



UNIVERSITÉ
DE NAMUR

University of Namur

Institutional Repository - Research Portal
Dépôt Institutionnel - Portail de la Recherche

researchportal.unamur.be

THESIS / THÈSE

DOCTEUR EN SCIENCES

Résolution par des méthodes de point intérieur de problèmes de programmation convexe posés par l'analyse limite

Pastor, Franck

Award date:
2007

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

© Presses universitaires de Namur & Franck PASTOR
Rempart de la Vierge, 13
B - 5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre, hors des limites restrictives prévues par la loi, par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner, est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique
ISBN : 978-2-87037-577-8
Dépôt légal : D / 2007 / 1881 / 37

qu'à ma mère Odile, qui a dû supporter vaillamment ces échanges scientifiques spécialisés dont elle était par la force des choses exclue.

Ces cinq années de thèse auront été l'occasion d'apprécier à sa grande valeur l'ambiance de travail et d'étude des FUSL, et notamment la compagnie quotidienne de collègues devenus amis : j'aurais envie d'en remercier tout le personnel, mais faute de place je citerai particulièrement Jean-Yves GANTOIS, Pierre JOB, Thierry LAVENDHOMME, Barbara APRAXINE, Mohamed SELMOUNI, Micheline CITTA, Abdelghafour AYADI et Djamel BELHADJ, dont la présence, la bonne humeur et le soutien quasi quotidiens auront été des plus précieux.

Enfin, merci à Aline POSSOZ, compagne de tous les jours, dont le support n'aura pas été le moindre facteur de réussite dans ce qu'on appelle communément la « dernière ligne droite ».

10 Conclusion générale et perspectives	161
A Code MATLAB de l'algorithme de point intérieur	165

9.9 Talus vertical de Tresca : maillages déformés des quatre sous-problèmes du problème $N = 176$. Puissances dissipées rapportées à l'aire du maillage pour chaque sous-problèmes, de bas en haut : 32,739 – 23,479 – 18,617 – 16,894. 158

9.10 Talus vertical de Tresca, maillage $N = 176$ déformé. . 159

Liste des tableaux

- 5.1 Barreau encoché. Caractéristiques des problèmes d'optimisations originaux à résoudre. 79
- 5.2 Barreau encoché. Taille des problèmes résolus par les trois algorithmes. 79
- 5.3 Barreau encoché. Résultats et performances. 81
- 5.4 Barreau encoché. Résultats avec traitement par Cholesky. Problèmes 130 à 150 résolus avec le MacPro Quad à 3 Ghz, avec une tolérance d'arrêt de 1×10^{-5} au lieu de 5×10^{-5} 83
- 5.5 Barreau comprimé : taille des problèmes. 86
- 5.6 Barreau comprimé, critères de Mises et Gurson : comparaison. Tolérance d'arrêt : 5×10^{-5} 86
- 5.7 Barreau encoché, critères de Mises et Gurson : comparaison. Tolérance d'arrêt : 1×10^{-5} 86

- 8.1 Barreau encoché, problèmes cinématiques : tailles des problèmes avec champ de vitesses *linéaires* continus et discontinus. 122
- 8.2 Le barreau encoché et le matériau de von Mises : résultats des problèmes cinématiques et statiques utilisant les champs de vitesse *linéaires* continus et discontinus, avec MATLAB. Configuration matérielle : Power-Mac Apple G5 à 2 GHz de fréquence et avec 4,5 GB de RAM. 123
- 8.3 Le barreau encoché, problèmes cinématiques : tailles des problèmes avec les champs de vitesses *quadratiques*, continus et discontinus pour MATLAB. 124

8.10	Le barreau comprimé, matériaux de <i>Mises</i> et de <i>Gurson</i> , problèmes cinématiques : résultats pour champs de vitesses <i>quadratiques discontinus</i> avec MATLAB. Meilleur résultat statique pour <i>Mises</i> : 2,42627 (valeur exacte : $F/(Bc) = 2,42768$). Meilleur résultat statique pour <i>Gurson</i> : 1,65018.	136
8.11	Le talus von <i>Mises/Tresca</i> résolu par le code MATLAB. Champs de vitesses quadratiques discontinus.	141
9.1	Barreau comprimé 64×32 : résultats de la décomposition de niveau 2 sur le barreau.	153
9.2	Résultats de la décomposition appliquée sur le talus vertical.	157

Chapitre 1

Introduction

Dans la branche de la mécanique des matériaux appelée analyse limite, la recherche de l'approche statique de la charge de ruine — ou charge limite — amène à résoudre un problème d'optimisation convexe visant à déterminer un minorant de cette charge limite, le plus élevé possible pour plus de précision. Plus exactement, il s'agit d'un problème de maximisation d'une fonctionnelle linéaire sous contraintes mixtes (d'égalités linéaires et d'inégalités non-linéaires convexes), et à variables libres, s'écrivant ainsi :

$$\begin{aligned} & \text{Maximiser } Q(x) \\ & \text{s. c. q. } a_i(x) = 0, \quad i \in I = 1, \dots, m, \\ & \quad f_j(x) \leq 0, \quad j \in J = 1, \dots, r, \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec Q et $a_i, i \in I$ fonctions linéaires de x et $f_j, j \in J$ fonctions convexes de x . La formulation précédente concerne les cas où les matériaux constitutifs du problème mécanique peuvent être considérés comme non pesants, comme c'est souvent le cas quand ces matériaux sont du type métallique.

Dans certains cas parmi les plus couramment traités, les contraintes convexes sont quadratiques (critères de von Mises, Drucker-Prager, Coulomb). Le caractère séparable et convexe de ces contraintes en permet alors une linéarisation par morceaux. Pour résoudre les problèmes mathématiques posés par l'analyse limite, c'est donc tout d'abord la méthode du simplexe qui a été envisagée, avec un certain succès, le caractère creux des contraintes de la modélisation par

type AMD provenant du même package, appliqué à une matrice très légèrement perturbée. Dans le cas d'une matrice symétrique définie positive, c'est bien sûr le même réordonnement AMD qui a été utilisé, avec tout autant d'efficacité. Le côté général de cet algorithme a également permis la résolution de problèmes d'analyse limite statique avec le critère de Gurson, qui, bien que convexe, n'est pas quadratique, et d'obtenir des résultats tout aussi intéressants. Pour plus de détails, confer [25]. Confer également [24] et [26].

De plus, grâce à des considérations faisant intervenir tout aussi bien l'aspect optimisation que l'aspect mécanique du problème, nous avons pu appliquer notre algorithme dans le cadre de l'analyse limite cinématique, c'est-à-dire pour obtenir un majorant de la charge limite, aussi petit que possible, et obtenir des résultats inédits jusque-là. En effet, au lieu de résoudre le problème cinématique classique, nous avons eu l'idée de résoudre un problème « cinématique mixte », inspiré des travaux antérieurs de Anderheggen et Knopfel [1], conduisant à un problème d'optimisation de même structure qu'un problème issu de la méthode statique, et donc permettant d'utiliser directement l'algorithme MATLAB. À ce sujet, voir [33] et [31] pour l'approche mixte linéaire, et [29] ainsi que [30], [41] et [32] pour l'approche mixte quadratique.

Enfin, pour les problèmes de taille trop importante pour être traités directement, nous avons mis au point une approche originale par décomposition en plusieurs sous-problèmes dont on fait évoluer les valeurs des données aux interfaces, *via* autant de problèmes auxiliaires que d'interfaces. Notons ici que l'approche que nous proposons ne relève pas des techniques dites de décomposition de domaines, très en vogue en analyse des équations aux dérivées partielles. Nous détaillons ici cette technique dans le cadre de l'analyse limite cinématique, en donnons les résultats détaillés sur un problème classique de géotechnique — toujours non résolu —, l'extension à l'approche statique étant actuellement en cours. L'objectif commun à ces deux approches est l'automatisation de cette approche en vue du calcul parallèle sur machine multiprocesseur. Les références correspondantes sont [40], [27] et [28].

Caractéristique du matériau, le *critère de plasticité* $f(\sigma)$ est une fonction de σ telle que :

- pour $f(\sigma) < 0$ le matériau reste rigide,
- pour $f(\sigma) = 0$, il y a possibilité d'écoulement plastique.

L'objectif, pour un chargement donné, est de trouver un couple de champs de tenseurs (σ, v) solution de l'écoulement libre, autrement dit un champ de tenseurs contrainte et un champ de tenseurs vitesse de déformation (et donc un champ de tenseurs vitesse de déplacement) qui vérifient les différentes conditions mécaniques et qui soient associés, le tout selon les termes que nous allons rappeler succinctement maintenant, d'après [46] et le cours de [36].

Dans toute la suite de l'exposé, nous allons abondamment utiliser la convention dite « de l'indice répété », couramment employée en physique et mécanique : lorsque dans une expression, un indice apparaît plusieurs fois, il y a sommation sur cet indice. Ainsi, par exemple, l'expression $\sigma_{ij}n_j$ signifiera en fait $\sum_j \sigma_{ij}n_j$, et $\sigma_{ij}v_{ij}$ correspondra à $\sum_{i,j} \sigma_{ij}v_{ij}$, les indices i et j parcourant des ensembles précisés selon le contexte.

2.1 Définitions de l'analyse limite

Soit un système mécanique A en dimension $n = 3$, de volume V et de frontière ∂V , constitué d'un matériau rigide parfaitement plastique et obéissant au critère de plasticité $f(\sigma)$, lequel est convexe. De plus, les conditions aux limites doivent autoriser l'écoulement plastique libre de A . Dans certains cas, il est possible de se ramener à un problème en dimension 2 (ce qui sera essentiellement le cas dans cette thèse), et alors n sera pris égal à 2.

2.1.1 Champs admissibles

Dans un souci de concision nous nous limitons ici au cas des champs de vitesses de déplacement continus. Un champ de tenseurs contrainte $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ est dit *admissible* s'il est

Dans le cas de von Mises en déformation plane :

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tt}} = -2\lambda(\sigma_{nn} - \sigma_{tt}) = 0 \implies \sigma_{tt} = \sigma_{nn}. \quad (2.19)$$

Le critère final est obtenu en remplaçant, dans f , σ_{tt} par son expression

$$f_{nt}(\sigma_{nn}, \sigma_{nt}) = f(\sigma_{nn}, h(\sigma_{nn}, \sigma_{nt}), \sigma_{nt}). \quad (2.20)$$

Ici, pour le critère de Mises en déformation plane, on obtient

$$f_{nt}(\sigma_{nn}, \sigma_{nt}) = |\sigma_{nt}| - k. \quad (2.21)$$

2.2.5 Principe du travail maximal et puissance dissipée

D'après (2.16), le principe du travail maximal (2.4) devient :

$$(T - T^*) \cdot [u] \geq 0 \quad \forall T^* \text{ P.A.} \quad (2.22)$$

où T^* vérifie $f_{nt}(T^*) \leq 0$ pour être P.A. La relation (2.22) montre que le critère $f_{nt}(T^*) = 0$ est bien fonction potentiel des discontinuités de vitesse $[u]$. Elle montre également que les variables statiques et cinématiques à considérer pour les discontinuités de vitesse sont bien le vecteur contrainte $T = (\sigma_{nn}, \sigma_{nt})$ et le vecteur saut de vitesses $[u] = ([u_n], [u_t])$ à associer par la loi de normalité relativement au critère dans le plan de Mohr $f_{nt}(T) = 0$.

La puissance dissipée sur l'unité de surface (ou ligne, en déformation plane) de discontinuité L_d s'écrit :

$$\Pi([u]) = \sigma_{nn}[u_n] + \sigma_{nt}[u_t] \quad (2.23)$$

et devient après utilisation de la loi de normalité :

$$\Pi([u]) = k|[u_t]|. \quad (2.24)$$

2.3 Cas du critère de Gurson

Ainsi qu'on va le voir la détermination des différentes expressions est nettement moins évidente, particulièrement en ce qui concerne le

plan de Mohr pour les discontinuités. Nous donnons ici les expressions que nous a communiquées J. B. Leblond sur la base du mémoire de thèse de Gologanu, dans lequel ce dernier a utilisé le concept de zone mince pour déterminer les puissances dissipées nécessaires en déformation plane. On suppose ici que l'axe des z est l'axe des cavités cylindriques, le plan de la déformation plane étant le plan (x, y) .

Le critère de Gurson en déformation plane s'écrit :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (2\sigma_{xy})^2 + 8c^2 f \cosh \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2k} \leq 4c^2(1 + f^2), \quad (2.25)$$

où k et f sont des constantes réelles, f étant le taux de porosité du matériau (volume de « vide » / volume total). Notons que pour $f = 0$ on retrouve le critère de von Mises.

2.3.1 Dissipation plastique volumique

Notons

$$v_m = \frac{1}{3}v_{ii} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{3} \quad (v_z = 0 \text{ en déformation plane})$$

la vitesse de déformation moyenne. La partie *déviatorique* du tenseur vitesse de déformation s'écrit, avec nos notations,

$$(v_d)_{ij} \stackrel{\text{déf.}}{=} v_{ij} - \frac{\text{tr}(v)}{2}\delta_{ij}$$

et sa norme de von Mises,

$$v_d = \left(\frac{2}{3}(v_d)_{ij}(v_d)_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a alors

$$\frac{\Pi}{\sigma_0} = \sqrt{3}v_m \left(\operatorname{argsh} \frac{\lambda}{f} - \operatorname{argsh} \lambda \right) + v_d \left(\sqrt{\lambda^2 + 1} - \sqrt{\lambda^2 + f^2} \right),$$

$$\lambda = \sqrt{3} \frac{v_m}{v_d}, \quad \sigma_0 = k\sqrt{3}. \quad (2.26)$$

Le chargement correspondant au σ du couple (σ, v) solution de l'écoulement libre est appelé *chargement limite* (Q_{lim}).

$$Q_{\text{lim}} = Q(\sigma), \text{ où } \begin{cases} \sigma \text{ est admissible,} \\ f(\sigma) = 0, \\ v = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \text{ est admissible,} \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Soit Q_{lim} un chargement limite et q_{lim} le paramètre cinématique de chargement correspondant (linéairement, par définition également) à la vitesse de déformation v du couple solution, alors on montre que (cf. [46]) :

$$(Q_{\text{lim}} - Q^*) \cdot q_{\text{lim}} \geq 0 \quad \forall Q^* \text{ admissible.} \quad (2.29)$$

Les conséquences sont que l'ensemble K est convexe et que q_{lim} est sur la normale extérieure à la frontière de K au point Q_{lim} . On dira que Q_{lim} et q_{lim} sont *associés*.

2.4.2 Théorème et approche statique

Théorème statique. *Les chargements limites appartiennent à la frontière de K .*

Approche statique. Soit Q_d un chargement donné. Le chargement $Q_{\text{lim}} = \lambda_{\text{max}} Q_d$ obtenu en résolvant le problème de maximisation sous contraintes suivant :

$$\lambda_{\text{max}} = \max \{ \lambda \mid Q(\sigma) = \lambda Q_d, \sigma \text{ admissible} \}, \quad (2.30)$$

est le chargement limite cherché. En faisant varier Q_d , on obtiendra des points situés sur la frontière de K si on peut envisager *tous* les σ licites, sinon ces points seront à l'intérieur *ou* sur la frontière de K . L'enveloppe convexe de ces différents points est donc incluse dans K .

D'où le système final

$$AH^{-1}A^T dw = F_{p_1} - AH^{-1} \left(F_d + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) Y S^{-1} r \right) \quad (4.20)$$

dont la matrice $AH^{-1}A^T$ est symétrique et définie positive puisque H l'est.

Malheureusement, H n'est pas toujours définie positive, en particulier lorsque les contraintes convexes sont données en analyse limite par le critère de Mises. Pour d'autres critères, comme celui de Gurson, c'est néanmoins le cas.

Une façon de contourner le problème posé par le critère de von Mises (et d'autres du même genre) est de légèrement perturber la diagonale de la matrice du système (4.18), en la rendant définie positive, ce qui permet alors d'utiliser les méthodes très efficaces connues pour la factorisation de Cholesky. Cette façon de procéder a été choisie par Krabbenhoft et Damkilde [15].

Existence et unicité de la solution pour le critère de von Mises

On peut néanmoins se demander si le système de Newton admet quand même une solution (sans perturbation!) lorsque le critère de Mises est employé. Dans ce but, nous avons procédé, dans [22] à un partitionnement des variables en deux groupes. Rappelons que la matrice A est plein rang-ligne. Après un changement de variables, deux tiers seulement des variables en x apparaît dans les contraintes convexes introduites par le critère de von Mises. De là, on redéfinit $x = [x_1|x_2]$, où x_1 contient les n_1 variables utilisées dans les contraintes convexes et x_2 les n_2 autres. Opérons sur A la partition correspondante : $A = [A_1|A_2]$. Le problème original et son problème-barrière associé peuvent alors être reformulés comme suit :

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ \text{s.c.q} \quad & A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \\ & g(x_1) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

ce qui conduit à la mise des conditions KKT sous la forme :

$$F(x, w, y, s) = 0.$$

Reprenons la méthode de Newton pour la nouvelle fonction F : en un point intérieur (x_1, x_2, w, y, s) (i.e, $y > 0$ et $s > 0$), on calcule une direction de Newton définie par :

$$\frac{\partial F}{\partial z} dz + F = 0. \tag{4.28}$$

La matrice de ce système est :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial w} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial w} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial w \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial w \partial x_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial s} \\ 0 & 0 & 0 & S & Y \end{bmatrix}$$

Sachant que : $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = \sum y_i \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial w} = A_j^T$ pour $j=1$ et 2 , $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^T$, $\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial x_j} = A_j$ pour $j=1$ et 2 , $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial s} = I$, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \begin{bmatrix} \sum y_i \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_1^2} & 0 & A_1^T & \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^T & 0 \\ 0 & 0 & A_2^T & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & S & Y \end{bmatrix}$$

Hypothèse 1. la matrice $H = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y} Y S^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x_1}$ est définie positive.

Pour cela, il suffit que la matrice symétrique $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = \sum y_i \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_1^2}$ soit définie positive (étant donné que $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y} Y S^{-1} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x_1}$ est toujours symétrique semi-définie positive). Un rapide calcul sur le problème statique nous montre que c'est bien le cas.

où on a posé $r = H^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial x_1 \partial y} S^{-1} (F_c - Y F_{p_2}) - F_{d_1} \right)$.

Cela nous ramène à la résolution préalable du système suivant :

$$\begin{array}{c} dw \qquad dx_2 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline dw & -A_1 H^{-1} A_1^T & A_2 & -F_{p_1} - A_1 r \\ \hline dx_2 & A_2^T & 0 & -F_{d_2} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Ce système peut être transformé, moyennant un changement de signe, en un système d'équilibre :

$$\begin{array}{c} dw \qquad dx_2 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline dw & A_1 H^{-1} A_1^T & -A_2 & F_{p_1} + A_1 r \\ \hline dx_2 & -A_2^T & 0 & F_{d_2} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (4.29)$$

Nous allons montrer que ce système a plein rang.

Lemme 4.1. Soient $m, n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tels que $n = n_1 + n_2$, $n_1 \leq m$ et $n_2 \leq m$. Soit $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_1}$ et $A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n_2}$ deux matrices à plein rang-colonne, telles que la matrice $A = [A_1 | A_2]$ soit à plein rang-ligne (ce qui implique que $m \leq n$).

Alors la matrice carrée d'ordre $n_2 + m$

$$M = \begin{bmatrix} A_1 A_1^T & -A_2 \\ -A_2^T & 0 \end{bmatrix}$$

est non singulière.

Preuve : soit $u = (u_1 | u_2)$, $u_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $u_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ tel que $Mu = 0$. Cela signifie que :

$$\begin{cases} A_1 A_1^T u_1 - A_2 u_2 = 0 \\ A_2^T u_1 = 0 \end{cases} .$$

D'après la première équation, le vecteur $A_1 A_1^T u_1$ appartient à $\text{Im}(A_2)$. Or la deuxième nous affirme que u_1 appartient à $\text{Ker}(A_2^T)$. Puisque

Pour résumer, nous devons résoudre un système du type

$$\begin{bmatrix} B & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

où C est une matrice $m \times n_2$ de rang n_2 , et, comme nous venons de le voir, la matrice carrée B d'ordre m , symétrique semi-définie positive, est de rang $n_1 < m$, n'a donc pas plein rang et par conséquent n'est pas définie positive. Or c'est au cas où B est définie positive que la littérature sur les systèmes d'équilibre s'est consacré (cf. [54]). On va donc consacrer à ce système une approche particulière, dont le but est de se ramener *in fine* à la résolution d'un système à matrice symétrique définie positive.

Procédons, *via* une permutation de lignes, à la décomposition suivantes de C :

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

où la matrice C_1 est carrée d'ordre n_2 , non singulière et C_2 est $(m - n_2) \times n_2$. Appliquons cette même permutation sur les lignes et les colonnes de notre système d'équilibre. Le système obtenu peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & C_1 \\ B_{12}^T & B_{22} & C_2 \\ C_1^T & C_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ r \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

L'équation (4.31) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ -C_2C_1^{-1} & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & C_1 \\ B_{12}^T & B_{22} & C_2 \\ C_1^T & C_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & -(C_2C_1^{-1})^T & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q'_2 \\ r \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

où on a posé :

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & (C_2C_1^{-1})^T & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v \end{bmatrix}$$

Chapitre 5

Expérimentations sur le problème statique

5.1 Test de l'algorithme sur un problème de référence

Pour évaluer la pertinence et la robustesse de l'algorithme de point intérieur vis-à-vis des principales méthodes de linéarisation, nous l'avons d'abord testé sur un problème souvent évoqué dans la littérature de l'analyse limite. Ainsi que l'illustre la figure 5.1, il s'agit d'un barreau infini, prismatique, doté de deux encoches symétriques, qui est soumis à une traction uniforme latérale \mathbf{p} . Cet exemple se ramène à un problème plan, déjà utilisé en test, par exemple, par Andersen et Christensen [2], et Krabbenhoft et Damkilde [15]. Du fait de la symétrie du problème, on se contente de mailler le quart supérieur droit du barreau selon la méthode vue dans un chapitre précédent, c'est-à-dire en éléments finis P1 de Lagrange, avec les conditions de symétrie et aux limites adéquates. Rappelons que résoudre le problème statique revient alors à maximiser une fonction linéaire des variables $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ du tenseur de contraintes en chaque sommet du triangle, sous des contraintes linéaires (équilibre, continuité du vecteur contrainte, conditions de symétrie et aux limites), et une condition non linéaire par sommet donnée par :

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (2\sigma_{xy})^2 \leq (2c)^2. \quad (5.1)$$

Nous prendrons comme paramètre de chargement à maximiser $Q = \mathbf{p}/c$.

