Title	Phase space Feynman path integrals of parabolic type (Microlocal analysis and asymptotic analysis)
Author(s)	熊ノ郷, 直人
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2019), 2101: 52-63
Issue Date	2019-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/251814
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 第2101巻 2019年 52-63

Phase space Feynman path integrals of parabolic type

工学院大学・情報学部　熊ノ郷　直人
Naoto Kumano-go*

概要

この概説は RIMS での講演に従った [15] の解説である.

§1.　擬微分作用素から相空間経路積分へ

一般階の放物型方程式に対応する相空間経路積分について形式的な説明から始める. $0<T\leq \mathbf{T}<\infty$, $x\in\mathbf{R}^d$ とする. $U(T,0)$ は一般階の放物型方程式

$$\Big(\partial_T+H(T,x,-i\partial_x)\Big)U(T,0)v(x)=0\,,\quad U(0,0)v(x)=v(x)\,. \tag{1.1}$$

を満たす基本解とする. 言い換えると, $U(T,0)v(x)$ は初期時刻 0 の初期関数 $v(x)$ に対する放物型方程式の解とする. $x_0\in\mathbf{R}^d$ に関する Fourier 変換と $\xi_0\in\mathbf{R}^d$ に関する逆 Fourier 変換を用いると

$$v(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0}v(x_0)dx_0d\xi_0\,,$$
$$-i\partial_xv(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0}\xi_0v(x_0)dx_0d\xi_0$$

となる. 適当な条件を満たす関数 $H(T,x,\xi_0)$ を用いて, 擬微分作用素 $H(T,x,-i\partial_x)$ を

$$H(T,x,-i\partial_x)v(x)\equiv\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0}H(T,x,\xi_0)v(x_0)dx_0d\xi_0$$

2000 Mathematics Subject Classification(s): 81S40, 35S05, 35K30.
キーワード: Path integrals, Pseudodifferential operators, Initial value problems for higher-order parabolic equations.
This work was supported by JSPS. KAKENHI(C)15K04937.
*Faculty of Informatics, Kogakuin University, 2665-1, Nakanomachi, Hachiojishi, Tokyo, 192-0015, Japan.

で定義する．基本解 $U(T,0)$ に対し，擬微分作用素の観点から

$$U(T,0)v(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d}\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)v(x_0)dx_0d\xi_0 \tag{1.2}$$

となる関数 $U(T,0,x,\xi_0)$ を求める方法を考える．区間 $[0,T]$ の任意の分割

$$\Delta_{T,0}:T=T_{J+1}>T_J>\cdots>T_1>T_0=0$$

に対し，$U(T,0)$ は基本解なので，初期時刻 T_{j-1}, $j=1,2,\cdots,J,J+1$ をとって解をつなぐことにより

$$U(T,0)v(x)=U(T,T_J)U(T_J,T_{J-1})\cdots U(T_2,T_1)U(T_1,0)v(x)$$

と書ける．$t_j=T_j-T_{j-1}$ とし，分割の幅を $|\Delta_{T,0}|=\max_{1\le j\le J+1}t_j$ とする．$|\Delta_{T,0}|\to 0$ のとき，形式的に $U(T_j,T_{j-1})$ の近似として，作用素

$$I(T_j,T_{j-1})v(x_j)\equiv\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d}\int_{\mathbf{R}^{2d}}e^{i(x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}}e^{-\int_{T_{j-1}}^{T_j}H(t,x_j,\xi_{j-1})dt}v(x_{j-1})dx_{j-1}d\xi_{j-1}$$

を用いると

$$\begin{aligned}U(T,0)v(x)&=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}I(T,T_J)I(T_J,T_{J-1})\cdots I(T_2,T_1)I(T_1,0)v(x)\\&=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d(J+1)}\int_{\mathbf{R}^{2d(J+1)}}e^{\sum_{j=1}^{J+1}(i(x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}-\int_{T_{j-1}}^{T_j}H(t,x_j,\xi_{j-1})dt)}\\&\qquad\times v(x_0)\prod_{j=0}^{J}dx_jd\xi_j\end{aligned} \tag{1.3}$$

と書ける（cf. [11]）．ただし $x=x_{J+1}$ とする．(1.2) と (1.3) より形式的には

$$\begin{aligned}&e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)\\&=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}}e^{\sum_{j=1}^{J+1}(i(x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}-\int_{T_{j-1}}^{T_j}H(t,x_j,\xi_{j-1})dt)}\prod_{j=1}^{J}dx_jd\xi_j\end{aligned} \tag{1.4}$$

