tâches structurales travaillées dans ce cours.
- $t_{Courant}$ ($T_{21}$) : La praxéologie construite est la suivante : $[t_{Courant}, \tau_{25}, \Pi_{\text{courant}}]$, où $\Pi_{courant}$ comprend le Théorème de Lagrange ainsi qu'une discussion autour de la condition de régularité et sur la représentation graphique de fonctions.
- $T_{401}$ à $T_{403}$, $T_{405}$ à $T_{407}$, $T_{409}$ et $T_{411}$ à $T_{413}$ : Beaucoup de tâches structurales sont travaillées dans ce cours pour rendre le Théorème de Lagrange intelligible.

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches d'$OM_2$ et d'$OM_4$ sont travaillées. Les tâches d'$OM_1$ sont mentionnées sans être définies explicitement et apparaissent comme première étape dans la réalisation des tâches d'$OM_2$. Les tâches des organisations mathématiques locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$ feront l'objet du cours suivant que nous n'avons pas observé.

### Évaluation des praxéologies mathématiques et didactique

*Évaluation des praxéologies mathématiques*

Après la description de l'$OM$ locale présentée dans le cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$), nous passons à l'évaluation des différents ingrédients praxéologiques :

**Évaluer des tâches**

**Identification :** Toutes les tâches présentées sont bien identifiées. Seule la tâche d'$OM_1$ doit se comprendre dans le discours oral relatif au Théorème de Lagrange en considérant les implications d'une condition nécessaire d'optimalité sur la recherche d'extrema. Les nombreuses tâches structurales sont clairement annoncées.

**Raisons d'être :** Le problème de la résolution des problèmes d'optimisation sous contrainte d'égalité apparaît comme suite logique des problèmes d'optimisation libres. En particulier, la résolution des problèmes $t_{utilit}$ et $T_{général_n}$ semble être la raison principale du processus didactique. Dans le but de constituer un bloc technologico-théorique exhaustif, le différentes tâches structurales trouvent leur raison d'être.

**Pertinence :** Les différents problèmes de type $T_{21}$ sont pertinents pour ce que le professeur compte faire. Soulevons en particulier les deux tâches d'introduction qui annoncent la couleur du cours, ainsi que la tâche $t_{Courant}$ qui est choisie pertinemment pour réaliser $T_{406}$. Les différentes tâches structurales sont pertinentes pour montrer les différentes facettes du Théorème de Lagrange.

**Évaluer des techniques**

**Élaboration :** Les techniques associées aux différentes tâches procédurales sont présentées, mais pas complètement élaborées. En raison de l'écriture générique des problèmes, seule la tâche $t_{Courant}$ est résolue au point d'obtenir une solution finale analytique. Notons encore que les techniques ne peuvent pas être, à ce stade, complètement élaborées lorsqu'on les considère comme appartenant à l'$OM_2$. Elles font, en effet, l'objet de la deuxième séquence de cours que nous n'avons pas observée. Les tâches structurales présentées au cours sont motivées et résolues par des techniques mathématiques correctes.

**Portée et fiabilité VS rigidité :** Pour résoudre les tâches d'$OM_1$, aussi bien la technique $\tau_{12}$ que la technique $\tau_{13}$ sont mentionnées. Ces techniques, appliquées sur un problème générique, leur confèrent une bonne portée. Pour ce qui est de la résolution des tâches d'$OM_2$, nous ne pouvons pas faire de commentaire comme mentionné ci-dessus.

**Procédure algorithmique et intelligibilité :** Les différentes techniques sont clairement rendues intelligibles puisqu'on retrouve, à l'aide de la réalisation de tâches structurales, de nombreuses justifications explicatives.

**Évaluer des technologies**

**Cohérence et rigueur :** Le problème de la justification traverse tout le cours et le professeur met un accent particulier sur la constitution d'un bloc technologico-théorique bien complet. Suite à la réalisation de nombreuses tâches structurales, nous sommes en présence de beaucoup d'éléments technologiques permettant de questionner les techniques exposées, questionnements qui sont cohérents par rapport à la présentation du Théorème de Lagrange.

**Explication VS vérification :** Les explications sont favorisées dans les discours technologiques. Par exemple, la preuve du Théorème de Lagrange (réalisation d'une tâche de type $T_{402}$) est directement liée à la technique $\tau_{12}$ qu'elle rend ainsi intelligible.

**Portée des justifications :** La portée des justifications est bonne.

*Analyse des moments de l'étude*
Le professeur met en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. Un moment de première rencontre mélangé à un moment d'élaboration d'une technique associé à $T_1$ pour résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité et qui mène vers le Théorème de Lagrange.

2. Un long moment d'élaboration d'une technique associé à $T_1$ qui se juxtapose avec un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$ par la réalisation de différentes tâches d'$OM_4$. Ce dernier moment est lié à un moment d'institutionnalisation.

*Analyse des caractéristiques du contrat didactique*
Au niveau de la chronogenèse, les 1h30 étaient prévues pour introduire et développer le Théorème de Lagrange et pour ainsi expliquer l'identification des candidats à être extremum dans la recherche des extrema sous contraintes d'égalité. Comme nous avons fait remarquer dans la description du cours, le professeur est en charge du processus didactique pendant toute la séquence de cours.

En se penchant vers la mésogenèse, nous constatons que le professeur utilise principalement le tableau ainsi que le registre du langage naturel. De cette façon, la plupart des propositions mathématiques (dans le registre symbolique et algébrique) écrites au tableau sont expliquées oralement, d'une part, et illustrées graphiquement d'autre part. D'ailleurs, le registre graphique intervient beaucoup dans les explications du professeur et beaucoup de changements de registres sont en conséquence proposés aux étudiants.

En guise de conclusion, nous dirons que l'$OM$ développée dans ce cours
- généralise les tâches procédurales : la technique de résolution associée à $T_1$ est développée à l'aide de tâches génériques. Des exemples concrets motivent (avant) et illustrent (après) l'élaboration de cette technique ;
- lie le procédural au structural : les tâches structurales s'imbriquent dans les tâches procédurales et rendent ainsi une séparation nette entre les moments de l'élaboration de la technique et de constitution de l'environnement technologico-théorique impossible. Il y a l'intégration du type de tâches $T_1$ dans l'$OM$ par un discours technologique qui est développé par de nombreuses tâches structurales ;

Au niveau des pratiques enseignantes, nous dirons que le cours est principalement
- ex-cathedra : le professeur fournit toute la matière, l'étudiant ne doit pas chercher ou classer l'information. À part quelques questions ouvertes adressées aux étudiants, ils n'interagissent pas avec le professeur.

Une conclusion relative à l'$OD$ sera présentée après avoir fait le lien entre le cours et le manuel.

### 8.2.3 ($C_{\textbf{UNa-Éco}}$) FUNDP, 5 mai 2011

Nous avons observé le cours "ECGE B151 Mathématiques pour l'économie et la gestion I" le jeudi 5 mai 2011 (10h40-12h40) à l'université de Namur (FUNDP). Le cours relatif au Théorème de Lagrange s'étale sur deux séances, de 2h et de 1h respectivement. Nous avons observé la première séance de 2h.

#### Description du cours

Le cours ($C_{\text{UNa-Éco}}$) se place dans le cadre du calcul différentiel et intégral et le Théorème de Lagrange y est présenté à la suite de l'optimisation sans contraintes. Le moment de première rencontre est un exposé sur différents problèmes d'optimisation rencontrés jusque-là et leurs techniques de résolution respectives. Dans cet exposé, le professeur distingue à chaque fois le cas des fonctions à une variable et à deux variables. En commençant avec les problèmes sans contraintes, il arrive vite à la catégorie des problèmes sous contraintes. Ainsi, il présente le problème économique de maximiser un achat (lié à l'économie) sous une contrainte budgétaire :

$$T_{\text{économ}} \begin{cases} \textsc{Max} & f(x,y) \\ \text{sc} & B = px + y\,. \end{cases}$$

ainsi que le problème mathématique de déterminer *"les points de la surface les plus proches de l'origine"* (Prof. C.). Le premier est du type $T_{21}$, le deuxième du type $T_{22}$. Notons que le deuxième problème est accompagné d'un graphique qui montre qu'il s'agit de trouver la distance minimale entre une surface et l'origine. Résoudre des problèmes de type $T_2$ est alors présenté comme l'objectif du cours.

Sur base du problème

$t_{\text{distance}}$ $(T_{21})$ : déterminer la distance minimale de l'origine du plan $Oxy$ à l'hyperbole $x^2 + 3xy + y^2 = 5$,

le professeur engage les étudiants dans un jeu de questions-réponses pour modéliser la fonction objectif de ce problème et relève encore une fois la différence entre un problème sans et un problème sous contrainte.

Il est alors question de rechercher une stratégie pour résoudre le problème sous contrainte. Ce début de moment d'élaboration de la technique se juxtapose avec un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$ (la première étape dans la résolution de $T_2$ comme précisé plus loin). En effet, le professeur essaie de trouver une interprétation géométrique du problème :

$$T_{\textit{général}} \begin{cases} \textsc{Max} & f(x,y) \\ \text{sc} & g(x,y) = k\,. \end{cases}$$

En posant des questions aux étudiants, il arrive à reproduire le dessin suivant au tableau (caractéristique mésogénétique) comme repris par le manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$) (Figure 8.4).

Au point "$\bullet$", qui correspond au

*point le plus haut satisfaisant la contrainte,* (Prof. C.)

il observe qu'on a la "même tangente", ou autrement dit, la "même pente" ($T_{413}$). Le but est alors d'écrire cette observation "*en termes du multiplicateur de Lagrange*" (Prof. C.) ($T_{405}$). Sans plus d'explications

*parce qu'on n'a pas vu les fonctions implicites,* (Prof. C.)

cette conclusion devient

$$-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)} = -\frac{g'_x(x_0,y_0)}{g'_y(x_0,y_0)} = \lambda\,,$$

où le multiplicateur de Lagrange a été défini ($T_{401}$). Après transformation, on écrit encore, sous forme vectorielle :

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)\,.$$

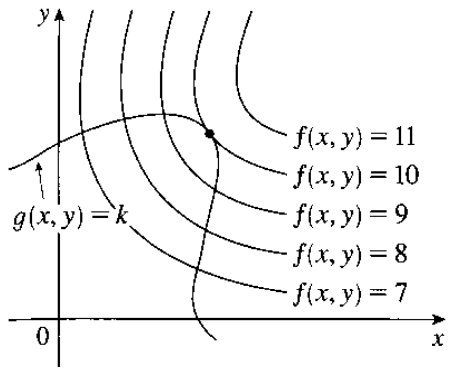



FIGURE 8.4 – Dessin au tableau (Prof. C.)

Il s'agit en même temps d'une argumentation du Théorème de Lagrange où toutes les étapes ne sont pas rendues intelligibles ($T_{402}$) mais qui permet au professeur d'affirmer que la solution du problème $T_{général}$ doit être tel que

$$g(x_0, y_0) = k \ ,$$
$$\text{il existe un nombre } \lambda \text{ tel que } \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \ \nabla g(x_0, y_0).$$

La tâche structurale de type $T_{405}$ est accomplie et le Théorème de Lagrange est énoncé "formellement" au tableau. Cet énoncé reprend aussi la notion de point régulier ($T_{411}$). Le professeur joint à cette formulation du Théorème de Lagrange le fait qu'il s'agit uniquement d'une condition nécessaire et non suffisante ($T_{407}$) et énonce oralement la tâche de type $T_1$ (moment de l'élaboration de la technique associée à $T_1$).

Toujours dans le moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$, le professeur tâche ensuite de définir la fonction lagrangienne et de lier analytiquement l'approche standard à l'approche par fonction lagrangienne ($T_{403}$ et $T_{409}$). L'intérêt de la fonction lagrangienne réside, d'après le professeur, principalement dans la condensation d'écriture du système d'équations :

> *On peut très bien s'en passer, mais le lagrangien permet d'écrire le système d'équations en une seule ligne.* (Prof. C.)

Ensuite, la stratégie pour rechercher les candidats au problème $T_{général}$ est présentée au tableau ce qui peut être considéré comme un moment d'institutionnalisation de la technique associée à $T_1$. Le professeur décrit la stratégie comme suit :

> *c'est vraiment une recette, une stratégie pour résoudre le problème de départ. Cependant, je n'ai pas encore dit si ce sont des minima ou des maxima.* (Prof. C.)

Elle est présentée comme l'information à retirer de cette première partie du cours.

À la suite, le problème suivant est présenté aux étudiants :

$$t_{excours_1} \begin{cases} \text{MAX} & f(x, y) = x^2 y \\ \text{sc} & g(x, y) = 2x^2 + y^2 = 3 \, . \end{cases}$$

Il arrive alors un instant particulier. Le professeur ne commence pas la résolution et délègue la tâche de chercher tous les candidats ($t_{excours_1}$ vue comme tâche issue d'$OM_1$)

aux étudiants. Le travail de la technique est donc au topos des étudiants (caractéristique topogénétique). Pendant ce temps-là, le professeur passe dans les rangées de l'auditoire, va près des étudiants et répond ainsi individuellement aux questions. Ce moment de travail de la technique est suivi, après 1h30 de cours, d'une pause (caractéristique chronogénétique).

Le professeur attire, après la pause, l'attention des étudiants sur l'importance d'être capable de résoudre le système d'équations et les difficultés techniques qui y sont inhérentes. De plus, pour introduire la condition d'optimalité suffisante du second ordre, le professeur fait une analogie avec les problème sans contraintes pour énoncer le Théorème du Hessien bordé qui peut être retrouvé dans (Thiry, 2006, p.169). Ce théorème est utilisé comme deuxième étape dans la résolution des problèmes de type $T_{général}$ et présenté comme procédure algorithmique :

> *Vous passez le candidat dans la machine, et c'est la machine qui vous dira si c'est un minimum ou un maximum. Évidemment, il faudrait démontrer ce théorème. Mais cela prendrait 2h en plus. Donc on vous donne seulement la recette.* (Prof. C.)

Notons encore, que le professeur soulève l'incapacité de ce théorème de décider de la nature des candidats en lesquels le Hessien bordé s'annule. Dans ce cas,

> *il faut trouver d'autres moyens pour conclure* (Prof. C.)

qui ne font pas l'objet du cours. À la fin, le professeur invite les étudiants à résoudre le problème suivant pour le cours prochain :

$$t_{excours_2} \begin{cases} \text{MIN} & x^2 + y^2 \\ \text{sc} & x^2 + 3xy + y^2 = 5\,. \end{cases}$$

En guise de conclusion, nous résumons l'$OM$ locale mise en place. Pour cela, nous dressons la liste des (types de) tâches travaillées associées à des $OM$ ponctuelles :

- $T_{\text{économ}}$ ($T_{21}$) : Problème de maximisation issu d'un contexte économique qui motive l'introduction du Théorème de Lagrange.
- $t_{\text{distance}}$ ($T_{21}$) : Problème de minimisation issu d'un contexte mathématique qui motive l'introduction du Théorème de Lagrange.
- $T_{général}$ ($T_{21}$) : Formulations génériques des problèmes de type $T_{21}$ qui sont traités au cours. Leur procédure de résolution est expliquée. L'argumentation, l'énoncé du Théorème de Lagrange ainsi que l'énoncé de la condition d'optimalité suffisante sont considérés comme éléments du bloc technologico-théorique qui sont développés par les différentes tâches structurales.
- $t_{excours_1}$ ($T_{21}$, mais considérée comme étant du type $T_1$) : La praxéologie construite est la suivante : $[t_{excours_1}, \tau_{12} \cup \tau_{13} \cup \tau_{14}, \Pi_{121}]$, où $\Pi_{121} = \theta_{121}$ est le Théorème de Lagrange sous forme standard, rendu intelligible par une approche par courbes de niveau tangentes. La technique $\tau_{14}$, quant à elle, n'est pas rendue intelligible.
- $t_{excours_2}$ ($T_{21}$) : La praxéologie n'est pas présentée au cours mais constitue le devoir des étudiants pour le cours suivant.
- $T_{401}$, $T_{402}$, $T_{403}$, $T_{405}$, $T_{407}$, $T_{409}$, $T_{411}$ et $T_{413}$ : Plusieurs tâches structurales d'$OM_4$ sont travaillées dans ce cours.

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches d'$OM_1$, d'$OM_2$ et d'$OM_4$ sont travaillées. Le travail par rapport aux organisations mathématiques locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$ est annoncé pour le cours suivant que nous ne sommes pas allés observer.

### Évaluation des praxéologies mathématiques et didactique

*Évaluation des praxéologies mathématiques*
Après la description de l'$OM$ locale présentée dans le cours ($C_{\text{UNa-Éco}}$), nous passons à l'évaluation des différents ingrédients praxéologiques :

**Évaluer des tâches**

**Identification :** En ce qui concerne les tâches d'$OM_2$, elles sont bien identifiées. Par moment, on les considère comme appartenant à l'$OM_1$ ce qui est alors relevé par le professeur. Les tâches structurales d'$OM_4$ sont clairement dégagées dans le cours car elles sont souvent annoncées oralement.

**Raisons d'être :** Les types de tâches $T_{\text{économ}}$ et $t_{\text{distance}}$ semblent être la motivation de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. Dans ce sens, les tâches de type $T_{21}$ ont leur raison d'être dans le processus didactique. La présence des tâches structurales permet de construire le bloc technologico-théorique associé.

**Pertinence :** Les différentes tâches n'apparaissent pas comme des "isolats". Elles ont été choisies en lien avec l'activité mathématique visée. Quant aux tâches structurales, elles sont pertinentes. Nous soulignons que le professeur décide de ne pas "démontrer" la condition d'optimalité suffisante du second ordre, suggérant que cette activité ne figure pas parmi les objectifs du cours.

**Évaluer des techniques**

**Élaboration :** La technique associée à $T_1$ est élaborée et se présente sous forme de "stratégie". La technique associée à $T_{21}$ est également dégagée sous forme de "stratégie". La technique associée à la tâche $T_{402}$ ne présente pas toutes les étapes pour être dite "complètement élaborée". Cependant, les idées principales sont véhiculées.

**Portée et fiabilité VS rigidité :** Nous retrouvons une seule technique pour résoudre des problèmes de type $T_{21}$ : $\tau_{23}$ à l'intérieur de laquelle les techniques $\tau_{13}$ et $\tau_{14}$ permettent d'identifier les candidats à être extremum. Le professeur lui-même limite la portée de cette technique aux cas où le Hessien bordé ne s'annule pas. Cela lui apporte une certaine rigidité. Au niveau de la portée, ces techniques sont uniquement utilisées pour résoudre des problèmes de deux variables à une seule contrainte d'égalité. Aucune généralisation n'est proposée.

**Procédure algorithmique et intelligibilité :** Bien qu'elles soient rendues intelligibles par le développement de différentes tâches structurales, les techniques peuvent être considérées jusqu'à un certain point comme procédure algorithmique pour résoudre les différents problèmes. D'ailleurs, le professeur mentionne à plusieurs reprises, comme présenté dans la description du cours, le mot "recette" pour qualifier la technique. Notons encore que $\tau_{14}$ n'est pas rendue intelligible du tout étant donné l'absence de la tâche $T_{406}$. Le côté procédural des tâches de $T_{21}$ est, en conséquence, clairement mis en avant.

**Évaluer des technologies**

**Cohérence et rigueur :** Les différents discours technologiques sont cohérents. La preuve du Théorème de Lagrange est vue comme une argumentation et non comme une preuve rigoureuse. D'ailleurs, le passage entre le dessin au tableau et l'expression algébrique des pentes des tangentes n'est pas rendue intelligible à défaut du Théorème des fonctions implicites qui n'a pas été vu au cours. La tâche $T_{406}$ n'est pas abordée du tout et, il y a, en conséquence, une absence d'un discours technologique clair pour décider de la nature d'un candidat identifié par la méthode $\tau_{14}$.

**Explication VS vérification :** Les explications sont favorisées dans le cours.

**Portée des justifications :** Le discours technologique $\theta_{23}$ est adapté aux problèmes de type $T_{21}$. Cependant, aucune remarque n'est faite à propos d'autres tâches ou d'autres techniques qui pourraient être justifiées par $\theta_{23}$, ou à propos d'autres justifications qui pourraient rendre intelligibles les problèmes de type $T_{21}$.

*Analyse des moments de l'étude*

Le professeur met en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. Un moment de première rencontre. Ce moment est suivi d'un moment d'élaboration de la technique associée à $T_1$ qui se juxtapose avec un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$ par la réalisation de différentes tâches d'$OM_4$ et qui aboutit à un moment d'institutionnalisation ;
2. Un moment de travail de la technique associée à $T_1$, réalisé par les étudiants ;
3. Un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_2$ (présentation du Théorème du Hessien bordé) qui se réduit à l'ostension de la technique associé à $T_2$.

*Analyse des caractéristiques du contrat didactique*

Au niveau de la chronogenèse, les 2h de cours étaient réparties en des séquences de 1h30 et de 30min séparé d'une pause. Cette répartition correspond au travail de l'$OM$ locale élémentaire visée : d'abord les tâches d'$OM_1$, ensuite les tâches qui permettent de décider de la nature d'un extremum. Comme nous l'avons fait remarquer dans la description du cours, le professeur est en charge du processus didactique, mais délègue à la fin de la première partie du cours le travail de la technique associée à $T_1$ aux étudiants. Il y a un partage topogénétique entre le professeur et les étudiants. D'ailleurs, le professeur invite les étudiants à plusieurs moments du processus didactique à participer activement.

En se penchant vers la mésogenèse, nous constatons que le professeur utilise principalement le tableau ainsi que le registre du langage naturel. De cette façon, la plupart des propositions mathématiques (dans le registre symbolique et algébrique) écrites au tableau sont expliquées oralement, quelques-unes sont en plus illustrées graphiquement. Notons encore que le professeur renvoie plusieurs fois au manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$) ce qui peut être considéré comme une caractéristique mésogénétique. Beaucoup d'étudiants, en effet, assistent au cours avec le manuel devant eux. Le fait de fournir des réponses individuelles peut aussi être considéré comme une caractéristique mésogénétique.

En guise de conclusion, nous dirons que l'$OM$ développée dans ce cours
- généralise les tâches procédurales : la technique de résolution est développé à l'aide de tâches génériques. Les exemples concrets motivent (avant) et illustrent (après) l'élaboration de la technique ;
- lie le procédural au structural : les tâches structurales s'imbriquent dans les tâches procédurales et rendent ainsi une séparation nette entre les moments de l'élaboration de la technique et de constitution de l'environnement technologico-théorique difficile. Cependant, le bloc $\Lambda$ des tâches procédurales est accentué par la formulation de "stratégies".

Au niveau des pratiques enseignantes, nous dirons que le cours est
- ex-cathedra et partiellement interactif : d'une part, le professeur fournit toute la matière et reste en face des étudiants qui écoutent et copient, d'autre part, nous avons observé une phase d'interactivité entre le professeur et les étudiants. En effet, dans cette deuxième phase, le professeur cerne la matière et invite les étudiants à chercher et à maîtriser les informations reçues. Le cours devient une rencontre avec le professeur où les étudiants ont la possibilité de l'interpeller individuellement.

Une conclusion relative à l'$OD$ sera présentée après avoir fait le lien entre le cours et le manuel.

## 8.3 Caractéristiques des cours

Dans cette section nous relevons pour les trois cours des caractéristiques communes et analysons à l'aide des différents critères la diversité des cours rencontrés. Une présentation simultanée nous semble favoriser la mise en valeur des aspects les plus représentatifs de l'organisation mathématique et des pratiques enseignantes étudiées selon les trois cours. Notons encore que nous ne nous attardons pas sur les pratiques enseignantes en vue de la complexité du sujet (Chevallard, 1999 ; Robert, 2007 ; Roditi, 2005), et que nous ne tirons, en conséquence, que quelques conclusions très générales.

Nous récapitulons tout d'abord quelques caractéristiques mises en évidence lors de la description et de l'évaluation des $OM$ présentées dans les différents cours. Ensuite, nous disons quelques mots à propos des comportements des enseignants.

### 8.3.1 Comparaison des cours

Sur base de nos observations, nous constatons que le nombre de tâches structurales varie entre 5 ($C_{\text{UCL-Math}}$) et 10 ($C_{\text{ULg-Éco}}$). Le cours ($C_{\text{UNa-Éco}}$) présente 8 tâches structurales dont le développement constitue directement l'environnement technologico-théorique associé aux tâches procédurales. Ainsi, la possibilité de constituer des blocs technologico-théorique qui rendent intelligible le fonctionnement des techniques d'$OM_2$ et de leur résultat, est présente dans tous les cours mais cette tendance est tantôt prononcée (dans ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et

($C_{\text{UNa-Éco}}$)) et tantôt elle l'est moins (dans ($C_{\text{UCL-Math}}$)). Cela se traduit encore, comme pour les manuels, par une présentation soit en parallèle (($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$)), soit avec déconnexion des tâches procédurales et structurales (($C_{\text{UCL-Math}}$)). Cette séparation entre le procédural et le structural dans le cours ($C_{\text{UCL-Math}}$) est marquée d'ailleurs par la pause entre les deux heures de cours, tandis que les cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$) imbriquent les tâches structurales dans les tâches procédurales durant toute la séquence de cours.

Le travail des tâches d'$OM_2$ se fait explicitement dans les trois cours. Quant aux tâches de l'$OM_1$, elles ne sont pas du tout mentionnées dans le cours ($C_{\text{UCL-Math}}$), sont explicitées oralement dans le cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ont été reprises au tableau et dans les explications orales dans le cours ($C_{\text{UNa-Éco}}$).

En ce qui concerne l'articulation des différentes des $OM$ locales élémentaires dans les cours, elle est directement liée à l'articulation des moments de l'étude. Nous nous contentons de relever un point commun entre les trois cours : ils démarrent le moment de première rencontre avec la présentation d'un problème de type $T_{21}$ ($n$ variables et $m$ contraintes pour ($C_{\text{UCL-Math}}$) ; 2 variables et une contrainte pour ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$)) et une tâche de type $T_{413}$ constitue ensuite un moment d'élaboration de la technique associée à la caractérisation des solutions d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. Ce dernier moment aboutit à la présentation formelle du Théorème de Lagrange.

Notons que, dans les trois cours, il s'agit de développer un argument de type "condition nécessaire d'optimalité" qui est présenté et que cet argument à lui tout seul ne résout pas la tâche de type $T_2$. Cette caractéristique est relevée dans les cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$) ($T_{407}$), mais pas dans le cours ($C_{\text{UCL-Math}}$) qui profite des caractéristiques supplémentaires sur le problème de type $T_2$ (l'ensemble admissible ou une partie contenant la solution est compact) pour éviter le passage vers les conditions suffisantes d'optimalité.

### 8.3.2 Comportements des enseignants

Dans ce paragraphe nous relevons pour les trois cours quelques commentaires de nature très générale à propos des pratiques enseignantes.

Nous qualifions les trois cours d'"ex-cathedra" ce qui correspond à la forme d'enseignement universitaire "traditionnelle" en Belgique. Dans cet enseignement universitaire traditionnel, donné sous forme de cours magistraux, nous observons que le professeur recourt incontestablement à l'ostension. Il "montre" le savoir au travers d'un exposé de son $OM$ (au tableau, en parlant, etc.). Cet exposé est souvent la restitution d'un texte mathématique, appelé "manuel du cours". Nous avons observé trois cours qui répondent à ce schéma.

À ce moment, le rôle qu'occupe l'étudiant est celui d'une personne qui "regarde" cet exposé. Ce rôle est relativement réduit lorsqu'on le compare à celui plus large du professeur. En effet, le professeur est, dans un cours magistral, la première personne en charge du contrôle sur le savoir enseigné. Cette constatation a également été mise en évidence par notre description du savoir enseigné.

Nos observations ont montré alors un comportement différent dans deux des trois cours qui ne collent pas à la forme d'enseignement "ex-cathedra". Dans les cours ($C_{\text{UCL-Math}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$), il y a un partage topogénétique : le travail de la technique associée à $T_2$ est délégué aux étudiants et le professeur, au moins pour le cours ($C_{\text{UNa-Éco}}$), part à la rencontre des étudiants afin de leur permettre de poser leurs questions individuellement (comportement que nous avons qualifié de "partiellement interactif"). Ce dernier professeur a aussi recours au jeu de questions-réponses dans ses pratiques enseignantes lors du cours observé. L'idée de proposer un partage topogénétique est probablement fondé sur l'intention des professeurs de permettre aux étudiants de s'imprégner de la technique de résolution.

De cette observation émerge la question de la possibilité d'instaurer un enseignement universitaire par "activités" (comme cela se fait déjà dans l'enseignement primaire et secondaire). Comme affirmé par Matheron (2000), dans un enseignement par "activités",

> *l'élève (et les élèves) doivent construire des connaissances qui deviendront ensuite un savoir. Le contrôle sur le savoir, qu'exerçait le professeur dans un cours magistral, s'estompe au profit du pari qu'il fonde sur une activité, dont l'interaction avec le travail qu'y amèneront les élèves, est censée faire émerger le savoir visé. Si l'activité ne permet pas, en ce qui concerne l'organisation du savoir visé dont elle est réputée être porteuse, de le faire émerger en tant que savoir mathématique, c'est alors le recours au procédé d'ostension, à travers lequel le professeur va montrer le savoir absent qui va être utilisé.* (Matheron, 2000, p.73)

Notons encore qu'à l'université, nous trouvons d'autres dispositifs didactiques et pédagogiques qui permettent de construire un savoir mathématique et que nous n'avons pas observés : les "travaux dirigés", les "travaux de groupe", etc. Le cours ex-cathedra est, même s'il est le plus répandu, actuellement remis en question au profit d'autres formes d'enseignement tels que l'apprentissage par projets (Vander Borgt & Raucent, 2006) ou par problèmes, etc.

### 8.3.3 Réflexion des enseignants

Ayant décrit le savoir enseigné et son lien avec le savoir à enseigner, il nous a paru intéressant de retourner vers les questionnaires distribués auprès des enseignants pour trouver éventuellement des informations supplémentaires. Nous rappelons que le but du questionnaire était d'obtenir un aperçu des idées des enseignants relatives au Théorème de Lagrange (voir Section 6.4). Les résultats des questionnaires nous permettent de faire les observations suivantes relativement au savoir enseigné.

*Introduire le Théorème de Lagrange*

Le moment de première rencontre se fait par un problème d'optimisation à $n$ variables sous $m$ contraintes d'égalité dans le cours ($C_{\text{UCL-Math}}$) et par un problème d'optimisation à 2 variables sous une seule contrainte d'égalité dans les cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$). Parmi les 11 professeurs interrogés, 8 professeurs, issus des institutions $I_{\text{Math}}$ et $I_{\text{Éco}}$, répondent qu'il est intéressant d'introduire le Théorème de Lagrange d'abord dans le cas d'un problème à deux variables sous une seule contrainte d'égalité (Question 25). Seuls deux professeurs disent le contraire. L'un d'eux précise qu'il est seulement utile d'appliquer cette démarche si on peut dessiner le graphe de la fonction objectif et de la contrainte, l'autre (s'adressant à des futurs mathématiciens comme dans ($C_{\text{UCL-Math}}$)) ne voit pas de difficulté supplémentaire au niveau de la preuve qui justifierait un passage préalable par le cas d'une seule contrainte d'égalité. Nous retrouvons donc que les enseignants voient une utilité claire, surtout lorsqu'ils s'adressent à des futurs économistes et ingénieurs de gestion (comme dans ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$)), de présenter le théorème d'abord dans un cas simple avant de donner (éventuellement) une généralisation.

*Justifier le Théorème de Lagrange*
Nous avons retrouvé dans les trois cours la présence d'une tâche structurale de type $T_{413}$ au début de la séquence pour aboutir, après un bref moment de constitution de l'environnement technologico-théorique, à l'énoncé du Théorème de Lagrange. Une preuve plus rigoureuse est seulement présentée ensuite (dans ($C_{\text{UCL-Math}}$) et ($C_{\text{ULg-Éco}}$)). Cette même tendance ressort des questionnaires (Questions 13, 14 et 21). La plupart des professeurs sondés donne d'abord une illustration graphique du théorème (ce qui est réalisable en passant par les courbes de niveau dans le cas d'un problème d'optimisation à deux variables sous une seule contrainte d'égalité) et démontre ensuite le Théorème de Lagrange en utilisant le Théorème des fonctions implicites. Cette tendance est plus prononcée chez les professeurs en économie que chez leurs homologues en mathématiques.

*Appliquer le Théorème de Lagrange*
Quelles sont les tâches procédurales choisies dans le savoir enseigné ? (Questions 15 et 20) Chez les enseignants à de futurs économistes, nous trouvons une tendance à exposer plusieurs applications (tâches procédurales de type $T_{21}$) du Théorème de Lagrange. Les professeurs en économie ont recours à des applications nombreuses et diverses allant de problèmes économiques à des problèmes plutôt mathématiques, tandis que les professeurs en mathématiques se limitent à peu d'illustrations (voire aucune) du Théorème de Lagrange d'après les questionnaires. Ces applications sont issues de l'économie et de la gestion, de la géométrie et de la finance du côté des économistes. Du côté des cours en mathématiques, nous trouvons des applications plus théoriques comme le calcul de valeurs propres de matrices ou de la distance d'un point à une variété affine. Il est clair que nous retrouvons ici un reflet des pratiques professionnelles de référence dans les pratiques enseignantes qui marque une distinction nette entre l'institution mathématique et l'institution économique en tant qu'institutions demandeuses de ce savoir.

*Interpréter le multiplicateur de Lagrange*
En ce qui concerne les types de tâches d'$OM_3$ et d'$OM_5$ nous retrouvons les idées des enseignants dans les réponses à la Question 18. Cinq des six enseignants en économie interprètent le multiplicateur de Lagrange lors des applications aux exemples d'économie. Un professeur signale qu'on trouve cette interprétation d'ailleurs en programmation linéaire sous le terme *shadow price*. Seul un professeur en économie ne cherche pas à exploiter les tâches des types $T_3$ et $T_5$.

Du côté des professeurs en mathématiques, nous sommes face à quatre professeurs qui ne donnent aucune interprétation du multiplicateur de Lagrange. Un professeur présente le multiplicateur, *sans insister*, comme *coût des contraintes*. Il sort donc des questionnaires que les $OM_3$ et $OM_5$ sont des organisations auxquelles les professeurs en économie attribuent beaucoup d'importance. Le multiplicateur de Lagrange semble être un concept important pour les futurs économistes et ingénieurs de gestion étant donné son utilisation dans les problèmes économiques. Une fois de plus, nous avons retrouvé le caractère fondamental des multiplicateurs de Lagrange pour l'économie.

Après avoir analysé notre questionnaire proposé aux enseignants, nous sommes maintenant en mesure de présenter un tableau récapitulatif qui regroupe quelques unes des caractéristiques observées selon l'inscription institutionnelle des professeurs. Ce résumé est repris dans le Tableau 8.1. Notons que ce tableau reprend des tendances globales recensées, ce qui n'exclut pas certains cas particuliers.

| | Cours pour mathématiciens | Cours pour économistes |
|---|---|---|
| Importance du Théorème de Lagrange | Résultat parmi d'autres | Résultat important car utile pour la suite des études |
| Espace occupé dans un manuel | $\leq 10$ pages | $\geq 10$ pages |
| Traitement des contraintes d'inégalités | Non | Oui |
| Introduction de la fonction lagrangienne | Dans le cas général | Dans le cas des problèmes à 2 variables sous une contrainte d'égalité |
| Preuve du Théorème de Lagrange | Utilisation du Théorème des fonctions implicites | Illustration graphique + Utilisation du Théorème des fonctions implicites |
| Illustration de la méthode de substitution | Oui, pour motiver l'introduction du Théorème de Lagrange | Oui, pour motiver l'introduction du Théorème de Lagrange |
| Applications | De nature mathématique | De nature économique |
| Multiplicateur de Lagrange | Peu d'interprétation | Importance de l'interprétation |

Tableau 8.1 – Comparaison institutionnelle sur base du questionnaire soumis aux enseignants

## 8.4 Lien avec les manuels

Dans cette section nous confrontons les trois cours aux manuels. Nous tâchons de trouver les liens et les décalages qui existent et qui sont dus à la transposition interne. Cette analyse est réalisée à l'aide de différents critères que nous présentons avant de passer à l'examen de chacun des trois couples manuel-cours ainsi qu'à une interprétation globale.

### 8.4.1 Critères d'observation

Comme nous nous situons dans notre travail dans l'approche anthropologique du didactique, nous décrivons les liens et les décalages entre les manuels et les cours en termes de notre MER. Les liens ou les décalages entre un manuel et un cours peuvent être caractérisés, d'après nous, en termes de *consistance* et d'*inconsistance*. Plus particulièrement, nous définissons ci-dessous nos deux critères qui visent avant tout à contrôler si les cours et les manuels sont proches les uns des autres.

**Consistance :** Est-ce que le cours s'inscrit dans la logique du manuel ? Par consistance, nous entendons la cohérence et la justesse de l'articulation entre le cours et le manuel sur le plan de la présentation des $OM$ locales élémentaires. Autrement dit, le cours et le manuel doivent former un tout cohérent. Au-delà, nous examinerons en quoi certains éléments du cours, tout en étant consistants, peuvent constituer un enrichissement ou un appauvrissement :

- **Enrichissement :** Le cours présente des éléments praxéologiques qui sont un enrichissement par rapport au manuel, c'est-à-dire qu'il ajoute des éléments praxéologiques par rapport au manuel qui sont en concordance avec celui-ci. Des exemples d'enrichissement sont : une tâche procédurale de type $T_{21}$ qui n'est pas travaillée dans le manuel, une tâche structurale qui est développé différemment dans le manuel, une technique qui est seulement effleurée dans le manuel, une technologie énoncée dans un autre registre, etc.

- **Appauvrissement :** Le cours ne présente pas ce qui est proposé dans le syllabus tout en restant consistant avec ce dernier, c'est-à-dire que le cours se permet d'omettre un élément praxéologique ce qui n'influencera ni la cohérence du cours, ni la consistance avec le manuel. Des exemples d'appauvrissement sont : l'omission de détails calculatoires qui peuvent être trouvés dans le manuel, l'omission d'une interprétation dans un autre registre, l'omission d'une technologie qui peut être trouvée dans le manuel, etc.

**Inconsistance :** Par inconsistance, nous entendons l'incohérence et la discordance de l'articulation entre le cours et le manuel sur le plan de la présentation des $OM$ locales élémentaires. Autrement dit, le cours et le manuel ne forment pas un tout cohérent. Plus précisément, parmi les éléments source d'inconsistance, nous distinguerons, les éléments appauvrissants des éléments qui se substituent à d'autres.

- **Appauvrissement :** Le cours ne présente pas ce qui est proposé dans le syllabus et devient ainsi inconsistant avec ce dernier, c'est-à-dire le cours se permet d'omettre un élément praxéologique ce qui influencera la cohérence du cours ou la consistance avec le manuel. Des exemples d'appauvrissement sont ici : l'omission d'une tâche structurale, d'une technique ou d'une technologie sans laquelle le processus didactique est compromis. Le manuel apparaît dans ce cas comme "plus développé" que l'$OM$ mise en place au cours.

- **Substitution :** Le cours remplace ce qui est proposé par le manuel par d'autres éléments praxéologiques. Le professeur substitue, par exemple, une tâche procédurale par une autre qui ne rend pas compte de tous les enjeux du thème étudié. Il peut encore remplacer des éléments praxéologiques, qui n'ont pas été rendus intelligibles dans le manuel, par d'autres qui ne permettent pas non plus de compléter la praxéologie du manuel.

### 8.4.2 Lien entre les cours et les manuels

Dans ce paragraphe nous relevons pour les trois cours leur lien respectif avec le manuel. Cette mise en commun entre le manuel et le cours aide à dégager l'$OD$ empirique selon les trois professeurs.

#### Lien entre ($C_{\textbf{UCL-Math}}$) et ($M_{\textbf{UCL-Math}}$)

Rappelons tout d'abord que le cours s'adresse à un public de futurs mathématiciens et que le professeur qui donne le cours est un des auteurs du manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$). Nous vérifions d'abord les critères de consistance et d'inconsistance :

**Consistance :** Le cours s'inscrit clairement dans la logique du manuel. Le manuel, tout comme le cours, a principalement deux objectifs : premièrement, démontrer le Théorème de Lagrange, et deuxièmement, illustrer le Théorème de Lagrange sur deux exemples concrets. La tâche structurale $T_{402}$ se fait de la même façon des deux côtés.

- **Enrichissement :** Le dessin présenté au début du cours réalise la tâche $T_{intro_1}$ qui n'a pas été travaillée dans le manuel. Ainsi, le résultat du Théorème de Lagrange est illustré graphiquement et nous retrouvons un moment d'élaboration de la technique de résolution. Cette discussion courte à propos de la technique associée à $T_{21}$ (et plus particulièrement à $T_1$) est absente dans le manuel.
  En ce qui concerne les tâches procédurales de type $T_{21}$, deux exemples qui ne sont pas repris par le manuel sont proposés aux étudiants et peuvent ainsi être considérés comme enrichissement.
- **Appauvrissement :** Aucun élément d'appauvrissement n'a été identifié.

**Inconsistance :** Nous trouvons un seul indicateur d'inconsistance dans le cours.

- **Appauvrissement :** Aucun élément d'appauvrissement n'a été identifié.
- **Substitution :** Le deuxième exemple du manuel, $t_{exem_2}$, est de type $T_{23}$. En présentant deux exemples de type $T_{21}$ au cours, nous disons que le professeur remplace la tâche de type $T_{23}$ par une de type $T_{21}$. Ainsi, il manque la possibilité de donner une justification plus complète du processus de modélisation ainsi que de la technique de résolution associés à $T_{23}$. En effet, le développement des tâches procédurales se fait de manière déconnectée du travail des quelques tâches structurales dans le manuel, en conséquence de quoi les techniques d'$OM_2$ ne sont rendues intelligibles que implicitement par les tâches structurales d'$OM_4$.

Ensuite, nous nous remémorons notre classification des manuels : le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$) est déductif et met en œuvre un mode d'intervention de la technique qui est ponctuel. Le mode d'intervention de la technique est retrouvé directement au cours. Seuls des tâches procédurales concrètes sont travaillées. Et bien que le cours ne soit pas entièrement "déductif" (car les tâches procédurales sont résolues avant le long moment de constitution de l'environnement technologico-théorique), nous retrouvons quand même cette tendance à séparer le procédural du structural qui est propre aux manuels déductifs. Ainsi, si nous considérons que l'exposé de l'énoncé du Théorème de Lagrange au début du cours clôture le premier moment technologico-théorique, alors cette simple présence de la Règle du multiplicateur de Lagrange, augmentée du Théorème des bornes atteintes, semble suffire pour fournir toute explication de la technique mise en pratique sur les deux exemples. Nous pouvons encore dire que l'activité de résolution des tâches est "banalisé" au cours car l'explication des aspects propres aux problèmes domine sur la justification du fonctionnement de la technique associée à ces problèmes, $t_{excours_1}$ et $t_{excours_2}$.

Suite à cette analyse, nous en arrivons à la conclusion que le cours ($C_{\text{UCL-Math}}$) est bien à l'image du manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$).

### Lien entre ($C_{\textbf{ULg-Éco}}$) et ($M_{\textbf{ULg-Éco}}$)

Rappelons tout d'abord que le cours s'adresse à un public de futurs économistes et ingénieurs de gestion et que le professeur qui donne le cours est l'auteur du manuel ($M_{\text{ULg-Éco}}$). Nous vérifions d'abord les critères de consistance et d'inconsistance [73] :

**Consistance :** Le cours s'inscrit parfaitement dans la logique du manuel. Nous remarquons d'ailleurs que les tâches structurales travaillées dans le manuel sont presque les mêmes que celles du cours.

- **Enrichissement :** Le manuel est plus riche en tâches procédurales et structurales que le cours. Cependant, un élément enrichissant dans le cours est l'exemple de Courant, tâche procédurale qui met en évidence l'importance de la condition de régularité. En effet, le manuel présente une autre forme de ce problème et le résout par la technique $\tau_{21}$. Au cours, l'exemple de Courant est résolu graphiquement.
- **Appauvrissement :** Comme mentionné ci-dessus, le manuel présente un discours plus exhaustif que le cours ce qui entraîne un appauvrissement du cours par endroit sans pour autant perdre en consistance. Ainsi, la définition d'un point régulier n'est pas (encore) fournie et la technique $\tau_{11}$ n'est pas mentionnée.

**Inconsistance :** Nous ne trouvons aucun indicateur d'inconsistance.

Ensuite, nous nous remémorons notre classification des manuels : le manuel ($M_{\text{ULg-Éco}}$) est inductif et met en œuvre un mode d'intervention de la technique qui est générique. Les deux qualificatifs sont retrouvés dans le cours. D'une part, le cours réalise le contact avec la nouvelle technique non seulement au travers d'exemples concrets mais aussi de symboles génériques. D'autre part, on observe une description du problème de départ (tâche procédurale) à partir duquel tout développement pratique et théorique démarre. En plus, le professeur est constamment à la recherche de justifications qui possèdent un pouvoir explicatif. Tout comme dans les manuels inductifs, il y a coexistence des tâches structurales et des interprétations du fonctionnement des techniques associées aux tâches procédurales et de leur résultat, nous retrouvons dans le cours une étude simultanée des moments d'élaboration de la technique et de constitution de l'environnement technologico-théorique.

73. Il est seulement possible de comparer la partie du manuel qui correspond aux 90 minutes de cours observés. En conséquence, nous ne tiendrons pas compte des tâches procédurales et structurales qui se rapportent à la matière non vue au cours.

Suite à cette analyse, nous en arrivons à la conclusion que le cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) est parfaitement à l'image du manuel ($M_{\text{ULg-Éco}}$).

#### Lien entre ($C_{\textbf{UNa-Éco}}$) et ($M_{\textbf{UNa-Éco}}$)

Rappelons tout d'abord que le cours s'adresse à un public de futurs économistes et ingénieurs de gestion et que le professeur qui donne le cours est le suppléant de l'auteur du manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$). Nous vérifions d'abord les critères de consistance et d'inconsistance [74] :

**Consistance :** À première vue, nous constatons que le cours est consistant avec le manuel. Cette consistance se manifeste d'ailleurs par des renvois explicites au manuel. En effet, à plusieurs reprises, le professeur rappelle que ce qui est présenté au cours peut être trouvé tel quel dans le manuel.

- **Enrichissement :** Le cours présente d'autres problème de type $T_{21}$ que ceux du manuel. Nous trouvons ainsi une tâche de type $T_{22}$, $t_{\text{distance}}$, que le professeur modélise mathématiquement en collaboration avec les étudiants (jeu questions-réponses). Un autre exemple présenté aux étudiants et non repris dans le manuel est la tâche $t_{excours_2}$.
- **Appauvrissement :** La technique de substitution ($\tau_{11}$ et $\tau_{24}$) n'est pas mentionnée au cours, or elle est brièvement évoquée dans le manuel pour motiver l'introduction du Théorème de Lagrange.

**Inconsistance :** Nous retrouvons certains indicateurs d'inconsistance qui nous font dire que le cours ne forme, par endroit, pas un tout cohérent avec le manuel.

- **Appauvrissement :** D'une part, le Théorème des fonctions implicites n'a pas été vu d'après ce que le professeur annonce aux étudiants. Or, c'est précisément ce théorème qui doit faire le lien entre le dessin présenté au tableau (voir Figure 8.4) et l'expression algébrique des pentes des tangentes. Il y a donc absence d'un élément technologique, ce qui compromet la compréhension de la technologie construite à cet endroit du cours. D'autre part, il y a absence d'une tâche structurale de type $T_{406}$ (et donc d'un impact sur le bloc technologico-théorique associé à $T_1$) au cours ce qui peut être considéré comme un appauvrissement. En effet, la simple présence de la stratégie pour identifier les candidats à être extremum ne rend pas intelligible les raisons pour lesquelles on doit identifier les points stationnaires de la contrainte séparément des points stationnaires de la fonction lagrangienne. Cette discussion, tâche de type $T_{406}$, est présente dans le manuel.
- **Substitution :** Le fait de remplacer des exemples concrets de tâches de type $T_{21}$ par d'autres a supprimé une discussion possible à propos de la technique $\tau_{22}$. En effet, la tâche procédurale $t_{exem_2}$ du manuel ouvre la porte à une présentation d'une technique alternative à la technique $\tau_{23}$ qui n'est pas prise en charge par le cours.

74. Il est seulement possible de comparer la partie du manuel qui correspond aux 2h de cours observés. Comme il est annoncé que le travail des tâches d'$OM_3$ et d'$OM_5$ se fait au cours suivant, nous ne tiendrons pas compte des tâches procédurales et structurales associées à ces $OM$ locales élémentaires.

Ensuite, nous nous remémorons notre classification des manuels : le manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$) est inductif et met en œuvre un mode d'intervention de la technique qui est générique. Les deux qualificatifs sont retrouvés dans le cours. D'une part, le cours réalise le contact avec la nouvelle technique non seulement au travers d'exemples concrets mais aussi de symboles génériques. D'autre part, on observe une description du problème de départ (tâche procédurale) à partir duquel tout développement pratique et théorique démarre. Tout comme dans les manuels inductifs il y a coexistence des tâches structurales et des interprétations du fonctionnement des techniques associées aux tâches procédurales et de leur résultat, nous retrouvons dans le cours une étude simultanée des moments d'élaboration de la technique et de constitution de l'environnement technologico-théorique.

Cependant, le cours ($C_{\text{UNa-Éco}}$) tend à faire passer les stratégies de résolution (techniques associées aux tâches $T_1$ et $T_2$) pour élément technologique qui délèguent alors les résultats des tâches structurales au second plan. Notre hypothèse est celle-ci. Comme le manuel considère les techniques de résolution - bien qu'elles soient rendues intelligibles - jusqu'à un certain point comme des procédures algorithmiques pour résoudre les différents problèmes, le professeur du cours renforce cette caractéristique puisqu'il est lui-même "utilisateur" du manuel comme les étudiants. Et bien que son rapport personnel au manuel ne soit pas le même que celui des étudiants, il est difficile de croire qu'il a le même rapport que l'auteur par rapport à ce manuel. Il présente alors une "reproduction" du manuel qui ne correspond pas forcément à sa propre logique et structuration du savoir à enseigner. En conséquence, nous supposons que les objectifs du cours de l'auteur ne sont probablement pas exactement les mêmes que ceux du professeur suppléant. Les indicateurs d'inconsistance semblent confirmer notre hypothèse.

Suite à cette analyse, nous en arrivons à la conclusion que le cours ($C_{\text{UNa-Éco}}$) est à l'image du manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$) en ce qui concerne le type de discours et le mode d'intervention de la technique. Quelques indicateurs d'inconsistance entre le cours et le manuel semblent relever néanmoins des décalages légers entre les deux.

#### Analyse globale

En conclusion, nous observons que notre classification des manuels s'applique encore à nos trois cours. Ainsi, nous obtenons le Tableau 8.2 suivant :

| | | Mode d'intervention de la pratique | |
|---|---|---|---|
| | | Ponctuel | Générique |
| Type | Déductif | ($C_{\text{UCL-Math}}$) | |
| | Inductif | | ($C_{\text{ULg-Éco}}$), ($C_{\text{UNa-Éco}}$) |

Tableau 8.2 – Différents styles de cours

Bien que nous mettions les deux cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$) dans la même catégorie, c'est-à-dire que nous y trouvions une construction globale du cours fort semblable, il nous semble important de relever qu'ils se distinguent par l'apport technologique.

Après ces quelques réflexions, nous arrivons enfin à l'évaluation de l'$OD$ empirique mise en place dans les différents cours.

# 8.5 Caractéristiques des $OD$

Pour commencer à caractériser les organisations didactiques présentes dans les institutions observées, nous avons décrit la manière dont une $OD$ réalise les différents moments de l'étude pour mettre en place une $OM$ déterminée. Or, cette réalisation des moments de l'étude est fortement déterminée par l'$OM$ qui est travaillée. Dans cette section nous augmentons la structuration des $OD$ en y ajoutant la prise en compte du type de conception des mathématiques qui est véhiculée au travers de l'$OD$. Cette classification permet de repérer chacune des $OD$ possibles par rapport à certaines propriétés de l'activité mathématique.

## 8.5.1 Différents modèles d'$OD$

Dans leur texte, Bosch et Gascón (2002, p.10) étudient les différentes façons possibles de concevoir dans une institution donnée "ce que sont les mathématiques". En plus, ils lient ces différents modèles à certains types d'$OD$ qui

> *se caractérisent par le fait d'attribuer une grande importance à quelques-uns des moments de l'étude au détriment de tous les autres - qui sont alors laissés généralement sous la seule responsabilité de l'élève ou de l'étudiant.* (Bosch & Gascón, 2002, p.10)

Ces différents modèles d'$OD$ peuvent être représentés dans un espace à trois dimensions où les axes sont définis respectivement par trois des moments de l'étude : le moment exploratoire, le moment du travail de la technique et le moment technologico-théorique. Chaque point de cet espace représente un type d'$OD$ possible comme illustré par la figure 8.5.

