

# HENRY

Hydraulic Engineering Repository

Ein Service der Bundesanstalt für Wasserbau

---

Article, Published Version

**Platzek, Frank; Stelling, Guus; Jankowski, Jacek; Patzwahl, Regina; Pietrzak, Julie**

## **Ein effizienter semi-impliziter Subgrid-Ansatz für Strömungen mit freier Oberfläche auf hierarchischen Gittern**

BAWMitteilungen

---

Verfügbar unter/Available at: <https://hdl.handle.net/20.500.11970/102499>

Vorgeschlagene Zitierweise/Suggested citation:

Platzek, Frank; Stelling, Guus; Jankowski, Jacek; Patzwahl, Regina; Pietrzak, Julie (2017): Ein effizienter semi-impliziter Subgrid-Ansatz für Strömungen mit freier Oberfläche auf hierarchischen Gittern. In: BAWMitteilungen 100. Karlsruhe: Bundesanstalt für Wasserbau. S. 207-224.

### **Standardnutzungsbedingungen/Terms of Use:**

Die Dokumente in HENRY stehen unter der Creative Commons Lizenz CC BY 4.0, sofern keine abweichenden Nutzungsbedingungen getroffen wurden. Damit ist sowohl die kommerzielle Nutzung als auch das Teilen, die Weiterbearbeitung und Speicherung erlaubt. Das Verwenden und das Bearbeiten stehen unter der Bedingung der Namensnennung. Im Einzelfall kann eine restriktivere Lizenz gelten; dann gelten abweichend von den obigen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Documents in HENRY are made available under the Creative Commons License CC BY 4.0, if no other license is applicable. Under CC BY 4.0 commercial use and sharing, remixing, transforming, and building upon the material of the work is permitted. In some cases a different, more restrictive license may apply; if applicable the terms of the restrictive license will be binding.



# Ein effizienter semi-impliziter Subgrid-Ansatz für Strömungen mit freier Oberfläche auf hierarchischen Gittern

## *An Efficient Semi-Implicit Subgrid Method for Free-Surface Flows on Hierarchical Grids*

Frank Platzek M. Sc., Deltares; Prof. Dr. Ir. Guus Stelling, TU Delft, Stelling Hydraulics; Dr.-Ing. Jacek Jankowski, Dr. rer. nat. Regina Patzwahl, Bundesanstalt für Wasserbau; Prof. Dr. Julie Pietrzak, TU Delft

Es wird eine neue Modellierstrategie zur Effizienzsteigerung rechenintensiver Simulationen von Flüssen vorgestellt. Der Ansatz kombiniert einen semi-impliziten Subgrid-Ansatz zur Berücksichtigung von hochauflösenden Geländeinformationen auf gröberen Netzen mit einer auf Hierarchischen-Netzen basierenden Strategie. Diese Kombination führt zu einer Genauigkeits- und Effizienzsteigerung hydro-numerischer Flussmodelle sowohl im stationären als auch instationären Fall. Die hier präsentierte Arbeit beschränkt sich auf den stationären Fall und zeigt, dass der „Hierarchische-Gitter-Subgrid“-Ansatz zu einer bis zu 43-fachen Verringerung der Rechenzeiten führen kann. Zusätzlich gewährt die Methode einen direkten und automatisierten Einblick in das Gitterkonvergenzverhalten. Es werden die Effizienz und Anwendbarkeit des Ansatzes sowohl an einem schematischen Beispiel als auch an einem realen Flussmodell aufgezeigt. Diesem Beitrag liegt folgende Veröffentlichung zugrunde:

Platzek et al. (2015): An efficient semi-implicit subgrid method for free-surface flows on hierarchical grids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 80 (12): S. 715-741. DOI: 10.1002/fld.4172. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

*A new modelling strategy for improving the efficiency of computationally intensive flow problems in environmental free-surface flows is presented. The approach combines a recently developed semi-implicit subgrid method with a hierarchical-grid solution strategy. The method allows the incorporation of high-resolution data on subgrid scale to obtain a more accurate and efficient hydrodynamic model. The subgrid method improves the efficiency of the hierarchical grid method by providing better solutions on coarse grids. The method is applicable to both steady and unsteady flows, although the particular focus here is on river flows with steady boundary conditions. There, the combined hierarchical*

*grid-subgrid method reduces the computational effort to obtain a steady state with factors up to 43. Additionally, the method provides automatic insight in grid convergence. The efficiency and applicability of the method using a schematic test for the vortex shedding around a circular cylinder and a real-world river case study is demonstrated. This work is based on:*

*Platzek et al. (2015): An efficient semi-implicit subgrid method for free-surface flows on hierarchical grids. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 80 (12): p. 715-741. DOI: 10.1002/fld.4172. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.*

## 1 Einführung *Introduction*

Viele numerische Strömungssimulationen mit freier Oberfläche bilden dynamische Systeme ab, die nahe an einem stationären Zustand sind. Insbesondere bei großräumigen Flusssimulationen wird ein quasistationärer Zustand über einen konstanten Zufluss am oberstromigen und einen festen Wasserspiegel am unterstromigen Modellrand in Verbindung mit einem globalen Gleichgewicht zwischen Druckgradient und Sohlenreibung erreicht (z. B. Ge und Sotiropoulos, 2005; Lukacova-Medvidova und Teschke, 2006; Patzwahl et al., 2008; Jia et al., 2009; Paik et al., 2010; Kang et al., 2011).

Dabei ist zumeist eine Reihe von Topographieskalen – von Krümmungen und Mäandern bis hin zu Buhnen, Dünen und Riffeln – in der jeweiligen Problemstellung präsent. Stetige Fortschritte in der Fernerkundung (z. B. LIDAR) und anderer Messtechniken haben zu immer detaillierteren und genaueren Geländedaten und dem Anspruch, diese in den Modellierprozess einzubinden (z. B. Forzieri et al., 2011;

Dottori et al., 2013), geführt. Um den Einfluss „aller“ Geometrieskalen auf die Strömung korrekt abbilden zu können, ist (lokal) eine hohe Auflösung notwendig.

Beim Modellaufbau stehen sich in diesem Zusammenhang immer zwei Aspekte scheinbar unauflösbar gegenüber: Effizienz und Genauigkeit. Effizienz wird durch den Einsatz schneller Gleichungslöser und Parallelisierung der Methode erreicht. Für stationäre Berechnungen bedeutet effizientes Rechnen auch eine möglichst kurze Anlaufzeit (Spin-Up) zum Herstellen des Gleichgewichts zwischen den Randbedingungen und zum Dämpfen der Anfangsstörungen. Was die Genauigkeit anbelangt, können mit Ergebnissen auf verschiedenen Gittern Aussagen über die Gitterabhängigkeit von Lösungen und deren Konvergenz und damit auch über die Genauigkeit des Resultats gemacht werden.

In den letzten Jahrzehnten wurde viel an der Entwicklung von Methoden gearbeitet, die sich das Zusammenspiel zwischen den Skalen der vorkommenden Geometrien und der Gitterauflösung zu Nutze machen. Solche Ansätze arbeiten mit der groben Näherung einer Problemstellung, die kleinskalige Prozesse beinhaltet, und haben das grundsätzliche Problem der möglichst verlustfreien Vergrößerung kleinskaliger Größen, wie z. B. Geometriedaten.

Davon unabhängig wurden Ansätze entwickelt, die die Nutzbarmachung von Informationen im Subgitterbereich, z. B. durch Mittelung der Informationen im Berechnungselement und Einführung einer Zell-Porosität, möglich machen und damit zu einer Erhöhung der Genauigkeit beitragen sollen (z. B. Olsen und Stokseth, 1995; Defina, 2000; Lane et al., 2004; Bates et al., 2006; McMillan und Brasington, 2007; Sanders et al., 2008; Cea und Vázquez-Cendón, 2010; Yu und Lane, 2011).

In jüngerer Zeit wurde ein neuer Subgrid-Ansatz entwickelt, der hochauflösende Geländedaten mittels Integration über die Berechnungszelle berücksichtigt (Casulli, 2009; Casulli und Stelling, 2011). Auf diese Weise wird auch für nichtlineare Terme, wie z. B. Volumen oder Sohlenreibung, ein genauer Zellmittelwert berechnet. Damit kann die Gitterabhängigkeit der Ergebnisse reduziert werden und, je nach Anwendung, der Einsatz von (sehr) groben Gittern ohne Genauigkeitsverlust möglich sein. Vor allem in Bereichen mit ausgepräg-

ter Nass-Trocken-Dynamik (z. B. Wattgebiete) hat der Ansatz sowohl bei 2D- als auch 3D-Berechnungen große Vorteile (Casulli, 2009; Casulli und Stelling, 2011). Sie ist in das hydro-numerische Verfahren UnTRIM<sup>2</sup> – welches in der BAW in Anwendung ist – implementiert (Casulli, 2009; Casulli und Stelling, 2011). Ihre Effizienz gegenüber dem konventionellen UnTRIM-Modell (Casulli und Walters, 2000; Casulli und Zanolli, 2002) wurde bereits bei Sehili et al. (2014) nachgewiesen.

Die Methode wird in Bezug auf Genauigkeit, Effizienz und praktische Anwendbarkeit kontinuierlich weiterentwickelt. Darunter fallen z. B. verschiedene Ansätze zur Berücksichtigung von Sohlenreibung und Advektion bei flacher Strömung und lokale Gitterverfeinerung (Stelling, 2012; Volp et al., 2013).

Auf diesem Wissen aufbauend wurde eine Methode entwickelt, die diesen Subgrid-Ansatz (SG) mit einem Ansatz auf hierarchisch feiner werdenden Gittern (HG) zur effizienten Berechnung von Strömungen kombiniert (Abschnitt 2.2). Damit können die verschiedenen räumlichen (und deswegen auch zeitlichen) Skalen, welche komplexe Geometrien mit sich bringen, effektiv berücksichtigt werden und zu deutlichen Einsparungen bei der Rechenzeit führen.

Zusätzlich liefert die Methode ohne weitere notwendige Schritte alle Zutaten für eine Gitterkonvergenzstudie. Weiterhin kann die Methode zur effizienten Generierung von Startbedingungen für instationäre Berechnungen genutzt werden.

## 2 Der kombinierte Hierarchische-Gitter-Subgrid-Ansatz

### *The combined hierarchical grid-subgrid method*

Es wird eine neue effiziente Modellierstrategie vorgestellt, die den Subgrid-Ansatz, wie er von Casulli (2009) und Casulli und Stelling (2011) entwickelt und von Stelling (2012) und Volp et al. (2013) weiterentwickelt wurde, mit einer auf hierarchischen Gittern basierenden Lösungsmethode kombiniert. Dabei liefert der Subgrid-Ansatz die Grundlage für den hydrodynamischen Rechenkern. Bevor der kombinierte Ansatz in Kapitel 2.2 erläutert wird, werden einige grundlegende Eigenschaften der Subgrid-Methode vorgestellt.

## 2.1 Der Subgrid-Ansatz

### The subgrid method

Mittels Subgrid-Ansätzen kann der Einfluss von Subgitter-skaligen Prozessen, wie z. B. topographische Variabilität, Turbulenz, Bauwerke oder Vegetation, in einer Berechnung berücksichtigt und die Genauigkeit der Verfahren auf groben Netzen verbessert werden.

Nach Kenntnis der Autoren war Casulli (2009) der Erste, der Subgrid-Effekte mit einem integralen Ansatz über Rechenzellen und -kanten berücksichtigte. Mit einem semi-impliziten Verfahren löst Casulli (2009) die Flachwassergleichungen, indem er die Impulsgleichungen in der Kontinuitätsgleichung substituiert. So ergibt sich normalerweise ein lineares Gleichungssystem für die freie Oberfläche. Bei Anwendung des Subgrid-Ansatzes führt dieses Verfahren aber zu einem nichtlinearen Gleichungssystem, was zu einer genaueren Abbildung des Trockenfallens und Überflutens führt.