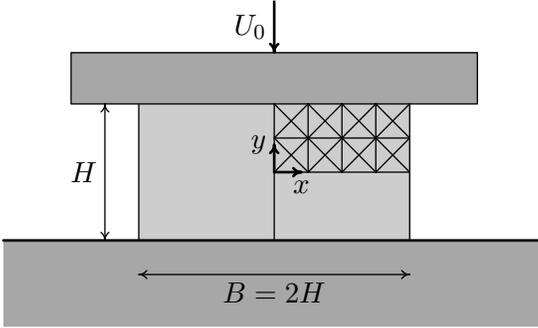


Figure 5.2 — Le barreau comprimé, $B = 2H$, maillage $2N \times N$, ici $N = 2$.

notre maillage le plus fin, ce qui est remarquable pour un maillage parfaitement régulier et laissé tel à dessein en vue du cas de Gurson.

Les tests ont été effectués sur la même configuration et les mêmes critères d'arrêt que précédemment. On peut tout de suite remarquer d'après le tableau 5.6 que le temps dévolu à la résolution d'un problème de Gurson est très nettement supérieur à celui d'un problème de Mises. Ce qui n'est pas outre mesure étonnant, puisque dans le cas de Gurson le domaine d'admissibilité des contraintes est maintenant borné et que les matrices jacobienne et hessiennes des contraintes sont moins creuses. Néanmoins la convergence se produit sans encombre dans les deux cas, montrant ainsi la robustesse de la méthode de point intérieur employée. Il est aussi à noter que la remarque précédente concernant la vérification quasi-exacte des contraintes linéaires reste valable dans le cas de Gurson.

À titre de complément, nous donnons dans le tableau 5.7 les mêmes comparaisons Mises-Gurson effectuées récemment dans le cas du barreau encoché, pour les tailles de problèmes les plus élevées, avec une tolérance d'arrêt ayant dû être descendue cette fois à 1×10^{-5} , comme pour les tests reportés dans le tableau 5.4. On y fait les mêmes constatations que pour le barreau comprimé.

5.3 Remarques finales

Nous avons montré que la méthode de point intérieur ici employée s'avère efficace, robuste et relativement rapide, et qu'elle permet de résoudre des problèmes d'analyse limite statique d'ampleur telle que les algorithmes classiques de résolution par linéarisation ne peuvent prétendre rivaliser. Réécrire ce programme `MATLAB` en code `C`, plus souple et plus rapidement assimilable par l'ordinateur, sera évidemment intéressant pour la suite, de même que déterminer si l'algorithme en question peut rivaliser en termes de vitesse avec les codes commerciaux coniques genre `MOSEK`. Ce dernier est particulièrement adapté pour la résolution des problèmes de Mises (dont le critère de plasticité est conique du second ordre), mais un doute subsiste sur son adaptation au problème de Gurson, étant donné que ce critère, certes convexe, n'est pas conique du second ordre. Notons enfin que les expériences récentes en cinématique ont mis en lumière, comme on le verra, un manque de fiabilité de ce code, au contraire de celui proposé ici.

Chapitre 6

Formulations de l'analyse limite de type point-selle

Les travaux de Christiansen [7] ont montré que l'analyse limite pouvait être formulée de façon très poussée dans le langage de la formulation variationnelle, et la solution sous forme de point-selle d'un problème de ce type. Ciria [8] en a proposé un exposé synthétique dont nous nous sommes inspirés, tout en l'adaptant à nos notations et nos besoins propres.

Notons ici qu'à notre connaissance, M. Capurso [6] semble avoir été le premier, en 1971, à parler de point-selle en matière d'analyse limite pour des critères de plasticité linéarisés (PWL). À la même époque, en 1972, Radenkovic et Nguyen [42] ont formulé le problème de manière différente, mais aussi sous forme de point-selle. Sur le plan de la mise en œuvre numérique, les pionniers pour ces méthodes mixtes ont été Anderheggen et Knopfel dans leur article de 1972 [1], article d'où nous sommes partis pour notre première formulation de ce type dans le cas discontinu.

6.1 Reformulation des concepts mécaniques

On supposera par la suite que le solide (rigide, parfaitement plastique) occupe un domaine ouvert borné V de \mathbb{R}^N ($N = 2$ ou 3), de frontière S . Rappelons que si l'on note γ l'effort extérieur poids, T l'effort extérieur s'exerçant sur la surface du solide, u le champ des vecteurs vitesse de déplacement, S_T et S_u les parties de la frontière où respectivement le vecteur contrainte T et le vecteur vitesse de dé-

Cette dualité forte (sous les conditions requises) ainsi que l'existence effective des champs de ruine u^* et σ^* (le couple solution du problème mécanique, selon nos notations) est prouvée dans [7]. En fait, elle stipule que (σ^*, u^*) forme un *point-selle* de la forme bilinéaire a sur $K \times H$, puisque si σ^* et u^* vérifient respectivement (6.5) et (6.6), (6.7) entraîne :

$$a(\sigma, u^*) \leq \mu^* = a(\sigma^*, u^*) \leq a(\sigma^*, u) \quad \forall \sigma \in K, \forall u \in H.$$

En résumé :

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \max \mu \\ &\text{t.q.} \begin{cases} \exists \sigma \in K \\ a(\sigma, u) = \mu F(u), \forall u \in Y \end{cases} \\ &= \max_{\sigma \in K} \min_{u \in H} a(\sigma, u) \\ &= \min_{u \in H} \max_{\sigma \in K} a(\sigma, u) \\ &= \min_{u \in H} D(u). \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.2.1 Bornes inférieures et supérieures du multiplicateur donnant la charge limite

Supposons maintenant résolus les problèmes suivants :

$$a(\sigma, u^*) = \min_{u \in H} a(\sigma, u), \quad \forall \sigma \in K, \tag{6.14}$$

$$a(\sigma^*, u) = \max_{\sigma \in K} a(\sigma, u), \quad \forall u \in H. \tag{6.15}$$

Les problèmes (6.14) et (6.15) reviennent respectivement à supposer que le problème (6.5) et le problème (6.6) sont résolus (séparément).

Les équations (6.7) et (6.14) permettent d'obtenir

$$\forall \sigma \in K, \quad a(\sigma, u^*) \leq \max_{\sigma \in K} a(\sigma, u^*) = \max_{\sigma \in K} \min_{u \in H} a(\sigma, u) = \lambda^*,$$

ce qui montre que $a(\sigma, u^*)$ est un *minorant* (abusivement appelé borne inférieure) de λ^* , qu'on notera λ_{BI} .

De même, les équations (6.7) et (6.15) montrent que

$$\lambda^* = \min_{u \in H} \max_{\sigma \in K} a(\sigma, u) = \min_{u \in H} a(\sigma^*, u) \leq a(\sigma^*, u),$$

démontrant par là que $a(\sigma^*, u)$ est un majorant (« borne supérieure ») de λ^* , qu'on notera λ_{BS} .

Il s'agirait donc, pour bien faire, de résoudre les problèmes (6.14) et (6.15), c.-à-d. de trouver u^* et σ^* , puis de trouver les meilleurs candidats possibles pour u et σ de façon à ce que $a(\sigma, u^*)$ et $a(\sigma^*, u)$ approchent le mieux possible μ^* . Malheureusement, ni la résolution de (6.14) et (6.15), ni la recherche des u et σ adéquats, ne sont choses aisées en pratique.

En effet, utiliser les deux champs relève des méthodes dites d'éléments finis mixtes en analyse limite. Si l'on considère le problème (6.15) les variables réelles du problème sont les σ , et les variables u , supposées appartenir à H , sont virtuelles. Leur imposer d'appartenir à H *a priori*, autrement dit imposer tout au long de la maximisation $q(u) = q_d$ (selon nos notations) n'est pas évident puisque ces variables u ne sont pas directement accessibles dans ces méthodes, où les variables effectives sont les composantes des tenseurs contraintes sur les éléments finis. Cet inconvénient disparaît en méthode cinématique classique, mais nous avons vu que dans le cas du critère de Gurson elle n'est pas pratiquement envisageable.

6.2.2 Analyse limite et discrétisation M.E.F.

La discrétisation en éléments finis amène à considérer des espaces de dimensions finies X_h et Y_h en guise d'approximation de X et Y . L'ensemble des contraintes admissibles doit alors vérifier l'inclusion $K_h \subset K \cap X_h$ et l'ensemble affine H devient $H_h = H \cap Y_h$. Cela conduit à la forme discrétisée du problème de l'analyse limite géné-

rale (6.13) :

$$\lambda_h^* = \max \lambda_h \quad (6.16)$$

$$\text{t.q.} \begin{cases} \exists \sigma_h \in K_h \\ a(\sigma_h, u_h) = \lambda F(u_h), \forall u_h \in Y_h \end{cases}$$

$$= \max_{\sigma_h \in K_h} \min_{u_h \in H_h} a(\sigma_h, u_h) \quad (6.17)$$

$$= \min_{u_h \in H_h} \max_{\sigma_h \in K_h} a(\sigma_h, u_h) \quad (6.18)$$

$$= \min_{u_h \in H_h} D(u_h). \quad (6.19)$$

Dans [7], on démontre que ce problème discrétisé est bien posé, sous des conditions très générales qui en pratique sont toujours vérifiées.

On emploie le plus couramment la notation matricielle pour le problème discrétisé. Précisément, notons \underline{u}_h un vecteur collectant selon un ordre prédéfini tous les paramètres définissant la discrétisation de u_h et $\underline{\sigma}_h$ faisant de même pour σ_h . Il est à noter que les dimensions des espaces contenant ces vecteurs dépendent évidemment des méthodes d'interpolation envisagées. Par exemple, si $\underline{\sigma}_h$ est défini suivant les nœuds du maillage, ou bien en un sommet de celui-ci (voir chapitre 3), autrement dit si le maillage est continu ou discontinu, les espaces d'interpolation ne seront pas les mêmes.

Ceci étant précisé, on identifiera par la suite \underline{u}_h à u_h ainsi que σ_h à $\underline{\sigma}_h$ et on écrira ainsi « $\underline{u}_h \in H_h$ » aussi bien que « $\underline{\sigma}_h \in K_h$ ». En définissant la matrice A par la relation

$$a(\underline{\sigma}_h, \underline{u}_h) = \langle A \underline{\sigma}_h, \underline{u}_h \rangle \quad \forall (\underline{\sigma}_h, \underline{u}_h) \in K_h \times H_h,$$

Définition 6.6. L'interpolation $X_h \times Y_h$ est dite *purement cinématique* si la puissance dissipée discrète $D_h(u_h)$ est exacte sur Y_h , c'est-à-dire :

$$D_h(u_h) \stackrel{(\text{d}\acute{\text{e}}\text{f.})}{=} \max_{\sigma_h \in K_h} a(\sigma_h, u_h) = \max_{\sigma \in K} a(\sigma, u_h) \quad \forall u_h \in Y_h.$$

On vérifie tout de suite qu'une interpolation purement cinématique fait en sorte que toute solution du problème cinématique discrétisé (6.19) est une borne supérieure du problème cinématique général (6.6).

Cependant, dans la pratique, il convient de s'assurer auparavant que le champ de contraintes σ et le tenseur des vitesses de déformation v restent tous les deux P.A. et associés en tout point de l'élément fini : comme on le verra par la suite, ce n'est pas si simple en-dehors du cas où ces deux variables sont constantes sur l'élément fini.

Au chapitre 7, nous exposons une formulation M.E.F. mixte qu'on démontrera purement cinématique pour les champs u linéaires ou quadratiques par morceaux, et discontinus à condition d'utiliser les propriétés de convexité signalées au chapitre 2.

6.3 Autre formulation de type point-selle

Nous reprenons ici les conclusions de la référence de 1972 [42] qui définissent une fonctionnelle I que l'on retrouve dans l'expression du lagrangien relatif au problème d'optimisation du chapitre suivant.

6.3.1 Formulation de Radenkovic et Nguyen

La fonctionnelle I est la suivante, avec nos notations.

$$I = Q_i(q_d)_i + \int_V \sigma_{ij} v_{ij} dV - Q_i q_i(u) \quad (6.24)$$

Cette fonctionnelle dépend de quatre arguments indépendants : les paramètres de chargement statique et cinématique Q_i et q_i tels que définis au chapitre 2, les champs de contraintes σ P.A. et les champs de vitesses de déplacement u C.A.

Ces auteurs montrent que I^+ défini par :

$$I^+ = \inf_{u \text{ C.A.}} \sup_{\sigma \text{ P.A.}} I_Q \quad (6.25)$$

est bien égale à

$$\inf_{u \text{ C.A. et P.A.}} D(u) \quad (6.26)$$

pour tout $q(u) = q_d$.

La formulation 6.25 évite de poser *a priori* la relation $q(u) = q_d = 1$ comme ci-dessus, et considère l'infimum sur les u C.A. : elle est bien équivalente avec la méthode cinématique, comme le montre l'analyse qui suit. Au chapitre suivant, on impose les conditions réalisant $\int_V \sigma_{ij} v_{ij} dV = Q_i q_i(u)$ et la fonctionnelle se réduit à $Q_i (q_d)_i$.

6.3.2 Équivalence de notre méthode mixte avec la méthode cinématique classique

Le problème que nous mettons en œuvre numériquement dans la suite s'écrit :

$$\max_Q F = Q_i (q_d)_i \quad (6.27.i)$$

$$\text{s.c.q. } \int_V \sigma : v dV = Q_i q_i(u) \quad \forall u \text{ C.A.}, \quad (6.27.ii)$$

$$f(\sigma) \leq 0. \quad (6.27.iii)$$

$$(6.27.iv)$$

Rappelons tout d'abord que u C.A. signifie que u vérifie les conditions aux limites en vitesses nulles. Si une composante de u est imposée non nulle sur une partie de frontière elle définit un paramètre cinématique q_i et son paramètre de chargement associé Q_i . Par ailleurs on suppose qu'il existe une solution $(\sigma, v(u))$ de l'écoulement libre selon la terminologie définie en section 2.1, et par suite que la puissance dissipée correspondante est finie.

Pour comparer avec la méthode cinématique classique il faut montrer que les champs u conduisant à une valeur finie de la fonctionnelle précédente à l'optimum

1. vérifient la condition cinématique $q_i = (q_d)_i$,
2. sont P.A.

Examinons ces deux points.

1. Supposons que le champ u C.A. soit tel que $q(u)$ soit différent de q_d et soit $q_u = q(u)$ ce vecteur vitesse généralisée.

La relation (6.27.ii) définit l'équation d'un hyperplan $Q \cdot q_u = P_{\text{diss}}(u)$ dans l'espace des Q_i (figure 6.1). Nous avons nécessairement un vecteur chargement Q^* qui se situe à l'intersection de cet hyperplan avec celui défini par la fonctionnelle à l'optimum, $Q \cdot q_u = F_{\text{max}}$. Soient leurs hyperplans linéaires associés $H_d = \{Q \mid Q \cdot q_d = 0\}$ et $H_u = \{Q \mid Q \cdot q_u = 0\}$. Puisque $H_d \neq H_u$, il existe $Q_u \in H_u$ tel que $Q_u \notin H_d$, c'est-à-dire $Q_u \cdot q_d \neq 0$. Posons $Q_t = Q^* + tQ_u$, où t est un paramètre réel variant librement. Alors, quel que soit t , $Q_t \cdot q_u = P_{\text{diss}}$, Q_t n'est pas restreint par la contrainte de plasticité, et

$$Q_t \cdot q_d = F_{\text{max}} + t(Q_u \cdot q_d).$$

Puisque par hypothèse $Q_u \cdot q_d \neq 0$, on voit qu'en choisissant t de façon idoine, par exemple $t = Q_u \cdot q_d$, on obtient $Q_t \cdot q_d > F_{\text{max}}$, ce qui est absurde, Q_t vérifiant toujours les contraintes du problème.

2. Dans le cas du critère de Gurson tout u est P.A. Dans le cas de critère présentant des directions à l'infini, dire que u n'est pas P.A. signifie que pour tout point σ de la surface $f(\sigma) = 0$, v n'est pas orthogonal à l'hyperplan tangent à la surface en ce point. Soit d une direction infinie du critère telle qu'on ait $d : v > 0$ (cette supposition est au moins vérifiée pour le critère de Mises et le critère de Coulomb). Soit donc σ P.A. ($f(\sigma) \leq 0$) tel que pour tout $s \in \mathbb{R}_*^+$, $\sigma_s = \sigma + sd$ reste plastiquement admissible, c'est-à-dire $f(\sigma + sd) \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}_*^+$ (figure 6.2). Alors on a :

$$\forall t > 0, \sigma_s : v = \sigma : v + s(d : v).$$

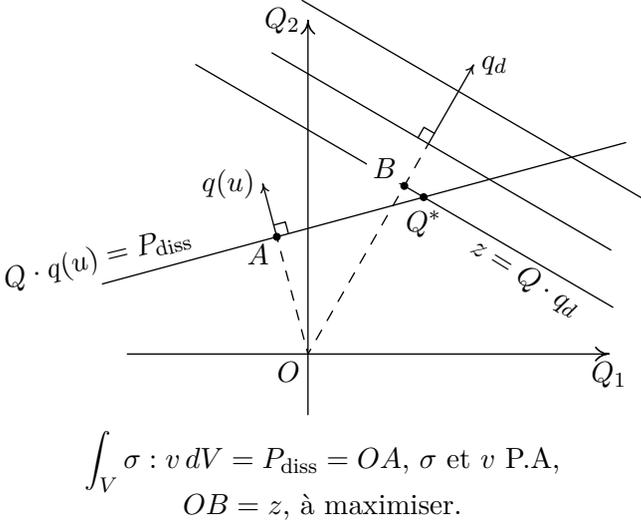


Figure 6.1 — $q_d \neq q(u)$: problème divergent.

et on voit que

$$\int_V \sigma_s : v dV = \int_V \sigma : v + s \int_V d : v dV \rightarrow \infty \text{ quand } s \rightarrow \infty.$$

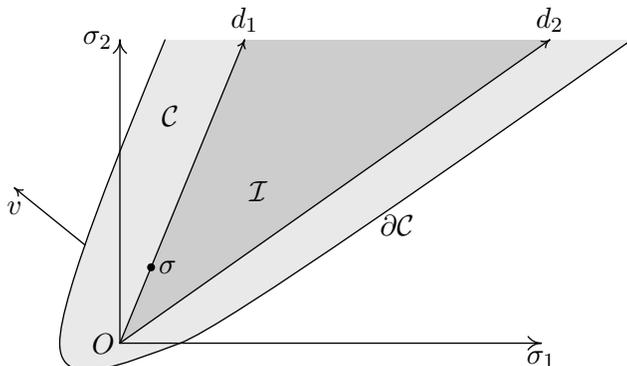
d'où contradiction avec l'hypothèse d'existence précédente.

Le champ u étant P.A, d'après le principe du travail maximal la maximisation sur les σ P.A. entraîne que la relation (6.27.ii) devient, à l'optimum, $Q_i \cdot q_i(u) = P_{\text{diss}}(u)$, où $P_{\text{diss}}(u)$ est la puissance dissipée dans le champ u .

Démontrons maintenant l'équivalence de cette méthode avec la méthode cinématique classique.

Les deux conditions étant vérifiées, la méthode cinématique classique stipule que le champ de vitesses solution minimise la puissance dissipée sur l'ensemble des u champs licites (*i.e.* C.A, P.A. et $q(u) = q_d$).

Soit (u_0, Q_0, σ_0) une solution du problème 6.27 ; le champ u_0 est



$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{\sigma \mid f(\sigma) \leq 0\}. \\ \mathcal{I} &= (O, d_1, d_2) : \text{c\^one des directions \^a l'infini de } \mathcal{C}. \\ &\exists \sigma \in \partial \mathcal{I}, \sigma : v \neq 0 \\ &\implies \sigma : v \text{ peut tendre vers l'infini.} \end{aligned}$$

Figure 6.2 — Le c\^one des directions \^a l'infini.

licite et on a

$$P_{\text{diss}}(u_0) = Q_0 \cdot q_d = \int_V \sigma_0 : v(u_0) dV.$$

Soit un autre champ u_1 licite auquel correspond un tenseur contrainte σ_1 associ\^e \^a u_1 par la loi de normalit\^e (2.1). u_1 conduit \^a une puissance dissip\^ee

$$P_{\text{diss}}(u_1) = \int_V \sigma_1 : v(u_1) dV = Q_1 \cdot q_d. \quad (6.28)$$

Il suffit de montrer qu'alors $P_{\text{diss}}(u_1)$ est sup\^erieure ou \^egale \^a $P_{\text{diss}}(u_0)$.

Puisque u_1 est licite, l'\^equation (6.27.ii) implique

$$Q_0 \cdot q_d = \int_V \sigma_0 : v_1 dV, \quad (6.29)$$

o\^u on a pos\^e $v_1 = v(u_1)$.

\^Etant donn\^e que σ_1 et v_1 sont associ\^es, le principe du travail maximal (2.4) entra\^ene que

$$\forall \sigma^* \text{ P.A.}, (\sigma_1 - \sigma^*) : v_1 \geq 0,$$

et en particulier

$$(\sigma_1 - \sigma_0) : v_1 \geq 0,$$

d'où

$$\int_V \sigma_1 : v_1 dV \geq \int_V \sigma_0 : v_1 dV = Q_0 \cdot q_d \quad \text{d'après (6.29).}$$

Mais alors, d'après (6.28), on en déduit que

$$Q_1 \cdot q_d \geq Q_0 \cdot q_d \quad \text{c.q.f.d.}$$

On remarque comme plus haut qu'il est nécessaire que le champ de contraintes optimal puisse être associé au champ de vitesses par la loi de normalité en tout point pour que le caractère cinématique soit strict. Dans le chapitre 7, nous allons retrouver les mêmes conclusions, cette fois pour le problème discrétisé, grâce aux conditions de point-selle du lagrangien de la méthode primale-duale de point intérieur, lagrangien qui n'est autre, au signe près, que la fonctionnelle posée par Radenkovic et Nguyen.

Chapitre 7

Approche cinématique mixte

Comme on l'a vu au chapitre 2, l'utilisation de la méthode cinématique classique n'est pas évidente du fait de la complexité de l'expression de la puissance dissipée unitaire tant en volume que sur les discontinuités en vitesses de déplacement. Ces dernières ne sont pas linéarisables au sens PWL ou BTN, et leur traitement par optimisation non linéaire pose problème. Cette difficulté nous a conduit à regarder du côté des travaux pionniers de [1], fondateurs avec [6] de l'approche mixte dans le cas continu en formulation PWL, laquelle ne requiert pas explicitement la formulation de cette puissance dissipée unitaire.