と書ける．$q(T_j)=x_j$ となる位置経路 $q(t)$ と $p(T_j)=\xi_j$ となる運動量経路 $p(t)$ を導入し Feynman [5] の相空間経路積分で形式的に表せば，(1.4) は

$$e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)=\int e^{i\phi(q,p)}\mathcal{D}(q,p) \tag{1.5}$$

と書ける．ここで

$$\phi(q,p)\equiv\int_{[0,T)}p(t)\cdot dq(t)+i\int_{[0,T)}H(t,q(t),p(t))dt \tag{1.6}$$

は $q(T)=x$, $q(0)=x_0$, $p(0)=\xi_0$ となる相空間経路 (q,p) の作用であり，相空間経路積分 $\int \sim \mathcal{D}(q,p)$ は”すべての経路 (q,p) に関する和”である．表現 (1.3) や (1.4) は時間分割近似法と呼ばれ， (1.5) の相空間経路積分の説明として用いられている．

しかし，数学的な意味において，(1.5) の相空間経路積分の測度 $\mathcal{D}(q,p)$ は存在しない．なぜ相空間経路積分は「積分」と言えるのか？物理的な意味においてさえ，不確定性原理によれば，位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ は同時刻 t に確定できない．(1.3) のように，作用素の収束で相空間経路積分を説明している書籍も多いが，作用素の意味では，位置空間経路積分と相空間経路積分を区別できていないようにも見える．なぜ相空間経路積分は（位置空間経路ではなく）「相空間経路」と言えるのか？さらに L. S. Schulman [18, §31] では ‘in this method formal trick of great power can give just plain wrong answers’ と形式的な式変形の間違った使用法の例が紹介されている．

この概説では，[15] と現在準備中の論文に基づき，区分的定数経路による時間分割近似法を用いて，一般階の放物型方程式に対応し，一般の汎関数 $F(q,p)$ をもつ相空間経路積分

$$\int e^{i\phi(q,p)}F(q,p)\mathcal{D}(q,p) \tag{1.7}$$

について説明する（特に相空間経路積分 (1.5) は相空間経路積分 (1.7) の $F(q,p)\equiv 1$ の場合となる）．言い換えると，相空間経路積分が存在する一般的な汎関数の集合 $\mathcal{F}$ を与え，その相空間経路積分が標準的な積分に類似した性質をもつことを説明する．より正確に言うと，任意の汎関数 $F(q,p)\in\mathcal{F}$ に対し，相空間経路積分 (1.7) の時間分割近似法は位置経路の終点 x と運動量経路の始点 ξ_0 に関し，広義一様収束する．不確定性原理に関わらないように基本的な汎関数の一部を除いているため，汎関数の集合 $\mathcal{F}$ は和や積の演算に関して閉じている．このため，相空間経路積分が定義できる汎関数の多くの例を創ることが可能である．また，形式的な式変形が必ずしもできるわけではないため使用する際には注意が必要であるが，時間に関する積分と相空間経路積分との順序交換定理，極限と相空間経路積分との順序交換定理などが成立する．

注意． Schrödinger 方程式の解に対する相空間経路積分に関しては，様々な数学的アプローチがある（Wiener 測度を利用した Daubechies-Klauder [4], Fresnel 積分変換を利用した Albeverio-Guatteri-Mazzucchi [2][1, §10.5.3][17, §3.3], Chernoff の公式を利用した Smolyanov-Tokarev-Truman [20], ホワイトノイズ解析を利用した Bock-Grothaus[3], Fourier 積分作用素を利用した H. Kumano-go-Kitada [8], N. Kumano-go [10], Ichinose[7] 等）．特に，N. Kumano-go-Fujiwara [13][14] では，Schrödinger 方程式に対応し，一般的な被積分汎関数をもつ相空間経路積分の存在や積分に類似した性質を扱っている．それに対し，この解説では，[15] と現在準備中の論文に基づいて，一般階の放物型方程式に対応し，一般的な被積分汎関数をもつ相空間経路積分の存在や性質を扱う．Schrödinger 方

程式の場合は $H(t,x,\xi)$ に x と ξ に関し類似した性質を仮定したため位置経路と運動量経路に関する性質も類似していたが，一般階の放物型方程式の場合は $\langle\xi\rangle$ に関する評価など x と ξ に関し少し異なる性質を仮定するため，位置経路と運動量経路に関する性質が少し異なり，さらに注意が必要である．

§ 2.　相空間経路積分の存在と性質

一般階（m 階）放物型方程式 (1.1) の関数 $H(t,x,\xi)$ に以下を仮定する．

仮定 1. $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$ とする．$m>0$, $0\le\delta<\rho\le 1$ とする．複素数値関数 $H(t,x,\xi)$ は $(x,\xi)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$ に関し C^∞-関数で次が成立するとする．