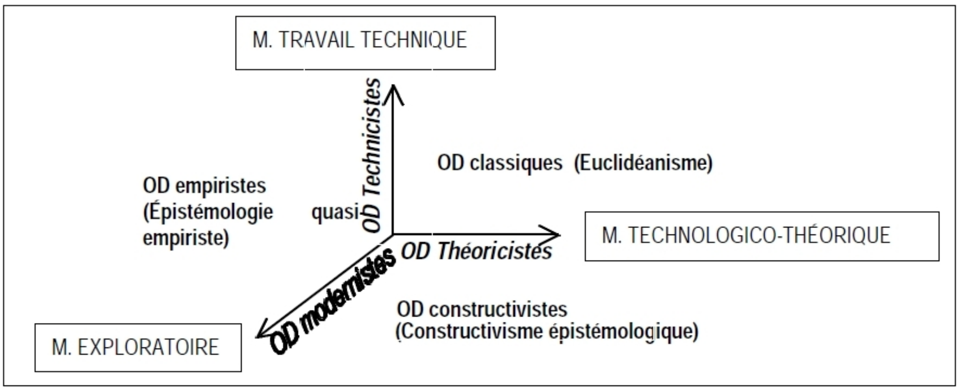



Figure 8.5 – "Espace" des organisations didactiques selon les moments dominants (Bosch & Gascón, 2002, p.12)

Sur chacun des axes les auteurs placent un type d'organisation didactique, dite unidimensionnelle. Leur nom est choisi car elles privilégient un seul moment de l'étude et accordent un rôle secondaire aux deux autres moments de l'étude. De cette manière, nous retrouvons les $OD$ idéales "théoricistes" (liées au moment technologico-théorique), "technicistes" (liées au moment du travail de la technique) et "modernistes" (liées au moment exploratoire).

Dans une *OD* purement théoriciste, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques sont identifiés à l'enseignement et l'apprentissage des théories mathématiques. Les *OD* technicistes mettent l'accent sur le moment du travail de la technique, c'est-à-dire sur les problèmes dont la séquence de techniques adéquates est connue et qui peuvent être résolus "algorithmiquement". Ces deux *OD* essaient donc de construire les connaissances mathématiques par une réduction des mathématiques à l'étude des théories (*OD* théoriciste), ou par une mise en œuvre de techniques rudimentaires (*OD* techniciste). Se rajoute à ces deux types d'*OD*, l'*OD* moderniste qui associe l'activité mathématique à l'exploration de problèmes "non banals" (c'est-à-dire des problèmes pour lesquels on doit construire une stratégie, élaborer la séquence de techniques adéquates afin de les résoudre). Cette organisation identifie "apprendre les mathématiques" avec "apprendre l'activité exploratoire de problèmes".

À un deuxième niveau, Bosch et Gascòn considèrent trois autres types d'*OD* qui se caractérisent par le fait de prendre en compte l'intégration de deux moments parmi les trois moments de référence. Ces *OD* se situent alors sur les plans de coordonnées (voir Figure 8.5). Nous obtenons les *OD* "classiques" qui combinent les moments technologico-théorique et de travail de la technique, "empiristes" qui intègrent les moments exploratoire et de travail de la technique et "constructivistes" qui prennent en charge, simultanément, les moments technologico-théorique et exploratoire.

Les *OD* classiques se caractérisent, d'après les auteurs, par une certaine trivialisation de l'activité de résolution de problèmes. Autrement dit,

> *l'activité mathématique se construit à partir de la donnée des définitions, axiomes et principaux théorèmes, le reste découlant "facilement" de ceux-ci. (Bosch & Gascón, 2002, p.11)*

Quant aux *OD* empiristes, elles attribuent un rôle prépondérant à l'activité de résolution de problèmes comme moteur de l'étude (moment exploratoire et moment de travail de la technique). Nous y trouvons aussi une considération de l'apprentissage des mathématiques comme un processus inductif qui se base sur l'imitation et la pratique. Enfin, les *OD* constructivistes

> *se caractérisent par le fait de contextualiser l'activité de résolution de problèmes en la situant dans une activité plus large de construction de connaissances. (Bosch & Gascón, 2002, p.12)*

Notons enfin l'existence de "modèles épistémologiques généraux" des mathématiques qui sont présents derrière ces différents types d'*OD*. Ces modèles viendront assumer la fonction du bloc technologico-théorique des praxéologies didactiques correspondantes que nous analysons. En effet, la façon dont une institution considère ce que sont les mathématiques et l'importance qu'elle attribue aux différentes dimensions de l'activité mathématique conduit à un ensemble de contraintes de niveau "théorique" qui auront une répercussion possible sur les *OD* qui peuvent exister dans cette institution.

> *Chacun de ces types généraux d'OD entre en cohérence avec un modèle épistémologique général des mathématiques, c'est-à-dire avec une manière particulière et relativement précise d'interpréter et de décrire ce qu'est l'activité mathématique [...]. Pour le dire autrement, chaque conception ou modèle épistémologique général des*

> *mathématiques va pouvoir être mis en correspondance avec une forme particulière de "mise en place des organisations mathématiques". Plus concrètement, nous pouvons en effet associer les OD classiques avec l'euclidianisme [...]; les OD empiristes vont correspondre aux modèles épistémologiques quasi empiriques (Lakatos, 1976) et les OD constructivistes aux modèles épistémologiques constructivistes.* (Bosch & Gascón, 2002, p.11)

### 8.5.2 Analyse des *OD* empiriques

Nous confrontons dans cette section les trois *OD* empiriques au "modèle de l'espace des organisations didactiques possibles" (Bosch & Gascón, 2002) et tirons des conclusions pour notre recherche.

#### $OD_{\textbf{UCL-Math}}$ : une organisation classique

L'*OD* observée dans le cours ($C_{\text{UCL-Math}}$), basé sur le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$), s'inscrit principalement dans un modèle d'"*OD* classique". En effet, nous retrouvons des caractéristiques selon lesquelles l'activité mathématique dans ce cours serait presque déterminée par le bloc technologico-théorique, d'où découleraient techniques et problèmes en tant que simples "applications" des définitions, axiomes et théorèmes. Nous disons encore que le travail des tâches structurales se fait de manière déconnectée du travail des tâches procédurales (séparation entre le procédural et le structural), ce qui fait du bloc technologico-théorique un ensemble de justifications qui ne laissent pas toujours percer le lien avec les techniques en question. Une autre particularité observée est le mode d'intervention de la technique qui est ponctuel dans cette *OD*. Comme le bloc technologico-théorique est considéré comme auto-suffisant pour rendre intelligible les techniques, seuls des problèmes concrets sont résolus en tant qu'applications. Enfin, notons que le manuel dans cette *OD* a été qualifié de "déductif".

#### $OD_{\textbf{ULg-Éco}}$ et $OD_{\textbf{UNa-Éco}}$ : des organisations constructivistes

Les organisations didactiques observées dans les cours ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$), basés respectivement sur les manuels ($M_{\text{ULg-Éco}}$) et ($M_{\text{UNa-Éco}}$), s'inscrivent principalement dans un modèle d'"*OD* constructiviste". En effet, nous retrouvons des caractéristiques selon lesquelles on peut dire que ces *OD* prennent en charge, simultanément, les moments technologico-théorique et exploratoire et se caractérisent ainsi par le fait de contextualiser l'activité de résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité en la situant dans une activité plus large de constitution de l'environnement technologico-théorique. Ceci est caractérisé par le fait que les *OD* lient le procédural au structural dans le sens où il y a intégration des types de tâches procédurales dans l'*OM* développée par un discours technologique cohérent qui est mis en place au travers de différentes tâches structurales. Nous disons encore que ces *OD* empiriques considèrent que

> *l'apprentissage est un processus actif de construction à partir d'acquis antérieurs et sous des contraintes déterminées.* (Bosch & Gascón, 2002, pp.10-11)

Enfin, notons que les manuels dans ces $OD$ ont été qualifiés d'"inductif".

Malgré ces caractéristiques communes, les analyses précédentes montrent que, au sein des $OD$ constructivistes, l'accent peut être porté de manière plus ou moins importante sur les moments technologico-théoriques. C'est ce que nous observons en comparant $OD_{\text{ULg-Éco}}$ et $OD_{\text{UNa-Éco}}$, la première développant nettement plus l'aspect technologique. Nous renvoyons le lecteur intéressé à nos analyses et comparaisons pour se convaincre des particularités de chacune des $OD$.

En guise de conclusion, nous observons que différentes organisations didactiques de la même discipline - l'analyse mathématique - et relatives au même objet - le Théorème de Lagrange - peuvent être assez dissemblables. Il semble même que l'$OD$ mise en place change de forme, qu'elle soit présentée à des futurs mathématiciens ou à des futurs économistes et ingénieurs de gestion. Maintenant, conclure que deux cours donnés dans des institutions différentes ne sont pas semblables ne suscite certainement pas un grand étonnement. À l'inverse, il est plus intéressant d'évoquer que, malgré les particularités relevées, nous avons mis la main sur quelques points communs entre les différentes $OD$ en mathématiques et en économie.

## 8.6 Expérimentation : "Jeu de rôle"

Dans cette section, nous étudions les rapports des étudiants de l'institution $I_{\text{UNa-Math-Bac3}}$ au Théorème de Lagrange. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux rapports que ces étudiants construisent vis-à-vis d'un manuel de cours afin d'observer la transposition interne de ce dernier d'un autre point de vue. Nous nous appuierons dans notre recherche sur un dispositif expérimental appelé "jeu de rôle" dans la littérature pédagogique.

Dans la première partie, nous donnons une explication de ce dispositif ainsi qu'une description de la démarche suivie lors de l'expérimentation. Quelques résultats tirés d'une analyse d'extraits vidéos sont l'objet de la deuxième partie. Ces résultats sont ensuite rattachés à notre typologie de comportement des différentes organisations didactiques.

### 8.6.1 Qu'est-ce qu'un jeu de rôle ?

Le jeu de rôle fait partie des méthodes actives de l'enseignement (Mucchielli, 1983 ; Noyé & Piveteau, 2000). Ces méthodes impliquent à la fois l'activité et l'initiative des étudiants. Mucchielli, auteur d'ouvrages sur la pédagogie active et l'enseignement des adultes, prétend qu'

> *on retiendrait 20% de ce que l'on entend mais 90% de ce que l'on dit en faisant quelque chose à propos de quoi on réfléchit et l'on est impliqué.* (Mucchielli, 1983, p.102)

Concrètement, le jeu de rôle consiste en la mise en scène d'une situation problématique impliquant des personnages ayant un rôle donné. En plus de son utilisation à des fins thérapeutiques, de formation personnelle ou de formation professionnelle, le jeu de rôle est encore invoqué comme méthode pédagogique. L'idée derrière le jeu de rôle est que des personnes, ici des étudiants, doivent se glisser dans la peau de personnages, se plonger dans une situation donnée et agir comme ils croient que ces personnages pourraient agir. À ce moment, l'objectif premier du jeu de rôles est, lorsqu'utilisé dans l'enseignement, l'apprentissage à propos des personnages et/ou de la situation par les étudiants-acteurs et les observateurs.

Conformément à l'objectif décrit ci-dessus, nous nous servons du jeu de rôle pour identifier les rapports que des étudiants construisent vis-à-vis du rôle du professeur, mais aussi vis-à-vis d'un manuel de cours (un savoir à enseigner). Nous espérons pouvoir :

1. Cerner l'état des connaissances à propos du Théorème de Lagrange chez les étudiants :
   – Quelles définitions retiennent les étudiants à propos de l'optimisation sous contraintes d'égalité ?
   – Quels moyens utilisent-ils pour expliquer et pour justifier le Théorème de Lagrange et les multiplicateurs de Lagrange ?
   – Quelle importance accordent-ils aux différents éléments praxéologiques intervenant dans les définitions, dans les explications, dans les théorèmes et dans les exercices relatifs au Théorème de Lagrange ?
2. Étudier la disponibilité des notions mentionnées ci-dessus chez les étudiants dans leur explications.
3. Observer les éventuelles difficultés que les étudiants rencontrent avec le Théorème de Lagrange (erreurs qui proviennent directement du Théorème de Lagrange et erreurs pouvant être dues à l'usage d'autres notions).

Mais nous nous servons également du jeu de rôle pour trouver des éventuels points en commun ou des décalages avec les modèles d'$OD$ identifiés dans les cours associés.

### Public choisi

Pour la réalisation de notre expérimentation, nous avons eu l'opportunité de bénéficier de la collaboration du public ($P_{\text{UNa-Math-Bac3}_{10/11}}$). Public privilégié dans notre contexte de recherche, ces étudiants suivent un cours obligatoire d'optimisation au premier quadrimestre de la troisième année qui inclut un travail de groupe (TG) en lien avec les notions vues et étudiées au cours théorique. Étant l'assistant en charge de ce travail de groupe, nous avons décidé de confronter ces étudiants à la problématique de l'enseignement du Théorème de Lagrange dans l'enseignement universitaire.

Leur programme de cours durant les deux premières années de formation reprend des cours variés qui visent à créer, à construire et à manipuler des objets mathématiques, dans un contexte d'hypothèses précises et de rigueur de raisonnement. Ainsi, en première année de bachelier, un cours de calcul différentiel et intégral à plusieurs variables introduit les problèmes d'optimisation sans contraintes. Dans le cadre d'un travail de groupe d'analyse durant l'année académique 2008-2009 (leur première année d'étude), ces étudiants ont déjà eu la possibilité de travailler sur le Théorème de Lagrange ainsi que sur ses applications. Ceci est important à mentionner car ce travail se trouvait à leur disposition comme source d'informations. L'énoncé de ce travail se trouve dans l'Annexe D.

En troisième année, le cours d'optimisation introduit, en particulier, les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker, la dualité en optimisation ainsi que les méthodes numériques d'optimisation. Notre expérimentation a eu lieu durant l'année académique 2010-2011.

### Description de la tâche

Nous avons distribué le travail à réaliser après que les étudiants aient vu les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker. Ils avaient 6 semaines pour le réaliser. L'objectif du travail était de réaliser une séquence de cours sur le Théorème de Lagrange. Cette séquence faisait l'objet d'un exposé de cours destiné à des étudiants en première année de bachelier et qui avait lieu, pour chacun des groupes, la dernière semaine de cours en décembre 2010. En particulier, les étudiants ont reçu les consignes suivantes :

> *En plus des consignes, vous avez reçu un extrait d'un manuel de cours. Il vous est demandé de vous baser sur ce manuel pour construire une séquence de cours, destinée à des étudiants de Bac 1, portant sur le théorème de Lagrange. On suppose que, avant cette séquence, les étudiants ont vu tous les développements nécessaires sur les extrema libres. En plus de la séquence, il vous est demandé de rédiger toutes les questions que vous vous êtes posées, les choix que vous avez faits, les raisons qui vous ont poussés à faire ces choix, les problèmes que vous avez rencontrés, la documentation que vous avez consultée, .... En bref, vous devez expliquer tout le cheminement qui a mené à la séquence de cours que vous proposez.*
> *Mettez-vous dans la peau d'un professeur qui doit enseigner cette matière pour la première fois !*

Nous avons également distribué une liste d'exercices.

> *Parmi les exercices suivantes, ciblez le ou les (type d') exercices qui vous semble(nt) convenir à votre cours. Le(s)quel(s) choisiriez-vous pour les donner à l'assistant du cours à faire en TD ? Quelles sont les raisons de votre choix ? Donnez une justification pour chacun des types d'exercice dans le document d'accompagnement.*
> *Est-ce qu'il y a des exercices qui vous manquent parmi les trois exercices proposés ? Des éléments de la matière qui ne sont pas recouverts ? Des exercices qui sont mal formulés ? etc.*
>
> 1. *Trouvez les valeurs maximales et minimales de la fonction $f(x, y, z) = 4 - z$ lorsque les points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartiennent à l'intersection du plan $x+y+z = 1$ et du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 8$.*
> 2. *Une firme fabrique dans deux usines différentes un produit. Soit $q_1$ (respectivement $q_2$) le nombre de produits fabriqués dans la première (respectivement la seconde) usine. Le coût de production pour chaque usine est donnée par la fonction $C_1 = 200+6q_1+0.03q_1^2$ pour la première usine et $C_2 = 150+10q_2+0.02q_2^2$ pour la seconde. L'entreprise veut livrer 100 unités de son produit. La livraison lui coûte 4 euros par article depuis la première usine et 2 euros depuis la seconde usine. Quelles sont les quantités $q_1$ et $q_2$ qui minimisent le coût total ? Quelle est (approximativement) la valeur minimale du coût total si la firme désire livrer 101 unités au lieu de 100 ?*

3. *Déterminez les extrema (maxima et minima) locaux de la fonction* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *sous la contrainte*

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy = 18$$

*Précisez dans chaque cas la valeur optimale de* $f$*.*

Dans la suite nous référons respectivement aux notations $t_{E_1}$, $t_{E_2}$ et $t_{E_3}$ pour parler de ces trois exercices.

Les étudiants ont été repartis en 6 groupes (3 groupes de 2 et 3 groupes de 3 personnes) travaillant chacun sur un des manuels suivants :

($M_{\textbf{UCL-Math}}$) (Ponce & Van Schaftingen, 2010) "Analyse mathématique 2 - Fonctions de variables vectorielles" (Université de Louvain-la-Neuve, Belgique)

($M_{\textbf{UNa-Éco}}$) (Thiry, 2006) "Mathématiques pour l'économie et la gestion I" (Université de Namur, Belgique)

($M_{\textbf{ULg-Éco}}$) (Bair, 2003) "Analyse mathématique" (Université de Liège, Belgique)

Les manuels ($M_{\text{UNa-Math}}$) et ($M_{\text{LSE-Éco}}$) n'ont pas été distribués aux étudiants : le premier parce qu'il s'agit de la source sur laquelle ces étudiants ont travaillé en première année, le deuxième parce qu'il est en anglais. En plus, les trois manuels choisis correspondent aux trois cours que nous avons observés. Au total nous avons eu deux exposés de cours par manuel. La durée maximale de l'exposé était fixée à 90 minutes au moment de la présentation orale.

Tous les exposés de cours ont été filmés et ont fait l'objet d'un questionnaire visant à identifier les questions que les étudiants se sont posées, les choix qu'ils ont faits et les raisons qui les ont poussées à faire ces choix ainsi que les problèmes qu'ils ont éventuellement rencontrés. Voici les questions posées :

1. *Précisez dans quel cadre vous avez présenté le cours ! (cours, public, prérequis, niveau, ...)*
2. *Quels sont les objectifs principaux que vous vouliez atteindre ?*
3. *Que vouliez-vous que les étudiants retiennent de votre leçon ?*
4. *Quel intérêt accordez-vous au fait de démontrer le Théorème de Lagrange ? Qualifieriez-vous la preuve plutôt de*

   *intuitive, abstraite, complète, explicative, justificative, rigoureuse, géométrique, analytique,... ?*

   *Justifiez votre réponse ! (Plusieurs adjectifs possibles)*
5. *Quel intérêt voyez-vous dans la présentation d'une résolution complète d'un problème d'optimisation (sous contraintes d'égalité) ?*
6. *Si tel est le cas, pourquoi avez-vous décidé de commencer par un exemple ?*
7. *Qu'est-ce que pour vous le(s) "multiplicateur(s) de Lagrange" ?*
8. *Pourquoi la condition de régularité est-elle importante ? Où intervient-elle ?*

*Expliquez toutes vos réponses avec un minimum de phrases !*

**Hypothèses d'observation**

Nous formulons dans cette section les hypothèses d'observation à propos de notre jeu de rôle :

1. L'étudiant prend le rôle du professeur en charge de la transposition interne. Cependant, il n'a pas rédigé le manuel sur lequel se base son cours. La place de l'étudiant peut donc être rapprochée de la place d'un suppléant de cours. Notons que ce n'est pas pour autant que l'étudiant est un suppléant de cours. Étant toujours "en formation", l'étudiant n'a en effet pas les mêmes connaissances de base et le même recul qu'un professeur académique.
2. Les connaissances que les élèves mettent en place lors du jeu de rôle sont, en premier lieu, les éléments de la matière qu'ils ont compris et qu'ils restituent en conséquence.
3. Les obstacles rencontrés sont traités de deux façons différentes : soit, la matière en jeu est jugée importante et les étudiants y insistent au cours (en soulevant oralement la difficulté, en présentant différentes approches, en fournissant des explications chronophages, etc.), soit, la matière est omise (en faisant le renvoi à d'autres institutions, en laissant tomber car jugée ne figurant pas parmi les objectifs du cours, etc.).
4. Le cours que les étudiants mettent en place reflète leur formation personnelle.

### 8.6.2 Description des extraits vidéos

Nous décrivons dans cette section le déroulement global des six cours que les étudiants ont présentés. Cette description se réalise au moyen des six moments de l'étude (Chevallard, 1999) qui correspondent au types de situations permettant de diriger l'étude d'une organisation mathématique déterminée. Nous chercherons donc à déterminer dans quelle mesure ces six moments sont présents dans les organisations didactiques. Par endroit, nous relevons des moments particuliers qui nous semblent intéressants pour notre analyse du savoir enseigné.

**Séquences de cours basées sur le manuel ($M_{\textbf{UCL-Math}}$)**

Les étudiants qui ont travaillé sur le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$) ont fait des présentations respectivement de 70 et 65 minutes.

*Groupe 1*
Les étudiants mettent en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. Un moment de présentation du plan de cours et de rappels (11'30) qui comprennent la définition des extrema locaux et globaux ainsi que d'un point critique, les conditions nécessaire d'optimalité du premier et du second ordre ainsi que la condition suffisante d'optimalité du second ordre pour les problèmes sans contraintes.
2. Un moment de première rencontre avec les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité au travers de l'exercice $t_{E_2}$ (4'50). Cet exercice de minimisation

d'un coût total est résolu par la méthode de substitution ($\tau_{24}$). Les enjeux de la séance sont présentés comme étant résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité ($T_2$) ainsi que justifier la Règle des multiplicateurs de Lagrange ($T_{402}$).

3. Un moment de première rencontre avec les problèmes d'optimisation de type $T_{21}$ qui aboutit aux définitions des extrema sous contraintes. La technique $\tau_{25}$ est mentionnée comme méthode graphique de résolution qui atteint vite ses limites. Le Théorème de Lagrange est annoncé comme méthode analytique de résolution (5'00).
4. Un long moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{21}$ (19'00), à savoir prouver le Théorème de Lagrange (réalisation de la tâche $T_{402}$ par une preuve qui vérifie ($\theta_{131}$)).
5. Un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{21}$ qui permet de faire le lien entre les multiplicateurs de Carathéodory et les multiplicateurs de Lagrange (4'30) ainsi que de définir la fonction lagrangienne (2'00) (tâches de type $T_{406}$, $T_{401}$, $T_{403}$ et $T_{408}$).
6. Un moment de travail de la technique associée à la tâche $t_{E_1}$ (6'30).
7. Un moment plus long de travail de la technique associé à la tâche $t_{E_2}$ qui aboutit sur une explication du multiplicateur de Lagrange en tant que coût marginal ($T_{32}$ et $T_{51}$) (9'10).

En particulier nous relevons les moments suivants. Ayant vu la méthode de substitution en première année d'étude, les étudiants motivent l'introduction du Théorème de Lagrange en mentionnant la portée limitée de la technique de substitution. Ils font de même avec la méthode de résolution graphique. Comme le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$) ne reprend pas ces techniques, nous émettons l'hypothèse que les étudiants cherchent à justifier l'introduction du Théorème de Lagrange.

Une fois le théorème énoncé, les étudiants passent à la preuve de celui-ci :

> *On est au cours d'analyse. On va donc faire une petite démonstration. Sinon ce n'est pas drôle.* (25:21)

Nous obtenons un aperçu de l'importance que les étudiants accordent au fait de démontrer des résultats mathématiques dans un deuxième commentaire à la fin de la preuve du lemme.

> *C'est long et fastidieux. Refaites-le et vous verrez que ça marche. Et on peut enfin mettre les quatre lettres* [cqfd] *qu'on aime beaucoup.* (35:13)

Le premier objectif est de justifier le Théorème de Lagrange, le deuxième est de présenter l'utilité de celui-ci dans la résolution de tâches de type $T_2$. Cette utilisation du Théorème de Lagrange ne découle, d'après les étudiants, pas directement de la formulation du théorème dans le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$). Les étudiants font alors le lien avec l'énoncé du théorème vu en première année de bachelier.

> *Alors, le théorème comme ça, il est bien joli et on l'a démontré. Mais on ne voit pas immédiatement à quoi il nous sert. On va en fait voir qu'il y a une autre manière de réécrire ce théorème qui permettra, en tout cas pour les exercices, d'interpréter plus facilement les résultats que la méthode, justement, avec les dérivées directionnelles.*

> *Donc, on va réécrire ce théorème en termes des dérivées classiques, c'est-à-dire le gradient. Donc, je réécris - c'est le même théorème, c'est toujours le théorème des multiplicateurs de Lagrange.* (44:33)

Il faut dire que ces étudiants n'ont pas été familiarisés avec le concept de dérivée directionnelle comme le public auquel s'adresse le cours ($C_{\text{UCL-Math}}$). Cela peut entraîner les difficultés que nos étudiants éprouvent pour présenter l'utilité du Théorème de Lagrange. D'ailleurs, entre (49:00) et (51:50), les étudiants présentent le lien qui existe entre les multiplicateurs de Carathéodory et les multiplicateurs de Lagrange et s'embrouillent légèrement. En jouant le rôle du professeur, ils promettent d'y regarder pour le cours prochain afin de donner une explication correcte et claire.

Avant d'appliquer la règle des multiplicateurs de Lagrange sur une exemple et après avoir introduit le concept de la fonction lagrangienne, les étudiants énoncent la technique :

> *Donc, on a en fait que la contrainte de Lagrange c'est la même chose que d'annuler le gradient du lagrangien. Dans les exercices, qu'est-ce qu'on va faire ? On écrit le lagrangien, on égale le gradient du lagrangien à 0 et on doit avoir que l'on doit vérifier les contraintes. Donc on rajoute $g(x) = 0$ et en résolvant ce système-ci* [l'étudiant pointe le système d'équations à résoudre] *on va trouver le minimum. Attention, on trouve comme ça des candidats pour être minimum puisque toute à l'heure dans le théorème [...] on a écrit "Si on a un minimum, alors la contrainte* [de Lagrange] *est vérifiée". Donc si la contrainte est vérifiée, alors on a des points qui pourraient éventuellement être des minima ou des maxima. Et on pourra le vérifier directement en prenant la valeur de la fonction et trouver que le tel est le minimum ou le maximum ou utiliser encore d'autres méthodes pour vraiment démontrer qu'il s'agit d'un minimum. Bon, maintenant qu'on a la technique, on va prendre un exercice.* (54:19)

À nouveau, la technique n'a pas été énoncée telle quelle dans le manuel. Or, les étudiants ressentent le besoin de la mettre en avant avant de commencer la résolution d'exercices. Il leur semble donc important de présenter le lien entre la technique et sa technologie affirmant que l'énoncé du théorème tout seul n'est pas "auto-suffisant" pour justifier la procédure de résolution. En ce qui concerne le repérage des solutions parmi les candidats à être solution dans l'exercice $t_{E_1}$, les étudiants effectuent une comparaison des valeurs de la fonction objectif en ces points. Cette technique ressemble à la technique $\tau_{21}$, mais où aucune preuve de l'existence des extrema n'a été donnée préalablement.

> *On a trouvé très facilement le minimum et le maximum de notre fonction sans passer par des calculs trop compliqués, il suffit de dériver, d'égaler à 0 et de résoudre des petits systèmes. Ce n'est jamais bien méchant !* (26:10)

Quant à l'exercice $t_{E_2}$, le point stationnaire de la fonction lagrangienne est jugée solution du problème car il correspond à la solution obtenue par la méthode de substitution.

Dans les questionnaires distribués aux étudiants ayant participé au jeu de rôle, nous retrouvons d'ailleurs que

> *les étudiants* [qui assistaient au cours] *devaient retenir de ce cours une méthode de résolution.*

Le rôle qu'occupe la preuve du théorème dans leur cours est le suivant :

> *Le théorème et sa démonstration amenaient un cadre théorique valable à l'introduction d'une nouvelle méthode de travail.*

Il est donc clair que le théorème est vu comme élément du bloc technologico-théorique. Cependant, les commentaires mentionnés ci-dessus montre qu'il leur est important de démontrer des résultats mathématiques lorsqu'on s'adresse à un public de mathématiciens, c'est-à-dire de réaliser des tâches structurales. Il semble d'ailleurs que l'activité de démontrer occupe, d'après eux, une place importante dans l'univers mathématique, et, de ce fait, se trouve au cœur de la réalité des étudiants qui sont confrontés à des mathématiques.

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches d'$OM_2$ et d'$OM_4$ sont travaillées. Les tâches d'$OM_1$ ne sont pas mentionnées explicitement et sont considérées comme faisant partie de l'$OM_2$. D'ailleurs, résoudre une tâche d'$OM_2$ revient quasi à résoudre uniquement la tâche d'$OM_1$ associée d'après le cours des étudiants. À la fin du cours, mention est faite par rapport aux organisations mathématiques locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$. Ceci est dû à la présence d'une tâche d'$OM_3$ dans l'exercice $t_{E_2}$ que nous avons proposé dans l'énoncé du travail de groupe. En rapport avec les moments de l'étude, le cours des étudiants est focalisé sur les moments de constitution d'un environnement technologico-théorique et de travail de la technique. Bien que quelques remarques soient destinées à faire le lien entre les blocs practico-technique et technologico-théorique, il y a une séparation nette entre les tâches procédurales d'$OM_2$ et les tâches structurales d'$OM_4$. C'est pourquoi nous disons encore que les étudiants ont mis en place une "$OD$ classique".

*Groupe 2*
Les étudiants mettent en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. Un moment de présentation du plan de cours et de rappels (10'00) qui comprennent la définition des extrema locaux et globaux, le Théorème de Bolzano-Weierstrass, les conditions nécessaire d'optimalité du premier et du second ordre tout comme la condition suffisante d'optimalité du second ordre pour les problèmes sans contraintes.
2. Un moment de première rencontre avec les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité au travers d'une tâche de type $T_2$ (1'40). Cet exercice de minimisation est résolu par la méthode de substitution ($\tau_{24}$). Cependant, la portée limitée de la technique est mise en avant pour introduire le Théorème de Lagrange.
3. Un long moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{21}$ (16'00), à savoir prouver le Théorème de Lagrange (réalisation des tâches de type $T_{402}$ (par une preuve qui vérifie : $\theta_{131}$) et de type $T_{401}$).
4. Un moment plus long de travail de la technique associé à la tâche $t_{E_2}$ (13'30).
5. Un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{32}$ (3'40), à savoir démontrer la propriété concernant l'interprétation des multiplicateurs de Lagrange (réalisation d'une tâche de type $T_{52}$), ce qui permet aussi de définir la fonction lagrangienne ($T_{403}$ et $T_{409}$).
6. Un moment de travail de la technique associé à l'exercice introductif qui aboutit à la réalisation d'une tâche de type $T_{407}$ à l'aide d'un contre-exemple (9'00).

En particulier nous relevons les moments suivants. Après avoir fourni différents rappels et présenté une première tâche introductive de type $T_{21}$, les étudiants énoncent le Théorème de Lagrange. Cet énoncé est accompagné du commentaire suivant :

> *Donc, on voit que l'intérêt de ce théorème, c'est vraiment de trouver des candidats. Mais il n'y a pas bon théorème qui ne se démontre pas. Et donc, on va le démontrer.* (13:34)

Pour rechercher les candidats à être extremum d'un problème d'optimisation, les étudiants présentent le Théorème de Lagrange. Sans plus d'explications, nous disons encore que l'ostension du théorème leur suffit pour rendre intelligible la technique associée à la recherche des candidats. Enfin, la démonstration prend le rôle ultime de rendre le théorème intelligible. De l'énoncé du théorème ainsi que de sa preuve découle une application à l'optimisation sous contraintes d'égalité.

> *Pour vous montrer que le Théorème de Lagrange n'est pas seulement un beau théorème pour les mathématiciens, on va faire une application économique qui se trouve dans votre recueil d'exercices.* (29:50)

L'exercice mentionné dans le commentaire ci-dessus est la tâche $t_{E_2}$. Après avoir identifié les candidats à être extremum, les étudiants mentionnent l'insuffisance de ce théorème seul pour pouvoir résoudre le problème.

> *Notre Théorème de Lagrange [...] nous donne les candidats, mais pas les minima et les maxima nécessairement. Donc il faut vérifier si c'est bien un minimum. Pour cela, on va calculer la matrice Hessienne de la fonction $f$.* (41:51)

Nous constatons ici que le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$) n'était pas suffisamment explicite pour expliquer aux étudiants l'étape du repérage des solutions parmi les candidats à être extremum. En effet, les étudiants ont recours à la technique de repérage des problèmes d'optimisation sans contraintes, technique qu'ils connaissent bien mais qui n'est pas appropriée dans le cas des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. Nous retrouvons donc une trace de la "banalisation" des tâches procédurales dans le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$). La présence de deux tâches procédurales, où la simple présence de la Règle du multiplicateur de Lagrange semble suffire pour fournir toute explication de la technique, ne rend pas la technique de repérage accessible aux étudiants qui se rabattent alors sur une technique développée antérieurement.

Un comportement semblable peut être observé lors du moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_3$. Le manuel ($M_{\text{UCL-Math}}$) ne travaille aucune tâche des organisations mathématiques $OM_3$ et $OM_5$. La tâche de type $T_{32}$ dans l'exercice $t_{E_2}$ pousse les étudiants alors à réaliser une tâche structurale de type $T_{52}$, tâche qui n'est pas résolue correctement (au sens mathématique du terme). La réification du concept du multiplicateur de Lagrange en tant qu'objet ne semble pas être facile si aucune aide extérieure n'est fournie.

Dans les questionnaires distribués aux étudiants ayant participé au jeu de rôle, nous retrouvons que les étudiants voulaient

> *démontrer le Théorème de Lagrange et montrer une application pratique.*

À la fin du cours,

> *les étudiants doivent savoir résoudre un problème simple avec la méthode présentée. Ils doivent avoir compris le preuve et nous avons insisté qu'ils savent que le Théorème de Lagrange n'est pas une condition nécessaire et suffisante.*

Concernant le rôle de la preuve au cours, ils mentionnent que

> *c'est important de voir d'où vient un résultat si important de ne pas devoir l'accepter sans preuve.*

La présentation d'une résolution complète d'un problème d'optimisation est motivée par une intention de

> *comprendre les étapes suivies et ne pas juste avoir la solution qui tombe de nulle part.*

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches d'$OM_2$ et d'$OM_4$ sont travaillées dans ce cours. Les tâches d'$OM_1$ ne sont pas mentionnées explicitement, mais font partie intégrante de la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. Vers la fin du cours, les étudiants travaillent brièvement des tâches issues des organisations mathématiques locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$. Ceci est notamment dû à la présence d'une tâche d'$OM_3$ dans l'exercice $t_{E_2}$ que nous avons proposé dans l'énoncé du travail de groupe. En rapport avec les moments de l'étude, le cours des étudiants est focalisé sur les moments de constitution d'un environnement technologico-théorique et de travail de la technique. Comme, en plus, les tâches structurales sont présentées avant les tâches procédurales et constituent alors le bloc technologico-théorique associé à $T_2$ sans donner beaucoup plus d'explications, nous disons que les étudiants ont mis en place une "$OD$ classique".

### Séquences de cours basées sur le manuel ($M_{\textbf{ULg-Éco}}$)

Les étudiants qui ont travaillé sur le manuel ($M_{\text{ULg-Éco}}$) ont fait des présentations de respectivement 70 et 75 minutes.

*Groupe 1*
Les étudiants mettent en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. Un moment de présentation du plan de cours et de première rencontre avec les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité au travers d'une tâche de type $T_2$ (5'30). Cet exercice de minimisation est résolu par la méthode de substitution ($\tau_{24}$). La portée limitée de la technique est mise en avant pour introduire le Théorème de Lagrange (4'50). Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sont rappelées.
2. Un moment de présentation des définitions des extrema locaux et globaux sous contraintes (6'00).
3. Un long moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{21}$, à savoir prouver, entre autres, le Théorème de Lagrange (réalisation d'une tâche de type $T_{402}$). Tout d'abord, une interprétation graphique du théorème est présentée ($T_{413}$) (2'20) suivie d'une démonstration par l'absurde dans le cas des fonctions à 2 variables sous une seule contrainte d'égalité (7'30). Cette justification invoque une approche par "courbes de niveau tangentes". Ensuite, des remarques à propos de la condition de régularité sont données ($T_{406}$) (4'10). Enfin, la généralisation du Théorème de Lagrange dans le cas de $n$ variables sous $m$ contraintes d'égalité est énoncée et la fonction lagrangienne est définie ce qui permet de lier l'approche

standard à l'approche par fonction lagrangienne (tâches de type $T_{401}$, $T_{403}$, $T_{408}$ et $T_{410}$)(5'50).

4. Un moment d'élaboration de la technique associée à $T_1$, appelée "Règle de sélection" (7'30).
5. Un moment de travail de la technique associé à deux tâches de type $T_{21}$ (19'00).
6. Un moment d'élaboration de la technique associée à $T_{32}$ qui se juxtapose à un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé ($T_{51}$).

En particulier nous relevons les moments suivants. Le groupe 1 introduit son cours de la façon suivante.

> *Bonjour à tous. Comme je vous ai annoncé la semaine passée, aujourd'hui nous allons voir un chapitre qui est assez important, qui vous sera fort utile pour vos prochaines études. Alors, pour ce chapitre il n'y aura qu'une seule démonstration qu'on vous demande, bien entendu, de connaître pour l'examen. Mais ce qui est vraiment important c'est que vous compreniez vraiment bien ce qu'on fait et que vous puissiez l'expliquer vous-même avec vos propres mots si vous tombez sur cette question à l'examen et que vous puissiez appliquer les différentes méthodes que nous allons voir.* (0:00)

En quelque sorte, les étudiants précisent ce qu'il faudra retenir de leur leçon. L'introduction du chapitre sur l'optimisation sans contraintes porte sur les problèmes que l'on peut rencontrer dans la vie de tous les jours :

> *Alors en fait, le but du cours d'aujourd'hui, ça va être de déterminer les maximums ou les minimums d'une fonction avec des contraintes [...] Donc, en fait, ce problème est un problème assez récurrent dans notre vie actuelle [...]* (1:17)

Il est clair que les étudiants visent les tâches de type $T_2$. Après la première rencontre de l'exemple introductif, les étudiants résolvent cet exercice à l'aide de la technique de substitution. Cependant, à la fin ils remarquent que

> *cette méthode n'est pas... est risquée parce qu'on peut oublier des conditions. En plus, si on a beaucoup de variables ou si les contraintes sont trop compliquées, ça peut devenir difficile à isoler ou séparer. C'est pourquoi on verra la méthode des multiplicateurs de Lagrange.* (9:55)

L'interprétation graphique du théorème est suivie d'une preuve par l'absurde qui n'utilise pas le Théorème des fonctions implicites. Pour éviter le Théorème des fonctions implicites, les étudiants se limitent également au cas des problèmes à deux variables sous une seule contrainte.

> *La méthode de Lagrange va généraliser ce résultat pour une fonction à $n$ variables si on considère qu'on a $m$ contraintes [...] Cependant, on ne va pas voir cette démonstration parce qu'elle est un tout petit peu trop compliquée.* (25:33)

La constitution de l'environnement technologico-théorique aboutit à la présentation de la technique associée à $T_1$. Néanmoins, pour résoudre le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité cette "Règle de sélection" n'est pas suffisante.

> *Quand on a trouvé tous les candidats, il faut classer ces points afin de déterminer leur nature. Il va exister trois cas possibles [...] Et alors, avec les exemples qu'on va faire on va vous montrer comment on peut voir si on a un minimum, un maximum ou si on n'a rien du tout.* (42:58)

Le travail de la technique se réalise alors à l'aide de deux tâches de type $T_{21}$. Comme ils n'était pas demandé explicitement dans le travail de présenter de façon détaillée les méthodes pour repérer les solutions parmi tous les candidats à être extremum, les étudiants se contentent de résumer oralement, après la résolution des exercices, les deux techniques de type $\tau_{21}$ et $\tau_{22}$.

Enfin, les étudiants construisent le bloc technologico-théorique associé à $T_{32}$ à l'aide d'une tâche de type $T_{32}$. Nous avions qualifié le manuel ($M_{\text{ULg-Éco}}$) d'inductif et nous observons cette même tendance chez les étudiants en ce qui concerne l'enseignement des multiplicateurs de Lagrange. En effet, les étudiants "construisent" la signification du multiplicateur de Lagrange. Les étudiants annoncent cette fin avec ces mots :

> *Pour finir on va vous expliquer à quoi correspond le multiplicateur de Lagrange avec un exemple en économie. Parce que c'est surtout en économie qu'on essaie de savoir ce que veut dire vraiment le multiplicateur de Lagrange.* (63:42)

Dans les questionnaires distribués aux étudiants ayant participé au jeu de rôle, nous retrouvons que les étudiants voulaient

> *surtout que les élèves comprennent bien comment fonctionne cette méthode. C'est pourquoi nous avons développé plusieurs exemples.*

Cet objectif du professeur se traduit, du côté des élèves, par une volonté

> *que les élèves soient capables de résoudre des problèmes d'optimisation de contraintes.*

Nous observons que les étudiants visent la maitrise du bloc technologico-théorique (au travers de réalisations de tâches structurales) mais que c'est la résolution de tâches procédurales qui est, d'après les étudiants, l'indicateur approprié pour évaluer ces connaissances.

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches d'$OM_2$ et d'$OM_4$ sont travaillées dans ce cours. Les tâches d'$OM_1$ sont mentionnées explicitement, mais résolues seulement à l'intérieur de la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité. Vers la fin du cours, les étudiants travaillent brièvement des tâches issues des organisations mathématiques locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$. En rapport avec les moments de l'étude, nous distinguons la partie du cours à propos des organisations $OM_2$ et $OM_4$, qui est focalisée sur les moments de constitution d'un environnement technologico-théorique et de travail de la technique, mais qui explore aussi les tâches d'$OM_1$ avant de réaliser ce travail de la technique, de la fin du cours qui est basée plutôt sur un moment exploratoire mélangé à un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{32}$. Nous disons encore que les étudiants ont mis en place une "$OD$ constructiviste".

*Groupe 2*

Les étudiants mettent en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. Un moment de première rencontre avec les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité au travers de l'exercice $t_{E_2}$ (2'00) qui est suivi de rappels et de définitions qui déterminent l'environnement du Théorème de Lagrange (13'45). L'enjeu de la séance est présenté comme étant la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité ($T_2$).
2. Un moment de travail de la technique $\tau_{24}$ (9'45), suivi de quelques explications à propos du Théorème des fonctions implicites (5'20).

3. Un long moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$ au travers des tâches de type $T_{401}$, $T_{402}$, $T_{406}$, $T_{410}$ et $T_{413}$ (21'12). La fonction lagrangienne est définie également et le lien entre l'approche standard et l'approche par fonction lagrangienne est établi ($T_{403}$ et $T_{409}$) (4'00).
4. Un bref moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{32}$ (par une tâche de type $T_{51}$)(2'30).
5. Un moment de travail de la technique associé aux tâches $t_{E_2}$ et $t_{E_3}$ (17'30).

En particulier nous relevons les moments suivants. Notons tout d'abord que les étudiants passent 5 minutes à expliquer le concept des courbes de niveau parce qu'elles "jouent un rôle important dans la démonstration". Ces explications sont suivies d'un moment de travail de la technique de substitution qui est présentée comme une méthode de "résolution intuitive". D'ailleurs, la substitution

> *est dangereuse car elle n'est pas systématique. D'abord, il faut faire attention de bien considérer tous les cas [...] En plus, elle n'est pas parfaite, c'est une procédure qu'on ne peut pas appliquer tout le temps.* (24:00)

Le Théorème des fonctions implicites reçoit également une attention particulière

> *parce qu'il aura une grande importance pour la démonstration du Théorème de Lagrange.* (25:40)

D'ailleurs, la condition de régularité du Théorème de Lagrange est présentée comme étant "l'hypothèse super importante du Théorème des fonctions implicites".

En ce qui concerne la justification du Théorème de Lagrange, les étudiants annoncent le plan suivant :

> *On va le démontrer à deux dimensions d'abord. En fait, c'est généralisable, la démonstration qu'on va faire [...] et on va le faire de deux façons différentes. On va d'abord le faire d'un point de vue géométrique et puis d'un point de vue plus mathématique.* (32:30)

Dans le commentaire qui précède il faut comprendre "géométrique" par graphique et "mathématique" par analytique. Notons encore que les étudiants définissent, à la fin du moment de constitution du bloc technologico-théorique associé à $T_1$, le multiplicateur de Lagrange comme variable de la fonction lagrangienne et qu'ils présentent la signification de ce dernier ($T_{51}$).

Après avoir présenté la technique qui permet de trouver les candidats à être extremum, les étudiants énoncent le Théorème du Hessien bordé pour enchaîner directement avec la résolution de deux exercices de type $T_{21}$ et $T_{22}$, à savoir $t_{E_2}$ et $t_{E_3}$. Il faut relever le moment suivant :

> *Donc, oui, on demandait aussi le cas où on a 101 unités au lieu de 100. Le Hessien bordé ne bouge pas, ce sera le même, et si on fait les calculs, ben, il y a juste, on change le 100 en 101. Et là, on trouve* [l'étudiant note la solution au tableau] (64:26)

Bien que les étudiants aient présenté la signification du multiplicateur de Lagrange, ils ne l'appliquent pas pour répondre à cette question de type $T_{32}$. Il nous semble que la réification du concept de multiplicateur de Lagrange n'a pas encore eu lieu chez les étudiants de ce groupe au moment de la présentation.

Dans les questionnaires distribués aux étudiants ayant participé au jeu de rôle, nous retrouvons que les étudiants voulaient

> *que l'étudiant comprenne le fonctionnement des multiplicateurs de Lagrange afin de pouvoir résoudre un problème d'optimisation concret.*

Ils insistent sur les courbes de niveau car

> *on ne voit pas l'utilité du Théorème de Lagrange tout de suite. Mais la démonstration géométrique du théorème permet de visualiser l'énoncé même si son utilité reste abstraite avant qu'on introduise les multiplicateurs de Lagrange.*

Enfin, ils expliquent le choix de leur exemple introductif, $t_{E_2}$, par la motivation suivante :

> *Les maths étant très abstraites, il est plus chouette de se raccrocher à quelque chose de concret.*

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches d'$OM_2$ et d'$OM_4$ sont travaillées dans ce cours. Les tâches d'$OM_1$ ne sont mentionnées qu'au travers des techniques de résolution associées aux tâches de type $T_2$. Vers la fin du cours, les étudiants travaillent brièvement des tâches issues de l'organisation mathématique locale $OM_5$. Aucune mention n'est faite par rapport à l'$OM_3$ bien que la tâche $t_{E_2}$ l'aurait permis. En rapport avec les moments de l'étude, nous observons un cours qui est focalisée sur les moments de constitution d'un environnement technologico-théorique et de travail de la technique. Nous disons encore que les étudiants ont mis en place une "$OD$ classique".

### Séquences de cours basées sur le manuel ($M_{\textbf{UNa-Éco}}$)

Les étudiants qui ont travaillé sur le manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$) ont fait des présentations de respectivement 80 et 90 minutes.

*Groupe 1*
Les étudiants mettent en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. Un moment de présentation de rappels (3'30) qui comprennent la définition des extrema locaux et globaux sous contraintes ainsi que d'un point stationnaire. De même, la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre est rappelée pour les problèmes sans contraintes.
2. Un moment de première rencontre avec les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité au travers du problème du consommateur (2'00).
3. Un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$, à savoir prouver le Théorème de Lagrange (réalisation de tâches de type $T_{402}$ et $T_{401}$). Tout d'abord, une interprétation graphique du théorème est présentée ($T_{413}$) qui aboutit à la formulation algébrique des équations de Lagrange et au Théorème de Lagrange (7'20).
4. Un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$, à savoir définir la fonction lagrangienne et faire le lien entre l'approche standard et l'approche par fonction lagrangienne ($T_{403}$ et $T_{408}$) (5'45).

5. Un moment d'élaboration de la technique associée à $T_1$ sous forme de "stratégie" (2'25).
6. Un moment de travail de la technique associé à $T_1$ (10'40).
7. Un bref moment d'élaboration de la technique associée à $T_2$ qui consiste à présenter le Théorème du Hessien bordé (2'50).
8. Un long moment de travail de la technique associé à $T_2$ (41'00).

En particulier nous relevons les moments suivants. Le cours des étudiants est axé sur la construction de "stratégies" :

> *Donc jusqu'à maintenant Monsieur Ambroise vous a donné un exemple plus concret. Mais là, un peu comme la semaine dernière,* [on va] *essayer de construire une stratégie pour trouver les candidats et ensuite une deuxième stratégie pour déterminer la nature de ces candidats. Donc pour ce faire, on va prendre une écriture beaucoup plus générale du problème d'optimisation.* (5:20)

La construction de la première stratégie est basée principalement sur la représentation graphique des courbes de niveau d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.

> *On voit très facilement que le point où la fonction est maximum, c'est le point ici où f vaut 10 [...] sur le graphe. Et en plus, si on observe, en fait on se rend compte que ce point correspond à l'endroit où les deux tangentes sont communes, c'est-à-dire la tangente de la fonction et la tangente de la contrainte sont égales.* (8:25)

Pour passer à l'écriture algébrique des équations de Lagrange, cette observation est écrite analytiquement mais le Théorème des fonctions implicites est omis.

L'énoncé du Théorème de Lagrange fournit la stratégie pour chercher les candidats à être extremum.

> *Voici la stratégie pour rechercher des candidats. Alors on n'a pas encore des maximums ou des minimums. On cherche juste des candidats pour un extremum de la fonction sous la contrainte.* (18:40)

Les étudiants travaillent, en conséquence, les tâches d'$OM_1$ dans cette première partie de cours.

La deuxième partie du cours commence avec la présentation du Théorème du Hessien bordé. Les tâches d'$OM_1$ sont ensuite présentées comme appartenant à l'$OM_2$ et résolues complètement. En ce qui concerne le traitement des points non réguliers admissibles, les étudiants disent :

> *pour déterminer la nature du candidat on va procéder en fait à une substitution en isolant une inconnue dans g et on la remplacera ensuite dans la fonction f [...] Mais cette stratégie est un peu moins utile. Donc on vous la montrera dans un exemple, ce sera plus simple.* (33:31)

Comme nous avons remarqué dans l'analyse des manuels, le manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$) ne présente pas explicitement la technique qui permet de décider de la nature d'un point non régulier. Seul un exemple tâche de le présenter dans un cas précis. Les étudiants sont alors dépourvus de méthodes qu'ils pourraient appliquer à leur exemple et se rabattent sur la technique de substitution.

La tâche $t_{E_2}$ est introduite avec la phrase suivante :

> *Maintenant que nous avons fait beaucoup d'exemples plus théoriques avec plus rien de très concret, je vais introduire un exemple beaucoup plus représentatif dans la vie de tous les jours, un problème d'économie.* (41:48)

Plus loin, nous entendons :

> *Il y a plein d'autres exemples pour approfondir* [le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité], *à mon avis, aux TD on verra d'autres exemples qui représentent bien les problèmes de la vie de tous les jours. Donc, la preuve que les mathématiques ça sert.* (60:50)

Les étudiants terminent le cours en disant qu'

> *aujourd'hui nous avons présenté la stratégie pour trouver les minimums et les maximums d'une fonction mais en tenant compte de contraintes. J'espère que vous avez tout compris et que cela vous a plu.* (78:50)

Dans les questionnaires distribués aux étudiants ayant participé au jeu de rôle, nous retrouvons que l'objectif des étudiants était

> *principalement de bien intégrer les méthodes de calculs.*

Ainsi, les étudiants doivent retenir

> *les méthodes de calculs (stratégies) développées pour que la résolution ne pose plus de problème.*

L'intérêt de présenter la résolution complète de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité est justifié avec les mots suivants :

> *Cela permet de concrétiser et de visualiser plus facilement le problème. On applique aux exercices ce que l'on a vu en théorie, cela permet de mieux intégrer les notions vues [...] L'exemple [...] permet aussi de connaître directement le but du cours.*

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches d'$OM_1$, d'$OM_2$ et d'$OM_4$ sont travaillées dans ce cours. Aucune mention n'est faite des tâches des organisations mathématiques locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$ (ce qui est un choix personnel des étudiants). En rapport avec les moments de l'étude, nous observons que le cours est principalement focalisé sur le moment de travail de la technique qui prend 80% du temps du cours. Le reste du temps est consacré à l'établissement de l'environnement technologico-théorique. Nous disons encore que les étudiants ont mis en place une "$OD$ techniciste".

*Groupe 2*
Les étudiants mettent en place une organisation didactique dans laquelle on peut dégager les moments suivants :

1. Un moment de présentation du problème d'optimisation sans contraintes (définitions, conditions nécessaire et suffisante d'optimalité, exemples, etc.) que nous qualifions d'extérieur au Théorème de Lagrange et qui ne sera pas analysé (30'10).
2. Un moment de première rencontre avec les problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité (2'35).
3. Un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$, à savoir justifier le Théorème de Lagrange (réalisation de tâches de type $T_{402}$ et $T_{401}$). Tout d'abord, une interprétation graphique du théorème est présentée ($T_{413}$)

qui aboutit à la formulation algébrique des équations de Lagrange et au Théorème de Lagrange (8'20).

