

HENRY

Hydraulic Engineering Repository

Ein Service der Bundesanstalt für Wasserbau

Conference Paper, Published Version

Wiebicke, Max; Andò, Edward; Caillerie, Denis; Viggiani, Gioacchino Experimentelle Ermittlung intergranularer Kräfte unter Nutzung von 2D-DIC

Verfügbar unter/Available at: <https://hdl.handle.net/20.500.11970/102371>

Vorgeschlagene Zitierweise/Suggested citation:

Wiebicke, Max; Andò, Edward; Caillerie, Denis; Viggiani, Gioacchino (2014): Experimentelle Ermittlung intergranularer Kräfte unter Nutzung von 2D-DIC. In: Bundesanstalt für Wasserbau (Hg.): Aktuelle Themen der Geotechnik. Karlsruhe: Herle, Ivo. S. 27-44.

Standardnutzungsbedingungen/Terms of Use:

Die Dokumente in HENRY stehen unter der Creative Commons Lizenz CC BY 4.0, sofern keine abweichenden Nutzungsbedingungen getroffen wurden. Damit ist sowohl die kommerzielle Nutzung als auch das Teilen, die Weiterbearbeitung und Speicherung erlaubt. Das Verwenden und das Bearbeiten stehen unter der Bedingung der Namensnennung. Im Einzelfall kann eine restriktivere Lizenz gelten; dann gelten abweichend von den obigen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Documents in HENRY are made available under the Creative Commons License CC BY 4.0, if no other license is applicable. Under CC BY 4.0 commercial use and sharing, remixing, transforming, and building upon the material of the work is permitted. In some cases a different, more restrictive license may apply; if applicable the terms of the restrictive license will be binding.



Experimentelle Ermittlung intergranularer Kräfte unter Nutzung von 2D-DIC

Max Wiebicke^{1,2}, Edward Andò², Denis Caillerie²,
Gioacchino Viggiani²

¹TU Dresden, Institut für Geotechnik

²Grenoble-INP/UJF-Grenoble 1/CNRS UMR 5521, Laboratoire 3SR,
Grenoble, France

Die Granular Element Method (GEM) stellt ein Verfahren dar, welches die Möglichkeit eröffnet, Kontaktkräfte in Granulaten zu ermitteln. Die Methode macht dabei Gebrauch von der Digital Image Correlation (DIC), um den Deformationszustand der einzelnen Körner infolge einer Belastung zu bestimmen und diese somit als Dehnungsmesser zu verwenden. Weiterhin werden die Kontaktpunkte und die konstitutiven Parameter der Körner genutzt, um die intergranularen Kräfte zu kalkulieren. In diesem Beitrag wird die erste experimentelle Anwendung von GEM auf ein einfaches Granulat in einem biaxialen Schergerät beschrieben. Da die quantitative Güte der Ergebnisse bei der numerischen Weiterverwertung von DIC-Resultaten von hoher Relevanz ist, wurde diesbezüglich eine Optimierung durchgeführt. Des Weiteren werden eine Modifikation von GEM (GEM-plus) und eine Sensitivitätsanalyse beider Verfahren (GEM und GEM-plus) bezüglich der Eingangsparameter vorgestellt. Einige der ermittelten Kräfte wurden darüber hinaus mit den Resultaten einer alternativen Methode zur Kräfteermittlung verglichen.

1 Einleitung

Granulare Materialien spielen in vielen Bereichen eine wichtige Rolle. So kommen sie zum Beispiel in der Pharmazie, der Industrie, als Nahrungsmittel und als Bestandteil der Umwelt vor. Eine besondere Rolle kommt ihnen beispielsweise in der Bodenmechanik bei der Beschreibung von granularen Böden wie Sanden zu.

Obwohl ihr Verhalten auf Partikelebene vermeintlich einfachen physikalischen Gesetzen unterliegt, so können die Verhaltensweisen von Granulaten auf anderen Betrachtungsebenen nicht durch einheitliche Theorien beschrieben werden. In der Geomecha-

nik greift man so zum Beispiel auf makroskopischer Ebene auf phänomenologische Stoffmodelle in unterschiedlichsten Bezugssystemen, auf mikroskopischer Ebene auf diskrete Modelle und außerdem auf eine Kopplung der Modelle beider Skalen zurück.

Ziel für eine möglichst einheitliche Beschreibung der granularen Materialien sollte es sein, die Verbindung zwischen dem makroskopischen Verhalten und der dem zugrunde liegenden diskreten Natur der Granulate zu finden.

Um das mikromechanische Verhalten umfassend beschreiben zu können, müssen (i) die Struktur eines Granulates: die Positionen der Körner und Kontakte (ii) die Evolution der Verformungen: Verschiebungen, Rotationen und Evolution der Kontakte und (iii) die Kontaktkräfte erfasst werden [CCL97].

In den letzten Jahrzehnten wurden große Fortschritte in der experimentellen Bestimmung von Deformationen gemacht. So ist es mittlerweile möglich, die Verschiebungen und Rotationen einzelner Körner und die Verzerrungen von Kornbereichen z.B. mit Hilfe der *Digital Image Correlation* zu ermitteln [VH08].

Allerdings ist die experimentelle Beschreibung von intergranularen Kräften bisher nur über Anwendung der Photoelastizität möglich [DJ72]. Diese beschränkt sich aber auf doppelbrechende Materialien mit einfachen Geometrien und eine Kenntnis der Randkräfte, die auf das jeweilige Granulat wirken.

Durch die Entwicklung der *Discrete Element Methods* [CS79] ist es möglich geworden, Granulate mit einer hohen Anzahl von regulär geformten Partikeln in numerischen Simulationen zu untersuchen. Dadurch konnten bereits einige Beziehungen zwischen dem diskreten und dem makroskopischen Verhalten von granularen Materialien aufgestellt werden. Es mangelt allerdings immer noch an experimentellen Ermittlungen der Kontaktkräfte und somit der Validierung von bereits aufgestellten Modellen.

Andrade hat in [AA12] eine Methode vorgestellt, mit der es möglich ist, die Kontaktkräfte in irregulär geformten Granulaten experimentell zu bestimmen. Die *Granular Element Method* (GEM) nutzt die Bedingungen des statischen Gleichgewichtes und der Impulserhaltung der einzelnen Partikel, mit denen es möglich ist, die intergranularen Kräfte über die Kontaktpunkte und die mittleren Verzerrungen jedes Partikels zu bestimmen. Die Verzerrungsfelder der einzelnen Körner können experimentell mit Hilfe der *Digital Image Correlation* bestimmt werden. Numerisch wurde GEM bereits durch eine gekoppelte Anwendung mit der DEM und der Finiten Elemente Methode verifiziert [AA12].