Die Impulsgleichungen im Subgrid-Ansatz können auf verschiedene Weisen abgeleitet werden: (a) mit tiefen- und kantengemittelten Geschwindigkeiten wie

in Casulli (2009), (b) mit Subgrid-Geschwindigkeiten wie in Casulli und Stelling (2011) oder (c) mit Volumengemittelten Geschwindigkeiten wie in Stelling (2012) und Volp et al. (2013). Auf strukturierten Vierecksnetzen ist der Ansatz von Casulli und Stelling (2011) sehr geeignet für eine Kombination mit einem Lösungsverfahren auf Hierarchischen-Netzen (Kapitel 2.2). Der Einfachheit halber wird der 3D-Ansatz von Casulli und Stelling (2011) im 2D-tiefengemittelten Modus angewendet.

Die Strömungsgleichungen werden auf einem rechteckigen Netz mit konstanten Gitterweiten  $\Delta x$  und  $\Delta y$  diskretisiert. Das Gitter hat  $I$  Zellen in der  $x$ -Richtung und  $J$  Zellen in der  $y$ -Richtung. Dabei wird eine versetzte („staggered“) Positionierung von Variablen benutzt, d. h. Wasserspiegel  $\zeta$  und horizontale Viskosität  $\nu_h$  sind im Zellzentrum und die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  auf Kanten definiert (siehe Bild 1).

In konventionellen Verfahren wird angenommen, dass Variablen wie Tiefe, Rauheit und Geschwindigkeit einen Wert pro Zelle oder Kante haben. Mit dem Subgrid-Ansatz gilt dies nur für den Wasserspiegel und das Zellvolumen. Andere Variablen dürfen innerhalb von Zel-

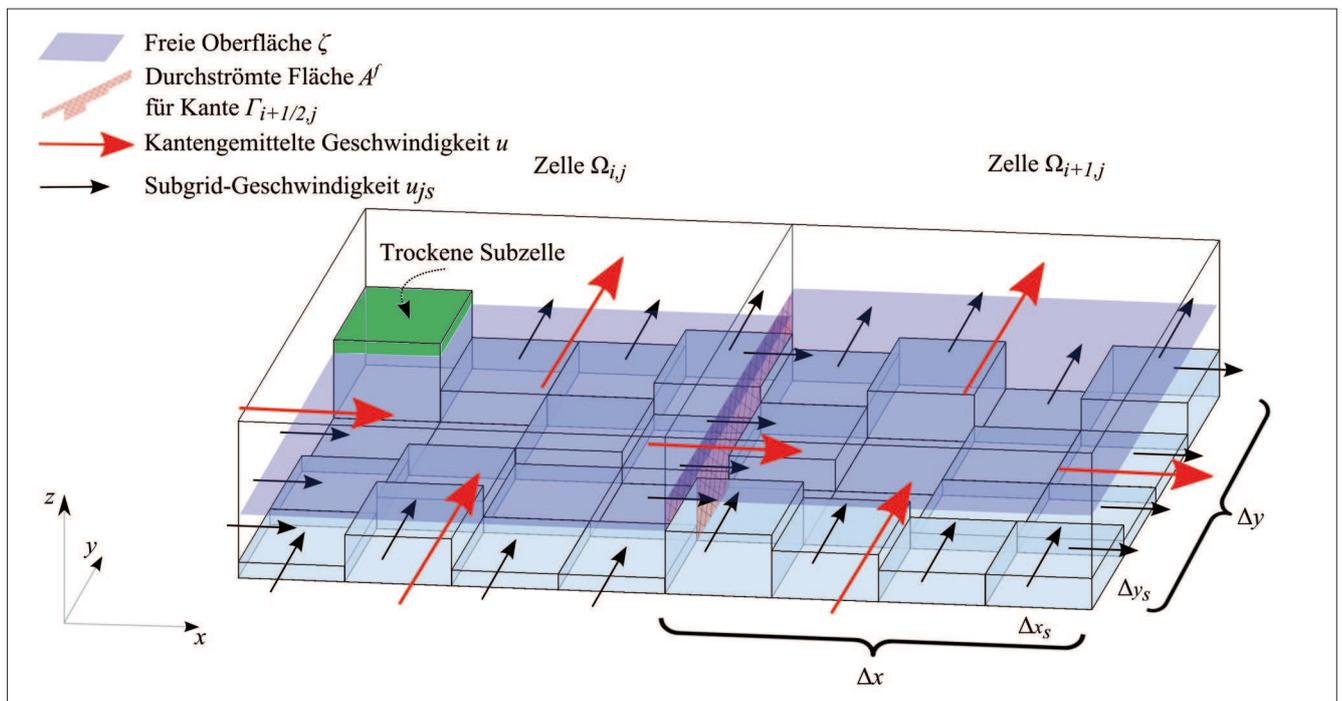


Bild 1: Darstellung von Rechenzellen mit Subgrid-Topographie, in diesem Fall mit 4 x 4 Subgrid-Zellen pro Rechenzelle. Die freie Oberfläche ist auf dem Rechennetz definiert, die Topographie auf Subgrid-Ebene, wobei trockene Sub-Zellen möglich sind. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Figure 1: Illustration of two computational cells with topography defined on subgrid level, using in this case 4 x 4 subgrid cells per computational cell. The water level is defined on computational grid level. The topography can vary on subgrid level, allowing the occurrence of dry subcells. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

len (z. B. Sohlenhöhe oder turbulente Wirbelviskosität) oder an Kanten entlang (z. B. Sohlenhöhe, Rauheit und Geschwindigkeit) variieren. Dieses Prinzip ist in Bild 1 für zwei Rechenzellen mit Subgrid-Topographie dargestellt. Im Bild 1 hat die linke Zelle eine trockene Subzelle. Auch sind die kantengemittelten und die Subgrid-Geschwindigkeitsvektoren sowie die Querschnittsfläche zwischen den Zellen dargestellt. Anstelle einer konventionellen Berechnung der kantengemittelten Geschwindigkeiten werden mit dem Subgrid-Ansatz aus Casulli und Stelling (2011) die Subgrid-Geschwindigkeiten entlang einer Rechenkante berechnet.

Das Zellvolumen und die mit Wasser bedeckte Oberfläche einer Zelle sind abhängig von der Subgrid-Sohlentopographie und dem Wasserspiegel und werden aus diesem Grund durch Integration über diese Zelle berechnet. Das teilweise Trockenfallen einer Zelle ist dabei möglich, wie in Bild 1 zu erkennen ist.

Verschiedene Beispiele aus Casulli (2009), Casulli und Stelling (2011), Stelling (2012), Volp et al. (2013) und Sehili et al. (2014) zeigen, dass auf relativ groben Netzen mit Subgrid-Ansatz fast die gleichen Ergebnisse wie auf feinen Netzen generiert werden können, allerdings mit signifikant reduzierten Rechenzeiten. Dadurch, dass keine Mittelung von hochaufgelösten Daten stattgefunden hat, werden die Volumen und die nassen und durchströmten Flächen mit Hilfe des Subgrid-Ansatzes zusätzlich mit höherer Genauigkeit berechnet. Das führt dazu, dass auch schmale (Subgrid-)Rinnen trotz einer geringen Gitterauflösung noch durchströmt werden können. Außerdem wird die Uferlinie auf Subgrid-Ebene bestimmt, wodurch Trockenfallen und Überfluten mit geringer Abhängigkeit vom Rechenetz abgebildet und die Strömung automatisch am Ufer entlang geführt wird, wie auch von Stelling (2012) und Volp et al. (2013) für die Strömung durch eine Krümmung gezeigt wurde. Sehili et al. (2014) haben gezeigt, dass die Rechenzeiten für ein Ästuarsystem mit dem hydro-numerischen Verfahren UnTRIM2 (Casulli, 2009; Casulli und Stelling, 2011), in welchem der Subgrid-Ansatz implementiert ist, im Vergleich zum Standard-UnTRIM-Verfahren (Casulli und Walters, 2000; Casulli und Zanolli, 2002) um einen Faktor 15- 20 reduziert werden können.

## 2.2 Der Hierarchische-Gitter-Ansatz

### *The hierarchical grid approach*

Ziel ist es, hydronumerische Problemstellungen mit konstanten Randbedingungen effizient zu lösen. Dabei interessiert die Lösung an sich. Darüber hinaus soll aber auch bestimmt werden, ob das verwendete Gitter zu fein oder zu grob ist. Um das festzustellen, wird normalerweise das gleiche Problem mit verschiedenen Gitterauflösungen gerechnet, es wird also eine Gitterkonvergenzstudie, gegebenenfalls mit Hilfe einer Gitterhierarchie, durchgeführt.

Der Subgrid-Ansatz, wie er in Kapitel 2.1 beschrieben wird, führt auf gröberen Gittern nur dann zu ausreichender Genauigkeit, wenn kleinskalige Subgrid-Topographien (z. B. Buhnen) lokal keine nennenswerten Energieverluste oder Strömungsumlenkung verursachen. In solchen Fällen kann der Subgrid-Ansatz unzureichend sein und sind höhere Auflösungen erforderlich. Für Berechnungen auf hochaufgelösten Netzen kann der Spin-Up aber einen wesentlichen Teil der Gesamt-rechenzeit in Anspruch nehmen.

Diese zwei Gedankenstränge kombinierend wurde eine Methode entwickelt, die speziell quasistationäre Berechnungen für Flussmodelle deutlich beschleunigen kann. Bei einer konventionellen Berechnung wird eine quasistationäre Lösung auf einem (feinen) Gitter erzielt, indem solange gerechnet wird, bis die zeitliche Variation einer bestimmten Größe unterhalb eines vorher definierten Grenzwerts liegt. Dieser Vorgang wird als Conventional Time Stepping (CTS) bezeichnet. Die hier vorgestellte Methode geht einen anderen Weg, der in Bild 2 schematisch erläutert wird. Zunächst wird das (feine) „Ursprungs“-Problem P1 auf dem feinsten Gitter 1 rekursiv zu einer Hierarchie von Gittern vergrößert (C). Das letzte Gitter in der Hierarchie (hier: Gitter 6) erlaubt dann die schnelle Berechnung eines quasistationären Zustands mittels Zeitschrittverfahren (Time Stepping, TS). Anschließend wird die Lösung (S6 im Beispiel) auf das nächst-feinere Gitter (Gitter 5) interpoliert, d. h. die Berechnung des Problems P5 wird mit einer sehr guten Näherungslösung initialisiert.

