

HENRY

Hydraulic Engineering Repository

Ein Service der Bundesanstalt für Wasserbau

Article, Published Version

Schulz, Hartmut; Feddersen, Ingo; Weichert, Hans J.

Zwängungskräfte infolge Sohlreibung

Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau

Verfügbar unter/Available at: <https://hdl.handle.net/20.500.11970/102947>

Vorgeschlagene Zitierweise/Suggested citation:

Schulz, Hartmut; Feddersen, Ingo; Weichert, Hans J. (1980): Zwängungskräfte infolge Sohlreibung. In: Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau 48. Karlsruhe: Bundesanstalt für Wasserbau. S. 57-80.

Standardnutzungsbedingungen/Terms of Use:

Die Dokumente in HENRY stehen unter der Creative Commons Lizenz CC BY 4.0, sofern keine abweichenden Nutzungsbedingungen getroffen wurden. Damit ist sowohl die kommerzielle Nutzung als auch das Teilen, die Weiterbearbeitung und Speicherung erlaubt. Das Verwenden und das Bearbeiten stehen unter der Bedingung der Namensnennung. Im Einzelfall kann eine restriktivere Lizenz gelten; dann gelten abweichend von den obigen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Documents in HENRY are made available under the Creative Commons License CC BY 4.0, if no other license is applicable. Under CC BY 4.0 commercial use and sharing, remixing, transforming, and building upon the material of the work is permitted. In some cases a different, more restrictive license may apply; if applicable the terms of the restrictive license will be binding.



Dr.-Ing. H. S c h u l z
Dipl.-Ing. I. F e d d e r s e n
und
Dipl.-Ing. H.-J. W e i c h e r t

ZWÄNGUNGSKRÄFTE INFOLGE SOHLREIBUNG

Restraining forces due to base friction

Zusammenfassung

Auf dem Boden aufliegende Balken und Platten werden durch Schubkräfte zwischen Boden und Balken (Platte) beansprucht, wenn Horizontalkräfte auf den Balken wirken, der Balken vorgespannt wird oder Temperaturunterschiede zwischen Balken und Boden auftreten. Der letztgenannte Fall der Beanspruchung infolge von Temperaturunterschieden tritt immer auf, wird in der Regel nicht richtig erfaßt und unterschätzt. Der Aufsatz befaßt sich mit der Größe und der Verteilung der Schubkräfte in der Balkensohle und der daraus resultierenden Balkenbeanspruchung für eine bilineare (linearelastische - ideal-plastische) Scherspannungs-Verschiebungsfunktion unter Berücksichtigung der Sohlnormalspannung und der Balkenelastizität.

Summary

Beams and plates on the ground are stressed by shear-forces between ground and beam, if horizontal forces are effecting the beam, if the beam is prestressed or if differences in temperature occur between beam and ground. The last mentioned case of stress caused by differences in temperature is not avoidable. The resulting stresses are usually not calculated with sufficient accuracy and they are often underestimated. The report concerns with the magnitude and the distribution of the shear forces along the beam. The resulting forces in the beam are calculated with a bilinear (linear elastic - ideal plastic) shear stress-displacement function regarding the normal stress between beam and ground and the elasticity of the beam.

I N H A L T

	Seite
0 Zusammenstellung der Bezeichnungen	59
1 Einleitung	61
2 Ansatz der Sohlreibung	62
3 Herleitung der Gleichungen	64
3.1 Bereich $0 \leq x \leq L^*$	65
3.2 Bereich $0 \leq \bar{x} \leq \bar{L}$	69
3.3 Kopplung der Bereiche	70
3.4 Dimensionslose Darstellung	72
3.5 Berücksichtigung von Kohäsion	75
4 Anwendung	76
5 Schlußbetrachtung	79
6 Literatur	80

O Zusammenstellung der Bezeichnungen

- A Balken- oder Plattenquerschnitt
- B Balken- oder Plattenbreite
- c_f Bruchwert (Grenzwert) der Kohäsion
- c_{mob} mobilisierte Kohäsion
- E_B Elastizitätsmodul des Balken- oder Plattenmaterials
- f Mobilisierungsgrad für Reibung: $f = m_R \cdot s$
- f_c Mobilisierungsgrad für Kohäsion: $f_c = m_c \cdot s$
- H Balken- oder Plattenhöhe
- L Balken- oder Plattenlänge
- L^* Bereich von L, in dem die Verschiebung s kleiner oder gleich der Grenzverschiebung s_g ist
- \bar{L} Bereich von L, in dem die Verschiebung s größer als die Grenzverschiebung s_g ist
- m_c Kohäsionsverformungsmodul
Steigung der linearisierten Mobilisierungsfunktion für die Kohäsion
- m_R Schubbettungsmodul
Steigung der linearisierten Mobilisierungsfunktion für die Reibung
- P_L Randnormalkraft am Balken- oder Plattenende
- P_{L^*} Normalkraft an der Stelle $x = L^*$
- P_0 Normalkraft an der Stelle $x = 0$
- r Reibungsparameter für Verschiebungen bis zur Grenzverschiebung s_g , d.h. gültig für den Bereich der Länge L^* :

$$r = \sqrt{\frac{B \cdot \sigma \cdot m_R \cdot \tan \phi_f}{AE_B}}$$
- \bar{r} Reibungsparameter für größere Verschiebungen s als die Grenzverschiebung s_g , d.h. gültig für den Bereich der Länge \bar{L} :

$$\bar{r} = \frac{B \cdot \sigma \cdot \tan \phi_f}{AE_B}$$
- s Verschiebung eines Elementes des Balkens oder der Platte in axialer Richtung

- s_g Grenzverschiebung: Scherverschiebung, bei der der volle Scherwiderstand der linearisierten Mobilisierungsfunktion erreicht ist.
- T Sohlreibungskraft über die Balken- bzw. Plattenbreite
- T_c Sohlschubkraft infolge Kohäsion über die Balken- oder Plattenbreite
- x Ortskoordinate im Bereich der Länge L^*
- \bar{x} Ortskoordinate im Bereich der Länge \bar{L}
- Δt mittlere, gleichmäßige Temperaturänderung über der Querschnittsfläche A
- α Temperaturdehnungskoeffizient
- ϵ Randdehnung am Balken- oder Plattenende unter der Wirkung der Randkraft P_L und der Temperaturänderung Δt
- ϵ^* Dehnung des Balkens oder der Platte an der Stelle $x = L^*$ unter der Wirkung der Kraft P_L^* und der Temperaturänderung Δt
- φ Gesamtverlustfaktor: $\varphi = \frac{P_O}{P_L}$
- φ^* Verlustfaktor über die Länge L^* : $\varphi^* = \frac{P_C}{P_L^*}$
- $\bar{\varphi}$ Verlustfaktor über die Länge \bar{L} : $\bar{\varphi} = \frac{P_L^*}{P_L}$
- ϕ_f Bruchreibungswinkel zwischen Baugrund und Bauwerk
- ϕ_{mob} mobilisierter Reibungswinkel zwischen Baugrund und Bauwerk
- λ Längenverhältnis: $\lambda = \frac{L^*}{L}$
- σ Sohlnormalspannung
- τ Sohlreibungsspannung
- ξ^* dimensionslose Ortsveränderliche im Bereich der Länge L^* :

$$\xi^* = \frac{x}{L^*} = \frac{x}{\lambda L}$$
- $\bar{\xi}$ dimensionslose Ortsveränderliche im Bereich der Länge \bar{L} :

$$\bar{\xi} = \frac{x}{\bar{L}} = \frac{x}{(1-\lambda)L}$$

1 Einleitung

Verschiebungen von Bauwerken auf dem Baugrund lösen Sohl Schubspannungen aus, die zur Erhaltung des Gleichgewichtes der horizontalen Kräfte sehr willkommen sind.