Dieses Projekt zielt auf die experimentelle Validierung von GEM. Dazu wurden Versuche an einem ideellen Granulat in dem Schergerät $1\gamma-2\varepsilon$ in Grenoble durchgeführt. Die Eingangsgrößen für GEM sind auf verschiedene Weisen bestimmt worden, um so einen Einblick in die Unschärfe dieser Größen zu erhalten und deren Einfluss auf die Methode mit einer Sensitivitätsanalyse zu untersuchen. Weiterhin wird eine modifizierte Formulierung vorgestellt, die physikalisch realistischere Bedingungen an die Lösung des Problems stellt. Letztendlich wurde eine alternative Methode gewählt, um einige Kontaktkräfte aus den experimentellen Messungen abzuleiten und mit den

durch GEM ermittelten zu vergleichen.

2 Granular Element Method (GEM)

Das mathematische Konzept der *Granular Element Method* (GEM) wurde von Andrade in [AA12] eingeführt. Um es allerdings auf die Experimente anwenden zu können, mit denen sich diese Studie befasst, musste es leicht modifiziert werden, da in der ursprünglichen Formulierung lediglich verformbare elastische Partikel betrachtet wurden.

Im Folgenden wird die in dieser Studie verwendete mathematische Formulierung von GEM kurz dargestellt. Die Gesamtmenge aller Körper, die sich im betrachteten System befinden, besteht aus elastisch verformbaren Körnern und undeformierbaren Festkörpern. Die Menge der Körner wird mit $g \in \mathcal{G}$, die Menge der Starrkörper mit $u \in \mathcal{U}$ und die Gesamtmenge mit $\mathcal{S} = \mathcal{G} \cup \mathcal{U}$ bezeichnet. Die Kontakte zwischen den einzelnen Bestandteilen, Körnern und Starrkörpern, werden mit $c \in \mathcal{C}$ benannt. Um über die intergranularen Kräfte mechanische Beziehungen aufstellen zu können, muss eine Richtung dieser Kräfte eingeführt werden. Jedem Kontakt wird ein *Origin*-Partikel $O(c)$ und ein *Extremity*-Partikel $E(c)$ zugewiesen, ihre Mengen werden mit $O^{-1}(c)$ und $E^{-1}(c)$ bezeichnet. Die Kraft \vec{F}^c am Kontakt \vec{x}^c ist die Kraft, die vom *Extremity*-Partikel auf das *Origin*-Partikel übertragen wird.

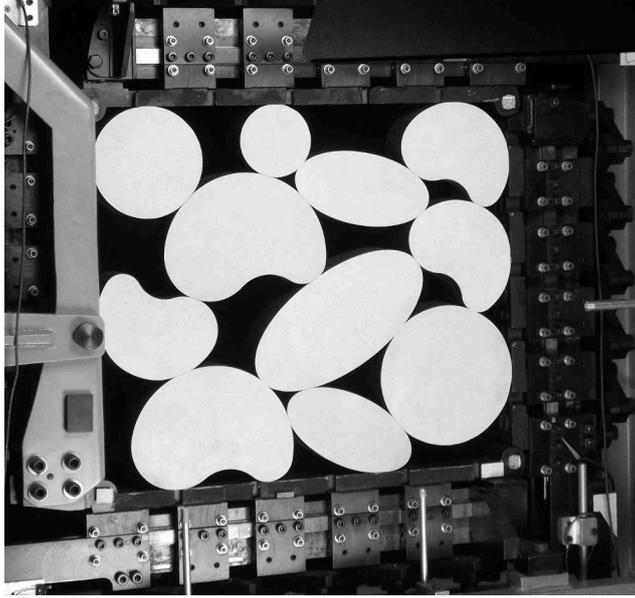
Das statische Gleichgewicht eines Bestandteiles s liest sich somit:

$$\sum_{c \in O^{-1}(s)} \vec{F}^c - \sum_{c \in E^{-1}(s)} \vec{F}^c + \vec{F}^{e/s} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{c \in O^{-1}(s)} \vec{x}^c \times \vec{F}^c - \sum_{c \in E^{-1}(s)} \vec{x}^c \times \vec{F}^c + \vec{x}^{e/s} \times \vec{F}^{e/s} = 0 \quad (2)$$

$\vec{F}^{e/s}$ seien äußere Kräfte, die an der Stelle $\vec{x}^{e/s}$ auf die einzelnen Partikel wirken.

In den numerischen Studien, die Andrade genutzt hat, um GEM zu validieren, wurden die durch das Experiment auf die äußeren Partikel aufgebrachten Kräfte $\vec{F}^{e/s}$ vorgeschrieben. In diesem Projekt wurde das Schergerät $1\gamma-2\varepsilon$ [JLDF92] genutzt, um das Granulat zu belasten. Das Schergerät und das später vorgestellte Granulat sind in Abbildung 1 dargestellt. Der Apparat besteht aus 2 horizontalen und 2 vertikalen Platten, zwischen denen sich das Granulat befindet. Da das Gerät, wie später noch beschrieben, die granulare Masse über diese Platten und somit mehrere Kontakte spannungs- bzw. kraftgesteuert belastet und die Kräfte nur zwischen den einzelnen Platten gemessen werden, müssen die Gleichungen (1) und (2) noch modifiziert werden. Die Platten werden hierbei als Starrkörper $u \in \mathcal{U}$ in das statische Gleichgewicht einbezogen und die Kräfte, die für die Spannungssteuerung zwischen ihnen aufgebracht werden, wirken an den Kontaktpunkten der Platten $c \in O^{-1}(u)$ und $c \in E^{-1}(u)$. Damit liest sich

Abbildung 1: Das Granulat im 1γ - 2ε Schergerät

das statische Gleichgewicht wie folgt:

$$\sum_{c \in O^{-1}(s)} \vec{F}^c - \sum_{c \in E^{-1}(s)} \vec{F}^c = - \sum_{c \in O^{-1}(u)} \vec{F}^c + \sum_{c \in E^{-1}(u)} \vec{F}^c \quad (3)$$

$$\sum_{c \in O^{-1}(s)} \vec{x}^c \times \vec{F}^c - \sum_{c \in E^{-1}(s)} \vec{x}^c \times \vec{F}^c = - \sum_{c \in O^{-1}(u)} \vec{x}^c \times \vec{F}^c + \sum_{c \in E^{-1}(u)} \vec{x}^c \times \vec{F}^c \quad (4)$$

Um die Gleichungen später lösen zu können, wird eine Matrix-Notation eingeführt. \underline{F}^C sei der Vektor aller Kontaktkräfte und ergibt sich im zweidimensionalen Bezugssystem zu:

$$\underline{F}^C = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ \vdots \\ F_1^{N_c} \\ F_2^{N_c} \end{pmatrix} \quad (5)$$

N_c sei die Anzahl aller Kontakte. Mit eingeführter Matrixnotation kann das System des statischen Gleichgewichtes für alle Bestandteile aufgestellt werden:

$$\underline{\underline{K}}^E \underline{F}^C = \underline{F}^E \quad (6)$$

Die Dimension des Vektors der Kontaktkräfte \underline{F}^C ist $d \cdot N_c$, wobei d die räumliche Dimension darstellt. Die Dimension des Vektors \underline{F}^E ergibt sich zu $d \frac{d+1}{2} N_S$, hierbei ist N_S die Anzahl aller Körper, Körner und Starrkörper. Als Konsequenz beträgt die Dimension der Matrix $\dim(\underline{K}^E) = d \frac{d+1}{2} N_S \times d \cdot N_c$. Da normalerweise die Anzahl der Unbekannten $d \cdot N_c$ wesentlich höher als die Anzahl der Gleichungen $d \frac{d+1}{2} N_S$ ist, bedient sich die *Granular Element Method* einer weiteren Beziehung.