4. Un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_1$, à savoir définir la fonction lagrangienne et faire le lien entre l'approche standard et l'approche par fonction lagrangienne ($T_{403}$ et $T_{408}$) (8'50).
5. Un moment d'élaboration de la technique associée à $T_1$ sous forme de "stratégie" (4'55) qui effleure aussi les tâches structurales de type $T_{407}$ et $T_{406}$.
6. Un moment de travail de la technique associée à $T_1$ (8'25).
7. Un bref moment d'élaboration de la technique associée à $T_2$ qui consiste à présenter le Théorème du Hessien bordé (6'05).
8. Un moment de travail de la technique associée à $T_2$ (6'00).
9. Un moment de constitution de l'environnement technologico-théorique associé à $T_{32}$ (à savoir la réalisation d'une tâche de type $T_{52}$, suivi d'un moment de travail de la technique associée à $T_{32}$ (15'00).

En particulier nous relevons les moments suivants. Notons tout d'abord que ces étudiants ont récité le syllabus et qu'aucun élément praxéologique n'a été présenté qui ne figure pas tel quel dans le manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$). D'ailleurs, tous les membres du groupe ont tenu l'extrait du manuel en main (et non des notes personnelles) en présentant le cours.

Pour les étudiants de ce groupe, le Théorème de Lagrange s'applique uniquement à des problèmes à deux variables :

> *Certains problèmes du type* [de tâches $T_2$] *peuvent être généralisables à $n$ dimensions mais ici on va plutôt étudier un problème à deux dimensions. Sinon la méthode de Lagrange n'est pas utile puisqu'on peut faire une méthode plus simple qu'on a vue auparavant* [à savoir les méthodes de résolution des problèmes sans contraintes]. (31:30)

Le Théorème de Lagrange est d'abord introduit au travers d'une représentation graphique et puis développé analytiquement. Notons que le passage entre les approches graphique et analytique se passe sans mentionner le Théorème des fonctions implicites. À la fin du développement, les étudiants définissent le but du cours :

> *Donc on a réussi à écrire mathématiquement la condition que doit suivre un point qui est solution de notre problème. On va énoncer un théorème qui reprend cette condition, qui s'appelle le Théorème de Lagrange et qui est le but du cours.* (39:24)

En ce qui concerne le traitement des points non réguliers admissibles, il est dit que

> *dans les hypothèses* [du Théorème de Lagrange]*, on ne considère que les points réguliers. Mais donc on ne sait rien dire à propos des points dont le gradient de la fonction $g$ vaut $(0,0)$ en ces points. Donc pour les exercices il faudra aussi considérer ces quelques points-là. Justement une stratégie pour trouver tous les candidats aux extremums, grâce à ce théorème est [...]* (48 :40)

Bien qu'on mentionne les points non réguliers, aucune tâche résolue au cours ne présente un point non régulier admissible.

La tâche de type $T_{52}$ est introduite avec les mots suivants :

> *Maintenant, on a parlé tantôt du multiplicateur de Lagrange sans vraiment dire ce que c'était. Donc on va essayer de l'interpréter.* (73 :30)

Dans les questionnaires distribués aux étudiants ayant participé au jeu de rôle, nous retrouvons que les étudiants doivent retenir du cours

> *comment optimiser avec le Théorème de Lagrange et la démarche à suivre pour appliquer la méthode sur des exemples.*

En ce qui concerne la preuve du Théorème de Lagrange,

> *on ne voulait pas s'attarder sur des preuves complexes qui feraient décrocher les étudiants du cours en préférant passer plus de temps sur des exemples, graphiques ou exercices.*

En rapport avec notre MER, nous observons que des tâches de toutes les organisations mathématiques locales élémentaires ont été travaillées. En rapport avec les moments de l'étude, nous observons un cours qui est focalisé sur les moments de constitution d'un environnement technologico-théorique et de travail de la technique. Nous disons encore que les étudiants ont mis en place une "$OD$ classique".

### 8.6.3 Confrontation des $OD$ empiriques des enseignants et ceux des étudiants

Nous avons analysé les six présentations des étudiants et tirons, dans ce paragraphe, quelques conclusions.

En ce qui concerne le lien entre les cours donnés par les enseignants et donnés par les étudiants, nous remarquons une dominance de cours de type "classique" dans les présentations des étudiants (quatre $OD$ classiques contre une $OD$ constructiviste et une $OD$ techniciste). Et bien que nous ayons classé les cours, en l'occurrence ($C_{\text{ULg-Éco}}$) et ($C_{\text{UNa-Éco}}$), d'$OD$ constructiviste, nous retrouvons principalement des caractéristiques selon lesquelles l'activité mathématique dans les présentations des étudiants serait presque déterminée par le bloc technologico-théorique, d'où découleraient techniques et problèmes en tant que simples "applications" des définitions, axiomes et théorèmes. Nous disons encore que le travail des tâches structurales se fait de manière déconnectée du travail des tâches procédurales dans les séquence de cours des étudiants (séparation entre le procédural et le structural), ce qui fait du bloc technologico-théorique un ensemble de justifications qui ne laissent pas toujours percer le lien avec les techniques en question. D'ailleurs, nous observons que la tâche structurale de type $T_{413}$ est utilisée dans toutes les présentations des étudiants pour introduire la preuve du Théorème de Lagrange et non pas pour rendre intelligible, en premier lieu, la technique associée à $T_1$. Enfin, les étudiants présentent quasi exclusivement des exemples dits concrets et exercent ainsi une "ponctualisation" des tâches procédurales. Et bien que plusieurs groupes présentent des "stratégies" de résolution adaptées à des problèmes génériques, ils ont une tendance à focaliser le processus de résolution sur une technique particulière qui est adaptée aux exemples concrets choisis mais qui ne permet pas forcément de rendre compte de la diversité des problèmes.

Nous émettons trois hypothèses qui sont des éventuelles explications à ces observations :

1. Les étudiants qui ont participé au jeu de rôle sont des étudiants inscrits aux études en mathématiques. La plupart de leur cours suit un modèle d'$OD$ classique.
2. Contrairement aux professeurs qui ont suivi une formation complète et qui ont des années d'expérience dans le domaine de l'enseignement universitaire, les étudiants sont "seulement" en troisième année de bachelier et ne présentent pas le même recul et la même vue "globale" par rapport à la matière qu'un enseignant professionnel. Du coup, ils s'accrochent plus facilement aux éléments qui leur sont présentés dans les manuels comme des exercices résolus complètement.
3. Nous supposons avoir induit par la mise à disposition de trois tâches procédurales concrètes cette ponctualisation des tâches procédurales.

De plus nous avons reçu un aperçu de l'affrontement entre l'aspiration de rendre un cours "consistant" par rapport au manuel et les difficultés d'adopter une logique (celle du manuel) qui n'est pas propre à la personne qui présente le cours. Des indicateurs d'inconsistance ont pu être révélés dans la présentation de différents groupes. En particulier, nous donnons l'exemple du Théorème des fonctions implicites qui n'est pas mentionné dans la présentation des deux groupes travaillant sur le manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$), et qui n'a pas été vu au cours ($C_{\text{UNa-Éco}}$) d'après ce que le professeur annonce aux étudiants. Or, c'est le Théorème des fonctions implicites qui permet de rendre intelligible le passage entre les courbes de niveau tangentes et l'expression algébrique des pentes.

En ce qui concerne les difficultés apparues lors de l'analyse des extraits vidéos, nous pouvons faire des inférences sur le savoir appris des étudiants. Nous repérons en effet des difficultés qui sont récurrentes dans les différentes présentations :

**La condition de régularité et le traitement des points non réguliers admissibles :** Les étudiants passent beaucoup de temps à soulever l'importance de la condition de régularité. De même, ils insistent sur une intégration des points non réguliers à la liste des candidats à être extremum du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. Cela leur semble donc être particulièrement important. Cependant, il est difficile de savoir si les étudiants se rendent compte des suites de cette séparation entre points stationnaires de la contrainte admissibles et points stationnaires de la fonction lagrangienne. Ainsi, le traitement de points non réguliers est fort variable d'une présentation à l'autre. On observe une absence de traitement car il y a absence de points non réguliers admissibles. Ceci arrive, par exemple, lorsque seules des contraintes d'égalité linéaires apparaissent dans les exercices choisis. Parfois les étudiants décident de la nature de ces candidats par la technique de substitution. Notons que les seuls points non réguliers admissibles que nous rencontrons, interviennent dans la construction de contre-exemple au Théorème de Lagrange pour soulever l'importance de la condition de régularité.

**Le Théorème des fonctions implicites dans la preuve du Théorème de Lagrange :** Le Théorème des fonctions implicites est mentionné dans deux des trois manuels mis à disposition des étudiants. Trois des quatre groupes concernés par ces deux manuels ne mentionnent pas le théorème lors de la présentation tandis qu'un groupe passe plusieurs minutes sur la présentation de ce théorème et ces conséquences. Comme les trois premiers groupes ne donnent aucune explication du passage entre la tangence des courbes de niveau et l'expression algébrique des pentes de ces courbes, il est difficile de connaître les intentions de ces étudiants : est-ce qu'il s'agit d'une détail qu'ils ne jugent pas important ? Sont-ils conscients du rôle que joue ce théorème dans le passage mentionné ? Sont-ils simplement incapables d'exprimer à quoi sert le Théorème des fonctions implicites ? Ou est-ce que le théorème n'est pas suffisamment défriché dans les connaissances des étudiants ? Le quatrième groupe au contraire permet un aperçu des difficultés que les étudiants ont avec le Théorème des fonctions implicites. Le temps passé sur une explication de ce théorème ainsi que sur ses applications montrent une intention de rendre accessible l'utilisation de ce dernier dans la preuve du Théorème de Lagrange.

**Le repérage des solutions parmi les candidats à être extremum :** L'objectif du travail était la présentation du Théorème de Lagrange. Il est donc normal d'avoir observé une insistance sur la recherche des candidats à être extremum. Néanmoins, tous les groupes considèrent la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité comme objectif à atteindre. Or, une résolution complète ne peut faire abstraction du repérage des solutions parmi les candidats à être extremum (voir Section 5.2.2). C'est alors cette étape de repérage qui est traitée différemment dans les séquence de cours des étudiants : soit pas du tout (groupe 1, ($M_{\text{UCL-Math}}$)), soit par des techniques vues ailleurs (groupe 2, ($M_{\text{UCL-Math}}$)), soit par le Théorème du Hessien bordé qui est présenté sans justifications (groupes 1 et 2, ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et groupe 2, ($M_{\text{ULg-Éco}}$)) ou soit par des explications orales (groupe 1, ($M_{\text{ULg-Éco}}$)). Notons que tous les groupes ont vu la méthode du Hessien bordé en première année d'étude.

**Le multiplicateur de Lagrange en tant qu'objet mathématique :** Cinq des six groupes ont choisi de présenter une signification du multiplicateur de Lagrange (tâches de type $T_{51}$ ou $T_{52}$). Cependant, les explications fournies se limitent la plupart du temps à l'énoncé de l'interprétation (comme résultat d'observation d'une tâche de type $T_{32}$) sans donner plus d'explications. Deux fois, des explications supplémentaires sont données : d'une part, un copier-coller de la page du syllabus associée, d'autre part un raisonnement erroné. La réification du multiplicateur de Lagrange apparaît donc comme une tâche ardue pour les étudiants.

En guise de conclusion, nous constatons encore que le rôle du professeur qui est en charge du savoir enseigné semble, d'après nos observations, crucial. Les étudiants ont pris le rôle du professeur et montré au travers de différentes phrases et gestes qu'un enseignant doit faire progresser les étudiants en les intéressant et en leur donnant le goût des mathématiques, mais qu'il est aussi responsable du "contenu" des activités et a, par le choix d'activités mathématiques ciblées, un réel effet sur ce que les étudiants considèrent comme important. Ainsi, les étudiants sont de l'avis que le professeur doit, par exemple, être extrêmement attentif au "temps de réflexion" qu'il laisse aux étudiants pour assimiler l'un ou l'autre point de la matière. Ou encore, il lui incombe de faire "correctement" le pont entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné. Le rôle du professeur a déjà intéressé de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques comme décrit dans un article de Laborde et Perrin-Glorian (2005). Cet article donne un aperçu de certaines recherches centrées sur l'étude du rôle du professeur, notamment celles qui utilisent la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) ou la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1991) comme cadre théorique.

> *The role of the teacher necessarily becomes central as soon as the classroom situation is taken as the object of study. All the papers address this question by analyzing, for example :*
> – *the segmentation of the content to be taught and the organization of the tasks by the teacher [...];*
> – *how the teacher is organizing an interplay between the didactic contract and the milieu in order to let students progress in the solving process of a problem situation [...];*
> – *or how the teacher learns or does not learn from the classroom situation and the students' solving procedures [...]*
> (Laborde & Perrin-Glorian, 2005, pp.3-4)

Notre analyse a étudié quelques-uns de ces points à l'intermédiaire d'un jeu de rôle sur l'exemple concret de l'enseignement du Théorème de Lagrange.

## 8.7 Conclusions du chapitre

Nous présentons dans cette section quelques conclusions à retenir de ce chapitre. Tout d'abord, nous avons mené notre analyse de cette partie de l'organisation didactique à l'aide de deux sources : d'une part, trois cours que nous avons observés et, d'autre part, des observations tirées d'un jeu de rôle réalisé avec des étudiants en troisième année de bachelier en sciences mathématiques.

En ce qui concerne l'analyse des cours, nous retenons principalement la consistance entre un manuel et le cours lorsque l'auteur du manuel et l'enseignant dans la classe sont une et une seule personne. En effet, nous avons observé qu'un suppléant qui se base sur un manuel qu'il n'a pas rédigé produit des effets dans son enseignement que nous avons qualifiés d'inconsistants. Bien que nous ayons observé des cours très différents, nous avons réussi à relever des points communs en termes d'un modèle de différentes organisations didactiques (Bosch & Gascón, 2002). Ainsi, quatre aspects caractérisent l'enseignement du Théorème de Lagrange dans les trois institutions observées :

– Le professeur est la seule personne en charge de la transposition didactique. De ce fait, le vécu, les opinions personnelles et le caractère de chacun figurent parmi les raisons possibles pour lesquelles on trouve des formes d'enseignement si différentes.
– Le développement du concept des multiplicateurs de Lagrange est, en première année de bachelier, propre aux cours destinés aux futurs ingénieurs de gestion ou économistes.
– Les organisations mathématiques sont caractérisées par une importante composante technologico-théorique aussi bien en mathématiques qu'en économie.
– Des discours technologico-théoriques fort différents sont utilisés pour justifier le Théorème de Lagrange (choix de la preuve, choix des tâches structurales travaillées, etc.).

Dans l'enseignement universitaire, les constructions d'organisations mathématiques relatives à la notion du Théorème de Lagrange sont issues de modèles variés (classique et constructiviste en occurrence), centrées sur la question de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. En même temps, nous notons la présence d'un discours technologique assez développé dans les trois cours témoignant de l'importance attribuée aux tâches structurales à l'université. Enfin, nous pouvons supposer, grâce à l'analyse des questionnaires, que les conceptions des enseignants à propos du savoir à enseigner influencent fortement le style d'enseignement et donc le processus didactique.

Ensuite, en réalisant le jeu de rôle, nous avons pu mettre en évidence que le Théorème de Lagrange constitue, certes, un savoir que les étudiants mettent au service d'autres domaines, comme l'économie. Nous avons su opposer les cours analysés aux pratiques enseignantes des étudiants et identifié différentes difficultés liées au Théorème de Lagrange. Il est question au chapitre suivant d'essayer de retrouver ces difficultés dans d'autres productions d'étudiants et de fournir une explication en termes de notre MER.

Pour terminer nous formulons une question à propos du savoir enseigné :

- Quelles conséquences ont, sur le savoir appris, les différentes formes d'enseignement rencontrées ?

Équipés de cette analyse du savoir enseigné, nous retournons, dans le dernier chapitre, vers le savoir appris et complétons ainsi l'étude de la transposition didactique interne du Théorème de Lagrange.

Chapitre 9

# Le Théorème de Lagrange comme savoir appris

## Sommaire

Dans le processus de la transposition didactique appliqué à notre cas, le professeur est en charge des transpositions externe et interne. Les étudiants, à leur tour, ont à s'approprier le savoir enseigné pour mener à bien leur formation. Nous évoquons le *savoir appris* pour parler de ce savoir qui est en bout de chaîne de la transposition du fait qu'il intervient au stade final du processus didactique. Ce dernier chapitre témoigne de notre intérêt pour le savoir appris qui nous conduit à intégrer une approche cognitive dans notre analyse. En effet, il est question d'étudier l'état des connaissances des étudiants par rapport au Théorème de Lagrange et donc les rapports personnels de ceux-ci au théorème en question. Il est possible d'inférer sur les difficultés liées aux conceptions relatives au Théorème de Lagrange, par exemple, à partir d'évaluations d'examens. Notre troisième question de recherche devient alors : notre MER permet-il de décrire ces difficultés ?

Nous faisons ici une remarque importante. Bien que nous nous intéressions aux difficultés qu'un étudiant en mathématiques ou en économie rencontre lorsque le Théorème de Lagrange lui est enseigné, accéder à ses conceptions, donc au savoir appris en soi, est une tâche ardue. Or, nos analyses des savoirs à enseigner et enseigné ont mis en avant des caractéristiques de l'*OD* mise en place qui peuvent être rattachées au savoir appris. Nous avons alors décidé de mettre dans un premier temps la question d'identifier les difficultés liées aux conceptions du Théorème de Lagrange de côté en faveur d'une analyse du rapport entre le savoir appris et cette *OD* empirique. Néanmoins, nous espérons que cette analyse nous donnera une première idée des difficultés éventuelles auxquelles sont confrontés les étudiants lorsque le Théorème de Lagrange leur est enseigné.

La première section de ce chapitre présentera les différents publics qui ont participé à nos expérimentations. Une question d'examen portant sur le Théorème de Lagrange sera présentée et analysée dans la deuxième section. Le rôle de la preuve du Théorème de Lagrange, sujet de notre deuxième question de recherche, fera l'objet de la section suivante. Une quatrième section exposera les résultats obtenus à un questionnaire distribué auprès des étudiants. Nous tâcherons d'y étudier les rapports éventuels entre le modèle de l'*OD* et le savoir appris chez les étudiants. La Section 9.5 présentera alors quelques problèmes supplémentaires mais qui ne peuvent s'expliquer en termes de notre MER. Enfin, la dernière section résumera les observations à propos du savoir appris, établira une liste de difficultés potentielles rencontrées dans l'étude du Théorème de Lagrange et tirera quelques conclusions.

## 9.1 Aperçu général sur les populations concernées et les expérimentations

Le lecteur trouvera ci-dessous des informations concernant les publics concernés par nos expérimentations visant le savoir appris ainsi qu'à propos de la mise en place des différents dispositifs expérimentaux.

### 9.1.1 Description du public cible

Dans cette première section, nous présentons une brève description des publics que nous avons eu l'occasion d'interroger ou qui ont participé à nos expérimentations. Trois des quatre groupes sont attachés directement aux trois institutions dans lesquelles nous avons observé le savoir enseigné. La quatrième institution a été rencontrée dans le chapitre précédent.

($P_{\textbf{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) - **Étudiants en première année de bachelier en sciences économiques et de gestion et en ingénieur de gestion, FUNDP**

Ce premier groupe est celui des étudiants inscrits en première année de bachelier en sciences économiques et de gestion et en ingénieur de gestion à l'université de Namur (FUNDP). Ces étudiants ne sont évidemment pas destinés à devenir des mathématiciens professionnels, mais sont dès le début confrontés à des cours de mathématiques. Ainsi, le public auquel nous nous adressons est très hétérogène au niveau de la formation mathématique antérieure.

Les premiers cours de mathématiques qu'ils rencontrent à l'université cherchent à asseoir et prolonger des connaissances théoriques et techniques acquises dans l'enseignement secondaire et apportent ensuite des compléments indispensables aux futurs utilisateurs des mathématiques. L'analyse des fonctions à une seule variable et les statistiques sont vues avant d'aborder le cours à propos de l'analyse des fonctions à plusieurs variables qui présente le Théorème de Lagrange.

Ce public est constitué de 189 étudiants qui étaient inscrits dans l'année académique 2008-2009.

($P_{\textbf{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) - **Étudiants en deuxième année de bachelier en ingéniorat de gestion, ULg**

Ce deuxième groupe est celui des étudiants inscrits en deuxième année de bachelier en ingénieur de gestion à l'université de Liège (ULg). Après avoir suivi, en première année de bachelier, des cours consacrés à l'étude du calcul matriciel, du calcul différentiel et intégral à une variable, ces étudiants rencontrent en deuxième année de bachelier l'étude de l'analyse à plusieurs variables qui insiste sur les fonctions particulières homogènes, implicites, concaves ou quasi-concaves, sur les notions de dérivées et différentielles, sur les problèmes d'optimisation ainsi que sur la résolution d'équations récurrentes et différentielles.

Ce public est constitué de 66 étudiants qui étaient inscrits durant l'année académique 2008-2009.

($P_{\textbf{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$) - **Étudiants en première année de bachelier en sciences mathématiques, UCL**

Ce troisième groupe est celui des étudiants inscrits en première année de bachelier en sciences mathématiques à l'université de Louvain-la-Neuve (UCL). Le programme d'études pour ces étudiants vise à faire

> *acquérir les connaissances et les compétences de base dans les disciplines fondamentales des mathématiques (algèbre, analyse, calcul numérique, géométrie, probabilités) en relation avec les applications, notamment à la physique, à l'informatique et aux statistiques. Une attention particulière est accordée à la rigueur dans le raisonnement et dans l'expression écrite et orale, ainsi qu'aux capacités d'abstraction et de modélisation.* [75]

75. Les objectifs de la formation peuvent être trouvés sur le site `http://www.uclouvain.be/prog-2010-lmath1ba.html`

Ce public est constitué de 33 étudiants inscrits durant l'année académique 2009-2010, et qui se destinent à devenir des mathématiciens professionnels. Leur formation mathématique antérieure est donc globalement plus poussée que celle des deux premiers publics.

($P_{\textbf{UNa-Math-Bac3}_{08/09}}$) **- Étudiants en troisième année de bachelier en sciences mathématiques, FUNDP**

Ce quatrième groupe est celui des étudiants inscrits en troisième année de bachelier en sciences mathématiques à l'université de Namur (FUNDP). L'institution $I_{\text{UNa-Math-Bac3}}$ a déjà été rencontré lors de l'analyse du savoir enseigné (voir Section 8.6.1.0). Cependant, les publics ne sont pas les mêmes. En effet, contrairement aux étudiants qui ont participé au jeu de rôle durant l'année académique 2010-2011, les étudiants de l'année académique 2008-2009 ont travaillé sur les différentes preuves du Théorème de Lagrange dans le cadre du travail de groupe en optimisation. Le public ($P_{\text{UNa-Math-Bac3}_{08/09}}$) est composé des 17 étudiants.

Rappelons qu'en troisième année de bachelier, le cours d'optimisation se veut une introduction générale aux concepts de base de la théorie de l'optimisation. Deux questions sont abordées : comment caractériser un extremum et comment concevoir une méthode numérique pour l'obtenir.

### 9.1.2 Conception des trois expérimentations

Dans les chapitres précédents, nous avons réalisé une étude de la transposition didactique du Théorème de Lagrange. Les résultats de cette étude nous ont permis de répondre en partie à notre première question de recherche, relative aux formes d'enseignement que l'on trouve dans la réalité des universités en Belgique. Cependant, à partir de la méthodologie utilisée, nous n'avons pas encore eu accès à beaucoup d'éléments à propos du savoir appris. Nous avons alors fait l'hypothèse qu'une étude plus expérimentale pourrait apporter plus d'éléments de réponse.

En effet, nous pensons que nous pouvons accéder à certains éléments qui caractérisent les conceptions des étudiants à propos du Théorème de Lagrange à partir de productions des élèves. Dans la première expérimentation, nous nous intéressons d'abord aux tâches procédurales de type $T_2$. La section suivante fournira des réponses à propos d'une tâche structurale particulière, à savoir $T_{402}$. Enfin, une troisième section concerne le lien entre le savoir appris et la construction globale du cours. L'objectif des trois expérimentations présentées est triple :

- Recueillir des productions d'étudiants à l'examen (réponses à une tâche de type $T_{22}$) afin de pouvoir identifier les types de réponses et de techniques appliquées, ainsi que d'inférer sur des difficultés éventuelles dans la résolution de tâches procédurales. Cette expérimentation vise aussi à identifier les éléments du savoir appris qui semblent être indépendants, ou au contraire dépendants, de l'$OD$ à laquelle les étudiants sont confrontés.
- Recueillir des avis d'étudiants sur la preuve du Théorème de Lagrange dans le but d'inférer sur l'importance que les étudiants y accordent.
- Identifier des comportements d'étudiants qui pourraient être mis en parallèle avec

les différents modèles d'$OD$ à l'aide d'un questionnaire.
Dans chaque expérimentation, nous avons demandé aux étudiants de justifier leurs réponses. Notre hypothèse est que ces justifications nous apporteront des éléments nous permettant de mieux interpréter les idées que les étudiants ont à propos du Théorème de Lagrange. Les données recueillies sont les copies des étudiants (questions d'examens, questionnaire, réponses des étudiants).

Nous sommes conscients que, pour une réelle analyse du savoir appris, les expérimentations réalisées sont loin d'être suffisantes. De plus, en plusieurs endroits, nous n'avons pu recueillir les données qui nous auraient permis une réelle comparaison institutionnelle. Les résultats ci-dessous sont donc à interpréter en fonction des contraintes qui ont pesé sur la récolte des données.

## 9.2 Perception des tâches procédurales

Cette première expérimentation a pour but d'identifier les types de réponses et de techniques appliquées, ainsi que d'inférer sur des difficultés éventuelles dans la résolution de tâches procédurales. Cette expérimentation vise aussi à identifier les éléments du savoir appris qui semblent être indépendants, ou au contraire dépendants, de l'$OD$ à laquelle les étudiants sont confrontés.

### 9.2.1 Question d'examen

#### Description de la tâche

Voici la tâche de type $T_{22}$ que nous avons proposée aux étudiants ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) et ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) à l'examen finale de l'année académique 2008-2009 (en première session) :

> *Une firme fabrique dans deux usines différentes un produit. Soit $q_1$ (respectivement $q_2$) le nombre de produits fabriqués dans la première (respectivement la seconde) usine. Le coût de production pour chaque usine est donnée par la fonction $C_1 = 200 + 6q_1 + 0.03q_1^2$ pour la première usine et $C_2 = 150 + 10q_2 + 0.02q_2^2$ pour la seconde. L'entreprise veut livrer 100 unités de son produit. La livraison lui coûte 4 euros par article depuis la première usine et 2 euros depuis la seconde usine. Quelles sont les quantités $q_1$ et $q_2$ qui minimisent le coût total.*
>
> *Quelle est (approximativement) la valeur minimale du coût total si la firme désire livrer 101 unités au lieu de 100 ?*

Une résolution possible, en utilisant une technique de type $\tau_{23}$, se trouve dans l'Annexe C.

Cette tâche peut être considérée comme une application économique d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité où une étape de modélisation est nécessaire ($T_{22}$). Le problème est à deux variables sous une seule contrainte d'égalité linéaire. Les techniques $\tau_{21}$, $\tau_{22}$, $\tau_{23}$ et $\tau_{24}$ décrites dans la Section 5.2.2 peuvent, a priori, être mises en œuvre dans la réalisation de la tâche. La question subsidiaire peut alors être résolue soit en utilisant la signification du multiplicateur de Lagrange ($T_{32}$), soit en résolvant le problème d'optimisation une deuxième fois avec la contrainte modifiée.

**Méthodologie d'analyse**

La question d'examen a été soumise aux étudiants des publics ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) et ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) dans le cadre de l'examen de première session dans l'année académique 2008-2009. Pour l'analyse des réponses, nous nous sommes intéressés à trois catégories de réponses selon lesquelles nous avons effectué le dépouillement des copies :

- Réponse correcte, convenablement rédigée et bien justifiée (si une justification est requise).
- Copie sans réponse ou réponse fausse.
- Réponse partiellement correcte.

La première catégorie de réponse ne nécessite pas plus d'explications. La deuxième catégorie reprend les copies des étudiants qui n'ont pas répondu à la question, qui échouent complètement à la modélisation du problème, qui appliquent les techniques d'optimisation sans contraintes aux fonctions présentes dans l'énoncé ou qui ne modélisent pas correctement le problème. Enfin, la troisième catégorie regroupe les copies d'examen où la modélisation est suffisamment réussie pour donner une réponse partiellement correcte. Par "partiellement correcte" nous comprenons des réponses qui manquent de précisions (dans la rédaction et/ou la justification), qui ne modélisent pas correctement le problème mais présentent un bref aperçu de technique de résolution, qui présentent des implicites ou qui s'arrêtent avant la fin. Ainsi, les réponses incomplètes seront considérées, soit dans la deuxième, soit dans la troisième catégorie, selon ce que la partie fournie apporte à la réalisation de la tâche. Notons encore que nous avons regroupé les réponses que nous avons considérées comme similaires. Ces réponses se caractérisent par un même contenu mathématique avec de légères différences sur le plan de la rédaction.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les publics ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) et ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) sont dans la même filière d'études et reçoivent le même type d'enseignement de mathématiques mais ont des enseignants différents et ne sont pas dans la même année d'études (l'institution $I_{\text{ULg-Éco-Bac2}}$ se place en deuxième année de formation. Les étudiants attachés à cette institution ont donc déjà suivi plus d'heures de mathématiques à l'université). Les sites `http://progcours.ulg.ac.be/cocoon/programmes/GBIGES01.html#MATH0058-2` pour $I_{\text{ULg-Éco-Bac2}}$ et `http://www.fundp.ac.be/etudes/annees/page_view/730B1/` pour $I_{\text{UNa-Éco-Bac1}}$ permettent d'avoir un aperçu des points communs et des différences entre les deux institutions. Si nous distinguons les deux institutions, c'est pour rendre compte de particularités de l'$OD$ empirique qui se trouve derrière les réponses recensées.

Malheureusement, nous n'avons pas pu soumettre une question d'examen dans les institutions $I_{\text{Math}}$. Ce manque de données rend une comparaison directe entre les institutions $I_{\text{Math}}$ et $I_{\text{Éco}}$ impossible.

### 9.2.2 Analyse des résultats

Pour notre question d'examen, sur 257 copies, nous dénombrons :

- 40 réponses correctes (15,6%),
- 57 copies sans réponses ou réponses fausses (22,2%) et
- 160 réponses partiellement correctes (62,2%).

Pour chacun des deux publics, nous rapportons ci-dessous l'analyse plus détaillée des réponses données par les étudiants.

### Public ($P_{\textbf{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$)

Pour notre question d'examen, sur 191 copies, nous dénombrons :
- 17 réponses correctes (8,9%),
- 54 copies sans réponses ou réponses fausses (28,3%) et
- 120 réponses partiellement correctes (62,8%).

Les copies sans réponses ou réponses fausses sont écartées de nos analyses. Parmi les 17 réponses correctes et les 120 réponses partiellement correctes (137 copies au total), 66 étudiants (48,2%) ont modélisé correctement le problème et commencé la résolution du problème mathématique. Il faut donc noter que la moitié des étudiants qui ont répondu à cette question d'examen se heurte au problème de la modélisation d'un problème mathématique. Nous avons déjà signalé que la modélisation est un sujet de recherche à part entière dans le monde de la didactique. Nous trouvons ici un aperçu de son importance. Remarquons encore que dans la plupart des cas, les étudiants - malgré qu'il n'aient pas trouvé la bonne formulation du problème - présentent des éléments de la technique (écriture de la fonction lagrangienne et des équations de Lagrange, écriture du Hessien bordé, etc.) Ne partant pas du bon problème d'optimisation de départ, ils ne parviennent cependant pas à résoudre la tâche.

Les copies de ces 66 étudiants ont retenu notre attention car ils ont tenté une résolution correcte de la tâche de type $T_{22}$. Tous les 66 étudiants ont résolu la tâche à l'aide d'une technique de type $\tau_{23}$, seule technique qui est institutionnalisée dans le manuel ($M_{\text{UNa-Éco}}$) (voir Section 6.2.3). Cependant, nous notons 11 étudiants qui commencent une résolution par substitution avant de dévier sur une technique qui met en œuvre le Théorème de Lagrange.

À l'intérieur du groupe de 66 étudiants, nous constatons d'abord que 48 cherchent les points stationnaires de la contrainte avant d'écrire correctement la fonction lagrangienne et les équations de Lagrange, tandis que 18 étudiants passent directement à la recherche des points stationnaires de la fonction lagrangienne.

Parmi tous ceux qui écrivent la fonction lagrangienne et les équations de Lagrange, 10 étudiants ne mentionnent pas explicitement qu'il faut annuler le gradient de la fonction lagrangienne, même s'ils le font. Il nous semble que ces étudiants savent ce qu'ils doivent faire, mais n'associent pas les écritures des registres symbolique et algébrique à cette connaissance. Autrement dit, la représentation sémiotique "$= 0$" n'a pas de valeur instrumentale pour ces étudiants dans le sens où elle ne s'intègre pas dans des manipulations techniques, technologiques et théoriques. 8 autres étudiants font des erreurs de calcul dans les dérivées partielles. Enfin, 4 étudiants parmi les 66 s'arrêtent à cette étape de la résolution.

Quant à la résolution du système d'équations, 39 étudiants le résolvent correctement, 4 se limitent à chercher les valeurs de $q_1$ et $q_2$ et ne trouvent pas la valeur du multiplicateur de Lagrange, et 19 ne parviennent pas à résoudre le système correctement. 2 étudiants ne vont pas au-delà de la sélection des candidats.

Bien que seuls 43 étudiants aient trouvé le bon candidat à être solution, 55 étudiants réalisent le test du Hessien bordé en tant que condition suffisante du second ordre pour déterminer la nature du candidat et trouvent ainsi le minimum recherché. Cela nous semble indicateur de la reconnaissance de la technique de type $\tau_{23}$. Parallèlement, 5 étudiants ne font pas le test et déclarent le candidat trouvé solution du problème d'optimisation.

Nous recensons 57 étudiants qui attaquent le problème supplémentaire de type $T_{32}$, à savoir réaliser une analyse de sensibilité. 34 étudiants répondent à cette question à l'aide de la signification du multiplicateur de Lagrange, 2 résolvent le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité avec la contrainte modifiée, 2 ne fournissent que la signification théorique du multiplicateur de Lagrange, 6 ne fournissent pas de bonne justification et 13 donnent des réponses fausses.

**Public** ($P_{\textbf{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$)

Pour notre question d'examen, sur 66 copies, nous dénombrons :
- 23 réponses correctes (34,9%),
- 3 copies sans réponses ou réponses fausses (4,5%) et
- 40 réponses partiellement correctes (60,6%).

Les trois copies sans réponses sont écartées de nos analyses. Parmi les 23 réponses correctes et les 40 réponses partiellement correctes (63 copies au total), 54 étudiants ont modélisé correctement le problème et commencé la résolution du problème mathématique. Les 9 autres étudiants ont présenté un aperçu de la technique à mettre en œuvre pour résoudre le problème mais ne sont pas parvenus à donner des réponses correctes.

Parmi les 54 étudiants ayant au moins commencé la résolution du problème, 35 étudiants ont résolu la tâche à l'aide d'une technique de type $\tau_{23}$, 26 étudiants ont appliqué la méthode de substitution. Notons que 7 étudiants ont présenté une résolution qui regroupe les deux techniques. Nous reviendrons sur ce groupe particulier.

Présentons d'abord le cas de la technique de type $\tau_{23}$. La plupart des enseignants conseillent d'abord de rechercher les points qui ne vérifient pas la condition de régularité. Comme nous l'avons déjà fait remarquer dans les chapitres précédents, le Théorème de Lagrange identifie les points stationnaires de la fonction lagrangienne comme candidat à être solution si le point est régulier. En conséquence, les points non réguliers admissibles doivent être traités par une autre méthode. 11 étudiants, parmi 35 étudiants qui résolvent le problème à l'aide de la technique de type $\tau_{23}$, ne pensent pas à vérifier cette condition.

Les 35 étudiants parviennent à écrire correctement la fonction lagrangienne et les équations de Lagrange. Cette étape ne semble donc pas poser problème. Quant à la résolution du système d'équations, 21 étudiants le résolvent correctement, 10 se limitent à chercher les valeurs de $q_1$ et $q_2$ et ne trouvent pas la valeur du multiplicateur de Lagrange, et 3 ne parviennent pas à résoudre le système.

Après avoir fait la sélection des candidats, tous les étudiants (qui n'ont pas encore arrêté la résolution) utilisent une condition suffisante du second ordre pour déterminer la nature du candidat et trouvent ainsi le minimum recherché.

En ce qui concerne l'application de la méthode de substitution, les 19 étudiants qui ont mis en place cette technique seule ont également trouvé le minimum recherché.

Il est alors question pour les 50 étudiants qui ont trouvé le minimum recherché de donner la réponse au problème supplémentaire de type $T_{32}$, à savoir de réaliser une analyse de sensibilité. Seulement 16 étudiants répondent à cette question à l'aide de la signification du multiplicateur de Lagrange, 14 résolvent le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité avec la contrainte modifiée, 2 ne fournissent que la signification théorique du multiplicateur de Lagrange, 9 donnent des réponses fausses et 9 ne répondent pas. Il est à remarquer que 7 étudiants, ayant appliqué la substitution comme première technique, se rendent compte à cette étape qu'il leur faut la valeur du multiplicateur de Lagrange s'ils veulent ne pas résoudre le problème une deuxième fois. Ainsi nous lisons dans les réponses :

> *pour répondre à la question (b), je vais utiliser le Lagrangien*

ou encore

> *mais pour répondre à la deuxième partie de la question (qui concerne la sensibilité de l'extremum par rapport aux variations de contraintes), il faut connaître le multiplicateur du Lagrangien (donc on n'insère pas la contrainte dans la fonction).*

Ce comportement peut être vu comme indicateur de flexibilité de pensée ou de capacité à changer de stratégie chez les étudiants.

### 9.2.3 Conclusions

Les principaux résultats qui ressortent de notre analyse des productions des étudiants, attachés à l'institution $I_{\text{Éco}}$, à cet exercice sont les suivants :

1. Le problème de la modélisation - bien qu'il soit extérieur au Théorème de Lagrange - peut constituer une source de problème indéniable pour les étudiants.
2. Presque 30% des étudiants qui résolvent l'exercice à l'aide d'une technique de type $\tau_{23}$ ne pensent pas à chercher les points stationnaires de la contrainte (les points réguliers) admissibles. Ce constat met en évidence, d'après nous, une insuffisance dans les connaissances technologiques mises en jeu par les étudiants. Le comportement des étudiants met visiblement l'accent sur le bloc practico-technique d'une tâche procédurale et délègue le rôle du bloc technologico-théorique au second plan. À cette explication se rajoute l'observation que ces points, s'ils sont candidats à être extremum, doivent être traités par une technique qui s'applique au cas par cas. Ceci rend le traitement conceptuellement plus compliqué à réaliser.
3. 30% des étudiants essaient la technique de substitution pour résoudre le problème de type $T_{22}$. Elle est, en effet, utilisée comme motivation de la technique des multiplicateurs de Lagrange dans les manuels ($M_{\text{UNa-Éco}}$) et ($M_{\text{ULg-Éco}}$) bien qu'elle ne soit pas forcément institutionnalisée en lien direct avec le Théorème de Lagrange.
4. 50% des étudiants ne répondent pas à la question de type $T_{32}$ en utilisant la signification du multiplicateur de Lagrange associé à la solution optimale. Cela semble être un obstacle pour les étudiants. Néanmoins, 6,2% des étudiants résolvent le problème d'optimisation avec la contrainte modifiée ce qui constitue une technique alternative valide qui peut être, en même temps, vue comme une flexibilité de pensée chez ces étudiants pour réaliser la tâche. Le travail des $OM$ locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$ semble, cependant, compromis dans ce cas.

5. Enfin, nous notons l'existence de difficultés variées au niveau de l'usage du symbolisme mathématique, dans la résolution des systèmes d'équations ou encore dans l'oubli de la condition suffisante du second ordre. En ce qui concerne les deux premiers problèmes ils sont extérieurs au Théorème de Lagrange. Le dernier, au contraire, est lié au Théorème de Lagrange vu comme condition nécessaire d'optimalité et peut être dû à un traitement plus chronophage du Théorème de Lagrange au détriment des méthodes de repérage des solutions parmi les candidats à être extremum.

En ce qui concerne les difficultés apparues lors de l'analyse des productions des étudiants, nous retrouvons une confirmation des inférences que nous avons faites sur le savoir appris des étudiants dans le chapitre précédent. Nous repérons en effet les mêmes difficultés (voir Section 8.6.3) qui sont récurrentes au niveau des tâches procédurales :

- La condition de régularité et le traitement des points non réguliers admissibles.
- Le repérage des solutions parmi les candidats à être extremum.
- Le multiplicateur de Lagrange en tant qu'objet mathématique.

Nous terminons notre conclusion avec une mise en garde envers des évaluations (formatives ou certificatives) trop "procédurales" dans le sens où seules les techniques sont évaluées. En effet, nous plaidons pour des évaluations qui essaient d'apprécier non seulement le bloc practico-technique d'une tâche procédurale, mais aussi son bloc technologico-théorique. Un nombre considérable d'étudiants utilise, en effet, des procédures stéréotypées pour obtenir des réponses à des types d'exercices clairement déterminés à l'avance. Dreyfus note dans ce contexte que souvent les étudiants

> *end up with a considerable amount of mathematical knowledge but without the working methodology of the mathematician, that is they lack the know-how that allows them to use their knowledge in a flexible manner to solve problems of a type unknown to them.* (Dreyfus, 1991, p. 28)

## 9.3 Perception des tâches structurales

Nous nous intéressons dans cette question aux tâches structurales, et plus particulièrement à la preuve du Théorème de Lagrange. La tâche de type $T_{402}$ de notre MER est concernée directement par notre deuxième question de recherche. En effet, l'activité de démonstration occupe une place importante dans l'univers mathématique, et, de ce fait, se trouve au cœur de la réalité des étudiants qui sont confrontés aux cours de mathématiques à l'université. Cette réalité nous a fait créer la catégorie des tâches structurales qui témoignent de l'importance de l'élaboration de démonstrations comme l'un des aspects fondamentaux du travail des mathématiciens.

Afin de recevoir des idées sur les perceptions des étudiants vis-à-vis de cette tâche structurale, nous présentons ci-dessous quelques impressions obtenues suite à un travail de groupe réalisé avec 17 étudiants du public ($P_{\text{UNa-Math-Bac3}_{08/09}}$). Nous espérons pouvoir inférer sur l'importance que les étudiants accordent à l'activité de démontrer en mathématiques et en économie.

### 9.3.1 Travail de groupe en BAC3, année 2008-2009

Comme décrit à la Section 8.6.1.0, la troisième année de bachelier en sciences mathématiques à l'université de Namur était un public privilégié dans notre contexte de recherche. Ainsi, nous n'avons pas seulement réalisé le dispositif expérimental "jeu de rôle" avec les 15 étudiants du public ($P_{\text{UNa-Math-Bac3}_{10/11}}$), mais aussi un autre travail de groupe (TG) portant sur le Théorème de Lagrange durant l'année académique 2008-2009. Ce travail avait pour but d'investiguer les rapports que les étudiants développent aux différentes preuves et argumentations du Théorème de Lagrange.

#### Description du travail de groupe et méthodologie

Public que nous avons suivi avec beaucoup d'intérêt, le public ($P_{\text{UNa-Math-Bac3}_{08/09}}$) était confronté à un TG en optimisation, où une partie du travail était destinée à l'étude d'une des justifications du Théorème de Lagrange.

Parmi les différentes preuves et argumentations du Théorème de Lagrange que nous avons rencontrées dans la littérature mathématique, nous avons choisi de confronter les 17 étudiants de ce public aux quatre suivantes.

**Courbes de niveau tangentes :** la preuve est issue de (Simon & Blume, 1998) et est notée ($D_1$).

**Utilisation du Théorème des fonctions implicites :** la preuve est issue de (Sundaram, 1996) et est notée ($D_2$).

**Paramétrisation d'une courbe tracée sur l'ensemble admissible :** la preuve est issue de (Luenberger, 2004) (avec une utilisation du Théorème des fonctions implicites) et est notée ($D_3$).

**Paramétrisation d'une courbe tracée sur l'ensemble admissible :** la preuve est issue de (Knoerr, 1998) (sans utilisation du Théorème des fonctions implicites) et est notée ($D_4$).

Le choix de ces preuves s'est réalisé de façon à obtenir des présentations aussi variées que possible du Théorème de Lagrange. Un deuxième critère de choix était l'accessibilité pour les étudiants au niveau des concepts vus au cours théorique.

En présentant un extrait du travail portant, par exemple, sur la preuve issue de (Knoerr, 1998), l'objectif du travail était défini comme suit :

1. *Adapter la preuve du théorème de Karush-Kuhn-Tucker (Theorem 4.1.2) au problème d'optimisation sous contraintes d'égalité. On se basera sur la section 4.1 "The Karush-Kuhn-Tucker Theorem" issue du syllabus (Strodiot, 2006). Le résultat obtenu est appelé* Théorème de Lagrange.
2. *La condition de qualification des contraintes doit-elle être gardée ? Expliquer votre réponse.*
3. *La littérature mathématique a établi d'autres preuves du Théorème de Lagrange qui sont basées sur des résultats mathématiques variés. Étudier l'article "*A Dynamical Proof of the Method of Lagrange*" (Knoerr, 1998).*

Bien qu'une analyse des rapports de ce travail puisse être intéressante pour apprendre sur les rapports personnels des étudiants à une preuve du Théorème de Lagrange, il nous semblait plus favorable de confronter les étudiants à différentes preuves. C'est ainsi que nous avons choisi la méthodologie suivante.

Les 17 étudiants ont été repartis en 4 groupes travaillant chacun sur une des preuves mentionnées ci-dessus. Après la présentation orale des différentes preuves - chaque groupe devait présenter "sa preuve" devant tous les autres étudiants - il était demandé de répondre individuellement à un questionnaire. On trouvera ci-dessous l'énoncé des cinq questions :

1. *Parmi les différentes façons de présenter la preuve du Théorème de Lagrange, laquelle est, d'après vous, la plus adaptée pour*
   - *un cours de mathématiques destiné à des mathématiciens ? Pourquoi ?*
   - *un cours de mathématiques destiné à des économistes (ou d'autres non-mathématiciens) ? Pourquoi ?*
2. *Choisissez une des quatre présentations (hormis la vôtre) et répondez ensuite aux questions suivantes :*
   (a) *Retracez brièvement la structure de la preuve de la présentation choisie !*
   (b) *Quelles sont, d'après vous les plus grandes différences entre la présentation du Théorème de Lagrange choisie et celle de votre travail ?*
   (c) *Quels sont les points communs entre ces deux présentations ?*
   (d) *Qu'est-ce que la présentation choisie apporte de nouveau à votre vision du Théorème de Lagrange ?*
   (e) *Si vous deviez choisir une des deux présentations, laquelle choisirez-vous ? Pourquoi ?*

Ainsi, nous avons reçu 17 questionnaires qui fournissent des informations à propos de la perception et de la conception du Théorème de Lagrange auprès des étudiants en troisième année de bachelier en sciences mathématiques.

Notons que, comme précédemment, ces preuves n'ont pas fait l'objet d'un savoir enseigné. Ce sont les étudiants qui se sont appropriés la façon de démontrer le Théorème de Lagrange.

**Questions et hypothèses**

Comme nous nous intéressons au rôle de la preuve dans l'enseignement du Théorème de Lagrange, nous essayons de dégager les perceptions des étudiants à propos de deux questions qui y sont liées :

1. La démonstration joue-t-elle un rôle différent dans les études en mathématiques ou en économie ?
2. Parmi les quatre preuves proposées, quelles sont les raisons qui font choisir l'une par rapport à une autre ?

Nous sommes conscients que les réponses au questionnaire touchent aux rapports personnels des étudiants. Ceci dit, elle ne peuvent nous renseigner que sur le type de rapport à la preuve du Théorème de Lagrange que ces étudiants entretiennent à un moment précis de leur formation. Notons encore que tout ce qui est dit dans la suite se rapporte toujours aux quatre preuves présentées et non à l'intégralité des justifications du Théorème de Lagrange que nous avons identifiées dans notre analyse du savoir savant. Enfin, nous associerons la plupart du temps des "non-mathématiciens" à des "économistes" car c'est le domaine qui nous préoccupe dans cette thèse.

Notons encore que si nous nous intéressons dans cette partie de notre travail aux avis des étudiants, nous entrons dans le domaine des perceptions et des préjugés (Maaß & Schlöglmann, 2009) qui nous apporte certes des éclairages intéressants, mais ne nous permet pas, à ce stade des expérimentations, de tirer des conclusions générales et nous éloigne donc du point de vue institutionnel annoncé.

### Analyse des résultats du questionnaire

Voici notre analyse des réponses obtenues au questionnaire qui a suivi la présentation des différentes preuves.

*Rôle de la preuve*

Quand il s'agit de démontrer un résultat mathématique, les étudiants n'accordent pas le même intérêt à cette activité selon le public à qui se destine la preuve. Ainsi, nous trouvons une trace dans les réponses des étudiants du fait que la rédaction de preuves constitue l'une des parties essentielles du métier de mathématicien.

> *Pour des mathématiciens, la preuve d'un résultat étudié est primordial pour une compréhension en profondeur de la matière. Le critère n'est donc pas spécialement celui de la simplicité, mais plutôt de l'apport de la preuve à la bonne compréhension des concepts et résultats étudiés (et donc de la preuve qui en découle).*

Cet étudiant relève donc non seulement l'aspect vérificatif d'une preuve mais aussi l'aspect explicatif lorsqu'on s'adresse à des mathématiciens. Il n'en est pas de même d'après cet étudiant, lorsqu'un professeur s'adresse à un public de non-mathématiciens.

> *Le critère* [d'une preuve "adaptée" à un groupe de personnes données] *serait quant à lui la simplicité de la preuve ; la meilleure est d'après moi celle qui utilise des concepts les plus familiers aux personnes considérées, souvent les preuves à caractère "géométrique" étant plus facile à se visualiser, ce qui aide souvent à la compréhension.*

Nous retrouvons donc bien une volonté chez l'étudiant de présenter une preuve "simple" à des non-mathématiciens. Ce serait encore un signe que la preuve d'un résultat mathématique n'a pas forcément le même rôle en mathématiques qu'en économie. Un autre étudiant donne beaucoup de poids à une compréhension de la preuve par des visualisations graphiques :

> *une présentation plus intuitive du Théorème de Lagrange me paraît beaucoup plus compréhensible pour des étudiants n'ayant pas suivi de cours de mathématiques approfondi. Ceci grâce à cette approche géométrique, aux schémas et aux exemples qui rendent ce théorème beaucoup plus accessible.*

*Quelle preuve pour quel public ?*

Nous présentons d'abord les choix effectués selon les quatre preuves et les deux publics dans le Tableau 9.1.

| | $(D_1)$ | $(D_2)$ | $(D_3)$ | $(D_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| Preuve adaptée à des mathématiciens | 0 | 1 | 0 | 14 |
| Preuve adaptée à des non-mathématiciens | 12 | 1 | 3 | 0 |

Tableau 9.1 – Réponses des étudiants à la première question

Il est intéressant d'observer que les étudiants en mathématiques ont une nette prédilection pour la preuve par paramétrisation d'une courbe tracée sur l'ensemble admissible (Knoerr, 1998) qui n'utilise pas le Théorème des fonctions implicites, bien que cette preuve soit longue et relativement complexe. Les étudiants justifient leur choix par différentes raisons.

> *Cette preuve* $(D_4)$ *est plus "explicite" car elle ne fait pas intervenir le Théorème des fonctions implicites, [...], mais fait appel à des concepts [...] auxquelles d'autres sections ne sont pas forcément habituées.*

Par le fait que la preuve $(D_4)$ présente le Théorème de Lagrange en employant des notions comme le Théorème fondamental de l'algèbre linéaire, le Théorème de Peano ou encore le problème de Cauchy qui sont issues d'autres cadres mathématiques, elle permet

> *à l'étudiant en mathématiques de faire des liens entre les différentes matières qu'il a vues*

et

> *semble être particulièrement intéressante pour des mathématiciens bien que longue et assez complexe.*

Nous retrouvons aussi différentes perceptions et conceptions personnelles vis-à-vis des mathématiques en général. Ainsi, un étudiant dit que

> *cette approche* $(D_4)$ *reste dans "l'abstrait", ce qui est très mathématique.*

Un étudiant précise son sentiment personnel par rapport au rôle de la validation d'une preuve.

> *Une preuve plus formelle donne aussi plus l'impression que le résultat est "vrai".*

Il est à remarquer que les mots "abstrait" et "mathématique" semblent aller de pair dans les conceptions des étudiants, tout comme une preuve très formelle semble renforcer le sentiment d'être face à un résultat vrai. Nous nous demandons à quel point l'institution (ici $I_{\mathrm{Math}}$) influence par sa manière de présenter les savoirs aux étudiants cette perception des mathématiques.