L'article [14] en présente une extension au cas discontinu au moyen de deux éléments finis dans les cas des vitesses affines ; cette extension, quoique assez confuse dans sa rédaction, est équivalente — numériquement et dans le cas des vitesses linéaires — à la formulation que nous adoptons ici. Elle perd par contre le caractère de borne supérieure si on la généralise telle quelle au cas des vitesses quadratiques et des discontinuités correspondantes, au contraire de la formulation que nous proposons ici, intégralement basée sur le concept de zone mince et sur les propriétés de convexité tant de la puissance unitaire que de l'ensemble des champs de vitesses plastiquement admissibles.

7.1 Rappels spécifiques du chapitre 2

Un champ de tenseurs contraintes $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ est dit admissible s'il est statiquement admissible (S.A, c.-à-d. vérifications des équations

tions d'équilibre, de la continuité du vecteur contrainte et des conditions au limite) et plastiquement admissible (P.A, c.-à-d. $f(\sigma) \leq 0$, où $f(\sigma)$ est le critère (convexe) de plasticité du matériau).

De façon similaire, un champ de tenseurs vitesse de déformation $v(x_1, \dots, x_n)$ est dit admissible s'il est cinématiquement admissible (C.A.), c.-à-d. dérivé d'un champ de vitesses de déplacement u continu par morceaux, aux discontinuités bornées $[u]$, tel que les conditions de limites en vitesses (nulles) soient vérifiées, et plastiquement admissible (P.A, c.-à-d. les lois de flux associées (7.2.i) et (7.2.ii) sont vérifiées).

Par hypothèse, la puissance virtuelle des charges extérieures P_{ext} peut s'écrire comme le produit scalaire d'un vecteur chargement Q et d'un vecteur vitesse généralisé $q = q(u)$. Suivant [1], considérons un champ de vitesses virtuelles u C.A ; le *principe des puissances virtuelles* affirme que le champ des tenseurs contrainte σ , le champ des vecteurs contrainte T et le vecteur chargement Q sont en équilibre si pour tout champ u cinématiquement admissible, l'équation variationnelle

$$P_{\text{ext}} = Q \cdot q(u) = \int_V \sigma : v \, dV + \int_{S_d} T \cdot [u] \, dS \quad (7.1)$$

est vérifiée, où V est le volume représentant le système mécanique, et S_d est la réunion des surfaces de discontinuité relative aux vitesses.

Autrement dit le champ de contraintes obtenu devient statiquement admissible (S.A.) et en équilibre avec le chargement. Si de plus il est P.A. et associé au champ de vitesses par la loi de normalité, le couple champ de contraintes – champ de vitesses est une solution de l'écoulement libre. Mais décrire tous les champs de vitesses C.A. est impossible : nous allons donc chercher à obtenir une valeur cinématique rigoureuse pour le chargement du système. Il est clair que plus la classe de champs de vitesses décrits numériquement sera grande, plus on se rapprochera de la solution exacte, laquelle minimise la puissance dissipée pour une direction donnée de $q(u)$.

Dans la relation précédente, le chargement Q aura valeur cinématique si les conditions suivantes sont également vérifiées en tout point

de V et pour q fixé à une valeur q_d :

$$v = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad f(\sigma) = 0, \quad \lambda \geq 0; \quad (7.2.i)$$

$$[u] = \xi \frac{\partial f_{nt}}{\partial T}, \quad f_{nt}(T) = 0, \quad \xi \geq 0; \quad (7.2.ii)$$

$$q(u) = q_d. \quad (7.2.iii)$$

Comme on l'a vu le critère $f_{nt}(T)$ résulte de la projection du critère de plasticité $f(\sigma)$ sur le plan de Mohr $(\sigma_{nn}, \sigma_{nt})$, où n est la normale à l'élément de surface de discontinuité de vitesse et T est le vecteur contrainte appliqué sur cet élément. Plus précisément, $f_{nt}(T)$ est la solution du système « enveloppe » suivant :

$$f(\sigma_{nn}, \sigma_{tt}, \sigma_{nt}) = 0; \quad (7.3.i)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{tt}} = 0. \quad (7.3.ii)$$

Il convient enfin de noter que, si (7.2.i) et (7.2.ii) sont vérifiées, les quantités $\sigma : v$ et $T \cdot [u]$ deviennent les puissances dissipées unitaires correspondantes — convexes — $\Pi_V(v)$ et $\Pi_d([u])$, *i.e.* :

$$\Pi_V(v) = \sigma : v, \quad v = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad f(\sigma) = 0, \quad \lambda \geq 0; \quad (7.4)$$

$$\Pi_d([u]) = T \cdot [u], \quad [u] = \xi \frac{\partial f_{nt}}{\partial T}, \quad f_{nt}(T) = 0, \quad \xi \geq 0. \quad (7.5)$$

Nous allons présenter l'algorithme tout d'abord dans le cas linéaire continu, de la même façon que [33], avant de présenter le cas quadratique, qui n'en est pas une extension simple comme on le verra.

7.2 Cas d'un champ de vitesse continu

Dans cette section, nous présentons la méthode mixte retenue pour des champs de vitesse linéaires puis quadratiques.

7.2.1 Cas des champs de vitesses linéaires continus

Le champ de vitesses virtuelles u est pris linéaire dans l'élément triangulaire de surface S_{it} et la vitesse de déformation v y est constante ; affectons par suite un tenseur contrainte σ à l'élément considéré. On note par la suite $\{\sigma\}$ et $\{v\}$ les représentations vectorielles compactées des tenseurs σ et v , c.-à-d.

$$\begin{aligned}\{\sigma\} &= [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]^T, \\ \{v\} &= [v_{xx} \ v_{yy} \ 2v_{xy}]^T.\end{aligned}$$

La puissance des efforts extérieurs devient $P_{\text{ext}} = q(u) \cdot Q = u^T \beta Q$, où β est une matrice résultant du calcul du terme de gauche $q(u)$ en fonction de u . En utilisant la relation M.E.F. classique $\{v\} = Bu$ reliant vitesses de déplacement et vitesses de déformation, la relation (7.1) devient, après assemblage des éléments finis :

$$q(u) \cdot Q = u^T \beta Q = \int_V v : \sigma \, dV = u^T \alpha \{\sigma\} \quad \forall u \text{ C.A.}, \quad (7.6)$$

où la matrice α résulte de l'assemblage des $B^T S_{it}$ de chaque triangle it du maillage.

L'équation (7.1) devient ainsi :

$$u^T (-\alpha \{\sigma\} + \beta Q) = 0 \quad \forall u \text{ C.A.} \quad (7.7)$$

Considérons maintenant le problème d'optimisation suivant :

$$\max q_d^T Q \quad (7.8.i)$$

$$\text{s.c.q. } Ax = -\alpha \{\sigma\} + \beta Q = 0, \quad (7.8.ii)$$

$$f_{it}(\sigma) \leq 0. \quad (7.8.iii)$$

Le problème (7.8) prend en compte les conditions aux limites sur les u virtuels soit par addition de variables supplémentaires spécifiques, soit par condensation de lignes.

Considérons la solution du problème mathématique (4.9), avec $A = [-\alpha, +\beta]$, $b = 0$, $x^T = [\{\sigma\}^T, Q^T]$, $c^T = -[0 \dots 0 | q_d^T]$. Le signe de la fonctionnelle c a été changé du fait de la présente maximisation,

et les seuls coefficients non nuls de c sont ceux correspondants aux composantes de q_d . On note que la relation (7.8.ii) n'est autre que la relation (7.7) du fait que cette dernière doit être vraie quel que soit le champ de vitesses u C.A. On voit donc que le problème (7.8.ii) n'est autre que la version discrétisée du problème (6.27) étudié précédemment. Nous allons en retrouver les conclusions, et les conditions nécessaires de leur validité, *via* les conditions d'optimalité du problème discrétisé (7.8.ii).

La solution *optimale* $(\{\sigma\}, Q, w, y)$ de ce problème vérifie (4.11) avec $\mu e = 0$, $y_{it} \geq 0$ et $y_{it} = 0$ si $f(\sigma_{it}) < 0$. Après transposition, la première équation de (4.11) devient :

$$c^T + w^T[-\alpha | \beta] + y^T \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \mid 0 \right] = 0. \quad (7.9)$$

Identifions maintenant u à w . Il en découle les points suivants :

- les coefficients c_j de la fonctionnelle sont nuls, excepté ceux correspondant au vecteur Q . Du fait de la structure de la matrice α adoptée en (7.6) on note que, d'après la définition M.E.F. classique $\{v\}^T = u^T B^T$, la loi de normalité (7.2.i) est vérifiée en posant $\lambda_{it} = \frac{y_{it}}{S_{it}}$ pour tout triangle it . Ce raisonnement est illustré à la figure 7.2 dans le cas simplifié d'un carré décomposé en deux triangles (figure 7.1). Autrement dit, on aura bien la loi de normalité

$$v_{it} = \lambda_{it} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{it}}, \lambda_{it} \geq 0, f(\sigma_{it}) = 0. \quad (7.10)$$

en tout triangle du maillage.

- les coefficient c_j correspondant à Q sont en fait ceux de $-q_d$. Par conséquent l'équation (7.9) s'écrit, pour ces composantes, $u^T \beta = q(u) = q_d$, puisque Q ne doit vérifier aucun critère de plasticité. La condition cinématique de chargement $q(u) = q_d$ est donc vérifiée;
- on tient compte des conditions aux limites imposant la nullité des vitesses de déplacement en supprimant les lignes correspondantes de la matrice $A = [-\alpha, \beta]$;

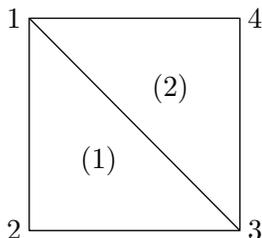


Figure 7.1 — Problème linéaire continu : carré décomposé en deux triangles et quatre sommets.

- lorsqu'on traite le cas de la compression d'un barreau entre deux plaques rigides (figure 5.2), on suppose généralement l'existence d'une interface qui sera traitée par la suite comme une surface de discontinuité. Ici, en raison de l'hypothèse de continuité, on considère le cas d'une interface collée ou lisse. Ce problème ne comporte qu'un seul paramètre de chargement (scalaire) $Q = F$ auquel est associé la vitesse normale de déplacement u_0 . La fonctionnelle de notre problème ne comporte donc qu'un seul terme : $u_0 F = q_d Q$.

On impose la vitesse normale uniforme de déplacement $u_0 = q_d$ de la façon suivante : soient u_i , $i = 1 \dots n_p$, les vitesses normales de déplacement le long du barreau. On contraint les vitesses u_i , $i > 1$, à être égale à la première u_1 (figure 5.2), en « condensant » les lignes de $A = [-\alpha, \beta]$ associées aux u_i sur la ligne associée à u_1 , ce qui revient à ajouter les lignes associées à u_i à la ligne associée à u_1 , puis à les supprimer. Le terme $q(u)Q$ s'écrit ici $u_1 Q = u_1 F$, ce qui entraîne que la colonne β est nulle à l'exception du terme de rang correspondant à u_1 , lequel est égal à 1. La fonctionnelle ne comporte qu'un seul terme $c_1 = u_0$ correspondant à F . Par conséquent, à l'optimum, l'identification $w = u$ entraîne, d'après (7.9), $u_1 = q(u) = u_0 = q_d$, autrement dit la condition cinématique de chargement qui devait être vérifiée.

Notons ici que cette possibilité de fixer des vitesses virtuelles non nulles sera largement utilisée dans la technique de décom-

position que nous verrons plus loin.

Il convient pour finir de noter que σ et v sont bien P.A. et associés en tout point du triangle (puisque'ils y sont constants). L'intégrale de leur produit est donc bien la puissance dissipée au sens de l'analyse limite.

7.2.2 Équivalence avec la méthode cinématique classique

Si on part d'une formulation de problème légèrement modifiée par l'introduction de variables d'écart :

$$\max c^T x = q_d^T Q \quad (7.11.i)$$

$$\text{s.c.q. } Ax = \beta Q - \alpha\{\sigma\} = 0, \quad (7.11.ii)$$

$$f_n(x) + s_n = f_{it}(\sigma) + s_{it} = 0. \quad (7.11.iii)$$

le lagrangien dont découlent les conditions KKT se met sous la forme suivante :

$$L(\sigma, w, y, s) = c^T x - w^T Ax - \sum_n y_n (f_n(x) + s_n).$$

avec $w \in \mathbb{R}^m$, et $\forall n, s_n \geq 0$ (variables d'écart). *A priori*, les y_n sont ici des réels libres, mais ils sont en fait strictement positifs durant l'application de la méthode de point intérieur, du fait des conditions KKT inhérentes au problème barrière.

En faisant $u = +w$, on voit d'après (7.11) que les deux premiers termes du lagrangien ci-dessus ne sont autres que, au signe près, ceux de la fonctionnelle de Radenkovic et Nguyen dont le point-selle est solution de l'analyse limite :

$$I = (q_d)_i Q_i - q_i(u) Q_i + \int_V v : \sigma dV \quad (7.12)$$

où les q_i sont fixées, où les σ sont P.A. par hypothèse (ce qui élimine notre terme en y) et où les u sont C.A.

Après avoir résolu notre problème de maximisation sur les σ P.A. (lequel donne le point selle du lagrangien), on voit d'après la discussion plus haut qu'alors u est admissible, $q(u) = q^d$ et que le point-selle

du lagrangien est donné par :

$$\min_u \max_{\sigma} (\{w\}^T [\alpha] \{\sigma\} = \int_V v : \sigma dV) = \min_u \int_V \Pi(v) dV = \min P(v)$$

où les u sont admissibles et tels que $q(u) = q_d$, les σ étant P.A. On a bien l'équivalence avec la méthode cinématique usuelle sur le plan de la formulation numérique, cette équivalence ayant été détaillée sur le plan général en section 6.3.2.

7.2.3 Cas des champs de vitesses quadratiques continus

Le champ de vitesses virtuel continu u est supposé cette fois quadratique sur chaque élément fini triangulaire it . Le vecteur nodal à six composantes u_x (respectivement u_y) s'écrit alors :

$$u_x = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i & x_i^2 & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j & x_j^2 & y_j^2 \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k & x_k^2 & y_k^2 \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l & x_l^2 & y_l^2 \\ 1 & x_m & y_m & x_m y_m & x_m^2 & y_m^2 \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & x_n^2 & y_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = A_{it} a_{it} \quad (7.13)$$

où i, j, k, l, m et n sont respectivement les trois sommets et les milieux de chaque côté de l'élément fini triangulaire ; a, b, c, d, e et f sont les constantes d'interpolation définies pour chaque élément. On résout alors le système linéaire précédent :

$$a_{it} = A_{it}^{-1} u_x. \quad (7.14)$$

On définit le tenseur vitesse de déformation v par la classique équation suivante :

$$\{v\} = B u_e \quad (7.15)$$

où le vecteur u_e regroupe les douze degrés de liberté de l'élément fini triangulaire it , et où B est défini par

$$B = \begin{bmatrix} A_{x1} & 0 & A_{x2} & 0 & A_{x3} & 0 & A_{x4} & 0 & A_{x5} & 0 & A_{x6} & 0 \\ 0 & A_{y1} & 0 & A_{y2} & 0 & A_{y3} & 0 & A_{y4} & 0 & A_{y5} & 0 & A_{y6} \\ A_{y1} & A_{x1} & A_{y2} & A_{x2} & A_{y3} & A_{x3} & A_{y4} & A_{x4} & A_{y5} & A_{x5} & A_{y6} & A_{x6} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

où les A_{xi} et A_{yi} sont les composantes (calculées pour chaque élément it avec $i = 1, \dots, 6$) des vecteurs suivants :

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 2x & 0 \end{bmatrix} A_{it}^{-1} \quad (7.17.i)$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & x & 0 & 2y \end{bmatrix} A_{it}^{-1} \quad (7.17.ii)$$

À ce stade, on se doit de mettre en évidence plusieurs caractéristiques découlant du fait que, par construction, le champ de vitesses virtuel doit être cinématiquement admissible en tout point. Pour obtenir que la solution optimale soit une borne supérieure, nous devons analyser l'admissibilité plastique des champs de tenseurs contrainte et de vecteurs vitesse de déformation sur l'élément fini.

Le tenseur vitesse de déformation v est-il alors plastiquement admissible sur tout le triangle ? Oui, car d'après [45] et ainsi que cela a été souligné tout d'abord en [19], obliger v à être P.A. aux sommets comme ci-dessus est suffisant, en raison de la convexité du domaine des v P.A, convexité qui découle de celle du critère de plasticité. Le tenseur v variant linéairement sur le triangle, il s'ensuit qu'il est P.A. partout sur ce triangle.

Associons à chaque sommet de l'élément fini un tenseur de contraintes σ P.A. En prenant en compte la définition 7.4 de $\Pi_V(v)$, on peut utiliser la convexité de cette dernière et la variation linéaire de $\{v\}$ sur le triangle pour travailler non pas sur la puissance dissipée mais sur un majorant de cette puissance. La méthode des éléments finis peut alors démarrer à partir de l'équation suivante, où l'intégrale (7.6) a été calculée par interpolation linéaire de $\sigma : v$:

$$Qq = (Qq)_{vol} = \sum_{it} S_{it} \left[\{v_i\}^T \{\sigma_i\} + \{v_j\}^T \{\sigma_j\} + \{v_m\}^T \{\sigma_m\} \right] / 3 \quad (7.18)$$

où i, j , et m représentent les sommets de l'élément fini triangulaire. La technique précédente peut aisément être étendue au cas 3D par le biais d'éléments finis tétraédriques.

Du fait de (7.18) et des conditions KKT, on constate que la relation (7.10) est maintenant vérifiée avec $k = i, j, m$, et $\lambda_k = y_k / (3S_{it})$, v_k étant reliée à σ_k par la loi de normalité. En conséquence, les trois tenseurs aux sommets v_k sont plastiquement admissibles.

Note 1. L'utilisation du majorant ci-dessus n'est pas simplement une facilité de calcul : elle évite de supposer une variation linéaire de σ sur l'élément fini, puis de calculer l'intégrale du produit $\sigma : v$. En effet, pour que le résultat de l'intégrale puisse être considéré comme une puissance dissipée, il est nécessaire que σ et v soient non seulement P.A. (ils le sont puisqu'ils sont tels aux trois sommets) *mais aussi associés en tout point de l'élément*. Du fait que le critère est non linéaire, ceci n'est pas garanti, sauf dans le cas très spécial de von Mises ou Tresca, par exemple, où les trois tenseurs contrainte des sommets se situeraient sur une génératrice du cylindre représentant le critère. Ce problème ne se posait évidemment pas dans le cas des vitesses de déplacement linéaires puisque les tenseurs contraintes et vitesses étaient constants sur l'élément fini.

Note 2. La méthode cinématique classique, où les variables du problème sont les seules vitesses de déplacement ne présente pas cet inconvénient. Dans ce cas, pour un matériau de type Tresca et Mises, en fait pour tout critère ne comprenant pas $\text{tr}(\sigma)$, la condition P.A. entraîne l'équation d'incompressibilité : si $\text{tr}(v)$ est contraint à être nul aux sommets du triangle, alors par linéarité $\{v\}$ est P.A. partout. Dans le cas d'un matériau de Gurson, le critère est borné dans toutes les directions : tout $\{v\}$ est plastiquement admissible, et donc aucune condition P.A. n'est nécessaire. Mais rappelons que cette méthode classique n'est pas envisageable en pratique pour le matériau de Gurson.

7.3 Analyse des conditions d'admissibilité des sauts de vitesses sur les discontinuités

Selon [35] et [46], un élément de surface de discontinuité (de normale n) peut être assimilé à une zone mince dont l'épaisseur tend vers 0 de telle sorte que les dérivées normales de la vitesse de déplacement y tendent vers l'infini, mais que la puissance dissipée reste bornée. Les variables statiques et cinématiques appropriées sont alors respectivement le vecteur contrainte $T = (T_n, T_t) = (\sigma_{nn}, \sigma_{nt})$ et le vecteur saut de vitesse $[u] = ([u_n], [u_t])$ associé au critère $f_{nt}(T) = 0$

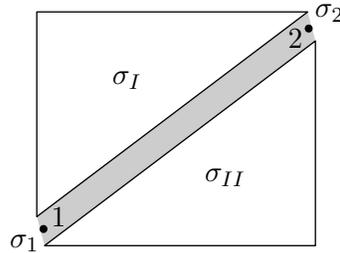


Figure 7.3 — Ligne de discontinuité linéaire.

par l'équation (7.2.ii).

On définit le saut de vitesse $[u]$ comme la différence de vitesse entre deux points opposés des deux triangles adjacents à un segment de discontinuité noté 1-2 (figure 7.3). La puissance dissipée sur ce segment est égale à :

$$P_{\text{disc}}([u]) = \int_{12} \Pi([u]) dl = \int_{12} T \cdot [u] dl,$$

T associé à $[u]$ comme en (7.2.ii) (7.19)

La relation (7.19) suppose que $[u]$ soit P.A. partout le long du segment 1-2. Sachant que le critère de Tresca (ou de von Mises dans le cas présent de déformation plane) est un cas particulier de celui de Coulomb, considérons ce dernier (figure 7.4), qui s'écrit $|\sigma_{nt}| + \sigma_{nn} \tan(\phi) - c \leq 0$ sur le plan de la discontinuité, ou, de façon équivalente :

$$\sigma_{nt} + \sigma_{nn} \tan(\phi) - c \leq 0, \quad (7.20.i)$$

$$-\sigma_{nt} + \sigma_{nn} \tan(\phi) - c \leq 0. \quad (7.20.ii)$$

D'après la loi de normalité (7.2.ii), le saut de vitesse s'écrit :

$$[u_n] = (\xi_1 + \xi_2) \tan(\phi), \quad (7.21.i)$$

$$[u_t] = \xi_1 - \xi_2, \quad \xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 \geq 0. \quad (7.21.ii)$$

Le saut de vitesse $[u]$ plastiquement admissible se trouve donc dans le cône grisé de la figure 7.4. Ce même saut sera d'autre part plastiquement admissible en tout point du segment ij (figure 7.5) si et

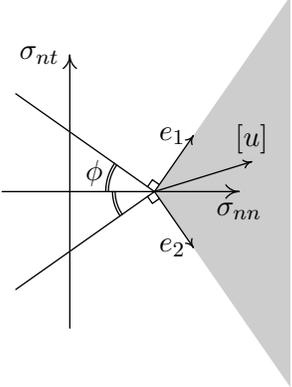


Figure 7.4 — Critère de Coulomb.

seulement si les multiplicateurs plastiques ξ_1 et ξ_2 sont non-négatifs sur ce segment. Dans le cas des vitesses de déplacement affines, on satisfait cette condition en imposant $[u]$ P.A. aux sommets i et j . Par suite $[u]$ est P.A. partout sur le segment, du fait de la convexité du domaine des sauts plastiquement admissible (figure 7.4). Cette dernière propriété découle de la convexité du critère de plasticité f_{nt} dans le plan de Mohr, laquelle résulte de la projection du critère originel convexe sur ce plan. Dans le cas quadratique, ce n'est par contre pas suffisant d'imposer $[u]$ P.A. en trois points (ou plus), et

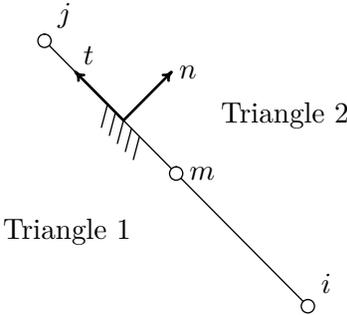


Figure 7.5 — Modélisation des discontinuités.

donc que ξ_1 et ξ_2 soient non négatifs en ces trois points. Du fait de la variation quadratique du saut $[u]$ le long du segment ij , le multiplicateur ξ_1 (par exemple) peut s'écrire sous la forme $at^2 + bt + c$ (figure 7.5), où a , b et c sont des combinaisons linéaires des valeurs de ξ_1 aux trois points i , j et m et où ces trois valeurs soient imposées comme non négatives. Pour que ξ_1 soit non négatif partout sur le segment, il faudrait que le discriminant $b^2 - 4ac$ soit imposé négatif ou nul ; or c'est une condition non linéaire impossible à vérifier dans le cas présent où les variables u sont virtuelles.