Andrade [AA12] hat zusätzlich zu den statischen Gleichgewichtsbedingungen die Impulserhaltung einbezogen. Unter der Annahme, dass das mittlere Spannungsfeld jedes Korn $g \in \mathcal{G}$ bekannt ist, können die Kontaktkräfte über die Impulserhaltung mit dem mittleren Spannungsfeld für jedes Korn $g \in \mathcal{G}$ in Verbindung gebracht werden:

$$A^g \langle \sigma^g \rangle = \sum_{c \in O^{-1}(g)} \left(\vec{F}^c \otimes \vec{x}^c \right)^S - \sum_{c \in E^{-1}(g)} \left(\vec{F}^c \otimes \vec{x}^c \right)^S - \sum_{c \in I^{-1}(c)} \left(\vec{F}^c \otimes \vec{x}^c \right)^S + \left(\vec{F}^{e/g} \otimes \vec{x}^{e/g} \right)^S \quad (7)$$

A^g sei die Fläche eines Korn $g \in \mathcal{G}$ und $I^{-1}(c)$ bezeichnet die Menge aller Körner, die in Kontakt mit den undeformierbaren Bestandteilen $u \in \mathcal{U}$ stehen. Mit Hilfe der eingeführten Matrixnotation können die Gleichungen für alle Körner gesammelt werden:

$$\underline{K}^A \underline{F}^C = \underline{S}^A \quad (8)$$

Die Dimension des Vektors \underline{S}^A beträgt $d \frac{d+1}{2} N_G$, N_G bezeichnet die Anzahl aller Körner $g \in \mathcal{G}$. Folglich besitzt die Matrix \underline{K}^A die Dimension $d \frac{d+1}{2} N_G \times d \cdot N_c$.

Mit beiden Gleichungssystemen (6) und (8) besitzt GEM $d \frac{d+1}{2} (N_S + N_G)$ Gleichungen und $d \cdot N_c$ Unbekannte. Da das System in den meisten Fällen somit überbestimmt ist, kann eine Lösung nur approximativ gefunden werden. In diesem Projekt wurde das Gleichungssystem mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gelöst.

Da die Deformationsgeschichte im aufgestellten Rahmen von GEM nicht berücksichtigt werden kann, wird angenommen, dass die Körner sich linear isotrop elastisch verhalten. Damit ergibt sich aus dem konstitutiven Modell die Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen:

$$\langle \sigma^g \rangle = \lambda \text{tr} \langle \varepsilon^g \rangle \mathbf{I} + 2\mu \langle \varepsilon^g \rangle \quad (9)$$

mit λ und μ als Lamés Konstanten. Da die Deformation während der Experimente durch *Digital Image Correlation* verfolgt werden soll, können die Spannungen mit der Beziehung (9) ermittelt werden.

3 Bestimmung der Input-Daten aus Experimenten

Wie aus dem letzten Abschnitt anhand der mathematischen Formulierung von GEM hervorgeht, sind verschiedene Eingangsgrößen und Parameter nötig, um intergranu-

lare Kräfte mit Hilfe von GEM zu ermitteln. Die Eingangsgrößen sind das mittlere Verzerrungsfeld eines jeden Partikels, die Kontaktpunkte zwischen den Partikeln und die elastischen Parameter, um aus dem Verzerrungsfeld das Spannungsfeld jedes Partikels zu berechnen. Über die Anwendung der zweidimensionalen *Digital Image Correlation* kann das mittlere Verzerrungsfeld über einen Belastungsvorgang hinweg aus Experimenten extrahiert werden.

3.1 2D Digital Image Correlation

Digital Image Correlation (DIC) ist ein Verfahren, welches zwei Abbilder miteinander vergleicht und über einen Optimierungsalgorithmus die Deformation eines Objektes von einer initialen in die aktuelle Konfiguration misst, z.B. [PQXA09]. In allen DIC-Verfahren wird eine Untermenge des Bildes in der Ausgangskonfiguration gewählt, welche über ein Korrelationsmaß in der aktuellen (deformierten) Konfiguration gesucht wird. Mit einem kontinuierlichen Ansatz können so die Verschiebungen und Verzerrungen der spezifischen Untermengen bestimmt werden. Um Verschiebungen nicht nur im ganzzahligen Pixel-Bereich sondern auch im Subpixel-Bereich zu ermitteln, müssen zusätzlich Verfahren zu Einsatz kommen, um die Verschiebungen in diesem Level zu interpolieren, z.B. [Hal12].

In diesem Projekt wurde das Programm *photowarp*, geschrieben von Steve Hall am *Laboratoire 3SR, Grenoble*, verwendet. Um Verschiebungen im Subpixel-Bereich ermitteln zu können, kommt in *photowarp* die Interpolation des Korrelationskoeffizienten zum Einsatz.

3.2 Untersuchung und Optimierung des Verzerrungsfeldes

Da es äußerst wichtig ist, mit akkuraten Verzerrungsfeldern zu arbeiten, wurden die Resultate von 2D-DIC an Beispielexperimenten und dem später durchgeführten Experiment sorgfältig untersucht. Die durch das DIC-Verfahren ermittelten Verzerrungsfelder zeigten unregelmäßige Muster und waren weit davon entfernt, glatte kontinuierliche Felder abzubilden. Eine Ursache findet sich in der zugrunde gelegten Subpixel-Verfeinerung. Durch die Interpolation der Korrelationskoeffizienten im Subpixel-Bereich werden die Verschiebungen zwar wesentlich kontinuierlicher ermittelt, tendieren aber dennoch zu ganzzahligen Werten. Obwohl die so ermittelten Verschiebungsfelder sehr glatt und kontinuierlich wirken, zeigte sich durch das Plotten einzelner Schnitte des Feldes, dass die Verläufe sprunghaft und geräuschvoll sind, siehe Linie '01-normal' in Abbildung 2. Da sich die Verzerrungen aus den Gradienten der Verschiebungen ergeben, werden diese stark von den Unebenheiten im Verschiebungsfeld beeinflusst.