Rühren diese Verschiebungen aber aus Längenänderungen einer Sohlplatte oder eines Gründungsbalkens her, so können die Sohl Schubspannungen zu unerwünschten Zwängungskräften in diesen Bauteilen führen, etwa bei Temperaturänderungen großer fugenloser Bauteile oder bei der Einleitung von Vorspannkraften zur Verhinderung durchgehender Trennrisse.

Der Einfluß der Sohlreibung auf die Bemessung von Sohlplatten konnte zunächst bei kleinen Platten mit vereinfachenden Annahmen, z.B. einer verschiebungsunabhängigen konstanten Sohlreibung berücksichtigt werden, erlangte aber mit dem Bau größerer und stärker beanspruchter Flugpisten und vorgespannter Bahnbahnen zunehmend eine wirtschaftliche Bedeutung. Die mathematische Ableitung für die Berücksichtigung eines bilinearen Scherspannungs - Verschiebungsgesetzes für die Sohlreibung beschrieb R. Walter in /1/ nach einer Arbeit von R. Peltier. Die Integrationskonstante D_1 der Lösung der Differentialgleichung wird hier jedoch fälschlicherweise $D_1 = 0$ gesetzt, was zu einem falschen Ergebnis führt. Ebenso ist in der Arbeit von Koepcke /2/ über die Berechnung von Betonfahrbahnen, in welcher die Berücksichtigung eines beliebigen polygonalen Scherspannungs - Scherverschiebungsgesetzes mathematisch hergeleitet wird, ein Fehler enthalten. In Gleichung (9a) muß es dort $\tanh \alpha x$ statt $\sinh \alpha x$ heißen.

Im Jahre 1978 hat Alpan /3/ das Pfahlproblem mit einer bilinearen Arbeitslinie für die Mantelreibung behandelt und dabei auf Matlock verwiesen, der nach Seed und Reese, 1955, /4/ die maßgebende Differentialgleichung 1951 angegeben habe.

Nachfolgend werden die Differentialgleichungen für ein bilineares Scherspannungs - Scherverschiebungsgesetz für den Sohlreibungsfall nochmals abgeleitet. Es wird gezeigt, wie die Kombination der Gleichungen für die Bereiche einer linear zunehmenden Scherspannung und einer konstanten Scherspannung es gestattet, die Zwängungskräfte aus Temperaturänderungen oder die Vorspannkraftverluste beim Vorspannen langer Platten geschlossen zu errechnen.

2 Ansatz der Sohlreibung

Aus Scherversuchen kennen wir die in Bild 1 a gezeigte Scherkraft-Scherverschiebungslinie, die in Bild 1 b in dimensionsloser Form wiedergegeben ist und in dieser Form häufig "Mobilisierungsfunktion" genannt wird.

Unter Inkaufnahme gewisser Ungenauigkeiten soll der gekrümmte Kurvenverlauf durch einen den jeweiligen Erfordernissen nach ingenieurmäßigen Gesichtspunkten angepaßten bilinearen Geradenzug vereinfacht werden, wie er in Bild 1 c dargestellt ist.

Nach einer Grenzverschiebung s_g ist die mögliche Reibung voll mobilisiert und damit $f = 1$.

Die Neigung m_R des ansteigenden Astes der linearisierten Mobilisierungsfunktion beträgt damit

$$m_R = 1/s_g.$$

m_R soll als Schubbettungsmodul bezeichnet werden, wobei der Index R andeutet, daß es sich dabei um einen Reibungsanteil handelt.

Soweit die Reibung nicht voll mobilisiert ist, f also kleiner als 1 ist, gilt

$$f = m_R \cdot s \quad (1)$$

und das Mohr-Coulomb'sche Gesetz wird

$$\tau = \sigma \cdot m_R \cdot s \cdot \tan \phi_f \quad (2a).$$

Damit ist die Mobilisierung einer Scherspannung τ an ein Verschiebungsmaß s geknüpft.