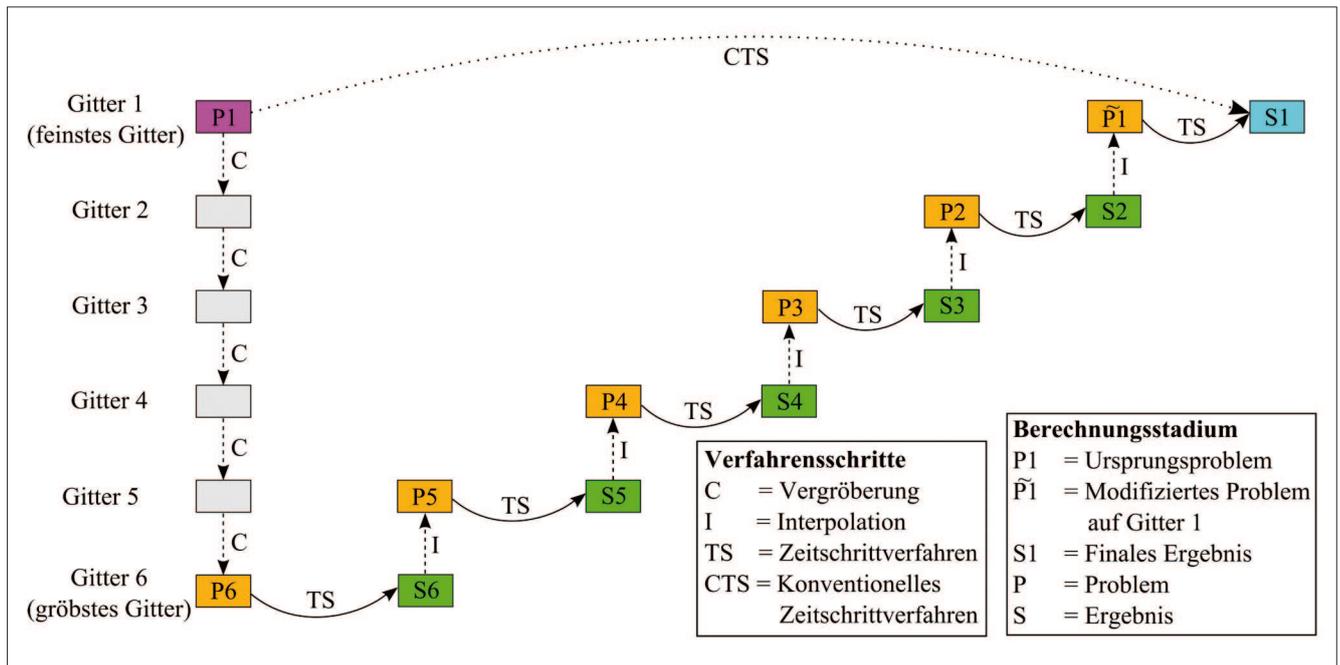


Bild 2: Der Hierarchische-Gitter-Ansatz, inklusive Vergrößerung (C) des originären Problems (P1), das Zeitschrittverfahren (TS) auf einer Reihe von hierarchischen Gittern und Interpolation (I) des Ergebnisses auf das nächstfeinere Gitter. Die gepunktete Linie stellt das konventionelle Zeitschrittverfahren (CTS) auf einem Gitter dar. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Figure 2: The hierarchical grid algorithm showing the coarsening (C) of the original problem (P1), the time stepping (TS) on the series of hierarchical grids and the interpolation (I) of the solution to the next finer grid. The dotted arrow shows the conventional time stepping (CTS) algorithm on a single grid. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Dieser Vorgang wird rekursiv wiederholt bis Gitter 1 erreicht ist oder sich die Lösung nach einem Wechsel von einem auf das nächstfeinere Gitter innerhalb gegebener Grenzen nicht mehr verändert. Im letzteren Fall kann dann davon ausgegangen werden, dass Gitterkonvergenz erreicht ist. Nach der Interpolation der Lösung S2 auf Gitterebene 1 ist ein modifiziertes Problem ( $\tilde{P}1$ ) entstanden. Es kann als verbesserte Startbedingung für das Problem P1 auf dem ursprünglichen Gitter betrachtet werden. In Kapitel 4 wird gezeigt, dass diese Modellierstrategie den erforderlichen Rechenaufwand beträchtlich verringern kann und Einblicke in Gitterkonvergenz mittels einer Ergebnisserie auf einer Folge von hierarchischen Gittern liefert.

Die Effizienz der hierarchischen Gitter lässt sich durch ein einfaches Beispiel erläutern. Bei einer vierfachen (2 x 2) Vergrößerung kann der Zeitschritt in der Regel verdoppelt werden. Da sich die Elementzahl um einen Faktor 4 verringert hat, ergibt sich eine Beschleunigung der Berechnung um den Faktor 8. Für alle weiteren Vergrößerungsschritte gilt das rekursiv. Daraus ergibt sich auch sofort eine Strategie für möglichst effizientes Rechnen, nämlich so viel „Arbeit“ wie möglich

auf den groben und damit „billigen“ Gittern verrichten zu lassen.

Innerhalb des Hierarchische-Gitter-Algorithmus ist das größte Gitter  $I^{max}$  ein frei wählbarer Parameter. Außerdem kann der Modellierer entscheiden, wann ein Ergebnis an ein nächstfeineres Gitter übergeben wird. Entweder findet die Übergabe nach Erreichen eines vorher definierten Stationaritätskriteriums oder nach Abarbeiten einer festen Anzahl von Zeitschritten oder Simulationszeit statt. Zwei Punkte sind wichtig in diesem Vorgehen: Vergrößerung des Problems sowie die Interpolation der Ergebnisse von einem auf das nächstfeinere Gitter. Beide Punkte werden in den folgenden Kapiteln besprochen.

### 2.2.1 Vergrößerung Coarsening

Die Vergrößerung des Problems vom originären Gitter 1 auf die weiteren Gitterebenen innerhalb des hier vorgestellten Hierarchische-Gitter-Ansatzes unterscheidet sich von einem konventionellen Vorgehen. Mit der Ver-

wendung der Subgrid-Methode werden Topographie und Rauheitsparameter auf allen Gitterebenen numerisch integral oder summierend berücksichtigt. Das ist vor allem bei der Topographie sehr wichtig, da mit diesem Vorgehen auf allen Gittern so gut wie das gleiche Volumen betrachtet wird (siehe auch Kapitel 4).

Außerdem ermöglicht dieser Ansatz die Berücksichtigung von Subgitter-skalierten Topographieelementen bereits auf sehr groben Gittern, wie in Bild 3 veranschaulicht wird. Ähnliches gilt für den nichtlinearen Rauheitsterm. Seine Berücksichtigung auf Subgrid-Niveau führt zu einer genaueren Reproduktion seiner Wirkung, wie Casulli und Stelling (2011), Stelling (2012) und Volp et al. (2013) in ihren Arbeiten gezeigt haben. All das macht das Modell weniger empfindlich bezüglich der Gitterauflösung. Das Vergrößern mit dem hier vorgestellten kombinierten Ansatz beinhaltet lediglich eine Verlagerung der Auflösung vom Rechengitter auf das Subgrid. Wird ein Rechengitter dyadisch (z. B. 2 x 2) vergrößert, bleiben die absolute Subgrid-Auflösung und die Topographie unverändert, nur die Anzahl Subgrid-Zellen pro Rechenzelle erhöht sich (siehe auch Bild 3).

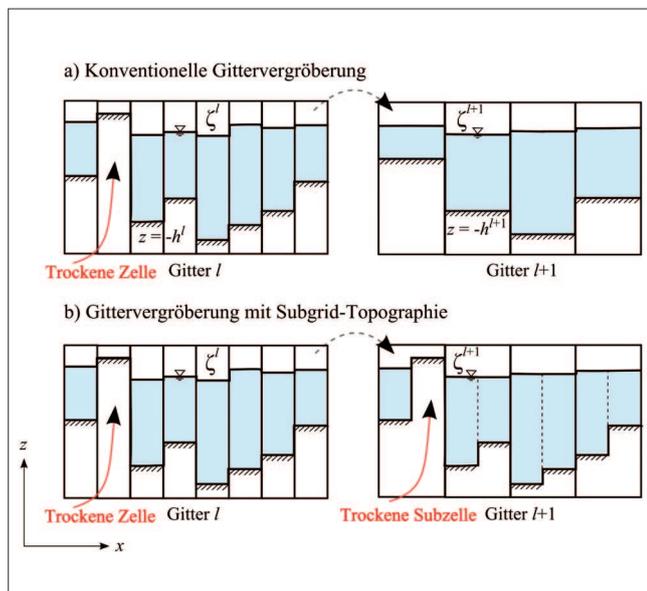


Bild 3: Vergrößerung eines achtzelligen 1D-Gitters (Gitterebene  $l$ ) auf ein vierzelliges (Gitterebene  $l+1$ ); a) konventionelle Vergrößerung; b) Vergrößerung mit Subgrid-Topographie. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Figure 3: Illustration of 1D grid coarsening of an 8-cell grid (level  $l$ ) to a 4-cell grid (level  $l+1$ ); a) conventional grid coarsening; b) coarsening with (2-cell) sub-grid topography. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

## 2.2.2 Interpolation Interpolation

Der zweite sehr wichtige Teilaspekt innerhalb der Methode ist die Übertragung oder Interpolation der Lösung von einem Gitter auf das nächstfeinere Gitter. Dabei muss zwischen der Interpolation des Wasserspiegels (zellzentriert) und der Fließgeschwindigkeiten (kantenbasiert) unterschieden werden. Nachdem die Lösung auf einem Gitter errechnet wurde, sollen die Werte für den Wasserspiegel derart auf das nächstfeinere Gitter übertragen werden, dass möglichst geringe Störungen in dieses Modell mit übertragen werden. Da das Wasserspiegelgefälle bzw. der Druckgradient die bestimmende Antriebsgröße ist, wurde eine Methode gewählt, die, basierend auf linearer Interpolation in Dreiecken, die berechneten Wasserspiegelgradienten erhält.

Auf dem groben Netz sind die Subgrid-Geschwindigkeiten entlang der Zellkanten vorhanden. Diese können über halbe Kanten integriert werden, um die Geschwindigkeiten auf denjenigen Kanten des feineren Netzes zu bestimmen, die mit den Kanten des gröberen Gitters zusammenfallen. Für die vier Kanten, die folglich innerhalb der Zelle des gröberen Gitters liegen, wird pro Zelle eine bilineare Interpolation der Geschwindigkeiten des groben Gitters durchgeführt. Die eingetragenen Störungen sind ausreichend klein und sind innerhalb einiger weniger Zeitschritte aus dem System herausgerechnet.

## 3 Numerische Experimente Numerical experiments

Die in Kapitel 2.2 beschriebene Hierarchische-Netze-Subgrid-Methode (HGSG) wird für zwei quasistationäre Beispiele angewandt. Obwohl die Randbedingungen jeweils stationär sind, zeigen beide Beispiele lokal instationäres Verhalten. Beispiel 1 ist ein häufig zur numerischen Simulation herangezogenes Strömungsphänomen, bekannt als die „von Kármánsche Wirbelstraße“, und Beispiel 2 ist eine Fallstudie des Elbe-Abschnitts Lauenburg – Geesthacht. Da diese Untersuchung nicht darauf abzielt, das genaueste Resultat zu erhalten, sondern die positiven Eigenschaften der Methode in Bezug auf die Flussmodellierung herauszuarbeiten, ist das hier verwendete numerische Verfahren einfach gehalten: Es ist 2D-tiefengemittelt, ein einfaches UpWind-Verfahren

berechnet die Advektion und Turbulenz wird mit Hilfe konstanter turbulenter Viskosität berücksichtigt.

Beide Beispiele werden mit dem identischen Verfahren, aber in drei möglichen Konfigurationen gerechnet. Die Referenzrechnung ist eine konventionelle Rechnung auf einem Gitter (Conventional Time Stepping, CTS). In Konfiguration 2 wird die komplette Methode HGSG angewendet und in Konfiguration 3 wird der Hierarchische-Netz-Ansatz ohne Subgrid (HG) verwendet. Bild 3 veranschaulicht das Vorgehen. In Konfiguration 3 (Bild 3 a) wird für die gröberen Gitter jeweils die Topographie gemittelt. In Konfiguration 2 (Bild 3 b) hingegen kann durch die Subgrid-Methode in allen Netzen die gleiche Topographie zum Einsatz kommen.

In den hier gezeigten Beispielen wird mit einer Gittertiefe von  $l^{max} = 6$  Ebenen gerechnet. Gitterebene 1 hat dabei die gleiche Auflösung wie das unterliegende Subgrid. Sowohl für HGSG- als auch HG-Berechnungen werden Ergebnisse für alle sechs Ebenen (Ergebnisse S6-S1 in Bild 2) generiert. In allen Berechnungen wird der Zeitschritt  $\Delta t^n$  dynamisch so bestimmt, dass ein, unter Stabilitätsbedingungen vorher festgelegtes, Strömungs-Courant-Kriterium von  $C = 0,7$  unter Verwendung der höchsten Geschwindigkeit im Modell für jeden Zeitschritt  $n$  eingehalten wird. Auf einem viermal ( $2 \times 2$ ) gröberen Netz kann somit mit einem zweimal größeren Zeitschritt und somit achtmal schneller gerechnet werden.

### 3.1 Die von Kármánsche Wirbelstraße *The von Kármán vortex street*

Das wohlbekannte Beispiel der von Kármánschen Wirbelstraße gilt auch in der Flussmodellierung als praxisnahes Experiment, da es z. B. hinter Brückenpfeilern oder an Bühnenköpfen zu derartigen Ablösungen kommt. Die Ausgangsströmung ist zunächst völlig symmetrisch. Da in dieser Untersuchung kein hochwertiges Turbulenzmodell zum Einsatz kommt, könnte zunächst vermutet werden, dass das verwendete Verfahren keine solchen Ablösungen berechnen kann.

In der Flussmodellierung ( $Re \gg 100$ ) ist die Gitterauflösung in der Regel nicht so fein, dass turbulente Strömungsmuster, wie z. B. Ablösung hinter einem Bühnenkopf, detailliert berechnet werden können. Ziel des

Experiments ist es deshalb nicht, festzustellen, wie genau unser Modell die Wirbelstraße berechnen kann, sondern zu zeigen, wie gut und effizient der HGSG-Ansatz dabei helfen kann, den Einfluss von Gitterkonvergenz und gitterabhängiger numerischer Diffusion zu untersuchen und Lösungen schon auf groben Gittern zu verbessern.