(1) ある正の定数 c, C が存在して

$$0<c\le \mathrm{Re}\,H(t,x,\xi)\le C\langle\xi\rangle^m$$

を満たす．ただし，$\mathrm{Re}\,H(t,x,\xi)$ は $H(t,x,\xi)$ の実部とする．

(2) 任意の多重指数 α, β に対し，$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)$ は $t\in[0,\mathbf{T}]$ に関し区分的連続で，正の定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在し

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)/\mathrm{Re}\,H(t,x,\xi)\right|\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}$$

を満たす．

注意. [15] では $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)$ に $t\in[0,\mathbf{T}]$ に関する連続性を仮定したが，この解説では現在準備中の論文に基づいて，$t\in[0,\mathbf{T}]$ に関する区分的連続性に緩める．また [15] では $\langle\xi\rangle$ より一般的な尺度関数を扱ったが，この解説では現在準備中の論文に基づいて，尺度関数は $\langle\xi\rangle$ に限定する．これらは，[15] より相空間経路積分で扱える演算をなるべく多くするための調整である．

区分的定数経路について説明する．区間 $[0,T]$ の任意の分割を

$$\Delta_{T,0}:T=T_{J+1}>T_J>\cdots>T_1>T_0=0 \tag{2.1}$$

とする．$t_j=T_j-T_{j-1}$ とし $|\Delta_{T,0}|=\max_{1\le j\le J+1}t_j$ とする．$x_{J+1}=x$ とおき，$x_j\in\mathbf{R}^d$, $\xi_j\in\mathbf{R}^d$ とする．区分的定数で左連続な位置経路 $q_{\Delta_{T,0}}(t)=q_{\Delta_{T,0}}(t,x_{J+1},x_J,\dots,x_1,x_0)$ を

$$q_{\Delta_{T,0}}(0)=x_0\,,\quad q_{\Delta_{T,0}}(t)=x_j\,,\quad T_{j-1}<t\le T_j \tag{2.2}$$

で定義し，区分的定数で右連続な運動量経路 $p_{\Delta_{T,0}}(t)=p_{\Delta_{T,0}}(t,\xi_J,\dots,\xi_1,\xi_0)$ を

$$p_{\Delta_{T,0}}(t)=\xi_{j-1}\,,\quad T_{j-1}\le t<T_j \tag{2.3}$$

で定義する．

定義 1 (区分的定数経路の 2 つの空間 $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$).

(1) $q:[0,T]\to\mathbf{R}^d$ が左連続で区分的定数，i.e., $q(t)=q_{\Delta_{T,0}}(t)$ のとき，$q\in\mathcal{Q}$ とする.

(2) $p:[0,T)\to\mathbf{R}^d$ が左連続で区分的定数，i.e., $p(t)=p_{\Delta_{T,0}}(t)$ のとき，$p\in\mathcal{P}$ とする.

区分的定数経路 $q_{\Delta_{T,0}}$, $p_{\Delta_{T,0}}$ を用いると，汎関数 $\phi(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})$, $F(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})$ は，有限個の変数 x_{J+1}, ξ_J, x_J, $\ldots$, ξ_1, x_1, ξ_0, x_0 の関数 $\phi_{\Delta_{T,0}}$, $F_{\Delta_{T,0}}$ となる，i.e.,

$$\begin{aligned}(2.4)\qquad &\phi(q_{\Delta_{T,0}}p_{\Delta_{T,0}})\equiv\phi_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\\ &=\sum_{j=1}^{J+1}\int_{[T_{j-1},T_j)}p_{\Delta_{T,0}}\cdot dq_{\Delta_{T,0}}(t)+i\sum_{j=1}^{J+1}\int_{[T_{j-1},T_j)}H(t,q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})dt\\ &=\sum_{j=1}^{J+1}(x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}+i\sum_{j=1}^{J+1}\int_{T_{j-1}}^{T_j}H(t,x_j,\xi_{j-1})dt\,,\end{aligned}$$

$$(2.5)\qquad F(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})\equiv F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\,.$$

定義 2 (汎関数 $F(q,p)$ の集合 $\mathcal{F}$). $F(q,p)$ は $q\in\mathcal{Q}$, $p\in\mathcal{P}$ の汎関数で，任意の分割 $\Delta_{T,0}$ に対し，

$$F(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})\equiv F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_0,x_0)\in C^\infty(\mathbf{R}^{d(2J+3)})$$

を仮定する. $F(q,p)$ が仮定 4（後述）を満たすとき，$F(q,p)\in\mathcal{F}$ とする.