L'autre possibilité est de forcer ces paramètres, ou de façon équivalente le saut $[u]$, à varier linéairement le long du segment, par exemple en imposant que le saut au milieu m soit égal à la moitié de la somme des sauts aux extrémités. Cela est aisé à obtenir *via* une condensation de lignes appropriée, à la façon des méthodes classiques de combinaison des des degrés de liberté en élasticité.

Dans le cas d'un matériau de type Tresca, la condition de saut P.A. aboutit à une égalité comme dans le cas volumique, qu'on vérifie strictement en imposant la condition P.A. aux points i , j et m par exemple. Dans le cas de Gurson, tout saut $[u]$ est P.A. et la condition P.A. n'est donc pas l'élément restrictif.

Note 3. Dans le cas de notre méthode mixte la discussion précédente sur le caractère P.A. de $[u]$ n'est pas suffisante : encore faut-il assurer que l'intégrale de (7.19) donne bien une puissance dissipée, comme pour l'intérieur des éléments finis précédemment. En effet, pour que le résultat de l'intégrale puisse être considéré comme telle, il est nécessaire que T et $[u]$ soient non seulement P.A. le long de la discontinuité (ils le sont puisqu'ils sont tels aux extrémités) *mais aussi associés en tout point du segment*. Ceci n'est pas garanti, même dans le cas retenu de la variation linéaire de $[u]$, sauf cas très spécial où le vecteur T (variant linéairement entre ses valeurs en 1 et 2) serait sur une même partie rectiligne de la frontière du critère dans le plan de Mohr.

Note 4. Pour conclure ici, contraindre le saut de vitesse à varier linéairement le long du segment de discontinuité et se servir de la convexité pour borner supérieurement l'intégrale (7.19) est la seule

façon de garantir le caractère cinématique du résultat final. Cette obligation propre à la méthode mixte ne pénalise en fait que très peu les résultats finaux comparativement à une méthode cinématique classique, où la note précédente ne s'applique pas puisqu'on intègre directement la puissance unitaire en $[u]$. De fait, cela est confirmé par la post-analyse (lorsqu'elle est aisément réalisable) qui n'entraîne que d'infimes améliorations de l'optimum. De plus, le fait de diminuer le nombre de lignes par condensation et de n'utiliser que deux tenseurs au lieu de trois permet d'obtenir un problème de taille plus faible et surtout mieux conditionné, ce qui permet d'éviter d'avoir recours à la phase de « presolving » proposée en option dans le code SOCP MOSEK, par exemple.

On notera finalement que grâce à l'indépendance des tenseurs contraintes (seulement P.A.), il n'y a pas de problèmes de redondance dans cette formulation mixte de la méthode cinématique de l'analyse limite.

7.4 Implémentation des discontinuités en vitesse

Suite à la conclusion précédente, on impose que le saut de vitesse $[u]$ varie linéairement le long du segment. Du fait de la convexité de la fonction $\Pi([u]) = T \cdot [u]$, où $[u]$ est associé à T , on borne supérieurement la puissance dissipée le long du segment ij en écrivant :

$$P_{\text{diss}}([u]) \leq L_{ij}(\Pi([u]_i) + \Pi([u]_j))/2 = L_{ij}([u]_i^T T_i + [u]_j^T T_j)/2, \quad (7.22)$$

où L_{ij} est la longueur du segment ij , le vecteur $[u]_i$ correspond à T_i et $[u]_j$ à T_j . Ensuite, on ajoute aux précédentes contraintes des éléments triangulaires un vecteur contrainte ou un tenseur contrainte selon le cas, à chaque extrémité des segments de discontinuités. Deux cas peuvent en effet se présenter :

Cas 1. La fonction f_{nt} est *a priori* connue (comme dans le cas du critère de Coulomb), ou bien on peut l'exprimer analytiquement en injectant la condition de projection $v_{tt} = 0$ dans le critère initial. On ajoute alors à chaque extrémité du segment ij un vecteur $T = (\sigma_{nn}, \sigma_{nt})$, qui doit vérifier $f_{nt} \leq 0$;

Cas 2. Le critère f_{nt} est inconnu ou bien il n'est pas aisé à obtenir de façon analytique. Dans ce cas, on contourne la difficulté en adjoignant aux extrémités du segment de discontinuité un *tenseur* contrainte σ défini dans les axes (n, t) , tel qu'illustré sur la figure 7.3. σ_1 et σ_2 sont les tenseurs contraintes additionnels aux extrémités 1 et 2 du segment de discontinuité en vitesse.

En effet, la colonne de la variable σ_{tt} demeure nulle après implémentation de (7.5) ($T.[u] = \sigma_{nn}[u_n] + \sigma_{nt}[u_t]$), de sorte que la seconde relation en (7.3) est imposée par (7.10) qui entraîne $y^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$, qui n'est autre que la condition de projection de type « enveloppe ». Cette condition est vérifiée à l'optimum au moins à 10^{-11} près d'après la remarque de la section 4.2 au sujet des valeurs finales de F_d observées.

On peut ainsi allouer un *tenseur* σ comme variable sur le segment de discontinuité au lieu d'un *vecteur* contrainte, ce qui permet d'éviter d'avoir à utiliser la formulation explicite du critère dans le plan de Mohr f_{nt} , non évidente dans le cas du matériau de Guron comme déjà dit. De plus, si le matériau est isotrope, le critère s'exprime de façon identique quelle que soit l'orientation de la discontinuité. Finalement, la seule information concernant le matériau dont on ait besoin dans cette méthode cinématique est le critère de plasticité originel. Notons, pour rendre à César ce qui est à César, que cette caractéristique a été utilisée précédemment dans la formulation d'éléments finis fins de [14] dans le cas linéaire, sans explication claire toutefois.

Chapitre 8

Expérimentations en cinématique

8.1 Méthode cinématique mixte sur le problème-test du barreau encoché

Nous reprenons ici le problème illustré par la figure 5.1, et exposé à la sous-section 5.1. Le but a été de tester sur un problème concret les méthodes cinématiques mixtes exposées au chapitre 7, afin de déterminer et de comparer leurs fiabilité et efficacité respectives.

8.1.1 Le matériau de von Mises

Contrairement au cas statique, et en dépit de l'absence de lignes redondantes, il a été nécessaire d'introduire une légère perturbation (10^{-8}) sur la matrice H du système (4.18) même pour la version de l'algorithme MATLAB utilisant le solveur LU d'UMFPACK. Cependant, l'influence sur la solution finale, ainsi que le montre la post-analyse, demeurerait parfaitement négligeable.

Néanmoins, utiliser la méthode Cholesky du même package UMF-PACK sur cette même matrice perturbée s'est avéré plus rapide et plus efficace, et la plupart des tests de grande taille qui suivent ont utilisé cette méthode. Cela a permis à la méthode cinématique d'atteindre le même niveau de robustesse que l'approche statique dans tous les cas testés, pour des niveaux de temps CPU équivalents. Il est à noter par ailleurs que tous ont terminé en moins de 25 itérations.

Pour le code MATLAB en question, le critère d'arrêt imposé (c.-à-d. la tolérance sur la valeur maximale des normes des résidus F_p , F_{d_1} , F_{d_2} et F_c définis en (4.12) n'a pas dû être pris supérieur à 5×10^{-5} .

N	Cont. lin.			Discont. lin.		
	Var.	Contr.		Var.	Contr.	
		Lin.	Conv.		Lin.	Conv.
10	1 203	425	401	4 710	2 379	1 570
20	4 803	1 650	1 601	19 020	9 559	6 340
30	10 803	3 675	3 601	42 930	21 539	14 310
40	19 203	6 500	6 401	76 440	38 319	25 480
50	30 003	10 125	10 001	119 550	59 899	39 850
60	43 203	14 550	14 401	172 260	86 279	57 420
70	58 803	19 775	19 601	234 570	117 459	78 190

Tableau 8.1 — Barreau encoché, problèmes cinématiques : tailles des problèmes avec champ de vitesses *linéaires* continus et discontinus.

Après résolution, le vecteur w collectant les variables duales des contraintes linéaires donne en fait le champ de vitesses de déformation u C.A. recherché, comme cela est expliqué en détail dans le chapitre 7.

Champs de vitesses linéaires

Le champ de vitesses de déplacement varie ici linéairement dans le triangle, et est défini à partir des de la donnée des vitesses aux trois sommets dans le cas discontinu, aux trois nœuds dans le cas continu. Il n'y a qu'un seul tenseur contrainte par élément fini. Le tableau 8.1 énumère les tailles des problèmes résolus, les mêmes par ailleurs pour les problèmes Mises et Gurson. Pour un champ de vitesses virtuel linéaire — cf. tableau 8.2 —, le code MATLAB a été testé jusqu'à un maillage de 70×70 carrés, comme dans le cas statique à l'époque de ce test. On remarque que le résultat du cas discontinu $N = 30$ est déjà au niveau du cas continu $N = 70$ pour un temps de résolution bien moindre, ce qui montre que la formulation discontinue est plus efficace en termes de valeur optimale rapportée au temps de résolution. Notons également ici que le cas continu perturbé est résolu par le code MATLAB (Cholesky) en 25 itérations et 159 secondes, contre

N	Champ lin. cont.		Champ lin. disc.	
	Résultat	Temps	Résultat	Temps
10	1,23627	1 s	1,17619	10 s
20	1,18755	13 s	1,15817	2 min
30	1,17034	55 s	1,15085	11 min
40	1,16142	2 min 40 s	1,14683	30 min
50	1,15592	6 min 30 s	1,14427	1 h 15 min
60	1,15219	12 min	1,14249	1 h min
70	1,14948	26 min	1,14117	5 h 50 min

Tableau 8.2 — Le barreau encoché et le matériau de von Mises : résultats des problèmes cinématiques et statiques utilisant les champs de vitesse *linéaires* continus et discontinus, avec MATLAB. Configuration matérielle : PowerMac Apple G5 à 2 GHz de fréquence et avec 4,5 GB de RAM.

339 secondes sans perturbation (LU). De façon générale, le facteur limitant en terme de grandeur de maillage est seulement le temps, en raison de la robustesse de la formulation proposée.

Dans tous les cas traités, l'incompressibilité est vérifiée et s'avère en-deçà de 10^{-10} pour le matériau de von Mises, avec $c = 1$ et $L = N$ comme données d'entrées. La valeur optimale post-analysée, calculée à l'aide de la puissance analytique unitaire, égale le résultat obtenu par MATLAB avec une précision inférieure à 10^{-6} , donc remarquablement correcte.

Champs de vitesse quadratiques

Si on considère la taille des problèmes dans le tableau 8.3, on constate que le champ de vitesses virtuel quadratique continu pour $N = 30$ est équivalent à celui linéaire continu pour $N = 50$ (tableau 8.1).

Pour un matériau de von Mises (tableaux 8.2 et 8.4), le champ de vitesses virtuel quadratique continu pour $N = 30$ donne 1,15238

N	Champs quad. cont.			Champs quad. disc.		
	Var.	Contr.		Var.	Contr.	
		Lin.	Conv.		Lin.	Conv.
10	3 603	1 650	1 201	7 083	3 595	2 361
20	14 403	6 500	4 801	28 563	14 390	9 521
30	32 403	14 550	10 801	64 443	32 385	21 481
40	57 603	25 800	19 201	114 723	57 580	38 241
50	90 003	40 250	43 201	179 403	89 975	59 801
60	129 603	57 900	43 201	258 403	129 570	86 161
70	176 403	78 750	58 801	351 963	176 365	117 321

Tableau 8.3 — Le barreau encoché, problèmes cinématiques : tailles des problèmes avec les champs de vitesses *quadratiques*, continus et discontinus pour MATLAB.

en 7 min 12 s, tandis que le linéaire discontinu donne 1,15085 en 11 min 22 s. Cela montre que le champ quadratique continu est quasiment équivalent au champ linéaire discontinu, pour un maillage identique. Cette observation concorde avec la récente comparaison analogue effectuée en [19] qui utilisait la méthode cinématique directe classique pour le critère de Drucker-Prager formulé en termes de programmation conique du second ordre.

Dans le tableau 8.4, le champ quadratique discontinu pour $N = 30$ donne 1,14129 en 19 min 24 s, c.-à-d. quasiment le même résultat que le champ linéaire discontinu pour $N = 70$ (tableau 8.2), qui indique 1,14117 en 5 h 49 min. L'incompressibilité est à nouveau vérifiée à 10^{-10} près et la relation $[u_n] = 0$ sur les discontinuités est vérifiée à 10^{-8} près. Tous ces résultats amènent à conclure que la formulation cinématique proposée au chapitre 7 n'est pas seulement rigoureuse et efficace, mais également très robuste. Comme on pouvait s'y attendre, c'est l'approche quadratique discontinue qui fournit les meilleurs résultats, tant vis-à-vis des résultats que du temps CPU de résolution. Cela confirme tout l'intérêt des discontinuités dans la méthode cinématique duale.

N	Champs quad. cont.		Champs quad. discont.	
	Résultat	Temps	Résultat	Temps
10	1,19173	6 s	1,15837	25 s
20	1,16243	1 min 36 s	1,14579	5 min
30	1,15238	7 min	1,14129	20 min
40	1,14729	19 min	1,13897	1 h 10 min
50	1,14420	52 min	1,13754	1 h 10 min
60	1,14213	1 h 45 min	1,13658	8 h 20 min
70	1,14064	3 h 30 min	1,13588	16 h

Tableau 8.4 — Le barreau encoché et le matériau de von Mises, problèmes cinématiques : résultats des champs de vitesses *quadratiques* continus et discontinus, avec MATLAB. Configuration matérielle : PowerMac Apple G5 à 2 GHz de fréquence et avec 4,5 GB de RAM.

Résultats récents

À titre d'information, nous donnons dans le tableau 8.5 les résultats obtenus avec la configuration matérielle dont nous disposons actuellement (à savoir un Mac Pro Quad à 3 Ghz de fréquence, 4 GB de mémoire RAM, et MATLAB 7.4) et avec les améliorations récentes apportées à l'algorithme, matériel et améliorations qui ont déjà été évoqués et utilisés tous les deux dans la section 5.1 pour les tests de problèmes statiques. Le meilleur résultat cinématique obtenu en utilisant un champ de vitesses virtuel quadratique discontinu avec MATLAB est 1,13434, une valeur à comparer avec la meilleure borne inférieure obtenue en statique, 1,1315433. Rappelons la valeur « exacte » obtenue en [2] : 1,13156, par extrapolation de Richardson. La figure 8.1 donne le maillage déformé obtenu dans le cas $N = 110$, à comparer avec celui de Gurson dans les mêmes conditions donné à la section suivante.

Avec un maillage condensé vers le côté d'application de la charge, on obtient la valeur 1,13380 en 2 h 05 min, de sorte que l'encadrement

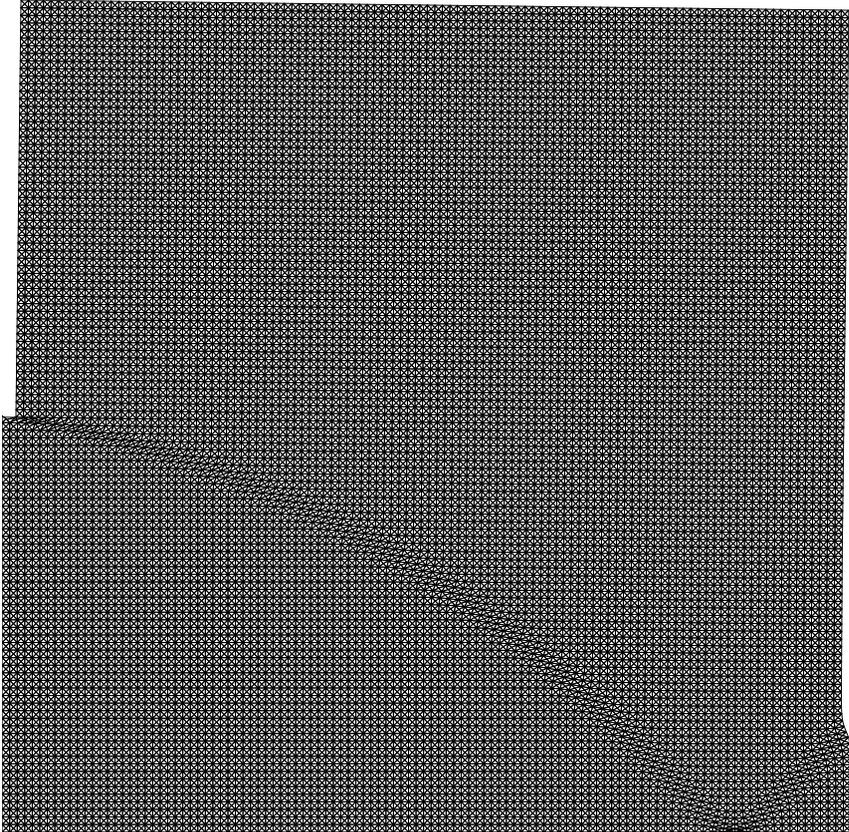


Figure 8.1 — Maillage déformé pour $N = 110$, matériau de von Mises, cas quadratique discontinu.

N	Var.	Contr.		Résultats	Temps
		Lin.	Conv.		
80	459 843	230 360	153 281	1,13538	35 min
90	582 123	291 555	194 041	1,13495	50 min
100	718 803	359 950	239 601	1,13462	1 h 05 min
110	869 883	435 545	289 961	1,13434	1 h 45 min

Tableau 8.5 — Le barreau encoché, problèmes cinématiques : tailles et résultats des problèmes récemment résolus avec les champs de vitesses *quadratiques discontinus* pour MATLAB 7.4. MacPro Apple à 3 GHz de fréquence et avec 4 GB de RAM.

final ressort à :

$$1,1315433 \leq \frac{p}{c} \leq 1,13380.$$

L'écart relatif est donc de 0,23 %.

8.1.2 Le matériau de Gurson

Nous allons maintenant tester le barreau encoché formé d'un matériau de Gurson : les contraintes non linéaires sont données par l'équation (2.25). Ce critère est convexe et régulier, et il est également partout borné, sauf si la porosité f est nulle, auquel cas il redonne en fait le critère de Mises. Par conséquent, il n'y a pas de conditions d'admissibilité plastique pour le champ de vitesses lorsque $f \neq 0$: tout champ de vitesse de déformation est P.A. Le critère de Gurson n'étant pas conique du second ordre, nous n'avons pas pu utiliser le code commercial MOSEK avec lui, et le fait que ce critère ne soit pas linéarisable de façon satisfaisante empêche l'utilisation d'une combinaison du genre BTN-XA. Par conséquent, seul le code MATLAB a été utilisé par la suite ici, comme prévu.

	Champs linéaires continus		Champs linéaires discontinus	
N	Résultat	Temps	Résultat	Temps
10	0,98523	1 s	0,93474	9 s
20	0,95149	10 s	0,92681	2 min
30	0,93965	44 s	0,92333	14 min
40	0,93354	2 min 30 s	0,92135	1 h
50	0,92978	5 min 40 s	0,92006	1 h 05 min
60	0,92723	12 min	0,91915	3 h 40 min
70	0,92539	24 min	0,91846	6 h 40 min

Tableau 8.6 — Le barreau encoché et le matériau de Gurson : résultats des problèmes cinématiques pour $f = 0,16$ pour des champs de vitesses *linéaires* continus et discontinus, avec MATLAB. Configuration matérielle : Power-Mac Apple G5 à 2 GHz de fréquence et avec 4,5 GB de RAM.

Champs de vitesse linéaires

Le tableau 8.6 donne les résultats obtenus pour la cinématique avec des champs de vitesses virtuels linéaires, continus et discontinus pour un taux de porosité f égal à 0,16. On obtient une borne cinématique de 0,92681 en 1 min 54 s. pour un maillage discontinu à $N = 20$. Cette valeur est à peu près la même que celle donnée à $N = 70$ pour l'approche continue, 0,92539 en 24 min 7 s. Or le problème discontinu pour $N = 20$ est de taille environ cent fois moins élevée que le problème continu pour $N = 70$; ceci met en lumière les avantages de l'utilisation des discontinuités, ce qui n'était pas immédiatement prévisible du fait qu'il n'y a pas ici de condition P.A. à respecter concrètement par l'écoulement plastique.

La figure 8.2 montre le champ des vitesses solution pour le problème cinématique avec un maillage 30×30 linéaire continu. Les plans de symétrie sont ici la moitié inférieure de la surface latérale gauche et la surface inférieure. On peut y constater que les composante u_n du champ de vitesse sont nulles.