Das Modellgebiet läuft von  $x = 0$  bis 100 m (West-Ost) und von  $y = 0$  bis 100 m (Süd-Nord). Bei  $x = 20$  m,  $y = 50$  m befindet sich ein Kreiszyylinder mit einem Durchmesser von  $D = 4$  m. Im zentralen Teil, zwischen  $y = 25$  m und  $y = 75$  m hat der Kanal eine konstante Sohlenhöhe von  $z = -4$  m. Um dem Kanal einen trapezoidalen Querschnitt mit trockenen Gebieten am nördlichen und südlichen Rand zu geben, steigt der Boden zu den Rändern hin über 25 m auf eine Sohlenhöhe von  $z = 1$  m an. Der initiale Wasserspiegel  $\zeta^0$  liegt bei  $z = 0$  m. Diese Geometrie unterdrückt Reflektionen von den seitlichen Rändern in das Modellgebiet hinein und die hinter dem Zylinder entstehenden Wirbelablösungen werden nicht oder nur minimal gestört.

Am Einlauf auf der westlichen Seite wurde ein Abfluss von  $Q_{in} = 250 \text{ m}^3/\text{s}$  (das resultiert in einer mittleren Geschwindigkeit von  $u_{in} \sim 1 \text{ m/s}$  in der Kanalmitte) und am östlichen Rand wird ein konstanter Wasserspiegel  $\zeta_{out}$  auf  $z = 0$  m definiert. Es wurde ein einheitlicher Chézy-Wert von  $C_z = 65 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$  ( $\gamma = g/(C_z)^2$ ) sowie eine konstante horizontale Viskosität von  $\nu_h = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  festgelegt. Aus der mittleren Fließgeschwindigkeit von  $u \sim 1 \text{ m/s}$  resultiert eine Durchströmzeit  $T_f = L/u \sim 100 \text{ s}$ .

Die Topographie wird auf einem  $1024 \times 1024$ -Gitter definiert. Die Elementgröße beträgt somit  $\Delta x = \Delta y = 0,098 \text{ m}$ . Diese Auflösung soll dem Subgrid-Level entsprechen und ist gleichzeitig die feinste Gitterauflösung, auf der das letzte Ergebnis (S1 auf Gitter 1, Bild 2) berechnet wird. Da der Kreiszyylinder auf rechteckigen Gittern abgebildet werden muss, ist er kein rundes Objekt mehr. Der Einfluss dieser Vereinfachung auf das Ergebnis und dessen Gitterabhängigkeit werden in Kapitel 4 vorgestellt und diskutiert. Die fünf gröberen Gitter der Hierarchie werden durch rekursives  $2 \times 2$ -Vergrößern erzeugt. Die daraus folgenden Auflösungen sind der Tabelle 1 zu entnehmen. Um in dem hier verwendeten einfachen 2D-Modell den Einfluss von Wandrauheit zu simulieren, wurde die Sohle der an den Zylinder angrenzenden Subgrid-Zellen um 20 cm ( $\sim 5 \%$  der Gesamtwassertiefe) angehoben.

Gitterebene $l$	Rechenzellen $N$	Subgrid-Auflösung	Gitterweite $\Delta x, \Delta y$ [m]	Endzeit $T$ [s]	Zeitschrittlänge $\Delta t$ [s]
6 (größte)	1150 (32×32)	32 × 32	3.125	700	≈ 2
5	4346 (64×64)	16 × 16	1.562	1200	≈ 1
4	16884 (128×128)	8 × 8	0.781	1600	≈ 0.5
3	66534 (256×256)	4 × 4	0.391	1800	≈ 0.25
2	264138 (512×512)	2 × 2	0.195	1900	≈ 0.12
1 (feinste)	1052564 (1024×1024)	1 × 1	0.098	2000	≈ 0.06

Tabelle 1: Die von Kármánsche Wirbelstraße: Anzahl Rechenzellen  $N$  (und Maße des rechteckigen Basisnetzes), Subgrid-Auflösung pro Zelle, Endzeit  $T$ , durchschnittlicher Zeitschritt  $\Delta t$  pro Gitterebene  $l$  für die Hierarchische-Gitter-Rechnungen. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Table 1: *Vortex shedding behind a circular cylinder: Number of computational cells  $N$  (and rectangular base grid dimensions), subgrid resolution per cell, end time  $T$ , and average time step  $\Delta t$  per grid level  $l$  for the hierarchical grid computations. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.*

Für dieses Experiment werden zwei Referenzrechnungen (CTS) auf Gitter 1 und auf Gitter 2 erzeugt. Die Simulationszeit beträgt  $T_{CTS} = 750$  s ( $T_{CTS} \sim 7,5T_f$ ,  $T_f$ : Durchströmzeit). Die Wirbelablösung beginnt nach ca. 500 s Simulationszeit auf Gitter 1 (Spin-Up von  $\sim 5T_f$ ) und nach 550 s auf Gitter 2 (Spin-Up von  $\sim 5,5T_f$ ). Für die Berechnungen auf den hierarchischen Gittern wird eine Gesamtsimulationszeit von  $T = 2000$  s ( $T \sim 20T_f$ ) verwendet. Da die instationäre Ablösestruktur einer Stationaritätsbedingung entgegensteht, erfolgte die Aufteilung, nach Voruntersuchungen, in feste Zeitintervalle. Die Aufteilung der Simulationszeit auf die einzelnen Gitter innerhalb der Hierarchie ist der Tabelle 1 zu entnehmen.

Es ist zu beachten, dass auf dem feinsten Gitter nur eine Simulationszeit von 100 s ( $\sim T_f$ ) nötig war, um eine ausreichend lange Zeitreihe für eine Frequenzanalyse zu erhalten. Die Ergebnisse werden in Kapitel 4.1 diskutiert.

### 3.2 Fallstudie: Die Elbe zwischen Lauenburg und Geesthacht

#### *Case study: Elbe River from Lauenburg to Geesthacht*

Die zweite Fallstudie beschäftigt sich mit dem ca. 15 km langen Abschnitt der Elbe zwischen Lauenburg und Geesthacht (El-km von 570-585) einschließlich der bis zu 2,5 km weiten Vorländer (Bild 4). Im Bereich der Schleuseneinfahrt Geesthacht kommt es Wehrarm-seitig zu starker Kolkbildung und im Abzweig Richtung Schleuse zu Wirbelablösungen. Es werden

berechnete mit gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen im Schleusenarm verglichen. Es wird gezeigt, dass das Ergebnis auf dem feinsten Gitter mit deutlich reduzierten Rechenzeiten erreicht werden kann und der HGSG-Ansatz gleichzeitig eine Gitterkonvergenzstudie mitliefert.

Am Modelleinlauf bei Lauenburg wird ein konstanter Abfluss von  $Q_{in} = 1710$  m<sup>3</sup>/s (mittlere Geschwindigkeit  $|\bar{u}| \sim 1,5$  m/s und eine Durchströmzeit von  $T_f = L/|\bar{u}| \sim 3$  h) angesetzt. Für diesen Abfluss liegen Geschwindigkeitsmessungen zur Validierung der Resultate vor. Am Modellauslauf, am Wehr Geesthacht, wird ein fester Wasserspiegel von  $\zeta_{out} = 4,3$  m vorgegeben. Dieser Wert entspricht Messwerten für den gewählten Abfluss. Es wurde ein einheitlicher Manning-Wert von  $n = 0,03$  m<sup>1/3</sup>/s ( $\gamma = gn^2/H^{1/3}$ ) sowie eine konstante horizontale Viskosität von  $\nu_h = 10^{-4}$  m<sup>2</sup>/s festgelegt. Als Startbedingung für die freie Oberfläche wird ein von Lauenburg (5,7 m) nach Geesthacht (4,3 m) linear geneigter Wasserspiegel  $\zeta^0$  gewählt. Die Startgeschwindigkeit beträgt 0 m/s.

Das digitale Geländemodell mit einer Auflösung von 2 × 2 m (fast 3 Mio. Datenpunkte) wurde auf ein strukturiertes Grundgitter mit 7.616 × 1.056 Elementen, welches das Modellgebiet abdeckt (Bild 4), interpoliert. Die 2 × 2 m Auflösung entspricht der Auflösung auf Subgrid-Level, auf welcher Topographie und Rauheit definiert sind, und ist gleichzeitig die feinste Gitterauflösung auf welcher das letzte Ergebnis (S1 auf Gitter 1, Bild 2) berechnet wird. Bild 4 kann man entnehmen, dass kleinskalige Topographie wie Bühnen oder Sohlenformen in dieser Auflösung abgebildet werden.

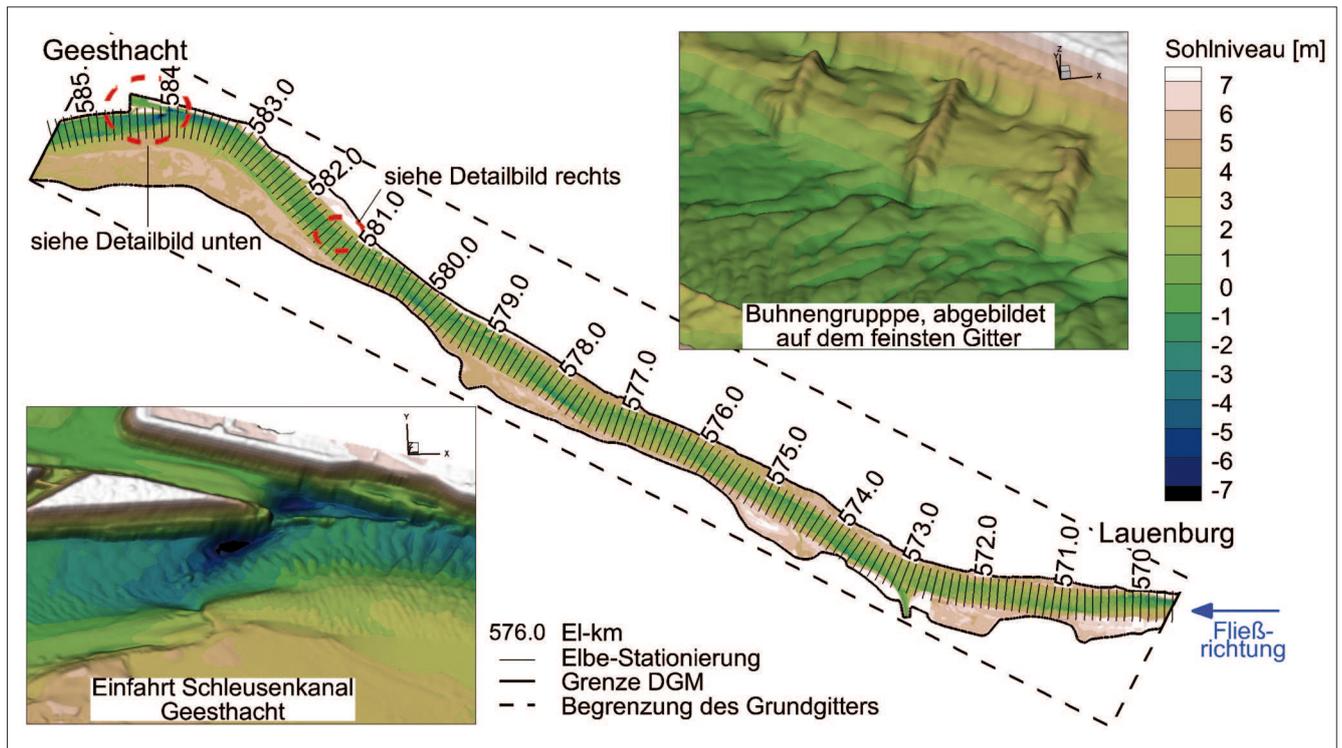


Bild 4: Das Elbe Modell: Digitales Gelände-Modell (DGM) auf Subgrid-Auflösung ( $2 \times 2 \text{ m}$ ) für die Elbe zwischen Lauenburg und Geesthacht. Das 3D-Detailbild ist 10-fach überhöht dargestellt. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.  
 Figure 4: The Elbe River model: Digital Terrain Model (DTM) on subgrid resolution ( $2 \times 2 \text{ m}$ ) for the Elbe River between the city of Lauenburg and the weir at Geesthacht. The 3D detail figures of the topography are ten times vertically exaggerated, compared to the horizontal scale. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Für die Referenzberechnung (CTS) beträgt der Simulationszeitraum  $T = 16,7 \text{ h}$  ( $T \sim 5,5 T_f$ ). Er wurde anhand von Tests bestimmt. Für die Berechnungen auf den hierarchischen Gitter wird eine Gesamtsimulationszeit von  $T = 55,6 \text{ h}$  ( $T \sim 18,5 T_f$ ) verwendet. Die Aufteilung der Simulationszeit auf die einzelnen Gitter innerhalb der Hierarchie ist der Tabelle 2 zu entnehmen. Alle Zellen, die außerhalb des Modellgebiets liegen, werden vor

Beginn der Rechnung aus dem Gitter eliminiert. Dadurch wird die Anzahl Zellen deutlich verringert. Die Zahl aktiver Zellen im Gitter kann Tabelle 2 ebenso wie die verwendeten Zeitschritte  $\Delta t$  für die jeweiligen Gitter entnommen werden.