Im Bereich $s > s_g$ gilt dann das verschiebungsunabhängige Gesetz

$$\tau = \sigma \cdot \tan \phi_f \quad (2b)$$

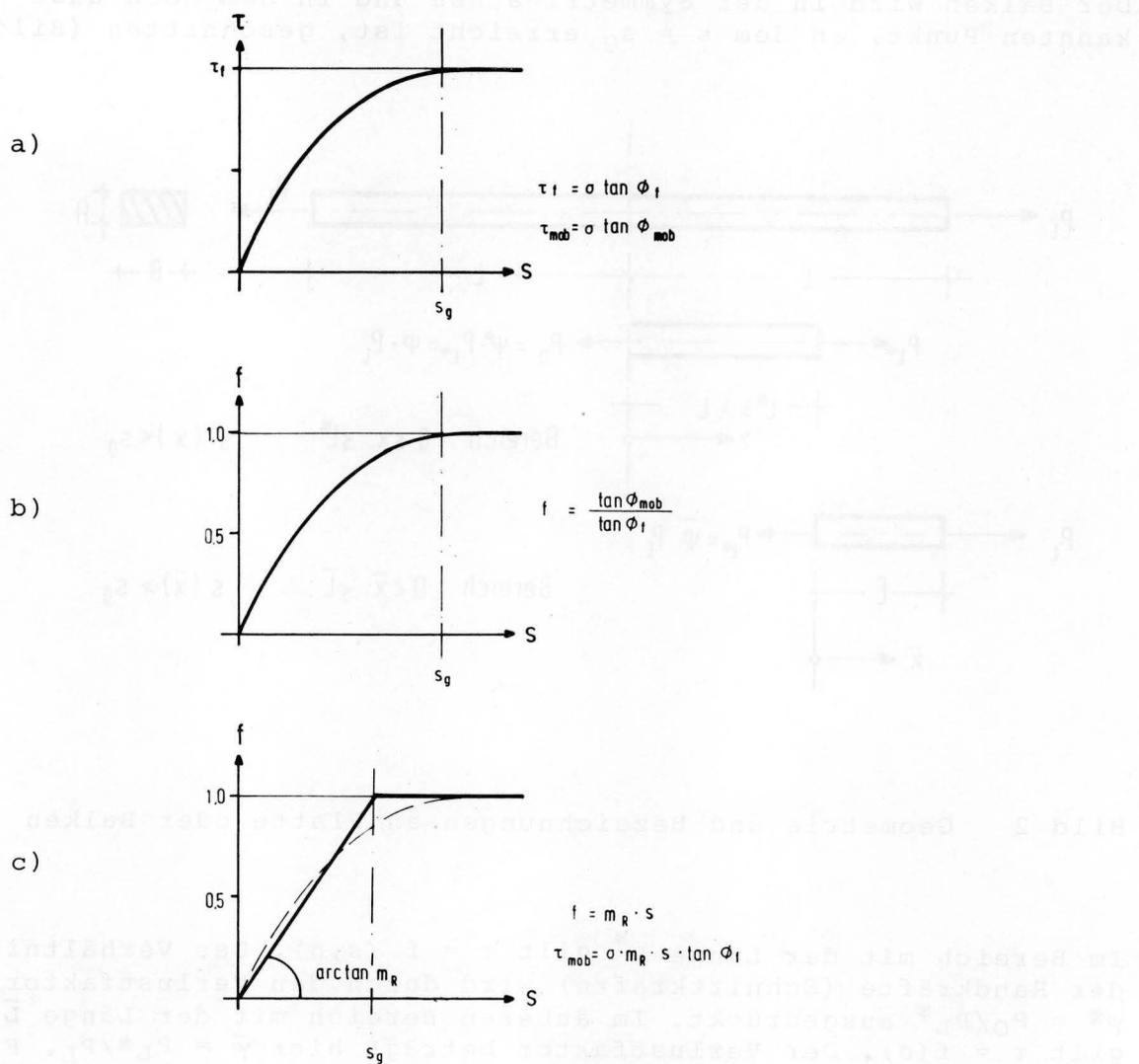


Bild 1 a) Scherspannungs-Scherverschiebungslinie
 b) Mobilisierungsfunktion
 c) Bilineare Mobilisierungsfunktion

3 Herleitung der Gleichungen

Der Balken wird in der Symmetrieachse und in dem noch unbekanntem Punkt, an dem $s = s_g$ erreicht ist, geschnitten (Bild 2).

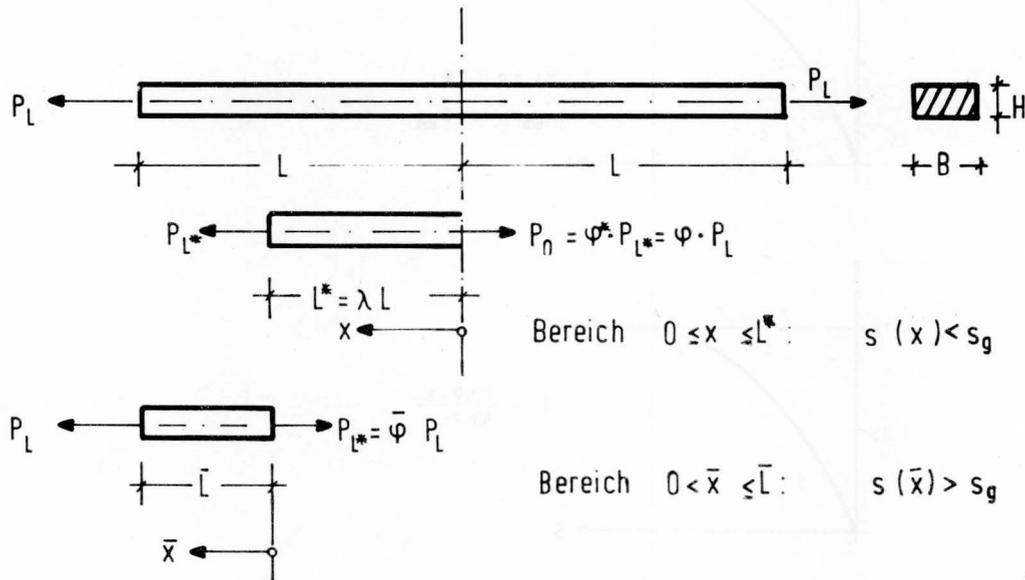


Bild 2 Geometrie und Bezeichnungen an Platte oder Balken

Im Bereich mit der Länge L^* gilt $\tau = f(s, \sigma)$. Das Verhältnis der Randkräfte (Schnittkräfte) wird durch den Verlustfaktor $\varphi^* = P_0/P_{L^*}$ ausgedrückt. Im äußeren Bereich mit der Länge \bar{L} gilt $\tau = f(\sigma)$. Der Verlustfaktor beträgt hier $\bar{\varphi} = P_{L^*}/P_L$. Für den gesamten Balken ergibt er sich zu

$$\frac{P_0}{P_L} = \frac{P_0}{P_{L^*}} \cdot \frac{P_{L^*}}{P_L} = \varphi^* \cdot \bar{\varphi} = \varphi. \quad (3)$$

Zur Ermittlung des Vorspannkraftverlustes wird ein Plattenelement der Querschnittsfläche

$$A = H \cdot B$$

mit H = Höhe und B = Breite und der Länge dx (Bild 3) betrachtet, das den Elastizitätsmodul E_B habe. Folgende Vorzeichenregeln werden zusätzlich zu den in Bild 2 dargestellten Bezeichnungen vereinbart:

Verschiebung s positiv in positiver x -Richtung
 Betonkraft P positiv bei Zug

Temperaturänderung Δt positiv bei Erwärmung
 Reibungsparameter r positiv bei Verschiebung
 in positiver x-Richtung

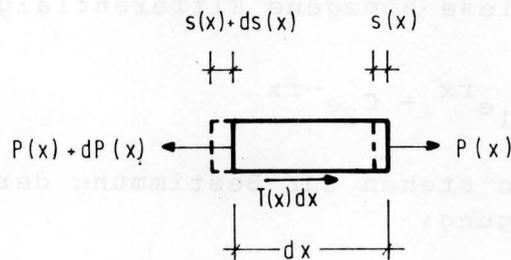


Bild 3 Platten- oder Balkenelement

3.1 Bereich $0 \leq x \leq L^*$

Betrachtet wird zunächst der losgelöste Balkenteil $0 \leq x \leq L^*$, in dem die Grenzverschiebung $|s_g| = 1/m_R$ noch nicht oder gerade an der Stelle $x = L^*$ erreicht sei. Für diesen Teil wird die Sohlreibungskraft $T(x)$:

$$T(x) = B \cdot \tau(x) = B \cdot \sigma \cdot m_R \cdot \tan \phi_f \cdot s(x). \quad (4)$$

Aus dem Kräftegleichgewicht am Element der Länge dx folgt:

$$dP(x) = T(x) \cdot dx. \quad (5)$$

Die axiale Dehnung des Betons beträgt in erster Näherung

$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{P(x)}{A \cdot E_B} + \alpha \cdot \Delta t, \quad (6)$$

woraus durch Differentiation folgt:

$$\frac{d^2s(x)}{dx^2} = \frac{1}{A \cdot E_B} \cdot \frac{dP(x)}{dx}. \quad (7)$$