Um dennoch quantitativ verwertbare Verzerrungsfelder aus den Experimenten zu gewinnen, wurde in diesem Projekt daran gearbeitet, die Verschiebungsfelder zu glätten

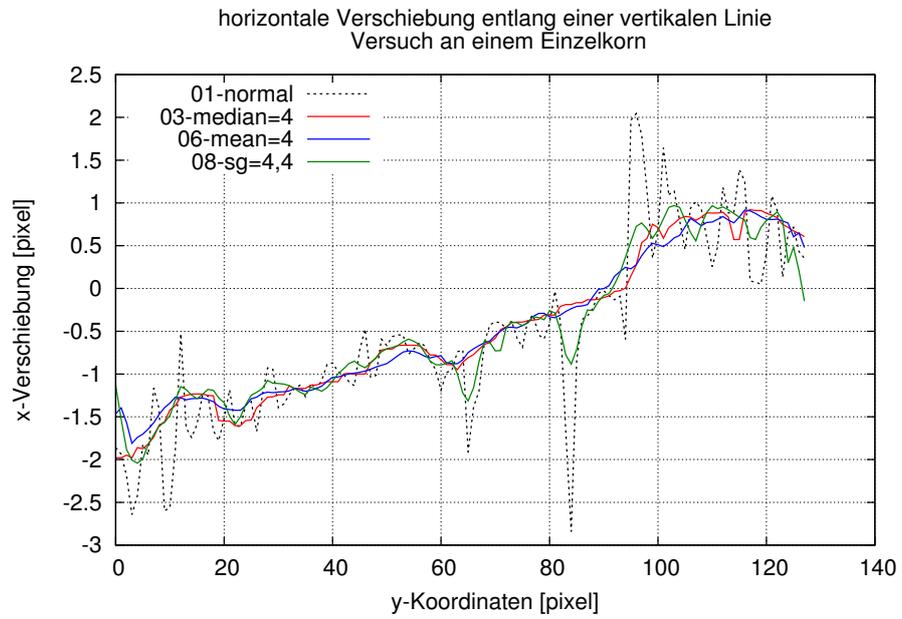


Abbildung 2: Verschiebung - originale und geglättete Verschiebungsfelder

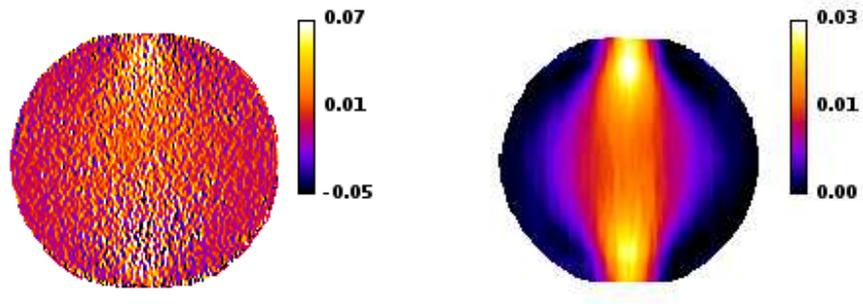


Abbildung 3: Resultat der DIC-Optimierung - links: vorher, rechts: nachher

und die Verzerrungen neu zu berechnen. Die folgenden Filter kamen dabei zum Einsatz: Durchschnittswert, Medianwert, Gauss'sche Unschärfe und ein Savitaki-Golay Filter [PXH⁺06]. Diese Filter wurden aufgrund der Vergleichbarkeit mit derselben Größe des Glättungsfensters auf die Verschiebungsbilder angewandt. Die Resultate sind in Abbildung 3 dargestellt. In diesem Fall haben der Durchschnittswert und der Medianwert die besten Ergebnisse geliefert und wurden weiterhin zur Glättung der Verschiebungsfelder angewandt, siehe z.B. Abbildung 2.

3.3 Das granulare Material

Um einen möglichst einfachen Rahmen für die erste experimentelle Anwendung von GEM zu schaffen, wurde ein Granulat gewählt, welches unregelmäßige ebene Formen (2D) mit einer konstanten Dicke in der dritten Richtung besitzt. Dabei fiel die Wahl auf ein Material aus Gummi, da sich dieses zumindest annähernd linear isotrop elastisch verhält. Aufgrund der Anwendbarkeit von GEM auf beliebige Formen von Partikeln kamen drei verschiedene Formen zum Einsatz: kreis-, oval- und bohnenförmige Partikel.

Die Parameter des Materials für das linear isotrope elastische Verhalten, wurden unter Verwendung von zwei unterschiedlichen Methoden ermittelt. Die erste ist ausführlich in [LL08] beschrieben. Analog zu dieser Veröffentlichung wurde ein kreisförmiges Korn einaxial belastet. Die Verformungen wurden über den Deformationsprozess hinweg mit 2D-DIC ermittelt. Aus der elastischen Lösung dieses Problems ergibt sich eine Verformungsfunktion mit den Parametern E und ν .

Um die Parameter zu bestimmen, kann die Verformungsfunktion über die Parameter auf das gemessene Verschiebungsfeld gefittet werden. Hierbei wurde die Methode der kleinsten Fehlerquadrate gewählt. Allerdings wurden dabei einige Probleme festgestellt [Wie12] und die Querdehnzahl wurde auf $\nu = 0.5$ fixiert, da es sich bei dem Material um Gummi handelt. Dieses Verfahren ergab einen Elastizitätsmodul von $E \approx 7$ MPa.

Das zweite herkömmlichere Verfahren bestand darin das Korn über die ebenen Seitenflächen zu belasten und somit den Elastizitätsmodul direkt aus den Messungen der Verschiebung und Kraft zu ermitteln. Auch hier ergab die Auswertung einen Wert von $E \approx 7$ MPa. Durch die Ermittlung des Elastizitätsmoduls aus verschiedenen Inkrementen der Belastung hat sich allerdings herausgestellt, dass dieser im Bereich von $6 \leq E \leq 7$ MPa variiert [Wie12]. Da das Material aber als linear isotrop elastisch angenommen werden sollte, wurde der E-Modul auf $E = 7$ MPa festgelegt. Um diese Schwankungen dennoch mit in die Analyse einzubeziehen, wurde eine Sensitivitätsanalyse bezüglich des Elastizitätsmoduls ausgetragen.

3.4 Bestimmung der Kontaktpunkte

Die Kontaktpunkte der Partikel im Granulat stellen eine essentielle Eingangsgröße von GEM dar, können allerdings nicht exakt bestimmt werden. Da das Material so gewählt wurde, dass es sich bei Belastung merklich verformt, sind die Kontakte eher Kontaktlinien (oder -flächen) als Kontaktpunkte. Ein Kontaktpunkt ist als die Stelle eines Kontakts definiert, an der nur Kräfte zwischen den Partikeln und keine Momente wirken. Daher ist es wichtig bei der Anwendung von GEM diese Punkte möglichst genau zu ermitteln, da das Verfahren keine Momente an den Kontaktpunkten in ihrer Formulierung des Gleichgewichtes berücksichtigt. Analog zur Bestimmung der elastischen Parameter wird die Position der Kontaktpunkte mit zwei verschiedenen Verfahren abgeschätzt.