Da die feineren Gitter lokale Instationaritäten ausbilden, wurde für den Übergang von einem zum nächstfeine-

Gitterebene $l$	Rechenzellen $N$	Subgrid-Auflösung	Gitterweite $\Delta x, \Delta y$ [m]	Endzeit $T$ [h]	Zeitschrittlänge $\Delta t$ [s]
6 (größte)	2958 (213×33)	32 × 32	64	13.9	≈ 31
5	11185 (426×66)	16 × 16	32	25.0	≈ 18
4	43484 (852×132)	8 × 8	16	36.1	≈ 7.7
3	171477 (1904×264)	4 × 4	8	44.4	≈ 3.4
2	681012 (3808×528)	2 × 2	4	50.0	≈ 1.5
1 (feinste)	2714156 (7616×1056)	1 × 1	2	55.6	≈ 0.6

Tabelle 2: Das Elbe Modell: Anzahl Rechenzellen  $N$  (und Maße des rechteckigen Basisnetzes), Subgrid Auflösung pro Zelle, Endzeit  $T$ , durchschnittlicher Zeitschritt  $\Delta t$  pro Gitterebene  $l$  für die Hierarchische-Gitter-Rechnungen. Für die HG-Serie sind nur die Endzeiten zum Erreichen eines (quasi-) stationären Zustands auf den zwei feinsten Gittern unterschiedlich:  $T_2 = 52,8 \text{ h}$  und  $T_1 = 61,1 \text{ h}$ . Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.  
 Table 2: The Elbe River model: Number of computational cells (and rectangular base grid dimensions), subgrid resolution per cell, end time  $T$ , and average time step  $\Delta t$  per grid level  $l$  for the HGSG computation. For the HG computation, only the end times for the two finest grids are different:  $T_2 = 52.8 \text{ h}$  and  $T_1 = 61.1 \text{ h}$ , to obtain (quasi-)stationary solutions. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

ren Gitter keine Stationaritätsbedingung, sondern eine, auf Tests beruhende, feste Simulationszeit pro Gitterebene gewählt. Die Ergebnisse werden in Kapitel 4.2 diskutiert.

## 4 Ergebnisse

### Results

Es werden die Ergebnisse der Referenzberechnung mit den Rechenserien HG und HGSG verglichen. Das umfasst sowohl die Genauigkeit der Ergebnisse, deren Gitterabhängigkeit sowie die Rechenzeit für die verschiedenen Ansätze. Alle Rechnungen wurden auf einem Intel Xeon E5-2670 (2.6 GHz) CPU mit 20 MB L2 Cache durchgeführt.

### 4.1 Die von Kármánsche Wirbelstraße

#### The von Kármán vortex street

Unter Verwendung des Zylinderdurchmessers berechnet sich die Reynolds-Zahl für dieses System zu  $Re = uD/v_h \sim 40.000$  und liegt damit im Bereich turbulenter Strömungen. Im Folgenden wird gezeigt, dass die numerische Reynoldszahl jedoch aus verschiedenen Gründen sehr viel niedriger ist. Da der Fokus auf Einfluss der Gitterauflösung auf die numerische Diffusion liegt, wurde ein relativ niedrigen Wert für die horizontale Viskosität gewählt. Das ist erlaubt, da u. a. Roshko (1954) gezeigt hat, dass sich der Charakter einer Zylinderumströmung im Bereich  $Re \sim 300$  bis  $Re \sim 100.000$  nicht mehr wesentlich verändert.

Der hier vorgestellte Ansatz gibt für jedes Gitter innerhalb der Hierarchie Auskunft über die effektiven Reynoldszahlen. Es wird auch gezeigt, dass die auf den feineren Gittern berechneten Reynoldszahlen in den oben erwähnten und angestrebten Bereichen liegen.

Es werden Strömungsmuster, der Fließwiderstand des Zylinders, die Ablösefrequenz sowie die CPU-Zeit verglichen.

Bild 5 stellt die Geschwindigkeit  $u$  in x-Richtung im letzten Zeitschritt der jeweiligen Gitterebene dar. Links sind die Berechnungsergebnisse für Ansatz HG und rechts die Ergebnisse für den Ansatz HGSG dargestellt. Um die Gitterauflösung sowie die Abbildung des Zylinders

in der Serie HG zu veranschaulichen, sind die Gitterzellen im Innern des Zylinders (inaktive Zellen) dargestellt.

Es wird deutlich, dass die abgebildete Geometrie über die Gitterebenen in Serie HG veränderlich ist (z. B. Bild 7, HG-Gitter  $l = 6$  bis 4). Das bringt eine Reihe interessanter Aspekte mit sich (Bild 5). Für die HGSG-Serie werden nur die Elemente innerhalb des Zylinders dargestellt, welche vollständig trocken sind.

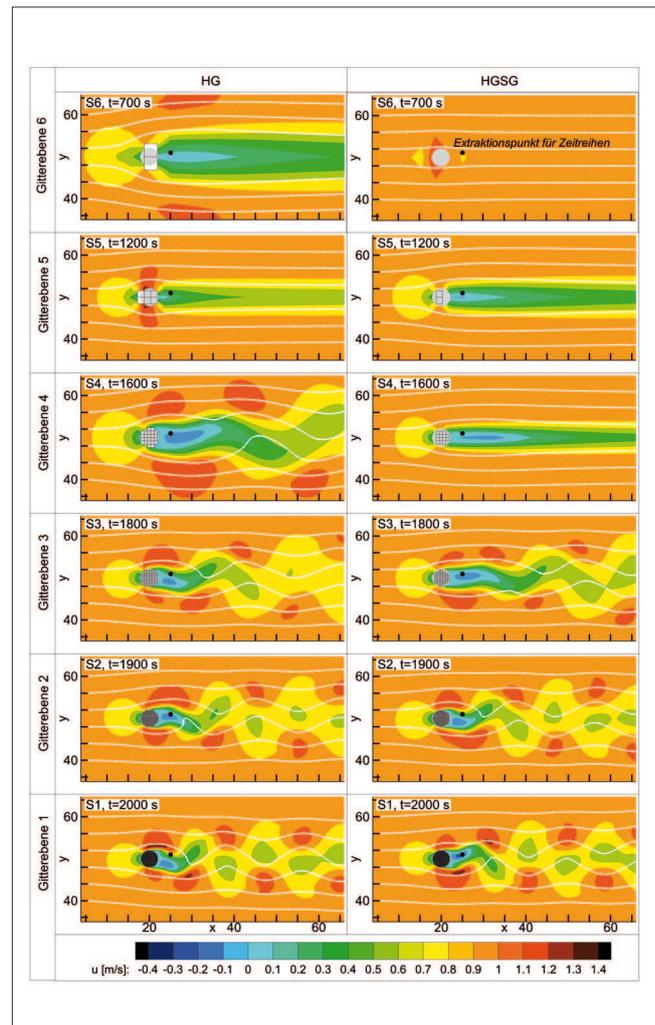


Bild 5: Die von Kármánsche Wirbelstraße: U-Geschwindigkeiten für Ergebnisse S6 bis S1 auf den 6 hierarchischen Gittern. Links: ohne Subgrid-Topographie; rechts: mit Subgrid-Topographie. Schwarzer Punkt ( $x = 25$  m,  $y = 51$  m): Extraktionspunkt für Zeitreihen zur Frequenzanalyse (siehe Bild 6). Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Figure 5: The von Kármán vortex street: Solutions S6 to S1 for the  $u$ -velocity on the six grid levels in the hierarchical grid algorithm, without subgrid topography (left), with subgrid topography (right). The point (at position  $x = 25$  m,  $y = 51$  m) is indicated where the time series of  $u$ -velocity was probed for the frequency analysis (see Figure 6). Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Auf der größten HG-Gitterebene ( $l = 6$ ) wird der Zylinder als ein aus zwei Gitterelementen bestehendes, quer liegendes Rechteck angenähert. Vor dem Hindernis entsteht ein deutlicher Staupunkt und in seinem Schatten bildet sich eine große stabile Ablösezone aus (Bild 5, S6, links). In der HGSG-Serie wird auf dieser Gitterebene keine Zelle komplett blockiert. Vier Zellen sind teilweise trocken. Diese stellen für die Strömung aber nur ein geringes Hindernis dar. Es bilden sich weder Ablösezone noch Staupunkt (Bild 5, S6, rechts).

Auf Ebene 5 der HG-Serie, wird der Zylinder als ein aus  $2 \times 3$  Zellen bestehendes, längs ausgerichtetes Hindernis approximiert. Das Hindernis ist schlanker, entsprechend sind Staupunkt und Ablösezone weniger stark ausgeprägt (Bild 5, S5, links). In der HGSG-Serie sind zwei Zellen trocken und alle umliegenden teilweise trocken. Das führt zu verringerten Volumen und Abflussquerschnitten. Es entsteht eine Ablösezone, die aufgrund der hohen numerischen Diffusion stationär ist (Bild 5, S6, rechts). Dies entspricht einer kleinen effektiven Reynolds-Zahl.

Auf Ebene 4 bildet sich aufgrund der immer noch groben geometrischen Abbildung des Zylinders im Gitter und der nun bereits reduzierten numerischen Diffusion in der HG-Serie eine Wirbelstraße. In der HGSG-Serie zeigt sich der Beginn einer leichten Asymmetrie in der Ablösezone. Auf Ebene 3 zeigt sich in beiden Rechenseerien eine – scheinbar – sehr ähnliche Wirbelablösung hinter dem Zylinder. Erst Frequenzanalysen zeigen die Unterschiede (siehe Bild 6).

Auf Ebene 1 und 2 sind die Resultate sehr ähnlich. Die Geometrie scheint nun in beiden Serien gleich gut abgebildet zu sein und die numerische Diffusion ist soweit zurückgegangen, dass eine effektive Reynolds-Zahl erreicht wird, bei der sich die Charakteristik der Wirbelablösungen nur noch unwesentlich ändert (Roshko, 1954).

Die Rechenserie zeigt, dass die Subgrid-Methode die Rauheit eines Hindernisses, welche aus der Abbildung im Gitter resultieren kann (HG-Ebene 6–4) erheblich vermindern kann (HGSG-Ebene 6–4). Wird die Rauheit durch das Subgrid unterschätzt, kann immer Rauheit hinzugefügt werden, Rauheit zu reduzieren ist wesentlich schwerer.