Wird (4) in (5) eingesetzt, dieser Ausdruck dann in (7), so ergibt sich mit der "Reibungsparameter r " genannten Abkürzung

$$r^2 = \frac{B \cdot \sigma \cdot m_R \cdot \tan \phi_f}{A \cdot E_B} \quad (8)$$

die das Problem beschreibende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} - r^2 \cdot s(x) = 0. \quad (9)$$

Der Lösungsansatz für diese homogene Differentialgleichung lautet:

$$s(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{-rx} \quad (10)$$

Folgende Randbedingungen stehen zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 zur Verfügung:

$$x = 0: \quad \frac{ds(x=0)}{dx} = \varphi^* \cdot \left(\frac{P_L^*}{AE_B} + \alpha \cdot \Delta t \right), \quad (11)$$

$$x = L^*: \quad \frac{ds(x=L^*)}{dx} = \frac{P_L^*}{AE_B} + \alpha \cdot \Delta t. \quad (12)$$

Gleichung (11) sollte an sich in der folgenden Form angeschrieben werden:

$$\frac{ds(x=0)}{dx} = \varphi_o^* \cdot \frac{P_L^*}{AE_B} + \varphi_t^* \cdot \alpha \cdot \Delta t.$$

Da aber im vorliegenden linearen Bereich das Überlagerungsprinzip gilt, ist $\varphi_o^* = \varphi_t^* = \varphi^*$.

Die Ableitung von (10) ergibt

$$\frac{ds(x)}{dx} = C_1 r e^{rx} - C_2 r e^{-rx} \quad (13)$$

und mit der Schreibweise

$$\varepsilon^* = \frac{P_L^*}{AE_B} + \alpha \cdot \Delta t \quad (14)$$

ergibt sich nach Einsetzen von (11) bzw. (12) in (13) ein Gleichungssystem zur Bestimmung von C_1 und C_2 :

$$rC_1 - rC_2 = \varphi^* \cdot \varepsilon^* \quad (15)$$

$$rC_1 \cdot e^{rL^*} - rC_2 \cdot e^{-rL^*} = \varepsilon^* \quad (16)$$

Die Konstanten ergeben sich daraus zu:

$$C_1 = \frac{\varepsilon^*}{r} \cdot \frac{1 - \varphi^* e^{-rL^*}}{e^{rL^*} - e^{-rL^*}}, \quad (17)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon^*}{r} \cdot \frac{1 - \varphi^* e^{rL^*}}{e^{rL^*} - e^{-rL^*}} \quad (18)$$

und damit die Lösung

$$s(x) = \frac{\varepsilon^*}{r} \cdot \frac{e^{rx} + e^{-rx} - \varphi^* (e^{r(L^*-x)} + e^{-r(L^*-x)})}{e^{rL^*} - e^{-rL^*}}, \quad (19)$$

bezw. in einfacherer Form

$$s(x) = \frac{\varepsilon^*}{r} \cdot \frac{\cosh rx - \varphi^* \cosh r(L^*-x)}{\sinh rL^*} \quad (20)$$

Für $x = 0$ und $x = L^*$ ergeben sich die Ausdrücke

$$s(x=0) = s_0 = \frac{\varepsilon^*}{r} \cdot \frac{1 - \varphi^* \cosh rL^*}{\sinh rL^*}, \quad (21)$$

$$s(x=L^*) = s_{L^*} = \frac{\varepsilon^*}{r} \cdot \frac{\cosh rL^* - \varphi^*}{\sinh rL^*}. \quad (22)$$

Aus Gleichung (21) erhält man, da $s_0 = 0$ sein muß:

$$\varphi^* = \frac{1}{\cosh rL^*}. \quad (23)$$

Wenn r und L^* gegeben sind, kann aus Bild 4 der Verlustfaktor φ^* entnommen werden, wobei L^* an die Stelle von $\lambda \cdot L$ treten muß.

Der Verlauf der im Balken verbleibenden Kraft $P(x)$ ist unter Verwendung von (6) und (20) gegeben durch

$$P(x) = AE_B \cdot \left(\frac{ds(x)}{dx} - \alpha \cdot \Delta t \right),$$

bzw.

$$P(x) = AE_B \cdot \left(\varepsilon^* \cdot \frac{\sinh rx + \varphi^* \sinh r(L^* - x)}{\sinh rL^*} - \alpha \Delta t \right) \quad (24)$$

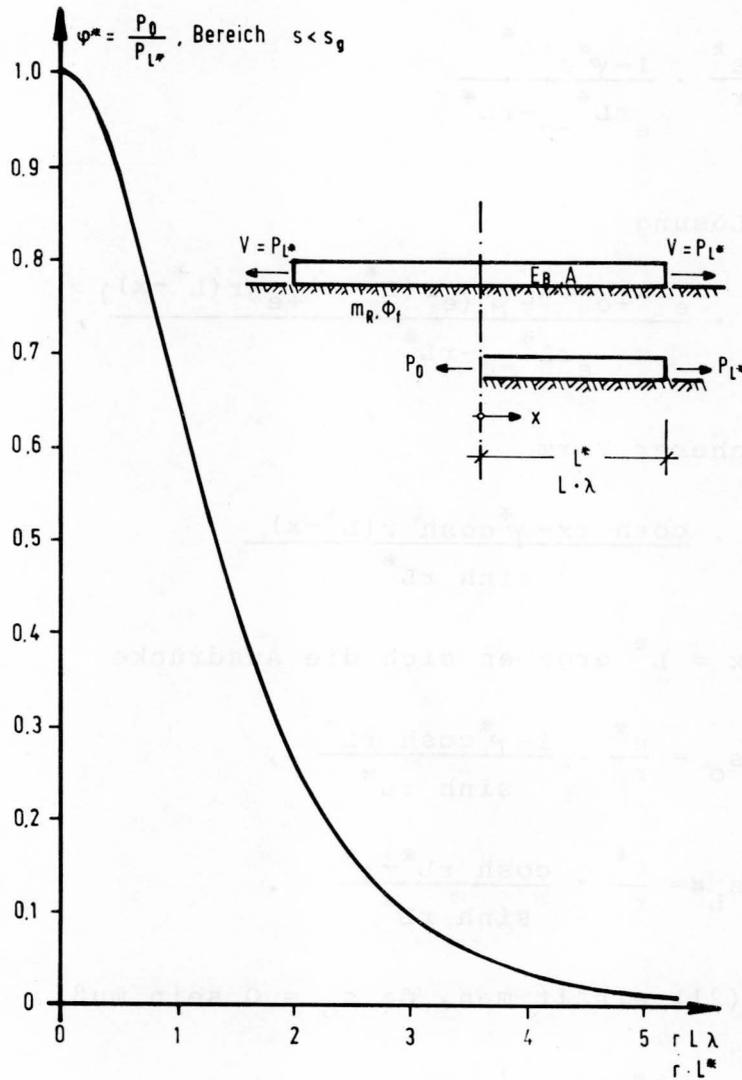


Bild 4 Verlustfaktor φ^* als Funktion des Reibungsparameters und der Länge

Der Verlauf der Sohlreibungskraft $T(x)$ ergibt sich aus (4) und (20) in Verbindung mit (8):

$$T(x) = rAE_B \varepsilon^* \cdot \frac{\cosh rx - \varphi^* \cosh r(L^* - x)}{\sinh rL^*} \quad (25)$$

3.2 Bereich $0 \leq \bar{x} \leq \bar{L}$

Für diesen Bereich mit $s \geq s_g$ ist $T(\bar{x})$ unabhängig vom Verschiebungsbetrag.