Die erste Methode besteht darin, eine gerade Linie zwischen den Grenzpunkten der Kontaktflächen zu ziehen und den Mittelpunkt dieser Linie als Kontaktpunkt zu bezeichnen. Beim zweiten Ansatz werden Polynome eines zu ermittelnden Grades jeweils an die Form beider in Kontakt stehender Körner angelegt. Die Stelle, an der beide Polynome denselben Gradienten aufweisen, wird zum Kontaktpunkt erklärt.

Es ergaben sich durch beide Verfahren leicht unterschiedliche Kontaktpunkte. Die Sensitivität von GEM bezüglich dieser Eingangsgröße wurde ebenfalls untersucht und wird im Folgenden dargestellt.

4 Anwendung und Validierung von GEM

4.1 Durchgeführte Experimente

Die im Rahmen dieses Projektes durchgeführten Experimente wurden an dem 1γ - 2ε [JLDF92] Schergerät im *Laboratoire 3SR* in Grenoble durchgeführt. Dieser Versuchsapparat ist in der Lage einen ebenen Spannungszustand im granularen Medium zu kreieren. Das Gerät kann Stauchungen in horizontaler und vertikaler Richtung (2ε) sowie eine Scherdehnung (1γ) aufbringen. Die Belastung in 1γ - 2ε wird durch das Aufbringen von einer Motorgeschwindigkeit kontrolliert und wird somit größtenteils durch die Verzerrungsrate gesteuert. Werden die Spannungskomponenten allerdings nah den durch die aufgebrachten Dehnungen wirkenden Spannungen gehalten, so kann jeglicher dehnungs- oder spannungsgesteuerte Versuch durchgeführt werden. Für eine ausführliche Beschreibung des Schergerätes siehe [JLDF92].

Es wurden Versuche unter isotropen und ödometrischen Randbedingungen durchgeführt. Im Folgenden wird allerdings nur auf den isotropen Kompressionsversuch eingegangen. Die entsprechende Spannungs-Dehnungskurve ist in Abbildung 4 dargestellt. Im 1γ - 2ε Schergerät wurden zu diesem Zweck 11 Körner unterschiedlicher Größe und Form, wie beispielsweise in Abbildung 1 dargestellt, eingebaut.

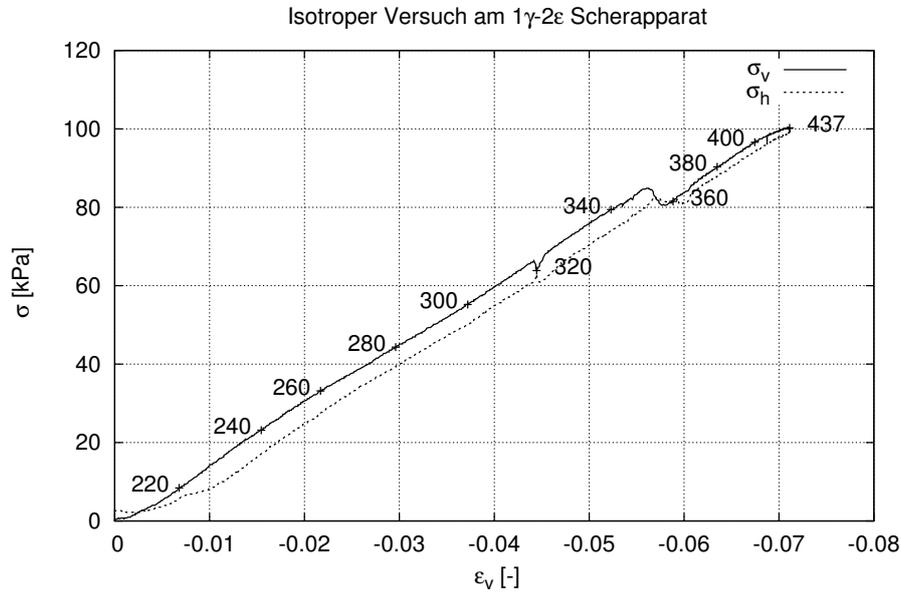


Abbildung 4: Versuch an $1\gamma-2\varepsilon$ mit isotropen Spannungspfad - Markierungen entsprechen der Photonnummer

4.2 Ergebnisse der Anwendung von GEM

Um schließlich das Verzerrungsfeld eines jeden Partikels zu ermitteln, musste ein Inkrement der Belastung gewählt werden. Da es nicht von Bedeutung ist, welches Inkrement für die Ermittlung des mittleren Dehnungsfeldes genutzt wird, wurde das größtmögliche gewählt, welches noch zufriedenstellende DIC-Resultate liefert. Die einzige Bedingung war, die undeformierte als initiale Konfiguration zu wählen, da nur elastische Stoffmodelle in GEM zum Einsatz kommen können. Die Auswertung wird am Inkrement 206-260 dargestellt, siehe Abbildung 4.

Nach der Bestimmung aller Eingangsgrößen für GEM kann es schließlich auf das ausgewählte Inkrement 206-260 angewandt werden. Die ermittelten intergranularen Kräfte sind in Abbildung 5 dargestellt. Die Kräfte in dieser Darstellung sind entsprechend ihrer definierten Richtung in der Origin-Extremity Notation eingetragen. Hierbei handelt es sich bei allen Kräften um Druckkräfte mit Ausnahme einer Zugkraft, die durch den grünen Kreis markiert ist. Da es in einem kohäsionslosen granularen Medium keine Zugkräfte zwischen den Partikeln geben kann, muss eine Fehlerquelle in den Eingangsgrößen vorhanden sein. Höchstwahrscheinlich liegt die Fehlerquelle in der Genauigkeit der Eingangsdaten und der Empfindlichkeit des Verfahrens diesen gegenüber, da die Kraft, die den Fehler aufweist, einen sehr kleinen Betrag im Vergleich