Au niveau du choix de la preuve adaptée à un cours de mathématiques destiné à des économistes, nous trouvons une préférence pour l'approche par courbes de niveau tangentes $(D_1)$ chez les étudiants.

> *[...] De surcroît, je pense que cette preuve* $(D_1)$ *est particulièrement bien adaptée à des économistes, car elle se base sur le calcul de pentes de tangentes à des courbes, concepts bien connus de ces derniers.*

Notons que cet étudiant en mathématiques dénote certaines connaissances des concepts économiques ce qui vient probablement du fait qu'il a suivi des cours d'économie à option dans sa formation de mathématicien.

Une autre explication qui va dans la direction d'une "simplicité recherchée" est la suivante :

> *c'est une démonstration qui reste très intuitive. Les économistes, par exemple, ne seront pas dépaysés car ils ont l'habitude de travailler avec des courbes de niveau. De plus, le fait de commencer à deux variables permet de présenter clairement le problème. Et la démonstration ne demande pas beaucoup de prérequis mathématiques.*

Ou encore,

> *les concepts peuvent leur être expliqués sans devoir se permettre de les expliquer rigoureusement.*

Cette dernière remarque sous-entend qu'une argumentation est, d'après les étudiants, tout aussi adaptée à un cours destiné à des futurs économistes qu'une preuve rigoureuse. Le fait de manipuler des concepts qui sont familiers au public se rajoute aux représentations graphiques et aux explications "non-rigoureuses" pour justifier un résultat face à un public de non-mathématiciens. Ceci n'est pas, d'après les étudiants, une finalité cherchée pour un public de mathématiciens. Chez les mathématiciens, la rigueur et le sens de vérification priment sur les idées intuitives.

Notons qu'un étudiant retrouve un caractère "procédure algorithmique" dans la preuve $(D_1)$. Au vu de cette observation, il estime que cette preuve convient à des économistes.

> *Je trouve qu'il s'agit plus d'une "recette" permettant de résoudre un problème d'optimisation que d'une démonstration bien ficelée.*

Enfin, un étudiant relève la preuve $(D_3)$ comme adaptée à un cours de mathématiques en économie.

> [Elle] *se base [...] sur un lemme faisant appel aux notions d'espace et de vecteurs tangents qui sont relativement intuitives, mais aussi, et surtout, sur des résultats fondamentaux de programmation linéaire (théorèmes de dualité) qui ont été vus au cours qui, si mes souvenirs sont bons, présentait bon nombre d'applications à l'économie ne demandant pas énormément de prérequis.*

*Apport conceptuel d'une deuxième justification*

Comme les étudiants ont été mis face à différentes façons de démontrer le Théorème de Lagrange, la question de savoir ce qu'une deuxième présentation apporte de nouveau à la vision du Théorème de Lagrange donne des informations relatives à l'importance de changements de cadres et de registres.

> *Toutes ces présentations différentes montrent que plus d'une approche pour un problème donné est souvent possible, et que la diversification et l'ouverture à plusieurs formalismes pour un même problème sont très importantes en mathématiques. Nous voyons qu'un problème peut être vu de plusieurs manières, ce qui peut nous aider à comprendre plus facilement ces résultats.*

Nous retrouvons l'affirmation de Duval qui dit que le recours à plusieurs registres est une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas amalgamés avec leurs représentations et qu'ils puissent être identifiés au travers de chacune d'entre-elles (Duval, 1993).

*Choix d'une preuve*
Si les étudiants devaient choisir une preuve parmi les démonstrations analysées, ils choisiraient le preuves suivantes (voir Tableau 9.2).

| | $(D_1)$ | $(D_2)$ | $(D_3)$ | $(D_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| Préférence prononcée pour | 5 | 4 | 2 | 6 |

TABLEAU 9.2 – Réponses des étudiants à la dernière question

Ces réponses doivent être relativisés. Plusieurs étudiants choisissent, en effet, la preuve sur laquelle ils ont travaillé pendant les semaines avant la présentation orale. Ils mentionnent que

> *nous avons passé un certain temps à la préparer* [la preuve $(D_2)$] *et de ce fait, je la comprends beaucoup mieux que n'importe laquelle des* [autres] *présentations.*

Cependant, nous trouvons aussi d'autres justifications en lien avec leur perceptions personnelles des mathématiques.

> *Je choisirais bien entendu celle abordée par notre groupe $(D_4)$, même si ce n'est pas spécialement la plus simple, mais parce que je suis avant tout mathématicien, et je trouve que les concepts abordés sont plus intéressants que la simplicité de la preuve. Évidemment, le plus intéressant est de voir plusieurs versions de la preuve, ce qui est l'idéal pour comprendre vraiment en profondeur une matière [...]*

Enfin, nous présentons encore un commentaire d'un étudiant à propos de sa préférence pour $(D_4)$ par rapport aux trois autres preuves qui ouvre, d'après notre ressenti, le champ vers d'autres travaux didactiques.

> *Même si elle* [la preuve $(D_4)$] *est plus longue, elle évite le recours au théorèmes des fonctions implicites, théorème qui n'a été que rapidement vu en premier bac et qui, par conséquent, me semble encore un peu "obscur".*

Le Théorème des fonctions implicites semble donc jouer un rôle important dans la compréhension de la preuve du Théorème de Lagrange. Cette observation a déjà été rencontrée dans le Chapitre 4 et trouve un témoignage du côté des étudiants.

Pour terminer, nous présentons encore quelques commentaires des étudiants du public ($P_{\text{UNa-Math-Bac3}_{10/11}}$) qui ont participé au jeu de rôles (voir Section 8.6) et auxquels nous avons demandé quel intérêt ils accordaient au fait de démontrer le Théorème de Lagrange.

Un étudiant dit que

> *le théorème et sa démonstration amènent un cadre théorique valable à l'introduction d'une nouvelle méthode de travail.*

Un autre étudiant met en avant que

> *c'est important de voir d'où vient un résultat si important, et de ne pas devoir l'accepter sans preuve.*

En parlant des études, les justifications d'un théorème occupent une place de tout premier plan dans les cours de mathématiques de niveau universitaire comme le fait remarquer un étudiant :

> *Si on choisit d'étudier les sciences mathématiques, il faut insister sur les preuves et montrer pourquoi les méthodes marchent (ce qui distingue les mathématiques des autres sciences).*

Il est donc fait mention des tâches structurales comme outils qui permettent de constituer des blocs technologico-théoriques associés à des tâches procédurales.

Le Théorème des fonctions implicites est également mentionné dans les réponses des étudiants.

> *Démontrer le Théorème de Lagrange nous permet de mieux comprendre d'une part l'utilité du Théorème des fonctions implicites mais aussi de comprendre pourquoi nous obtenons un tel résultat.*

Ici, la preuve est vue comme un moyen de donner du sens au Théorème de Lagrange, mais également au Théorème des fonctions implicites, vu précédemment.

### 9.3.2 Conclusions

Il est important de relever que nous avons interrogé uniquement des étudiants en mathématiques. Avec cette remarque en tête il devient frappant que les étudiants font une distinction entre les mathématiques pour des mathématiciens et les mathématiques pour des non-mathématiciens. Nous apercevons surtout l'importance que ces étudiants attribuent aux démonstrations et à la rigueur en général lorsque le cours s'adresse à des futurs mathématiciens. Ils accordent une place importante à la démonstration dans ces cours puisque les mathématiques qui y sont enseignées ressemblent de plus en plus aux mathématiques des mathématiciens "savants". Cette observation a déjà été faite par d'autres didacticiens.

> *[...] les mathématiques enseignées à partir du lycée commencent à ressembler (et cela s'accentue au fur et à mesure de la scolarité) aux mathématiques des experts (mathématiciens professionnel), tant en ce qui concerne les savoirs que les pratiques attendues. (Robert, 1998, p.141)*

Comme nous l'avons explicité précédemment, la démonstration est au cœur de l'activité mathématique dans les cours pour mathématiciens. Les étudiants approuvent le fait que les mathématiques universitaires consacrent une place importante à la démonstration.

Il n'en est pas de même, d'après nos étudiants, pour les cours de mathématiques à destination de futurs économistes où la notion de preuve joue un rôle différent. En effet, son rôle est beaucoup plus dépendant des contextes étudiés (à savoir de l'économie ici). À ce moment, la notion d'une preuve en mathématiques est basée sur l'intuition, et le rôle explicatif est soutenu par des représentations graphiques si possible pour aider à "comprendre plus facilement". On pourrait encore dire que le premier objectif d'une preuve en économie n'est pas d'être rigoureuse et indiscutable (comme c'est le cas en mathématiques), mais d'être explicative et compréhensible.

Enfin, remarquons que nous avons rencontré cette distinction entre les preuves en mathématiques et en économie dans nos analyses des savoir à enseigner et enseigné sous la forme d'une séparation plus ou moins grande entre le procédural et le structural. On peut raisonnablement se demander si les opinions des étudiants ne sont pas seulement le résultat d'un enseignement qui véhicule ces idées.

## 9.4 Quel modèle d'$OD$ pour quel type d'étudiant ?

Afin de confronter les différentes $OD$ empiriques que nous avons observées aux attitudes et comportements des étudiants, nous nous servons dans cette section d'un questionnaire qui a été distribué au sein de trois de nos quatre publics. Le but de cette section est de reconnaître des comportements d'étudiants qui pourraient être mis en parallèle avec les différents modèles d'$OD$ et éventuellement aussi aux difficultés que nous avons déjà repérées en lien avec les tâches procédurales de type $T_2$ (voir à la page 249).

### 9.4.1 Description du questionnaire et méthodologie

Le questionnaire distribué était basé sur le questionnaire distribué au sein des professeurs (voir Section 6.4) et comportait soit 14, soit 11 questions ouvertes ou à choix multiples en fonction du public. Il a été proposé aux étudiants suivants :

**En sciences économiques et en ingénieur de gestion :**

$(P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}})$ : 189 étudiants ;
$(P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}})$ : 66 étudiants.

**En sciences mathématiques :**

$(P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}})$ : 33 étudiants.

255 étudiants inscrits dans des études économiques ont répondu au questionnaire comportant 14 questions et 33 étudiants inscrits en sciences mathématiques ont répondu à celui comportant 11 questions. La différence du nombre de questions est liée aux divergences entre les manuels et les cours qui sont adressés aux différents étudiants.

Le questionnaire a été proposé à la fin de l'année académique 2008-2009 aux publics $(P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}})$ et $(P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}})$. Les étudiants en sciences économiques et ingénieur de gestion ont été confrontés à ce questionnaire au moment de l'examen et ont dû répondre également à l'exercice d'évaluation concernant le Théorème de Lagrange qui a été décrit plus haut.

Le questionnaire a été distribué au public $(P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}})$ durant l'année académique 2009-2010. Ces étudiants en sciences mathématiques ont répondu aux différentes questions à la fin du chapitre traitant l'optimisation sous contrainte d'égalité et non au moment de l'examen.

Contrairement au questionnaire s'adressant aux enseignants (voir Section 6.4), le questionnaire des étudiants n'était pas décomposé en différentes sections. Néanmoins, les questions portaient sur les mêmes aspects.

L'intégralité du questionnaire comportant 14 questions est placé en annexe (voir Annexe B.2). Le but de cette section sera de reproduire uniquement l'analyse des réponses qui sont pertinentes avec notre analyse du savoir appris. C'est pourquoi nous choisissons d'analyser dans la suite uniquement les cinq questions les plus significatives. Voici l'énoncé des questions analysées :

**Question 3 :** *Avez-vous eu l'impression que*
- *le Théorème de Lagrange est une application de la théorie vue auparavant ?*
- *le Théorème de Lagrange constitue un nouvel élément du cours à étudier qui est indépendant de la matière vue avant ?*

- *le Théorème de Lagrange fait référence à des notions mathématiques dont vous ne vous souveniez plus ?*
- *le Théorème de Lagrange est un résultat important du cours ?*

**Question 5 :** *De quelle façon le professeur a-t-il vu le Théorème de Lagrange ?*

- *Le professeur a graphiquement illustré le théorème mais nous n'avons pas vu de preuve.*
- *Le professeur nous a présenté une preuve simple.*
- *Le professeur nous a montré une preuve très mathématique.*
- *Autre :* ..............................................................

**Question 6 :** *Si vous avez vu une preuve du Théorème de Lagrange, quel est, d'après vous, l'élément clé de la preuve du Théorème de Lagrange ?*

**Question 9 :** *Pourquoi résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange s'il y a moyen de procéder par substitution pour trouver les candidats à être extremum ?*

**Question 10 :** *On peut donner une interprétation des multiplicateurs de Lagrange.*

- *Ah bon ?*
- *Oui, les multiplicateurs de Lagrange jouent le rôle de* .....................

Après une analyse des cinq questions dans un premier temps, nous essayons, dans un deuxième temps, de croiser trois de ces questions entre-elles pour trouver des liens entre le savoir appris et les différents modèles d'$OD$ didactiques. Pour ce faire nous nous basons sur les questions et hypothèses qui sont décrites ci-dessous.

Notons que ces analyses ne seront pas réalisées en fonction de notre regard institutionnel annoncé. Le biais introduit par la collecte des données dû à des contraintes qui étaient indépendantes de nous (distribution du questionnaire à différents moments durant l'année académique) ne nous permettra pas de faire une classification selon la faculté d'appartenance.

### Questions et hypothèses

Pour reconnaître des comportements d'étudiants qui pourraient être mis en parallèle avec les différents modèles d'$OD$, nous sommes partis des questions suivantes :

- L'étudiant sait-il situer le Théorème de Lagrange dans le contexte du cours ? Est-il d'avis que le Théorème de Lagrange est un élément important du cours ? Considère-t-il le Théorème de Lagrange comme application de la théorie vue auparavant ?
- Tous les étudiants ont vu une justification du Théorème de Lagrange (preuve : ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) et ($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$) ; argumentation : ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) et ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$)). L'étudiant se souvient-il d'avoir vu une justification ? Quelle est, d'après lui, l'élément-clé de la démonstration ?
- L'étudiant a-t-il des avis sur la méthode de substitution, les multiplicateurs de Lagrange et d'autres points qui posent éventuellement problème dans la compréhension du théorème ?

Après une présentation des réponses des étudiants au questionnaire, nous croisons les différentes réponses entre-elles sur base d'hypothèses qui permettent de lier le comportement des étudiants aux différentes modèles d'$OD$.

Voici nos hypothèses de travail :

- Les résultats aux questions donnent un aperçu du savoir appris chez les étudiants quant aux tâches structurales et quant à la constitution d'un environnement technologico-théorique.
- Au moment de croiser les résultats entre-eux, un étudiant qui considère le Théorème de Lagrange uniquement comme résultat important du cours ou (exclusif) comme nouvel élément du cours à étudier indépendamment de la matière vue avant ou (exclusif) comme application de la théorie, sera considéré comme étudiant qui met l'accent sur le côté procédural du Théorème de Lagrange.
- Un étudiant qui donne plusieurs réponses à la question 3 sera considéré comme étudiant qui cherche à assimiler le côté procédural avec le côté structural.

En effet, nous supposons qu'un étudiant qui coche seulement une des réponses à la question 3 (ou plusieurs réponses étaient possibles) a plus de problèmes pour faire le lien entre la technique d'une tâche procédurale et la technologie associée. Nous dirons encore que c'est un étudiant qui s'accroche probablement plus aux moments exploratoires ou de travail de la technique qu'aux moments de constitution de l'environnement technologico-théorique. En analogie avec les modèles d'$OD$, nous qualifions un tel étudiant d'"empiriste". Un étudiant, au contraire, qui coche plusieurs réponses dont au moins le quatrième point (le Théorème de Lagrange est un résultat important du cours) considère le Théorème de Lagrange non seulement comme élément important du cours mais réussit aussi à faire le lien avec la théorie vue auparavant (dans un sens affirmatif ou négatif) et possède donc une vision plus flexible (et plus réifiée) du Théorème de Lagrange et des multiplicateurs car elle inclut des composantes procédurales et structurales qui sont liées entre-elles. Un tel étudiant sera qualifié de "complet" en terme de notre MER. Le troisième point de la question 3 (l'étudiant ne se souvient plus des notions mathématiques auxquelles le Théorème de Lagrange fait référence) est écarté de nos analyses parce qu'il est un indicateur d'un étudiant qui, a priori, n'a pas saisi l'enjeu du Théorème de Lagrange.

### 9.4.2 Analyse des résultats du questionnaire

#### Analyse des résultats

Notre analyse se passe en deux temps. Tout d'abord, nous présentons les résultats pour chaque question séparément. Dans un deuxième temps, nous choisissons trois des cinq questions et nous croisons les résultats entre-eux. Le nombre de réponses obtenues par question et par public se trouve entre parenthèses derrière chaque réponse : le premier nombre correspond au public ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$), le deuxième au public ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) et le troisième au public ($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$). Les questions sans réponses ne sont pas comptabilisées.

Notons encore une fois que le biais introduit par la collecte des données à différents moments de l'année académique (dans un cas après le cours, dans l'autre cas au moment de l'évaluation finale) rend impossible une classification fiable et cohérente selon l'institution d'appartenance.

*Statut du Théorème de Lagrange dans le cours*

Pour la première question analysée, sur 288 questionnaires, nous dénombrons :

- 161 étudiants qui considèrent le Théorème de Lagrange comme résultat important du cours (97+39+25).
- 154 étudiants qui jugent que le Théorème de Lagrange est une application de la théorie vue auparavant (99+36+19).
- 77 étudiants qui considèrent le Théorème de Lagrange comme nouvel élément du cours à étudier qui est indépendant de la matière vue avant (52+19+6).
- 43 étudiants qui ne se souviennent plus des notions mathématiques auxquelles le Théorème de Lagrange fait référence (34+4+5).

Ainsi, 56% des étudiants qualifient le Théorème de Lagrange de résultat important du cours et 53,5% des étudiants mentionnent qu'il s'agit d'une application de la théorie vue auparavant.

*Preuve ou argumentation ?*

Pour la deuxième question analysée, sur 288 questionnaires, nous dénombrons :

- 104 étudiants qui estiment avoir assisté à une justification simple (67+26+11).
- 90 étudiants qui ont vu une preuve très mathématique (44+33+13).
- 31 étudiants qui ont l'impression d'avoir vu seulement une illustration graphique du Théorème de Lagrange au cours (19+8+4).
- 27 autres réponses (16+2+9).

Une majorité d'étudiants affirme avoir vu une justification du Théorème de Lagrange au cours. Comme la question n'est pas suffisamment précise, nous ne faisons pas plus d'analyses. Cependant, nous relevons que plusieurs étudiants répondent que

> *le professeur a graphiquement illustré le théorème, puis nous a donné une preuve simple.*

*Élément clé de la justification*

Nous rappelons que les différents publics ont vu les preuves suivantes :

($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) : Argumentation basée sur une approche par "courbes de niveau tangentes".

($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) : Argumentation basée sur une approche par "courbes de niveau tangentes" et preuve par "utilisation du Théorème des fonctions implicites".

($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$) : Preuve par "pénalisation".

Comme les deux premiers publics ont été confrontés à l'approche standard tandis que le troisième a vu une approche par fonction lagrangienne, nous devons distinguer les publics ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) et ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$) du public ($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$). Parmi les étudiants en sciences économiques et de gestion, nous trouvons, entre autres, que les étudiants mentionnent les éléments suivants comme clé de la preuve :

- *la définition du multiplicateur de Lagrange ;*
- *le Théorème des fonctions implicites ;*
- *les dérivées partielles ;*
- *l'égalité entre les tangentes ;*
- *les fractions de dérivées qu'on égale à un nombre $\lambda$ ;*
- *l'intégration de la contrainte dans la fonction $f$. Il faut accepter que les $\lambda$ vienne remplacer la contrainte.*

Les étudiants font souvent référence à l'égalité entre les tangentes qui est observée sur des représentations graphiques ($T_{413}$). Le Théorème des fonctions implicites est également mentionné plusieurs fois comme argument important dans la justification du Théorème de Lagrange. Ces réponses peuvent être considérées comme pertinentes. Cependant, il faut remarquer que beaucoup d'étudiants voient la définition du multiplicateur de Lagrange $\lambda$ comme clé de la justification ($T_{401}$) or cette réponse est beaucoup moins pertinente que les précédentes dans le sens où la définition n'est pas un élément technologique de la preuve.

Les étudiants du public ($P_{\text{UCL-Bac1-Math}}$) qui ont vu une preuve de type $\theta_{131}$ (approche par pénalisation) ont mentionné "la méthode de pénalisation", le "lemme 5.1" ou encore l'"application du Théorème de Fermat" comme élément clé de la preuve. Il faudra noter qu'il y a des étudiants qui disent n'avoir pas encore

> *saisi l'entièreté de la preuve*

au moment du passage du questionnaire.

*Technique de substitution*

Cette question a provoqué la plus grande diversité dans les réponses. Les trois publics ont répondu à cette question. Le public ($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$) n'ayant pas vu explicitement la méthode de substitution au moment de l'introduction du Théorème de Lagrange, seuls 4 étudiants ont rempli le champ de la réponse. Ces quatre réponses sont écartées de notre analyse.

En conséquence, les réponses reportées sont issues des publics ($P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}}$) et ($P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}}$). Suivant leur réponse, nous regroupons les étudiants en quatre classes.

Dans le premier groupe, nous trouvons les étudiants qui essaient de répondre au mieux mais qui ne semblent pas être convaincus de leur réponse.

- *C'est une méthode plus générale qui permet surement d'éviter quelques pièges.*
- *Bonne question ! ? Probablement que la méthode a un intérêt qu'on n'a pas bien saisi... peut-être le cas de variation des contraintes (du budget par ex) car le multiplicateur dépend que du budget.*

Dans le deuxième groupe, les étudiants se focalisent sur les avantages "pratiques" dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

- *Car elle permet d'avoir tous les candidats possible alors qu'avec la substitution il nous en manquera.*
- *Méthode plus facile et plus systématique.*
- *Pour ne pas "perdre" des candidats extrémants et par soucis de facilité.*
- *Plus rapide et plus facile par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.*
- *Lagrange fonctionne souvent (dans de nombreux cas).*
- *Pour écourter le travail.*
- *Plus sûr.*

Cette catégorie montre la présence d'étudiants qui s'accrochent aux tâches procédurales et qui sont préoccupés en premier lieu par la résolution du problème.

La troisième classe d'étudiants regroupe ceux qui produisent un argument technologique :

- *Lorsqu'on a des contraintes difficiles à exprimer en fonction d'une variable.*

- *Résolution plus rigoureuse et moins longue bien qu'elle fasse appel à des notions diverses.*
- *Il n'est pas toujours possible d'isoler dans la contrainte un terme pour le substituer d'où l'intérêt de cette méthode.*
- *Car les contraintes d'égalité peuvent être tellement compliquées qu'il n'y a pas moyen de les ressortir.*

Il est clair que les étudiants de cette classe sont ouverts à la réification du Théorème de Lagrange par intégration du type de tâches $T_{21}$ dans l'$OM$ mise en place au travers d'un discours technologique développé.

La quatrième classe d'étudiants met l'accent sur la disponibilité d'un multiplicateur de Lagrange à la sortie de la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

- *Lagrange est une méthode plus systématique et elle permet de trouver $\lambda$ qui est un indicateur de le sensibilité de la fonction à la contrainte.*
- *Le paramètre $\lambda$ permet de déduire d'autres choses que juste des extrémants.*
- *Car le paramètre du Lagrangien permet par la suite de calculer aisément une variation d'optimisation en fonction de la variation de la contrainte.*
- *Pour une variation des contraintes il est simple de retomber sur le minimum ou maximum nouveau.*
- *Parce que si on connaît la valeur des multiplicateurs on peut estimer la sensibilité du maximum à une variation du terme indépendant de la contrainte.*

Cette classe fait état des tâches procédurales et structurales des organisations mathématiques locales élémentaires $OM_3$ et $OM_5$.

La diversité des réponses montre bien qu'une même explication peut être perçue de façon différente ce qui rend l'analyse du savoir appris tellement compliquée.

*Interprétation du multiplicateur de Lagrange*

Nous retirons les étudiants du public ($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$) de cette question car ils n'ont pas été confrontés à la signification du multiplicateur de Lagrange. Parmi les deux autres publics, 35% ne semblent pas savoir que le multiplicateur de Lagrange possède une signification réelle. Les réponses les plus souvent obtenues sont :

- *coefficient de proportionnalité entre les dérivées de $f$ et de $g$.*
- *indicateur de la sensibilité de la fonction à la contrainte.*
- *indicateur de la répercussions d'une variation d'une contrainte.*
- *variation de la fonction par rapport à une variation des contraintes.*
- *mesure de l'influence de la variation d'une contrainte sur les extrema.*
- *proportion de variation entre l'optimum et la contrainte.*

Plusieurs réponses font allusion à la définition du multiplicateur de Lagrange, tandis que la plupart des étudiants qui répondent à cette question présentent une explication (précise ou non) qui est liée au travail des organisations $OM_3$ et $OM_5$.

### Croisement des résultats

Lorsque nous croisons les réponses des questions citées ci-dessus entre-elles, nous enlevons le public ($P_{\text{UCL-Math-Bac1}_{09/10}}$) de nos analyses, car ces étudiants n'ont ni vu la méthode de substitution en lien avec le Théorème de Lagrange, ni attribué une signification au multiplicateur de Lagrange. Nous considérons donc un échantillon de 255 questionnaires ($(P_{\text{UNa-Éco-Bac1}_{08/09}})$ : 189 étudiants, $(P_{\text{ULg-Éco-Bac2}_{08/09}})$ : 66 étudiants).

Comme mentionné plus haut, les réponses à la question 3 sont l'indicateur dans nos analyses. Nous la rappelons :

*Avez-vous eu l'impression que*

1. *le Théorème de Lagrange est une application de la théorie vue auparavant ?*
2. *le Théorème de Lagrange constitue un nouvel élément du cours à étudier qui est indépendant de la matière vue avant ?*
3. *le Théorème de Lagrange fait référence à des notions mathématiques dont vous ne vous souveniez plus ?*
4. *le Théorème de Lagrange est un résultat important du cours ?*

Cette question cherche donc à savoir quel statut le Théorème de Lagrange occupe dans le cours d'après les étudiants. Les effectifs de réponses à cette question sont les suivants :

- 117 étudiants ont donné la réponse 1, 2 ou 4 (exclusivement) (45,9%),
- 92 étudiants ont répondu une combinaison 1-4 ou 2-4 (36%) et
- 46 étudiants ont donné une autre réponse (18,1%).

Rappelons que nous supposons qu'un étudiant qui coche seulement une des réponses à cette question a plus de problèmes pour faire le lien entre la technique d'une tâche procédurale et la technologie associée. Nous dirons encore que c'est un étudiant qui s'accroche probablement plus aux moments exploratoires ou de travail de la technique qu'aux moments de constitution de l'environnement technologico-théorique. En analogie avec les modèles d'$OD$, nous avons qualifié un tel étudiant d'"empiriste". Un étudiant, au contraire, qui coche plusieurs réponses dont au moins la quatrième considère, dans nos hypothèses, le Théorème de Lagrange non seulement comme élément important du cours mais réussit aussi à faire le lien avec la théorie vue auparavant (dans un sens affirmatif ou négatif) et possède donc une vision plus flexible (et plus réifiée) du Théorème de Lagrange et des multiplicateurs. En effet, sa vision inclut des composantes procédurales et structurales qui sont liées entre-elles. Un tel étudiant a été qualifié de "complet".

Présentons maintenant le croisement entre la question 3 et les questions 9 et 10. En effet, les questions 9 et 10 ont visé des explications d'ordre technologique. Nous nous attendons à trouver un lien avec nos deux catégories d'étudiants. Un étudiant empiriste répond, d'après nos hypothèses, moins probablement aux deux questions 9 et 10. Un étudiant complet devrait savoir répondre aux deux questions. Les résultats de ce croisement se trouvent dans le Tableau 9.3.

| | | Étudiants ayant répondu aux questions 9 ET 10 | |
|---|---|---|---|
| | | oui | non |
| Question 3 | empiriste | 25/117 | 92/117 |
| | complet | 36/92 | 56/92 |

TABLEAU 9.3 – Croisement des résultats aux questions 3, 9 et 10 du questionnaire

La différence entre les différents catégories d'étudiants est visible. Le pourcentage d'étudiants qui répondent aux deux questions 9 et 10 double quasi d'une catégorie à l'autre en passant de 21% à 39%. Notre hypothèse semble être vérifiée qu'un étudiant "empiriste" possède des connaissances qui sont plutôt d'ordre technique que technologique, en ce sens que ceux-ci sont capables de reproduire des techniques de travail de façon convenable sans pour autant être en état de se référer aux justifications technologiques associées à ces techniques. Les blocs practico-technique et technologico-théorique sont, dans ce cas, plutôt déconnectés.

### 9.4.3 Conclusions

Dans l'objectif de présenter un aperçu du savoir appris chez les étudiants, l'analyse des résultats du questionnaire nous permet de conclure que ce savoir appris est fort variable. Ainsi, nous avons retrouvé des étudiants qui s'accrochent plutôt à des éléments praxéologiques d'ordre technique ou plutôt à des éléments d'ordre technique et technologique. De là, nous faisons l'hypothèse que toutes les formes d'enseignement ne semblent pas convenir à tous les étudiants. En fonction de nos profils d'étudiants, il serait intéressant d'étudier le type d'$OD$ qui convient le mieux mais ceci dépasse largement le cadre de cette thèse. Signalons toutefois le caractère exploratoire et très approximatif de cette étude.

## 9.5 Difficultés des étudiants non expliquées

De toute évidence, l'apprentissage du Théorème de Lagrange s'accompagne de difficultés qui rendent la réalisation des tâches procédurales, tout comme celle des tâches structurales difficile. Notre MER ne permet pas d'expliquer toutes ces difficultés. Ainsi, nous présentons dans cette section une liste des difficultés que nous avons repérées et qui touchent plutôt à l'activité générale au cours mathématiques.

De nombreuses difficultés rencontrées se situent au niveau des pré-requis. En particulier, nous mentionnons les compétences nécessaires pour résoudre les sous-tâches à l'intérieur de nos tâches procédurales telles que la résolution des systèmes d'équations (linéaires et/ou non linéaires), le calcul des dérivées partielles ou le calcul de déterminants de matrices.

Nous mentionnons également le problème de la modélisation qui est considéré comme la "mise en équations" de problèmes "concrets". La question d'"enseigner les techniques de modélisation" ne figure souvent pas au premier plan de l'enseignement des mathématiques à l'université.

Au niveau des tâches structurales qui touchent au fonctionnement propre des mathématiques, nous signalons la difficulté que les étudiants ont à distinguer une condition nécessaire d'une condition suffisante. Nous avons pu l'observer en particulier lors du dispositif expérimental du jeu de rôle (voir Section 8.6), où tous les groupes ont réalisé une illustration graphique du Théorème de Lagrange ($T_{413}$), à l'image du manuel, comme introduction. Mais, alors que le manuel à leur disposition présente bien le sens de ce support visuel : le Théorème de Lagrange est une condition nécessaire d'optimalité, le sens donné à ces graphiques par les étudiants était à chaque fois que les points en lesquels les tangentes entre les courbes de niveau de la fonction objectif et de la contrainte sont identiques, fournissent une solution du problème d'optimisation. Autrement dit, les étudiants ont utilisé le critère de tangence comme condition suffisante. Or le Théorème de Lagrange suppose le problème résolu et donne une caractérisation des solutions. Cette subtilité n'a pas été perçue par nous dans les explications orales des étudiants. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la Section 1.5.1.0 pour plus d'explications concernant les problèmes conceptuels que les étudiants peuvent rencontrer en manipulant conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

Enfin, signalons la confirmation expérimentale d'une difficulté soulevée dans le Chapitre 1 (voir à la page 25) que nous n'avons pas cherché à expliquer. La Question 4 de notre questionnaire s'intéressait à la construction de la fonction lagrangienne.

> **Question 4 :** *Qu'est-ce que c'est la fonction lagrangienne (ou le Lagrangien) ?*
> – *La définition est :*
> – *Je ne me souviens plus !*
> – *Je n'en ai jamais entendu parler !*

Bien que cette question n'ait pas été analysée dans cette thèse (car les réponses sont peu significatives pour de diverses raisons), nous avons trouvé quelques réponses intéressantes. Outre les réponses qui donnent une définition mathématique correcte,

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - k] \, .$$

ou

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (b_j - g_j(x_1, \ldots, x_n)) \, ,$$

nous avons obtenu quelques définitions issues du registre du langage naturel,

> [la fonction lagrangienne est] *la fonction qui regroupe la fonction de base que l'on veut optimiser additionnée au multiplicateur de Lagrange fois la contrainte,*

ou d'une combinaison des registres symbolique et du langage naturel,

> [la fonction lagrangienne est] *la fonction additionnée par $\lambda$ fois la contrainte* [ou] *fonction - $\lambda$(contrainte).*

Il est alors intéressant de noter que nous avons observé plusieurs fois un oubli du membre de droite de la contrainte dans l'écriture de la fonction lagrangienne. Ainsi, la fonction lagrangienne s'écrit chez les étudiants

> $\mathcal{L} = f(x) + \lambda g(x)$ [ou] $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ ,

où l'écriture initiale de la contrainte est $g(x) = b$ ou $g(x, y) = k$. Une distinction à faire entre des contraintes de type $g(x, y) \leq 0$ et de type $g(x, y) \leq k \Leftrightarrow g(x, y) - k \leq 0$ intervient comme problème perturbateur dans la construction de la fonction lagrangienne.

## 9.6 Conclusions du chapitre

Nous avons présenté dans ce chapitre divers dispositifs qui s'intéressent et concernent le thème du Théorème de Lagrange. Ces dispositifs ont été mis en place dans le cadre de l'examen, des travaux de groupe ou simplement sous forme de questionnaires distribués après le cours. Suite à la réalisation de ces expérimentations, nous avons recueilli et analysé les données.

L'analyse du savoir appris relatif au Théorème de Lagrange a révélé l'existence de difficultés persistantes et récurrentes dans les différentes productions des étudiants. Certaines de ces difficultés sont liées à l'environnement du Théorème de Lagrange et d'autres sont plus générales et concernent la pratique de résolution de problèmes (résolution d'un système d'équations, modélisation mathématique d'un problème).

Dans la section concernant la perception des tâches procédurales, nous avons observé que les étudiants étaient capables de reproduire convenablement des techniques apprises sans avoir nécessairement besoin de se rapporter aux justifications technologiques associées ou de se soucier de la cohérence de la technique utilisée avec la technologie connue. En effet, 15,6% des étudiants ont répondu correctement à toutes les parties de notre question d'examen.

En ce qui concerne le rôle de la preuve, nous avons mis en avant l'importance que des futurs mathématiciens accordent à l'activité de démonstration. Les réponses recueillies montrent également que le rôle de la preuve semble être différent s'il s'agit de s'adresser à un public de mathématiciens ou de non-mathématiciens. Ainsi, si l'un des rôles de la démonstration est d'assurer la validité d'un résultat lorsqu'on est face à des futurs mathématiciens (la démonstration est vue comme processus et comme résultat d'une tâche structurale). Les étudiants insistent principalement sur le rôle d'explication de la preuve lorsque la démonstration est issue d'un cours destiné à des non-mathématiciens (la démonstration est vue comme élément technologique associé à une tâche procédurale). Ainsi, la validité d'une justification est au premier plan d'un cours pour mathématiciens, tandis que la compréhensibilité doit être le premier atout d'une justification pour des économistes d'après les étudiants. Un élément qui est sujet à discussion dans les démonstrations du Théorème de Lagrange est le rôle du Théorème des fonctions implicites.

Ce chapitre termine notre regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie.

# Conclusion

L'enseignement universitaire n'échappe pas aux nombreux défis qui se posent aux niveaux primaire et secondaire mais possède ses propres spécificités, notamment liées au niveau des mathématiques y enseignées. La didactique des mathématiques en est bien consciente et de plus en plus de travaux et de réflexions s'accordent pour créer des outils d'analyse pertinents pour ce niveau d'enseignement. Plusieurs colloques récents témoignent d'ailleurs de cet intérêt pour l'enseignement des mathématiques au niveau postsecondaire :

> *Advanced Mathematical Thinking (AMT) groups ran both in previous CERME and PME conferences ; sessions exclusively on university mathematics education are part of the EMF conferences since 2006 ; the RUME, UMT and Delta conferences emerged in the USA, the UK and South Africa respectively ; the International Conferences on the Teaching of Mathematics at University Level were launched in 1998 ; etc.* (Nardi et al., 2012, à paraître)

Notre thèse s'inscrit dans ce contexte en se préoccupant d'un sujet très spécifique : le Théorème de Lagrange en optimisation et s'intéresse, en plus, à deux publics d'étudiants différents : les étudiants en sciences mathématiques et les étudiants en sciences économiques et de gestion.

Comme cela se passe régulièrement, nos travaux sont partis de notre expérience d'enseignant, interpellé par les difficultés rencontrées par les étudiants lors de la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes d'égalité ou de l'interprétation des multiplicateurs de Lagrange associés à la résolution de ces problèmes.

Notre idée initiale consistait à partir d'une analyse épistémologique du cadre mathématique en question pour identifier les obstacles y liés et développer une ingénierie susceptible d'améliorer l'enseignement du thème d'étude qui nous occupait.

Au fur et à mesure de l'avancée de nos travaux, nous avons néanmoins pris conscience des conséquences de notre choix de sujet. L'écart entre le niveau de mathématiques investigué par des recherches en didactique au niveau postsecondaire et le niveau auquel nous nous intéressions était très important et il s'est avéré que, sans une analyse fouillée et minutieuse du thème que nous avions décidé d'étudier, les propositions d'enseignement que nous pourrions formuler n'auraient que peu de chances d'être pertinentes.

Ainsi, force est de constater, à l'heure où nous écrivons ces lignes, que notre objectif initial est loin d'être atteint. Néanmoins, nous espérons que cette étude pourra être considérée comme une base solide sur laquelle de futurs travaux pourront s'appuyer pour, pourquoi pas, parvenir au but qui fût le nôtre au départ de ce travail.

## Principaux résultats de la thèse et limites de notre recherche

Précisons à présent quelque peu les principaux résultats obtenus dans les différents chapitres.

La première partie de cette thèse a été consacrée à la mise en place des fondements théoriques nécessaires à nos analyses. D'une part, le cadre mathématique a été précisé grâce à une analyse épistémologique détaillée du savoir savant relatif à la théorie de l'optimisation en mathématiques et en économie. D'autre part, la Théorie Anthropologique du Didactique et, en particulier, les outils de la transposition didactique et des organisations mathématiques ont été posés comme base théorique pertinente pour notre recherche.

Ces différentes étapes nous ont permis d'aboutir à l'explicitation de trois questions de recherches principales :

1. Quelles formes d'enseignement du Théorème de Lagrange rencontre-t-on ?
2. Quel rôle joue la preuve du Théorème de Lagrange dans l'enseignement mais aussi dans l'apprentissage du Théorème de Lagrange ?
3. A quelles difficultés un étudiant en mathématiques ou en économie est-il confronté lorsque le Théorème de Lagrange lui est enseigné ?

Tentons à présent de dégager des différents chapitres les éléments de réponse que notre travail aura permis d'apporter à ces questions.

Relativement à la question 1, le Théorème de Lagrange est rapidement apparu comme un thème d'étude autour duquel s'articulent différentes organisations mathématiques locales. Notre analyse du savoir savant nous a permis de créer un modèle épistémologique de référence (MER) qui a légitimé nos analyses tout au long de nos recherches. Ce MER comporte cinq $OM$ locales élémentaires parmi lesquelles nous distinguons les $OM$ basées sur des types de tâches procédurales des $OM$ basées sur des types de tâches structurales. Cette distinction nous est apparue comme spécifique à l'enseignement universitaire où les activités de démonstration et d'argumentation font partie intégrante des tâches travaillées. Ainsi, dans notre MER, nous distinguons le bloc technologico-théorique d'une tâche procédurale et le bloc practico-technique d'une tâche structurale dans le sens où la technologie de la tâche procédurale considérée est produite par la technique associée à la tâche structurale correspondante. C'est la théorie de Sfard qui, avec le processus de réification, nous permet de fournir une dynamique à notre MER.

Notre MER nous semble, de plus, avoir mis en avant la puissance de la TAD comme outil d'analyse et de description du processus didactique.

À la suite du savoir savant, l'analyse du savoir à enseigner présent dans cinq manuels variés nous a permis de faire émerger différentes présentations du Théorème de Lagrange et de proposer une typologie des manuels analysés. Le savoir enseigné a, quant à lui, été observé lors de trois cours dans trois institutions différentes et a été mis en relation avec notre analyse du savoir à enseigner. De cette comparaison est issue l'identification de modèles d'organisations didactiques ($OD$) empiriques qui ont permis d'associer, en ce qui concerne les cinq manuels analysés, les $OD$ en mathématiques à des $OD$ classiques et les $OD$ en économie à des $OD$ constructivistes. Rappelons que nous n'avons observé que les cours théoriques alors que d'autres types de séances (tels que les travaux pratiques ou les travaux dirigés) font partie du système didactique à l'université. Les réponses de plusieurs enseignants à notre questionnaire ont pu confirmer nos conclusions.

De toutes ces analyses, il ressort, en lien avec notre première question,

- deux types de manuels : inductif ou déductif ainsi que deux modes d'intervention de la technique : générique ou ponctuel ;
- deux types d'$OD$ : classique ou constructiviste ; le premier étant plutôt, sur base de notre échantillon, associé aux manuels en mathématiques, le second aux manuels en économie ;
- la présence ou l'absence de tâches structurales permettant de constituer un bloc technologico-théorique efficace ;
- deux objectifs distincts : soit la résolution des problèmes de type $T_2$, soit la démonstration du Théorème de Lagrange, ces objectifs étant respectivement liés au caractère explicatif ou vérificatif de la preuve.

Concernant la question 2, relative au rôle de la preuve du Théorème de Lagrange, nous avons commencé par distinguer les justifications à caractère vérificatif des justifications à caractère explicatif et avons ensuite fait une différence entre "preuve" et "argumentation", la première s'appuyant sur le raisonnement déductif pour construire un enchaînement valide de propositions, la seconde cherchant avant tout à convaincre le lecteur et privilégiant la continuité sémantique. Ces distinctions se sont retrouvées bien présente dans les cinq manuels analysés ainsi que les séances de cours observées.

Différents critères nous ont ensuite guidé dans l'analyse des sept justifications que nous avons identifiées dans la littérature. En plus du caractère explicatif ou vérificatif, nous avons mis en évidence les registres de représentations sémiotiques utilisés dans le discours technologique ainsi que les principaux cadres dans lesquels s'inscrivaient la justification. Enfin, nous avons insisté sur la présence ou l'absence d'un recours au Théorème de fonctions implicites pour justifier le Théorème de Lagrange. Des résultats ressort assez clairement le rôle du Théorème des fonctions implicites. En effet, les discours technologiques rencontrés n'ayant pas explicitement recours à ce dernier, semblent avoir été conçus précisément dans le but d'éviter son utilisation et font alors appel à des concepts assez élaborés. Malheureusement, nous n'avons trouvé aucune recherche en didactique des mathématiques investiguant ce domaine.

Nos analyses du savoir à enseigner et enseigné ont permis de lier la preuve du Théorème de Lagrange au type de discours présent dans le manuel, mais également lors des séances de cours. Ainsi, dans les manuels il semble y avoir deux tendances : présenter une preuve qui vérifie au mieux le Théorème de Lagrange ou présenter une preuve qui explique au mieux la technique des multiplicateurs de Lagrange. Cela nous semble rejoindre l'idée de l'importance accordée soit aux tâches procédurales, soit aux tâches structurales mais nos analyses n'ont pas permis de le confirmer.

Par contre, l'expérimentation menée avec les étudiants de troisième année a à nouveau souligné le rôle du Théorème des fonctions implicites dans la compréhension de la preuve du Théorème de Lagrange. Cela s'est reflété, chez les étudiants en mathématiques confrontés au choix d'une preuve pour des étudiants de Bac 1, dans le choix majoritaire d'une preuve n'ayant pas recours au Théorème des fonctions implicites si le public est composé d'étudiants en mathématiques et dans l'orientation vers une argumentation utilisant le Théorème des fonctions implicites lorsque le public est composé d'étudiants en économie. Ainsi, les difficultés relatives au Théorème des fonctions implicites, non encore investiguées, nous semblent de nature à contribuer à la technicisation des procédures relatives au Théorème de Lagrange.

La question 3, quant à elle, était relative au savoir appris et a été traitée dans le dernier chapitre de cette thèse. Le savoir appris, bien que difficilement accessible, a été étudié au travers de questionnaires, de travaux d'étudiants ou encore d'évaluations et a été relié aux résultats obtenus dans les chapitres précédents. Rappelons que de nombreuses contraintes ont pesé lors des recueils de données et que celles-ci limitent nos conclusions et nos possibilités de croisement des résultats.

Nos analyses nous ont conduit à questionner les conceptions des étudiants relativement aux mathématiques en général, à l'argumentation mathématique et, plus particulièrement aux théories de l'optimisation et au Théorème de Lagrange.

Différents profils d'étudiants ont pu être mis en évidence : les uns plus attachés aux tâches procédurales et au travail de la technique, les autres possédant une vision plus flexible du Théorème de Lagrange et cherchant à relier les composantes procédurales et structurales.

Concernant le statut de la preuve, les étudiants en mathématiques interrogés l'identifient comme différent suivant le public d'apprenants auquel l'argumentation est destinée. Le caractère explicatif semble devoir primer lorsqu'on s'adresse à des non-mathématiciens tandis que l'accent devrait être mis sur le caractère rigoureux et vérificatif face à un public de mathématiciens, certains étudiants considérant même qu'une preuve est mathématique parce qu'elle est abstraite ou complexe.

Ainsi que nos analyses précédentes l'avaient anticipé, nous avons mis en évidence plusieurs difficultés récurrentes liées au thème du Théorème de Lagrange qui sont liées au repérage des solutions parmi les candidats, à la condition de régularité, au Théorème des fonctions implicites ou encore au statut du multiplicateur de Lagrange. La récurrence de ces sujets tout au long de la transposition didactique nous pousse à les considérer comme autant d'obstacles épistémologiques au sens de Bachelard (1999). Des difficultés plus propres au fonctionnement interne des mathématiques ont également été relevées mais sont extérieures au thème qui nous occupe. Citons, à titre d'exemple, la résolution des systèmes linéaires (Dorier, 2000) ou encore le statut de l'implication et les notions de conditions nécessaire et suffisante (Deloustal-Jorrand, 2004).

Revenons à présent sur les limites de ce travail. Il apparaît clairement, tout au long de ces pages, que les données recueillies sont insuffisantes pour tirer des conclusions générales, en particulier relativement au point de vue institutionnel que nous avons souhaité adopter. En effet, à plusieurs reprises, nous disposons de données relatives à une institution mais n'avons pu complètement mener l'expérimentation correspondante dans l'autre institution. De même, là où des comparaisons entre les différentes étapes de la transposition didactique auraient été pertinentes, l'écart entre les années académiques durant lesquelles les expérimentations ont eu lieu nous a parfois empêché d'obtenir des résultats satisfaisants. Enfin, la spécificité des enseignants ayant participé à nos expérimentations nous a permis d'explorer une transposition externe que nous avons qualifiée d'"inter-institutionnelle" dans le sens où elle est réalisée par un enseignant (ou un collectif d'enseignants) mathématicien à destination d'étudiants en économie ainsi que la transposition externe classique au sein de l'institution $I_{\text{Math}}$ mais nous n'avons pas eu accès à la transposition externe au sein de l'institution $I_{\text{Éco}}$ puisqu'aucun enseignant économiste n'a pu être observé. Ainsi, les résultats proposés ici sont-ils à prendre avec toutes les réserves qui s'imposent. Par contre, ces limitations nous semblent ouvrir la voie à de futures expérimentations dont le cadre serait à présent bien défini.

## Questions ouvertes et perspectives

Toute cette recherche a soulevé pour nous bien plus de questions que celles auxquelles elle aura permis d'apporter un élément de réponse. Nous souhaitons ici partager ces réflexions qui nous tiennent à cœur.

- Peut-on imaginer un enseignement plus interdisciplinaire entre mathématiques et économie lorsque les concepts sont pertinents dans les deux disciplines ?
- Le Théorème des Fonctions Implicites joue un rôle crucial dans l'analyse des fonctions de plusieurs variables et les difficultés qu'il suscite ont été mises en évidence régulièrement dans cette thèse. Des études poussées dans ce domaine nous semblent vraiment nécessaires.
- Les conceptions des étudiants de troisième année en mathématiques relativement au rôle de la preuve sont interpellantes. Celle-ci, pour être pertinente pour un public de futurs mathématiciens, devrait être abstraite et complexe. Quelle ingénierie mettre en place pour concilier l'exigence de rigueur avec les bénéfices d'une preuve à caractère explicatif ?
- Les quelques analyses portant sur des évaluations montrent que l'évaluation des blocs technique et technologique est très cloisonnée, même lorsque les savoirs à enseigner et enseigné ont mis l'accent sur leur articulation. Peut-on repenser l'évaluation pour y insérer cette articulation ?
- Le contrat didactique universitaire est-il encore adapté aux attentes actuelles de la société vis-à-vis des futurs professionnels ? En particulier, nos travaux ont mis en évidence que, dans les universités belges, le côté structural est souvent plus développé aux cours théoriques, qui concentrent l'activité mathématique plus sur la constitution de l'environnement technologico-théorique d'une tâche tandis que le bloc practico-technique d'une tâche procédurale est souvent réservé aux séances d'exercices. Cette contrainte mésogénétique nous semble peser lourd dans la perspective de la recherche d'une articulation plus forte entre les blocs technique et technologique.

Enfin, nous terminerons cette conclusion par une perspective qui nous tient particulièrement à cœur puisqu'elle était un de nos objectifs initiaux. Ainsi, la conception d'une ingénierie didactique relative au Théorème de Lagrange nous semble se situer directement dans la continuité de nos travaux et nous espérons vraiment pouvoir utiliser nos résultats afin de contribuer à améliorer l'enseignement de ce thème particulier des mathématiques avancées.

# Références


Allaire, G. (2006). *Conception optimale de structures.* New York : Springer.

Artaud, M. (1993). La mathématisation en économie comme problème didactique : Une étude exploratoire. *Thèse doctorale en didactique des mathématiques*.

Artaud, M. (2003). Diffuser des praxéologies mathématiques mixtes. In M. Abdeljaouad (Ed.), *Actes du colloque EMF 2003.* Tozeur : Éditions CNP.

Ba, C., & Dorier, J.-L. (2010). Lien entre mathématiques et physique dans l'enseignement secondaire : Un problème de profession ? L'exemple des vecteurs. In A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. (Apports de la théorie anthropologique du didactique)* (p. 289-306). Montpellier : IUFM.

Bachelard, G. (1999). *La formation de l'esprit scientifique, 1ère édition (1938).* Paris : Librairie philosophique Vrin.

Bair, J. (2003). *Analyse mathématique.* Liège.

Bertsekas, D. P. (1999). *Nonlinear programming : Second edition.* Belmont, CA : Athena Scientific.

Bonnans, J.-F., Gilbert, J.-C., Lemaréchal, C., & Sagastizábal, C. (1998). *Optimisation numérique : Aspects théoriques et pratiques.* New York : Springer.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascòn, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(2.3), 205-250.

Bosch, M., & Gascón, J. (2002). Organiser l'étude, 2. Théories et empiries. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIième école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, *58*, 51-65.

Bridoux, S. (2009). Une séquence d'introduction des notions de topologie dans $\mathbb{R}^n$ : De la conception à l'expérimentation. In A. Kuzniak & M. Sokhna (Eds.), *Actes du* *colloque EMF 2003.* Dakar : Université Cheikh Anta Diop.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Carathéodory, C. (1935). *Variationsrechnung und partielle Differential Gleichungen erster Ordnung.* Leipzig : B. G. Teubner.

Castela, C., & Romo Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *31*(1), 79-130.

Cazarro, J.-P., Noël, G., Pourbaix, F., & Tilleuil, P. (2001). *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes.* Bruxelles : De Boeck & Larcier.

Chatterji, S. D. (1997). *Cours d'analyse, tome 1 : Analyse vectorielle.* Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Chevallard, Y. (1988). *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation.* Aix-Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'Étude, 3. Écologie et régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIième école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude, 1. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIième école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury & M. Caillot (Eds.), *Rapport au savoir et didactiques.* Paris : Faber.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. aportaciones de la teoría antropológica de la didáctica* (p. 705-746). Jaén : Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Clerc, J.-B., Minder, P., & Roduit, G. (2006). *La transposition didactique.* Consulté le 3 novembre 2010, sur `http://www.tacite.ch/doc/Histoire%20%28site%29/Didactique/Didactique%20generale/Fichier%202009/TranspositionDidactique.pdf`

Coulange, L. (1997). Une étude sur la modélisation dans la classe de mathématiques en Seconde - Un double point de vue à partir de l'écologie et du contrat didactique. *Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques.*

Courant, R. (1937). *Differential and integral calculus, translated by McShane, E.J.* (Vol. 2). London : Blackie & Son Limited.

Cournot, A. A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses.* Paris : Hachette.