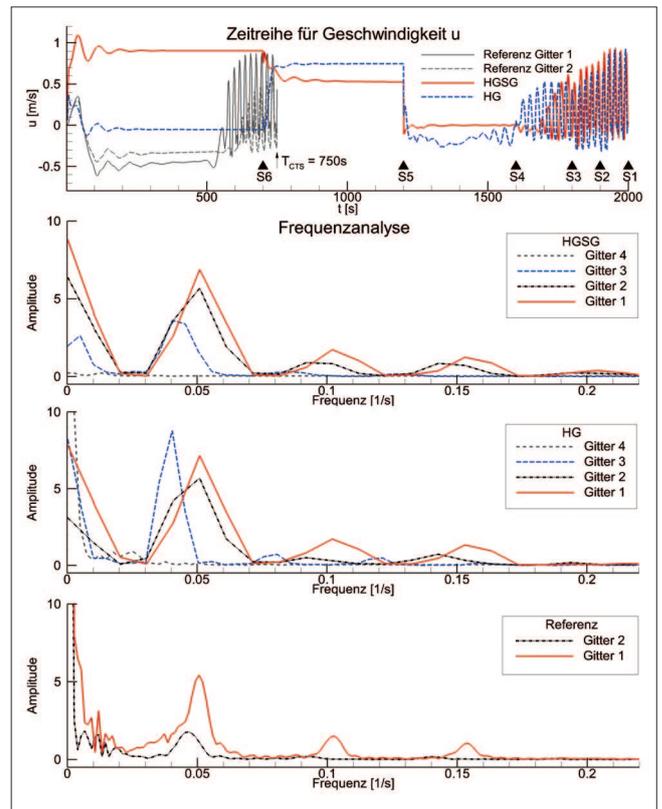


Bild 6: Die von Kármánsche Wirbelstraße: Oben: Zeitreihe der U-Geschwindigkeiten in  $x = 25 \text{ m}$ ,  $y = 51 \text{ m}$  für die HG- und HGSG-Serie und darunter für die Referenzen auf den zwei feinsten Netzen. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Figure 6: The von Kármán vortex street: Top: time series of  $u$ -velocity in point ( $x = 25 \text{ m}$ ,  $y = 51 \text{ m}$ ) for the HG and HGSG computations. Middle two figures: frequency spectrum of  $u$ -velocity, for the HG and HGSG computations (four finest grid levels (grids 4 to 1)), respectively. Bottom: frequency spectrum for the two reference computations on grids 1 and 2. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Zu einer Frequenzanalyse der generierten Wirbel wurde in einem Punkt in der Ablösezone ( $x = 25 \text{ m}$ ,  $y = 51 \text{ m}$ ) jeweils eine Zeitreihe für die Geschwindigkeit  $u$  für jede Gitterebene erstellt und eine Fouriertransformation durchgeführt. Das Ergebnis sowie die Zeitreihen (beides auch für die Referenzrechnungen) sind in Bild 6 dargestellt.

Die Zeitreihen für die Ebene 6 und 5 zeigen, wie schon Bild 5 zu entnehmen, keinerlei periodisches Verhalten. Auch auf Ebene 4 ist die Periodizität nur schwach entwickelt. Auf Ebene 3 der HG-Serie zeigt sich bei einer Frequenz von  $f = 0,04 \text{ Hz}$  ein deutliches Signal, das sich auf den weiteren Ebenen hin zu  $f = 0,05 \text{ Hz}$  verschiebt. In der HGSG-Serie entwickelt sich das Spektrum über die Ebenen 3–1 hin zu der dominierenden Frequenz

von  $f = 0,05$  Hz. Das bezieht auch die höheren Harmonischen mit ein.

Der Vergleich mit den Referenzrechnungen zeigt eine Übereinstimmung mit den Berechnungen auf den hierarchischen Gitterebenen 1 und 2. Bei den hier verwendeten Simulationszeiten entwickeln sich die höheren Harmonischen für die HG-Serie nur auf dem feinsten Gitter.

Die Strouhal-Zahl  $St$  beschreibt das Verhältnis zwischen Frequenz  $f$ , der charakteristischen Länge (hier Durchmesser des Zylinders) und der Fließgeschwindigkeit  $u$  (z. B. Roshko, 1954; Tai und Zhao, 2003). Für die hier untersuchte Geometrie ergibt sich eine Strouhal-Zahl  $St = fD/U = 0,2$ . Dieser Wert stimmt mit Werten, beschrieben in Roshko (1954) sowie Tai und Zhao (2003), für die hier untersuchten Reynolds-Zahl-Bereiche überein. Diese Ergebnisse (sowie Bild 5) zeigen, dass die Lösung auf Gitterebene 2 bereits als hinreichend genau betrachtet werden kann.

Die Berechnungszeiten im Verhältnis zur Referenz können Tabelle 3 entnommen werden. Die HG-Serie ist in diesem Test am effizientesten. Die Lösung auf Gitter 2 wird 43-mal schneller erreicht als in der Referenzberechnung. Die HGSG-Serie erreicht eine genaue Lösung 36-mal schneller als die Referenz. Die leicht erhöhte Berechnungszeit folgt aus einer höheren Zahl von Newton-Iterationen (1 in HG und 2-3 in HGSG) pro Zeitschritt aufgrund des Nass-Trocken-Fallens in den Randbereichen des Gebietes.

## 4.2 Fallstudie: Die Elbe zwischen Lauenburg und Geesthacht

### Case study: Elbe River from Lauenburg to Geesthacht

Die Berechnungsergebnisse des Elbe-Modells wurden sowohl untereinander als auch mit Messergebnissen, darunter auch der Wasserspiegel, verglichen. Bild 7 zeigt die Stromlinien sowohl der gemessenen als auch der berechneten Geschwindigkeitsfelder in der Nähe der Einfahrt zum Schleusenkanal. Drei Rezirkulationszonen (RZ) und eine Beschleunigungszone (AZ), nahe einem großen Kolk, wurden im Messfeld identifiziert und in der Abbildung markiert. In Bild 7 werden die Ergebnisse der Referenzrechnung (rechts, oben) mit den Ergebnissen der HG-Serie (links, Mitte und unten) und der HGSG-Serie (rechts, Mitte und unten) gegenübergestellt. In der mittleren Reihe sind die Resultate S3 auf Gitterebene 3 (Auflösung von  $8 \times 8$  m) dargestellt. In der unteren Reihe sind die Resultate S1 auf Gitterebene 1 (Auflösung von  $2 \times 2$  m) dargestellt.

Vergleicht man die Ergebnisse mit denen der Messungen (links, oben) zeigen sich kaum Unterschiede, auch nicht für die Gitterebene 3. Daraus lässt sich schließen, dass die strömungsprägenden Geometrien bereits in dem  $8 \times 8$  m Gitter ausreichend repräsentiert sind, jedoch mit erheblich verringertem Rechenaufwand erzeugt werden können.

Für alle Berechnungen wurde das Gesamtvolumen ermittelt (Referenz:  $V^{ref} = 2,7455 \cdot 10^7 \text{ m}^3$ , HG-Serie:  $V^{HG} = 2,7594 \cdot 10^7 \text{ m}^3$ , HGSG-Serie:  $V^{HGSG} = 2,7449 \cdot 10^7 \text{ m}^3$ ).

Konfiguration	Simulierte Zeit $T$ [s]	CPU-Zeit $T_{CPU}$ [h]	Speed-up Faktor $S$
Referenzrechnung	750	9.2	1
HG S1	2000	1.2	7.5
HG S2	1900	0.2	43.3
HGSG S1	2000	1.5	6.2
HGSG S2	1900	0.3	36.7

Tabelle 3: Die von Kármánsche Wirbelstraße: Simulierte Zeit  $T$ , CPU-Zeit  $T_{CPU}$  und Speed-up Faktor  $S$ , normiert auf die Referenzrechnung, für die verschiedene Berechnungen. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Table 3: The von Kármán vortex street: simulated time  $T$ , CPU time and speed-up factor  $S$  with respect to the reference run, for the different computations. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

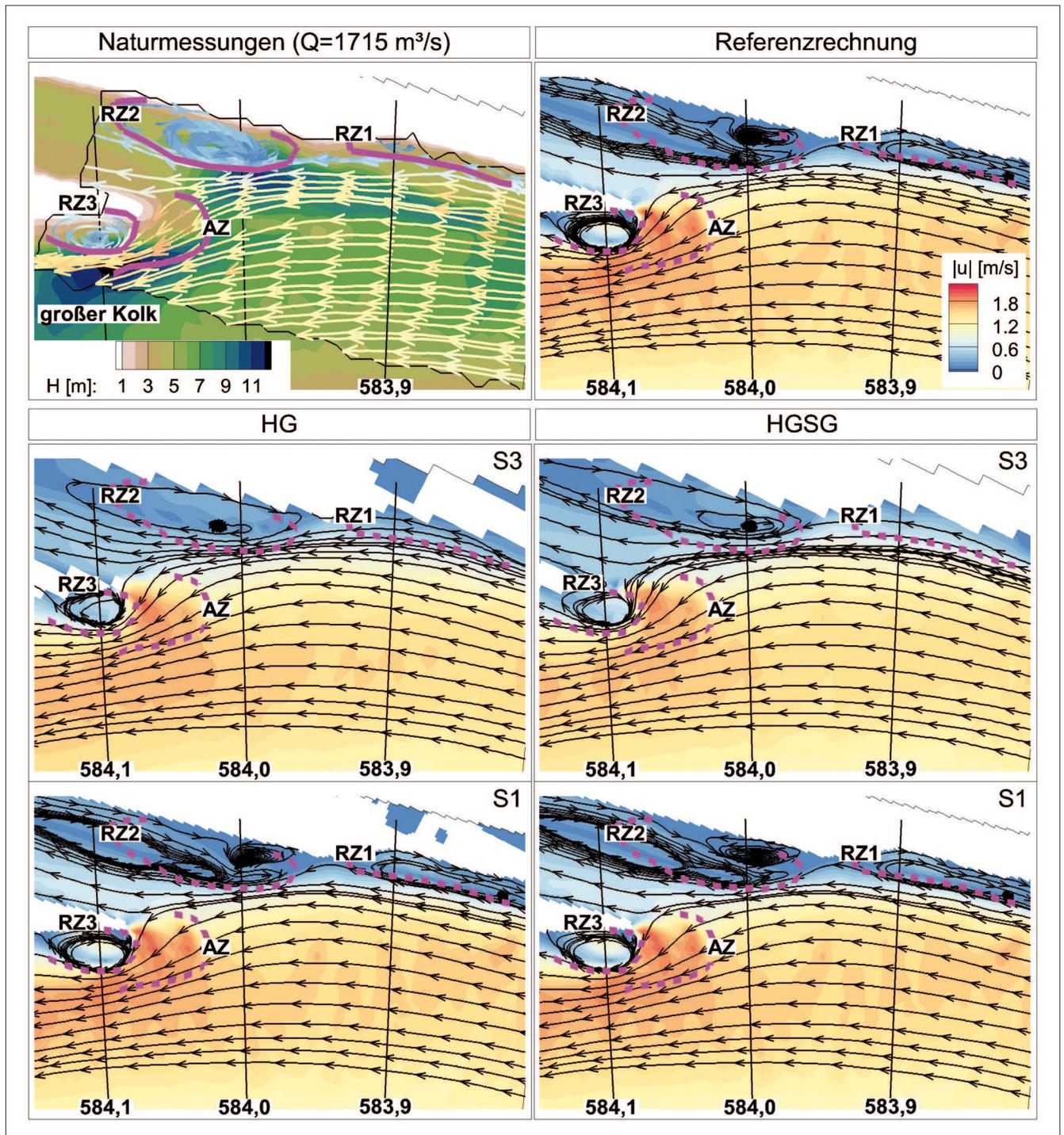


Bild 7: Das Elbe-Modell: Aus dem Geschwindigkeitsfeld abgeleitete Stromlinien. Oben links: Stromlinien aus gemessenem Feld mit Sohlentopographie im Hintergrund. Oben rechts: Referenzrechnung nach  $T = 16,7$  h simulierte Zeit. Mittlere und untere Reihe: Ergebnisse S3 und S1 für den HG (linke Spalte) und HGSG (rechte Spalte) Berechnungen auf Gitterebene 3 und 1. Die Rezirkulationszonen (RZ) und Beschleunigungszone (AZ) sind aus den Messdaten abgeleitet. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Figure 7: The Elbe River model: streamlines derived from the velocity field. Top left: measured streamlines (the background depicts the topography). Top right: results of the reference computation after at  $T = 16.7$  h of simulated time; Middle and bottom row: solutions S3 and S1 for the HG (left column) and HGSG runs (right column) on grids 3 and 1. Recirculation (RZ) and acceleration zones (AZ) are indicated as identified in the field measurements. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