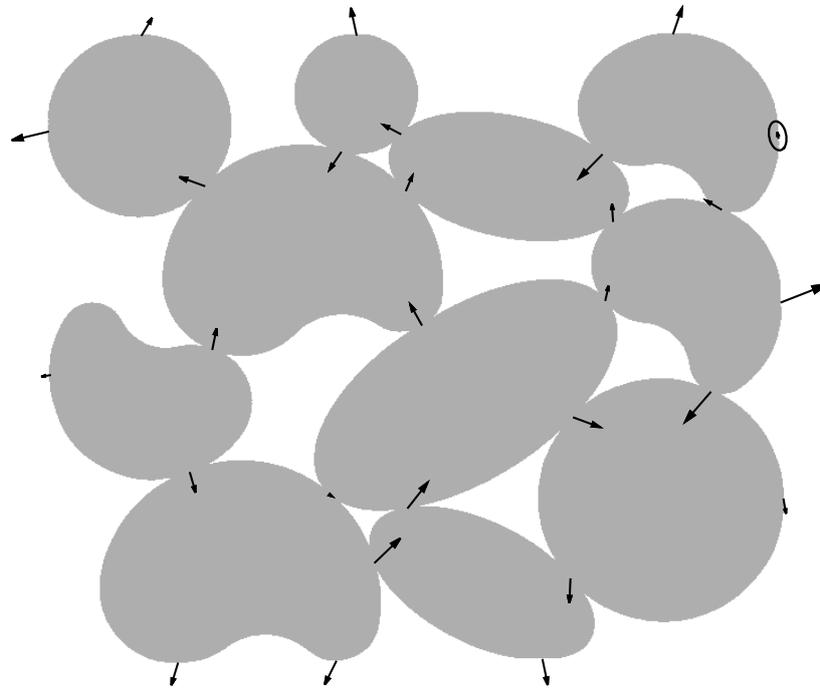


Abbildung 5: GEM: Kontaktkräfte - Inkrement 206-260

zu den anderen besitzt. Die Sensitivität von GEM bezüglich der Eingangsgrößen wurde untersucht und wird später ausgewertet.

Um die Berechnungsergebnisse zu überprüfen, wurde die Summe aller auf jeden einzelnen Partikel wirkenden Kräfte ermittelt, woraus sich ergab, dass die Partikel sich teilweise nicht in statischem Gleichgewicht befanden. Das kann zum einen auf die Lösung der überbestimmten Gleichungssysteme (6) und (7) und zum anderen auf die Unschärfe der Eingangsgrößen zurückgeführt werden.

4.3 GEM-plus

Um statisches Gleichgewicht der einzelnen Körner bei der Anwendung von GEM zu erzwingen, ist GEM-plus, eine modifizierte Version von GEM, entwickelt worden. Die Grundlage von GEM-plus ist dieselbe wie die von GEM, siehe Gleichungen (6) und (7). Allerdings werden die Gleichungssysteme anders gelöst. Da sich die einzelnen Körner definitiv in statischem Gleichgewicht befinden, wird das dem entsprechende System (6) exakt gelöst und die Impulserhaltung (7) mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate nur über die Bedingung, dass die intergranularen Kräfte statisches

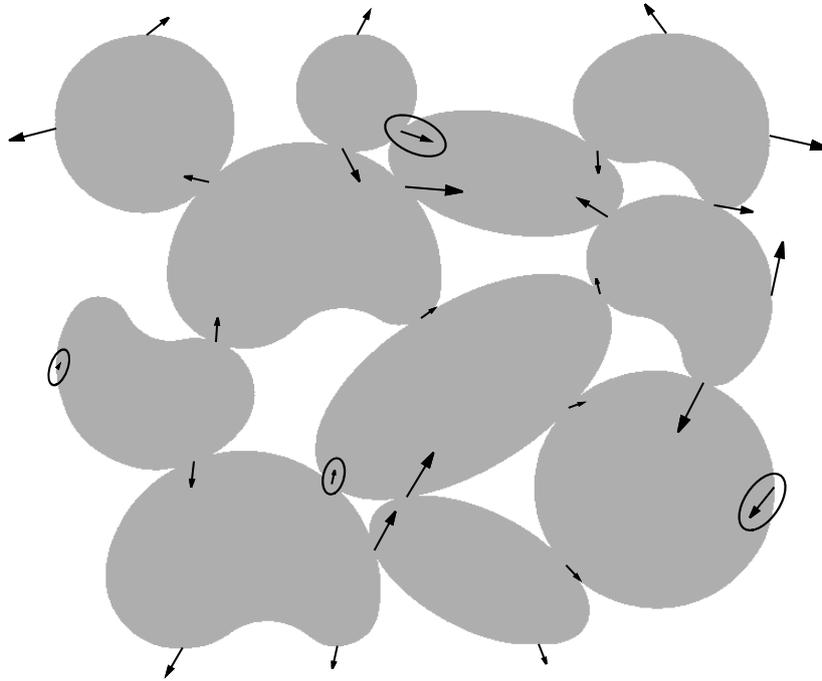


Abbildung 6: GEM-plus: Kontaktkräfte - Inkrement 206-260

Gleichgewicht der einzelnen Partikel erzeugen, approximiert. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit und der Methode der kleinsten Fehlerquadrate können die folgenden Gleichungssysteme ermittelt werden:

$$\underline{\underline{N}}^t \underline{\underline{K}}^{At} \underline{\underline{F}}^C = \underline{\underline{N}}^t \underline{\underline{K}}^{At} \underline{\underline{S}}^A \quad (10)$$

$$\underline{\underline{K}}_{red}^E \underline{\underline{F}}^C = \underline{\underline{F}}_{red}^E \quad (11)$$

Das Gleichungssystem für statisches Gleichgewicht musste um eine Gleichgewichtsbedingung vermindert werden und ergibt sich nun über die Matrix $\underline{\underline{K}}_{red}^E$ und den Vektor $\underline{\underline{F}}_{red}^E$. $\underline{\underline{N}}$ sei die Basis des Nullraums von $\underline{\underline{K}}_{red}^E$. Eine ausführliche Herleitung von GEM-plus ist in [Wie12] dargestellt.

Die Anwendung von GEM-plus auf dasselbe Inkrement des isotropen Belastungsversuches mit denselben Eingangsgrößen resultierte in unterschiedlichen intergranularen Kräften, siehe Abbildung 6. Allerdings werden mehr und größere Zugkräfte durch GEM-plus ermittelt. Eine mögliche Erklärung könnte sein, dass GEM-plus wesentlich empfindlicher auf die Genauigkeit der Position der Kontaktpunkte ist als GEM, da das statische Gleichgewicht durch die Lösung erzwungen wird. Eine Untersuchung dieser Sensitivität wird ebenfalls im Folgenden dargestellt.

4.4 Sensitivitätsanalyse

Wie bereits herausgestellt, ist es wichtig, die Sensitivität der Methode bezüglich ihrer Eingangsgrößen zu untersuchen, um Aussagen hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit zu machen. In Abbildung 5 ist zu sehen, dass sich aus der Anwendung von GEM eine Zugkraft ergeben hat. Es wurde angenommen, dass dieser Fehler durch die Sensitivität bezüglich der Kontaktpunkte hervorgerufen wurde, da diese Kraft relativ klein ist. Um die Empfindlichkeit zu überprüfen, wurde die Position des Kontaktpunktes innerhalb der Kontaktzone vertikal nach oben und unten verschoben. Durch die Änderung dieser Eingangsgröße haben sich die Kräfte im direkten Umfeld des entsprechenden Kontaktpunktes geändert. In Abbildung 7 ist die Differenz zwischen den resultierenden intergranularen Kräften mit dem ursprünglichen und einem veränderten Kontaktpunkt dargestellt. Der Kontaktpunkt ist der, an dem die Zugkraft in Abbildung 5 entstanden ist. Die höchste Änderung einer Kraft durch das Verschieben dieses Punktes betrug 7%.