Creedy, J. (1980). The early use of Lagrange multipliers in economics. *The Economic Journal*, *90*(358), 371-376.

Davidsen, T. (1986). Westergaard, Edgeworth and the use of Lagrange multipliers in economics. *The Economic Journal*, *96*(383), 808-11.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). *Le concept d'implication : Étude épistémologique et didactique.* Thèse de doctorat non publiée, Université Joseph Fourier, Grenoble.

De Vleeschouwer, M. (2010). *Enseignement à l'université, perspective institutionnelle et contrat didactique : le cas de la dualité en algèbre linéaire* (Thèse doctorale en sciences éd.). Namur : Presses universitaires de Namur.

Dorier, J.-L. (1993). Une expérience de niveau 'méta' visant à changer le rapport aux mathématiques d'étudiants en sciences économiques. In R. Noirfalise (Ed.), *Actes de la VIIième école d'été de didactique des mathématiques* (p. 84-89). Clermont-Ferrand : IREM.

Dorier, J.-L. (2000). *Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions* (Cahier du laboratoire Leibniz N° 12). Grenoble : Université Joseph Fourier. (`http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/index.html`)

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Douchet, J., & Zwahlen, B. (1986). *Calcul différentiel et intégral 2 - Fonctions réelles de plusieurs variables réelles.* Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht : Kluwer.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive. *Petit x*, *31*, 37-61.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Fraser, C. G. (2005). Joseph Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, first edition (1797). In I. Grattan-Guinness (Ed.), *Landmark writings in western mathematics 1640-1940.* Amsterdam : Elsevier B.V.

Gale, D., Kuhn, H. W., & Tucker, A. W. (1951). Linear programming and the theory of games. In T. C. Koopmans (Ed.), *Activity analysis of production and allocation* (p. 287-297). New York : Wiley.

Gilbert, J. C. (2003). *Optimisation différentiable - Théorie et algorithmes.* Rocquencourt.

Goldstine, H. H. (1980). *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century.* New York : Springer.

Gueudet, G. (2008). La transition secondaire-supérieur : Résultats de recherches didactiques et perspectives. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques. cours de la XIIIième école d'été de didactique des mathématiques* (p. 159-175). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Guibet Lafaye, C. (2009). *Penser le bonheur aujourd'hui.* Louvain-la-Neuve : Presses universitaires de Louvain.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Harris, B. (2007). Lagrange : A well-behaved function. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *4*(1), 128-137.

Henry, V. (2003). La notion d'infiniment petit en économie : Historique et implications didactiques. In M. Abdeljaouad (Ed.), *Actes du colloque EMF 2003.* Tozeur : Éditions CNP.

Henry, V. (2004). Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futurs économistes. *Thèse doctorale en didactique des mathématiques.*

Hestenes, M. R. (1975). *Optimization theory : The finite dimensional case.* New York : John Wiley & Sons.

Hiriart-Urruty, J.-B. (2003). L'optimisation : Deux ou trois choses que je sais d'elle. *Revue Matapli*, *71*, 31-53.

Hiriart-Urruty, J.-B. (2007). *Les mathématiques du mieux faire. Volume 1 : Premiers pas en optimisation.* Paris : Editions Ellipses.

Hiriart-Urruty, J.-B. (2008). Du calcul différentiel au calcul variationnel : Un aperçu de l'évolution de Pierre Fermat à nos jours. *Quadrature*, *70*, 8-18.

Hiriart-Urruty, J.-B. (2009). *Optimisation et analyse convexe.* Les Ulis : EDP Sciences.

Kalman, D. (2009a). Leveling with Lagrange : An alternate view of constrained optimization. *Mathematics Magazine*, *82*(3), 186-196.

Kalman, D. (2009b). *Uncommon mathematical excursions - Polynomia and related realms.* Washington, DC : The Mathematical Association of America.

Klein, D. (2010). *Lagrange multipliers without permanent scarring.* Consulté le 19 novembre 2010, sur `http://www.cs.berkeley.edu/~klein/papers/lagrange-multipliers.pdf`

Knoerr, A. P. (1998). A dynamical proof of the method of Lagrange. *SIAM review*, *40*(4), 941-944.

Laborde, C., & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Introduction teaching situations as object of research : Empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 1-12.

Lagrange, J.-L. (1811). *Mécanique analytique* (Nouvelle édition, revue et augmentée par l'Auteur éd.). Paris : Courcier.

Lagrange, J.-L. (1813). *Théorie des fonctions analytiques : Contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies* (Nouvelle édition, revue et augmentée par l'Auteur éd.). Paris : Courcier.

Lakatos, I. (1976). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics ? *British Journal for the Philosophy of Science*, *27*, 201-223.

Luenberger, D. G. (2004). *Linear and nonlinear programming* (Second éd.). Boston/Dordrecht/London : Kluwer.

Maaß, J., & Schlöglmann, W. (2009). *Beliefs and attitudes in mathematics education. New research results.* Rotterdam : Sense Publishers.

Matheron, Y. (2000). Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x*, *54*, 51-78.

McShane, E. (1973). The Lagrange multiplier rule. *The American Mathematical Monthly*, *80*(8), 922-925.

Mizony, M. (2006). Relations entre physique et mathématique : Un problème épistémologique. Sous-titre : L'héritage de Poincaré, de l'éther à la modélisation. *Repères*, *64*, 89-111.

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D., & Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning in a multivariate context. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 6, 2009.* Lyon : INRP.

Mucchielli, A. (1983). *Les jeux de rôles.* Paris : Les Presses Universitaires de France.

Murillo Lopez, S. (2003). Construction de définitions / construction de concept : Vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. *Thèse doctorale*.

Nardi, E. (2008). *Amongst mathematicians : Teaching and learning mathematics at university level.* New York : Springer.

Nardi, E., González-Martin, A. S., Gueudet, G., Iannone, P., & Winsløw, C. (2012, à paraître). WG14 : University mathematics education. In E. Swoboda et al. (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 7, 2011.* Rzeszów.

Nocedal, J., & Wright, S. (1999). *Numerical optimization.* New York, NY : Springer series in operations research.

Noyé, D., & Piveteau, J. (2000). *Guide pratique du formateur.* Paris : Insep Consulting Éditions.

Ouvrier-Buffet, C. (2008). Étude d'une pratique ordinaire face à un obstacle didactique : La correction en classe de mathématiques dans le cas de la fonction réciproque. *Thèse doctorale*.

Poincaré, H. (1916-1965). *Œuvres, publiées sous les auspices de l'Académie des sciences* (11vols. éd.). Paris : Gauthier-Villars.

Ponce, A., & Van Schaftingen, J. (2010). *Analyse mathématique 2 - Fonctions de variables vectorielles.* Louvain-la-Neuve.

Pourciau, B. H. (1980). Modern multiplier rules. *The American Mathematical Monthly*, *87*(6), 433-452.

Robert, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 139-190.

Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques enseignantes de mathématiques (second degré) : Une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques*, *27*(3), 271-312.

Roditi, É. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique.* Paris : L'Harmattan.

Rogalski, M. (2006). Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs. Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères*, *64*, 27-48.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : Mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In L. Viennot (Ed.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (p. 61-87). Paris : PUF.

Romo Vázquez, A. (2011). La formation mathématique des futurs ingénieurs. *Thèse doctorale en didactique des mathématiques*.

Rouy, E. (2007). Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées. *Thèse doctorale en didactique et épistémologie des mathématiques.*

Sensevy, G. (2001). Théories de l'action et action du professeur. In J.-M. Baudouin & J. Friedrich (Eds.), *Théories de l'action et éducation.* Bruxelles : de Boeck.

Sensevy, G., & Mercier, A. (1976). *Agir ensemble : L'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Simon, C., & Blume, L. (1998). *Mathématiques pour économistes.* Louvain-la-Neuve : De Boeck Université.

Stewart, J. (2006). *Analyse : Concepts et contextes. Volume 2 : Fonctions de plusieurs variables.* Louvain-la-Neuve : De Boeck Université.

Strodiot, J.-J. (1997). *Analyse (2ème partie) - Notes de cours rédigées par A.-M. Valenduc.* Namur : Librairie des Sciences.

Strodiot, J.-J. (2006). *An introduction to optimization.* Namur : Librairie des Sciences.

Sundaram, R. (1996). *A first course in optimization theory.* Cambridge : Cambridge University Press.

Terracher, P.-H., & Ferachoglou, R. (2002). *Maths, Term S : Enseignement obligatoire.* Paris : Hachette Éducation.

Thiry, S. (2006). *Mathématiques pour l'économie et la gestion I.* Namur : Librairie des Sciences.

Truchon, M. (1988). Programmation mathématique et théorie économique. *L'Actualité économique*, *64*(2), 143-156.

van den Heuvel, J. (2010). *Notes 6 - Constrained optimisation with equality constraints - Lagrange's theorem and method.* London.

Vander Borgt, C., & Raucent, B. (2006). *Être enseignant : Magister ? Metteur en scène ?* Bruxelles : De Bœck-Université.

Verret, M. (1975). *Le temps des études.* Paris : Librairie Honoré Champion.

Westergaard, H. (1876). Den moralske formue og det moralske haab. *Tidsskrift for Mathematik*, *6*, 11-15.

Winsløw, C. (2006). Transformer la théorie en tâches : La transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Actes de la XIIIième école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage. CD-Rom.

Annexe A

# Le Théorème de Lagrange comme savoir à enseigner

## A.1 ($M_{\textbf{UCL-Math}}$) Ponce et Van Schaftingen (2010)

Le présent document est un extrait du syllabus du cours "MAT1122 Analyse mathématique 2" actuellement donné à l'université de Louvain-la-Neuve (UCL), Belgique.

**(Ponce & Van Schaftingen, 2010)** "Analyse mathématique 2 - Fonctions de variables vectorielles" de Ponce et Van Schaftingen.

CHAPITRE 5

### Problèmes d'optimisation

#### Matières



#### Prérequis

- Théorème des bornes atteintes (chapitre 2)
- Problèmes d'optimisation d'une variable réelle (Analyse mathématique 1, chapitre 5)

#### Questionnaire de révision

- Définissez « point de minimum local » et « point de maximum local ».
- Peut-on parler d'un point de minimum d'une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^2$ ?
- Énoncez et démontrez une condition nécessaire pour avoir un point de minimum faisant intervenir la dérivée totale. Montrez par un exemple qu'elle n'est pas suffisante.
- Énoncez une condition nécessaire pour avoir un point de minimum faisant intervenir la dérivée seconde. Montrez par un exemple qu'elle n'est pas suffisante.
- Énoncez les conditions ci-dessus dans le cas de points de maximum.
- Recherchez les points de maximum local et de minimum local de la fonction

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x_3^2 - 2x_1x_3 + \tfrac{2}{3}x_1^3 + \tfrac{1}{2}x_1x_2^2 - \tfrac{1}{3}x_2^3 \in \mathbb{R}.$$

☞ Montrez que la fonction

$$(x_1, x_2) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \longmapsto x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \in \mathbb{R}.$$

atteint son minimum et déterminer où son minimum est atteint.

☞ Énoncez une proposition sur les multiplicateurs de Lagrange.

☞ Interprétez géométriquement les multiplicateurs de Lagrange.

☞ Déterminez les points de minimum et de maximum de la fonction

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto 3x_1^2 + 4x_1x_2 \in \mathbb{R}$$

sur le cercle d'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

☞ Recherchez les points de minimum et de maximum de la fonction

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{R}$$

sous la contrainte $x_1^4 + x_2^4 = 1$.

☞ Que pouvez-vous dire des extréma de la fonction

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x_1^3 + x_2^4 \in \mathbb{R}$$

sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ ?

☞ Trouvez les points les plus hauts et les plus bas dans $\mathbb{R}^3$ de la courbe d'intersection du plan $2x_1 + 4x_3 = 5$ et de la surface $x_1^2 + x_2^2 = 2x_2$.

**Exercices prioritaires :** 5.1, 5.6, 5.7, 5.9, 5.11, 5.12

## 5.2 Optimisation sous contrainte d'égalité

**Théorème des multiplicateurs de Lagrange**

**Proposition 5.4.** *Soient $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}^p$ des fonctions de classe $C^1$ et $a \in U$. Si $a$ est un point de minimum local ou de maximum local de la fonction $f$ restreinte à l'ensemble*

$$\{x \in U \mid g(x) = 0\},$$

*alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}^p$ tels que $\alpha^2 + \|\gamma\|^2 \neq 0$, et pour tout $h \in \mathbb{R}^m$,*

$$\alpha f'(a)[h] = \big(\gamma \big| g'(a)[h]\big)$$

Nous aurons besoin du résultat suivant.

**Lemme 5.5.** *Soient $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}^p$ des fonctions de classe $C^1$ et $a \in U$. Si $a$ est un point de minimum local ou de maximum local de la fonction $f$ restreinte à l'ensemble*

$$\{x \in U \mid g(x) = 0\},$$

*alors pour tout $\rho > 0$ il existe $y \in B(a; \rho)$ et $\gamma \in \mathbb{R}^p$ tels que pour tout $h \in \mathbb{R}^m$,*

$$f'(y)[h] + 2(y - a|h) = \big(\gamma \big| g'(y)[h]\big).$$

*Démonstration.* Nous allons supposer que $a$ est un point de minimum local de la fonction $f$ restreinte à l'ensemble

$$\{x \in U \mid g(x) = 0\}.$$

Nous pouvons aussi supposer sans perte de généralité que $\rho$ vérifie pour tout $x \in U$ tel que $x \in B(a; 2\rho)$ et $g(x) = 0$,

$$f(x) \geq f(a).$$

Nous allons tout d'abord prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \partial B(a; \rho)$,

$$f(x) + \|x - a\|^2 + N\|g(x)\|^2 > f(a).$$

Si ce n'était pas le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existerait $x_n \in \partial B(a; \rho)$ tel que

$$f(x_n) + \|x_n - a\|^2 + n\|g(x_n)\|^2 \leq f(a).$$

Puisque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, par la propriété de Weierstrass elle possède une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Soit

$$b = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}.$$

En particulier,

$$\lim_{k \to \infty} \|x_{n_k} - a\|^2 = \|b - a\|^2$$

et, par continuité de $f$ et de $g$,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(b) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} g(x_{n_k}) = g(b).$$

On a donc

$$f(b) + \rho^2 \leq f(a). \tag{5.2}$$

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|g(x_{n_k})\|^2 \leq \frac{f(a) - f(x_{n_k}) - \|x_{n_k} - a\|^2}{n_k},$$

par la propriété de l'étau, $\lim_{k\to\infty} \|g(x_{n_k})\|^2 = 0$, et donc $g(b) = 0$. Or, $a$ est un point de minimum local de $f$ et $b \in B(a; 2\rho)$, donc

$$f(b) \geq f(a).$$

Ceci est une contradiction avec (5.2).

Posons maintenant $F : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = f(x) + \|x - a\|^2 + N\|g(x)\|^2.$$

Par le théorème des bornes atteintes, cette fonction atteint son minimum sur $B[a; \rho]$ en un point $y$. On a

$$F(y) \leq F(a) = f(a),$$

et donc par le choix de $N$, que $y \in B(a; \rho)$. Puisque $x$ est un point de minimum local de $F$, par le théorème de Fermat, $F'(x) = 0$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^m$,

$$f'(y)[h] + 2(y - a|h) + 2N\big(g(y)\big|g'(y)[h]\big) = 0,$$

ce qui donne la conclusion avec $\gamma = -2Ng(y)$. □

*Preuve de la proposition 5.4.* Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $y_n \in U$ et $\gamma_n \in \mathbb{R}^p$ donnés par le lemme précédent avec $\rho = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^m$,

$$f'(y_n)[h] + 2(y_n - a|h) = \gamma_n g'(y_n)[h].$$

En posant

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\gamma_n\|^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}_n = \frac{\gamma_n}{\sqrt{1 + \|\gamma_n\|^2}},$$

on a

$$\tilde{\alpha}_n\big(f'(y_n)[h] + 2(y_n - a|h)\big) = \big(\tilde{\gamma}_n\big|g'(y)[h]\big).$$

Puisque les suites $(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{\gamma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, par la propriété de Weierstrass elles possèdent des sous-suites convergentes $(\tilde{\alpha}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{\gamma}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ; appelons $\alpha$ et $\gamma$ leurs limites. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{\alpha}_{n_k}^2 + \|\tilde{\gamma}_{n_k}\|^2 = 1,$$

on a

$$\alpha^2 + \|\gamma\|^2 = 1.$$

On vérifie que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$ ; il en est de même pour la sous-suite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Puisque $f$ et $g$ sont de classe $C^1$, en faisant tendre $k$ vers l'infini, on obtient pour tout $h \in \mathbb{R}^m$,

$$\alpha f'(a)[h] = \big(\gamma \big| g'(a)[h]\big). \qquad \square$$

Dans la formule

$$\alpha f'(a)[h] = \big(\gamma \big| g'(a)[h]\big),$$

on pourrait envisager de remplacer les deux paramètres $\alpha$ et $\gamma$ par un seul, à savoir $\lambda = \frac{\gamma}{\alpha}$. Pour pouvoir faire cela, il faut d'abord s'assurer qu'on a bien $\alpha \neq 0$. On observe que le théorème des multiplicateurs de Lagrange nous garantit uniquement que $\alpha$ et $\gamma$ ne s'annulent pas simultanément, mais il se peut très bien que $\alpha = 0$. Comme on peut voir dans l'exemple suivant on a pas vraiment besoin d'introduire ce paramètre $\lambda$.

**Exemple 5.9.** On cherche à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4.$$

sous la contrainte

$${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1.$$

Notons tout d'abord que l'ensemble

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$$

est un ensemble compact, et que $f$ est continue sur $F$. La fonction $f$ atteint donc son minimum sur $F$ en au moins un point $a \in F$.

Par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, ce point doit satisfaire les équations

$$\begin{cases} \alpha = 2\gamma a_1, \\ 2\alpha = 2\gamma a_2, \\ 2\alpha = 2\gamma a_3, \\ {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = 1. \end{cases}$$

En additionnant les carrés des trois premières équations, on trouve

$$4\gamma^2 = \alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2 = 9\alpha^2,$$

et donc on doit avoir soit $\gamma = \frac{3}{2}\alpha$, soit $\gamma = -\frac{3}{2}\alpha$. Dans le premier cas, on aurait $(a_1, a_2, a_3) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, dans le second on a $(a_1, a_2, a_3) = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. Puisque

$$f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}) = 1 - 4 = -3$$

et

$$f(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}) = -1 - 4 = -5,$$

on en conclut que $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ est un point de minimum de $f$ sous la contrainte donnée. $\square$

**Exemple 5.10.** À l'aide du théorème des multiplicateurs de Lagrange, on peut montrer que si $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^+$,

$$\sqrt[m]{b_1 \cdots b_m} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_m}{m}.$$

Cette inégalité établit que la moyenne arithmétique est toujours plus grande ou égale à la moyenne géométrique.

S'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $b_i = 0$, la conclusion est triviale. Nous pouvons donc supposer que $b_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Soit $M = b_1 + \cdots + b_m$. On observe que l'ensemble

$$F = \Big\{ z \in \mathbb{R}^m \mid z_1 + \cdots + z_m = M \text{et pour tout } i \in \{1, \ldots, m\},\, z_i \geq 0 \Big\}$$

est fermé. De plus, pour tout $z \in F$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \leq z_i \leq M$ ; donc, $\|z\| \leq M\sqrt{m}$. On en déduit que $F$ est borné et, par conséquent, l'ensemble $F$ est compact.

Puisque la fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = z_1 \cdots z_m$ est continue, $f$ restreinte à l'ensemble $F$ atteint son maximum en un point $a$. Puisque

$$f(b_1, \ldots, b_m) > 0,$$

on a $f(a) > 0$ et donc $a$ est aussi point de maximum de $f$ restreinte à l'ensemble

$$\big\{ z \in U \mid z_1 + \cdots + z_m = M \big\},$$

avec $U = \big\{ z \in \mathbb{R}^m \mid \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, m\},\, z_i > 0 \big\}$. On vérifie que l'ensemble $U$ est ouvert.

Soit $g : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(z) = z_1 + \cdots + z_m - M.$$

Par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha^2 + \gamma^2 \neq 0$, et pour tout $h \in \mathbb{R}^m$,

$$\alpha f'(a)[h] = \gamma g'(a)[h].$$

Si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^m$, on a pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$f'(a)[a_i e_i] = a_1 \cdots a_m$$

et

$$g'(a)[a_i e_i] = a_i.$$

On en déduit que

$$\alpha a_1 \cdots a_m = \gamma a_i.$$

Ceci implique d'abord que $\alpha \neq 0$ et $\gamma \neq 0$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$a_i = \frac{\alpha}{\gamma} a_1 \cdots a_m.$$

En particulier, la valeur de $a_i$ ne dépend pas de $i$. On a ainsi

$$m a_i = a_1 + \cdots + a_m = M,$$

d'où $a_i = M/m$. Par conséquent,

$$b_1 \cdots b_m = f(b) \leq f(a) = a_1 \cdots a_m = \left(\frac{M}{m}\right)^m = \left(\frac{b_1 + \cdots + b_m}{m}\right)^m,$$

ce qui implique l'inégalité souhaitée. □

## 5.4 Exercices

**Problèmes d'optimisation**

**Exercice 5.1.** Déterminez les points critiques des fonctions suivantes et dire s'il s'agit d'un point de minimum local ou de maximum local.

1. $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2{x_1}^3 - 6x_1x_2 + 3{x_2}^2 \in \mathbb{R}$,
2. $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto {x_1}^2x_2 + {x_2}^2x_3 + {x_3}^2 - 2x_1 \in \mathbb{R}$,
3. $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1x_2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 \in \mathbb{R}$,
4. $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto {x_1}^2 + {x_2}^2 \in \mathbb{R}$,
5. $x \in ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[ \mapsto \sin x_1 \cos x_2 \in \mathbb{R}$,
6. $x \in \mathbb{R}^5 \mapsto \|x\|^4$,
7. $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto {x_1}^3 + {x_2}^3 - 3x_1x_2$.

**Exercice 5.2.** Déterminez le minimum et le maximum de la fonction

$$x \in [0, 0] \times [1, 2] \longmapsto {x_1}^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2.$$

**Exercice 5.3.** Déterminez le minimum et le maximum de la fonction

$$x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sin x_1 + \sin x_2 + \sin (x_1 + x_2)$$

restreinte à l'ensemble $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**Exercice 5.4.** Étudiez les points d'extrémum de la fonction

$$x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x_1 - x_2 - {x_1}^2 + 2{x_2}^2 \in \mathbb{R}$$

restreinte à l'ensemble ouvert délimité par le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$.

**Exercice 5.5.** Déterminez les points d'extrémum des fonctions suivantes sur les ensembles indiqués.

1. $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto 3x_1 + 4x_2 \in \mathbb{R}$ sur $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\right\}$,
2. $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto {x_1}^2 + 2{x_2}^2 \in \mathbb{R}$ sur $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 2\right\}$,
3. $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto {x_1}^2 + {x_2}^2 \in \mathbb{R}$ sur $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\right\}$.

**Exercice 5.6.** Déterminez les points de l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

les plus proches et les plus éloignés de $(1, 2)$. Pouvez-vous déterminez géométriquement la position de ces points ?

**Exercice 5.7.** Déterminez les points de la sphère

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 2\}$$

les plus proches et les plus éloignés du point $(3, 1, -1)$. Pouvez-vous déterminez géométriquement la position de ces points ?

**Exercice 5.8.** Soit $f : ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \frac{2}{x_1} + \frac{8}{x_2}.$$

1. Montrez que la fonction $f$ atteint son minimum.
2. Déterminez le point où le minimum de $f$ est atteint.

**Exercice 5.9.** Déterminez le point du plan

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13\}$$

le plus proche du point $(1, 1, 1)$.

**Exercice 5.10.** Déterminez les points de la courbe

$$\bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \mid {x_1}^2 - {x_2}^4 = 0\bigr\}$$

les plus proches de $(1, 0)$ et de $(0, 1)$.

**Exercice 5.11.** Déterminez le point de l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid {x_1}^2 x_2 = 1\}$$

le plus proche de $(0, 0)$. Justifiez votre réponse en expliquant pourquoi le point que vous donnez a la propriété demandée.

**Exercice 5.12.** Étudiez les points d'extrémum de la fonction

$$x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \|x\|^2$$

restreinte à la droite

$$\bigl\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \text{ et } x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 9\bigr\}.$$

**Exercice 5.13.** Déterminez le point de la droite

$$\bigl\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + 2x_3 = 12 \text{ et } x_1 + x_2 = 6\bigr\}$$

le plus proche de $(0, 0, 0)$.

**Exercice 5.14.** L'intersection du plan

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

avec le cylindre

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$$

est une ellipse. Déterminez les points le plus proche et le plus loin de cette ellipse par rapport à $(0, 0, 0)$.

**Exercice 5.15.** Montrez que les fonctions

$$x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{x_1 x_2}{1 + \|x\|^4} \in \mathbb{R},$$
$$x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x_1 x_2 \mathrm{e}^{-2\|x\|^2} \in \mathbb{R},$$
$$x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x_1 {x_2}^2 \cos(\pi\|x\|) \in \mathbb{R},$$

atteignent son minimum et son maximum dans $B(0, 1)$, sans résoudre le problème d'optimisation sur $B(0,1)$. (Indication : Utiliser la condition de signe des multiplicateurs pour l'optimisation sous contrainte d'inégalité pour exclure les points du bord).

**Exercice 5.16.** Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si $f'(x)[x] > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $\|x\| = 1$, montrez que $f$ restreinte à $B(0, 1)$ a un point de minimum.

**Exercices supplémentaires**

**Exercice 5.17.**

1. Déterminez le minimum de la fonction
$$x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x_1 + x_2 + x_3 \in \mathbb{R}$$
restreinte à l'ensemble
$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ et } x_1x_2x_3 = 1\right\}.$$
2. Montrez que pour tous $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tels que $b_1, b_2, b_3 \geq 0$,
$$27b_1b_2b_3 \leq (b_1 + b_2 + b_3)^3.$$

**Exercice 5.18.**

1. Déterminez le minimum et le maximum de la fonction
$$x \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$$
restreinte à l'ensemble
$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0 \text{ et } {x_1}^3 + 2{x_2}^{\frac{3}{2}} = 1\right\}.$$
2. Montrez que pour tous $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $b_1, b_2 \geq 0$,
$$b_1b_2 \leq \frac{1}{3}{b_1}^3 + \frac{2}{3}{b_2}^{\frac{3}{2}}.$$

**Exercice 5.19.**

1. Déterminez le minimum et le maximum de la fonction
$$x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x_1 + x_2 + x_3 \in \mathbb{R}$$
restreinte à l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\right\}$.
2. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,
$$|x_1 + x_2 + x_3| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\|x\|.$$

**Exercice 5.20.**

1. Déterminez le minimum et le maximum de la fonction
$$x \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 \in \mathbb{R}$$
restreinte à l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\right\}$.
2. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,
$$|x_1 + 2x_2 + 3x_3| \leq \frac{3\sqrt{14}}{7}\|x\|.$$

# A.2 ($M_{\textbf{UNa-Math}}$) Strodiot (1997)

Le présent document est un extrait du syllabus du cours "SMAT B103, Calcul différentiel et intégral I" actuellement donné à l'université de Namur (FUNDP), Belgique.

**(Strodiot, 1997)** "Analyse (2ème partie), Notes de cours rédigées par A.-M. Valenduc" de Strodiot.



## 11 Extrema sous contraintes

Supposons qu'un consommateur disposant d'un revenu $R$ désire acheter deux produits dont les prix unitaires sont respectivement désignés par $p$ et $q$. La satisfaction du consommateur lorsqu'il achète les quantités $x$ et $y$ de chaque produit est mesurée par une fonction $U(x, y)$, appelée *fonction d'utilité*. Le problème du consommateur est alors de déterminer les quantités $x$ et $y$ de sorte que sa satisfaction soit maximale et que sa contrainte de budget soit respectée. Ce problème peut se formaliser comme suit :

$$\begin{array}{rl} \text{maximiser} & U(x, y) \\ \text{sous la contrainte} & px + qy = R. \end{array}$$

C'est à ce type de problème que nous consacrerons ce paragraphe.

### 11.1 Définitions

Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ et $g : I\!R^n \to I\!R^p$.
Un point $a$ de $I\!R^n$ est appelé *minimum* (resp. *maximum*) *local de $f$ sous la contrainte* $g(x) = 0$ si

1. le point $a$ satisfait à la contrainte, i.e. $g(a) = 0$ ;
2. il existe une boule ouverte $B$ de centre $a$ dans laquelle

$$f(a) \leq f(x) \quad \text{(resp. } \geq\text{)}, \qquad \forall\, x \text{ t.q. } g(x) = 0.$$

Un point $a$ est appelé *extremum local de $f$ sous la contrainte* $g(x) = 0$ si $a$ est un minimum local ou un maximum local de $f$ sous la contrainte $g(x) = 0$.

### 11.2 Exemple

Cherchons les minima de la fonction $f : I\!R^2 \to I\!R$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

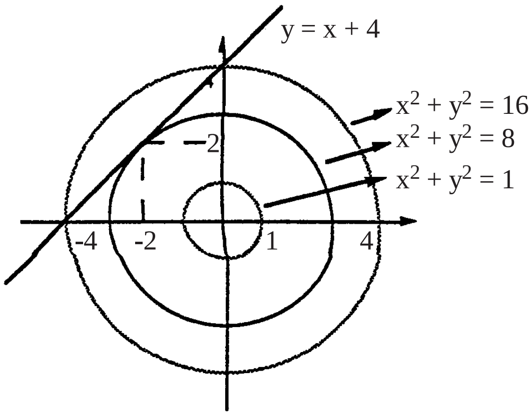
sous la contrainte $g(x, y) = 0$ où

$$g(x, y) = y - x - 4\ .$$

Graphiquement, le problème est de trouver le point de la droite d'équation

$$y = x + 4$$

appartenant au plus petit cercle centré à l'origine.




Ce minimum est atteint par le point $(-2, 2)$ et vaut 8. Une manière de calculer ce minimum est de remplacer dans la fonction $f$ la variable $y$ par sa valeur tirée de la contrainte

$$y = x + 4 ,$$

pour ensuite minimiser la fonction d'une seule variable

$$\overline{f}(x) = x^2 + (x + 4)^2 .$$

Cette fonction atteint son minimum en $x = -2$, d'où la solution du problème.
Le processus ne serait pas si simple si la contrainte était par exemple donnée par

$$x^2 y^3 - \cos xy = 0 ,$$

où il n'est pas possible d'exprimer $y$ à l'aide de fonctions élémentaires en la variable $x$.

Le théorème des fonctions implicites sera un outil essentiel pour prouver le théorème qui nous fournira un premier pas dans la résolution de ce type de problèmes.

### 11.3 La théorie de Lagrange

Mathématicien français (Turin 1736–Paris 1813), Joseph Louis de Lagrange fut nommé sénateur et fait comte par Napoléon. Il enseigna à l'École Normale et à l'École Polytechnique. À côté de son ouvrage principal, la *Mécanique Analytique*, il étudia particulièrement le calcul différentiel. En 1762, il établit un fondement théorique aux découvertes d'Euler pour le calcul des variations et, en 1788, il donna un critère permettant de distinguer maxima et minima.

### 11.3.1 Les multiplicateurs de Lagrange

**Théorème :**
*Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ et $g : I\!R^n \to I\!R^p$ deux fonctions de classe $C^1$.*
*Considérons un point $a$ de $I\!R^n$ où la matrice jacobienne de $g$ est de rang $p$.*
*Si $a$ est un extremum local de $f$ sous la contrainte*

$$g(x) = 0 \ ,$$

*alors il existe $p$ nombres réels $\lambda_l, \ldots, \lambda_p$, appelés* multiplicateurs de Lagrange*, qui vérifient*

$$\nabla f(a) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(a) = 0 \ ,$$

*appelée* condition de Lagrange*.*

**Démonstration :**
Nous prouverons ce théorème uniquement dans le cas où la fonction $g$ qui décrit la contrainte est à valeurs réelles. Dans ce cas, la matrice jacobienne de $g$ au point $a$ est le gradient de $g$ au point $a$ et l'hypothèse sur le rang de la matrice revient à exiger que le gradient de $g$ au point $a$ ne soit pas nul.
Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que

$$g'_{x_n}(a) \neq 0 \ .$$

Désignons par $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ les composantes de $a$ et par $\overline{a}$ le vecteur de $I\!R^{n-1}$ dont les composantes sont les $(n-1)$ premières composantes de $a$.
Par hypothèse, le point $a$ satisfait à la contrainte.
Dès lors, il vérifie

$$g(a) = g(a, \overline{a}_n) = 0 \ .$$

**En vertu du théorème des fonctions implicites**, il existe une fonction implicite unique de classe $C^l$ :

$$\begin{array}{llcl} \phi : & B(\overline{a}, \alpha) \subset I\!R^{n-1} & \longrightarrow & ]a_n - \beta, a_n + \beta[ \ , \\ & \qquad u & \rightsquigarrow & \phi(u) \text{ tel que } g(u, \phi(u)) = 0 \ . \end{array}$$

De plus, les $n-1$ dérivées partielles de $\phi$ au point $\overline{a}$ sont données par

$$\phi'_{u_i}(\overline{a}) = -\frac{g'_{x_i(a)}}{g'_{x_n}(a)} \ , \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n-1 \ .$$

**Définissons maintenant une nouvelle fonction** de $(n-1)$ variables :

$$\begin{array}{llcl} \overline{f} : & B(\overline{a}, \alpha) & \longrightarrow & I\!R \ , \\ & \quad u & \rightsquigarrow & f(u, \phi(u)) \ , \end{array}$$

et montrons que $\overline{a}$ *est un minimum local de* $\overline{f}$ *sans contrainte.*
Puisque $a$ est un minimum local de $f$ sous la contrainte

$$g(x) = 0 ,$$

il existe une boule ouverte $B(a, \gamma)$ dans laquelle

$$f(a) \leq f(x) , \qquad \forall\, x \text{ tel que } g(x) = 0 .$$

Remarquons que l'on peut choisir, si ce n'est pas le cas, $\alpha$ et $\beta$ de sorte que

$$B(\overline{a}, \alpha) \times ]a_n - \beta, a_n + \beta[ \subset B(a, \gamma)$$

et, au besoin, réduire à nouveau $\alpha$ pour que $\phi(B(\overline{a}, a))$ soit inclus dans l'intervalle $]a_n - \beta, a_n + \beta[$.
Dès lors, si $u$ appartient à $B(\overline{a}, a)$, $\phi(u)$ appartient à l'intervalle $]a_n - \beta, a_n + \beta[$, le couple $(u, \phi(u))$ est dans la boule $B(a, \gamma)$ et vérifie $g(u, \phi(u)) = 0$.
Par conséquent,

$$f(a) \leq f(u, \phi(u)) , \qquad \forall\, u \in B(\overline{a}, \alpha).$$

Par définition de $\overline{f}$, nous avons

$$f(a) = f(\overline{a}, a_n) = f(\overline{a}, \phi(\overline{a}) = \overline{f}(\overline{a})$$

et

$$f(u, \phi(u)) = \overline{f}(u) .$$

Dès lors,

$$\overline{f}(\overline{a}) \leq \overline{f}(u) , \qquad \forall\, u \in B(\overline{a}, \alpha) ,$$

et $\overline{a}$ est un minimum local de $\overline{f}$ sans contrainte.
**Le gradient $\nabla \overline{f}(\overline{a})$ est donc nul.**
Calculons l'expression des $n - 1$ dérivées partielles de $\overline{f}$ au point $\overline{a}$ :

$$\overline{f}'_{u_i}(\overline{a}) = f'_{x_i}(\overline{a}, \phi(\overline{a})) + f'_{x_n}(\overline{a}, \phi(\overline{a})) \cdot \phi'_{u_i}(\overline{a})$$

$$= f'_{x_i}(a) + f'_{x_n}(a) \cdot \left( \frac{-g'_{x_i}(a)}{g'_{x_n}(a)} \right) .$$

Posons

$$\lambda = -\frac{f'_{x_n}(a)}{g'_{x_n}(a)}$$

pour obtenir l'expression

$$f'_{x_i}(a) + \lambda g'_{x_i}(a) = 0 , \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n - 1 .$$

De plus, par définition de $\lambda$,

$$f'_{x_n}(a) + \lambda g'_{x_n}(a) = 0 .$$

En mettant sous forme vectorielle ces $n$ égalités, on obtient

$$\nabla f(a) + \lambda \nabla g(a) = 0 ,$$

qui est la condition de Lagrange. □

**Remarque**

Si le rang de la matrice jacobienne est strictement plus petit que $p$, on peut avoir un extremum local qui ne satisfait pas la condition de Lagrange. C'est le cas, par exemple, du problème défini par les fonctions

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \; ,$$
$$g(x, y, z) = (x^2 - 4y, x - y - 1) \; .$$

Calculons le minimum de $f$ sous la contrainte

$$g(x, y, z) = 0 \; .$$

Dans ce but, remarquons d'abord que, si un point de $I\!R^3$ vérifie la contrainte, il est de la forme $(2, 1, z)$. Dès lors, le point $(2, 1, 0)$ est la seule solution du problème.
La matrice jacobienne de $g$ en ce point vaut :

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc de rang strictement inférieur à deux.
Le point $(2, 1, 0)$ ne vérifie pas la condition de Lagrange. En effet, le gradient de $f$ en ce point vaut $(4, 2, 0)$ et il n'existe pas de réels $\lambda_l$ et $\lambda_2$ qui vérifient

$$\begin{cases} 4 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \; , \\ 2 - 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \; . \end{cases}$$

## 11.4 Condition nécessaire pour un extremum sous contraintes

### 11.4.1 Définition de la fonction lagrangienne

Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ et $g : I\!R^n \to I\!R^p$.
On appelle *fonction lagrangienne associée à $f$ et $g$* la fonction $L : I\!R^n \times I\!R^p \to I\!R$ définie par

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x)$$

où $x \in I\!R^n$, $(\lambda_j)_{1 \le j \le p}$ et $(g_j)_{1 \le j \le p}$ désignent respectivement les composantes du vecteur $\lambda$ de $I\!R^p$ et de la fonction $g$.

**Théorème :**

*Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ et $g : I\!R^n \to I\!R^p$ de classe $C^1$.*

*Considérons un point $a$ où la matrice jacobienne de $g$ est de rang $p$.*
*Si $a$ est un extremum de $f$ sous la contrainte*

$$g(x) = 0 \ ,$$

*alors il existe un vecteur $\lambda^*$ de $\mathbb{R}^p$ tel que le point $(a, \lambda^*)$ soit un point stationnaire de la fonction lagrangienne. Les composantes du vecteur $\lambda^*$ sont les multiplicateurs de Lagrange.*

**Démonstration :**
Si $a$ est un extremum local de $f$ sous la contrainte

$$g(x) = 0 \ ,$$

il existe un vecteur $\lambda^*$ dont les composantes $(\lambda_j^*)$ sont les multiplicateurs de Lagrange et vérifient

$$\nabla f(a) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \nabla g_j(a) = 0 \ ;$$

Calculons les $n$ premières dérivées partielles de la fonction lagrangienne au point $(a, \lambda^*)$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a, \lambda^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(a) + \cdots + \lambda_p^* \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(a) \ , \qquad \forall \ i = 1, \ldots, n \ .$$

Celles-ci sont donc nulles en vertu de la condition de Lagrange.

Calculons les $p$ dernières dérivées partielles de la fonction lagrangienne au point $(a, \lambda^*)$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(a, \lambda^*) = g_j(a) \ , \qquad \forall \ j = 1, \ldots, p \ .$$

Puisque $a$ satisfait à la contrainte

$$g(x) = 0 \ ,$$

ces $p$ dérivées partielles sont également nulles et le point $(a, \lambda^*)$ est un point stationnaire de la fonction lagrangienne. □

### 11.4.2 Exemple

Appliquons la méthode fournie par le théorème précédent sur un cas simple, l'exemple énoncé en 11.2.

La fonction lagrangienne s'écrit

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot (y - x - 4) \ .$$

Cherchons les points stationnaires de cette fonction.

La seule solution du système

$$\begin{cases} 2x - \lambda &= 0 \ , \\ 2y + \lambda &= 0 \ , \\ y - x - 4 &= 0 \ , \end{cases}$$

est $(-2, 2, -4)$.
Par conséquent, le point $(-2, 2)$ est le seul extremum possible.
Cette méthode ne nous fournit aucun argument pour savoir si le point $(-2, 2)$ est un extremum ni, dans l'affirmative, pour déterminer la nature de cet extremum.

## 11.5 Condition suffisante du premier ordre pour un extremum sous contraintes

**Théorème :**
*Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ et $g : I\!R^n \to I\!R^p$ de classe $C^1$.*
*Si la fonction $f$ est convexe (resp. concave) et si la fonction $g$ qui décrit la contrainte est affine, alors tout point stationnaire $(a, \lambda^*)$ de la fonction lagrangienne associée aux fonctions $f$ et $g$ est tel que $a$ est un minimum (resp. maximum) de $f$ sous la contrainte $g(x) = 0$.*

**Démonstration :**
Soit $(a, \lambda^*)$ un point stationnaire de la fonction lagrangienne définie par

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x) \ , \qquad \forall \ (x, \lambda) \in I\!R^n \times I\!R^p \ .$$

Puisque le gradient de $L$ au point $(a, \lambda^*)$ est nul, nous obtenons

$$\begin{cases} \nabla f(a) + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* \nabla g_j(a) = 0 \ , \\ \\ g_j(a) = 0 \ , \qquad \forall \ j = 1, \ldots, p \ . \end{cases}$$

Par conséquent, le point $a$ satisfait à la contrainte

$$g(x) = 0 \ .$$

Pour prouver qu'il est le minimum de $f$ sous cette même contrainte, considérons un point $x$ vérifiant

$$g(x) = 0$$

et montrons que

$$f(x) \geq f(a) \ .$$

Rappelons que, si une fonction $h$ de $I\!R^n$ dans $I\!R$ est affine, son gradient est constant et $h$ vérifie

$$h(u) = h(v) + \langle \nabla h(v), u - v \rangle \ .$$

La fonction $g$ étant affine, chaque composante $g_j$ l'est également et

$$g_j(x) = g_j(a) + \langle \nabla g_j(a), x - a \rangle \ , \qquad \forall\ j = 1, \ldots, p\ .$$

Puisque $x$ et $a$ vérifient la contrainte, ces $p$ égalités deviennent

$$\langle \nabla g_j(a), x - a \rangle = 0\ , \qquad \forall\ j = 1, \ldots, p\ .$$

D'autre part, en vertu du Théorème 9.2, la convexité de $f$ implique que

$$f(x) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle\ .$$

Dès lors,

$$f(x) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^*\ \langle \nabla g_j(a), x - a \rangle$$

$$\text{et} \qquad f(x) \geq f(a) + \langle \nabla f(a) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^*\ \nabla g_j(a), x - a \rangle\ .$$

Or, le produit scalaire

$$\langle \nabla f(a) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^*\ \nabla g_j(a), x - a \rangle$$

est nul car le point $(a, \lambda^*)$ vérifie la condition de Lagrange.
Par conséquent, nous obtenons

$$f(x) \geq f(a)$$

d'où la thèse. □

### 11.5.1 Exemple

Reprenons l'exemple énoncé en 11.2.
Nous savons déjà que le point $(-2, 2, -4)$ est un point stationnaire de la fonction lagrangienne

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - x - 4)\ .$$

Dans ce cas, la fonction qui décrit la contrainte est affine. De plus, la fonction à minimiser est convexe. En effet, sa matrice hessienne vaut partout

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et est visiblement définie positive.
En conséquence, le point $(-2, 2)$ est le minimum de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sous la contrainte

$$y - x - 4 = 0\ .$$

### 11.5.2 Conditions suffisante du second ordre pour un extremum sous contrainte

**Théorème :**
*Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $C^2$.*
*Soit $(a, \lambda^*)$ un point stationnaire de la fonction lagrangienne associée aux fonctions $f$ et $g$.*
*Supposons que la matrice carrée d'ordre $n$*

$$\nabla^2 f(a) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \nabla^2 g_j(a)$$

*notée $\nabla_x^2 L(a, \lambda^*)$, soit définie positive (resp. définie négative) sur l'espace*

$$M = \{s \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } [Jg(a)]s = 0\} ,$$

*c'est-à-dire que*

$$s^T \nabla_x^2 L(a, \lambda^*) s > 0 \quad (\text{resp.} < 0) , \qquad \forall\, s \in M \;,\; s \neq 0 .$$

*Alors $a$ est un minimum (resp. maximum) de $f$ sous la contrainte $g(x) = 0$.*

**Démonstration :**
La démarche de la preuve est analogue à celle de la seconde partie du Théorème 8.4.1 consacré aux conditions suffisantes du second ordre pour un extremum sans contrainte. □

## 11.6 Le problème du consommateur

Résolvons le problème posé en guise d'introduction en choisissant comme fonction d'utilité

$$U(x, y) = xy .$$

Écrivons la fonction lagrangienne associée au problème

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(px + qy - R) .$$

En résolvant le système

$$\begin{cases} y + \lambda p &= 0 , \\ x + \lambda q &= 0 , \\ px + qy &= R , \end{cases}$$

nous trouvons un seul point stationnaire de coordonnées $\left(\frac{R}{2p}, \frac{R}{2q}, \frac{-R}{2pq}\right)$.
Quoique la fonction décrivant la contrainte soit affine, la condition suffisante du premier ordre ne s'applique pas puisque la fonction $U$ à maximiser n'est pas concave. En effet, sa matrice hessienne vaut partout

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et admet deux valeurs propres de signes opposés.
Étudions la condition suffisante du second ordre.
Nous pouvons aisément calculer que

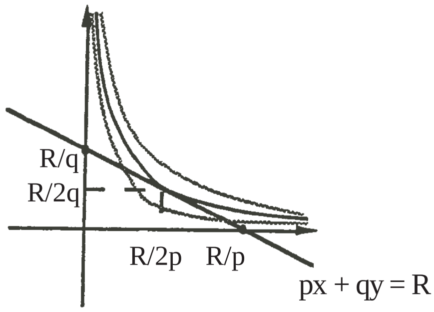
$$M = \{(s_1, s_2) \text{ t.q. } ps_1 + qs_2 = 0\} \ ,$$

$$\nabla_x^2 L \ \left(\frac{R}{2p}, \frac{R}{2q}, \frac{-R}{2pq}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et que

$$\forall \ s \in M \ , \quad s \neq 0 \ , \quad (s_1, s_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = 2s_1 s_2 = -2\frac{q}{p} \ s_2^2 < 0 \ .$$

Dès lors, le point $\left(\frac{R}{2p} \frac{R}{2q}\right)$ est le maximum cherché.
Graphiquement, le maximum est atteint au point où l'hyperbole est tangente à la droite de la contrainte.



# A.3 ($M_{\textbf{UNa-Éco}}$) Thiry (2006)

Le présent document est un extrait du syllabus du cours "ECGE B151, Mathématiques pour l'économie et la gestion I" actuellement donné à l'université de Namur (FUNDP), Belgique.

**(Thiry, 2006)** "Mathématiques pour l'économie et la gestion I" de Thiry.



## 4.4. Optimisation sous contrainte d'égalité

### 4.4.1 Description du problème

Dans de nombreux problèmes d'économie, les variables de la fonction dont on doit rechercher les extrema sont soumises à des restrictions. Un exemple classique d'une telle situation est celle d'un consommateur qui doit choisir la partie d'un budget $B$ qu'il va consacrer à l'achat de $x$ quantités d'un certain bien dont le prix unitaire est $p$, le reste de son budget, noté $y$, étant consacré à l'achat d'autres biens. Supposons que les préférences soient représentées par une fonction d'utilité $u(x,y)$. En termes mathématiques, le consommateur se trouve devant le problème suivant :

*déterminer* $(x,y)$ *qui maximise* $u(x,y)$ *en respectant la contrainte budgétaire* $px+y=B$.

Un tel problème s'écrit généralement comme suit :

$$\begin{cases} \text{Max} \quad u(x,y) \\ \text{s.c.} \quad px+y=B \qquad \text{(les abréviations s.c. signifient « sous contrainte »)} . \end{cases} \tag{4.10}$$

La fonction dont on recherche les extrema est appelée la **fonction objectif** et la relation à laquelle doivent satisfaire les variables est appelée **une contrainte** : on parle alors de **problème d'optimisation sous contrainte**. Les points $(x,y)$ qui satisfont à la contrainte sont appelés des **points admissibles**.

Dans l'exemple ci-dessus, la contrainte peut s'écrire en exprimant une inconnue en fonction de l'autre. Puisque $y=B-px$, le problème (4.10) peut être exprimé comme un problème d'optimisation sans contrainte ; il revient en effet à maximiser la fonction $h(x)=u(x,B-px)$ par rapport la variable $x$. On a donc transformé un problème d'optimisation à deux variables sous contrainte, en un problème d'optimisation à une variable sans contrainte.

Cependant, lorsque la contrainte est une fonction compliquée ou lorsque plusieurs contraintes doivent être prises en compte simultanément, il peut être difficile, voire impossible, d'utiliser une telle méthode de substitution. Il faudra utiliser d'autres techniques. Pour de tels problèmes, les économistes utilisent fréquemment **la méthode des multiplicateurs de Lagrange** décrite ci-dessous.

### 4.4.2 Interprétation géométrique du problème : les multiplicateurs de Lagrange

Considérons les problèmes d'optimisation suivants :

$$\text{(I)} \begin{cases} \text{Max} \quad f(x,y) \\ \text{s.c.} \quad g(x,y)=k \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} \text{Min} \quad f(x,y) \\ \text{s.c.} \quad g(x,y)=k \end{cases}$$

Nous devons donc rechercher les valeurs extrêmes (maximum et minimum) de $f(x,y)$ sous la condition $g(x,y)=k$. Or, les points $(x,y)$ qui réalisent cette condition sont exactement les points de la courbe de niveau d'équation $g(x,y)=k$. Les problèmes (I) et (II) reviennent donc à **rechercher les points de cette courbe de niveau qui rendent $f(x,y)$ maximum ou minimum.**

À titre d'exemple considérons le problème (I) lorsque la courbe de niveau d'équation $g(x,y)=k$ est donnée à la figure 4.9 ; cette figure fournit également les courbes de niveau de $f$ d'équation $f(x,y)=c$ où $c=7$, $8$, $9$, $10$, $11$.

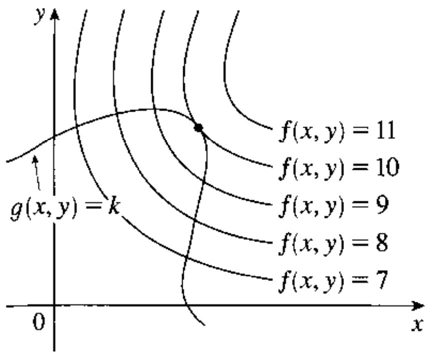



Figure 4.9: Le maximum de $f(x)$ sous la contrainte $g(x,y)=k$ vaut $10$

Il nous faut donc rechercher la plus grande valeur de $c$ telle que la courbe d'équation $f(x,y)=c$ coupe la courbe d'équation $g(x,y)=k$. La figure 4.9 montre que cette valeur de $c$ est obtenue lorsque les deux courbes ont une tangente commune : le maximum de $f(x,y)$ sous la condition $g(x,y)=k$ est en effet obtenu lorsque $f(x,y)=10$ puisque tous les autres points $(x,y)$ réalisant la contrainte $g(x,y)=k$ sont tels que $f(x,y)<10$.

Le point $(x_0,y_0)$ solution du problème (I) doit donc être tel que

- $g(x_0,y_0)=k$,
- la pente de la tangente à la courbe d'équation $g(x,y)=k$ au point $(x_0,y_0)$ est égale à la pente de la tangente à la courbe de niveau de $f$ en ce point.

Or, les pentes des tangentes aux courbes de niveau de $f$ et de $g$ au point $(x_0,y_0)$ sont données respectivement par* (proposition 3.13, 121) :

$$-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)} \qquad \text{et} \qquad -\frac{g'_x(x_0,y_0)}{g'_y(x_0,y_0)}.$$

On doit donc avoir

$$-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)} = -\frac{g'_x(x_0,y_0)}{g'_y(x_0,y_0)} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{f'_x(x_0,y_0)}{g'_x(x_0,y_0)} = \frac{f'_y(x_0,y_0)}{g'_y(x_0,y_0)}.$$

Si on appelle $\lambda$ la valeur commune de ces deux fractions, on obtient :

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) &= \lambda\, g'_x(x_0,y_0)\,, \\ f'_y(x_0,y_0) &= \lambda\, g'_y(x_0,y_0)\,, \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire sous forme vectorielle comme suit :

$$\Big(\underbrace{f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)}_{\nabla f(x_0,y_0)}\Big) = \lambda\Big(\underbrace{g'_x(x_0,y_0), g'_y(x_0,y_0)}_{\nabla g(x_0,y_0)}\Big).$$

* Nous supposons ici que les dénominateurs sont $\neq 0$.

Finalement, le point $(x_0, y_0)$ solution du problème (I) doit être tel que

- $g(x_0, y_0) = k$ , (4.11)
- il existe un nombre $\lambda$ tel que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \ \nabla g(x_0, y_0)$. (4.12)

Ce nombre $\lambda$ est appelé un **multiplicateur de Lagrange**.