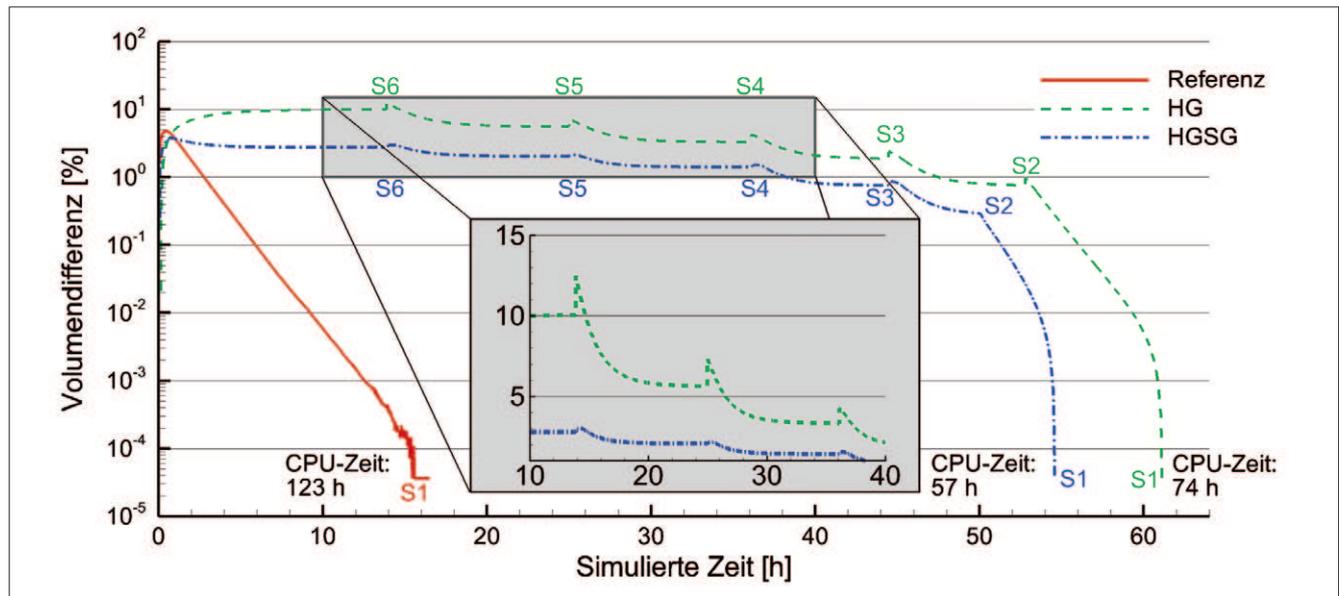


Bild 8: Das Elbe-Modell: Prozentuale Abweichung  $\Delta V$  (%) vom (stationären) Gesamtvolumen (Fluss). Angedeutet sind die CPU-Zeiten der drei Rechenläufe (vertikale Achse ist logarithmisch skaliert). HGSG: Hierarchische-Gitter-Subgrid. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Figure 8: The Elbe River model: percentual volume difference  $\Delta V$  (%) with the steady-state volume in the river. Indicated are the CPU times at the end times of the computations. Note the logarithmic scale on the vertical axis. HGSG: Hierarchical-Grid-Subgrid. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Es unterscheidet sich für die HG- und die HGSG-Serie von der Referenzrechnung um 0,5 % bzw. 0,023 %. Die Untersuchung der Entwicklung der Gesamtvolumen über die Rechendauer zeigt, dass die Referenzrechnung, obwohl bereits als stationär klassifiziert, immer noch langwellige Störungen im System enthält, während diese in den HG- und HGSG-Serien bereits vollständig aus dem System entfernt sind (siehe Bild 8).

Anhand von Wasserspiegellängsschnitten kann gezeigt werden, dass das unterliegende Subgrid die Interpolation (siehe Kapitel 2.2) von gröbereren auf das nächstfeinere Gitter mit deutlich reduzierten Störungen erlaubt (Bild 8). Damit wird die Zeit, solche Störungen heraus zu rechnen, deutlich gekürzt. Das macht sich positiv in der Gesamtrechnenzeit bemerkbar.

Konfiguration	Simulierte Zeit $T$ [h]		Speed up Faktor $S$ (auf Referenzrechnung normiert)			
	CPU-Zeit $T_{CPU}$ [h]		Volumendifferenz $\Delta V$ zum stationären Zustand			
	$\Delta V = 1 \%$	$\Delta V = 0.1 \%$	$\Delta V = 0.01 \%$	$\Delta V = 0.001 \%$		
Referenz-	$T = 2.8$	$T = 5.9$	$T = 9.2$	$T = 12.5$		
rechnung	$T_{CPU} = 23.3$	$T_{CPU} = 46.0$	$T_{CPU} = 69.0$	$T_{CPU} = 90.5$		
HG	$T = 47.5$	$T = 56.1$	$T = 59.3$	$T = 60.8$		
	$T_{CPU} = 6.2$	$T_{CPU} = 35.2$	$T_{CPU} = 59.2$	$T_{CPU} = 70.5$		
	$S = 3.8$	$S = 1.3$	$S = 1.2$	$S = 1.3$		
	(ΔV erreicht auf Gitter 2)		(ΔV erreicht auf Gitter 1)			
HGSG	$T = 38.3$	$T = 51.3$	$T = 53.6$	$T = 54.4$		
	$T_{CPU} = 1.3$	$T_{CPU} = 20.5$	$T_{CPU} = 39.8$	$T_{CPU} = 46.6$		
	$S = 17.7$	$S = 2.2$	$S = 1.7$	$S = 1.9$		
	(ΔV erreicht auf Gitter 3)		(ΔV erreicht auf Gitter 1)			

Tabelle 4: Das Elbe-Modell: Simulierte Zeit  $T$ , CPU-Zeit  $T_{CPU}$  und auf Referenzrechnung normierter Speed-up Faktor  $S$  für drei verschiedene  $\Delta V$  des Gesamtvolumens im Fluss im stationären Zustand. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Table 4: The Elbe River model: simulated time  $T$ , CPU time  $T_{CPU}$  and speed-up factor  $S$  with respect to the reference run, for three different values of the difference  $\Delta V$  in total volume in the river with respect to the final steady-state volume. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

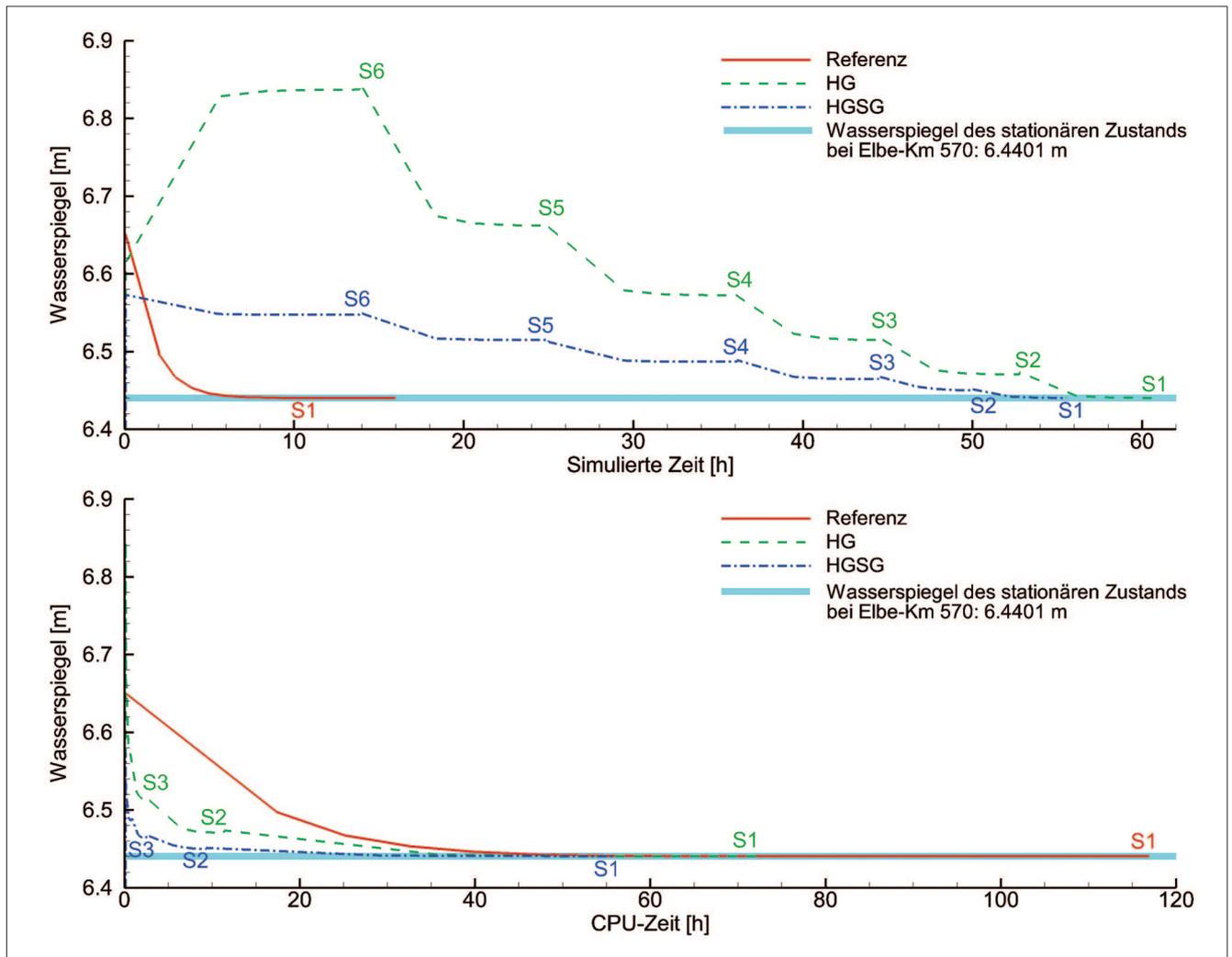


Bild 9: Das Elbe-Modell: Wasserspiegel-Zeitreihe für Elbe-km 570. Oben: Wasserspiegel versus simulierte Zeit. Unten: Wasserspiegel versus CPU-Zeit. Die breite, zyan-farbene Linie zeigt den Wasserspiegel des stationären Zustands  $\zeta = 6,4401$  m, der von allen drei Rechnungen erreicht wird. HGSG: Hierarchische-Gitter-Subgrid. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Figure 9: The Elbe River model: time series of water level at Elbe kilometre (Elbe-km) 570. Top: water level versus simulated time. Bottom: water level versus CPU time. Indicated by the thick cyan line is the final steady state water level of  $\zeta = 6,4401$  m, which is reached by all three computations. HGSG: Hierarchical-Grid-Subgrid. Copyright © 2015 John Wiley & Sons, Ltd.

Tabelle 4 analysiert die CPU-Zeiten für alle Berechnungen. Als Bezugsgröße dient hier eine definierte Abweichung  $\Delta V$  vom Gesamtvolumen:  $\Delta V = 1\%$ ,  $\Delta V = 0,1\%$ ,  $\Delta V = 0,01\%$  und  $\Delta V = 0,001\%$  (im  $2 \times 2$  m Gitter entspricht ein  $\Delta V = 0,01\%$  einer Wasserspiegeldifferenz von 0,25 mm pro Zelle). Die HGSG-Serie erreicht die  $\Delta V = 1\%$  Volumenabweichung schon auf Netz 3 und ist damit 18-mal schneller als die Referenzrechnung. Die HG-Serie erreicht diesen Zustand erst auf Netz 2 und ist damit nur viermal schneller. Die Volumenabweichungen unter 1% werden in beiden Serien erst auf dem feinsten Netz erreicht. Die Rechenzeit halbiert sich im besten Fall.

Die Betrachtung der Wasserspiegel-Entwicklung in einem nahe dem Einlauf liegenden Punkt des Modells (hier: El-km 570) über die Zeit (Bild 9) zeigt deutlich, dass die HG- und HGSG-Serie die endgültige Wasserspiegellage  $\zeta = 6,4401$  m sehr viel schneller erreichen als die Referenzrechnung. Außerdem ist zu erkennen, dass der Wasserspiegel der HG-Serie (Ebene 6 – 4) zunächst deutlicher vom Endwert abweicht als jener der HGSG-Serie und sich erst über die feineren Gitter an diesen Wert „heran“ rechnen muss. Auch hier zeigt sich der Vorteil der Subgrid-Methode.

Das Beispiel macht deutlich, dass der Hierarchische-Gitter-Ansatz auf eine einfache Art Konvergenzstudien erlaubt. Kombiniert mit Subgrid kann ein angestrebter stationärer Zustand sehr viel schneller erreicht werden, da die Volumen von Anfang an korrekter abgebildet und Störungen, die durch den Übergang von einem auf das nächst-feinere Gitter entstehen, minimiert werden können.