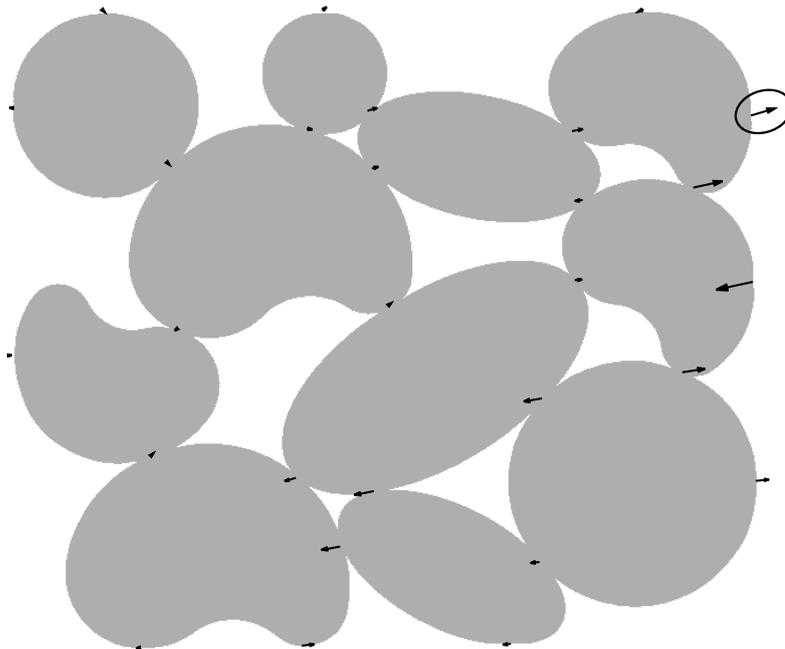


Abbildung 7: GEM: Kraftänderung durch Verschieben des in Abbildung 5 umrandeten Kontaktpunktes

Die Anwendung von GEM-plus auf dieselbe Änderung des Kontaktpunktes resultierte in einer Kraftänderung von bis zu 13%. Die Vermutung der erhöhten Sensitivität

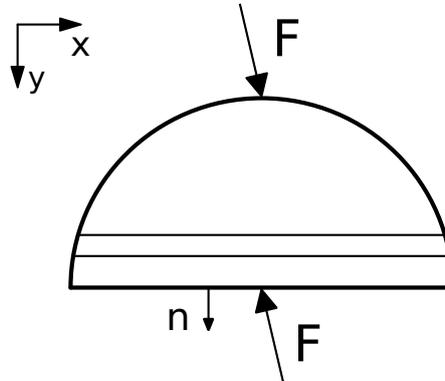


Abbildung 8: Gleichgewicht und Anwendung von Cauchy's Theorem am Einzelkorn

von GEM-plus auf die Kontaktpunkte durch das Erzwingen des statischen Gleichgewichtes konnte damit bestätigt werden. Damit änderte sich die Kraft von Zug- auf Druckkraft.

Da die elastischen Parameter eher unscharf bestimmt wurden und in einem granularen Medium auch eher unscharf bestimmt werden können, wurde die Sensitivität der Methode ebenfalls bezüglich des Elastizitätsmoduls untersucht. Aus der Bestimmung von E ergab sich ein Bereich von $6 \leq E \leq 7$ MPa. Die Anwendung von GEM auf einen E-Modul von 6 und 7 MPa zeigte, dass GEM sehr empfindlich hinsichtlich dieser Eingangsgröße ist. Die Kräfte änderten sich bis maximal 30%. Im Gegensatz dazu stellte sich heraus, dass GEM-plus diesbezüglich nicht so empfindlich ist, da sich nur eine Kraftänderung bis zu 20% ergab. Allerdings ist die Empfindlichkeit immer noch sehr hoch.

4.5 Validierung/Bewertung der Ergebnisse von GEM

Um die ermittelten Kräfte zu überprüfen, musste eine andere alternative Methode in die Betrachtungen einbezogen werden. Mit einem Verzerrungsfeld, welches durch DIC ermittelt werden kann, lässt sich ein Spannungsfeld über ein Stoffmodell bestimmen, siehe z.B. Gleichung (9).

Mit Hilfe von Cauchy's Theorem kann ein Spannungsvektor $\vec{T}^{(n)}$, der auf eine Fläche des Materials wirkt, aus dem Spannungsfeld bestimmt werden [Hol00]:

$$\vec{T}^{(n)} = \sigma \vec{n} \quad (12)$$

\vec{n} sei die Normale zur betrachteten Ebene. Mit diesem Spannungsvektor lässt sich über

Integration eine Kraft ermitteln:

$$\vec{F} = \int_{\Omega} \vec{T}^{(n)} d\Omega \quad (13)$$

Hinsichtlich des Experimentes kann jede beliebige Ebene innerhalb eines Partikels herangezogen werden, um die Kraft zu berechnen, mit der Bedingung, dass es nur einen Kontakt an der Stelle, an dem der Partikel geschnitten wird, geben darf, siehe Abbildung 8. Anderenfalls würde die so ermittelte Kraft zwei oder mehr Kontaktkräften entsprechen.

Dieser Ansatz wurde anhand eines Versuches validiert, bei dem nur ein Korn belastet wurde, da hierbei die Kontaktkraft der aufgebrachten Kraft entspricht. Dieser Versuch wurde bereits bei der Ermittlung der elastischen Parameter genutzt. Allerdings ist diese Methode stärker abhängig von den DIC-Resultaten als GEM, da jeder einzelne Wert entlang der betrachteten Ebene und nicht ein gemittelter verwendet wird. Daher werden die Resultate in hohem Maße von Rauschen in den Verzerrungsfeldern beeinflusst. Mit der beschriebenen Optimierung der DIC-Resultate konnten sehr gute Verzerrungsfelder ermittelt werden, so dass im Validierungsversuch eine Kraft ermittelt wurde, die der aufgebrachten entsprach.