Un raisonnement analogue peut être mené pour le problème de minimisation (II).

Remarquons que les problèmes (I) et (II) peuvent admettre plusieurs solutions : par exemple, les données de la figure 4.10 ci-dessous montrent que le point $R$ est solution du problème de minimisation (II) et que les points $Q$ et $P$ sont solutions du problème de maximisation (II) ( $P$ correspondant au maximum global).

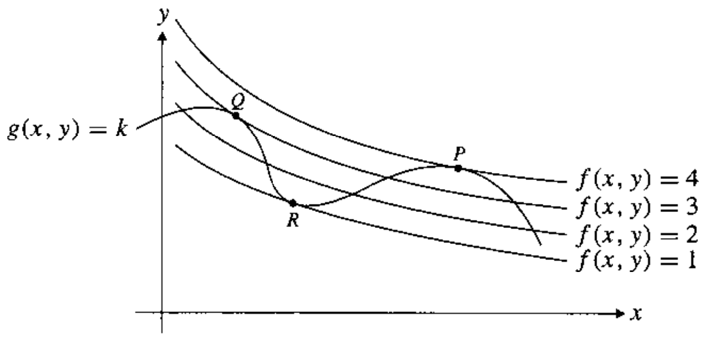



Figure 4.10: Extrema de $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = k$

### 4.4.3 Conditions du premier ordre : le théorème de Lagrange

Dans le paragraphe précédant, l'observation des courbes de niveau nous a permis de constater qu'un point $(x_0, y_0)$ correspondant à un extremum de $f$ sous la contrainte $g(x, y) = k$ devait nécessairement satisfaire aux conditions (4.11) et (4.12). Nous allons maintenant formuler ces constatations sous forme d'un théorème (que nous ne démontrerons pas ici).

**Proposition 4.8 (Théorème de Lagrange)**
*Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux fonctions admettant des dérivées partielles premières continues. Supposons que $(x_0, y_0)$ corresponde à un extremum de $f(x, y)$ sous contrainte $g(x, y) = k$ . Supposons de plus que $(x_0, y_0)$ est un **point régulier**, c'est-à-dire que $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Alors, il existe $\lambda \in I\!R$ tel que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \ \nabla g(x_0, y_0) \ .$$

Ce théorème peut également se formuler à partir d'une fonction $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ appelée **le Lagrangien** et définie comme suit :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \ [g(x, y) - k] \ .}$$

On remarque que les conditions (4.11) et (4.12) constituent le système suivant de trois équations en les trois inconnues $x_0$, , $y_0$ et $\lambda$ :

$$\begin{cases} g(x_0, y_0) = k \ , \\ f'_x(x_0, y_0) - \lambda g'_x(x_0, y_0) = 0 \ , \\ f'_y(x_0, y_0) - \lambda g'_y(x_0, y_0) = 0 \ , \end{cases}$$

En utilisant la définition du Lagrangien, on peut ré-écrire ce système comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_\lambda(x_0, y_0, \lambda) = 0 \ , \\ \mathcal{L}'_x(x_0, y_0, \lambda) = 0 \ , \\ \mathcal{L}'_y(x_0, y_0, \lambda) = 0 \ , \end{cases}$$

ce qui revient à dire que

$$\nabla \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = (0, 0, 0)$$

ou encore que

$(x_0, y_0, \lambda)$ est un point stationnaire du Lagrangien.

On obtient la formulation suivante du théorème de Lagrange.

**Proposition 4.9 (Théorème de Lagrange : formulation utilisant le Lagrangien)**
*Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux fonctions admettant des dérivées partielles premières continues. Supposons que $(x_0, y_0)$ corresponde à un extremum de $f$ sous contrainte $g(x, y) = k$ et que $(x_0, y_0)$ soit un **point régulier**, c'est-à-dire que $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .*

*Considérons le Lagrangien*

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - k] \ .$$

*Alors, il existe $\lambda \in I\!R$ tel que*

$$\nabla \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = (0, 0, 0) \ , \tag{4.13}$$

*c'est-à-dire tel que*

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_\lambda(x_0, y_0, \lambda) = 0 \ , \\ \mathcal{L}'_x(x_0, y_0, \lambda) = 0 \ , \\ \mathcal{L}'_y(x_0, y_0, \lambda) = 0 \ . \end{cases}$$

La condition (4.13) ne comportant que des dérivées premières est appelée **condition du premier ordre**.

### 4.4.4 Stratégie pour rechercher les candidats à un extremum

Nous allons maintenant déduire une stratégie pour rechercher tous les candidats $(x_0, y_0)$ correspondant à un extremum de $f$ sous contrainte $g(x, y) = k$ en nous basant sur la proposition 4.9 et sur les deux remarques suivantes :

1. La proposition 4.9 nous donne **une condition nécessaire** pour que $(x_0, y_0)$ corresponde à un extremum, à savoir :

   $$\exists\, \lambda \in I\!R \quad \text{tel que } \nabla\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = (0,0,0)\ .$$

   Les points $(x_0, y_0)$ obtenus en résolvant ce système ne sont donc que des « candidats à un extremum » car rien ne garantit qu'ils correspondent effectivement à un extremum. La proposition 4.9 peut en effet se résumer pour des points réguliers $(x_0, y_0)$ à l'implication suivante :

   $$(x_0, y_0) \text{ correspond à un extremum} \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, \lambda \in I\!R : \quad \nabla\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = (0,0,0)$$

   mais **elle ne nous dit rien sur la réciproque de cette implication**.

2. Parmi les hypothèses de la proposition 4.9 figure le fait que $(x_0, y_0)$ est un point régulier, c'est-à-dire que $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

   Les points $(x, y)$ tels que $\nabla g(x, y) = (0,0)$ ne sont donc pas pris en compte par cette proposition. Or, rien ne nous dit que de tels points ne peuvent pas correspondre à des extrema. Si nous voulons déterminer **tous** les candidats à un extremum, il nous faut donc prendre en compte les points $(x_0, y_0)$ tels que $\nabla g(x_0, y_0) = (0,0)$ et qui sont admissibles, c'est-à-dire qui sont tels que $g(x_0, y_0) = k$.

Nous pouvons maintenant formuler notre stratégie de recherche des candidats à un extremum.

**Proposition 4.10 (Stratégie pour rechercher les candidats à un extremum sous contrainte d'égalité)**
*Pour rechercher les candidats à un extremum de $f(x, y)$ sous contrainte $g(x, y) = k$ :*

1. *Rechercher les points stationnaires de $g(x, y)$ (points non réguliers),c'est-à-dire les solutions du système*

   $$\begin{cases} g'_x(x, y) &= 0\ , \\ g'_y(x, y) &= 0\ . \end{cases}$$

   *Toute solution de ce système qui est admissible est un candidat.*

2. *Écrire le Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - k]$*

   $$\textit{et résoudre le système} \begin{cases} \mathcal{L}'_x(x, y, \lambda) &= 0\ , \\ \mathcal{L}'_y(x, y, \lambda) &= 0\ , \\ \mathcal{L}'_\lambda(x, y, \lambda) &= 0\ . \end{cases}$$

   *Si $(x_0, y_0, \lambda_0)$ est une solution telle que $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$,*

   *alors $(x_0, y_0)$ est un candidat.*

**Exercice 4.3**

*Déterminer les candidats à un extremum de la fonction*

*a)* $f(x,y) = x^2y$ *sous contrainte* $g(x,y) = 2x^2 + y^2 = 3$ ;

*b)* $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ *sous contrainte* $g(x,y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$ .

**Solution**

Pour chacun de ces problèmes, nous allons utiliser la stratégie de recherche décrite par la proposition 4.10.

**a)** $\boldsymbol{f(x,y) = x^2y}$ **et** $\boldsymbol{g(x,y) = 2x^2 + y^2 = 3}$

1. **Recherche des points stationnaires de** $\boldsymbol{g}$

$$\begin{cases} g'_x(x,y) = 4x = 0 \ , \\ g'_y(x,y) = 2y = 0 \ . \end{cases}$$

Le seul point stationnaire de $g$ est $(x,y) = (0,0)$ . Il n'est pas admissible car $2\ 0^2 + 0^2 \neq 3$ . Il n'y a donc pas de candidat parmi les points stationnaires de $g$ .

2. **Recherche des points stationnaires du Lagrangien**

Le Lagrangien s'écrit $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2y - \lambda\,(2x^2 + y^2 - 3)$ .

On obtient :

$$\mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) = 2x(y - 2\lambda) = 0 \ , \tag{4.14}$$
$$\mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) = x^2 - 2y\lambda = 0 \ , \tag{4.15}$$
$$\mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda) = -2x^2 - y^2 + 3 = 0 \ . \tag{4.16}$$

L'équation (4.14) est vérifiée si $x = 0$ ou si $y = 2\lambda$ .

**Si** $\boldsymbol{x = 0}$ , les équations restantes (4.15) et (4.16) sont $\begin{cases} 2y\lambda = 0 \ , \\ y^2 = 3 \ , \end{cases}$

dont les solutions sont $(y,\lambda) = (\sqrt{3}, 0)$ et $(y,\lambda) = (-\sqrt{3}, 0)$ .

**Si** $\boldsymbol{y = 2\lambda}$ , les équations restantes (4.15) et (4.16) sont $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \ , \\ 2x^2 + y^2 = 3 \ , \end{cases}$

dont les solutions sont $(x,y) = (1,1)$ , $(x,y) = (1,-1)$ , $(x,y) = (-1,1)$ et $(x,y) = (-1,-1)$ .

Le Lagrangien admet donc six points stationnaires donnés par :

$$(x,y,\lambda) = (0,\sqrt{3},0)\ , \qquad (x,y,\lambda) = (0,-\sqrt{3},0)\ ,$$
$$(x,y,\lambda) = (1,1,1/2)\ , \qquad (x,y,\lambda) = (1,-1,-1/2)\ ,$$
$$(x,y,\lambda) = (-1,1,1/2)\ , \qquad (x,y,\lambda) = (-1,-1,-1/2)\ .$$

Les six points $(x,y) = (0,\sqrt{3})$ , $(x,y) = (0,-\sqrt{3})$ ,
$(x,y) = (1,1)$ , $(x,y) = (1,-1)$ ,
$(x,y) = (-1,1)$ , $(x,y) = (-1,-1)$
sont tous des points réguliers et sont donc tous candidats à un extremum de $f$ .

**b)** $\boldsymbol{f(x,y) = 1 - x^2 - y^2}$ **et** $\boldsymbol{g(x,y) = (x-1)^3 - y^2 = 0}$

1. **Recherche des points stationnaires de** $\boldsymbol{g}$

$$\begin{cases} g'_x(x,y) & = 3\ (x-1)^2 = 0\ , \\ g'_y(x,y) & = -2y = 0\ . \end{cases}$$

Le seul point stationnaire de $g$ est $(x,y) = (1,0)$ . Il est admissible car $(1-1)^3 - 0^2 = 0$ . Il est donc candidat.

2. **Recherche des points stationnaires du Lagrangien**

Le Lagrangien s'écrit $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (1-x^2-y^2) - \lambda\ [(x-1)^3 - y^2]$ .

On obtient :

$$\mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) = -2x - 3\lambda(x-1)^2 = 0\ ,$$
$$\mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) = -2y + 2\lambda y = 0\ ,$$
$$\mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda) = -(x-1)^3 + y^2 = 0\ .$$

On vérifie aisément que ce système n'admet aucune solution.
Le seul candidat à un extremum de $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ sous contrainte $(x-1)^3 - y^2 = 0$ est donc le point $(x,y) = (1,0)$ . A priori, nous ne pouvons savoir si ce point correspond à un maximum ou à un minimum, ni même s'il correspond à un extremum : il n'est que candidat !

Cependant une observation des fonctions $g$ et $f$ va nous permettre de montrer que $(1,0)$ correspond à un maximum. On peut en effet remarquer que :

- les points admissibles sont tels que $(x-1)^3 = y^2$ ; ils sont donc tels que $(x-1)^3 \geq 0$ , c'est-à-dire tels que $x \geq 1$ ;
- la fonction $f(x,y)$ évaluée en les points admissibles est donnée par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 - x^2 - y^2 && \text{avec } y^2 = (x-1)^3 \\ &= 1 - x^2 - (x-1)^3 \leq 0 && (\text{puisque } x \geq 1) \end{aligned}$$

On peut donc conclure que $f(x,y) \leq 0$ pour tout point admissible $(x,y)$.
Or, $f(1,0)=0$. Par conséquent, $f(x,y) \leq f(1,0)$ pour tout point admissible $(x,y)$.
Ceci montre que le candidat $(x,y)=(1,0)$ correspond effectivement à un maximum.

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons pu montrer qu'un candidat correspondait effectivement à un extremum. Une telle démarche n'est pas toujours possible. Pour pouvoir décider du statut d'un candidat, nous devrons utiliser les dérivées secondes du Lagrangien. C'est l'objet du paragraphe suivant.

### 4.4.5 Conditions du second ordre : le théorème du Hessien bordé

La proposition suivante (que nous ne démontrerons pas) nous fournit un test basé sur les dérivées secondes pour décider si un point stationnaire du Lagrangien correspond à un maximum ou à un minimum.

**Proposition 4.11 (Théorème du Hessien bordé)**
*Soient $f(x,y)$ et $g(x,y)$ deux fonctions admettant des dérivées partielles premières et secondes continues.*
*Dans la recherche des extrema de $f(x,y)$ sous contrainte $g(x,y)=k$, supposons que*

- *$(x_0,y_0)$ est un point régulier (c'est-à-dire $\nabla g(x_0,y_0) \neq (0,0)$ );*
- *$(x_0,y_0,\lambda_0)$ est un point stationnaire du Lagrangien (c'est-à-dire $\nabla \mathcal{L}(x_0,y_0,\lambda_0) = (0,0,0)$ ).*

*On définit $H(x_0,y_0,\lambda_0)$ comme étant le déterminant suivant (appelé le* ***Hessien bordé****) :*

$$H(x_0,y_0,\lambda_0) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0) & \mathcal{L}''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) & \mathcal{L}''_{x\lambda}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ \mathcal{L}''_{yx}(x_0,y_0,\lambda_0) & \mathcal{L}''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0) & \mathcal{L}''_{y\lambda}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ \mathcal{L}''_{\lambda x}(x_0,y_0,\lambda_0) & \mathcal{L}''_{\lambda y}(x_0,y_0,\lambda_0) & \mathcal{L}''_{\lambda\lambda}(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathcal{L}''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0) & \mathcal{L}''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) & -g'_x(x_0,y_0) \\ \mathcal{L}''_{yx}(x_0,y_0,\lambda_0) & \mathcal{L}''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0) & -g'_y(x_0,y_0) \\ -g'_x(x_0,y_0) & -g'_y(x_0,y_0) & 0 \end{vmatrix}.$$

*On a les résultats suivants :*

1. *Si $H(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$, alors $(x_0,y_0)$ correspond à un minimum local de $f(x,y)$ s.c. $g(x,y)=k$ ;*
2. *Si $H(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$, alors $(x_0,y_0)$ correspond à un maximum local de $f(x,y)$ s.c. $g(x,y)=k$ ;*
3. *Si $H(x_0,y_0,\lambda_0)=0$, on ne peut conclure.*

Nous allons maintenant revenir au premier exemple traité dans l'exercice 4.3 et, grâce à la proposition 4.11, décider du statut de chacun des six candidats. Les dérivées partielles secondes du Lagrangien sont données par :

$$\mathcal{L}''_{xx}(x,y,\lambda) = 2\ (y - 2\lambda)\ ,$$
$$\mathcal{L}''_{xy}(x,y,\lambda) = \mathcal{L}''_{yx}(x,y,\lambda) = 2x\ ,$$
$$\mathcal{L}''_{yy}(x,y,\lambda) = -2\lambda\ .$$

Le Hessien bordé est donné par :

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 2\ (y-2\lambda) & 2x & -4x \\ 2x & -2\lambda & -2y \\ -4x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 8\ (4x^2y + 4x^2\lambda + 2y^2\lambda - y^3)\ .$$

On a les résultats suivants :

| $(x,y)$ | $\lambda$ | $H(x,y,\lambda)$ | Statut du candidat | $f(x,y)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(0,\sqrt{3})$ | $0$ | $-24\sqrt{3}$ | minimum local | $0$ |
| $(0,-\sqrt{3})$ | $0$ | $24\sqrt{3}$ | maximum local | $0$ |
| $(1,1)$ | $1/2$ | $48$ | maximum local | $1$ |
| $(1,-1)$ | $-1/2$ | $-48$ | minimum local | $-1$ |
| $(-1,1)$ | $1/2$ | $48$ | maximum local | $1$ |
| $(-1,-1)$ | $-1/2$ | $-48$ | minimum local | $-1$ |

Nous pouvons finalement conclure que

- la valeur maximum de $f(x,y)$ sous la contrainte est

  $$f(1,1) = f(-1,1) = 1\ ;$$

- la valeur minimum de $f(x,y)$ sous la contrainte est

  $$f(1,-1) = f(-1,-1) = -1\ .$$

### 4.4.6 Interprétation des multiplicateurs de Lagrange correspondant à l'optimum

Considérons à nouveau le problème

$$\begin{cases} \text{Max} & f(x,y) \\ \text{s.c.} & g(x,y) = k \end{cases} \tag{4.17}$$

(le problème de minimisation se traite de façon similaire).

Supposons que $(x^*, y^*)$ satisfaisant $\nabla\mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda^*) = (0,0,0)$, soit solution de ce problème. En général, $x^*$, $y^*$ et $\lambda^*$ dépendent de $k$. Nous écrirons donc $x^* = x^*(k)$, $y^* = y^*(k)$ et $\lambda = \lambda^*(k)$ et nous supposons que $x^*(k)$ et $y^*(k)$ sont des fonctions dérivables. La valeur de $f$ au point $(x^*, y^*)$ est aussi une fonction de $k$ : nous l'appellerons $f^*(k)$. Nous supposons également que $f^*(k)$ est une fonction dérivable.
On a donc

$$f^*(k) = f(x^*(k), y^*(k)) \, . \tag{4.18}$$

La valeur de $f^*(k)$ est appelée la **valeur optimale de la fonction objectif $f$ pour le problème** (4.17).

Nous allons calculer la dérivée de chacun des deux membres de l'égalité (4.18) considérés comme fonction de $k$. La règle de dérivation en chaîne (proposition 3.10, page 116) nous permet d'écrire

$$\frac{df^*(k)}{dk} = f'_x(x^*(k), y^*(k)) \, \frac{dx^*(k)}{dk} + f'_y(x^*(k), y^*(k)) \, \frac{dy^*(k)}{dk} \, . \tag{4.19}$$

Le triplet $(x^*, y^*, \lambda^*)$ est un point stationnaire du Lagrangien, ce qui s'écrit :

$$f'_x(x^*(k), y^*(k)) = \lambda^*(k) \; g'_x(x^*(k), y^*(k)) \, , \tag{4.20}$$

$$f'_y(x^*(k), y^*(k)) = \lambda^*(k) \; g'_y(x^*(k), y^*(k)) \, , \tag{4.21}$$

$$g(x^*(k), y^*(k)) = k \, . \tag{4.22}$$

Nous allons utiliser (4.20) et (4.21) pour remplacer, dans (4.19), les dérivées de $f$ par celles de $g$. On obtient :

$$\frac{df^*(k)}{dk} = \lambda^*(k) \; \underbrace{\left[g'_x(x^*(k), y^*(k)) \, \frac{dx^*(k)}{dk} + g'_y(x^*(k), y^*(k)) \, \frac{dy^*(k)}{dk}\right]}_{\frac{d}{dk} \, g(x^*(k), y^*(k))} \, .$$

Grâce à (4.22), on obtient

$$\frac{df^*(k)}{dk} = \lambda^*(k) \; \underbrace{\frac{dk}{dk}}_{1} \, .$$

On obtient ainsi la proposition suivante.

**Proposition 4.12 (Signification du multiplicateur de Lagrange correspondant à une solution)**
*Sous des conditions de dérivabilité adéquates, le multiplicateur de Lagrange $\lambda^*(k)$ est le taux de variation instantané (la dérivée) de $f^*(k)$ (valeur optimale de la fonction objectif) par rapport à $k$, c'est-à-dire*

$$\frac{df^*(k)}{dk} = \lambda^*(k) \, .$$

On en déduit (voir §3.5.1.2, page 106 et suivante) le résultat suivant.

**Proposition 4.13 (Multiplicateur de Lagrange correspondant à la solution et variation de la valeur optimale de la fonction objectif)**
*Si $\Delta_k$ est « petit », on obtient l'approximation suivante :*

$$f^*(k + \Delta k) - f^*(k) \approx \lambda^*(k)\ \Delta k\ ,$$

*qui peut s'exprimer par :*

*si dans le problème*

$$\begin{cases} \text{Max(Min)} & f(x,y) \\ s.c. & g(x,y) = k \end{cases}$$

*on fait varier la constante $k$ d'une quantité $\Delta k$, alors la valeur optimale de la fonction objectif varie approximativement de $\lambda^*(k)\ \Delta k$.*

**Exercice 4.4**

*Une firme produit deux biens $A$ et $B$. Le coût pour produire $x$ unités du bien $A$ et $y$ unités du bien $B$ est donné par*

$$C(x,y) = 5x^2 - 3xy + 8y^2 + 95\ .$$

*On désire déterminer les quantités $x$ et $y$ à produire pour minimiser ce coût en sachant que la firme est soumise à un quota de production donné par*

$$x + y = 64\ .$$

*De plus, on souhaite savoir ce que deviendrait le coût minimum si le quota de production passait de 64 à 65 unités.*

**Solution**

Le problème est donc

$$\begin{cases} \text{Min} & C(x,y) \\ \text{s.c.} & g(x,y) = x + y = 64 \end{cases}$$

**1. Recherche des candidats**

La fonction $g$ n'admet pas de point stationnaire. On considère le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 5x^2 - 3xy + 8y^2 + 95 - \lambda\ (x + y - 64)\ .$$

Les points stationnaires du Lagrangien sont solutions du système :

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) & = 10x - 3y - \lambda = 0\ , \\ \mathcal{L}'_y x(x,y,\lambda) & = -3x + 16y - \lambda = 0\ , \\ \mathcal{L}'_\lambda x(x,y,\lambda) & = -x - y + 64 = 0\ , \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$$(x, y, \lambda) = (38, 26, 302)\ .$$

Pour vérifier que le point $(x, y) = (38, 26)$ correspond à un minimum, nous allons utiliser le théorème du Hessien bordé (conditions du second ordre).

**2. Conditions du second ordre**

$$\mathcal{L}''_{xx}(x,y,\lambda) = 10\ ,\quad \mathcal{L}''_{yy}(x,y,\lambda) = 16\ ,\quad \mathcal{L}''_{xy}(x,y,\lambda) = -3\ ,$$

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 10 & -3 & -1 \\ -3 & 16 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -32 < 0\ .$$

Comme $H(x, y, \lambda) < 0$, le point $(x, y) = (38, 26)$ correspond à un minimum.

Le coût minimum vaut $C(38, 26) = 9759$.

**3. Que devient le coût minimum si le quota de production passe de 64 à 65 unités ?**

Reprenant les notations introduites au début du paragraphe, on obtient :

$$(x^*, y^*, \lambda^*) = (38, 26, 302) \qquad \text{et} \qquad C^*(64) = C(38, 26)\ .$$

La proposition 4.13 nous permet d'écrire

$$C^*(64 + 1) - C^*(64) \approx \lambda^* \cdot 1 = 302\ .$$

En conclusion, si le quota de production passe de 64 à 65 unités, le coût minimum augmentera de 302 unités monétaires.

**Extrema sous contrainte d'égalité**

11. Déterminez les éventuels extrema de la fonction

    (a) $x^2 + y^2$ s.c. $x^2 + xy + y^2 = 3$

    (b) $5x^2 + 6y^2 - xy$ s.c. $x + 2y = 64$

    (c) $xy$ s.c. $2x + 5y = 100$

    (d) $ax + by$ s.c. $x^2 + y^2 = c^2$ ( $a, b, c =$ constantes, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ )

    (e) $24x^2 + 6xy + 4y^2$ s.c. $2x + y = 56$

    (f) $3xy$ s.c. $x^2 + y^2 = 8$

    (g) $x + y$ s.c. $x^2 + 3xy + 3y^2 = 3$

12. Un consommateur a une fonction d'utilité $U(x, y) = xy$ et doit satisfaire une contrainte budgétaire $2x + y = 100$. Déterminez les quantités $x$ et $y$ qui maximisent la fonction d'utilité.

13. Considérons la fonction de production $Q(K, L) = 120\ K\ L$ d'une firme où $K$ désigne le capital et $L$ la quantité de travail. On suppose que le coût unitaire du capital est $r$, celui du travail, $w$, et que la firme souhaite dépenser exactement $m$ unités monétaires pour couvrir ces deux coûts.

    (a) Déterminez, en fonction de $m$, les valeurs de $K$ et $L$ qui maximisent la fonction de production.

    (b) Si $m = 100$, quelle est la production maximum ?

    (c) Si $m$ passe de $100$ à $101$, comment varie la production maximum ?

14. (a) Minimisez le coût de production auquel est soumise une entreprise pour satisfaire une commande de 60 unités sachant que la fonction de production est $Q(K, L) = 2K + 3L$ et que le coût total est $C(K, L) = 45K^2 + 90KL + 90L^2$.

    (b) Déterminez une approximation de la variation du coût optimal suite à une diminution unitaire de la commande.

15. Recherchez les extrema de la fonction $f(x, y) = x(y + 4)$ s.c. $x + y = 8$.

    Quel est (approximativement) l'effet d'une augmentation d'une unité de la contrainte sur la valeur optimale de $f$ ? Même question pour une diminution d'une unité.

## A.4 ($M_{\text{ULg-Éco}}$) Bair (2003)

Le présent document est un extrait du syllabus du cours "MATH0058-2 Mathématiques pour ingénieurs de gestion : partim II" actuellement donné à l'université de Liège (ULg), Belgique.

**(Bair, 2003)** "Analyse Mathématique" de Bair.

# Chapitre VI

# Extrema liés

## VI.1 Présentation du problème

Nous allons traiter le cas où les variables intervenant dans la fonction à optimiser ne sont plus *libres*, mais soumises à des contraintes qui peuvent s'écrire soit sous la forme d'égalités, soit sous la forme d'inégalités; on parle alors d'extrema *liés*.

Nous commencerons par soulever le cas, étudié de longue date (principalement par le Comte Joseph-Louis de Lagrange, 1736-1813), où toutes les contraintes sont des égalités. L'introduction systématique d'inégalités de liaison est récente et d'ailleurs plus délicate.

La première méthode qui vient à l'esprit consiste à tirer des équations des contraintes certaines variables en fonction des autres, de manière à se ramener à un nombre réduit de variables qui ne soient plus liées par des égalités. Ce procédé, qui offre de toute manière le léger inconvénient de créer une disparité de traitement entre les variables, est acceptable si l'on ne néglige aucune éventualité, ni aucune inégalité de contrainte qui pourrait venir peser sur les variables conservées. Par exemple, si l'une des liaisons est $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, on peut s'en servir pour éliminer $x_3$, à condition d'envisager les deux cas

$$x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \quad \text{et} \quad x_3 = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

et de ne pas perdre de vue la contrainte $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ entre les variables $x_1$ et $x_2$, même si le radical disparaît finalement de l'expression de la fonction à l'étude. Négliger ces précautions peut conduire à des erreurs ! La réduction du nombre des variables jusqu'à disparition des égalités de contrainte se réalise parfois indirectement au moyen d'une "représentation paramétrique"; par exemple, la contrainte $x^2 + y^2 = r^2$ est l'équation d'un cercle centré à l'origine, et il suffit de prendre $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ pour y satisfaire quel que soit l'angle au centre (ou azimut) $t$; en remplaçant $x$ et $y$ par ces expressions dans la fonction $f$, on fait dépendre celle-ci de l'unique variable indépendante $t$.

Quand les égalités de contrainte sont trop complexes pour livrer explicitement certaines variables en fonction des autres, on peut considérer qu'elles les définissent "implicitement". Cette voie, qui repose bien entendu sur le théorème des fonctions implicites, a inspiré à Lagrange un traitement efficace, dont les conceptions récentes de la programmation non linéaire sont issues. Elle offre l'avantage de préserver la symétrie des rôles des variables, en ce sens que la distinction entre variables éliminées et variables conservées est finalement abolie.

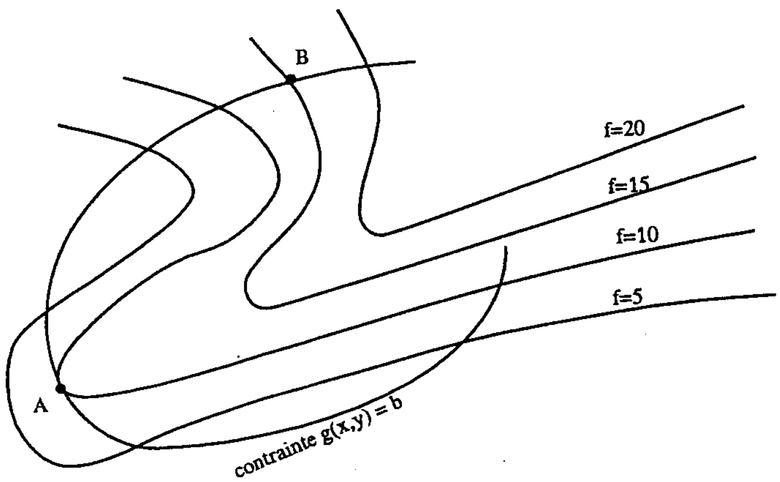
70

Pour une formulation correcte (malheureusement fort rare), il convient d'introduire encore un nouveau terme relatif aux extrema.

Soit une fonction $f$ de $n$ variables, représentées par le point $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et soumises à $m$ contraintes de la forme $g_j(X) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$; les fonctions $f$ et $g_j$ sont définies sur un sous-ensemble ouvert $D$ de $\mathbb{R}^n$ et l'on considère l'ensemble $E = \{X \in D : g_j(X) = 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, m\}$, supposé non vide. On dira que $X^*$ est un *maximant local de la fonction $f$ sur l'ensemble $E$* (ou maximant local sous les liaisons, ou contraintes, qui définissent $E$) lorsqu'il existe un voisinage $V$ de $X^*$ tel que $f(X^*) \geq f(X)$ pour tout point $X$ de $E \cap V$; $f(X^*)$ est alors appelé un *maximum local de $f$ sur $E$*. On définit de même un *minimant* (resp. *minimum*) *local de $f$ sur $E$*. Si l'inégalité est stricte pour tout $X \neq X^*$ dans $E \cap V$, on qualifie de *strict* un tel extrémant (resp. extremum) local de $f$ sur $E$. L'importance de cette notion réside dans l'énoncé suivant, dont la démonstration est immédiate.

*Tout maximant* (resp. *minimant*) *de $f$ sur $E$ est un maximant* (resp. *minimant*) *local de $f$ sur $E$.*

D'après cette propriété, la recherche des extrémants de $f$ sur $E$ peut emprunter le détour des extrémants locaux de $f$ sur $E$. Par exemple, soit à rechercher dans $\mathbb{R}^2$, les extrema de $f(x, y)$ sur la courbe définie par la contrainte $g(x, y) = b$ (voir figure ci-dessous). Visiblement, le point $A$ est un extrémant (local) de $f$ le long de $g$ (c'est-à-dire sur l'ensemble $E = \{X \in E : g(X) = b\}$) bien qu'il ne soit nullement un extrémant local de $f$; par contre, le point $B$ n'est pas un extrémant de $f$ le long de $g$ : si l'on se déplace autour de $B$, en restant sur la courbe $g(x, y) = b$, $f$ diminue d'un côté et augmente de l'autre.




Il est bon de noter que si un maximant (resp. minimant) local de $f$ sur $E$ est intérieur à $E$, il est maximant local de $f$ au sens défini dans l'étude des extrema libres, et relève alors de l'analyse des points stationnaires pour $f$. En revanche, si $X^*$ appartient à

71

la frontière de $E$, ce qui est très fréquent car l'intérieur de $E$ est souvent vide (que l'on pense, par exemple dans $\mathbb{R}^2$, à la droite d'équation $y + x - 1 = 0$ ou au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$), on verra qu'il est astreint à l'annulation de la dérivée de $f$ dans les directions marquées par les "tangentes" à $E$, de sorte que $X^*$ n'est généralement pas un point stationnaire pour $f$; la technique à utiliser pour repérer un tel point $X^*$ devra donc être affinée.

## VI.2 Règle des multiplicateurs de Lagrange

Précisons le cadre de notre étude. La fonction $f$ à optimiser et les fonctions $g_j$ ($j = 1, \ldots, m$) sont supposées de classe 1 (et si besoin de classe 2) sur un ouvert $D$ de $\mathbb{R}^n$ et les $b_j$ ($j = 1, \ldots, m$) sont des constantes; $D$ inclut l'ensemble $E = \{X \in D : g_j(X) = b_j$ pour $j = 1, \ldots, m\}$ sur lequel on cherche l'extremum de $f$.

En un extrémant local $X^*$ de $f$ sur $E$, on peut, grâce à un raisonnement qui va être esquissé, établir une condition qui lie les dérivées partielles de $f$ à celles des fonctions de contrainte $g_j$.

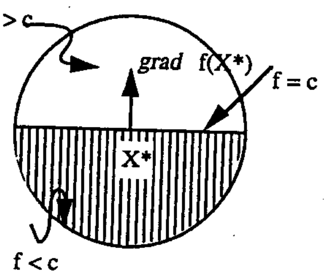
Nous allons nous contenter de donner un aperçu de cette théorie en examinant en détail le cas d'une fonction $f$ à deux variables $x_1$ et $x_2$, qu'il s'agit de maximiser sur un ensemble $E$ défini par une seule égalité de contrainte, à savoir $g(x_1, x_2) = b$.

Supposons que, dans le plan numérique $\mathbb{R}^2$, nous soyons en présence d'un maximant local $X^*$ de $f$ sur $E$. Nous allons reconnaître intuitivement que le gradient de $f$ est proportionnel au gradient de $g$ en $X^*$, à la condition que ce dernier ne soit pas nul :

$$grad\, f(X^*) = \lambda^*\, grad\, g(X^*).$$

Le résultat est évident lorsque le gradient de $f$ en $X^*$ est nul : il suffit alors de prendre le coefficient $\lambda^*$ égal à 0.

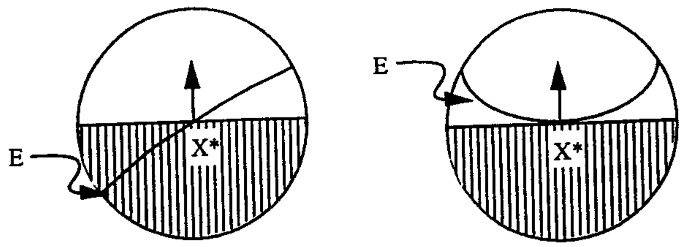
Plaçons-nous donc dans le cas où $grad\, f(X^*)$ est différent de $O$.



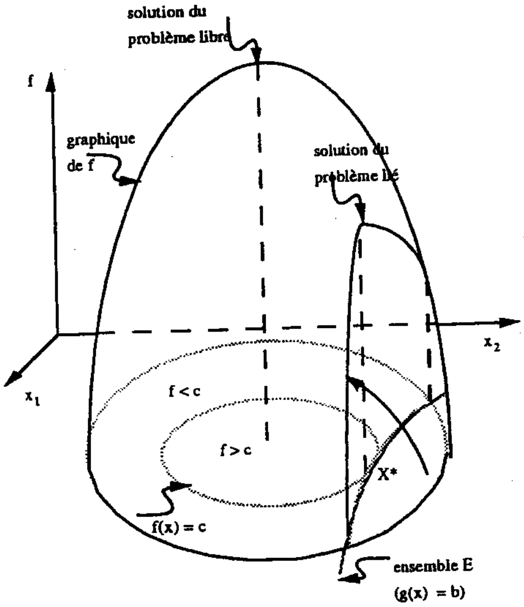

Comme l'indique la figure ci-contre, le vecteur $grad\ f(X^*)$, qui sera toujours translaté pour être issu du point $X^*$ et non de l'origine, est normal en $X^*$ à la courbe de niveau d'équation $f(X) = c$, avec $c = f(X^*)$; cette courbe sépare l'ensemble $D_+$ des points $X$ en lesquels $f(X) > c$ de l'ensemble $D_-$ des points $X$ tels que $f(X) < c$.

Supposons que les gradients de $f$ et $g$ en $X^*$ ne soient pas proportionnels; l'ensemble $E$ doit rencontrer la courbe d'équation $f(X) = c$ en $X^*$ et possède, au voisinage de $X^*$, des points communs avec $D_+$ comme le montre la figure de gauche ci-dessous; dès lors,

72




il existe des points $X$ de $E$ tels que $f(X) > f(X^*)$, contrairement à l'hypothèse selon laquelle $X^*$ est un maximant de $f$ sur $E$. Il s'ensuit que les gradients de $f$ et de $g$ en $X^*$ sont parallèles, en accord avec la formule $grad\ f(X^*) = \lambda^*\ grad\ f(X^*)$. Cela signifie géométriquement que le gradient de $f$ en $X^*$ est normal en $X^*$ à la courbe $E$, comme c'est le cas sur la figure de droite ci-dessus;




en termes équivalents, la courbe $g(X) = b$ est "tangente" en $X^*$ à la courbe d'équation $f(X) = c$, comme on le voit très bien sur la figure ci-contre (où apparaît nettement la distinction entre un maximum libre et un maximum lié).

Ce résultat fondamental peut être démontré comme suit lorsque le gradient de $g$ en $X^*$ n'est pas nul. Quitte à changer le rôle des variables $x_1$ et $x_2$, nous pouvons supposer que $g_2'(X^*)$ n'est pas nul. En vertu du théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $x_2 = h(x_1)$ dont le graphique coïncide, au voisinage de $X^*$, avec la courbe d'équation $g(X) = b$; dès lors, $f$ ne dépend plus que de la variable $x_1$ et la condition du premier ordre relative au maximum de $f$ en $X^*$ entraîne, en prenant toutes les dérivées partielles de $f$ en $X^*$,

$$\frac{d}{dx_1} f\,[x_1, h(x_1)] = f_1' + f_2' \frac{dh}{dx_1} = 0,$$

soit

$$\frac{dh}{dx_1} = -\frac{f_1'}{f_2'};$$

par ailleurs, en différentiant l'égalité $g(X) = b$, on obtient $g_1'dx_1 + g_2'dx_2 = 0$, d'où

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g_1'}{g_2'};$$

en comparant ces deux résultats, on trouve

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1'}{f_2'} = -\frac{g_1'}{g_2'},$$

ou encore

$$\frac{f_1'}{g_1'} = \frac{f_2'}{g_2'} = \lambda^*,$$

d'où *grad* $f(X^*) = \lambda^*$ *grad* $g(X^*)$. En particulier, l'égalité $-\frac{f_1'}{f_2'} = -\frac{g_1'}{g_2'}$ montre que les courbes $f(X) = c$ et $g(X) = b$ ont même tangente en $X^*$, le coefficient angulaire de cette tangente commune étant égale à l'opposé du rapport $\frac{f_1'}{f_2'}$ (ou de $\frac{g_1'}{g_2'}$).

La méthode de Lagrange se propose de montrer que cette loi de proportionnalité *grad* $f(X^*) = \lambda^*$ *grad* $g(X^*)$ peut, d'une certaine manière, être étendue au cas général d'une fonction à $n$ variables et pour $m$ contraintes. On obtient de la sorte une relation entre les gradients de la fonction $f$ à optimiser et des fonctions $g_j$ des contraintes; il s'agit de la **règle de Lagrange**, ou **règle des multiplicateurs**. La démonstration de ce résultat dans le cas général (que nous ne détaillerons pas en raison des difficultés techniques qu'elle comporte) est assez semblable (dans son principe) à celle du cas particulier traité ci-dessus; elle repose également sur le théorème des fonctions implicites (dans sa version la plus générale). Or, celui-ci réclame une hypothèse : le jacobien des fonctions considérées ne peut pas s'annuler. Dès lors, pour pouvoir mener à bien le raisonnement, il faut que la matrice *jacobienne* en $X^*$ des fonctions $g_j$, à savoir

$$J(X^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(X^*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(X^*) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(X^*) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(X^*) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(X^*) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(X^*) \end{pmatrix},$$

soit de rang $m$ (égal au nombre des contraintes). Remarquons que, pour une seule contrainte ($m = 1$), cette condition équivaut au caractère non nul du gradient de $g$ en $X^*$.

Lorsque le rang de $J(X^*)$ est inférieur à $m$, le point $X^*$ est dit *singulier* (ou *sauvage*) pour $E$; un point non singulier est encore qualifié de *régulier* pour $E$.

**Règle des multiplicateurs.** *Soient $f$ et $g_j$ ($j = 1, \dots, m$) des fonctions continûment dérivables sur un ouvert $D$ de* $\mathbb{R}^n$ *et* $E = \{x \in D : g_j(X) = b_j$ *pour*

74

$j = 1, \ldots, m\}$. *Si un point non singulier $X^*$ de $E$ est maximant* (resp. *minimant*) *local de $f$ sur $E$, il existe $m$ nombres réels $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ tels que*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X^*) \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Remarquons d'emblée que, pour $n = 2$ et $m = 1$, ce résultat redonne celui obtenu plus haut, à savoir la proportionnalité entre le gradient de $f$ en $X^*$ et celui de la fonction de contrainte $g$ (toujours en $X^*$). Par ailleurs, si l'on considère la fonction

$$L = f + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (b_j - g_j),$$

qui porte le nom de *lagrangien* tandis que les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont appelés les *multiplicateurs de Lagrange*, les $n$ égalités

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X^*) \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n$$

traduisent le fait que $X^*$ est un point stationnaire du lagrangien pour des valeurs convenables des multiplicateurs de Lagrange.

Le vecteur $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ sera appelé *vecteur de Lagrange* associé au point $X^*$; de plus, $L(X; \Lambda^*)$, ou plus simplement $L^*(X)$ désignera la fonction

$$f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* [b_j - g_j(X)].$$

Nous disposons dorénavant de cette condition nécessaire pour avoir un extrémant local de $f$ sur $E$, donc pour avoir un extrémant de $f$ sur $E$.

**Règle de sélection.** *Tout extrémant (local) $X^*$ de $f$ sur l'ensemble $E$ défini par les contraintes*

$$g_1(X) = b_1, \ldots, g_m(X) = b_m$$

*(sous les hypothèses indiquées plus haut) est soit un point stationnaire de Lagrange $L$ pour des valeurs convenables des multiplicateurs de Lagrange, soit un point singulier pour $E$.*

Schématiquement, alors que $X^*$ refusait d'être stationnaire pour $f$ (s'il n'était pas intérieur à $E$), il est néanmoins stationnaire pour le lagrangien. En fait, la technique de Lagrange transforme donc le problème lié de départ en un problème libre, mais en retouchant la fonction à optimiser à l'aide des conditions de contrainte et en augmentant le nombre de "variables" par l'introduction des multiplicateurs de Lagrange.

question 1
vrai ou faux.

Pratiquement, pour repérer les extrémants (locaux) de $f$ sur $E$ (autres que les points singuliers pour $E$), on tentera de satisfaire à la fois aux conditions de stationnarité

$$L_1' = 0 \ , \ \ L_2' = 0 \ , \ \ \ldots \ , \ \ L_n' = 0 \tag{1}$$

et aux contraintes

$$g_1 = b_1 \quad , \quad g_2 = b_2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad g_m = b_m \tag{2}$$

On se trouve ainsi en présence de $m+n$ équations contenant autant d'inconnues, à savoir $x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Si un processus de résolution du système (généralement non linéaire) formé des équations (1) et (2) nous livre une solution $x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$, le point $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ est à retenir comme éventuel extrémant de $f$ sur $E$; de son côté, le vecteur de Lagrange associé, à savoir $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, n'aura joué dans l'affaire qu'un rôle auxiliaire.

C'est le moment de faire deux remarques importantes.

En premier lieu, la règle de sélection ci-dessus présente le lagrangien comme une fonction de $x_1, \ldots, x_n$ dans laquelle les multiplicateurs de Lagrange sont des coefficients qu'il convient certes de choisir opportunément, mais que l'on regarde comme des constantes; un point stationnaire pour $L$, dans cet énoncé, est un point $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ qui annule les dérivées partielles premières de $L$ par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ dont $L$ dépend. Mais on peut adopter un point de vue plus large et considérer à la fois les $x_i$ et les $\lambda_j$ comme $m+n$ variables dont dépend le lagrangien qui sera dès lors noté $L(X; \Lambda)$, ou de façon moins concise $L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Voici l'interprétation qu'on peut alors donner du systèmes des équations (1) et (2). D'une part, les conditions (1) expriment la nullité des dérivées partielles de $L$ par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ : elles peuvent se résumer en

$$grad_X L(X^*; \Lambda^*) = 0;$$

d'autre part, il est visible que

$$b_1 - g_1 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}, \ldots, b_m - g_m = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m},$$

de sorte que les équations de contrainte (2) reviennent tout simplement à l'annulation des dérivées partielles de $L(X; \Lambda)$ par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

On peut ainsi synthétiser la situation en disant que *la résolution du système composé des équations* (1) *et* (2) *représente la recherche des points de* $\mathbb{R}^{m+n}$, *du type*

$$(X^*; \Lambda^*) = (x_1^*, \ldots, x_n^* \, ; \, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*),$$

*qui soient stationnaires pour le lagrangien* $L(X; \Lambda)$ *considéré comme une fonction des* $m+n$ *variables* $x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Cela se traduit synthétiquement par

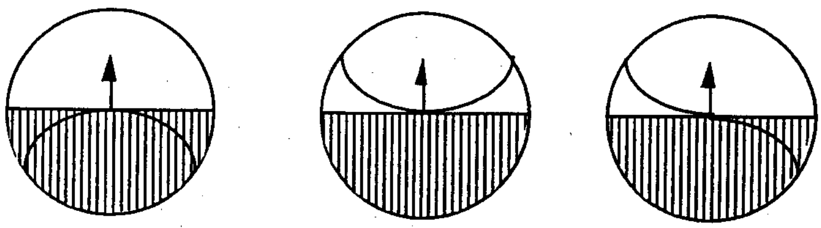
$$grad_{(X;\Lambda)} L(X^*; \Lambda^*) = 0.$$

La seconde remarque est une mise en garde. La plupart des auteurs ne font pas mention des points singuliers pour $E$; d'autres en parlent pour assurer que ces points ne peuvent devenir des extrémants locaux de $f$ sur $E$ sans être malgré tout stationnaires pour le lagrangien (avec la particularité d'admettre une infinité de vecteurs de Lagrange associés). Ce serait consolant si c'était toujours vrai, mais de nombreux exemples montrent que tel n'est pas le cas (nous en verrons ultérieurement). Un traitement correct de la méthode de Lagrange ne peut donc pas faire abstraction de ces poins singuliers.

## VI.3 Sélection dans la méthode de Lagrange

La règle des multiplicateurs vaut aussi bien pour repérer un maximant qu'un minimant; dès lors, nous devrons trier les points repérés pour discerner ceux qui fournissent un maximant local de $f$ sur $E$, de ceux qui fournissent un minimant local de $f$ sur $E$, ou de ceux qui donnent autre chose.

Montrons l'utilité de cette étape en reprenant l'exemple, dans $\mathbb{R}^2$ d'une fonction $f$ à optimiser sur un ensemble $E$ défini par une seule contrainte du type $g(X) = b$. Si $X^*$ est un point régulier de $E$ où les gradients de $f$ et de $g$ sont proportionnels, conformément à la règle des multiplicateurs de Lagrange, nous pouvons avoir pour $X^*$ un maximant local de $f$ sur $E$, ou un minimant local de $f$ sur $E$, ou un point qui ne procure ni maximum, ni minimum local (donc global) de $f$ sur $E$, comme le montrent respectivement ces trois figures :



Tout point repéré, c'est-à-dire tout point stationnaire du lagrangien et tout point singulier (ou sauvage), doit donc être "sélectionné".

Il n'existe aucune recette universelle qui soit capable de déterminer si un point repéré est un extrémant global de $f$ sur $E$ ou, le cas échéant, un extrémant local de $f$ sur $E$. En réalité, on a le choix entre quatre méthodes de sélection, plus ou moins efficaces selon le problème abordé; la dernière méthode est la plus ardue, mais la plus exploitée en économie. Avant de détailler ces diverses techniques et de les illustrer par des exemples et applications, dressons un tableau récapitulant leur principe de base, leur portée locale ou globale, ainsi que les points repérés qu'elles prennent en charge.

| Principe de la méthode | Portée | Points repérés pris en charge |
|---|---|---|
| Etude du signe de $f(X) - f(X^*)$ pour tout point $X^*$ repéré | locale ou globale | points stationnaires du lagrangien et points singuliers pour $E$ |
| Comparaison des valeurs de $f$ aux points repérés si le maximum (ou minimum) de $f$ sur $E$ est assuré | globale | points stationnaires du lagrangien et points singuliers pour $E$ |
| Extrema libres de $L^*(X)$, notamment par examen de la hessienne $\mathcal{H}L^*$ | locale ou globale | points stationnaires du lagrangien |
| Examen de la "hessienne bordée" de $L^*(X^*;\Lambda^*)$ | locale | points stationnaires du lagrangien |

**a) Première méthode**

*Si $X^*$ est un point repéré tel que $f(X) - f(X^*) \leq 0$ pour tout $X$ de $E$* (resp. *pour tout $X$ de $E$ voisin de $X^*$*), *$X^*$ est un maximant* (resp. *maximant local*) *de $f$ sur $E$.*

Il s'agit en effet d'un simple retour à la définition même d'un maximant (éventuellement local) de $f$ sur $E$, après que le repérage ait été mené à bien.
Bien entendu, il y a possibilité d'obtenir un maximant (local) strict en remplaçant le signe d'inégalité large $\leq$ par celui d'inégalité stricte $<$ pour $X$ distinct de $X^*$.
Cette première méthode peut théoriquement être appliquée pour tout point repéré, mais n'est pas toujours très efficace. Montrons toutefois son utilité en résolvant deux cas particuliers, le premier livrant une conclusion globale, le second uniquement une conclusion locale.

*Exemple* 1. Recherchons, dans $\mathbb{R}^2$, les extrema de $f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$ sous la contrainte $(x_1 - 1)^3 = x_2^2$. Le lagrangien

$$L = 1 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda \left[x_2^2 - (x_1 - 1)^3\right]$$

n'admet aucun point stationnaire situé dans l'ensemble $E = \{X \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^3 = x_2^2\}$; par contre, $X^* = (1, 0)$ est visiblement un point singulier pour $E$.
Calculons la valeur de $f(x_1, x_2) - f(1, 0)$ pour tout point $X = (x_1, x_2)$ vérifiant la contrainte :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(1, 0) &= 1 - x_1^2 - x_2^2 - (1 - 1 - 0) = 1 - x_1^2 - (x_1 - 1)^3 \\ &= (1 - x_1)(1 + x_1) + (1 - x_1)^3 = (1 - x_1)(x_1^2 - x_1 + 2); \end{aligned}$$

comme le deuxième facteur de ce produit est toujours positif, la différence considérée est négative pour tout point $X$ de $E$ autre que $X^*$, puisque $x_1 - 1$ ne peut être négatif en raison de la contrainte. En conclusion, le point singulier $X^* = (1, 0)$ fournit le maximum strict de $f$ sur $E$; par contre, $f$ ne possède visiblement pas de minimum sur $E$. Cet exemple simple, dû à Courant[1], montre que la nécessité de tenir compte des points singuliers pour $E$; signalons que cet exercice peut être facilement résolu en évitant la méthode de Lagrange par une réduction du nombre des variables : il est en effet aisé, grâce à la contrainte, d'éliminer la variable $x_2$ au profit de $x_1$.

*Exemple* 2. Recherchons, dans $\mathbb{R}^2$, les extrema de $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sous la contrainte $x_1 x_2 - 2x_1 + x_2 = 3$. Le lagrangien

$$L = x_1 + x_2 + \lambda(3 - x_1 x_2 + 2x_1 - x_2)$$

possède deux points stationnaires (situés dans $E$), obtenus en résolvant le système :

$$1 - \lambda(x_2 - 2) = 0, 1 - \lambda(x_1 + 1) = 0 \text{ et } x_1 x_2 - 2x_1 + x_2 = 3 :$$

il s'agit des points $(0, 3)$ et $(-2, 1)$, auxquels sont respectivement associés les multiplicateurs de Lagrange 1 et $-1$. Par ailleurs, $E$ ne possède aucun point singulier, puisque

[1] Courant R., *Differential and Integral Calculus*, 2, Interscience Publ., New York, 1936, pp. 192-193.

78

les valeurs $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$ ne vérifient pas la contrainte. L'étape de sélection se fera en calculant les différences $f(X) - f(X^*)$ pour tout point $X$ de $E$ et pour chacun des deux points repérés $X^*$.

Pour $X^* = (0, 3)$, nous trouvons :

$$f(X) - f(X^*) = x_1 + x_2 - 3 = x_1 + \frac{3 + 2x_1}{1 + x_1} - 3 = \frac{x_1^2}{1 + x_1};$$

cette différence est positive si $x_1 > -1$ et négative si $x_1 < -1$, de sorte que ce point $X^* = (0, 3)$ procure à $f$ un minimum local sur $E$.