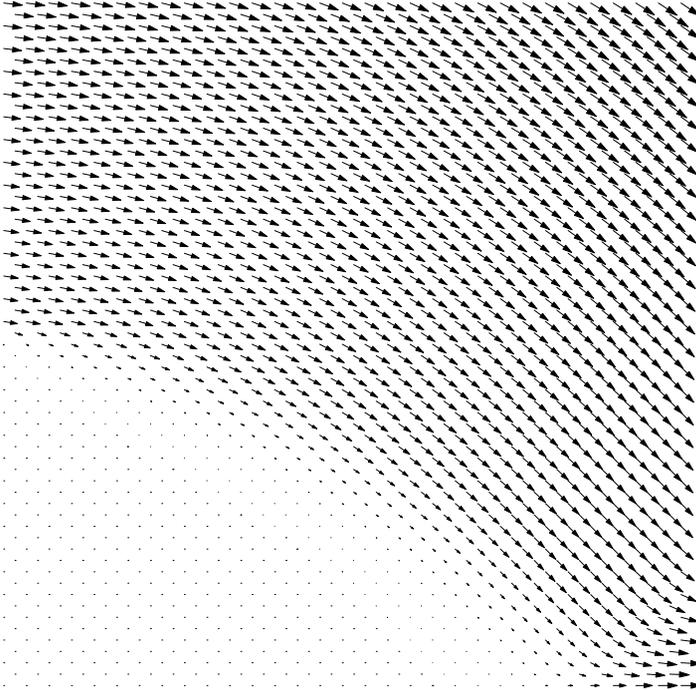


Figure 8.2 — Champ de vitesses sur un maillage 30×30 linéaire continu du quart supérieur droit du barreau encoché, critère de Gurson, $f = 0,16$.

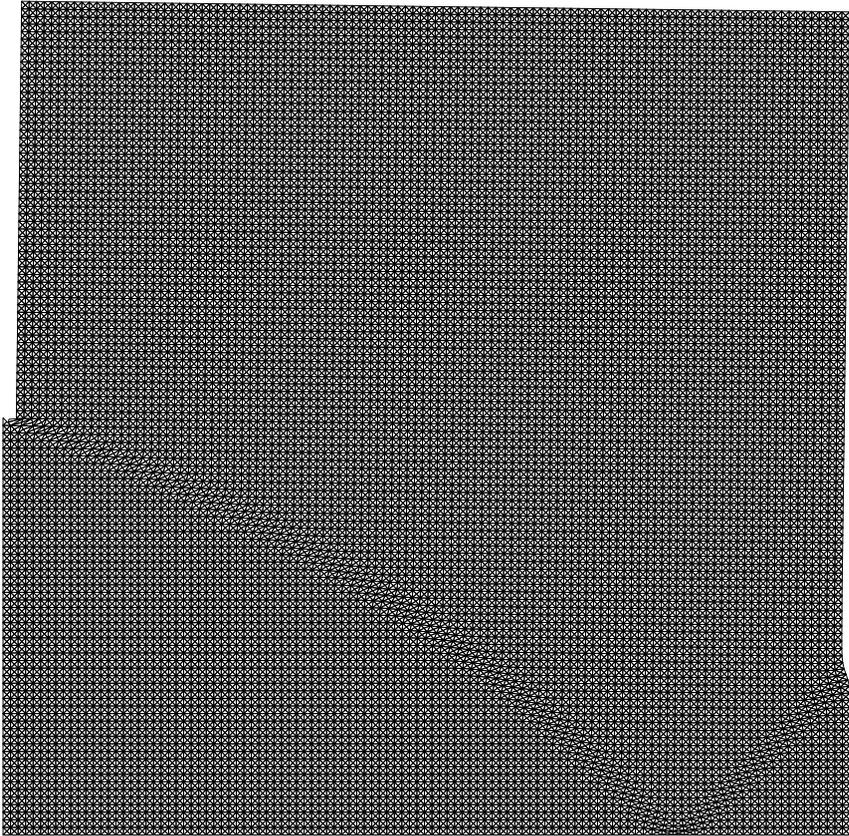


Figure 8.3 — Maillage déformé pour $N = 110$, matériau de Gurson, $f = 0,16$, cas quadratique discontinu.

N	Champs quadratiques. cont.		Champs quadratiques. disc.	
	Résultats	Temps	Résultats	Temps
10	0,95681	6 s	0,92590	6 s
20	0,93549	1 min 40 s	0,92018	5 min
30	0,92822	8 min 40 s	0,91805	24 min
40	0,92453	28 min	0,91700	1 h 15 min
50	0,92230	56 min	0,91622	3 h 20 min
60	0,92081	2 h 45 min	0,91574	7 h
70	0,91974	5 h	0,91540	12 h 30 min

Tableau 8.7 — Le barreau encoché et le matériau de Gurson, problèmes cinématiques : résultats pour $f = 0,16$ des champs de vitesse *quadratiques* continus et discontinus, avec MATLAB. Configuration matérielle : Power-Mac Apple G5 à 2 GHz de fréquence et avec 4,5 GB de RAM.

Champs de vitesse quadratiques

Les résultats cinématiques pour $f = 0,16$ sont donnés dans le tableau 8.7. En comparant les maillages quadratiques continus et discontinus, il apparaît que le champ discontinu pour $N = 10$ (0,92590 en 6 s) mobilise environ huit fois moins de variables et de contraintes et 300 fois moins de temps que le champ continu pour $N = 40$, pour un résultat équivalent (0,92453 en 27 min 43 s).

L'approche quadratique continue surpasse de très peu l'approche linéaire continue en termes de performances, pour un temps de résolution équivalent, mais pour une taille de problème nettement plus petite. Il convient également de noter que l'approche quadratique continue donne des résultats semblables à ceux de l'approche linéaire discontinue, comme pour le matériau de von Mises.

Pour $N = 70$, le maillage discontinu donne un résultat de 0,91549, la meilleure valeur cinématique obtenue à ce taux de porosité, très proche de la valeur statique obtenue pour $N = 70$ également, 0,91315. Finalement, pour le matériau de Gurson, le champ quadratique dis-

N	Var.	Contr.		Résultats	Temps
		Lin.	Conv.		
80	459 843	230 360	153 281	0,91513	5 h
90	582 123	291 555	194 041	0,91493	7 h 30 min
100	718 803	359 950	239 601	0,91476	8 h
110	869 883	435 545	289 961	0,91462	18 h

Tableau 8.8 — Le barreau encoché et le critère de Gurson, problèmes cinématiques : tailles des problèmes récemment résolus avec les champs de vitesses *quadratiques discontinus* pour MATLAB 7.4. Configuration matérielle : Mac Pro Apple G5 à 3 GHz de fréquence et avec 4 GB de RAM.

continu fournit les meilleurs résultats parmi toutes les formulations proposées, de façon encore plus nette que dans le cas du matériau de von Mises.

Résultats récents

Comme nous l'avons fait pour le critère de Mises dans la section précédente, nous donnons dans le tableau 8.8 les résultats les plus récents obtenus avec la configuration matérielle actuelle et l'algorithme amélioré sur le barreau encoché avec le critère de Gurson. Les tailles des problèmes résolus sont rappelées ici pour mémoire, mais sont bien entendu les mêmes que celles du tableau 8.5. La figure 8.3 donne le maillage déformé obtenu dans le cas $N = 110$, à comparer avec celui de Mises présenté dans la figure 8.1. Le meilleur résultat cinématique obtenu avec un maillage condensé comme précédemment est 0,91448, ce qui donne comme encadrement final :

$$0,91316 \leq \frac{p}{c} \leq 0,91448,$$

soit un écart relatif de 0,13 %.

8.1.3 Remarques finales

Le problème du barreau encoché aura donc été résolu avec MATLAB en utilisant aussi bien l'approche statique que l'approche cinématique. On constate que l'approche quadratique continue est à peu près équivalente à l'approche linéaire discontinue, d'autant que dans ce cas sans interface les deux approches peuvent être valablement comparées. Comme on devait s'y attendre, ce sont les champs de vitesses virtuels quadratiques discontinus qui s'avèrent les plus efficaces, ce qui confirme que lorsqu'elles peuvent être employées, les discontinuités sont toujours à privilégier.

Dans la section suivante, nous allons étudier un problème de formage d'un barreau de Gurson homogène en usant seulement de formulations quadratiques discontinues.

8.2 Un problème de formage : compression d'un barreau entre deux plaques rugueuses

8.2.1 Position du problème

Pour tester la méthode cinématique plus en profondeur, nous allons maintenant considérer à nouveau le problème du barreau comprimé entre deux plaques parfaitement rugueuses et rigides en déformation plane (section 5.2, figure 5.2), pour un rapport B/H égal à 2, avec les matériaux de Mises et Gurson, la plaque supérieure descendant à une vitesse verticale uniforme U_0 sous l'action d'une force verticale F . Le paramètre de chargement Q à optimiser est la pression moyenne $F/(Bc)$ et le vecteur vitesse généralisé est $q_d = U_0 Bc$. Rappelons qu'en raison de la symétrie du problème, on se contente de mailler un quart du barreau. Toujours comme en statique, chaque maillage sera étiqueté « $N_B \times N_H$ », par exemple le maillage à 32 triangles de la figure 5.2 est étiqueté 4×2 .

Remarquons que dans le cas continu (non considéré ici), il est impossible d'envisager l'éventualité d'un glissement sous la plaque, contrairement au cas discontinu où l'interface — autrement appelée « interface de friction maximale » — est considérée comme une ligne

$N_B \times N_H$	champs quadratiques discontinus		
	Variables	Contraintes.	
		linéaires	Convexes
80 × 40	230 640	114 920	76 880
100 × 50	360 300	179 650	120 100
120 × 60	518 760	258 780	172 920
140 × 70	706 020	352 310	235 340
160 × 80	922 080	460 240	307 360

Tableau 8.9 — Le barreau comprimé, problèmes cinématiques : tailles des problèmes pour champs de vitesses *quadratiques discontinus*, avec MATLAB.

de discontinuité dans le matériau. En statique, les résultats obtenus pour un problème avec matériau de Gurson à $f = 0,16$ ont été comparés en [25] avec ceux du matériau de von Mises en termes de temps de résolution et de robustesse, et repris et actualisés dans le présent chapitre 5.

Comme convenu, nous donnons ici les résultats pour des champs de vitesses virtuels quadratiques discontinus. Les tailles des problèmes considérés sont donnés dans le tableau 8.9. Le plus grand problème considéré (160×80) a 962 080 variables, 460 240 contraintes linéaires et 307 360 contraintes non linéaires. Bien que ce ne soit pas *a priori* nécessaire avec le critère de Gurson, il a aussi été fait usage avec ce critère de la perturbation sur H mentionnée en début de chapitre dans les plus grandes tailles de problème, pour pouvoir traiter ceux-ci avec succès et robustesse, le nombre d'itérations nécessaires n'ayant augmenté que lentement, jusqu'à atteindre 25.

La configuration matérielle utilisée ici (ainsi que pour les tests qui suivront désormais) a été le MacPro Quad à 3 Ghz de fréquence, 4 Go de mémoire RAM, avec MATLAB 7.4, avec l'implémentation MATLAB améliorée de notre algorithme.

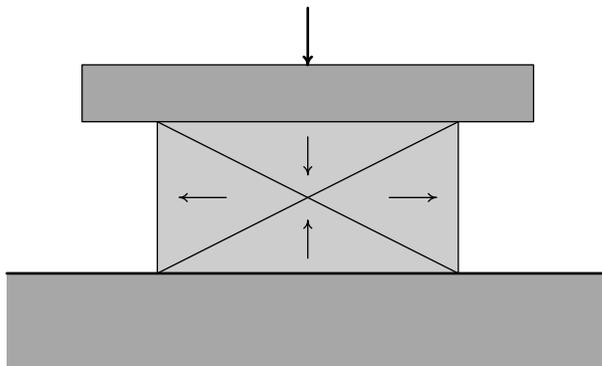


Figure 8.4 — Schématisation des directions d'écoulement plastiques observées sur le barreau comprimé.

8.2.2 Champ de vitesse quadratique : problème cinématique de von Mises

La première partie du tableau 8.10 donne les résultats cinématiques dans le cas de von Mises (c.-à-d. Gurson avec $f = 0$) pour des champs quadratiques discontinus. Rappelons que la meilleure valeur statique obtenue au chapitre 5 était 2,42627. Cette borne inférieure est à comparer à la meilleure borne cinématique obtenue ici avec le problème 160×80 , à savoir 2,43115, en ayant à l'esprit que la valeur exacte donnée en [44] est 2,42768.

La figure 8.6 donne le maillage déformé dans le cas le plus raffiné, à comparer avec celui de Gurson obtenu dans les mêmes conditions. On y constate du fait des symétries utilisées un mécanisme du type à quatre domaines, dont deux solidaires des deux plaques qui provoquent l'écoulement sensiblement horizontal des deux autres (figure 8.4).

On retrouve bien l'écoulement qu'illustre la figure 8.5 (maillage 20×10 sur le quart supérieur gauche de l'axe vertical dans le cas de cette figure, champ de vitesses linéaire continu) pour une porosité f nulle, où l'on a tracé les vitesses au centre de surface des éléments triangulaires.

Notons que l'approche cinématique directe linéarisée par mor-

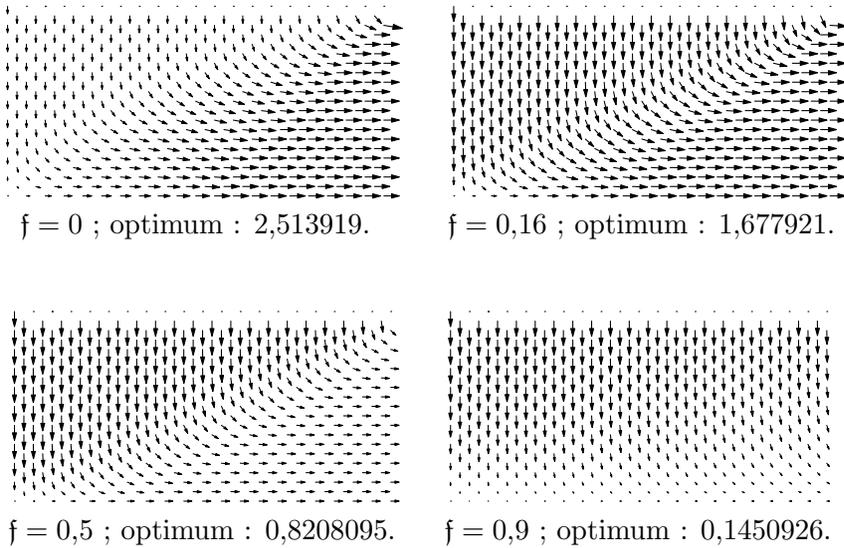


Figure 8.5 — Champs de vitesses linéaires continus sur un maillage 20×10 du quart supérieur droit du barreau comprimé, pour différentes valeurs de f .

$N_B \times N_H$	Mises		Gurson	
	Résultat	Temps	Résultat	Temps
80×40	2,43444	10 min	1,65279	9 min
100×50	2,43314	19 min	1,65235	2 h 20 min
120×60	2,43226	30 min	1,65205	4 h 15 min
140×70	2,43163	1 h	1,65183	13 h 15 min
160×80	2,43115	1 h 35 min	1,65167	11 h 30 min

Tableau 8.10 — Le barreau comprimé, matériaux de *Mises* et de *Gurson*, problèmes cinématiques : résultats pour champs de vitesses *quadratiques discontinus* avec MATLAB. Meilleur résultat statique pour *Mises* : 2,42627 (valeur exacte : $F/(Bc) = 2,42768$). Meilleur résultat statique pour *Gurson* : 1,65018.

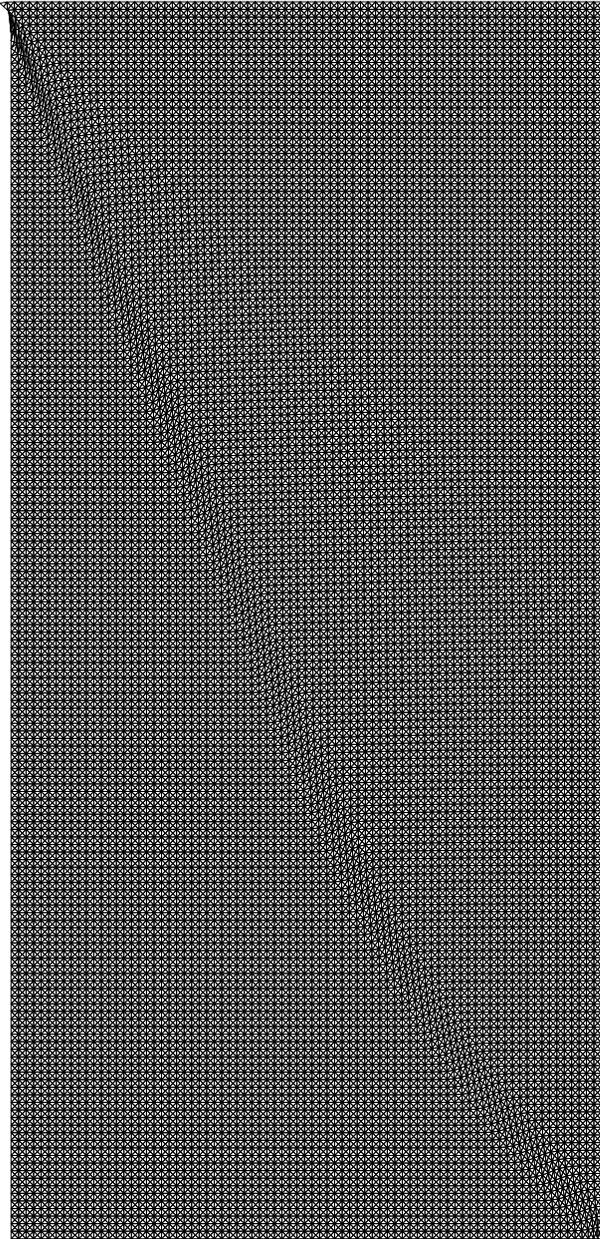


Figure 8.6 — Maillage déformé, barreau 160×80 , matériau de von Mises, cas quadratique discontinu.

ceaux de [37], utilisant la linéarisation BTN donne les valeurs cinématiques 2,47400, 2,45444 et 2,44696 pour respectivement les problèmes 20×10 , 40×20 et 60×30 .

En condensant le maillage 160×80 sous la plaque, on obtient un maillage non régulier qui donne la valeur 2,43013 en 1 h 35 min, de sorte que la fourchette finale est

$$2,42627 \leq \frac{F}{Bc} \leq 2,43013.$$

soit un écart relatif de 0,39 %.

8.2.3 Champ de vitesse virtuelle quadratique : problème cinématique de Gurson

On prend ici à nouveau $f = 0,16$. La meilleure valeur statique de $F/(Bc)$ obtenue au chapitre 5 pour le problème 200×100 est 1,65018 pour le matériau de Gurson. La partie droite du tableau 8.10 affiche les résultats pour des champs de vitesses quadratiques discontinus donc. Avec le maillage 160×80 , la valeur optimale, obtenue en 11 h 30 min, est de 1,65167. Avec le maillage condensé évoqué précédemment, la valeur tombe même à 1,65121 en 10 h de résolution, ce qui donne un encadrement final de

$$1,65018 \leq \frac{F}{Bc} \leq 1,65121.$$

Les deux résultats statique et cinématique diffèrent donc de 0,10 % seulement, une très bonne performance en analyse limite avec discrétisation en éléments finis. Il est clair que sur ce problème utiliser une technique de décomposition pour améliorer encore les résultats ne semble pas nécessaire, sauf évidemment à rechercher des temps de résolution nettement plus courts. La figure 8.7 donne le maillage déformé obtenu via le champ de vitesses optimales dont on rappelle qu'ici il est rigoureusement cinématique. On peut observer une plus nette différence entre les matériaux de von Mises et Gurson que dans le cas du barreau encoché, avec une zone de cisaillement intensif diagonale quasiment rectiligne et par suite un mécanisme proche de

celui du champ à quatre domaines déjà évoqué lors de l'étude avec le critère de von Mises.

8.3 Stabilité d'une fouille verticale : comparaison avec un code SOCP

Un problème classique en géotechnique est de prédire la stabilité d'un talus vertical de hauteur H uniquement soumis à son propre poids. Dans ce cas, le paramètre de chargement est défini par $Q_\gamma = \gamma H/c$. La meilleure borne inférieure connue à ce jour — 3,772 — se trouve dans [48], *via* une formulation en programmation non linéaire, et la meilleure borne supérieure — 3,782 — avait été calculée dans [38], en utilisant une approche cinématique linéarisée.

Ce problème est également particulièrement intéressant dans la mesure où il a mis en évidence la nécessité de contrôler l'admissibilité des champs solution. En effet, dans ce cas, parmi les méthodes traitées seul l'algorithme MATLAB a su donner des résultats précis : ainsi, l'incompressibilité dans le champ des triangles a été post-vérfiée à moins de $1,5 \times 10^{-7}$ et le saut de vitesse normale à moins de $1,1 \times 10^{-8}$ sur le plus grand problème traité sans décomposition (soit 96×96). En conséquence de quoi la valeur post-calculée de la fonctionnelle est précise au moins jusqu'à la sixième décimale.

Cela n'a pas été le cas, au contraire, lors de la résolution par MOSEK avec ses tolérances par défaut, avec ou sans utilisation de l'option de presolving. En effet, à partir de $N = 20$, MOSEK qualifie sa solution de « proche de l'optimum » (near optimal), alors que l'incompressibilité, comprise entre 2×10^{-3} et 3×10^{-4} , s'avère insuffisante, et entraîne une correction se traduisant par une augmentation non négligeable de la valeur optimale donnée par le code, 3,78 passant par exemple à 3,81. Plus ennuyeux est le fait qu'en modifiant le paramètre améliorant la précision demandée dans le cas $N = 80$, le code SOCP a donné plusieurs valeurs qualifiées d'optimales, mais différentes... Soumis à son concepteur, ce problème n'a pour l'instant pas reçu de solution.