Exemplarisch wurden vier Kontaktkräfte von GEM mit diesem Verfahren überprüft. Der Vergleich beider Methoden ergab eine relativ gute Übereinstimmung mit einer maximalen Abweichung von 30%. Als Vergleichsmaß diente die Norm der jeweiligen Kontaktkräfte.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In Andrade [AA12] wurde ein Verfahren (GEM) vorgestellt und numerisch validiert, welches in der Lage ist, Kontaktkräfte in granularen Medien zu bestimmen. Mit Kontaktkräften kann wiederum auf lokale Spannungszustände geschlossen werden. Damit wäre es schließlich möglich den Zusammenhang zwischen den bisher gemessenen makroskopischen Größen und Phänomenen zu den mikromechanischen Verhaltensweisen zu ergründen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war die erste experimentelle Anwendung und Validierung von GEM. Zu diesem Zweck wurde ein Granulat aus Gummikörnern im 1γ - 2ε Schergerät in Grenoble in einem ebenen Spannungszustand belastet. Die aus der *Digital Image Correlation* resultierenden Verzerrungsfelder machten es notwendig, eine Optimierung des Algorithmus über ein Glätten der Verschiebungsbilder und eine Neuberechnung der Verzerrungen durchzuführen. Mit den gesammelten Input-Daten konnte GEM auf einen isotropen Belastungsversuch angewandt werden. Zusätzlich wurde eine Modifikation von GEM vorgestellt (GEM-plus), in der die Impulserhaltung mit der Restriktion der Erfüllung des statischen Gleichgewichts approximiert wird. Eine Sensitivitätsanalyse hat gezeigt, dass GEM und GEM-plus, beide jeweils

zu unterschiedlichem Maße, sehr empfindlich gegenüber Schwankungen ihrer Eingangsgrößen sind. Zur Validierung der intergranularen Kräfte wurde eine alternative Formulierung in Betracht gezogen. Über einen Vergleich der Normen ergab sich eine maximale Abweichung von 30% der Kräfte beider Methoden.

Eine mögliche Lösung zur Verringerung der Sensitivität von GEM wäre mehr Unbekannte einzuführen. So müsste die Einführung von unbekannt Momenten an den Kontaktpunkten die Abhängigkeit von GEM bezüglich der Genauigkeit der Kontaktpunkte deutlich mindern. Allerdings würde sich dadurch die Anzahl an Unbekannten um $1N_c$ bzw. $3N_c$ in 2D bzw. 3D erhöhen. Um die Abhängigkeit der elastischen Parameter in der Impulserhaltung zu beseitigen, könnten diese als Unbekannte in die Formulierung eingeführt werden, wodurch sich die Zahl der Unbekannten um zwei erhöhen würde.

In der jüngsten Veröffentlichung der Forschungsgruppe um Andrade [HMRA14] wurde eine neue modifizierte Formulierung von GEM und ihre Anwendung vorgestellt. In dieser wird das hier verwendete Prinzip von GEM-plus aufgegriffen und noch um die Bedingung erweitert, dass die Kontaktkräfte nur abstoßend zwischen den Partikeln wirken (Druckkräfte) und je nach Anwendung einem Coulombschen Reibungsgesetz folgen. Mit dieser Bedingung kann Störungen in den Input-Daten entgegengewirkt werden. Des Weiteren wurde eine Lösungsstrategie unter Anwendung der Tikhonov-Regularisierung vorgestellt, um die Unschärfe der Eingangsgrößen zu berücksichtigen.

Diese Arbeit stellt damit einen ersten Schritt auf dem langen Weg zur Ermittlung von Spannungen in Granulaten dar. Mit den immer genauer werdenden Methoden zur Bestimmung des Deformationsfeldes in granularen Medien, zum Beispiel in Versuchen im Röntgen-CT, bietet die *Granular Element Method* ein Verfahren, mit welchem es voraussichtlich bald möglich sein wird, die Kornkontaktkräfte in natürlichen Granulaten zu bestimmen.

Literatur

- [AA12] ANDRADE, JE ; AVILA, CF: Granular element method (GEM): linking inter-particle forces with macroscopic loading. In: *Granular Matter* (2012)
- [CCL97] CALVETTI, F ; COMBE, G ; LANIER, J: Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material: relation between structure evolution and loading path. In: *Mechanics of cohesive - frictional Materials 2* (1997), Nr. 1997, S. 121–163
- [CS79] CUNDALL, PA ; STRACK, ODL: A discrete numerical model for granular assemblies. In: *Géotechnique* 29 (1979), Nr. 1, S. 47–65

- [DJ72] DRESCHER, A ; JONG, G de Josselin d.: Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 20 (1972), Nr. 5, S. 337–340
- [Hal12] HALL, SA: Digital Image Correlation in Experimental Geomechanics. In: VIGGIANI, Gioacchino (Hrsg.) ; HALL, Stephen A. (Hrsg.) ; ROMERO, Enrique (Hrsg.): *ALERT Doctoral School 2012: Advanced experimental techniques in geomechanics*, 2012
- [HMRA14] HURLEY, R ; MARTEAU, E ; RAVICHANDRAN, G ; ANDRADE, JE: Extracting inter-particle forces in opaque granular materials: Beyond photoelasticity. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 63 (2014), S. 154–166
- [Hol00] HOLZAPFEL, GA: *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, 2000
- [JLDF92] JOER, H ; LANIER, J ; DESRUES, J ; FLAVIGNY, E: $1\gamma 2\varepsilon$: a new shear apparatus to study the behaviour of granular materials. In: *Geotechnical Testing Journal* 15 (1992), S. 129–137
- [LL08] LIU, C ; LOVATO, ML: Elastic Constants Determination and Deformation Observation Using Brazilian Disk Geometry. In: *Proceedings of the XIth International Congress and Exposition*. Orlando : Society for Experimental Mechanics Inc., 2008
- [PQXA09] PAN, B ; QIAN, K ; XIE, HM ; ASUNDI, A: Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement: a review. In: *Measurement Science and Technology* 20 (2009), Nr. 6
- [PXH⁺06] PAN, B ; XIE, HM ; HUA, T ; WANG, WN ; FANG, Y: Displacement Smoothing and Strain Estimation Using Savitaky-Golay Filters in Digital Image Correlation. In: *Key Engineering Materials* 326-328 (2006), S. 135–138
- [PXXD06] PAN, B ; XIE, HM ; XU, BQ ; DAI, FL: Performance of sub-pixel registration algorithms in digital image correlation. In: *Measurement Science and Technology* 17 (2006), Nr. 6, S. 1615–1621
- [VH08] VIGGIANI, G ; HALL, SA: Full-field measurements, a new tool for laboratory experimental geomechanics. In: BURNS, SE (Hrsg.) ; MAYNE, PW (Hrsg.) ; SANTAMARINA, JC (Hrsg.): *Proceedings of the 4th International Symposium on Deformation Characteristics of Geomaterials*, 2008, 3–26
- [Wie12] WIEBICKE, M: *Assessing Forces between Elastic Grains using 2D Digital Image Correlation*, Université Joseph Fourier, Grenoble INP, Masterarbeit, 2012