Es gilt:

$$T(\bar{x}) d\bar{x} = B \tan \phi_f \cdot d\bar{x} \quad (26)$$

und

$$dP(\bar{x}) = T(\bar{x}) d\bar{x} \quad (27)$$

Die Dehnung im Bereich $0 \leq \bar{x} \leq \bar{L}$ ist

$$\frac{ds(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{P(\bar{x})}{AE_B} + \alpha \Delta t, \quad (28)$$

woraus sich mit (27) und (26) und unter Beachtung des richtungsbehafteten Reibungsparameters für diesen Bereich

$$\bar{r} = \frac{B \tan \phi_f}{AE_B} \quad (29)$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 s(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - \bar{r} = 0 \quad (30)$$

ergibt.

Der Lösungsansatz für diese Differentialgleichung lautet

$$s(\bar{x}) = \frac{1}{2} \bar{r} \bar{x}^2 + b_1 \bar{x} + b_2 \quad (31)$$

mit den Randbedingungen

$$\bar{x} = 0: s(\bar{x} = 0) = s_g = \frac{1}{m_R} \quad (32)$$

$$\bar{x} = \bar{L}: \frac{ds(\bar{x})}{d\bar{x}} = \frac{P_L}{AE_B} + \alpha \Delta t = \epsilon, \quad (33)$$

woraus sich die Konstanten ergeben zu:

$$b_2 = \frac{1}{m_R},$$

$$b_1 = \epsilon - \bar{r} \bar{L}$$

Damit ergibt sich die Verschiebung

$$s(\bar{x}) = \frac{1}{2} \bar{r} \bar{x}^2 + (\epsilon - \bar{r} \bar{L}) \bar{x} + \frac{1}{m_R} \quad (34)$$

mit den Randwerten

$$\bar{x} = 0: \quad s(\bar{x} = 0) = + s_g = + \frac{1}{m_R} \quad (35)$$

$$\bar{x} = \bar{L}: \quad s(\bar{x} = \bar{L}) = s_{\bar{L}} = - \frac{1}{2} \bar{r} \bar{L}^2 + \epsilon \bar{L} + \frac{1}{m_R}. \quad (36)$$

Die Axialkraft $P(\bar{x})$ wird nach (28)

$$P(\bar{x}) = AE_B (\epsilon - \alpha \Delta t - \bar{r} (\bar{L} - \bar{x})) \quad (37)$$

oder unter Beachtung von (33)

$$P(\bar{x}) = AE_B \left(\frac{P_L}{AE_B} - \bar{r} (\bar{L} - \bar{x}) \right), \quad (38)$$

d.h. $P(\bar{x})$ ist von der Temperaturänderung Δt unabhängig.

Die Sohlreibungskraft $T(\bar{x})$ ist:

$$T(\bar{x}) = AE_B \cdot \bar{r}. \quad (39)$$

An dieser Stelle soll noch kurz erwähnt werden, daß neben dem Reibungsparameter \bar{r} auch die Grenzverschiebung s_g bzw. der Schubbettungsmodul m_R als richtungsbehaftete Größen in den Gleichungen dieses Abschnittes betrachtet werden müssen.

3.3 Kopplung der Bereiche

An der Stelle $x = L^*$ bzw. $\bar{x} = 0$ gilt

$$s(x = L^*) = s(\bar{x} = 0)$$

oder mit (22) und (35)

$$\frac{\epsilon^*}{r} \cdot \frac{\cosh rL^* - \psi^*}{\sinh rL^*} = \frac{1}{m_R}. \quad (40)$$

Ersetzt man ε^* durch (14), darin P_L^* durch $\bar{\varphi} \cdot P_L$ und bildet mit (38) $\bar{\varphi}$ nach Gleichung (3):

$$\bar{\varphi} = 1 - \frac{\bar{r}\bar{L}}{\varepsilon - \alpha\Delta t} \quad (41)$$

so erhält man aus (40)

$$\frac{\varepsilon - \bar{r}\bar{L}}{r} \cdot \frac{\cosh rL^* - \varphi^*}{\sinh rL^*} = \frac{1}{m_R} \quad (42)$$

Drückt man nun φ^* durch (23) aus und setzt $L^* = \lambda L$ entsprechend Bild 2, sowie $\bar{L} = (1-\lambda)L$, so geht, mit Benützung von (8) und (29) für

$$\frac{m_R}{r} = \frac{r}{\bar{r}} \quad (43)$$

Gleichung (42) über in

$$\frac{\cosh r\lambda L}{\sinh r\lambda L} - r\lambda L + (rL - \frac{r}{\bar{r}}\varepsilon) = 0. \quad (44)$$

Mit (44) steht eine implizite Bestimmungsgleichung für λ zur Verfügung, die für die Parameter rL und $(r/\bar{r}) \cdot \varepsilon$ in Bild 5 wiedergegeben ist.

Mit λ aus Bild 5 ergibt sich aus Bild 4 der Wert von φ^* . Der gesamte Verlustfaktor infolge einer axialen Vorspannkraft P_L und einer gleichmäßigen Temperaturänderung Δt beträgt damit

$$\varphi = \frac{P_O}{P_L} = \varphi^* \cdot \bar{\varphi}, \quad (45)$$

bzw. unter Beachtung von (41):

$$\varphi = \varphi^* \cdot \left(1 - \frac{\bar{r}(1-\lambda)L}{\varepsilon - \alpha\Delta t}\right) \quad (46)$$

so daß die von der eingeleiteten Kraft P_L im Bewegungsnullpunkt noch ankommende Kraft gegeben ist durch

$$P_O = \varphi \cdot P_L \quad (47)$$

Die infolge Δt zusätzlich auftretenden Zwängungskräfte müssen im Bereich $0 \leq x \leq L^*$ entsprechend Gleichung (24) noch überlagert werden.