Ce problème géotechnique apparaît donc particulièrement mal condi-

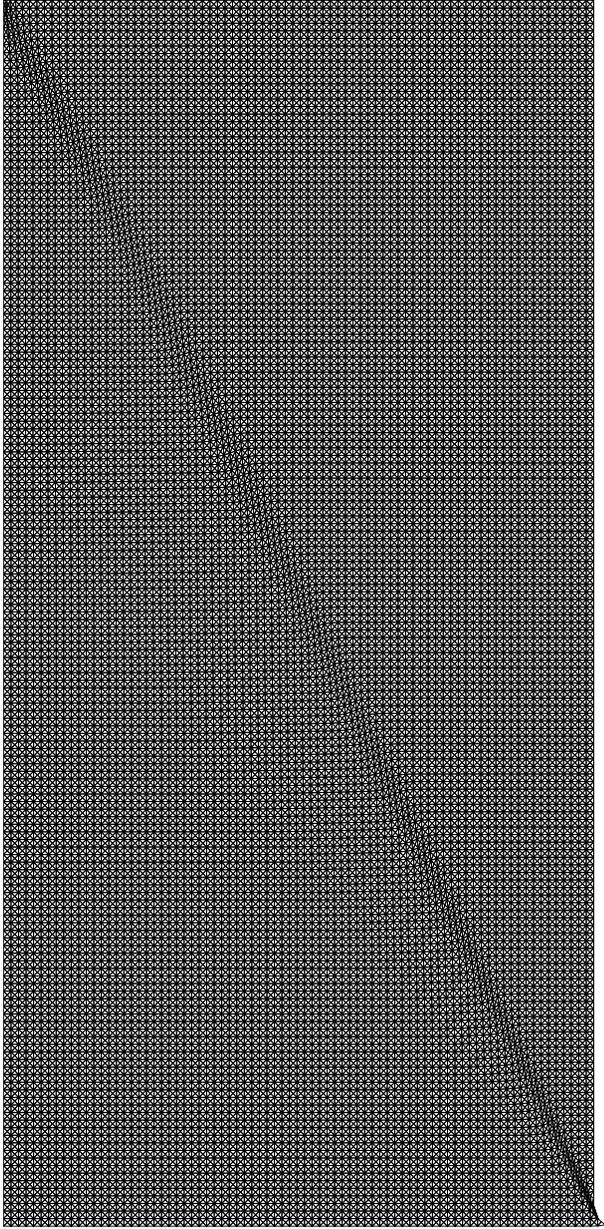
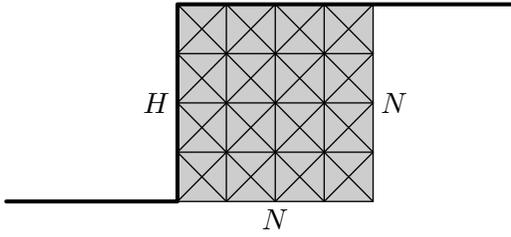


Figure 8.7 — Maillage déformé, barreau 160×80 , matériau de Gurson, cas quadratique discontinu.

Figure 8.8 — Le problème du talus vertical ($N = 4$).

N	10	20	30	40	50
$\gamma H/c$	3,80946	3,79272	3,78741	3,78429	3,78241
Temps CPU	10 s	45 s	2 min	4 min 40 s	10 min

N	60	70	80	90	96
$\gamma H/c$	3,78126	3,78050	3,77995	3,77953	3,77932
Temps CPU	17 min	35 min	40 min	1 h 5 min	1 h 30 min

Tableau 8.11 — Le talus von Mises/Tresca résolu par le code MATLAB. Champs de vitesses quadratiques discontinus.

tionné pour ce type d'algorithme, en dépit du fait que les matrices engendrées par la méthode cinématique duale sont à plein rang-lignes, que leurs variables sont libres et qu'elles sont chacune spécifiques à un élément fini.

Le tableau 8.11 indique les résultats obtenus avec les champs de vitesse quadratiques discontinus, pour N allant de 10 à 96, ainsi que les temps de résolution, arrondis. Dans ce dernier cas, le problème — à 774 144 variables, 368 639 contraintes linéaires et 258 048 contraintes non linéaires — est résolu par MATLAB en 28 itérations et environ une heure et demie sur le MacPro Apple à 3 Ghz avec la récente version 7.4 de l'environnement MATLAB. La figure 8.9 montre le maillage déformé correspondant à ce dernier cas $N = 96$. On peut remarquer que le mécanisme de ruine n'est pas dû à une ligne de glissement seule, mais plutôt à un mécanisme de mince zone de dissipation. Rappelons au passage que les frontières maillage-sol ont été

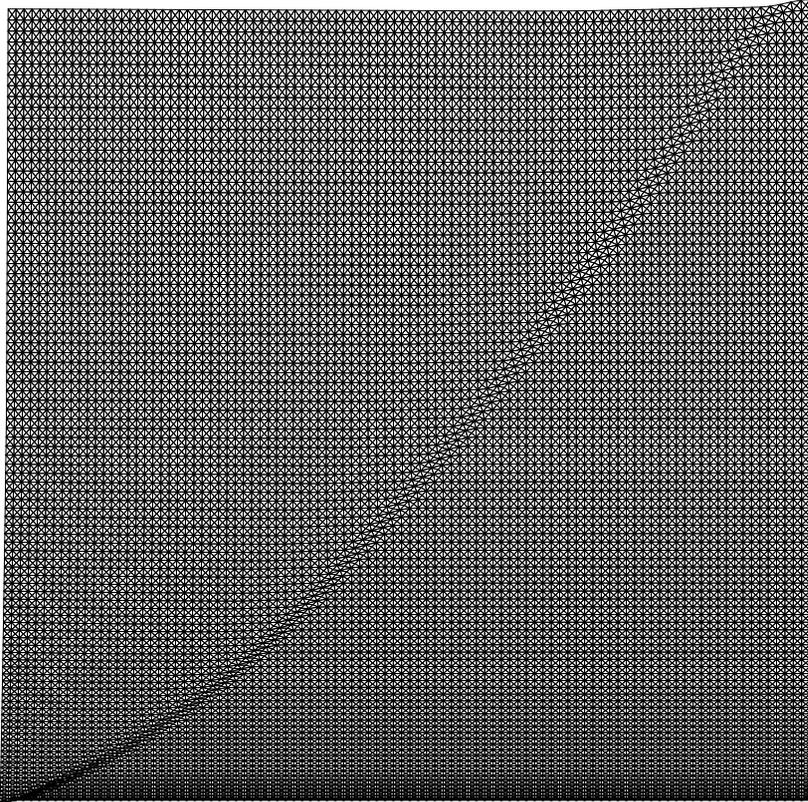


Figure 8.9 — Talus vertical. Maillage $N = 96$ déformé.

modélisées comme des surfaces de discontinuité (ou, de façon équivalente, comme des interfaces parfaitement rugueuses) ; ajouter sous le maillage une couche de substratum ne sert à rien ici car la zone au-dessous de la zone cisailée reste immobile, comme on peut le voir sur la figure.

Pour conclure, la charge limite $\gamma H/c$ vérifie $3,772 \leq \gamma H/c \leq 3,7793$, soit le meilleur encadrement obtenu avant décomposition.

8.4 Conclusion

Basées sur les propriétés de convexité du domaine des vitesses admissible et des puissances dissipées volumiques, les méthodes proposées, statique et cinématique, permettent d'obtenir des bornes rigoureuses sur les charges limites d'un problème mécanique, en utilisant à chaque fois les champs de contraintes comme variables. Elles ont ici été utilisées pour donner des solutions au problème d'un barreau encoché de von Mises et de Gurson soumis à traction uniforme, au problème d'un barreau comprimé entre deux plaques rigides, et finalement pour améliorer la borne supérieure de la charge limite d'un talus vertical von Mises-Tresca. La méthode cinématique mixte proposée, n'exigeant que le critère de plasticité comme information sur le matériau, s'avère ici aussi efficace que la méthode statique, particulièrement lorsqu'elle utilise des champs de vitesse quadratiques discontinus

Le code MATLAB concernant la méthode cinématique nécessite une perturbation de l'ordre de 10^{-8} sur la diagonale de la matrice-clé du système, aussi bien pour Mises, comme on l'a vu pour améliorer le rendement, que (de façon plus inattendue) pour Gurson. Pour le critère de Mises, à l'exception remarquable du talus vertical, MOSEK est notoirement plus rapide que le code MATLAB, en raison de la possibilité d'appliquer la programmation conique du second ordre. Cependant, le cas du talus vertical a montré que sur des problèmes de grande taille, une post-analyse est nécessaire pour confirmer la validité du résultat, validation qui n'était, comme on l'a vu, pas toujours au rendez-vous dans le cas du code SOCP. Ce qui n'était

pas le cas du code MATLAB, montrant par là l'utilité d'avoir un code plus léger et plus adaptable au problème considéré.

Il faut également souligner ici que la méthode cinématique duale proposée permet d'appliquer plus d'un critère de plasticité sur un point donné du maillage : cela pourrait permettre de résoudre un certain nombre de problèmes causés par les singularités du critère originel, et ce sans régularisation. Qui plus est, cette possibilité n'est pas disponible sur les codes commerciaux.

Chapitre 9

Approche par décomposition et méthode cinématique mixte

La place toujours croissante requise en mémoire pour résoudre un problème d'analyse limite, amène à la recherche de méthodes de calcul permettant d'économiser autant que possible cette place mémoire. Inspirée de l'idée générale de décomposition mise à l'honneur par Dantzig et Wolfe dans les années 1960, une méthode basée sur la division du maillage du solide étudié a été mise au point, sans qu'elle ne relève pour autant de ce l'on appelle « décomposition de domaine » qui est présenté de manière très claire dans la référence [43]. De plus, le cas des problèmes d'optimisation ne semble pas avoir fait l'objet d'application de ces techniques, y compris dans les références les plus récentes comme [56] qui fait un point très complet sur l'état de l'art sur cette question.

Sur le plan de l'analyse limite, à notre connaissance, cette technique ne semble avoir été utilisée que dans la référence [13] pour la méthode cinématique classique. Dans cet article le traitement du problème revient à résoudre successivement les sous-problèmes résultant du découpage sans chevauchements (sans « overlapping »), mais rien n'est dit sur la manière de mettre à jour les données aux interfaces. *A contrario*, la présente méthode procède par décomposition récursive avec, à chaque niveau de décomposition, autant de problèmes auxiliaires que d'interfaces pour actualiser les valeurs des variables cinématiques propres à ces interfaces. Et comme on le verra, deux itérations au plus suffisent en pratique.

La méthode est exposée ici dans son application à la méthode ciné-

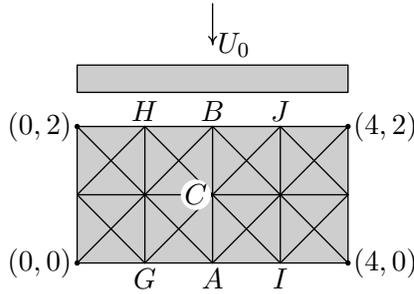


Figure 9.1 — Le problème cible.

matique « mixte », puis nous donnerons les résultats de son application détaillée au cas traité en approche directe au chapitre précédent.

9.1 Présentation de l'approche décomposition

La méthode a été mise au point tout d'abord dans le cas linéaire continu pour les champs de vitesses ; elle est donc illustrée sur le problème du barreau dont le quart supérieur gauche est maillé en 4×2 carrés comme représenté à la figure 9.1. Les vitesses varient donc linéairement et continûment sur chaque interface. La plaque indéformable « descend » sur le barreau à la vitesse verticale uniforme U_0 , sous l'action d'une force centrée F . Le matériau est de von Mises, toujours homogène et isotrope. L'interface plaque-matériau est de type parfaitement collée ; plus précisément le matériau est solidaire de la plaque à l'interface (le cas à interface frottant sera vu plus loin). Ce problème comporte donc un seul paramètre de chargement F associé au paramètre cinématique $q = U_0$. Ce paramètre de chargement cinématique sera le même pour les sous-problèmes du fait du partage vertical du maillage, caractéristique simplificatrice comme on le verra.

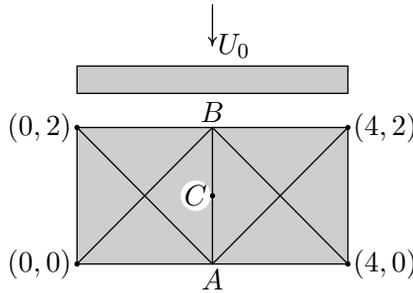


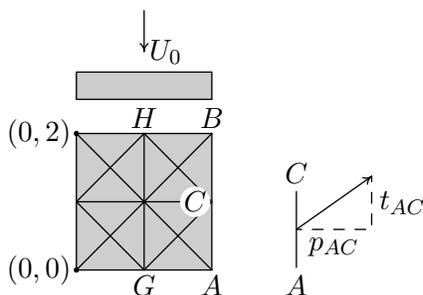
Figure 9.2 — Le problème de départ.

9.1.1 Le problème de départ

Concrètement il a pour but d'obtenir une initialisation performante des vitesses aux interfaces séparatives. En l'absence d'une telle possibilité, ces vitesses d'interface peuvent être déduites d'une solution analytique simple, compatible avec les liaisons, les symétries et le chargement éventuels. On commence donc par résoudre le problème 2×1 sur le même barreau (figure 9.2) La résolution de ce premier problème, qui ne sert qu'une fois, donne les vitesses en A , B , C , respectivement u^A , u^B et u^C qui serviront de conditions aux limites des problèmes Π_g et Π_d . Les vitesses en C sont calculées par interpolation linéaire à partir des vitesses en A et B , du fait de la variation linéaire imposée des degrés de liberté en vitesse dans les triangles, et donc sur leurs bords. Notons enfin qu'une solution complète de départ pourrait être extrapolée pour les deux sous-problèmes suivants, mais il est connu qu'elles sont ici moins efficaces que dans le cas des algorithmes de type simplexe ; nous n'avons donc pas testé cette possibilité.

9.1.2 Problème « de gauche »

Il est représenté à la figure 9.3 ci-après. On note respectivement l_{AC} et l_{BC} les longueurs des côtés AC et BC (égales sur cet exemple), p_{AC} et t_{AC} les valeurs de σ_{xx} et σ_{xy} sur le côté AC , et p_{BC} et t_{BC} leurs valeurs sur le côté BC .

Figure 9.3 — Le problème « de gauche » Π_g .

Définition des paramètres de chargements Explicitons la puissance des efforts extérieurs P_{ext} en supposant un vecteur contrainte uniforme sur le segment d'interface. Cela donne :

$$\begin{aligned} P_{\text{ext}} &= FU_0 + \int_{AC} pu_x dy + \int_{CB} pu_x dy + \int_{AC} tu_y dy + \int_{CB} tu_y dy \\ &= FU_0 + p_{AC}l_{AC} \frac{u_x^A + u_x^C}{2} + p_{CB}l_{CB} \frac{u_x^C + u_x^B}{2} \\ &\quad + t_{AC}l_{AC} \frac{u_y^A + u_y^C}{2} + t_{CB}l_{CB} \frac{u_y^C + u_y^B}{2}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

En réordonnant (9.1) selon les composantes des vitesses aux points A , B et C , on obtient donc au total six paramètres cinématiques q_i en sus de U_0 .

La définition des paramètres consiste donc à définir en chaque point nodal d'interface un paramètre cinématique q_i égal à la composante de la vitesse de déplacement imposée au nœud en question. Comme on l'a vu en section 7.2, à l'optimum l'égalité des q_i avec les $(q_d)_i$ entraînera que les vitesses d'interface seront bien égales aux vitesses imposées. Il suffit donc de définir la fonctionnelle de notre problème comme suit, dans le cas de la figure 9.3 :

$$P_{\text{ext}} = FU_0 + Q_1 u_x^A + Q_2 u_y^A + Q_3 u_x^C + Q_4 u_y^C + Q_5 u_x^B + Q_6 u_y^B. \quad (9.2)$$

Les paramètres Q_i ainsi définis résultent en fait de la définition M.E.F. des forces ponctuelles aux nœuds *via* l'équivalence des puissances virtuelles développées le long des éléments d'interface par une

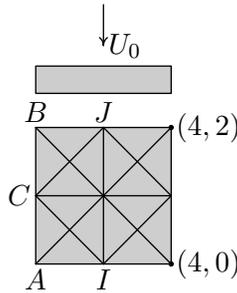


Figure 9.4 — Le problème « de droite » Π_d .

distribution du vecteur contrainte de même variation que celle du tenseur vitesse de déformation dans les éléments, soit ici une distribution uniforme sur le segment d'interface.

Dans le cas quadratique et continu en vitesses comme plus loin, nous aurons trois nœuds par segment d'interface et une distribution affine du vecteur contrainte, soit onze paramètres de chargement en tout. Dans le même cas, mais discontinu, nous aurons six nœuds différents sur l'interface, soit treize paramètres de chargement en tout. Le calcul de P_{ext} sera bien exact puisque l'intégration de type Simpson l'est dans le cas de variation cubique de l'intégrande le long du segment, en utilisant les valeurs aux extrémités et au milieu du segment.

La relation (9.1) donne la fonctionnelle à maximiser pour le problème Π_g : on la note $FU_0 + Q_i q_i$ selon la convention de sommation sur les indices répétés expliquée au chapitre 2. Elle est égale à la puissance dissipée en Π_g . Les variables (F, Q_i) sont les paramètres de chargement de ce problème, au nombre de sept selon (9.2).

9.1.3 Problème « de droite »

Il est représenté à la figure 9.4. Cette fois les vitesses u^A, u^B, u^C sont imposées à gauche du maillage. Ce problème est du même type que celui qui précède, sauf l'apparition de contraintes de symétries à

droite. Nous avons comme précédemment :

$$P_{\text{ext}} = QU_0 + p'_{AC}l_{AC} \frac{u_x^A + u_x^C}{2} + p'_{CB}l_{CB} \frac{u_x^C + u_x^B}{2} + t'_{AC}l_{AC} \frac{u_y^A + u_y^C}{2} + t'_{CB}l_{CB} \frac{u_y^C + u_y^B}{2}, \quad (9.3)$$

et, en réordonnant selon les composantes des vitesses :

$$P_{\text{ext}} = FU_0 + Q'_1 u_x^A + Q'_2 u_y^A + Q'_3 u_x^C + Q'_4 u_y^C + Q'_5 u_x^B + Q'_6 u_y^B = FU_0 + Q'_i q_i \quad (9.4)$$

Le maximum de P_{ext} est bien la puissance dissipée en Π_d , puisque égal à $\int \sigma : v dV$, où les v sont associés aux σ à l'optimum, ce qui signifie qu'ils sont plastiquement admissibles, et puisqu'ils étaient d'office cinématiquement admissibles. La solution est donc bien une solution cinématique admissible ; il en va de même pour Π_g .

Notons que les paramètres Q_i et Q'_i n'ont pas exactement les mêmes valeurs finales : elles ne seraient égales que si pouvait décrire tous les u possibles, ce qui, même avec un maillage gigantesque, ne sera jamais garanti. Ce n'est en effet que lorsque tous les u ont été envisagés qu'on aura la solution exacte, et que l'équilibre des Q_i sera assuré.

Néanmoins, le raccordement point nodal par point nodal de l'interface de la solution de Π_g avec celle de Π_d donne un champ de vitesses parfaitement admissible pour le problème global, dont la puissance dissipée n'est autre que la *somme* des $P_{\text{diss}}^{\Pi_g}$ et $P_{\text{diss}}^{\Pi_d}$, c'est-à-dire la somme des valeurs optimales des deux sous-problèmes. Elle est de plus inférieure (ou égale) à la puissance dissipée du problème de départ.

On ne peut cependant pas réitérer tel quel le processus : les vitesses à l'interface seraient alors inchangées, ce qui limiterait l'intérêt de la méthode. D'où l'idée de la phase III, permettant de « débloquer » ces vitesses à l'interface.

9.1.4 Phase III

Préalablement à la phase III, illustrée à la figure 9.5, on stocke dans un fichier externe les valeurs optimales en GH obtenues avec

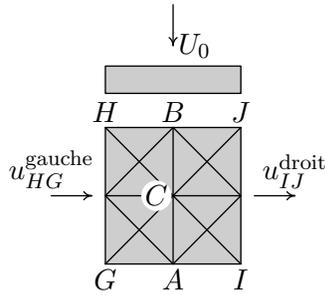


Figure 9.5 — Le problème « central » III.

Π_g , et dans un autre fichier celles de IJ obtenues avec Π_d . La solution de ce problème III, obtenue de manière tout-à-fait analogue au précédent mais avec les paramètres de chargement correspondant aux côtés HG et IJ (soit treize en tout, avec F), donne de nouvelles valeurs de vitesses nodales à l'interface ACB . On a ainsi avec cette technique relaxé ladite interface, *la puissance dissipée décroissant à chaque étape*.

Puis on retourne en phase II avec les nouvelles valeurs sur ACB et les itérations courantes consistent en : $\text{III} + \Pi_g + \Pi_d$, l'ensemble de ces trois itérations constituant ce qu'on appellera une « itération globale ».

9.2 Mise au point et exploitation

La mise au point a été conduite sur le cas du barreau ci-dessus pour les champs de vitesses continus.

9.2.1 Cas du barreau comprimé

Décomposition de niveau 1

La méthode est testée ici pour le problème du barreau cible (figure 9.1) maillé cette fois avec 64×32 carrés réguliers de 4 triangles, avec problème de départ à 32×16 . Nous avons choisi ce maillage comme un bon compromis efficacité/temps de calcul, compte tenu

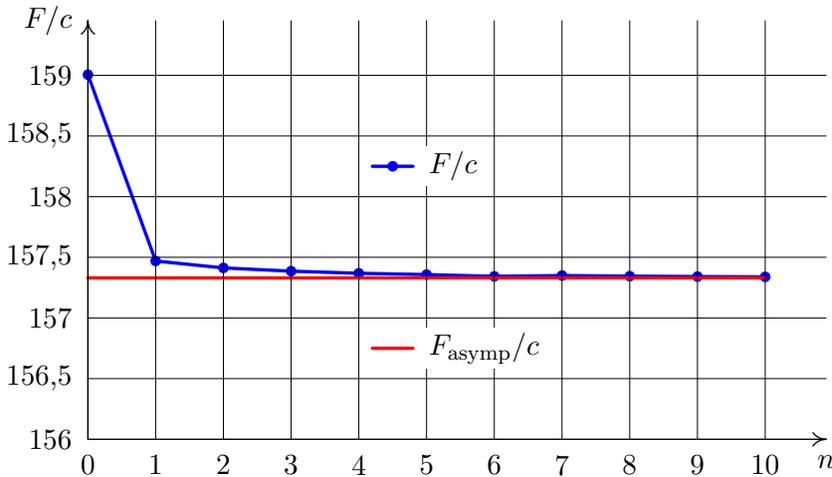


Figure 9.6 — Variation de F/c en fonction du nombre n d'itérations.

du nombre de calculs à effectuer, et ceci d'autant plus que la cas continu est traditionnellement délicat en cinématique classique où ils donnent lieu à des phénomènes de blocage (« locking ») pour le matériau de von Mises et sa condition P.A. d'incompressibilité.