注意. 仮定 4 は定理 1 の収束の鍵となるが，簡明さのため，最後に述べる.

定理 1 (相空間経路積分の存在). 任意の汎関数 $F(q,p)\in\mathcal{F}$ に対し，時間分割近似法

$$\begin{aligned}(2.6)\qquad &\int e^{i\phi(q,p)}F(q,p)\mathcal{D}(q,p)\\ &\equiv\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}}e^{i\phi(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})}F(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})\prod_{j=1}^{J}d\xi_j dx_j\end{aligned}$$

は $(x,\xi_0,x_0)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$ に関し，広義一様収束する．つまり，相空間経路積分は well-defined である.

注意. $F(q,p)\equiv 1$ のとき (2.6) の右辺は

$$\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}}e^{i\sum_{j=1}^{J+1}(x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}+i\sum_{j=1}^{J+1}\int_{T_{j-1}}^{T_j}H(t,x_j,\xi_{j-1})dt}\prod_{j=1}^{J}d\xi_j dx_j$$

となるが，このときでさえ，各積分は必ずしも絶対収束しない， i.e., $\int_{\mathbf{R}^{2d}}dx_jd\xi_j=\infty$. さらに，積分の個数 J は ∞ に近づく，i.e., $\infty\times\infty\times\infty\times\cdots\cdots$. このため，我々は (2.6) の多重積分を多重振動積分として扱う (cf. H. Kumano-go [9, §1.6]).

相関数経路積分が定義できる汎関数の例 $F(q,p)\in\mathcal{F}$ を述べる.

定理 2. $0\le\delta<\rho\le 1$, $L\ge 0$, $0\le T'\le T''\le T$ とし $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}$ とする.

(1) 任意の多重指数 α に対し，$\partial_x^\alpha B(t,x)$ は連続で，ある正の定数 C_α が存在し

$$|\partial_x^\alpha B(t,x)|\le C_\alpha\langle x\rangle^L$$

を満たすとする．このとき，時刻 t（$0\le t\le T$）での値

$$F(q)\equiv B(t,q(t))\in\mathcal{F}.$$

特に $F(q)\equiv 1\in\mathcal{F}$.

(2) 任意の多重指数 α,β に対し，$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)$ は連続で，ある正の定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在し

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)\right|\le C_{\alpha,\beta}\left(\langle x\rangle+\langle\xi\rangle\right)^L\langle\xi\rangle^{\delta|\alpha|-\rho|\delta|}$$

を満たすとする．このとき，時間に関する積分

$$F(q,p)\equiv\int_{[T',T'')}B(t,q(t),p(t))dt\in\mathcal{F}.$$

(3) 任意の多重指数 α,β に対し，$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)$ は連続で，ある正の定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在し，

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)\right|\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\alpha|-\rho|\delta|}$$

を満たすとする．このとき，

$$F(q,p)\equiv e^{\int_{[T',T'')}B(t,q(t),p(t))dt}\in\mathcal{F}.$$

(4) 任意の多重指数 α に対し，$\partial_x^\alpha B(t,x)$ は連続で，ある正の定数 c, C, C_α が存在し，

$$0<c\le\operatorname{Re}B(t,x)\le C\langle x\rangle^L,\quad |\partial_x^\alpha B(t,x)/\operatorname{Re}B(t,x)|\le C_\alpha$$

を満たすとする．このとき，

$$F(q)\equiv e^{-\int_{[T',T'')}B(t,q(t))dt}\in\mathcal{F}.$$

注意. 不確定性原理を避けるため，同時刻 t に位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を議論しない．特に $q(t)\in\mathcal{F}$ であるが，$p(t)\notin\mathcal{F}$ となる．

汎関数の集合 $\mathcal{F}$ における代数は以下のようになる．

定理 3 (集合 $\mathcal{F}$ における代数). 任意の $F(q,p)$, $G(q,p) \in \mathcal{F}$ に対し,

$$F(q,p) + G(q,p) \in \mathcal{F}, \quad F(q,p)G(q,p) \in \mathcal{F},$$

注意. 汎関数の集合 $\mathcal{F}$ は和, 積の演算に関して閉じている. このため, 相関数経路積分ができる汎関数の多くの例が創れる.

注意. この概説では述べないが, 講演で触れたように, 現在準備中の論文では, [15] では扱わなかった汎関数微分などの演算についても述べる予定である.

相関数経路積分の測度は存在しないが, 以下のように, 相空間経路積分と時間に関する積分の順序交換ができる.