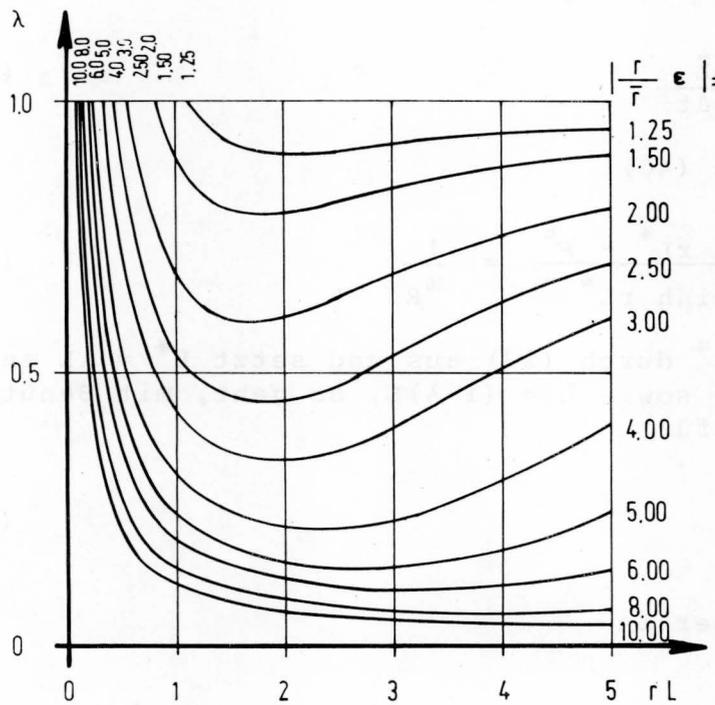


Bild 5 Längenverhältnis λ als Funktion des Reibungsparameters, der Länge und der Randdehnung

3.4 Dimensionslose Darstellung

Unter Benutzung des Längenverhältnisses

$$\lambda = \frac{L^*}{L} \quad (48)$$

und von dimensionslosen Ortsveränderlichen

$$\xi^* = \frac{x}{\lambda L}, \quad (49)$$

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{(1-\lambda)L}$$

erhält man für den Bereich $0 \leq x \leq \lambda L$ mit (23):

$$\frac{r}{\varepsilon^*} s(\xi^*) = \frac{\cosh r\lambda L \cdot \cosh r\lambda L \xi^* - \cosh r\lambda L (1 - \xi^*)}{\cosh r\lambda L \cdot \sinh r\lambda L} \quad (50)$$

Bei der Axialkraft wird zweckmäßig ein Anteil mit $\Delta t = 0$ und ein Anteil mit $P_L^* = 0$ unterschieden:

$$\Delta t = 0: \frac{P(\xi^*)}{\bar{\varphi} P_L} = \frac{\cosh r\lambda L \cdot \sinh r\lambda L \xi^* + \sinh r\lambda L (1 - \xi^*)}{\cosh r\lambda L \cdot \sinh r\lambda L} \quad (51)$$

$$P_L^* = 0: 1 + \frac{P(\xi^*)}{AE_B \alpha \Delta t} = \frac{\cosh r\lambda L \cdot \sinh r\lambda L \xi^* + \sinh r\lambda L (1 - \xi^*)}{\cosh r\lambda L \cdot \sinh r\lambda L} \quad (52)$$

$$\frac{T(\xi^*)}{rAE_B \cdot \varepsilon^*} = \frac{\cosh r\lambda L \cdot \cosh r\lambda L \xi^* - \cosh r\lambda L (1 - \xi^*)}{\cosh r\lambda L \cdot \sinh r\lambda L} \quad (53)$$

Die Gleichungen (50) und (53) sind durch Bild 6, die Gleichungen (51) und (52) durch Bild 7 wiedergegeben.