La figure 9.6 donne l'évolution du ratio F/c depuis la valeur de départ (159,01) en fonction du nombre d'itérations jusqu'à la meilleure valeur obtenue qui est de 157,339. Chacun des trois sous-problèmes est ici un 32×32 . La résolution directe du problème cible donne la valeur asymptotique (157,33), la solution exacte (155,37) étant due à J. Salençon. Un deuxième niveau de décomposition donne des valeurs légèrement moins bonnes, d'autant moins évidemment que le problème de départ est davantage raffiné.

Décomposition de niveau 2

Le maillage cible est toujours le cas 64×32 qui donne une valeur de la force optimale sur la plaque de 157,33 en 1030 s, pour une cohésion d'une unité ainsi qu'elle a été fixée systématiquement.

Les problèmes II sont eux aussi décomposés en deux : le problème

Itération	1	2	3	4	Itération
Départ	159,0051	41,7815	41,7128	41,6814	III _g
		36,6723	36,6817	36,6915	III _d
		41,5183	41,5467	41,5486	III _c
Temps	66 s	343 s	387 s	70 s (pt init.)	Temps
II _{gg}	33,4242	42,3162	42,2861	42,2724	
II _{gd}	40,1507	41,6370	41,6215	41,6215	
II _{dg}	41,5851	40,1323	40,1462	40,1462	
II _{dd}	42,4637	33,4320	33,4309	33,4309	
F_{tot}	157,6238	157,5176	157,4847	157,4627	
Temps	350 s	430 s	357 s	243 s (pt init.)	

Tableau 9.1 — Barreau comprimé 64×32 : résultats de la décomposition de niveau 2 sur le barreau.

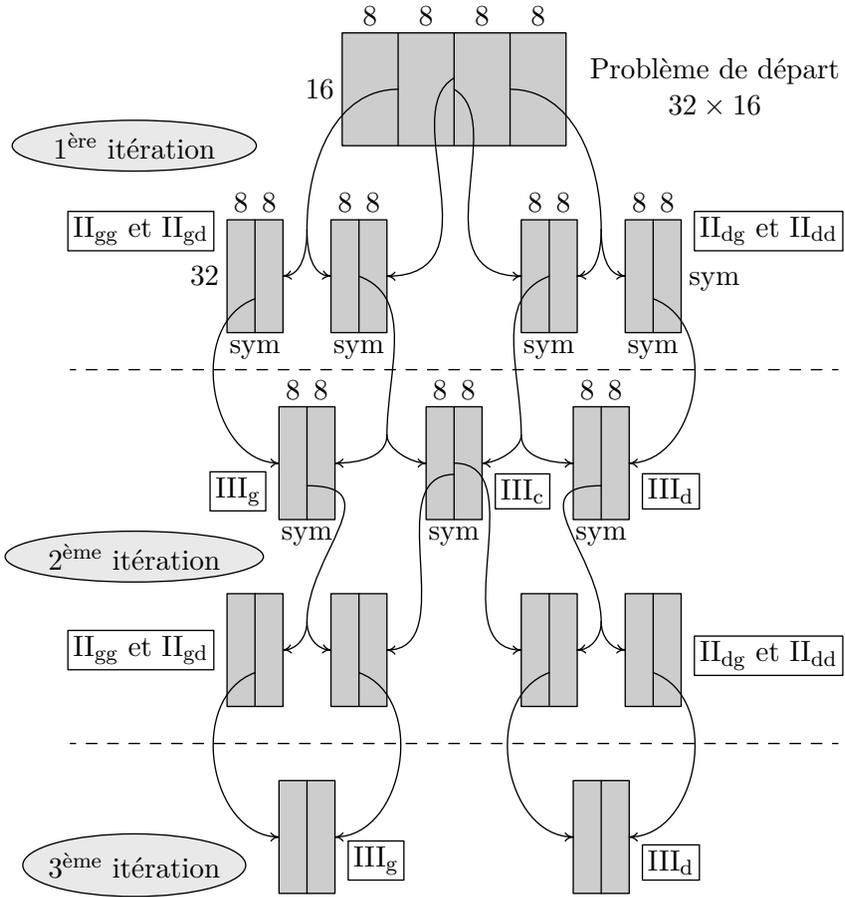
II_g en un problème de gauche II_{gg} et un problème de droite II_{gd}, le problème II_d en un problème de gauche II_{dg} et un problème de droite II_{dd}. D'où la création d'un problème milieu III_g pour les problèmes II_{gg} et II_{gd}, d'un problème milieu III_d pour les problèmes II_{dg} et II_{dd}, et enfin un problème III_c ou central qui actualise l'interface centrale. Tous les problèmes concernent un maillage 16×32 , seules changent les vitesses imposées aux frontières d'un cas à l'autre. Le processus est illustré à la figure 9.7.

Les résultats du tableau 9.1 sont à comparer à ceux obtenus par décomposition de niveau 1 à la fin de l'itération 1 :

$$F = 157,469504 \text{ en } 533 \text{ secondes,}$$

alors que le problème cible donne 157,33 en 1030 s.

On remarque qu'il faut trois itérations au niveau 2 pour retrouver la valeur obtenue dès la première au niveau 1, le problème de départ étant le même dans les deux cas. Par ailleurs, à l'itération 4, nous avons utilisé la solution précédente comme point initial pour l'algorithme d'optimisation sous MATLAB : on peut voir qu'on a intérêt à utiliser la solution précédente dès la première itération. Cette efficacité s'explique par le fait qu'à partir de l'itération 1 seule change

Figure 9.7 — Décomposition de niveau 2 du barreau 64×32 .

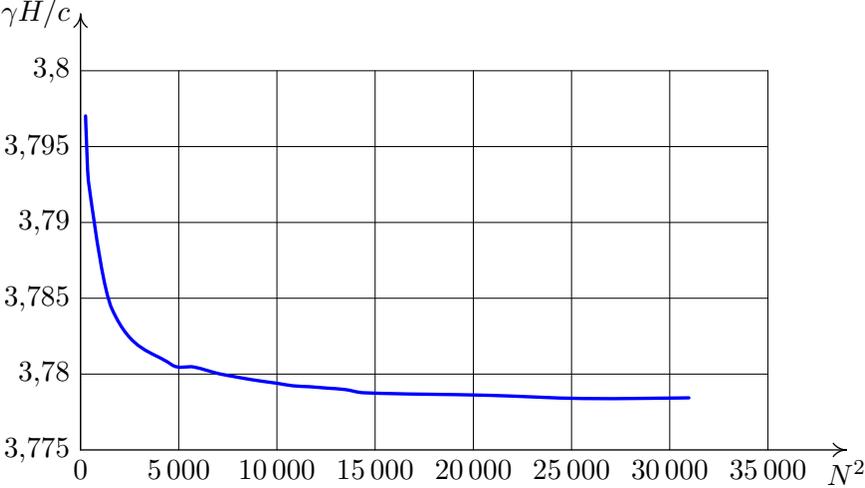


Figure 9.8 — Talus vertical. $\gamma H/c$ en fonction de la taille du maillage.

la fonctionnelle d’une itération à l’autre : la solution en contraintes vérifie les conditions linéaires aussi bien que les non linéaires.

9.2.2 Cas du talus vertical

Position du problème

Cette fois la méthode est appliquée au cas « maximal », à savoir l’approche quadratique discontinue du problème du talus vertical de Tresca, de hauteur H et de cohésion c , pour lequel la meilleure solution cinématique était $\gamma H/c = 3,782$ ([39]). Le maillage utilisé est carré est comporte $N \times N$ rectangles à quatre triangles (figure 8.8). La figure 9.8 donne l’évolution de $\gamma H/c$ en fonction du nombre de rectangles. Dans un premier temps le maillage global est optimisé sous une forme assez peu discrétisée pour ajuster les exposants des élévations à la puissance (portant sur les cotes exprimées en pourcentage).

Ensuite, au contraire du cas précédent, ce maillage optimisé est

décomposé en tranches horizontales de même taille. En effet, l'essai avec un découpage vertical a montré que l'absence d'écoulement libre possible pour le sous-problème le plus à droite en découpage vertical était préjudiciable en matière de temps de calcul.

Dans le cas présent, le paramètre cinématique q_γ n'est plus le même pour chaque sous-problème, contrairement au cas du barreau où la plaque appuyait avec la même vitesse sur tous les sous-problèmes. *Via* la post-analyse, à chaque étape, on envoie à chaque sous-problème de type II son quota de q_γ calculé à partir du champ solution du problème de départ ou du (des) problème(s) III ; même chose pour l'envoi des problèmes II vers les problèmes III. Le total des q_γ élémentaires reste constant et égal à la valeur initiale imposée au problème de départ (1000 dans les essais). Le maillage complet reste le même, carré et de taille $N \times N$.

Détails des essais

De $N = 16$ à 96 , la résolution est directe ; le maillage déformé du cas $N = 96$ est donné en fin du chapitre précédent. Au-delà de cette taille, pour $N = 100$, la subroutine Cholesky utilisée sous MATLAB n'a pas assez de 4 gigaoctets de mémoire vive du fait de la taille trop grande du système linéaire à résoudre. Par suite, de $N = 100$ à 120 , le problème est donc décomposé en deux sous-problèmes. Pour $N = 120$, deux itérations de la décomposition sont conduites (départ-haut-bas, puis III-haut-bas), lesquelles donnent les résultats suivants :

- problème de départ ($N \times N = 60 \times 60$) : $\gamma H/c = 3,78126$;
- itération 1 : $\gamma H/c = 3,77889$;
- itération 2 : $\gamma H/c = 3,77876$.

Notons ici que les cinq décimales sont garanties du fait de la post-analyse.

L'amélioration apportée par la deuxième itération est de $3,510^{-5}$ en valeur relative. . . Il est clair que, au moins pour ce problème sur lequel nous avons testé à fond la méthode mixte, la première itération est suffisante dès l'instant que les maillages des sous-problèmes sont suffisamment raffinés. Ceci est à mettre à l'actif du caractère

N	Résultats	Niveau	Itérations
100	3,77939	1	1
104	3,77923	1	1
108	3,77916	1	1
112	3,77906	1	1
116	3,77898	1	1
120	3,77876	1	2
144	3,77860	2	1
160	3,77838	2	1
176	3,77843	2	1

Tableau 9.2 — Résultats de la décomposition appliquée sur le talus vertical.

discontinu des champs pour lesquels l'optimisation, même à maillage grossier, n'a jamais eu de problème.

Pour $N = 144, 160$ et 176 , les deux sous-problèmes sont eux-mêmes décomposés en deux, soit une décomposition de niveau deux, ou première application de récursivité. La valeur finale, dûment post-analysée, donne $\gamma H/c = 3,77843$, pour un temps de calcul de 1 h à 6 h environ par sous-problème. Pour information, le problème cible 176×176 (123 904 triangles quadratiques) comporterait 2 230 272 variables, 1 486 848 conditions linéaires et 743 424 conditions non linéaires !

Présentation des résultats et discussion

La figure 9.9 montre les déformées respectives des quatre sous-problèmes du problème 176×176 . La figure 9.10 donne la déformée obtenue après avoir assemblé celles de ces quatre sous-problèmes, déformée que l'on peut comparer à celle obtenue en traitement direct au chapitre précédent pour $N = 96$, maillage pour lequel nous avons obtenu $\gamma H/c = 3,77932$. Il est intéressant de noter la progressivité de la puissance dissipée — rapportée à l'aire du maillage — dans chacun des quatre sous-problèmes, celui du pied dissipant deux fois

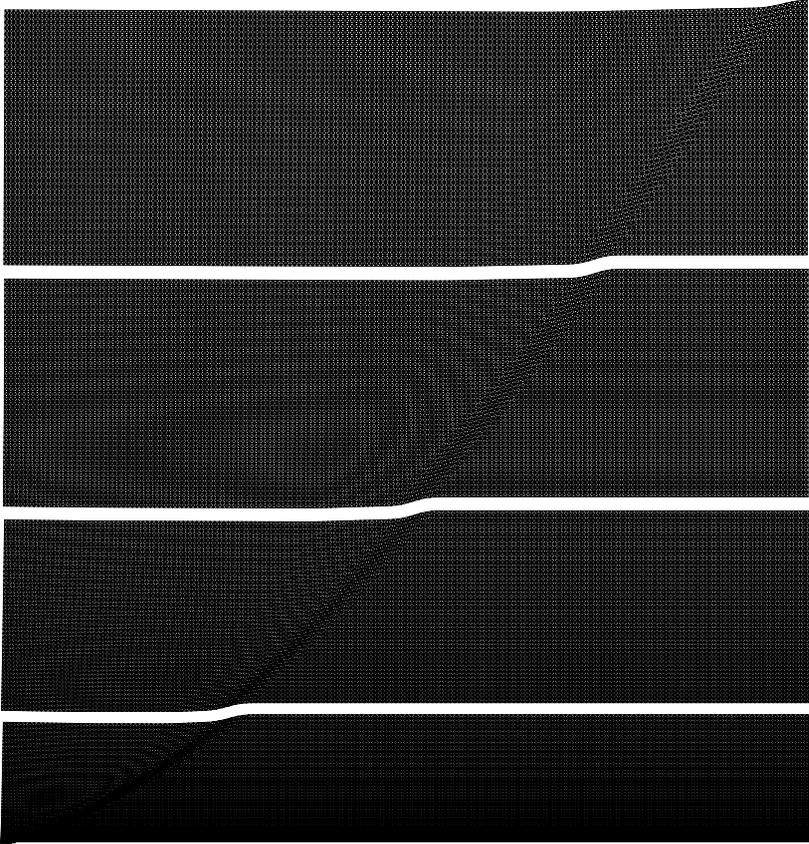


Figure 9.9 — Talus vertical de Tresca : maillages déformés des quatre sous-problèmes du problème $N = 176$. Puissances dissipées rapportées à l'aire du maillage pour chaque sous-problèmes, de bas en haut : 32,739 – 23,479 – 18,617 – 16,894.

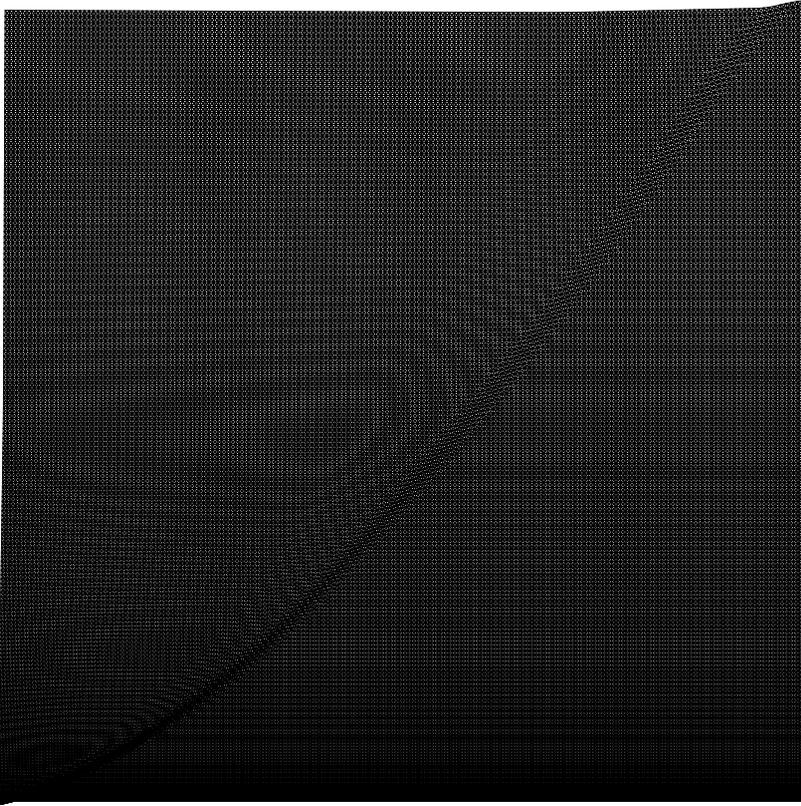


Figure 9.10 — Talus vertical de Tresca, maillage $N = 176$ déformé.

plus que celui sommet comme on pouvait s'y attendre. Pour conclure sur ce problème du talus vertical, le graphe 9.8 montre qu'aller plus loin en matière de raffinement de maillage serait illusoire dans la mesure où une méthode de type point intérieur ne peut pas laisser espérer aller au-delà d'une précision de 10^{-6} sur le résultat final, vérifié, rappelons-le, par post-analyse.

Rappelons enfin que le code conique commercial MOSEK ne converge plus à partir de $N = 50$ pour ce problème, malgré un ajustement des tolérances tel que préconisé par le concepteur dans le sens de plus de précision. Pour $N = 70$ et pour certaines tolérances la solution

est déclarée « near optimal », mais la post-analyse révèle qu'alors les conditions d'admissibilité ne sont vérifiées qu'à 10^{-2} près, ce qui invalide la solution. Cet inconvénient n'a pas reçu aujourd'hui de solution de la part du concepteur, dûment alerté. Il semble donc que la formulation conique du second ordre utilisée dans ce code, de type point intérieur, ne soit pas aussi fiable que d'autres essais nous avait laissé l'espérer. Ceci montre la nécessité de toujours contrôler a posteriori les solutions optimales, ce que l'analyse limite permet de faire.

A contrario l'optimiseur utilisé ici a fait preuve d'une robustesse sans faille pour tous les cas traités, avec admissibilités vérifiées à mieux que 3×10^{-7} , et des temps de calcul de l'ordre de ceux des codes commerciaux précédents quand ils sont utilisables.

9.3 Conclusion

La méthode de décomposition proposée fait pleinement usage des particularités de la méthode cinématique utilisée, entre autres le fait que la matrice des conditions ne varie pas d'une itération à l'autre. Il s'avère que dès la première itération on obtient une bonne précision de la solution, laquelle précision s'améliore ensuite légèrement au fil des itérations. Par suite, si la solution de départ correspond à un maillage raisonnable, on peut non seulement gagner du temps mais aller largement au delà des limites impossibles à franchir en traitement direct, par décomposition récursive par exemple. C'est ainsi que par double décomposition nous avons pu abaisser la borne cinématique concernant le problème du talus vertical à $\gamma H/c = 3,77843$ pour un maillage cible de 123 904 triangles *quadratiques discontinus en vitesses*, la meilleure valeur statique connue étant de 3,772.

Signalons pour terminer que cette méthode de décomposition est en cours d'extension au cas de l'approche statique. L'objectif est, d'une part, d'améliorer les valeurs statiques obtenues précédemment dans le cas du barreau encoché de Gurson, et d'autre part de résoudre le problème du calcul de la charge limite des fondations sur réseau de micropieux, en cours dans le cadre de la thèse de Zied Kammoun.

Chapitre 10

Conclusion générale et perspectives

Au regard des résultats des recherches qui ont été exposés ici, les méthodes de point intérieur apparaissent particulièrement bien adaptées à la résolution des problèmes d'analyse limite, et particulièrement l'algorithme MATLAB détaillé au chapitre 4.2. Ce dernier, appartenant à la classe des méthodes primales-duales, et élaboré en collaboration avec une équipe de mécaniciens spécialistes de l'analyse limite, a permis la résolution directe de problèmes statiques et cinématiques à deux dimensions approchant le million de variables et le million de contraintes linéaires et non-linéaires. Il a rivalisé ainsi avec l'algorithme de programmation conique de haute qualité MOSEK au niveau des temps de résolution et des tailles de problèmes résolus, parvenant même à la résolution de certains problèmes sur lesquels MOSEK « cale », et a permis la résolution de problèmes soumis au critère de Gurson pour lesquels la programmation conique ne s'applique pas, du moins à notre connaissance.

Cela ne signifie cependant surtout pas que MOSEK soit à rejeter : il reste très performant en général dès que le critère de plasticité est conique du second ordre (Coulomb ou Drucker-Prager), sous condition de vérifier les résultats quand la taille devient importante. Cela semble simplement indiquer qu'un algorithme de point intérieur spécifiquement élaboré pour une classe précise de problèmes, a de bonnes chances d'obtenir de bons résultats pour ladite classe de problèmes. Les méthodes de point intérieur sont particulièrement flexibles et variées, et fournissent un champ de recherche d'une richesse toujours

grandissante. Il est donc probable que toute personne recherchant un algorithme de résolution performant pour des problèmes de programmation convexe précis, trouvera son bonheur parmi la littérature des méthodes de point intérieur, voire même à élaborer son propre algorithme en suivant les principes généraux de ces méthodes, et en les adaptant à sa classe précise de problèmes.

Il est en effet une classe de problèmes d'analyse limite pour laquelle un algorithme tel que le nôtre, élaboré en MATLAB, n'est pas en mesure de fournir des résultats satisfaisants, sans décomposition préalable du problème. Il s'agit des problèmes en trois dimensions, qui amènent très rapidement à des tailles de problèmes dépassant les capacités de notre programme. L'une des raisons de ce fait est que le système de gestion dynamique de mémoire de MATLAB n'accorde au processus d'optimisation qu'une quantité limitée de RAM, précisément ici 2,5 GB. On pourrait alors envisager de passer à la version 64 bits de MATLAB, mais cela conduirait à rencontrer une limitation due à la tâche de résolution d'un système d'équations linéaires symétrique et défini positif dépassant le million de variables et d'équations. On constate en effet un phénomène de remplissage explosif du facteur triangulaire de la décomposition de Cholesky.

C'est ici que pourrait intervenir l'approche de décomposition originale, fondée sur l'interprétation mécanique du problème, qui a été exposée en détail au chapitre 9, dont l'efficacité a été prouvée sur des problèmes à deux dimensions dans le même chapitre, et qui repose sur la division du problème de départ en plusieurs sous-problèmes parfaitement posés. Nous avons pu procéder ainsi à des résolutions simultanées de problèmes sous MATLAB, jusqu'à quatre, sans perte d'efficacité, chacun des quatre processeurs étant alors utilisé à 95 % de sa capacité.

Pour favoriser ce traitement, nous envisageons de nous affranchir de MATLAB et de traduire notre algorithme en langage C, ou Fortran. Cela est réalisable puisque les routines utilisées pour notre algorithme peuvent être directement incorporées dans un programme C ou Fortran. Cela permettrait tout d'abord une meilleure gestion de l'allocation mémoire et un gain de temps non négligeable, puisqu'on passerait d'un langage interprété à un langage compilé. Mais

surtout cela permettrait d'ouvrir à notre méthode de décomposition le champ très vaste des méthodes de calcul parallèle.

Il semble en effet qu'en raison d'une information limitée de coordinations (fixation de valeurs aux interfaces et valeurs optimales de variables et de fonctions objectifs), cette méthode de décomposition puisse grandement profiter d'une parallélisation systématique, qui permettrait de procéder de la façon la plus efficace possible à la résolution de sous-problèmes avoisinant le million de contraintes et de variables, et fournissant par remontée les solutions de problèmes contenant plusieurs millions de variables et de contraintes.