Pour $X^* = (-2, 1)$, nous obtenons :

$$f(X) - f(X^*) = x_1 + x_2 + 1 = x_1 + \frac{3 + 2x_1}{1 + x_1} + 1 = \frac{(2 + x_1)^2}{1 + x_1};$$

cette différence est positive si $x_1 > -1$ et négative si $x_1 < -1$, d'où $X^* = (-2, 1)$ est un maximant local de $f$ sur $E$. En fait, $f$ ne possède ni maximum, ni minimum sur $E$, puisque $E$ représente les deux branches d'une hyperbole, d'équation $(x_1 + 1)(x_2 - 2) = 1$, d'asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

**b) Deuxième méthode**

*Si l'existence du maximum de $f$ est assurée, les maximants de $f$ sur $E$ se confondent avec les maximants de $f$ sur l'ensemble $Q$ des points repérés.*

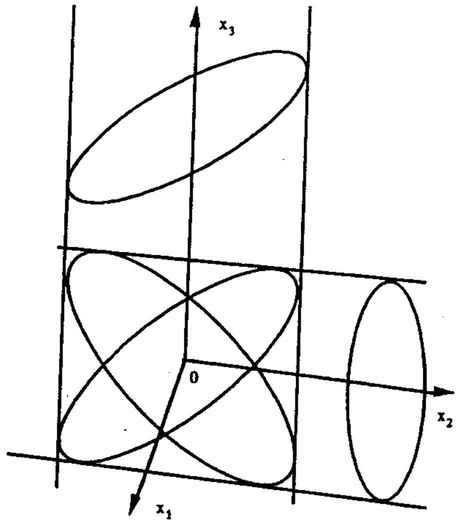
De fait, tout maximant de $f$ sur $E$ est évidemment maximant de $f$ sur $Q$. Réciproquement, si un maximant $X^*$ de $f$ sur $Q$ n'était pas maximant sur $E$, un maximant $Y$ de $f$ sur $E$, qui existe par hypothèse, donnerait $f(Y) > f(X^*)$. Mais $Y$ doit appartenir à $Q$, donc $X^*$ ne répondrait pas au signalement.

Une règle analogue peut être donnée pour le minimum.

En particulier, l'existence du maximum et du minimum de $f$ sur un ensemble compact est garantie par le théorème de Weierstrass. Ainsi, lorsque $E$ est compact, cette deuxième méthode livre une sélection immédiate dans le cas fréquent où l'ensemble $Q$ des points repérés est fini, plus généralement, quand $f$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur $Q$ : il suffit alors de comparer ces valeurs, la plus grande livrant le maximum, la plus petite le minimum.

En guise d'illustration, résolvons le problème suivant.

*Exemple* 3. Recherchons dans $\mathbb{R}^3$, les extrema de $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 + x_3$ sous les contraintes $x_1^2 + x_2^2 = 1$ et $x_1^2 + x_3^2 = 1$. L'ensemble $E$ est l'intersection de deux cylindres circulaires, le premier d'axe de symétrie $Ox_3$, le deuxième d'axe $Ox_2$.




$E$ se compose de deux ellipses qui se rencontrent aux deux points $(1,0,0)$ et $(-1,0,0)$ comme l'indique la figure ci-contre. Le lagrangien est donné par

$$\begin{aligned} L &= x_1^2 + x_2 + x_3 + \lambda_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ &\quad + \lambda_2(1 - x_1^2 - x_3^2); \end{aligned}$$

ses points stationnaires situés dans $E$ sont obtenus en résolvant le système formé par les cinq équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1(1 - \lambda_1 - \lambda_2) &= 0, \\ 1 - 2\lambda_1 x_2 &= 0, \\ 1 - 2\lambda_2 x_3 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_1^2 + x_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

La première équation livre $x_1 = 0$ ou $1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$; $x_1 = 0$ donne les points $(0,1,1)$, $(0,-1,-1)$, $(0,1,-1)$ et $(0,-1,1)$. Il est à noter que la comparaison des deux contraintes conduit à $x_2 = x_3$ ou à $x_2 = -x_3$.

Supposons désormais $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$; si $x_2 = x_3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, d'où $x_2 = x_3 = 1$ et $x_1 = 0$; si $x_2 = -x_3$, $\lambda_1 = \lambda_2$, ce qui est impossible puisque $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Par ailleurs, la jacobienne des $g_j$ prend la forme suivante :

$$J(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 2x_3 \end{pmatrix};$$

il existe visiblement deux points singuliers $(1,0,0)$ et $(-1,0,0)$, qui sont précisément les deux points où les ellipses constituant $E$ se rencontrent. Au total, nous avons repéré six points, à savoir $(0,1,1)$, $(0,-1,-1)$, $(0,1,-1)$, $(0,-1,1)$, $(1,0,0)$ et $(-1,0,0)$, les quatre premiers étant des points stationnaires du lagrangien, les deux derniers des points singuliers pour $E$. Le maximum et le minimum de $f$ sur $E$, qui existent tous deux en vertu du théorème de Weierstrass (puisque $E$ est compact), est forcément atteint en un de ces six points repérés. Comme $f$ prend respectivement les valeurs 2, $-2$, 0, 0, 1 et 1 en ces points, le maximum (resp. le minimum) de $f$ sur $E$ vaut 2 (resp. $-2$) et est atteint en $(0,1,1)$ (resp. en $(0,-1,-1)$).

Remarquons que le maximum (resp. le minimum) de la fonction $f(x_1,x_2,x_3) = x_1$ sur le même ensemble $E$ est clairement atteint au point singulier $(1,0,0)$ (resp. $(-1,0,0)$), chaque point singulier étant ici un point stationnaire du lagrangien auquel est associée une infinité de vecteurs de Lagrange.

*Exemple* 4. Recherchons, dans $\mathbb{R}^n$, les extrema de la forme quadratique $f(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, les coefficients $a_{ij}$ étant réels et constants, sous la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i^2 =$

1. Il n'existe aucun point singulier sur la sphère unitaire

$$E = \{X \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}.$$

Dès lors, le maximum et le minimum cherchés, qui existent puisque la sphère $E$ est compacte, sont atteints en un point stationnaire du lagrangien

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right),$$

qui peut s'écrire matriciellement sous la forme

$$L = {}^tXAX + \lambda(1 - {}^tXX),$$

où $X$ désigne comme d'habitude un vecteur-colonne et où $A$, matrice dont les éléments sont les coefficients $a_{ij}$, peut être supposée sans restriction symétrique. En tenant compte précisément de la symétrie de $A$, nous obtenons

$$grad\ L(X) = 2(AX - \lambda X).$$

Tout point stationnaire $X^*$ du lagrangien associé $L^*$ donne lieu à l'égalité $AX^* = \lambda^*X^*$, de sorte que $X^*$ doit être un vecteur propre de $A$, associé à la valeur propre $\lambda^*$, tel que

$$f(X^*) = {}^tX^*AX^* = \lambda^*\, {}^tX^*X^* = \lambda^*.$$

En conclusion, le maximum (resp. le minimum) de $f$ sur $E$ vaut la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de la matrice $A$ et est atteint en un vecteur propre (normé) de $A$.

**c) Troisième méthode**

*Soit $X^*$ un point stationnaire du lagrangien auquel est associé un vecteur de Lagrange $\Lambda^*$. Si $X^*$ est maximant local (strict) de $L^*$, il est maximant local (strict) de $f$ sur $E$. Si $X^*$ est maximant (strict) de $L^*$ sur $D$, il est maximant (strict) de $f$ sur $E$.*

En effet, les valeurs des fonctions $L(X;\Lambda^*)$ et $f(X)$ coïncident sur $E$, vu l'annulation de $b_j - g_j(X)$ pour tout $X$ de $E$.

Un énoncé semblable peut évidemment être donné pour le minimum.

Une application importante de ce résultat concerne les cas pour lesquels le lagrangien est concave ou convexe

*Si $X^*$ est un point stationnaire du lagrangien associé $L^*$ qui est concave (resp. convexe) et de classe 1 sur l'ouvert $D$ supposé convexe, $X^*$ est maximant (resp. minimant) de $f$ sur $E$.*

Il s'agit de constater que la concavité de $L^*$ se traduit, pour tout point $X$ de $E$, par

$$L^*(X) \leq L^*(X^*) + (X - X^*) \times grad\ L^*(X^*),$$

soit $L^*(X) \leq L^*(X^*)$ puisque $grad\ L^*(X^*) = 0$, ou encore $f(X) \leq f(X^*)$ car $f(X) = L^*(X)$ pour tout point $X$ de $E$.

En particulier, si $f$ est concave (resp. convexe) et les $g_j$ sont linéaires, le lagrangien $L^*$ associé à un point $X^*$ et à un vecteur de Lagrange $\Lambda^*$ est concave (resp. convexe); dès lors, les conditions du premier ordre (obtenues en annulant toutes les dérivées partielles du lagrangien et en considérant toutes les égalités des contraintes) sont suffisantes pour affirmer que $f$ possède en $X^*$ un maximum (resp. minimum) sur $E$.

Cette troisième méthode montre que la recherche du maximum (ou du minimum), éventuellement local, de $f$ sur $E$ se ramène, dans certains cas, à celle du maximum (ou minimum) sur $D$ du lagrangien $L(X; \Lambda^*) = L^*(X)$ associé à un point stationnaire repéré $X^*$ et à un vecteur de Lagrange $\Lambda^*$. Ce dernier problème est parfois résolu en examinant la hessienne de la fonction $L^*(X)$ pour certains $X$, éventuellement pour $X = X^*$. Nous supposerons dorénavant que les fonctions $f$ et $g_j$ (pour $j = 1, 2, \ldots, m$), donc également $L^*$, sont deux fois continûment dérivables (ou de classe 2) sur l'ouvert $D$ qui, au besoin, sera pris étoilé sur $X^*$.

*Soit $X^*$ un point stationnaire du lagrangien $L$, auquel est associé le vecteur de Lagrange $\Lambda^*$. Si la matrice $\mathcal{H}L^*(X^*)$ est définie négative* (resp. *définie positive*), *$X^*$ est maximant* (resp. *minimant*) *local strict de $f$ sur $E$; si $\mathcal{H}L^*(X)$ est semi-définie négative* (resp. *semi-définie positive*) *pour tout point $X$ appartenant à un voisinage de $X^*$, $X^*$ est maximant* (resp. *minimant*) *local de $f$ sur $E$.*

*Supposons désormais $D$ étoilé sur $X^*$; si $\mathcal{H}L^*(X)$ est semi-définie négative* (resp. *semi-définie positive*) *pour tout point $X$ de $D$, $X^*$ est maximant* (resp. *minimant*) *de $f$ sur $E$; si $\mathcal{H}L^*(X)$ est définie négative* (resp. *définie positive*) *pour tout point $X$ de $D \setminus \{X^*\}$, $X^*$ est maximant* (resp. *minimant*) *strict de $f$ sur $E$.*

Il suffit de rapprocher les énoncés précédents relatifs à la troisième méthode de sélection aux résultats connus à propos des extrema libres de $L^*(X)$ sur $D$.

*Remarque importante.* Il est possible que $X^*$ soit maximant de $f$ sur $E$ sans être un maximant de $L^*(X)$ sur $D$, ou même un maximant local de $f$ sur $E$ sans être maximant local de $f$; pour nous en convaincre, nous pouvons reprendre l'exemple de $f(X) = x_1 + x_2$ sous la contrainte $x_1x_2 - 2x_1 + x_2 = 3$ : les points repérés sont stationnaires du lagrangien, procurent à $f$ sur $E$ un minimum local pour $X^* = (0, 3)$ et un maximum local pour $X^* = (-2, 1)$, alors qu'aucun des deux points considérés n'est extrémant local de $L^*$ puisque la hessienne $\mathcal{H}L^*(X^*)$ est indéfinie. C'est assurément un point faible de la méthode, qui s'avère néanmoins souvent efficace, notamment dans de nombreux problèmes rencontrés en économie. Donnons-en un petit aperçu.

*Exemple* 5. Considérons $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ contrôlables par le preneur de décisions, et $m$ autres variables $y_1, \ldots, y_m$ qui ne sont pas contrôlées par lui; par exemple, les $x_i$ sont les commandes, les $y_j$ sont les stocks en fin de période. On suppose que les variables non contrôlées $y_j$ sont reliées aux instruments $x_i$ par une relation linéaire et des coefficients fixes; matriciellement, on a donc une liaison du type $Y = RX + S$, où $R = (a_{ij})$ est une matrice (à éléments constants) de format $m \times n$ et qui représente la "partie multiplicative" de la contrainte, tandis que $S = (b_i)$ est un vecteur-colonne à $m$

éléments constants, ce vecteur constituant la "partie additive" de la contrainte. Assez souvent, la fonction d'objectif qu'il s'agit d'optimiser est quadratique; elle peut dès lors être écrite sous la forme matricielle

$$f(X,Y) = {}^taX + {}^tbY + \frac{1}{2}({}^tXAX + {}^tYBY + {}^tXCY + {}^tY\,{}^tCX),$$

où $a, b, A, B$ et $C$ sont des vecteurs et des matrices (symétriques) de format adéquat. Dans ces conditions, la matrice hessienne du lagrangien coïncide avec la hessienne de $f$ (car les contraintes sont linéaires) et est constante (car la fonction $f$ est quadratique); la dernière proposition permet alors souvent de conclure.

*Exemple* 6. La fonction de Cobb-Douglas joue un rôle important en microéconomie, spécialement dans la théorie de la production. Penchons-nous sur une fonction de ce type dans l'espace $\mathbb{R}^n$ à $n$ dimensions. Recherchons les extrema de

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

sur l'ensemble

$$E = \{X \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,\ \ x_i > 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n\},$$

sachant que les nombres $\alpha_i$, $a_i$ (pour $i = 1, 2, \ldots, n$) et $b$ sont des constantes positives. La recherche d'un extrémant de $f$ sur $E$ équivaut à celle d'un extrémant de la fonction

$$\ell n f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \ell n \, x_i$$

sur l'ensemble

$$E = \{X \in D : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b\},$$

où $D = \{X \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, n\}$. Aucun point de $E$ n'est singulier. Le Lagrangien est de la forme suivante :

$$L = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \ell n \, x_i + \lambda \left( b - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right).$$

Des calculs élémentaires montrent que ce lagrangien n'admet que le seul point stationnaire $X^*$ défini par

$$x_i^* = \frac{b\alpha_i}{a_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n,$$

auquel est associé le nombre

$$\lambda^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}{b}.$$

Comme la hessienne de $L^*(X)$ est définie négative sur $D$, puisque

$$\mathcal{H}L^*(X) = diag\left(\frac{-\alpha_1}{x_1^2}, \frac{-\alpha_2}{x_2^2}, \ldots, \frac{-\alpha_n}{x_n^2}\right),$$

nous savons que $X^*$ est maximant strict de $L^*$ sur $D$, donc aussi maximant strict de $f$ sur $E$. Par ailleurs, la fonction $f$ ne possède visiblement pas de minimum sur $E$ (puisque $\ell n\, f$ tend vers $-\infty$ quand une des variables s'approche de 0).

*Exemple* 7. Comme application, nous allons établir une relation entre les moyennes arithmétique et géométrique de nombres réels positifs; de façon précise, nous démontrerons que des réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ donnent lieu à l'inégalité suivante :

$$(a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

En effet, il suffit de reprendre la fonction

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

de l'exemple précédent sous la contrainte

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

(ce qui revient à supposer les nombres $\alpha_i$, $a_i$ et $b$ tous égaux à l'unité). Nous avons vu que le maximum de $f$ sur $E = \{X \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ x_i > 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n\}$ est atteint pour $x_i^* = \frac{1}{n}$; dès lors,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq n^{-n}$$

pour tout point $X$ de $E$.

Pour des réels positifs quelconques $a_1, a_2, \ldots, a_n$, posons

$$x_i = \frac{a_i}{\sum_{k=1}^{n} a_k};$$

ces valeurs $x_i$ sont les coordonnées d'un point $X$ situé dans $E$. Partant,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq n^{-n}$$

ou

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^n,$$

ce qui entraîne l'inégalité souhaitée.

84

**d) Quatrième méthode**

*Soient $f$ et $g_j$ (pour $j = 1, \ldots, m$) des fonctions deux fois continûment dérivables sur un ouvert $D$, $X^*$ un point régulier de*

$$E = \bigcap_{j=1}^{m} \{X \in D : g_j(X) = b_j\},$$

*$X^*$ étant de plus un point stationnaire pour le lagrangien associé au vecteur de Lagrange $\Lambda^*$. Si la forme quadratique*

$$q(V) = {}^tV\mathcal{H}L^*(X^*)V$$

*est négative* (resp. *positive*) *pour tout vecteur $V$ non nul tel que $V \times grad\ g_j(X^*) = 0$ pour $j = 1, \ldots, m$, alors $X^*$ est un maximant* (resp. *minimant*) *local strict de $f$ sur $E$. Si la forme $q(V)$ est tantôt positive, tantôt négative pour des $V$ vérifiant les égalités $V \times grad\ g_j(X^*) = 0$ pour $j = 1, \ldots, m$, alors $X^*$ n'est pas un extrémant de $f$ sur $E$.*

Le principe de la démonstration est le suivant. La formule de Taylor appliquée au lagrangien $L^*$ livre

$$L^*(X) = L^*(X^*) + (X - X^*) \times grad\ L^*(X^*) + \frac{1}{2}\,{}^t(X - X^*)\mathcal{H}L^*(X^*)(X - X^*) + \cdots,$$

d'où, pour tout $X$ de $E$,

$$f(X) - f(X^*) = L^*(X) - L^*(X^*) = \frac{1}{2}\,{}^t(X - X^*)\mathcal{H}L^*(X^*)(X - X^*) + \cdots$$

puisque $grad\ L^*(X^*) = 0$. Il s'agit donc essentiellement d'étudier le signe de la forme quadratique $q(V) = {}^tV\mathcal{H}L^*(X^*)V$, obtenu en posant $V = X - X^*$, mais uniquement pour certains $V$; en effet, les points $X$ sont obligatoirement situés dans $E$, de sorte que les "déplacements" $V = X - X^*$ se font dans des directions "tangentes" à $E$ en $X^*$, c'est-à-dire dans des directions déterminées par des vecteurs $dX = (dx_1, \ldots, dx_n)$ vérifiant les $m$ égalités

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(X^*)dx_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(X^*)dx_i = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(X^*)dx_i = 0,$$

provenant de l'annulation de la différentielle des $g_j$ en $X^*$ (puisque $g_j$ est constante sur $E$). En conséquence, si $q(V)$ est toujours négative (resp. positive) pour tous les vecteurs $V$ retenus, $f(X) < f(X^*)$ (resp. $f(X) > f(X^*)$) pour tout $X$ dans $E \setminus \{X^*\}$ et assez voisin de $X^*$, d'où $X^*$ est bien un maximant (resp. minimant) local strict de $f$ sur $E$. Si, par contre, $q(V)$ change de signe pour certains $V$, il en va de même pour la différence $f(X) - f(X^*)$, de sorte que $X^*$ n'est pas un extrémant de $f$ sur $E$.

Pour cette quatrième méthode de sélection, il ne s'agit donc plus d'étudier le signe d'une forme quadratique quel que soit le vecteur variable non nul, mais bien quel que soit le vecteur non nul soumis à un système de conditions linéaires.

Ce résultat est particulièrement intéressant lorsque la forme quadratique associée à la matrice hessienne de $L^*$, prise uniquement au point $X^*$, est reconnue définie négative ou définie positive sous les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X^*) \text{ pour } j = 1, \ldots, m.$$

Rappelons que la "classe" d'une forme quadratique soumise à des contraintes linéaires peut être obtenue par l'examen des mineurs principaux dominants de la "hessienne bordée" du lagrangien, à savoir la matrice

$$\overline{\mathcal{H}L^*(X^*)} = \begin{pmatrix} 0 & J(X^*) \\ {}^tJ(X^*) & \mathcal{H}L^*(X^*) \end{pmatrix};[2]$$

Ce quatrième critère de sélection est souvent utilisé. En effet, même si la matrice hessienne $\mathcal{H}L^*(X^*)$ est indéfinie (ce qui ne permet pas de conclure par la troisième méthode), il n'est pas rare qu'elle soit définie négative (ou positive) sous les contraintes linéaires $\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X^*) = 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$. Cette situation est courante en économie. En effet, on doit fréquemment optimiser une fonction $f(X)$ soumise à une seule contrainte $g(X) = b$; les conditions du premier ordre, qui annulent le lagrangien $L(X) = f(X) + \lambda\,[b - g(X)]$, entraînent $\frac{f_i'(X^*)}{g_i'(X^*)} = \lambda^*$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$; dès lors, si la contrainte est linéaire (donc du type $g(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$), les matrices

$$\overline{\mathcal{H}L^*(X^*)}$$

et

$$\overline{\mathcal{H}f}(X^*) = \begin{bmatrix} 0 & f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1' & f_{11}'' & f_{12}'' & \cdots & f_{1n}'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n' & f_{n1}'' & f_{n2}'' & \cdots & f_{nn}'' \end{bmatrix},$$

toutes les dérivées partielles de $f$ étant prises au point $X^*$, ont les mineurs principaux dominants correspondants de même signe, de sorte que la condition du second ordre (donnée par la dernière proposition) impose à la fonction $f$ d'être strictement quasi-concave ou strictement quasi-convexe.

En résumé, cette méthode de sélection s'adapte très bien pour rechercher les extrema d'une fonction strictement quasi-concave (ou convexe) soumise à une seule contrainte

[2]Notons que certains auteurs utilisent la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}L^*(X^*) & {}^tJ(X^*) \\ J(X^*) & 0 \end{pmatrix}$$

et s'intéressent aux signes des "valeurs propres tronquées", c'est-à-dire des solutions $\mu$ de l'équation

$$\begin{vmatrix} \mathcal{H}L^*(X^*) - \mu I_n & {}^tJ(X^*) \\ J(X^*) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

86

linéaire, ce qui est généralement le cas dans les théories habituelles du consommateur et du producteur (où les fonctions d'utilité et de production sont généralement supposées strictement quasi-concaves).

*Exemple* 8. Soit à rechercher le maximum de la fonction $f(x_1,x_2) = x_1x_2+x_1$ sous la contrainte $x_1+x_2 = 3$; la fonction $f$ pourrait représenter l'utilité d'un consommateur et la condition $x_1+x_2 = 3$ serait dans ce contexte la contrainte budgétaire; observons que cette fonction $f$ n'est pas concave (car sa hessienne est partout indéfinie), mais qu'elle est strictement quasi-convexe (car son hessien bordé est positif pour $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$). Aucun point de $E = \{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 3\}$ n'est singulier et des calculs de pure routine livrent, comme point stationnaire du lagrangien $L = x_1x_2 + x_1 + \lambda(3 - x_1 - x_2)$, $x_1^* = 2$, $x_2^* = 1$ avec $\lambda^* = 2$. La hessienne bordée

$$\overline{\mathcal{H}L^*(X^*)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

possède un déterminant de même signe que

$$\left|\overline{\mathcal{H}f}\right| = \begin{vmatrix} 0 & f_1' & f_2' \\ f_1' & f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_2' & f_{21}'' & f_{22}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

comme $\left|\overline{\mathcal{H}f}\right|$ est positif, la quatrième méthode permet de conclure que le point $X^* = (2,1)$ assure à la fonction $f$ un maximum local, égal à $f(X^*) = 4$. Notons encore que la première méthode de sélection garantit le caractère global de ce maximum puisque, en tenant compte de la contrainte,

$$f(x_1,x_2) - f(2,1) = x_1x_2 + x_1 - 4 = x_1(3-x_1) + x_1 - 4 = x_1^2 + 4x_1 - 4 = -(x_1-2)^2 \leq 0.$$

Cette même conclusion peut aussi être facilement obtenue en éliminant une variable à partir de l'égalité de contrainte ou provient du fait que $L^*$ est strictement quasi-concave (et que dès lors un maximant local de $L^*$ est aussi maximant global pour $L^*$).

## VI.4 Interprétation des multiplicateurs de Lagrange

La règle des multiplicateurs de Lagrange est souvent utilisée pour rechercher les extrema d'une fonction $f$ sur un ensemble $E$ défini par $m$ contraintes $g_j(X) = b_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$.

Soit $X^*$ un point non singulier de $E$, qui est stationnaire pour le lagrangien et auquel est associé un vecteur de Lagrange $\Lambda = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$. Plaçons-nous dans le cas où une méthode de sélection permet de reconnaître que $f(X^*)$ est la valeur optimale (locale) de $f$ sur $E$.

Nous allons voir que les multiplicateurs de Lagrange, qui sont utiles pour la détection de l'extremum, ont de plus une signification concrète très intéressante, puisqu'ils mesurent en quelque sorte la sensibilité de l'extremum $f(X^*)$ pour des variations dans les constantes $b_j$ des contraintes.

Pour vérifier ce résultat, faisons varier les $b_k$; il en résultera des modifications dans les valeurs $x_i^*$ et $\lambda_j^*$ qui permettent d'atteindre le nouvel optimum; néanmoins, les contraintes et les conditions du premier ordre devront toujours être respectées, de sorte que l'on aura encore : $g_j(X^*) = b_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X^*) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n,$$

soit $m + n$ équations en les $2m + n$ variables $b_1, \ldots, b_m$; $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$; $x_1^*, \ldots, x_n^*$.

Si l'on suppose applicable le théorème général des fonctions implicites, il est possible alors d'exprimer chaque $x_i^*$ et chaque $\lambda_j^*$ en fonction des variables $b_1, b_2, \ldots, b_m$ : $x_i^* = x_i^*(b_1, \ldots, b_m)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\lambda_j^* = \lambda_j^*(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$, ce qui peut être écrit plus simplement sous la forme $X^* = X^*(B)$ et $\Lambda^* = \Lambda^*(B)$. En conséquence, la valeur optimale $L^*(X^*) = L(X^*; \Lambda^*)$ peut être regardée comme une fonction en les variables $b_j$, à savoir

$$L^*(B) = L\left[X^*(B); \Lambda^*(B)\right] = f\left[X^*(B)\right] + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^*(B) \left[b_j - g_j(X^*(B))\right].$$

Calculons les dérivées partielles de $L^*$ par rapport à chaque $b_k$ en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^*}{\partial b_k} &= \frac{\partial f}{\partial b_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \lambda_j^*}{\partial b_k}\left[b_j - g_j(X^*)\right] + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial b_j}{\partial b_k} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial b_k} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_p} \frac{\partial x_p^*}{\partial b_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \lambda^*}{\partial b_k}\left[b_j - g_j(X^*)\right] + \lambda_k^* - \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_p} \frac{\partial x_p^*}{\partial b_k} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_p} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_p}\right] \frac{\partial x_p^*}{\partial b_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \lambda_j^*}{\partial b_k}\left[b_j - g_j(X^*)\right] + \lambda_k^*.
\end{aligned}$$

Or, les conditions du premier ordre impliquent

$$\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_p} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_p} = 0$$

pour tout indice $p$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, tandis que les contraintes entraînent $b_j = g_j(X^*)$ pour tout indice $j$ de $\{1, 2, \ldots, m\}$; de plus, $L(X^*; \Lambda^*) = f(X^*)$. En conséquence,

$$\lambda_k^* = \frac{\partial L^*}{\partial b_k} = \frac{\partial f(X^*)}{\partial b_k}.$$

En conclusion, chaque multiplicateur de Lagrange mesure bien la sensibilité de la valeur optimale $f(X^*)$ pour une variation d'un paramètre $b_k$, toutes les autres grandeurs restant inchangées. Intuitivement, cela signifie, par exemple, que si un multiplicateur $\lambda_k^*$ est nul, la valeur $f(X^*)$ de l'extremum ne sera pas modifiée par un changement infinitésimal du nombre $b_k$ intervenant dans la $k$-ème contrainte; par contre, si $\lambda_k^*$ est

88

strictement positif, un accroissement d'une unité (resp. de $\Delta b_k$ unités) de $b_k$ augmentera approximativement la fonction d'objectif de la valeur $\lambda_k^*$ (resp. $\lambda_k^* \cdot \Delta b_k$).

Cette interprétation est importante en économie. En effet, dans de nombreux problèmes, la fonction à optimiser a la dimension d'un prix multiplié par une quantité (c'est le cas, par exemple, pour les profits et les coûts), tandis que les nombres $b_k$ (introduits dans les contraintes) définissent souvent des quantités; dans ces conditions, un multiplicateur de Lagrange $\lambda_k^*$ est égal, à la limite, au rapport de la variation de $f(X^*)$ par la variation de la quantité $b_k$ et représente de ce fait un prix, appelé "prix virtuel" (ou "prix ombre" , "shadow price" en anglais) de la ressource considérée.

## VI.5 * Règle des multiplicateurs de Kuhn-Tucker

Abordons à présent l'étude du cas où l'une au moins des contraintes prend la forme d'une inégalité.

Pour fixer les idées, examinons sommairement le problème de la recherche du maximum d'une fonction $f(X)$ soumise à la contrainte $g(x) \geq 0$. Il est facile, en principe, de convertir l'inégalité de contrainte en une égalité moyennant l'introduction d'une variable réelle $x_{n+1}$, car il revient au même d'écrire la contrainte $g(X) = x_{n+1}^2$. Le problème se ramène donc à trouver, dans $\mathbb{R}^{n+1}$, le maximum de $f(X)$ sous la contrainte $g(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}^2$. A cet effet, on construit le lagrangien

$$L(x_1, \ldots, x_{n+1}; \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \left[ g(x_1, \ldots, x_n) - x_{n+1}^2 \right],$$

dont un point stationnaire est donné par les égalités $L_i' = f_i' + \lambda g_i'$ pour $i = 1, \ldots, n$, $2x_{n+1}\lambda = 0$ et $g(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}^2$.

De l'avant-dernière égalité, on tire, à moins que $\lambda$ ne soit nul, $x_{n+1} = 0$, d'où $g(X) = 0$. De la sorte, la recherche du maximum de $f$ sous une contrainte d'inégalité se ramène souvent à celle du maximum de $f$ sous la contrainte d'égalité correspondante, ce problème pouvant être résolu par la méthode classique de Lagrange.

La principale différence engendrée par une inégalité de contrainte provient du fait que le multiplicateur $\lambda$ doit être ici positif ou nul, alors que pour une égalité de contrainte, son signe peut être quelconque. Un exemple simple montrera cette distinction. Soient les fonctions

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

et

$$g(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2.$$

Rechercher le maximum de $f$ sous la contrainte $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ équivaut évidemment à rechercher le maximum de $f$ sachant que $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$; dès lors, le cas d'une égalité de contrainte ne permet pas de préciser le signe du multiplicateur de Lagrange : le maximum vaut alors visiblement $\sqrt{2}$ et est atteint au point

$$M^* = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Les conditions de $K.T._{\min}$ s'écrivent alors, en un point $(Y^*; M^*)$ avec $M^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)$ :

$$\frac{\partial L_1}{\partial y_j}(Y^*; M^*) = b_j - \sum_{i=1}^{n} \mu_i^* a_{ji} \geq 0 \text{ , } y_j^* \geq 0 \text{ , } y_j^* \left( b_j - \sum_{i=1}^{n} \mu_i^* a_{ji} \right) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mu_i}(Y^*; M^*) = c_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j^* \leq 0 \text{ , } \mu_i^* \geq 0 \text{ , } \mu_i^* \left( c_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j^* \right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Ces conditions sont visiblement vérifiées pour $Y^* = \Lambda^*$ et $M^* = X^*$, puisqu'elles coïncident alors avec les conditions $K.T._{\max}$ du primal.

En conséquence, tandis que le maximum de (P1) vaut $f(X^*)$, le minimum de (P2) vaut $f_1(Y^*)$. Or, en utilisant des notations matricielles, on trouve :

$$f(X^*) = L(X^*; \Lambda^*) = {}^tCX^* + {}^t\Lambda^*(B - AX^*) = {}^tCX^* + {}^t\Lambda^*B - {}^t\Lambda^*AX^*,$$

$$f_1(Y^*) = L_1(Y^*; M^*) = {}^tBY^* + {}^tM^*(C - {}^tAY^*) = {}^tBY^* + {}^tM^*C - {}^tM^*\,{}^tAY^*;$$

comme $Y^* = \Lambda^*$ et $M^* = X^*$, $f_1(Y^*) = {}^tf(X^*) = f(X^*)$.

## VI.7 Exercices

VI.7.1 Utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour déterminer les extrema de :

a) $x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 4$;

b) $x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $ax + by + cz + d = 0$;

c) $\ell n(xyz)$ sous la contrainte $2x + 5y + 3z = 90$;

d) $xyz$ sous les contraintes $x + y + z = 1$ et $x - y = 0$;

e) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ sous la contrainte $x_1x_2x_3 = 125$;

f) $-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_3$ sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 35$;

g) $e^{x_1x_2}$ sous la contrainte $3x_1 + 2x_2 + 6 = 0$;

h) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2 - x_3 + x_2x_3$ sous les contraintes $2x_1 - x_2 = 1$ et $x_1 + x_3 = 3$.

VI.7.2. Déterminer les valeurs de $x_1, x_2, x_3$ qui minimisent la fonction :

a) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_3$ sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 15$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3$ sous la contrainte $x_1x_2x_3 = 1000$.

VI.7.3. Soit la fonction $f(x) = x_1x_2x_3$ sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Montrer que le point $(1, 0, 0)$ est stationnaire pour le lagrangien, mais qu'il ne procure pas un extremum pour le problème considéré.

VI.7.4. Rechercher la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

99

VI.7.5. Diviser un segment de 30 cm. en 3 parties de façon que la somme des carrés construits sur ces 3 parties soit minimum.

VI.7.6. Déterminer la distance minimale entre un point du cercle $x^2 + y^2 = 2$ et un point de la droite $x + y = 4$.

VI.7.7. Quelle est l'équation du plan passant par le point $(1, 1, 2)$ et tel que le volume du tétraèdre limité par ce plan et les faces du trièdre trirectangle de référence soit minimum ?

VI.7.8. Quelle est la distance de l'origine au plan d'équation $3x + 2y - z + 10 = 0$ ?

VI.7.9. Déterminer les extrema de $f(x, y, z) = 40x + 16y + 10z$ sous les contraintes $x + y + z \geq 100$, $4x + y \geq 200$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$.

VI.7.10. Rechercher le

a) minimum de $x_1 + 2x_2$ si $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $\sqrt{x_1 x_2} \geq 100$;

b) minimum de $x_1 + x_2 + x_3$ si $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 x_2 x_3 \geq 125$;

c) minimum de $x_1^2 + x_2^2$ si $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \geq 2$;

d) maximum de $x_1$ si $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $(1 - x_1)^3 - x_2 \geq 0$;

e) maximum de $x_1 x_2 x_3$ si $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 54$;

f) maximum de $x_1 x_2^2 x_3^3$ si $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$.

## A.5 ($M_{\textbf{LSE-Éco}}$) van den Heuvel (2009)

Le présent document est un extrait des notes du cours "MA208 Optimisation Theory" donné en 2009 à l'université The London School of Economics and Political Science (LSE) à Londres, Royaume-Uni.

**(van den Heuvel, 2010)** "Notes 6 - Constrained Optimisation with Equality Constraints - Lagrange's Theorem and Method" de van den Heuvel.

**Optimisation Theory** **2009/10**
**MA 208**

Notes 6

Constrained Optimisation with Equality Constraints
The Lagrange Theorem and Method

#### 6.1 Introduction

- The kind of optimisation problems we will look at in these and the following notes are problems with a constraint set of the form

$$\mathcal{D} = U \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0,\ h(x) \geq 0 \}.$$

Here $U$ is an open subset of $\mathbb{R}^n$ (often the whole $\mathbb{R}^n$) and $g, h$ are multidimensional functions: $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ and $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$, for some $k$ and $\ell$.

We will usually explicitly write the $k$ components of $h$ and the $\ell$ components of $g$. So instead of $g(x) = 0$, $h(x) \geq 0$ we write

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad g_k(x) = 0;$$
$$h_1(x) \geq 0, \quad h_2(x) \geq 0, \quad \ldots, \quad h_\ell(x) \geq 0.$$

- You may notice that there are no constraints of the form $j_i(x) > 0$, $i = 1, \ldots, m$. The reason for this is that for reasonable functions $j_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (for instance, if $j_i$ is continuous) the set $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid j_1(x) > 0, \ldots, j_m(x) > 0 \}$ will be an open set. That means that constraints of that form will appear in the definition of the open set $U$.

The main reason to give the open set $U$ such a separate role, is that every point of an open set in an interior point of that set. And we already know quite a lot about how to handle optimisation for interior points from Notes 5.

→ It is often necessary to rewrite the constraint set to the standard form above. For instance we are asked to find the minimum of a certain function $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ when $x \in \mathcal{D}$ defined by

$$\mathcal{D} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ y > 0,\ \sqrt{x} + z = 3,\ y \leq z^2,\ y + z \geq \ln(x) \}.$$

In order to write this in the standard form, we need to define the set $U$ and the functions $g_i$ and $h_i$. It is fairly straightforward that this can be done as follows:

$$U = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ y > 0 \};$$
$$g_1(x,y,z) = \sqrt{x} + z - 3; \quad h_1(x,y,z) = -y + z^2; \quad h_2(x,y,z) = -\ln(x) + y + z.$$

This gives the following standard form for $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = U \cap \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x) = 0,\ h_1(x) \geq 0,\ h_2(x) \geq 0 \}.$$

**6.2 The Lagrange Theorem**

The Lagrange Theorem deals with problems where the constraint set above contains only equality constraints of the form $g_i(x) = 0$.

- A formulation of the Lagrange Theorem can be found in Theorem 5.1 in the Sundaram book. That formulation involves a rather technical condition "Suppose also that $\rho(Dg(x^*)) = k$", which we will translate a little here.

  For a matrix $A$, $\rho(A)$ denotes the rank of $A$. A further definition and some properties can be found in the book in Section 1.3.3. I advise you to read that section (ignore the final Theorem 1.43). In particular you should know that the *column-rank of $A$* (the maximum number of independent columns of $A$) is equal to the *row-rank of $A$* (the maximum number of independent rows of $A$); and that this number is called the *rank of $A$*.

- If the constraint function $g$ is seen as a function from $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}^k$, then $Dg(x)$ is an $n \times k$ matrix. Using the definition of the rank of a matrix, it follows that this matrix has rank $k$ if and only if it has column rank $k$, hence if and only if the $k$ column vectors of $Dg(x)$ are linearly independent. This gives:

  * *For a function $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, the rank of $Dg(x)$ is $k$ if and only the vectors $\{ Dg_1(x), \ldots, Dg_k(x) \}$ form an independent set of vectors.*

- Using the observation above, the Lagrange Theorem can be written as follows. Recall that a function is a $C^1$ *function* if its derivative exists and the derivative is continuous everywhere where the function is defined.

  * **Theorem (the Lagrange Theorem)**
    *Let $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ be a $C^1$ function on a certain open set $U \subseteq \mathbb{R}^n$, and let $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, be $C^1$ functions. Suppose $x^*$ is a local maximum or minimum of $f$ on the set*

    $$\mathcal{D} = U \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, k \}.$$

    *Suppose also that the derivatives $\{ Dg_1(x^*), \ldots, Dg_k(x^*) \}$ form an independent set of vectors.*

    *Then there exist $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^* \in \mathbb{R}$ such that $Df(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \, Dg_i(x^*) = 0$.*

- Note that the Lagrange Theorem only gives a <u>necessary</u> condition for a local minimum or maximum. If we have a point $x_0$ with $Df(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \, Dg_i(x_0) = 0$ for some $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^* \in \mathbb{R}$, it doesn't mean that that point must be a local minimum or maximum.

  Also note that there is this weird condition "Suppose also that the derivatives $\{ Dg_1(x^*), \ldots, Dg_k(x^*) \}$ form an independent set of vectors." If this is not the case for some point, then such a point may fail to satisfy the final conclusion of the theorem, *even if the point is a local minimum or maximum.* (See also Section 6.4 below.)

  And finally, the Lagrange Theorem only says something about <u>local</u> maxima or minima. Different methods are needed to decide which of those are a <u>global</u> maximum or minimum.

### 6.3 Proof of the Lagrange Theorem

The proof of the Lagrange Theorem can be found in Section 5.6 in the book. Although that proof is not too long, it depends on the *Implicit Function Theorem*, Theorem 1.77 in the book. And a look at that theorem will convince you that this is no laughing matter. Moreover, the proof as given in the book doesn't give you much idea of what is actually going on. That's why a sketch of an alternative proof is given below.

- **Sketch of Proof** Use the notation from the statement of the theorem on the previous page, and suppose $x^*$ is a local maximum of $f$ on $\mathcal{D}$. Using the first order Taylor Approximation at $x^*$ we get that

$$f(x) \;=\; f(x^*) + Df(x^*) \cdot (x - x^*) + \text{remainder},$$

where a more precise description of the remainder term can be found in Notes 5. Now write $x = x^* + a$, where $\|a\|$ is small enough to guarantee that $x^* + a \in U$. (This is possible since $U$ is an open set.) Then we get that

$$f(x^* + a) \;=\; f(x^*) + Df(x^*) \cdot a + \text{remainder}.$$

Now recall that $x^*$ was a local maximum on $\mathcal{D}$. Thus for small enough $\|a\|$ with $x^* + a \in \mathcal{D}$ we must have that $f(x^* + a) \leq f(x^*)$ and $f(x^* - a) \leq f(x^*)$. If we substitute that in the formula above, and forget about the remainder term, then this must mean that $Df(x^*) \cdot a \leq 0$ and $Df(x^*) \cdot (-a) \leq 0$. We get the following necessary condition:

(1) For all $a \in \mathbb{R}^n$ with $x^* + a \in \mathcal{D}$ and $\|a\|$ small enough we have that $Df(x^*) \cdot a = 0$.

In order to get an idea what it means that $x^* + a \in \mathcal{D}$, we have a look at the constraint functions $g_1, \ldots, g_k$. Their Taylor Approximation around $x^*$, writing $x = x^* + a$, looks as

$$g_i(x^* + a) \;=\; g_i(x^*) + Dg_i(x^*) \cdot a + \text{remainder}, \qquad \text{for } i = 1, \ldots, k.$$

But we know that $x^* \in \mathcal{D}$, hence $g_i(x^*) = 0$; and we are only interested in those $a$ such that $x^* + a \in \mathcal{D}$, hence such that $g_i(x^* + a) = 0$. Filling this in into the formula above, means that we are only interested in those $a$ such that $0 = 0 + Dg_i(x^*) \cdot a + \text{remainder}$, for $i = 1, \ldots, k$. Again ignoring the remainder term, this means that get the following statement:

(2) In order to have $x^* + a \in \mathcal{D}$ for a certain $a \in \mathbb{R}^n$ with $\|a\|$ small, we need that $Dg_i(x^*) \cdot a = 0$, for all $i = 1, \ldots, k$.

Now note that if we have an $a$ with $Df(x^*) \cdot a = 0$ or $Dg_i(x^*) \cdot a = 0$, then the same holds for every scalar multiple $\lambda\, a$. So we can ignore the condition "$\|a\|$ small", to get the following combination of statements (1) and (2).

(3) For all $a \in \mathbb{R}^n$ with $Dg_i(x^*) \cdot a = 0$ for $i = 1, \ldots, k$, we need that $Df(x^*) \cdot a = 0$.

In a lemma below we will show that the only way that statement (3) can be true is if $Df(x^*)$ is a linear combination of $Dg_1(x^*), \ldots, Dg_k(x^*)$. So there must exist $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ such that $Df(x^*) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, Dg_i(x^*)$. But this is the same as $Df(x^*) + \sum_{i=1}^{k} (-\alpha_i)\, Dg_i(x^*) = 0$, which gives the Lagrange Theorem if we set $\lambda_i^* = -\alpha_i$, for $i = 1, \ldots, k$. ∎

- Here is the lemma promised above.

  * **Lemma**
  *Let $x, y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^n$. Suppose that we know that for all $a \in \mathbb{R}^n$ with $y_i \cdot a = 0$ for $i = 1, \ldots, k$, we also have $x \cdot a = 0$. Then $x$ is a linear combination of $y_1, \ldots, y_k$.*

**Proof** Suppose that $x$ is not a linear combination of $y_1, \ldots, y_k$. In other words, $x$ is not in the subspace of $\mathbb{R}^n$ spanned by the vectors $y_1, \ldots, y_k$. Now write $x = z_1 + z_2$, where $z_1$ is the orthogonal projection of $x$ on the subspace spanned by $y_1, \ldots, y_k$, and $z_2 = x - z_1$. Then we have $z_2 \neq 0$, and also $b \cdot z_2 = 0$ for all vectors $b$ in the subspace spanned by $y_1, \ldots, y_k$. In particular we have that $y_i \cdot z_2 = 0$ for $i = 1, \ldots, k$. By the condition in the lemma, this means that $x \cdot z_2 = 0$. But we also have that $z_1 \cdot z_2 = 0$, which means that $x \cdot z_2 = (z_1 + z_2) \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_2 = 0 + \|z_2\|^2 \neq 0$. This gives a contradiction, so we must have that $x$ is a linear combination of $y_1, \ldots, y_k$. ■

### 6.4 The Constraint Qualification

The condition in the Lagrange Theorem that the derivatives $\{ Dg_1(x^*), \ldots, Dg_k(x^*) \}$ form an independent set of vectors is called the *Constraint Qualification*. There are two easy cases in which the Constraint Qualification fails:

– If there is a $g_i$ such that $Dg_i(x^*) = 0$.

– If the number of constraints $k$ is larger than the dimension $n$. (The number of elements in an independent set is at most the dimension of the space the vectors come from.)

But you should not look for just those two cases; it may be that the Constraint Qualification is not satisfied in a certain point because in that point the derivatives of the constraint functions just don't form an independent set.

- If you go through the sketch of the proof of the Lagrange Theorem in Section 6.3 above, then you may notice that the Constraint Qualification doesn't seem to play a role there. The reason is that we did some hand-waving at a couple of places. In particular, we neglected the remainder terms in the first order Taylor Approximations for the constraint functions $g_i$. But if, for instance, the constraint function has $Dg_i(x^*) = 0$, then the remainder term is actually the most important term in deciding if $x^* + a \in \mathcal{D}$. So ignoring it at that case makes the rest of the argument pretty useless.

  Something similar, but a bit more subtle, happens when the vectors $\{ Dg_1(x^*), \ldots, Dg_k(x^*) \}$ are not independent.

### 6.5 The Lagrangean Multipliers

The numbers $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ in the Lagrange Theorem are called the *Lagrangean Multipliers*. They have a meaning for the corresponding local optimum $x^*$ as follows:

* **Property**
*Suppose $x^*$ is a local optimum of $f$ for which the Lagrangean Theorem with Lagrangean Multipliers $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ holds. Then a small relaxation of the $j$-th constraint, replacing $g_j(x) = 0$ by $g_j(x) + \varepsilon = 0$, will give a new optimum $x^{*(\varepsilon)}$ for which we have approximately $f(x^{*(\varepsilon)}) \approx f(x^*) + \lambda_j^* \varepsilon$.*

- **Sketch of proof** We give a sketch of the proof of the statement above using again the first order Taylor Approximations of the functions involved. We assume that we replaced the $j$-th constraint $g_j(x) = 0$ by $g_j(x) + \varepsilon = 0$, for some small $\varepsilon$. In other words, we use a new $j$-th constraint function $g_j^{(\varepsilon)}$ given by $g_j^{(\varepsilon)}(x) = g_j(x) + \varepsilon$. And after this change we get a new local optimum $x^{*(\varepsilon)}$.

  We first look at the Taylor Approximations at $x^*$ for the constraint functions:

$$g_i(x) = g_i(x^*) + Dg_i(x^*) \cdot (x - x^*) + \text{remainder}, \qquad \text{for } i = 1, \dots, k.$$

  For the constraints that haven't changed, we have that both $g_i(x^*) = 0$ and $g_i(x^{*(\varepsilon)}) = 0$. If we fill in $x = x^{*(\varepsilon)}$ into the formula above, using the knowledge from the previous sentence, and neglecting the remainder term, we get

$$(4) \qquad Dg_i(x^*) \cdot (x^{*(\varepsilon)} - x^*) \approx 0, \qquad \text{for } i = 1, \dots, k,\ i \neq j.$$

  For the new and old $j$-th constraint we need that $g_j(x^*) = 0$ and $g_j^{(\varepsilon)}(x^{*(\varepsilon)}) = 0$, which gives

$$\begin{aligned} 0 = g_j^{(\varepsilon)}(x^{*(\varepsilon)}) = g_j(x^{*(\varepsilon)}) + \varepsilon &= g_j(x^*) + Dg_j(x^*) \cdot (x^{*(\varepsilon)} - x^*) + \varepsilon + \text{remainder} \\ &= 0 + Dg_j(x^*) \cdot (x^{*(\varepsilon)} - x^*) + \varepsilon + \text{remainder}. \end{aligned}$$

  Again neglecting the remainder term, we find that

$$(5) \qquad Dg_j(x^*) \cdot (x^{*(\varepsilon)} - x^*) \approx -\varepsilon.$$

  Now use that we assume that $x^*$ satisfies the condition $Df(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \, Dg_i(x^*) = 0$, hence $Df(x^*) = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \, Dg_i(x^*)$. Filling this in into the Taylor Approximation for $f$ at $x^*$, neglecting the remainder term, and using the knowledge in (4) and (5), we get

$$\begin{aligned} f(x^{*(\varepsilon)}) &\approx f(x^*) + Df(x^*) \cdot (x^{*(\varepsilon)} - x^*) \\ &= f(x^*) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \, Dg_i(x^*) \cdot (x^{*(\varepsilon)} - x^*) \\ &\approx f(x^*) - \sum_{i=1,\, i\neq j}^{k} \lambda_i^* \cdot 0 - \lambda_j^* \cdot (-\varepsilon) \\ &= f(x^*) + \lambda_j^* \, \varepsilon. \end{aligned}$$

  This proves the statement. ■

- An economical interpretation of the above is the following: Suppose the optimum $x^*$ is a maximum, and you are given the option to replace the $j$-th constraint $g_j(x) = 0$ by the constraint $g_j(x) + c = 0$, provided you pay a certain price $p$. Then you only should pay this price if the increase in the maximum is more than $p$, hence if $\lambda_i^* \, c \geq p$.

  Because of this interpretation, $\lambda_i^*$ is sometimes called the *shadow price* of constraint $i$ at $x^*$.

**6.6 Second-Order Conditions**

Similar to the fact that the First-Order Conditions for Unconstrained Optima in Notes 5 can be accompanied by Second-Order Conditions, so there exists a Second-Order companion for the Lagrange Theorem. You can find it in Section 5.3 of the book. But this time the Second-Order Conditions are very complicated, both to state them and to use them for actual problems. ( And their proof in 5.7 is an experience you want to avoid at all cost. )

Because of this, we won't look at the Second-Order Conditions. You may note that the conditions are so awkward that also the book never uses them in further discussion or asks about them in the exercises.

**6.7 Applying the Lagrange Theorem**

Sections 5.4 and 5.5 in the book give explicit descriptions of how to use the Lagrange Theorem in all kinds of situations. They all have the form ( or can be translated to the form ):

$$\text{maximise } f(x), \quad \text{subject to } x \in \mathcal{D} = U \cap \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0 \,\},$$

where $f, g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ are given $C^1$ functions, and $U \subseteq \mathbb{R}^n$ is an open set.

- The "Cookbook Procedure" in Section 5.4.1 is simply trying to find the points $x^* \in \mathbb{R}^n$ and the Lagrangean Multipliers $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ such that $g_1(x^*) = 0, \ldots, g_k(x^*) = 0$, and $Df(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \, Dg_i(x^*) = 0$. The first equation is actually a vector equation, involving vectors with $n$ coordinates. If we write out the equations coordinate by coordinate we get

$$\begin{aligned} g_i(x^*) &= 0, && \text{for all } i = 1, \ldots, k, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} g_i(x^*) &= 0, && \text{for all } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

  We sometimes call the equations above the *Lagrangean equations*.

  Another way to describe these equations is by defining the *Lagrangean*

$$L(x, \lambda) \;=\; f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, g_i(x),$$

  where $x \in \mathbb{R}^n$ and $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$. Then the equations above can be written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(x^*, \lambda^*) &= 0, && \text{for all } i = 1, \ldots, k, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} L(x^*, \lambda^*) &= 0, && \text{for all } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

- The "Cookbook Procedure" involves solving a system of $n + k$ equations, where there are $n + k$ unknowns $x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_i^*, \ldots, \lambda_k^*$. It is not always easy to find all solutions.

  Moreover, all solutions to the Lagrangean equations are only candidates for local or global optima; you still need to find out the true nature of these points.

And finally, the procedure doesn't work for points where the Constraint Qualification is not satisfied. These points should be identified separately and all points for which the Constraint Qualification is not satisfied should be added to the set of candidates for the optima.

And really finally, don't forget that there may be an open set $U$ used in the definition of $\mathcal{D}$. If you find a point $x^*$ satisfying the Lagrangean equations above and the Constraint Qualification, but lies outside $U$, then it should not be considered as a candidate optimum.

- The problem with the "Cookbook Procedure" from the book is that it ignores some facts (see the previous paragraph). So here is an improved "recipe" for solving equality constrained optimisation problems.