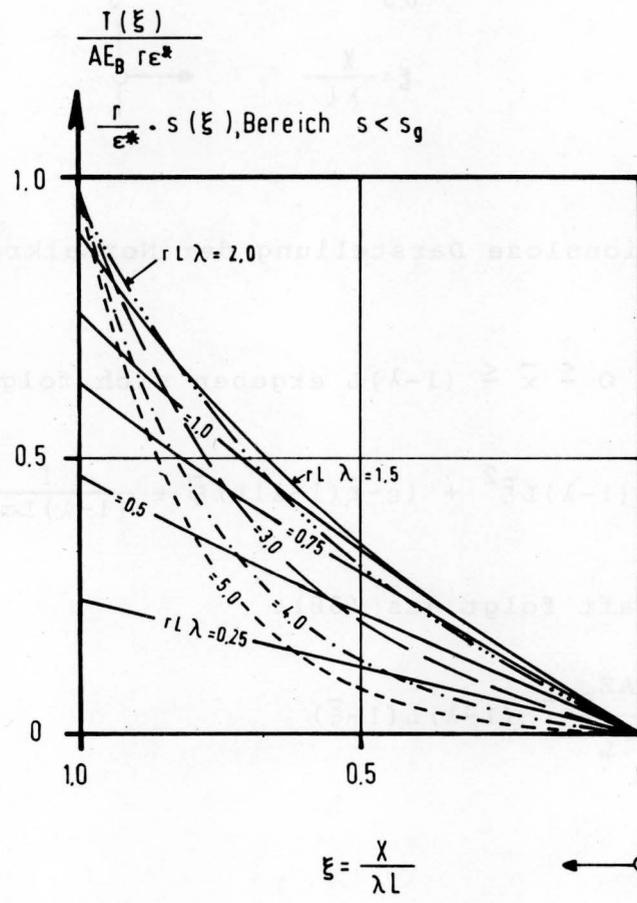


Bild 6 Dimensionslose Darstellung der Sohl Schubkraft und der Verschiebung

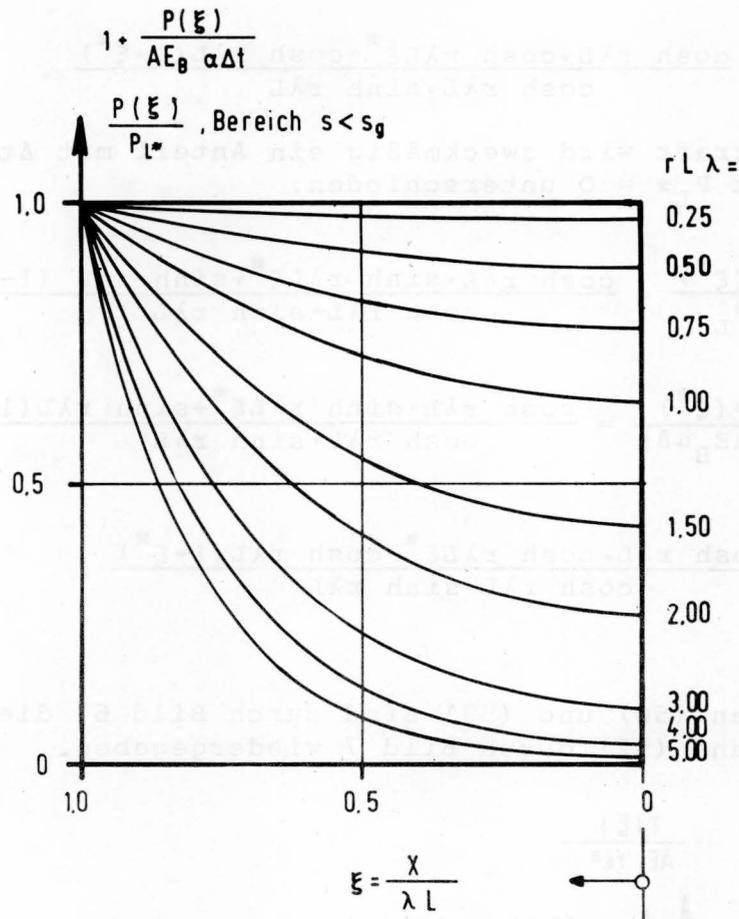


Bild 7 Dimensionslose Darstellung der Normalkraft

Für den Bereich $0 \leq \bar{x} \leq (1-\lambda)L$ ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\frac{\varepsilon(\bar{\xi})}{(1-\lambda)L} = \frac{1}{2} \bar{r}(1-\lambda)L\bar{\xi}^2 + (\varepsilon - \bar{r}(1-\lambda)L)\bar{\xi} + \frac{1}{(1-\lambda)Lm_R} \quad (54)$$

Für die Axialkraft folgt aus (38):

$$\frac{P(\bar{\xi})}{P_L} = 1 - \frac{AE_B}{P_L} \bar{r} (1-\lambda)L(1-\bar{\xi}) \quad (55)$$

und für die Sohlreibungskraft

$$\frac{T(\bar{\xi})}{AE_B \bar{r}} = 1. \quad (56)$$

Da sämtliche Größen im Bereich $0 \leq \bar{x} \leq (1-\lambda)L$ einfach von $\bar{\xi}$ bzw. $\bar{\xi}^2$ abhängen, werden sie nicht gesondert dargestellt.

3.5 Berücksichtigung von Kohäsion

Setzt man für die Mobilisierung der Kohäsion mit

$$f_c = \frac{c_{mob}}{c_f} \quad (57)$$

mit c_{mob} = mobilisierte Kohäsion

c_f = Bruchwert der Kohäsion

eine ebenfalls bilineare Beziehung entsprechend Bild 1c an, so gilt

$$f_c = m_c \cdot s = \frac{c_{mob}}{c_f}$$

bzw.

$$c_{mob} = m_c \cdot c_f \cdot s, \quad (58)$$

wobei m_c als Kohäsionsverformungsmodul bezeichnet wird. Die Sohlreibungskraft ergibt sich dann zu

$$T_c(x) = B \cdot m_c \cdot c_f \cdot s(x). \quad (59)$$

Ersetzt man in dem Ausdruck (8) den Term $\sigma \cdot c_R \tan \phi_f$ durch den Term $m_c \cdot c_f$, in dem Ausdruck (29) den Term $\sigma \cdot \tan \phi_f$ durch den Term c_f , so können alle bisher hergeleiteten Gleichungen auch für den kohäsiven Boden verwendet werden.

An dieser Stelle soll nochmals auf die vereinfachende Annahme einer linearen Mobilisierungsfunktion hingewiesen werden. Diese Annahme kann recht erhebliche Auswirkungen haben, die aber, da es sich insgesamt um ein von den Randbedingungen her einfaches Problem handelt, am besten ingenieurmäßig berücksichtigt werden kann, indem ein die tatsächliche Mobilisierungsfunktion in dem zu erwartenden Bewegungsbereich optimal annähernder m_R -Wert gewählt wird. Bei Scherverschie-

bungskurven, die nach dem Bruchwert einen Abfall zeigen, erhält man mit der bilinearen Form zu große Sohlreibungskräfte. In der Regel wird man damit auf der sicheren Seite liegen.

Für den Sonderfall, daß die Randverschiebungen eines Balkens oder einer Platte kleiner sind als die kleinere Grenzverschiebung s_g für Reibung oder Kohäsion, kann die Sohlreibungskraft auch in der Form

$$T(x) = B(m_c \cdot c_f + \sigma \cdot m_r \cdot \tan \phi_f) \cdot s(x) \quad (60)$$

angesetzt werden. In Gleichung (8) ist dann statt $\sigma \cdot m_r \cdot \tan \phi_f$ der Klammerausdruck von (60) einzusetzen. Wegen der geringen Verschiebungen, die häufig zur vollen Mobilisierung der Kohäsion ausreichen, kann es gelegentlich sinnvoll sein, sie sofort mit dem vollen Wert c_f anzusetzen.

4 Anwendung

Wird der einfache Fall konstanter Parameter betrachtet, so ist die Größe des Vorspannkraftverlustes durch die Gleichung (23) gegeben, soweit s_g nicht überschritten wird. Interessant ist nun die Frage, welche Randkräfte müssen z.B. an einer Betonplatte noch aufgebracht werden, damit bei einer Temperaturänderung $-\Delta t$ im Bewegungsnullpunkt keine Zugspannungen entstehen.

Für $\xi^* = 0$ erhält man aus $P(\xi^*)$ infolge P_L und $P(\xi^*)$ infolge Δt mit (51) und (52):

$$\frac{\bar{\varphi} P_L}{\cosh r\lambda L} = - \left(\frac{1}{\cosh r\lambda L} - 1 \right) AE_B \alpha \Delta t$$

bzw.

$$\frac{\bar{\varphi} P_L}{AE_B \alpha \Delta t} = - (1 - \cosh r\lambda L). \quad (61)$$

Gleichung (61) ist in Bild 8 wiedergegeben. Für den Fall

$$s(x = L^*) \leq s_g$$

gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= 1, \\ \lambda &= 1, \end{aligned}$$