## 5 Diskussion

### *Discussion*

Die in den vorangegangenen Kapiteln diskutierten Ergebnisse zeigen, dass der Hierarchische-Gitter-Subgrid-Ansatz zu einer deutlichen Verringerung des rechnerischen Aufwandes ohne Verlust an Genauigkeit führt. Mit dem Subgrid-Ansatz zeigen die Lösungen auf den gröberen Gittern innerhalb der Hierarchie deutlich weniger Unterschiede zu der Lösung auf dem feinsten Gitter als ohne. Auch der Interpolationsschritt von einem auf das nächstfeinere Netz gelingt mit Subgrid störungsfreier als ohne.

Am Beispiel der von Kármánschen Wirbelstraße konnte gezeigt werden, dass ohne bzw. mit Subgrid zwei verschiedene Probleme behandelt werden. In der Rechenserie ohne Subgrid veränderte sich das Hindernis von einem Rechteck auf dem größten Gitter über ein sehr raues Vieleck hin zu einem durch ein relativ glattes Vieleck approximierten Zylinder auf dem feinsten Gitter. Entsprechend veränderten sich die Strömungsbilder (Ablösezone und Staupunkte) über die Gitterebenen. Mit Subgrid wird die Geometrie immer gleich abgebildet, nur die Gitterauflösung bestimmt den Detailgrad des Ergebnisses bezüglich des Strömungsbildes.

Am Beispiel des Elbe-Modells konnte gezeigt werden, dass eine stationäre Lösung 18-mal schneller als in der Referenzrechnung gefunden werden kann (toleriertere Abweichung vom Gesamtvolumen < 1 %). Dieses Resultat wurde auf einem 16-mal gröberen Netz mit unterliegender Subgrid-Topographie erreicht. Auch wenn sich die Geschwindigkeitsfelder in den gezeigten Beispielen nicht wesentlich unterscheiden, zeigen Analysen der Volumina und der Wasserspiegel Unterschiede in der Genauigkeit und im Konvergenzverhalten.

Dieses verbesserte Konvergenzverhalten kann z. B. dafür genutzt werden, einen sehr genauen Startzustand auch für instationäre Berechnungen mit deutlich reduziertem rechnerischen Aufwand zu generieren. Die Spin-Up-Phase des numerischen Modells, oft ein wesentlicher Teil der Gesamtrechnenzeit, wird schneller durchlaufen. Ein wichtiger Schritt hierbei ist der Übergang von einem auf das nächstfeinere Netz. Obwohl das Subgrid dafür sorgt, dass die Geometrie im Gegensatz zu einem reinen hierarchischen Gitter auf allen Gittern gleich ist, kann es bei falsch gewählter Interpolationsmethode zu Initialstörungen kommen, die wieder „heraus“gerechnet werden müssen – der Vorteil der verkürzten Spin-Up-Phase ist dann vergeben, vor allem bei den feineren und teureren Netzen in der Hierarchie. Der hier gewählte Interpolationsansatz zeigte die gewünschten Eigenschaften (siehe Bild 9).

Eine weitere Verbesserung des Ansatzes könnte durch lokale Gitterverfeinerung basierend auf räumlichen und zeitlichen Gradienten der Lösung, der Geometrie und/oder der wirkenden Kräfte innerhalb des Hierarchischen-Gitter-Ansatzes bringen. Ein Quad-Tree-Ansatz wie bei Stelling (2012) verwendet, kann zu einer noch effizienteren Lösungsmethode führen.

Der hier vorgestellte kombinierte Ansatz wurde auf die 2D-tiefengemittelte Flachwassergleichung angewandt. Eine Erweiterung auf 3D ist jedoch möglich. Eine Herausforderung besteht in diesem Fall in der möglichst konservativen (störungsfreien) Interpolation der vertikalen Beiträge beim Übergang von einem auf das nächstfeinere Netz. Der hier vorgestellte Ansatz wurde auf einem strukturierten Rechtecksgitter verwendet. Der Subgrid-Ansatz wurde bereits erfolgreich auf unstrukturierten Netzen eingesetzt (Casulli, 2009; Casulli und Stelling, 2011; Sehili et al., 2014). Eine Erweiterung des Hierarchische-Gitter-Ansatzes bedeutet vor allem, einen geeigneten Vergrößerungsalgorithmus entweder unter bereits existierenden Techniken (z. B. *Agglomeration* bei Algebraischem Mehrgitter (AMG)) zu finden oder zu entwickeln. Auch die Interpolation wäre in diesem Fall noch mal zu überarbeiten.

Strukturierte Gitter bieten große Vorteile, u. a. Genauigkeiten höherer Ordnung, einfache Implementierung (sowohl seriell als auch parallel), einfache Netzgenerierung. Auf der anderen Seite sind sie unflexibel in Bezug auf die Abbildung komplexer Geometrien und die Ele-

mentzahl wird schnell sehr groß. Da die Topographie mit großem Detail im Subgrid abgebildet werden kann (gegebenenfalls mit lokaler Gitterverfeinerung an Geometrieelementen wie Bühnen und Wehren), müssen die Nachteile, die mit der Verwendung von strukturierten Gittern einhergehen bzw. in Verbindung gebracht werden, überdacht werden. Weitere Untersuchungen, auch im Vergleich mit Cut-Cell-Methoden und den Unstrukturierte-Gitter-Methoden sind notwendig, um geeignete Anwendungen für eine solche Strukturierte-Gitter-Methode herauszuarbeiten.

## 6 Schlussfolgerungen

### *Conclusion*

Es wurde eine neue Modellierstrategie zur Effizienzsteigerung rechenintensiver Simulationen von Flüssen vorgestellt. Die Methode stellt eine Erweiterung des Subgrid-Ansatzes dar, der hochauflösende Subnetz-Information der Topographie und Rauheit auf gröberen Netzen erlaubt. Die unterschiedlichen räumlichen und zeitlichen Skalen, wie sie in einer typischen Flussmodellierung anzutreffen sind, können mittels Anwendung einer Reihe von hierarchischen Gittern, vor allem in Kombination mit Subgrid, effizient berücksichtigt werden. Der Subgrid-Ansatz verbessert bereits die Lösungen auf den groben Gittern (der Hierarchie) und erhöht so die Genauigkeit und Effizienz insgesamt. Es konnte gezeigt werden, dass sich im Vergleich zu konventionellen Methoden eine Beschleunigung bis zu einem Faktor von 43 (von Kármánsche Wirbelstraße) bzw. 18 (Elbe-Modell mit 2,7 Mio. Elementen) erreichen lässt.

Neben der erreichten Effizienzsteigerung kann die Methode hervorragend zur Studie von Gitterkonvergenz für eine zu untersuchende Problemstellung herangezogen werden und damit dem Modellierer helfen, die geeignete Gitterauflösung zu bestimmen.

Des Weiteren kann der Ansatz auch zur schnellen und sehr genauen Generierung von Anfangszuständen instationärer Berechnungen verwendet werden. Mögliche Verbesserungen sind die Erweiterung auf 3D, auf unstrukturierte Gitter sowie die Berücksichtigung lokaler Gitterverfeinerung.

## 7 Literatur

### *References*

- Bates, P. D.; Wilson, M. D.; Horritt, M. S.; Mason, D.C.; Holden, N.; Currie, A. (2006): Reach scale floodplain inundation dynamics observed using airborne synthetic aperture radar imagery: Data analysis and modelling. *Journal of Hydrology* 328 (1-2), S. 306-318.
- Casulli, V. (2009): A high-resolution wetting and drying algorithm for free-surface hydrodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 60 (4), S. 391-408.
- Casulli, V.; Stelling, G. S. (2011): Semi-implicit subgrid modelling of three-dimensional free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 67 (4), S. 441-449.
- Casulli, V.; Walters, R. (2000): An unstructured grid, three-dimensional model based on the shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 32 (3), S. 331-348.
- Casulli, V.; Zanolli, P. (2002): Semi-implicit numerical modeling of nonhydrostatic free-surface flows for environmental problems. *Mathematical and Computer Modelling* 36 (9-10), S. 1131-1149.
- Cea, L.; Vázquez-Cendón, M. E. (2010): Unstructured finite volume discretization of two-dimensional depth-averaged shallow water equations with porosity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 63 (8), S. 903-930.
- Defina, A. (2000): Two-dimensional shallow flow equations for partially dry areas. *Water Resources Research* 36 (11), S. 3251-3264.
- Dottori, F.; Baldassarre, G. D.; Todini, E. (2013): Detailed data is welcome, but with a pinch of salt: Accuracy, precision, and uncertainty in flood inundation modeling. *Water Resources Research* 49, S. 6079-6085.
- Forzieri, G.; Degetto, M.; Righetti, M.; Castelli, F.; Preti, F. (2001): Satellite multispectral data for improved floodplain roughness modelling. *Journal of Hydrology* 407 (1-4), S. 41-57.

- Ge, L.; Sotiropoulos, F. (2005): 3D unsteady RANS modeling of complex hydraulic engineering flows. I: numerical model. *Journal of Hydraulic Engineering* 131 (9), S. 800-808.
- Jia, Y.; Xu, Y.; Wang, S. S. Y. (2009): Numerical study of flow affected by bendway weirs in Victoria Bendway, the Mississippi River. *Journal of Hydraulic Engineering* 135 (11): S. 902-916.
- Kang, S.; Lightbody, A.; Hill, C.; Sotiropoulos, F. (2011): High-resolution numerical simulation of turbulence in natural waterways. *Advances in Water Resources* 34 (1): S. 98-113.
- Lane, S. N.; Hardy, R. J.; Elliott, L.; Ingham, D. B. (2004): Numerical modeling of flow processes over gravelly-surfaces using structured grids and a numerical porosity treatment. *Water Resources Research* 40 W01302, S. 1-18.
- Lukacova-Medvidova, M.; Teschke, U. (2006): Comparison study of some finite volume and finite element methods for the shallow water equations with bottom topography and friction terms. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 86(11), S. 874-891.
- McMillan, H. K.; Brasington, J. (2007): Reduced complexity strategies for modelling urban floodplain inundation. *Geomorphology* 90 (3-4), S. 226-243.
- Olsen, N.; Stokseth, S. (1995): Three-dimensional numerical modelling of water flow in a river with large bed roughness. *Journal of Hydraulic Research* 33 (4), S. 571-581.
- Paik, J.; Escauriaza, C.; Sotiropoulos, F. (2010): Coherent structure dynamics in turbulent flows past in-stream structures: Some insights gained via numerical simulation. *Journal of Hydraulic Engineering* 1(1), special issue on river flow hydrodynamics: physical and ecological aspects: S. 1-53.
- Patzwahl, R.; Jankowski, J. A.; Lege, T. (2008): Very high resolution numerical modelling for inland waterway design. In: *Proceedings of the International Conference on Fluvial Hydraulics 2008 (River Flow 2008)*, IAHR, Izmir, Turkey.
- Roshko, A. (1954): On the development of turbulent wakes from vortex streets. *NACA Report* 1191.
- Tai, C. H.; Zhao, Y. (2003): Parallel unsteady incompressible viscous flow computations using an unstructured multigrid method. *Journal of Computational Physics* 192 (1), S. 277-311.
- Sanders, B. F.; Schubert, J. E.; Gallegos, H. A. (2008): Integral formulation of shallow-water equations with anisotropic porosity for urban flood modeling. *Journal of Hydrology* 362 (1-2), S. 19-38.
- Sehili, A.; Lang, G.; Lippert, C. (2014): High-resolution subgrid models: background, grid generation, and implementation. *Ocean Dynamics* 64(4), S. 519-535.
- Stelling, G. (2012): Quadtree flood simulations with subgrid digital elevation models. *Proceedings of the ICE - Water Management* 165 (10), S. 567-580.
- Volp, N. D.; van Prooijen, B. C.; Stelling, G. S. (2013): A finite volume approach for shallow water flow accounting for high-resolution bathymetry and roughness data. *Water Resources Research* 49 (7), S. 4126-4135.
- Yu, D.; Lane, S. N. (2011): Interactions between subgrid-scale resolution, feature representation and grid-scale resolution in flood inundation modelling. *Hydrological Processes* 25 (1), S. 36-53.