Les capacités conjointes du calcul parallèle, de l'optimisation convexe et de la mécanique théorique seraient ainsi exploitées pour fournir des résultats probablement jamais encore atteints. Cela démontrerait une fois encore l'efficacité d'une recherche éminemment interdisciplinaire, induisant la collaboration entre spécialistes de domaines *a priori* bien différents.

Annexe A

Code MATLAB de l'algorithme de point intérieur

Nous présentons ci-dessous un des codes utilisés dans nos expérimentations basé sur la méthode présentée en détail à la section 4.2. Les contraintes convexes implémentées dans ce code sont issues du critère de Mises. On trouvera à partir de janvier 2008 un lien vers des exemples de grande taille des fichiers de données, `CAS.dat` (reprenant les composantes de la matrice des conditions linéaires), et `ccoef.dat` (reprenant les composantes de la fonction objectif linéaire), à l'adresse suivante :

<http://users.skynet.be/franck.pastor/datathesis.html>

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;
% Nombre de variables
n = 7440;
% Nombre de contraintes linéaires (égalités)
m = 6340 ;
% Nombre de contraintes non linéaires (inégalités)
p = 2480 ;
% Critère d'arrêt
tol = 4.0e-5;
% Fraction du paramètre de centrage
beta = 1/p;
% Fraction du pas maximal
gamma = 0.95;
% Terme de perturbation
```

```
perturb=1.0e-8;
% Nombre maximal d'itérations
maxiter = 300;
% Déclenchement du chronomètre
tic;
% Affichage des paramètres
disp(['Matlab_program "perturb_ amd_mises"']);
disp(['n=', num2str(n, 5), ...,
      ' m=', num2str(m, 5), ...,
      ' p=', num2str(p, 5)]);
disp(['tol=', num2str(tol, 8), ...,
      ' maxiter=', num2str(maxiter, 4)]);
disp(['gamma=', num2str(gamma, 4)]);
disp(['perturb=', num2str(perturb, 8)]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Données
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Coefficients de la fonction objectif
% (à minimiser)
load ccoef.dat;
c = spconvert(ccoef);
clear ccoef;
% Coefficients de la matrice
% des contraintes linéaires
load cAS.dat;
A = spconvert(cAS);
clear cAs;
% Membre de droite des contraintes linéaires
b = zeros(m,1);
% Membre de droite des contraintes non linéaires
d = 2;
```

```

% Initialisation du vecteur
% des contraintes non linéaires
% Taille : (p,1)
g = zeros(p,1);

% Initialisation (creuse)
% de sa matrice jacobienne
% Taille : p*n (n=3p)
dg=sparse(p,n);

% Vecteur colonne "unité" utilisé par la suite
e = ones(p,1);

% Initialisation des vecteurs direction
dx = zeros(n,1);
dw = zeros(m,1);
ds = zeros(p,1);
dy = zeros(p,1);

% Point initial
x = zeros(n,1);
s = repmat(2,p,1);
y = ones(p,1);
w = zeros(m,1);

% Valeur initiale du paramètre barrière
mu = beta*(y'*s);

% Affichage de la valeur initiale
% du parametre barrière
disp([ 'mu_□=□' ,num2str(mu,8)]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Préparation de la première itération

```

```
%  
% Calcul des contraintes non linéaires  
for k=1:p  
    j = 3*k - 2;  
    % formellement :  
    %  $g(k) = x(j:j+2)' * dg2(j:j+2, j:j+2) * x(j:j+2)$   
    % - d;  
    g(k) = 0.5*(x(j+1)*x(j+1)+x(j+2)*x(j+2)) - d;  
end;  
  
% Initialisation en creux des matrices diagonales  
% associées aux variables  
Y=spdiags(y,[0],p,p);  
S=spdiags(s,[0],p,p);  
Yml=spdiags(1./y,[0],p,p);  
Sml=spdiags(1./s,[0],p,p);  
  
% Calcul de H à l'aide d'un produit tensoriel de  
% Kronecker  
H = kron(Y,[0,0,0;0,1,0;0,0,1]);  
YSml = Y*Sml;  
H = H + dg'*YSml*dg;  
  
% Résidus  
% (Membre de gauche des equations KKT)  
Fd = c + A'*w + dg'*y;  
Fp1 = A*x - b;  
Fp2 = g + s;  
Fc = Y*s;  
  
% Mesures relatives des normes des résidus  
relgap = y'*s/(1+abs(b'*w));  
relp1 = norm(Fp1)/(1+norm(x));  
relp2 = norm(Fp2)/(1+norm(x));  
reld = norm(Fd)/(1+norm(w)+norm(y));
```

```

rel = max([relgap , relp1 , relp2 , reld ]);

% Itération initiale
iter=0;

disp ([ 'iter_□=□' , num2str(iter ,3) , ...
'□mu_□=□' , num2str(mu ,4) , ...
'□relgap_□=□' , num2str(relgap ,4) , ...
'□relp1_□=□' , num2str(relp1 ,4) , ...
'□relp2_□=□' , num2str(relp2 ,4) , ...
'□reld_□=□' , num2str(reld ,4) , ...
'□rel_□=□' , num2str(rel ,4)]);

%% %% %% %% %% %% Pas affine- scaling %% %% %% %% %% %%
%
% Boucle d'itération
while (iter <= maxiter) & (rel > tol)

%% %% Inverse de la matrice H
H = H + perturb*speye(n,n);
Hm1 = H;
%
for i = 1:p
    k = 3*i - 2;
    kp1 = k+1;
    kp2 = k+2;
% Inverse d'un élément diagonal
    Hm1(k,k)=1.0/H(k,k);
% Inversion explicite des matrices d'ordre 2
% sur la diagonale
    detm1 = 1.0/(H(kp1,kp1)*H(kp2,kp2)...
        - H(kp1,kp2)*H(kp2,kp1));
    Hm1(kp1,kp1) = H(kp2,kp2)*detm1;
    Hm1(kp2,kp2) = H(kp1,kp1)*detm1;
    Hm1(kp1,kp2) = -H(kp1,kp2)*detm1;
    Hm1(kp2,kp1) = -H(kp2,kp1)*detm1;

```

```
end;
clear H;

%Factorisation de Cholesky
r=Fp2-Ym1*Fc;
AHm1=A*Hm1;
MA=AHm1*A';
Pe=amd(MA);

% PI est l'inverse de la permutation P
% nécessaire pour revenir
% aux valeurs de départ de dw
PI=zeros(1,m);
for i=1:m
    PI(Pe(i))=i;
end;

% Cholesky effectué sur la matrice réordonnée
R=chol(MA(Pe,Pe));
Sec=Fp1-AHm1*(Fd+dg'*YSm1*r);
dwaf1 = R\(R\'(Sec(Pe)));
dwaf=dwaf1(PI);
dxaf=Hm1*(-Fd-dg'*YSm1*r-A'*dwaf);
dyaf = YSm1*(r + dg*dxaf);
dsaf = -Ym1*(S*dyaf+Fc);

% Calculs des pas maximaux
% pour s
negds = find(dsaf<0);
if negds
    dstemp = -dsaf(negds);
    stemp = s(negds);
    alphas=min(stemp./dstemp);
else
    alphas = 1;
end;
```

```

% pour y
negdy = find(dyaf < 0);
if negdy
    dytemp = -dyaf(negdy);
    ytemp = y(negdy);
    alphay = min(ytemp ./ dytemp);
else
    alphay = 1;
end;

% préparation du pas de Newton réalisable
alphas = min([alphas, 1/gamma]);
alphay = min([alphay, 1/gamma]);

% Pas de Newton : mise à jour des variables
xaf = x + gamma*alphas*dxaf;
saf = s + gamma*alphas*dsaf;
yaf = y + gamma*alphay*dyaf;
waf = w + gamma*alphay*dwaf;

%%%Pas centreur-correcteur%%%

% Préparation
muaf = beta*(yaf' * saf);

sigma = (muaf/mu)^3;
dYaf = spdiags(dyaf, [0], p, p);

% Composante non nulle
% du pas centreur-correcteur
if (sigma < 1)
Fc = dYaf*dsaf - sigma*mu*e;

```

```
else
Fc=-mu*e;
end;

% Résolution du système
% (utilise la factorisation précédente !)
r =-Ym1*Fc;
Sec = -AHm1*(dg'*YSm1*r);
dwc1=R\(R'\(Sec(Pe)));
dwc=dwc1(PI);
dxc=Hm1*(-dg'*YSm1*r-A'*dwc);

dyc = YSm1*(r + dg*dxc);
dsc = -Ym1*(S*dyc+Fc);

%%%%%%Pas de Newton final%%

dx=dxaf+dxc;
ds=dsaf+dsc;
dy=dyaf+dyc;
dw=dwaf+dwc;

% Pas maximal
% pour s
negds = find(ds<0);
if negds
    dstemp = -ds(negds);
    stemp = s(negds);
    alphas=min(stemp./dstemp);
else
    alphas = 1;
end;
% pour y
negdy = find(dy<0);
if negdy
    dytemp = -dy(negdy);
```

```
ytemp = y(negdy);
alphay = min(ytemp ./ dytemp);
else
    alphay = 1;
end;

% Préparation du pas de Newton réalisable
alphas = min([alphas, 1/gamma]);
alphay = min([alphay, 1/gamma]);

% Mise à jour finale de x, s, y et w
x = x + gamma*alphas*dx;
s = s + gamma*alphas*ds;
y = y + gamma*alphay*dy;
w = w + gamma*alphay*dw;

%%%% Préparation de l'itération suivante %%%

% Calcul du nouveau paramètre barrière mu
mu = beta*(y'*s);

% Calcul des contraintes non linéaires
for k=1:p
    j = 3*k - 2;
    % formellement :
    %g(k) = x(j+1:j+1)'*dg2(j:j+2,j:j+2)*x(j:j+2)
    % - d;
    g(k) = 0.5*(x(j+1)*x(j+1)+x(j+2)*x(j+2)) - d;
end;

% Réinitialisation du jacobien de g
% la taille de dg est p*n
```

```
dg=sparse(p,n);

% Calcul du jacobien de g
for k=1:p
    j = 3*k - 2;
    dg(k,j+1) = x(j+1);
    dg(k,j+2) = x(j+2);
end;

% Initialisation en creux des matrices diagonales
% associées aux variables
Y=spdiags(y,[0],p,p);
S=spdiags(s,[0],p,p);
Ym1=spdiags(1./y,[0],p,p);
Sm1=spdiags(1./s,[0],p,p);

% Calcul de H
% à l'aide du produit tensoriel de Kronecker
H = kron(Y,[0,0,0;0,1,0;0,0,1]);
YSm1 = Y*Sm1;
H = H + dg'*YSm1*dg;
%
Fd = c + A'*w + dg'*y;
Fp1 = A*x - b;
Fp2 = g + s;
Fc = Y*s;

% incrémentation du compteur d'itérations
iter=iter+1;

% Calcul des résidus
relgap = y'*s/(1+abs(b'*w));
relp1 = norm(Fp1)/(1+norm(x));
relp2 = norm(Fp2)/(1+norm(x));
reld = norm(Fd)/(1+norm(w)+norm(y));
rel = max([relgap,relp1,relp2,reld]);
```

```
% Affichage des resultats de l'iteration  
% precedente  
disp ([ 'iter =', num2str(iter ,3) ,...  
      ' mu =', num2str(mu ,4) ,...  
      ' relgap =', num2str(relgap ,4) ,...  
      ' relp1 =', num2str(relp1 ,4) ,...  
      ' relp2 =', num2str(relp2 ,4) ,...  
      ' reld =', num2str(reld ,4) ,...  
      ' rel =', num2str(rel ,4)]);  
  
%  
% Fin  
%  
end;  
  
% Valeur finale de la fonction objective  
disp ([ ' objective =', num2str(-c'*x ,8)]);  
  
% Arret du chronometre  
temps=toc;  
  
% Affichage du temps de resolution  
disp ([ ' Time Matlab_74 =', num2str(temps ,8)]);
```


Bibliographie

- [1] E. Anderheggen and H. Knopfel. Finite element limit analysis using linear programming. *Int. J. Solids Structures*, 8:1413–1431, 1972.
- [2] K.D. Andersen and E. Christiansen. Computation of Collapse Loads with von Mises Type Yield Condition. *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 45:1185–1202, 1999.
- [3] A. Ben-Tal and A. Nemirovskii. On Polyhedral Approximations of the Second-Order Cone. *Math. Oper. Res.*, 26:193–205, 2001.
- [4] L. A. Borges, Néstor Zouain, and A. E. Huespe. A nonlinear optimization procedure for limit analysis. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 15(3):487–512, 1996.
- [5] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1983.
- [6] M. Capurso. Limit analysis of continuous media with piecewise linear yield conditions. *Meccanica*, 6:53–58, mars 1971.
- [7] E. Christiansen. Limit analysis of collapse states. *Handbook of Numerical Analysis*, 4:193–312, 1996.
- [8] H. Ciria Suárez. Computation of upper and lower bounds in limit analysis using second-order cone programming and mesh adaptivity. Master of science in aeronautics and astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- [9] Timothy A. Davis. *UMFPACK*. University of Florida, <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack>.

-
- [10] P. Francescato. Pr evision du comportement plastique des matériaux hétérogènes  a constituants m etalliques. application aux composites  a matrice m etallique  a fibres continues et aux plaques perfor ees. Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble I, Université de Savoie, 1994.
- [11] José Herskovits. A Two-Stage Feasible Directions Algorithm For Nonlinear Constrained Optimization. *Mathematical Programming*, 36:19–38, 1986.
- [12] José Herskovits. Feasible Direction Interior-Point Technique for Nonlinear Optimization. *JOTA*, 99(1):121–146, 1998.
- [13] Huang J., XU W., Thomson P., and DI S. A general rigid-plastic/rigid-viscoplastic FEM for metal-forming processes based on the potential reduction interior point method. *Int. J. Machine Tools Manufacture*, 43:379–389, 2003.
- [14] K. Krabbenhoft, A.V. Lyamin, M. Hijaj, and S.W. Sloan. A new discontinuous upper bound limit analysis formulation. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 63:1069–1088, 2005.
- [15] K. Krabbenhoft and L. Damkilde. A general non-linear optimization algorithm for lower bound limit analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:165–184, 2003.
- [16] E. Loute, F. Pastor, J. Pastor, and F. Glineur. Linearization of second-order cone optimization problems and application to limit analysis in mechanical analysis. In *7th International Workshop on High Performance Optimization Techniques*. Tilburg University, June 2002.
- [17] A. V. Lyamin and S. W. Sloan. Lower Bound Limit Analysis Using Nonlinear Programming. Technical Report 198.01.2001, University of Newcastle, dept of civil surveying and environmental engineering, 2001.

- [18] *MOSEK ApS*. C/O Symbion Science Park, Fruebjergvej 3, Box 16, 2100 Copenhagen ϕ , Denmark, 2002.
- [19] A. Makrodimopoulos and C. Martin. A novel formulation of upper bound limit analysis as a second-order cone programming problem. In E. Onate and D.R.J. Owen, editors, *COMPLAS-VIII*. CIMNE, Barcelona, 2005.
- [20] The Mathworks. MATLAB. <http://www.mathworks.com/products/matlab>, Copyright 1984-2007.
- [21] Arkadi Nemirovskii. Five lectures on modern convex optimization. In *CORE Summer School on Modern Convex Optimization*. Center of Operation Research and Econometrics (CORE), Université Catholique de Louvain, August 2002.
- [22] F. Pastor. Résolution d'un problème d'optimisation à contraintes linéaires et quadratiques par une méthode de point intérieur : application à l'Analyse Limite. Mémoire de DEA de mathématiques appliquées, Université de Lille 1, 2001.
- [23] F. Pastor and E. Loute. Application of an interior point method for convex programming to limit analysis problems. In *Séminaire – école d'été "Modern convex optimization"*. Center of Operation Research and Econometrics (CORE), Université Catholique de Louvain, August 2002.
- [24] F. Pastor and E. Loute. An interior point method for solving limit analysis problems. In *Engineering Mechanics Today (EMT)*. LMS X, France, Institute of Mechanics, Hanoi and Institute of Applied Mechanics, Ho Chi Minh Ville, Vietnam, 2004.
- [25] F. Pastor and E. Loute. Solving limit analysis problems: an interior-point method. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 21(11):631–642, 2005.
- [26] F. Pastor, E. Loute, and J. Pastor. Analyse limite et optimisation convexe : application. In *17ème Congrès Français de*

- Mécanique – CFM17*. Université Technologique de Troyes, August 2005.
- [27] F. Pastor, E. Loute, and J. Pastor. Decomposition approach and upper bound method of limit analysis, invited conference. In *Thermo-Mechanical Modeling of Solids International Conference*. LMS-Polytechnique, Palaiseau, July 2007.
- [28] F. Pastor, E. Loute, J. Pastor, and Ph. Thoré. Approche décomposition et analyse limite cinématique par les contraintes. In *18ème Congrès Français de Mécanique – CFM18*. Université Joseph Fourier, Grenoble, Août 2007.
- [29] F. Pastor, Ph. Thoré, E. Loute, J. Pastor, and M. Trillat. Convex optimization, limit analysis and porous materials: structural and micro-macro applications. *Engineering Fracture Mechanics*, available on the ScienceDirect website, 2007.
- [30] F. Pastor, M. Trillat, J. Pastor, and P. Thoré E. Loute. Convex optimization and stress-based lower-upper bound methods for limit analysis of porous polymer materials. In *Local approach to fracture, Ninth European Mechanics of Materials Conference – EMMC9*. École des Mines de Paris (France), GKSS Research Center (Germany), EDF Les Renardières (France), Moret-sur-Loing, May 2006.
- [31] F. Pastor, M. Trillat, J. Pastor, and E. Loute. Solving lower/upper bound approaches of limit analysis by a convex interior point method. In *ORBEL20*. conference of the Belgian Operation Research Society, Gand, 2006.
- [32] F. Pastor, M. Trillat, J. Pastor, and E. Loute. Solving lower/upper bound approaches of limit analysis by an interior-point method for convex programming. In *Symposium of optimization and engineering*. Center of Operation Research and Econometrics (CORE), Université Catholique de Louvain, May 2006.
- [33] F. Pastor, M. Trillat, J. Pastor, and E. Loute. Stress-based upper-bound method and convex optimization: case of the

- Gurson material. *C. R. Mécanique, Acad. Sc. Paris*, 334:213–219, 2006.
- [34] J. Pastor. détermination de solutions statiques complètes – application au talus vertical. *Journal de Mécanique Appliquée (devenu depuis Eur. J. Mechanics/A Solids)*, 2, 1978.
- [35] J. Pastor. Application de la théorie de l’analyse limite aux milieux isotropes et orthotropes de révolution. Thèse d’état, UJF-INPG, Grenoble, 1983.
- [36] J. Pastor. *Analyse limite et optimisation*. Cours Master Écotechinique M2. Ecole Supérieure d’Ingénieurs de Chambéry, Université de Savoie, 2004.
- [37] J. Pastor, P. Francescato, M. Trillat, E. Loute, and G. Rousellier. Ductile failure of cylindrically porous materials. part II : Other cases of symmetry. *Eur. J. Mechanics/A Solids*, 23:191–201, 2004.
- [38] J. Pastor, E. Loute, and T. H. Thai. On the efficiency of the limit analysis methods via the new techniques of optimization. In P. Mesta, editor, *Vth Eur. Conf. Num. Methods in Geotechnical Engineering*. Presses des Ponts et Chaussées, Paris, september 2002.
- [39] J. Pastor, T.H. Thai, and P. Francescato. Interior point optimisation and limit analysis: an application. *Commun. Numer. Meth. Engng*, 19:779–785, 2003.
- [40] J. Pastor, Ph. Thoré, C. Vandenbussche, F. Pastor, and E. Loute. Analyse limite : approches micro-macro et décomposition. In *25ème Rencontres Universitaires de Génie Civil*. Association Universitaire de Génie Civil, Bordeaux, mai 2007.
- [41] J. Pastor, M. Trillat, F. Pastor, and E. Loute. Discontinuous stress-based lower/upper bound methods of limit analysis

- and convex optimization. In *Ultimate Limit States of Geotechnical Structures – ELU-ULS-2006*. Laboratoire des Ponts-et-Chaussées, ENPC, France, August 2006.
- [42] D. Radenkovic and Q. S. Nguyen. La dualité des théorèmes limites pour une structure en matériau rigide-plastique standard. *Archives of Mechanics*, 24(5-6):991–998, 1972.
- [43] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition*. SIAM, 2003.
- [44] J. Salençon. Théorie des charges limites: poinçonnement d’une plaque par deux poinçons symétriques en déformation plane. *Comptes Rendus Mécanique, Acad. Sc. Paris*, 265:869–872, 1967.
- [45] J. Salençon. *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*. Eyrolles, Paris, 1974.
- [46] J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite*. presses des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [47] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, 1966.
- [48] S. W. Sloan and A. V. Lyamin. Lower bound limit analysis using nonlinear programming. In *Europ. Congress on Comp. Meth. In App. Sci. and Eng, ECCOMAS-2000*. Barcelona, 2000.
- [49] J.-J. Strodiot. *Interior-Point Methods in convex optimization*. CIUF-CUD summer school on optimization and applied mathematics, Nha Trang University of pedagogy, VietNam, 2002.
- [50] Sunset Software Technology, San Marino, CA 91108 USA. *XA, Optimisation Library*.
- [51] Thai T.-H. Analyse limite: application aux structures et aux matériaux poreux. Thèse de mécanique, Université de Savoie, 1997.

- [52] M. J. Todd. A study of search directions in interior-point methods for semidefinite programming. *Optimization methods and software*, 12:1–46, 1999.
- [53] Malorie Trillat. *Analyse limite : application à la rupture ductile des matériaux poreux*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, novembre 2005.
- [54] Stephen A. Vavavis. Stable numerical algorithms for equilibrium systems. *Society for Industrial and Applied Mathematics : J.Matrix Anal. Appl*, 15(4):1108–1131, 1994.
- [55] J. P. Vial. Computational experience with a primal-dual interior-point method for smooth convex programming. Technical report, Université de Genève, Département d'Economie commerciale et industrielle, 1993.
- [56] O. Widlund and eds Keyes D. *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*. Lectures Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2007.
- [57] Stephen J. Wright. *Primal-dual interior-point methods*. SIAM, 1997.
- [58] Néstor Zouain, José Herskovits, Lavinia A. Borges, and Raül A. Feijóo. An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions. *Int. J. Solids Structures*, 30(10):1397–1417, 1993.