  – Given: the optimisation problem

  $$\text{max/min-imise } f(x), \quad \text{subject to } x \in \mathcal{D} = U \cap \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0 \,\},$$

  where $f, g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ are $C^1$ functions, and $U \subseteq \mathbb{R}^n$ is an open set.

  1. If possible, find a good reason why a maximum or minimum must exist. For this, the Weierstrass Theorem would be a prime source of knowledge, but sometimes ad-hoc methods will be required.
  2. Determine the derivatives $Dg_1(x), \ldots, Dg_k(x)$ of the constraint functions. Try to find all points in $\mathcal{D}$ for which the vectors $\{\, Dg_1(x), \ldots, Dg_k(x) \,\}$ are not independent.
  3. Determine the derivative $Df(x)$ of the objective function and formulate the Lagrangean equations:

  $$\begin{aligned} g_i(x^*) &= 0, && \text{for } i = 1, \ldots, k, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} g_i(x^*) &= 0, && \text{for } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

  4. Find all values $x^* \in U$ and multipliers $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ for which the equations above are satisfied.

  – At this point you should have a collection of candidates for the optima: the points from 2 for which the Constraint Qualification failed and the points $x^*$ in 4 satisfying the Lagrangean equations. *No other point can be a maximum or minimum of $f$ on $\mathcal{D}$.*

  5. If you know from step 1 that a maximum or minimum must exist, then calculate the function values for all candidate points from above. The points $x$ which give the maximal value $f(x)$ must form a global maximum. And similarly for the global minima.

     If you haven't been able in step 1 to guarantee the existence of a maximum or minimum, then you probably have to do some more work. Check the candidate points and see which could be a global maxima or minima and why (or why not).

     If you haven't been able in step 1 to guarantee the existence of a maximum or minimum, and no candidate points are found in steps 2 or 4, then no maximum and minimum exists. It may be a good idea to check if you can confirm that using some other reasons. (For instance, the function has no upper and lower bound on $\mathcal{D}$.)

  – If no candidate point is left from steps 2 and 4, but you claimed in step 1 that a maximum or minimum must exist, then there is something seriously wrong. Check your work and try to find the mistake(s).

## Material from the book related to these notes

- – Rank of matrices appears in Section 1.3.3 in the book. Most should be familiar from linear algebra courses.
- – Equality constrained optimisation and the Lagrange Theorem is the topic of Chapter 5 of the book. You should have a good look at Sections 5.1, 5.2.1 and 5.2.2. Section 5.2.3 is slightly more technical than Section 6.5 in these notes, and can be skipped.
  – Study Sections 5.4 and 5.5 from the book to see how the Lagrange Theorem is applied and where the problems can appear. But it may be a good idea to use the more extensive "Cookbook Procedure" from the previous page.
- – You can ignore Sections 5.3 and 5.7 on the Second-Order Conditions. Also the proof in 5.6 is beyond our reach. Look at the sketch of the proof in Section 6.3 in these notes. Again, don't learn that proof by heart, but try to get an understanding of the main ideas, in particular the use of the Taylor Approximations. A similar remarks holds for the role of the Lagrangean Multipliers in Section 6.5 of these notes.

## Suitable exercises from the book related to these notes

Sundaram book, Section 5.8 : 1 – 11.

Most of the questions will take a considerable amount of time; often because it's quite some work to find all solutions for the Lagrangean equations. Make sure you get enough practice.

# Annexe B

# Questionnaires

## B.1 Questionnaire distribué auprès des enseignants

# Le théorème de Lagrange

### Questionnaire

Etude menée dans le cadre d'une thèse en Didactique des Mathématiques

SEBASTIAN XHONNEUX
Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur

Département de Mathématique FUNDP,
Rempart de la Vierge 8, B-5000 Namur, Belgique
E-mail : sebastian.xhonneux@fundp.ac.be, Tél : 081/724946

---

D'un point de vue épistémologique, l'histoire de l'optimisation est aussi vieille que celle de l'humanité. De nombreux savoirs mathématiques, construits pour résoudre des problèmes d'optimisation, sont utilisés dans d'autres disciplines. En particulier, les économistes modernes se basent de plus en plus sur les théories mathématiques de l'optimisation pour résoudre des problèmes de recherche d'extrema.

Cette thèse tentera de mettre en évidence l'impact des différentes transpositions d'un résultat particulier - le théorème de Lagrange - sur les apprentissages des apprenants. A partir de diverses expériences d'enseignants de mathématiques et d'économie, nous aimerions analyser l'impact des différentes présentations et démonstrations dans la construction de cette notion chez les étudiants.

Merci de votre collaboration !

Pour toute question, n'hésitez pas à me contacter.

---

Nom, prénom : ..........................................................................
Université, Haute-Ecole : ..............................................................
Intitulé du cours : ......................................................................
Public : ..................................................................................

---

## Section 1. Quelques informations générales

1. Depuis quand est-ce que vous enseignez les mathématiques ? De plus, depuis quand est-ce que vous enseignez la partie du cours sur l'optimisation dans laquelle vous parlez des conditions nécessaires du premier ordre et du théorème de Lagrange ?

   OU

   Combien de temps avez-vous enseigné les mathématiques ? De plus, combien de temps est-ce que vous avez enseigné la partie du cours sur l'optimisation dans laquelle vous parlez des conditions nécessaires du premier ordre et du théorème de Lagrange ?

2. Quelle formation de base avez-vous suivie ? (Votre parcours universitaire, ainsi que des formations ultérieures dans le domaine de l'optimisation)

3. Quelle est votre domaine de recherche ? Quels sont vos centres d'intérêt en mathématiques outre l'enseignement ?

## Section 2. Informations concernant la structure du cours

4. Quelles sont vos sources et références (livres, articles, notes de cours, ...) pour préparer la partie du cours qui parle des problèmes d'optimisation avec contraintes d'égalité ?

5. Des notes de cours sont-elles disponibles pour les étudiants ? Si oui, lesquelles ?

6. Dans quel chapitre, dans quelle partie de votre cours, les conditions nécessaires d'optimalité sont-elles vues, s'intègrent-elles ? En particulier, le théorème de Lagrange, est-il abordé ? Si oui, porte-t-il le nom de *théorème de Lagrange* ?

7. Le moment où vous abordez les conditions nécessaires d'optimalité, est-il déterminé par : (plusieurs réponses possibles)
   ◯ le programme du cours,
   ◯ le manuel suivi ou les notes de cours,
   ◯ par les prérequis nécessaires pour entamer le sujet,
   ◯ par l'utilisation de ce résultat dans d'autres cours,
   ◯ par une contrainte extérieure ou autre ? (Si oui, laquelle : ____________________)

   Si ce choix ne vient pas de vous à la base, pouvez-vous dire
   (a) par qui ce choix stratégique a été fait ? ______________________________
   (b) si vous approuvez ce choix ? ◯ Oui ◯ Non

8. Le théorème de Lagrange donne une condition d'optimalité dans le cas d'un problème d'optimisation avec contraintes d'égalité. Karush-Kuhn-Tucker ont donné des conditions d'optimalité dans le cas des problèmes avec contraintes d'inégalité. Traitez-vous également dans votre cours le cas des contraintes d'égalités et d'inégalités ?
   ◯ Oui, après l'explication du cas avec contraintes d'égalités, j'aborde la problématique des contraintes d'inégalités.
   ◯ Oui, je vois les deux cas en même temps.
   ◯ Non, je me restreins au cas des contraintes d'égalités.

   Ce choix a-t-il une raison particulière ?

## Section 3. Aspects didactiques du théorème de Lagrange

9. Combien d'heures de cours théoriques et d'exercices consacrez-vous en général à l'enseignement des conditions nécessaire d'optimalité pour des problèmes d'optimisation ?
   Cours théorique : ________________________________
   Exercices : ________________________________

10. Parmi les notions relatives aux fonctions de plusieurs variables, à l'algèbre linéaire et à la topologie, quels sont les prérequis vus et nécessaires pour pouvoir aborder le théorème de Lagrange ? Ces prérequis sont-ils vus dans ce même cours ou viennent-ils de la formation antérieure des étudiants ?

11. Quel importance attribuez-vous au résultat qu'est le théorème de Lagrange ?
    ◯ Je vois le théorème de Lagrange superficiellement.
    ◯ Le théorème de Lagrange est un résultat parmi d'autres dans le programme du cours.
    ◯ Le théorème prend une place relativement importante dans mon cours.

    Quelles sont vos raisons pour cette réponse ?

12. Introduisez-vous le concept de fonction lagrangienne (ou Lagrangien) ?
    ◯ Oui ◯ Non

    Si oui, donnez la forme générale sous laquelle vous présentez la fonction lagrangienne à vos étudiants.

    ...............................................................................

    Y a-t-il une raison qui motive l'utilisation de cette forme générale ?

4

13. Comment démontrez-vous le théorème de Lagrange ? Pouvez-vous donner un résumé de la structure de la preuve ?

Qualifieriez-vous cette preuve comme plutôt

◯ géométrique ?

◯ analytique ?

◯ ________________________________________ ?

14. Quel est, d'après vous, l'élément clé de la preuve du théorème de Lagrange ?

15. Qu'en est-il d'une illustration du théorème de Lagrange ? Vous servez-vous de graphes, d'exemples calculatoires, ... ? Si oui, lesquels ?

16. Si vous donnez une interprétation géométrique du théorème de Lagrange, est-elle donnée en terme de vecteurs tangents ou de vecteurs normaux aux courbes de niveaux ? Pourquoi ?

17. Quel importance attribuez-vous à la condition de qualification des contraintes ?
    - ◯ J'insiste fortement sur les implications de cette contrainte
    - ◯ Je donne une interprétation pratique de la condition
    - ◯ Je la mets dans l'énoncé du théorème mais je n'insiste pas.
    - ◯ Autre : ____________________

    Pourquoi ?

18. Si vous donnez une interprétation du multiplicateur de Lagrange, pouvez-vous expliquer brièvement l'utilisation que vous en faites ?

## Section 4. Aspects pratiques du théorème de Lagrange

19. Dans la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalités, il y a parfois moyen de procéder par substitution au lieu d'utiliser le théorème de Lagrange pour trouver les candidats à être extremum. Voyez-vous cette méthode comme complément ? Si oui, pour quelles raisons ?

20. Quelles sont les principales applications que vous faites du théorème de Lagrange ? En quoi ces applications vous semblent-elles intéressantes ?

Ces applications sont-elles plutôt de nature
- ◯ théorique ?
- ◯ pratique ?

## Section 5. Perception de l'apprentissage chez les étudiants

21. Quelle est, d'après vous, l'étape la plus difficile à saisir dans la démonstration du théorème de Lagrange ? Pourquoi ?

22. Le théorème de Lagrange est une condition nécessaire d'optimalité. Comment les étudiants perçoivent-ils, d'après vous, qu'il ne s'agit pas d'une condition suffisante d'optimalité ?
- ◯ Très bien
- ◯ Bien
- ◯ De façon satisfaisante
- ◯ Pas bien

Pourriez-vous expliquer votre point de vue ?

23. La condition de qualification des contraintes pose-t-elle problème aux étudiants. Si oui, pourquoi ?

24. Lors de la résolution d'un problème d'optimisation avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on passe finalement d'un problème à $n$ dimensions avec $m$ contraintes à un problème à $n + m$ dimensions sans contraintes. Les étudiants perçoivent-ils cette subtilité ?

25. D'après vous, faut-il introduire le théorème de Lagrange d'abord dans le cas d'une seule contrainte d'égalité avant de passer au cas de plusieurs contraintes d'égalités ? Pourquoi ?

26. Comment évaluez-vous l'apprentissage de ce théorème chez les étudiants ?

## Section 6. Autres remarques

27. Souhaitez-vous faire encore un commentaire sur ce questionnaire ou le théorème de Lagrange en général ?

MERCI !

8

## B.2 Questionnaire distribué auprès des étudiants

# Le théorème de Lagrange

## Questionnaire

Etude menée dans le cadre d'une thèse en Didactique des Mathématiques

Sebastian Xhonneux
Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur

---

Merci de bien vouloir répondre aux questions de ce questionnaire. Vos professeurs n'auront pas accès à ces formulaires.

Merci de votre collaboration !

---

Nombre de cours auxquels vous avez assisté : ......................................
Nombre de TP auxquels vous avez assisté : ........................................

---

## Le théorème de Lagrange

1. Pouvez-vous dire dans quel chapitre vous avez vu le théorème de Lagrange ?

2. A quel type de problèmes d'optimisation le théorème de Lagrange s'intéresse-t-il ?
   ◯ Problèmes d'optimisation sans contraintes
   ◯ Problèmes d'optimisation avec contraintes d'égalités
   ◯ Problèmes d'optimisation avec contraintes d'inégalités
   ◯ Problèmes d'optimisation avec contraintes d'égalités et d'inégalités

3. Avez-vous eu l'impression que
   ◯ le théorème de Lagrange est une application de la théorie vue auparavant ?
   ◯ le théorème de Lagrange constitue un nouvel élément du cours à étudier qui est indépendant de la matière vue avant ?
   ◯ le théorème de Lagrange fait référence à des notions mathématiques dont vous ne vous souveniez plus ?
   ◯ le théorème de Lagrange est un résultat important du cours ?
   (plusieurs réponses possibles)

4. Qu'est-ce que c'est la fonction lagrangienne (ou le Lagrangien) ?
   ◯ La définition est :
   ◯ Je ne me souviens plus !
   ◯ Je n'en ai jamais entendu parler !

5. De quelle façon le professeur a-t-il vu le théorème de Lagrange ?
   ◯ Le professeur a graphiquement illustré le théorème mais nous n'avons pas vu de preuve.
   ◯ Le professeur nous a présenté une preuve simple.
   ◯ Le professeur nous a montré une preuve très mathématique.
   ◯ Autre : ..............................................................

6. Si vous avez vu une preuve du théorème de Lagrange, qualifieriez-vous cette preuve de plutôt
   ◯ géométrique ?
   ◯ analytique ?
   ◯ autre : .............................................................. ?

   Quel est, d'après vous, l'élément clé de la preuve du théorème de Lagrange ?

   Quelle est, d'après vous, l'étape la plus difficile à saisir dans la démonstration du théorème de Lagrange ? Pourquoi ?

7. Si vous avez vu une preuve, pourriez-vous décrire brièvement la preuve du théorème de Lagrange ? Quelles sont les grandes étapes à faire ? Comment votre professeur a-t-il structuré la preuve ?

8. En dehors de l'énoncé et de la preuve, qu'avez-vous vu en relation avec le théorème de Lagrange ? (Graphiques, exemples, applications, ...)

2

9. Pourquoi résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalités par la méthode des multiplicateurs de Lagrange s'il y a moyen de procéder par substitution pour trouver les candidats à être extremants ?

10. On peut donner une interprétation des multiplicateurs de Lagrange.
    ◯ Ah bon ?
    ◯ Oui, les multiplicateurs de Lagrange jouent le rôle de .........................

11. Avez-vous vu le théorème de Lagrange
    ◯ uniquement dans le cas d'une seule contrainte d'égalité ou
    ◯ dans le cas de plusieurs contraintes d'égalité ?

    D'après vous, faut-il introduire le théorème de Lagrange d'abord dans le cas d'une seule contrainte d'égalité avant de passer au cas de plusieurs contraintes d'égalités ?
    ◯ Oui, parce que ..............................................................
    ◯ Non, parce que ..............................................................

12. Vrai ou faux ?
    Lors de la résolution d'un problème d'optimisation avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on passe d'un problème à $n$ dimensions avec $m$ contraintes à un problème à $n + m$ dimensions sans contraintes. ◯ Vrai ◯ Faux

    Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange donne toujours la solution dans le cas des problèmes d'optimisation avec contraintes d'égalités.
    ◯ Vrai ◯ Faux

    Il suffit d'avoir un point qui annule le gradient du Lagrangien pour affirmer qu'il s'agit d'une solution du problème d'optimisation. ◯ Vrai ◯ Faux

13. Estimez-vous que vous avez compris l'enjeu du théorème de Lagrange ?
    ◯ Très bien
    ◯ Bien
    ◯ De façon satisfaisante
    ◯ Pas bien

14. Souhaitez-vous faire encore un commentaire sur ce questionnaire ou le théorème de Lagrange en général ?

MERCI !

3

# Annexe C

# Question d'examen résolue

Une firme fabrique un produit dans deux usines différentes. Le nombre d'unités de ce produit fabriquées journellement dans la première usine (respectivement dans la seconde usine) est noté $q_1$ (respectivement $q_2$). Le coût journalier de production, exprimé en €, est donné par

$$\begin{array}{rcll} C_1 & = & 200 + 6q_1 + 0.03q_1^2 & \text{dans la première usine,} \\ C_2 & = & 150 + 10q_2 + 0.02q_2^2 & \text{dans la seconde usine.} \end{array}$$

La firme souhaite fabriquer et livrer journellement exactement 100 unités de ce produit. La livraison lui coûte 4€ par unité à partir de la première usine et 2€ par unité à partir de la seconde usine.

1. Déterminez les quantités à fabriquer journellement dans chacune des deux usines pour que le coût total soit minimum. Que vaut ce coût minimum ?
2. Que devient ce coût minimum lorsque la firme fabrique et livre journellement 101 unités au lieu de 100.

**Solution :**
La fonction de coût total peut s'écrire :

$$C(q_1, q_2) = C_1 + C_2 + 4q_1 + 2q_2$$

Le problème de minimisation s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & C(q_1, q_2) \\ \text{SC} & q_1 + q_2 = 100 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min & 0.03q_1^2 + 0.02q_2^2 + 10q_1 + 12q_2 + 350 \\ \text{SC} & q_1 + q_2 = 100 \end{array} \right.$$

1. (a) Recherche des candidats
   – Points stationnaires de la contrainte

$$\nabla g(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– Points stationnaires du lagrangien

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \lambda) = 0.03q_1^2 + 0.02q_2^2 + 10q_1 + 12q_2 + 350 - \lambda(q_1 + q_2 - 100)$$

$$\nabla\mathcal{L}(q_1, q_2, \lambda) = \begin{pmatrix} 0.06q_1 + 10 - \lambda \\ 0.04q_2 + 12 - \lambda \\ 100 - q_1 - q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution du système d'équations (linéaires) est : $(q_1, q_2, \lambda) = (60, 40, \frac{68}{5})$.

(b) Test du Hessien bordé

$$\det \nabla^2\mathcal{L}(q_1, q_2, \lambda) = \begin{vmatrix} 0.06 & 0 & -1 \\ 0 & 0.04 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -0.1 \ < 0$$

Alors $\det \nabla^2\mathcal{L}(60, 40, \frac{68}{5}) = -0.1 < 0$.

Le point $(60, 40)$ est donc un minimum de la fonction de coût sous la contrainte $q_1 + q_2 = 100$. $C^*(60, 40) = 1570$. Le minimum vaut 1570 €.

2. On utilise la proposition 4.13 (Thiry, 2006, p.172).

$$\begin{array}{ccccc} C^*(101) & - & C^*(100) & \approx & \lambda^*(100)\ \Delta k \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \left\{\begin{array}{ll} \min & C(q_1, q_2) \\ \text{SC} & q_1 + q_2 = 101 \end{array}\right. & & \left\{\begin{array}{ll} \min & C(q_1, q_2) \\ \text{SC} & q_1 + q_2 = 100 \end{array}\right. & & \\ & & & = & \lambda^* \cdot (101 - 100) \\ & & & = & \dfrac{68}{5} \cdot 1 = 13.6 \end{array}$$

Le coût minimum devient donc (approximativement) : $C^*(101) \approx 1570 + 13.6 = 1583.6$€.

Annexe D

# Travail de groupe en BAC1, année académique 2008-2009

**Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix** Février 2009
$1^{\text{er}}$ Baccalauréat en Sciences Mathématiques

## Travail de Groupe d'Analyse : Le théorème de Lagrange

### Objectif

Le but de ce travail est d'étudier le problème du consommateur. Supposons qu'un consommateur disposant d'un revenu $R$ désire acheter deux produits dont les prix unitaires sont respectivement désignés par $p$ et $q$. La satisfaction du consommateur lorsqu'il achète les quantités $x$ et $y$ de chaque produit est mesuré par une fonction $U(x, y)$, appelée *fonction d'utilité*. Le problème du consommateur est alors de déterminer les quantités $x$ et $y$ de sorte que sa satisfaction soit maximale et que sa contrainte de budget soit respectée. Ce problème peut se formaliser comme suit :

$$(P) \begin{cases} \text{maximiser} & U(x,y) \\ \text{sous la contrainte} & px + qy = R\,. \end{cases} \tag{1}$$

### Consignes

- L'assistant responsable du travail de groupe est Sebastian Xhonneux (Département de Mathématique, Bureau 131).
- Lors de l'évaluation de ce travail, nous tiendrons compte de la rigueur et des justifications dans les réponses aux questions ainsi que de la clarté de la rédaction.
- Le travail se divise en trois parties qui sont à remettre respectivement
  1. pour le vendredi 13 février au plus tard,
  2. pour le vendredi 27 février au plus tard,
  3. et pour le vendredi 13 mars au plus tard.
- Une consultation avec Sebastian Xhonneux est obligatoire lors de la remise de la deuxième partie du travail. Elle aura lieu dès le début de la semaine du 23 février. Une feuille suivra pour les horaires précis.
- Lors de la remise de la dernière partie du travail, une deuxième consultation obligatoire sera prévue afin d'évaluer la compréhension de chacun. Cette consultation aura lieu la semaine du 16 mars.

Chaque groupe devra rendre à Sebastian Xhonneux pour chaque partie du travail une "narration de recherche". Il est demandé de ne pas vous contenter de donner la réponse mais de raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver. Vous décrirez tous les essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont pas abouti. Racontez sur votre feuille les différentes étapes de votre recherche, les remarques, les aides, les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait changer de méthode ou qui vous ont permis de progresser.

## Définitions

**Définition 0.1 (Extremum local sous contraintes)**
*Soient* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
*Un point* $a$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est appelé* minimum *(resp.* maximum*)* local de $f$ sous la contrainte $g(x) = 0$ *si*

1. *le point* $a$ *satisfait à la contrainte, i.e.* $g(a) = 0$ *;*
2. *il existe une boule ouverte* $B$ *de centre* $a$ *dans laquelle*

$$f(a) \leqslant f(x) \quad \textit{(resp. } \geqslant\textit{)}, \qquad \forall\ x \textit{ tel que } g(x) = 0.$$

Un point $a$ est appelé *extremum local de* $f$ *sous la contrainte* $g(x) = 0$ si $a$ est un minimum local ou un maximum local de $f$ sous la contrainte $g(x) = 0$.

## 1 Questions

1. Chercher analytiquement et graphiquement les maxima de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = 2 - x^2$$
sous la contrainte $g(x) = x - 1 = 0$.
2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = 2 - x^2 - 2y^2\,.$$
   (a) Chercher analytiquement les extrema de cette fonction et donner une interprétation géométrique.
   (b) Chercher analytiquement et graphiquement les extrema de cette fonction sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. (Indication : on peut utiliser les courbes de niveaux)

## Les multiplicateurs de Lagrange

Quand les contraintes d'égalités sont trop complexes pour livrer explicitement certaines variables en fonction des autres, le processus de résolution, appelé substitution, n'est plus applicable. En effet, si la contrainte était par exemple donnée par $g(x, y) = x^2y^3 - \cos xy$ il ne serait pas possible d'exprimer $y$ à l'aide de fonctions élémentaires en la variable $x$.
Cependant on peut considérer que les contraintes pourraient définir "implicitement" certaines variables en fonction des autres. Le théorème des fonctions implicite sera donc un outil essentiel pour prouver le théorème qui nous fournira un premier pas dans la résolution du problème du consommateur.

## 2 Question

Lire et comprendre le théorème suivant, appelé *Théorème de Lagrange* issu du syllabus d'Analyse (2ème partie). Il est demandé ensuite de démontrer ce théorème.

**Théorème 2.1 (Théorème de Lagrange)**
*Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ et $g : I\!R^n \to I\!R^p$ deux fonctions de classe $C^1$.*
*Considérons un point $a$ de $I\!R^n$ où la matrice jacobienne de $g$ est de rang $p$.*
*Si $a$ est un extremum local de $f$ sous la contrainte*

$$g(x) = 0 ,$$

*alors il existe $p$ nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, appelés* multiplicateurs de Lagrange*, qui vérifient*

$$\nabla f(a) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \nabla g_j(a) = 0 ,$$

*appelée* condition de Lagrange*.*

**Preuve :**
Nous prouverons ce théorème uniquement dans le cas où la fonction $g$ qui décrit la contrainte est à valeurs réelles. Dans ce cas, la matrice jacobienne de $g$ au point $a$ est le gradient de $g$ au point $a$ et l'hypothèse sur le rang de la matrice revient à exiger que le gradient de $g$ au point $a$ ne soit pas nul.
Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que

$$g'_{x_n}(a) \neq 0 .$$

Désignons par $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les composantes de $a$ et par $\overline{a}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$ dont les composantes sont les $(n-1)$ premières composantes de $a$.
Par hypothèse, le point $a$ satisfait à la contrainte.

Dès lors, il vérifie

$$g(a) = g(\overline{a}, a_n) = 0 \ .$$

**En vertu du théorème des fonctions implicites**, il existe une fonction implicite unique de classe $C^1$ :

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & B(\overline{a},\alpha) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} & \longrightarrow & ]a_n - \beta, a_n + \beta[ \ , \\ & u & \rightsquigarrow & \phi(u) \text{ tel que } g(u,\phi(u)) = 0 \ . \end{array}$$

De plus, les $n-1$ dérivées partielles de $\phi$ au point $\overline{a}$ sont données par

$$\phi'_{u_i}(\overline{a}) = -\frac{g'_{x_i}(a)}{g'_{x_n}(a)} \ , \qquad \forall \ i = 1, \ldots, n-1 \ .$$

Définissons maintenant une nouvelle fonction de $(n-1)$ variables :

$$\begin{array}{rrcl} \overline{f} : & B(\overline{a},\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{R} \ , \\ & u & \rightsquigarrow & f(u,\phi(u)) \ , \end{array}$$

et montrons que $d$ est un minimum local de $\overline{f}$ sans contrainte.
Puisque $a$ est un minimum local de $f$ sous la contrainte

$$g(x) = 0 \ ,$$

il existe une boule ouverte $B(a,\gamma)$ dans laquelle

$$f(a) \leqslant f(x) \ , \qquad \forall \ x \text{ tel que } g(x) = 0 \ .$$

Remarquons que l'on peut choisir, si ce n'est pas le cas, $\alpha$ et $\beta$ de sorte que

$$B(\overline{a},\alpha) \times ]a_n - \beta, a_n + \beta[ \ \subseteq B(a,\gamma)$$

et, au besoin, réduire à nouveau $\alpha$ pour que $\phi(B(\overline{a},\alpha))$ soit inclus dans l'intervalle $]a_n - \beta, a_n + \beta[$ .
Dès lors, si $u$ appartient à $B(\overline{a},\alpha)$, $\phi(u)$ appartient à l'intervalle $]a_n - \beta, a_n + \beta[$ , le couple $(u,\phi(u))$ est dans la boule $B(a,\gamma)$ et vérifie $g(u,\phi(u)) = 0$.
Par conséquent,

$$f(a) \leqslant f(u,\phi(u)) \ , \qquad \forall \ u \in B(\overline{a},\alpha).$$

Par définition de $\overline{f}$, nous avons

$$f(a) = f(\overline{a}, a_n) = f(\overline{a}, \phi(\overline{a})) = \overline{f}(\overline{a})$$

et

$$f(u,\phi(u)) = \overline{f}(u) \ .$$

Dès lors,

$$\overline{f}(\overline{a}) \leqslant \overline{f}(u) \ , \qquad \forall \ u \in B(\overline{a},\alpha) \ ,$$

4

et $\overline{a}$ est un minimum local de $\overline{f}$ sans contrainte.
**Le gradient $\nabla\overline{f}(\overline{a})$ est donc nul.**
Calculons l'expression des $n-1$ dérivées partielles de $\overline{f}$ au point $\overline{a}$ :

$$\begin{aligned}\overline{f}'_{u_i}(\overline{a}) &= f'_{x_i}(\overline{a},\phi(\overline{a})) + f'_{x_n}(\overline{a},\phi(\overline{a}))\cdot\phi'_{u_i}(\overline{a})\\ &= f'_{x_i}(a) + f'_{x_n}(a)\cdot\left(\frac{-g'_{x_i}(a)}{g'_{x_n}(a)}\right)\ .\end{aligned}$$

Posons

$$\lambda = -\frac{f'_{x_n}(a)}{g'_{x_n}(a)}$$

pour obtenir l'expression

$$f'_{x_i}(a) + \lambda g'_{x_i}(a) = 0\ , \qquad \forall\ i = 1,\ldots,n-1\ .$$

De plus, par définition de $\lambda$,

$$f'_{x_n}(a) + \lambda g'_{x_n}(a) = 0\ .$$

En mettant sous forme vectorielle ces $n$ égalités, on obtient

$$\nabla f(a) + \lambda\nabla g(a) = 0\ ,$$

qui est la condition de Lagrange. □

De ce théorème, nous allons tirer une condition nécessaire du premier ordre pour un extremum sous contraintes. Pour cela, définissons la fonction lagrangienne.

**Définition 2.1 (Fonction lagrangienne)**
*Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ et $g : I\!R^n \to I\!R^p$ de classe $C^1$.*
*On appelle* fonction lagrangienne associée à $f$ et $g$ *la fonction $\mathcal{L} : I\!R^n \times I\!R^p \to I\!R$ définie par*

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j g_j(x)$$

*où $x \in I\!R^n$, $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(g_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ désignent respectivement les composantes du vecteur $\lambda$ de $I\!R^p$ et de la fonction $g$.*

**Théorème 2.2**
*Soient $f : I\!R^n \to I\!R$ et $g : I\!R^n \to I\!R^p$ de classe $C^1$.*
*Considérons un point $a$ où la matrice jacobienne de $g$ est de rang $p$.*
*Si $a$ est un extremum de $f$ sous la contrainte*

$$g(x) = 0\ ,$$

*alors il existe un vecteur $\lambda^*$ de $I\!R^p$ tel que le point $(a,\lambda^*)$ soit un point stationnaire de la fonction lagrangienne $\mathcal{L}$. Les composantes du vecteur $\lambda^*$ sont les multiplicateurs de Lagrange.*

(La preuve est admise.)

## Stratégie pour rechercher les candidats à un extremum sous contraintes

Nous allons maintenant déduire une stratégie pour rechercher tous les candidats $a$ correspondant à un extremum de $f$ sous la contrainte $g(x) = 0$ en nous basant sur le théorème 2.2 et sur les deux remarques suivantes :

1. Le théorème 2.2 nous donne une **condition nécessaire** pour que $a$ corresponde à un extremum, à savoir :

$$\exists\, \lambda^* \in \mathbb{R}^p : \nabla \mathcal{L}(a, \lambda^*) = 0\,.$$

   Les points obtenus en résolvant ce système ne sont donc que des “candidats à un extremum” car rien ne garantit qu'ils correspondent effectivement à un extremum.
2. Parmi les hypothèses du théorème 2.2 figure le fait que le rang de la matrice jacobienne de $g$ en $a$ est de rang $p$. Si le rang de la matrice jacobienne est strictement plus petit que $p$, on peut avoir un extremum local qui ne satisfait pas la condition de Lagrange. Si nous voulons donc déterminer **tous** les candidats à un extremum sous contraintes, il nous faut prendre en compte les points $a$ tels que le rang de la matrice jacobienne de $g$ est strictement plus petit que $p$ et qui sont admissibles, c'est-à-dire qui sont tels que $g(a) = 0$.

Nous pouvons maintenant formuler notre stratégie de recherche des candidats à un extremum sous contraintes d'égalités.

**Proposition 2.1 (Stratégie de recherche de candidats)**
*Pour rechercher les candidats à un extremum de $f$ sous la contrainte $g(x) = 0$ :*

1. *Rechercher les points $a$ tels que le rang de la matrice jacobienne de $g$ en $a$ est strictement plus petit que $p$. Toute solution qui est admissible est un candidat.*
2. *Ecrire la fonction lagrangienne et résoudre le système $\nabla \mathcal{L}(a, \lambda^*) = 0$. Si $(a, \lambda^*)$ est une solution telle que la matrice jacobienne de $g$ en $a$ est de rang $p$, alors $a$ est un candidat.*

# 3 Questions

1. Chercher un contre-exemple pour montrer que la condition de Lagrange n'est pas une condition suffisante d'optimalité.
2. Soit le problème défini par les fonctions

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2\ ,$$
$$g(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0\ .$$

   Calculer le maximum de $f$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

6

Dans l'exercice ci-dessus, il est possible de montrer que le candidat correspondait effectivement à un extremum de $f$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ Une telle démarche n'est pas toujours possible. Pour pouvoir décider du statut d'un candidat, nous pourrons utiliser les dérivées secondes de la fonction lagrangienne. C'est l'objet du paragraphe suivant.

## Condition suffisante du second ordre pour un extremum sous contraintes

Le théorème suivant (que nous ne démontrerons pas) nous fournit un test basé sur les dérivées secondes pour décider si un point stationnaire de la fonction lagrangienne correspond à un minimum ou à un maximum. Comme pour les conditions du second ordre d'un problème sans contrainte, ces conditions reviennent à étudier la nature d'une forme quadratique. Pour des raisons de simplicité, le théorème sera énoncé dans le cas de problèmes d'optimisation relatifs à des fonctions de deux variables.

**Théorème 3.1 (Théorème du Hessien bordé)**
*Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$.*
*Soit $(a, \lambda^*)$ un point stationnaire de la fonction lagrangienne associée aux fonctions $f$ et $g$ tel que le rang de la matrice jacobienne de $g$ en $a = (a_1, a_2)$ est égal à 1.*

*On définit $H(a, \lambda^*)$ comme étant le déterminant suivant (appelé* Hessien bordé*)*

$$H(a, \lambda^*) = \det\, \nabla^2 \mathcal{L}(a, \lambda^*) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}''_{xx}(a, \lambda^*) & \mathcal{L}''_{xy}(a, \lambda^*) & \mathcal{L}''_{x\lambda}(a, \lambda^*) \\ \mathcal{L}''_{yx}(a, \lambda^*) & \mathcal{L}''_{yy}(a, \lambda^*) & \mathcal{L}''_{y\lambda}(a, \lambda^*) \\ \mathcal{L}''_{\lambda x}(a, \lambda^*) & \mathcal{L}''_{\lambda y}(a, \lambda^*) & \mathcal{L}''_{\lambda\lambda}(a, \lambda^*) \end{vmatrix}.$$

*Alors,*

1. *Si $H(a, \lambda^*) < 0$, $a$ correspond à un minimum local de $f$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.*
2. *Si $H(a, \lambda^*) > 0$, $a$ correspond à un maximum local de $f$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.*
3. *Si $H(a, \lambda^*) = 0$, on ne peut conclure.*

# 4 Questions

1. Une firme fabrique dans deux usines différentes un produit. Soit $q_1$ (respectivement $q_2$) le nombre de produits fabriqués dans la première (respectivement la seconde) usine. Le coût de production pour chaque usine est donnée par la fonction $C_1 = 200 + 6q_1 + 0.03q_1^2$ pour la première usine et $C_2 = 150 + 10q_2 + 0.02q_2^2$

pour la seconde. L'entreprise veut livrer 100 unités de son produit. La livraison lui coûte 4 euros par article depuis la première usine et 2 euros depuis la seconde usine. Quelles sont les quantités $q_1$ et $q_2$ qui minimisent le coût total.

2. Déterminez les extrema (maxima et minima) locaux de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy = 18$$

Précisez dans chaque cas la valeur optimale de $f$.

3. Résoudre le problème du consommateur :

$$(P) \left\{ \begin{array}{cl} \text{maximiser} & U(x, y) \\ \text{sous la contrainte} & px + qy = R\,. \end{array} \right. \tag{2}$$

Bon Travail !

8

Annexe E

# La méthode d'Euler

## E.1 Équation différentielle et méthode d'Euler : une épreuve pratique

**Épreuve pratique 2007** **Terminale S**

### EP 021 - 2007 : Méthode d'Euler

Auteur du corrigé : Alain Soléan **TI-Nspire™ /TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement** : ce document a été réalisé avec la version 1.4 ; il est disponible dans sa version la plus récente sur notre site http://education.ti.com/france, menu Ressources pédagogiques.*

**Fichier associé :** EP021_2007_Euler.tns

#### 1. Le sujet

**Sujet 021 de l'épreuve pratique 2007 – Equation différentielle et méthode d'Euler**

**Enoncé**

Soit l'équation différentielle $y' = -2y$. On admet que la fonction $f$ solution de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction $f$ telle que $f(x) = \exp(-2x)$.

On cherche à comparer $f(1)$ aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas.

On se place sur l'intervalle [ 0 ; 1 ] en prenant un pas $h$ égal à $\frac{1}{n}$, où $n$ est un entier supérieur à 2. On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés $M_k$, d'abscisse $x_k$ et d'ordonnée $y_k$ telles que :

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, et pour tout entier $k$ tel que $0 \leq k \leq n-1$, $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n}$ et $y_{k+1} = (1 - \frac{2}{n})\, y_k$.

Pour tout entier $k$ compris entre 0 et $n$, $y_k$ est une valeur approchée de $f(x_k)$.

1. Déterminer l'expression de $y_k$ en fonction de $k$ ($n$ étant une valeur donnée).
2. À l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

| Valeur de $n$ égale à | $k$ | $x_k$ | $y_k$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 0 | 0 | 1 |
| Pas égal à | 1 | 0,1 | 0,8 |
| 0,1 | 2 | 0,2 | |
| | 3 | | |
| | 4 | | |
| | 5 | | |
| | 6 | | |
| | 7 | | |
| | 8 | | |
| | 9 | | |
| | 10 | | |

3. En déduire une valeur approchée de $f(1)$.
4. Réitérer la méthode dans les cas $n = 20$ puis $n = 30$ et donner les valeurs approchées de $f(1)$ ainsi obtenues. Sur la copie, recopier et compléter le tableau suivant :

| Valeur de $n$ égale à | 10 | 20 | 30 | Valeur approchée de $e^{-2}$ |
|---|---|---|---|---|
| Valeur approchée de $y_n$ | | | | |

À l'aide du tableur, représenter graphiquement dans un repère du plan la suite de points $M_k$ obtenue à la question 4.,dans le cas où $n$ est égal à 30, ainsi que la fonction solution.

## Production demandée

- Calcul de $y_k$ en fonction de $k$ ;
- La réalisation et visualisation à l'écran de tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'un tableur ;
- Détermination de valeurs approchées de $f(1)$ (tableau rempli) ;
- Visualisation à l'écran et si possible impression de la représentation graphique.

## Compétences évaluées

- **Compétences TICE**
  - Utiliser un tableur, notamment ses fonctions graphiques ;
  - Réaliser une feuille de calcul adaptée à la situation.
- **Compétences mathématiques**
  - Mettre en œuvre les connaissances sur la méthode d'Euler ;
  - Déterminer la primitive d'une fonction, avec condition initiale ;
  - Faire le lien entre la fonction approchée obtenue par la méthode d'Euler et la primitive : évaluer une précision.

## 2. Corrigé

**1)** La suite des valeurs $y_k$ est (pour $n$ fixé) une suite géométrique de premier terme $y_0 = 1$ et de raison $b = 1 - \frac{2}{n}$, donc on a $y_k = (1 - \frac{2}{n})^k$

Cette formule pourra être démontrée par récurence.

**2)** Ouvrir une page **Tableurs & listes**.

Dans la cellule **A1** inscrire " n = " ( les guillemets de fin sont placés automatiquement )

Dans la cellule **A2** placer 10 ( mettre un point si on veut obtenir des valeurs approchées )

Dans la cellule **A3** inscrire " pas = "

Dans la cellule **A4** inscrire la formule = **1/A2**

Dans la cellule grisée de la colonne **B** avec **Menu Données - Générer une suite** générer la suite

= **seqn(n,{0},11,11)**

Dans la cellule **C1** placer 0. Dans la cellule **C2** inscrire la formule **= C1 + A$4**

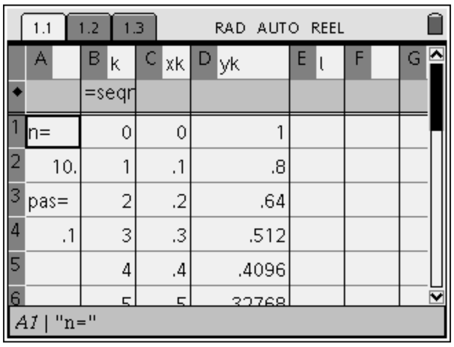
Copier cette cellule, sélectionner les cellules de **C3** à **C11** et coller la formule. (on obtient la suite des $x_k$).

Dans la cellule **D1** placer 1.Dans la cellule **D2** inscrire la formule : **= D1*(1 –2* A$4)**

Copier cette cellule, sélectionner les cellules de **D3** à **D11** et coller la formule. (on obtient la suite des $y_k$).

On nommera les colonnes **B**, **C** et **D** respectivement $k$, $x_k$ ,et $y_k$ ( en « tête de liste »).

On peut élargir la colonne **D** pour avoir plus de décimales.



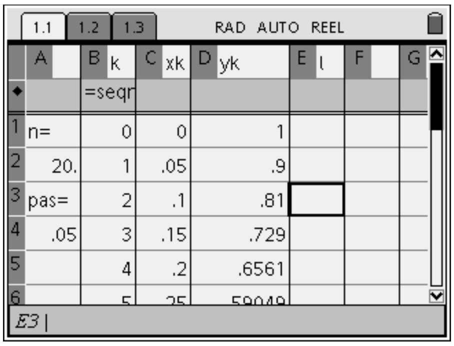

*L'écran ci-dessus est obtenu à partir de la calculatrice.*

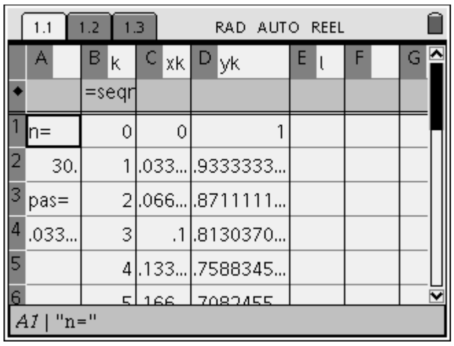
**3)** $x_{11} = 1$ donc $y_{11}$ est une valeur approchée de $f(1)$ $y_{11} \approx 0,107$

**4)** Pour obtenir le tableau lorsque $n = 20$ il suffit de placer 20 dans **A2**, puis remplacer 11, par 21 dans la colonne **B**, enfin de coller les formules inscrites en **C2** et **D2** sur les plages **C3** à **C21** et **D3** à **D21**

**Épreuve pratique 2007** **Terminale S**

Procéder de manière analogue pou le tableau lorsque $n = 30$




| Valeur de $n$ égale à | 10 | 20 | 30 | Valeur approchée de $e^{-2}$ |
|---|---|---|---|---|
| Valeur approchée de $y_n$ | 0,107 | 0,122 | 0,126 | 0,135 |

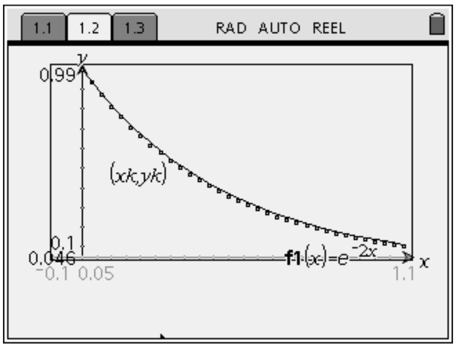
**5)** Pour obtenir le graphique ouvrir une page **Graphiques et géométrie**

Avec **Type de graphiques**, choisir **Nuage de points**

Affecter à $x$ la variable $x_k$ et à $y$ la variable $y_k$

Puis avec **Fenêtre** faire **Zoom – Stat**

Demander aussi le tracé de la Fonction $f_1$ avec $f_1(x) = e^{-2x}$

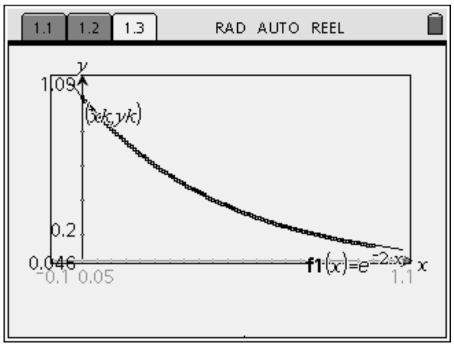



## 3. Pour aller plus loin

On peut essayer de plus grandes valeurs de $n$
Pour $n = 60$, $f(1) \approx 0{,}131$

Pour $n = 100$, $f(1) \approx 0{,}133$

*Ci-contre le nuage de point et la courbe de la fonction $f_1$ pour $n = 100$.*



# E.2 Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler

## TP - Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler -

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une **fonction $f$ qui est proportionnelle à sa dérivée $f'$.** (Par exemple, le phénomène de désintégration de noyaux radioactifs)
Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.
Plus particulièrement, que peut-on dire d'une **fonction qui serait égale à sa dérivée** ?

Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle ! Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

**Première partie (théorique)** : *de l'importance d'une "condition initiale"*
Supposons qu'il existe une fonction $f$, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$.

   Démontrer que : $g' = g$ sur $\mathbb{R}$
2. Soit $g$ une fonction vérifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.

   Que peut-on dire de $f + g$ ?
3. Supposons maintenant qu'il existe une fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :

$$(P)\ \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   a. On considère la fonction $c$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$c(x) = f(x)f(-x)$$

   Montrer que $c$ est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

   En déduire que $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   b. Démontrer que si $g$ est une fonction qui vérifie $(P)$ alors $g = f$ sur $\mathbb{R}$.

   On pourra considérer la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \frac{g}{f}$ ...

> <u>Commentaire</u>
> On constate dans cette partie que s'il existe une fonction non nulle solution de l'équation différentielle $y' = y$, alors il en existe une infinité.
> Cependant, en imposant une condition initiale (ici $f(0) = 1$), s'il existe une solution à notre équation différentielle, alors elle est unique.

Dans la suite, la fonction $f$ est l'unique fonction(1) satisfaisant les conditions

$$(P)\ \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



Nous allons maintenant essayer de tracer la représentation graphique de $f$ grâce à la méthode d'Euler.

**<u>Deuxième partie (numérique)</u>** : *vers la représentation graphique*

On rappelle que si $f$ est une fonction dérivable en $a$, alors il existe une fonction $\varphi$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

D'où l'approximation :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Cette approximation est d'autant meilleure que $h$ est petit.

C'est sur cette approximation (dite "affine") qu'est basée la méthode d'Euler.

1. En utilisant les conditions satisfaites par $f$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$
2. On note $(u_n)$ la suite définie, sur $\mathbb{N}$, par : $\quad u_n = (1+h)^n f(a)$

   Démontrer que $(u_n)$ est géométrique et préciser sa raison.
3. Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{a = 0}$. On a donc :
$$f(nh) \simeq (1+h)^n$$
   a. On pose $x = nh$. Démontrer que pour $n$ assez grand :
$$f(x) \simeq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$
   Note : cette approximation est d'autant meilleure que $n$ est grand.

   C'est cette suite $(u_n(x))$ définie par $u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ que nous utiliserons pour montrer rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle.

   b. A l'aide de la calculatrice (ou d'un tableur), tracer les courbes des approximations de la fonction $f$ pour des valeurs de $n$ égales à 10, 100, et 1000.

   c. En prenant $n = 10000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1) \simeq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

   Note : le nombre $f(1)$ est encore noté **e**. On a déjà vu (DM 2) que $\mathbf{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Voilà. Cette fonction $f$ vérifiant les conditions $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ est appelée **fonction exponentielle**.

On vient de voir à quoi ressemble sa représentation graphique. Nous verrons, dans le cours, que cette fonction possède des propriétés remarquables notamment celle de transformer des "sommes" en "produits", c'est-à-dire :

pour tous réels $x$ et $y$ : $f(x+y) = f(x)f(y)$

Tiens, d'ailleurs, essayez de le montrer en fixant $y \in \mathbb{R}$ et en considérant la fonction $g_y$ définie par :

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

Si on arrivait à prouver que $g_y$ est une fonction constante (égale à $f(y)$) sur $\mathbb{R}$, ce serait pas mal non ?

# TP - Introduction de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler - Corrigé

**Première partie (théorique)** : *de l'importance d'une "condition initiale"*

Supposons qu'il existe une fonction $f$, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f$$

1. On a, sur $\mathbb{R}$ : $$g' = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda f = g$$
   D'où : $$g' = g \text{ sur } \mathbb{R}$$
2. On a, sur $\mathbb{R}$ : $$(f+g)' - (f+g) = f' - f + g' - g = 0$$
   D'où : $$(f+g)' = (f+g) \text{ sur } \mathbb{R}$$
   La fonction $f+g$ est aussi égale à sa dérivée.
3. Supposons maintenant qu'il existe une fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :
   $$(P)\ \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
   a. On considère la fonction $c$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$c(x) = f(x)f(-x)$$
   La fonction $c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque $f$ l'est) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$c'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x))$$
   Et puisque $f' = f$ : $$c'(x) = c(x) - c(x) = 0$$
   Donc $c$ est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

   > Puisque $c = 1$ sur $\mathbb{R}$, on a :
   > pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$
   > Cette propriété sera utile par la suite.

   Montrons que $f$ ne s'annule pas (sur $\mathbb{R}$) en raisonnant par l'absurde :
   S'il existait un réel $x_0$ tel que $f(x_0) = 0$, alors on aurait $c(x_0) = 0$, ce qui est absurde puisque $c = 1$ sur $\mathbb{R}$.
   Donc, l'hypothèse initiale est fausse.
   Donc $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

   > Puisque $f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a :
   > pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

   b. Comme $f$ ne s'annule pas, la fonction $h = \dfrac{g}{f}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $$h' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = 0 \text{ puisque } g' = g \text{ et } f' = f$$
   Là encore, on en déduit que $h$ est constante sur $\mathbb{R}$ et comme :
   $$h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$$
   $h$ est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$, d'où : $$g = f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Dans la suite, la fonction $f$ est l'unique fonction[(1)] satisfaisant les conditions

$$(P)\ \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

[(1)] On suppose pour le moment qu'une telle fonction existe. La preuve rigoureuse de cette existence sera faite ultérieurement.

**Deuxième partie (numérique)** : *vers la représentation graphique*

On rappelle que si $f$ est une fonction dérivable en $a$, alors il existe une fonction $\varphi$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

D'où l'approximation :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Cette approximation est d'autant meilleure que $h$ est petit.

C'est sur cette approximation (dite "affine") qu'est basée la méthode d'Euler.

1. On considère la propriété $\wp$, définie sur $\mathbb{N}$, par :

$$\text{pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ et } h \text{ assez petit, } f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

Note : on sort ici du domaine des mathématique exactes. En effet, nous ne savons rien sur la transitivité du symbole $\simeq$. La méthode d'Euler est itérative et chaque erreur est reportée dans l'étape suivante sans que l'on puisse donner un majorant de l'erreur à l'étape $n$.

- Comme $f = f'$, on a : $\quad f(a+h) \simeq (1+h)f(a)$

  D'où $\wp(1)$. La propriété est donc initialisée au rang 1. (Et même au rang 0)
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\wp(n)$. Alors :

$$f(a+(n+1)h) = f((a+nh)+h) \overset{\wp(1)}{\simeq} (1+h)f(a+nh) \overset{\wp(n)}{\simeq} (1+h)^{n+1}f(a)$$

  D'où $\wp(n+1)$.

  La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 1.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $\wp$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et comme elle triviale au rang 0, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

Bien comprendre la portée de cette approximation : si on connaît la valeur de $f$ en $a$, alors on peut calculer des valeurs approchées de $f$ en $a + nh$.

2. On note $(u_n)$ la suite définie, sur $\mathbb{N}$, par : $\quad u_n = (1+h)^n f(a)$

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad u_{n+1} = (1+h)^{n+1} f(a) = (1+h)(1+h)^n f(a) = (1+h)u_n$

   La suite $(u_n)$ est donc géométrique de raison $1 + h$.

3. Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{a = 0}$. On a donc :

$$f(nh) \simeq (1+h)^n$$

   a. Puisque $x = nh$, on a $h = \dfrac{x}{n}$ ($n$ est supposé assez grand pour avoir $h$ assez petit).

   Ainsi :

$$f(x) \simeq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

   C'est cette suite $(u_n(x))$ définie par $u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ que nous utiliserons pour montrer rigoureusement l'existence de la fonction exponentielle.

   b. Voir feuille suivante.

   c. En prenant $n = 10000$, on obtient :

$$\mathbf{e} \simeq 2{,}71815$$

Enfin, montrons que l'exponentielle transforme les sommes en produits :

$$g_y(x) = f(x+y)f(-x)$$

$$g_y'(x) = f'(x+y)f(-x) - f(x+y)f'(-x) = 0 \quad \text{car } f' = f$$

Donc $g_y$ est constante et comme $g_y'(0) = f(y)f(0) = f(y)$, il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(y) = f(x+y)f(-x)$$

Et comme, on vu que $f(x)f(-x) = 1$, nous obtenons finalement :

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

**Courbes approchant la fonction exponentielle obtenues par la méthode d'Euler**