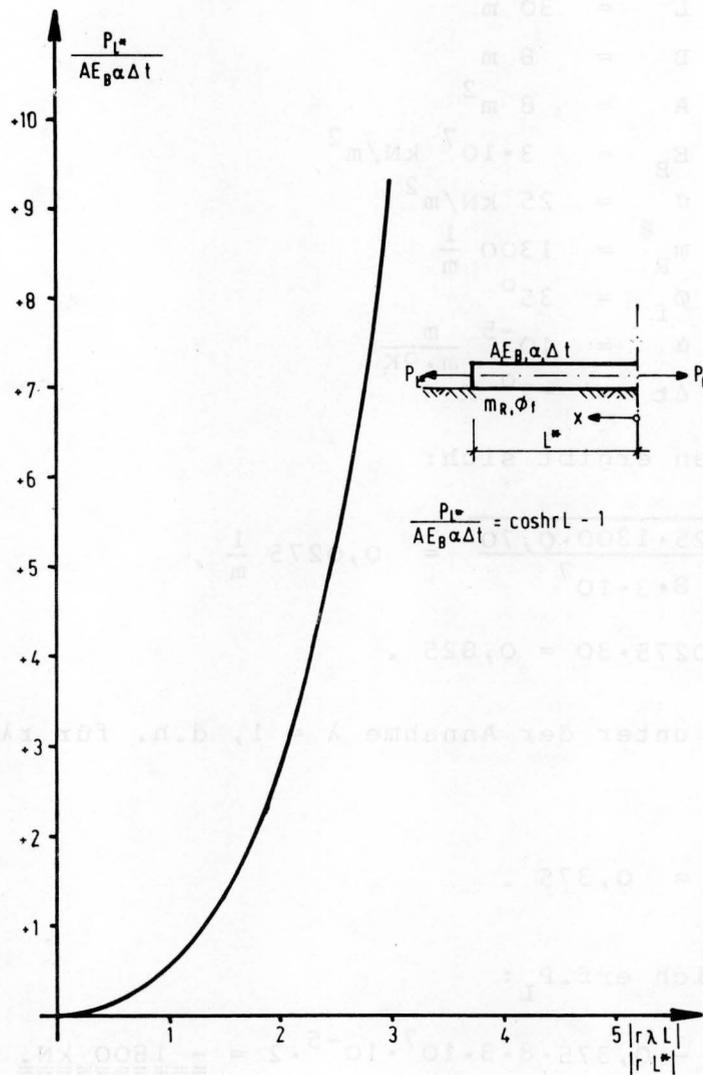


Bild 8 Randkraft infolge Temperaturänderung bei Vermeidung von Zugspannungen im Bewegungsnullpunkt

so daß aus Bild 8 sofort die Größe der Randkraft P_L zu ermitteln ist:

$$P_L = (\cosh rL - 1) AE_B \alpha \Delta t.$$

Zur Verdeutlichung diene folgendes Beispiel:

Sohlplatte:

$$\begin{aligned}
 L &= 30 \text{ m} \\
 B &= 8 \text{ m} \\
 A &= 8 \text{ m}^2 \\
 E_B &= 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \\
 \sigma &= 25 \text{ kN/m}^2 \\
 m_R &= 1300 \frac{1}{\text{m}} \\
 \varnothing_f &= 35^\circ \\
 \alpha &= 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{m} \cdot \text{°K}} \\
 \Delta t &= -2^\circ \text{ K}
 \end{aligned}$$

Aus diesen Daten ergibt sich:

$$r = \sqrt{\frac{8 \cdot 25 \cdot 1300 \cdot 0,70}{8 \cdot 3 \cdot 10^7}} = 0,0275 \frac{1}{\text{m}},$$

$$rL = 0,0275 \cdot 30 = 0,825 .$$

Aus Bild 8 ist unter der Annahme $\lambda = 1$, d.h. für $r\lambda L = 0,825$ zu entnehmen:

$$\frac{\text{erf } P_L}{A \cdot E_B \cdot \alpha \cdot \Delta t} = 0,375 .$$

Damit ergibt sich erf. P_L :

$$\text{erf. } P_L = - 0,375 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 10^{-5} \cdot 2 = \underline{\underline{-1800 \text{ kN}}}.$$

In diesem Beispiel ist die Temperaturänderung noch nicht so groß, daß die Grenzverschiebung s_g an irgendeiner Stelle der Platte überschritten wird. Soweit dies zu befürchten ist, kann die Stelle $x = L^*$ folgendermaßen gefunden werden: L wird als Unbekannte so eingeführt, daß $\lambda=1$ gilt. Aus Gleichung (44) erhält man mit Berücksichtigung von (43):

$$\frac{\cosh rL}{\sinh rL} = \frac{m_R}{r} \epsilon . \quad (62)$$

Aus (61) erhält man zur Vermeidung von Zugkräften im Bewegungsnulldpunkt:

$$\frac{P_L}{AE_B \alpha \Delta t} + 1 = \cosh rL . \quad (63)$$

Aus den Gleichungen (62) und (63) erhält man die gesuchten Größen L und P_L :

$$\sinh rL = \frac{r}{m_R \alpha \Delta t} \quad (64)$$

$$\frac{P_L}{AE_B \alpha \Delta t} = \sqrt{\left(\frac{r}{m_R \alpha \Delta t}\right)^2 + 1} - 1 \quad (65)$$

Das sich aus (64) ergebende L ist in weiteren Berechnungen als L^* zu verwenden, das sich aus (65) ergebende P_L als P_{L^*} .

Die zum Ausgleich der Temperaturspannungen im Bewegungsnullpunkt erforderliche Randkraft P_L ergibt sich mit (65) und (39) unmittelbar zu:

$$P_L = AE_B \alpha \Delta t \left[\sqrt{\left(\frac{r}{m_R \alpha \Delta t}\right)^2 + 1} - 1 \right] + AE_B \bar{r} (1-\lambda) L \quad (66)$$

Man erkennt aus (64), daß die Größe von L ($= L^*$) mit zunehmendem Δt , aber auch mit zunehmendem m_R abnimmt.

5 Schlußbetrachtung

Die Bewertung der hergeleiteten Formeln anhand eines Beispiels ist aber nicht als vollständig zu bezeichnen, wenn nicht wenigstens noch einige weitere Faktoren, die von Einfluß sind, angesprochen werden.

Die vorstehende Betrachtungsweise läßt völlig außer acht, daß zwischen den Wirkungslinien von Axialkraft (Vorspannung) und Sohlreibung ein Hebelarm existiert, der ein Biegemoment in der Platte bewirkt. Dieses wird zwar durch das Eigengewicht wieder ausgeglichen, führt aber doch zu Umlagerungen der Sohlnormalspannungsverteilung mit einer Konzentration in Plattenmitte und damit insgesamt zu einer Verringerung der Zwängungsbeanspruchung.

Dennoch sollen alle die Zwängung abbauenden Effekte, zu denen auch Kriechinflüsse zu zählen sind, nicht zu einer Unterschätzung der Zwängungsbeanspruchung führen.

Am Beginn einer Verschiebung liegt in der Regel ein höherer r -Wert vor und damit ergibt sich eine größere Zwängungsschnittkraft. Insgesamt sind die Zusammenhänge von Tempera-

tur-, Festigkeits-, Elastizitätsentwicklung, Kriech- und Reibungsverhalten sehr kompliziert und in dem hier beleuchteten Problemkreis nicht annähernd vollständig erfaßt.

Dennoch meinen wir, stellen die hergeleiteten Formeln ein wichtiges, zumindest einige wesentliche Parameter in einfacher Weise berücksichtigendes Hilfsmittel dar, um die Reibungsbeanspruchungen von Gründungselementen abschätzen zu können.

6 Literatur

- /1/ Walther, R. : Spannbetonstraßen.
Beton 10 (1960) S. 147 - 160
- /2/ Koepcke, W. : Berechnung von Betonfahrbahnen.
Der Bauingenieur 36 (1961)
S. 87 - 93
- /3/ Alpan, I. : Das Last-Setzungsverhalten des
Einzelpfahles.
Der Bauingenieur 53 (1978)
S. 293 - 298
- /4/ Seed, H.B., Reese, L.C. : The Action of Soft Clay along
Friction Piles.
Proc. ASCE 81 (1955) S. 1 - 28