定理 4 (経路積分と時間に関する積分との順序交換).
$L \geq 0$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, $0 \leq T' \leq T'' \leq T$ とする. 任意の多重指数 α に対し $\partial_x^\alpha B(t,x)$ は連続で, ある正の定数 C_α が存在し

$$|\partial_x^\alpha B(t,x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^L$$

を満たすとする. このとき, $F(q,p) \equiv 1$ を含む任意の $F(q,p) \in \mathcal{F}$ に対し

$$\begin{aligned} &\int e^{i\phi(q,p)} \left(\int_{[T',T'')} B(t,q(t))dt \right) F(q,p)\mathcal{D}(q,p) \\ &= \int_{[T',T'')} \left(\int e^{i\phi(q,p)} B(t,q(t))F(q,p)\mathcal{D}(q,p) \right) dt \end{aligned}$$

が成立する.

注意. 不確定性原理を避けるため, 位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を同時刻 t に扱わない.

注意. 経路積分とある種の極限との順序交換も成立する. また任意の多重指数 α に対し $\partial_x^\alpha B(t,x)$ が連続で, ある正の定数 C_α で $|\partial_x^\alpha B(t,x)| \leq C_\alpha$ が成り立つとき, 摂動展開

$$\begin{aligned} \int e^{i\phi(q,p) + \int_{[T',T'')} B(t,q(t))dt} \mathcal{D}(q,p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[T',T'')} dt_k \int_{[T',t_k)} dt_{k-1} \cdots \int_{[T',t_2)} dt_1 \\ &\times \int e^{i\phi(q,p)} B(t_k,q(t_k))B(t_{k-1},q(t_{k-1})) \cdots B(t_1,q(t_1))\mathcal{D}(q,p) \end{aligned}$$

が成立する.

§ 3. 定理 1 の証明の概略

放物型方程式に対応し，一般的な被積分汎関数をもつ相空間経路積分の存在証明の概略だけ述べる．相空間経路積分 (2.6) の存在，つまり，多重振動積分の収束

$$\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{i\phi(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})}F(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})\prod_{j=1}^{J}d\xi_j dx_j \tag{3.1}$$

を証明するためには，関数 $F(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})\equiv F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_0,x_0)$ に多くの仮定を加え，その仮定で集合 $\mathcal{F}$ を定義すれば良い．また加える仮定は和と積で閉じたものにする．そうすれば集合 $\mathcal{F}$ もまた和と積で閉じるであろう．さらに他のことは考えないようにする．そうすれば $\mathcal{F}$ は集合として大きくなる．集合 $\mathcal{F}$ は少なくとも一つの例 $F(q,p)\equiv 1$ を含むであろう．

収束の証明は 3 つのステップ

1°. (3.1) の多重振動積分を $J\to\infty$ のとき定数 C の J 乗 C^J で コントロールする（H. Kumano-go-Tsutsumi 型 [19, Theorem 1.1], [9, §7.2, Theorem 2.2] の評価）.

2°. (3.1) の多重振動積分を $J\to\infty$ によらない定数 C でコントロールする（Fujiwara[6] 型の評価）.

3°. (3.1) の多重振動積分が $|\Delta_{T,0}|\to 0$ のとき収束するように条件を加える.

からなる．以下，これらの概略を順に説明していく．

1°. (3.1) の多重振動積分を $J\to\infty$ のとき定数 C の J 乗 C^J でコントロールするため，以下のように $F_{\Delta_{T,0}}$ を，J によらない定数 B_{ℓ_1,ℓ_2} の J 乗 $(B_{\ell_1,\ell_2})^J$ でコントロールできると仮定する．

仮定 2. $0<T\le\mathbf{T}$，$L\ge 0$ とする．任意の非負整数 ℓ_1, ℓ_2 に対し，正の定数 A_{ℓ_1,ℓ_2}, B_{ℓ_1,ℓ_2} が存在し，任意の分割 $\Delta_{T,0}$ と，$|\alpha_j|\le\ell_1$, $|\beta_{j-1}|\le\ell_2$ を満たす任意の多重指数 α_j, β_{j-1}, $j=1,2,\ldots,J,J+1$ に対し，

$$\left|\left(\prod_{j=1}^{J+1}\partial_{x_j}^{\alpha_j}\partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}}\right)F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\right|$$
$$\le A_{\ell_1,\ell_2}(B_{\ell_1,\ell_2})^{J+1}\left(\sum_{j=1}^{J+1}\langle x_j\rangle+\sum_{j=1}^{J+1}\langle\xi_{j-1}\rangle+\langle x_0\rangle\right)^{L}\prod_{j=1}^{J+1}\langle\xi_{j-1}\rangle^{\delta|\alpha_j|-\rho|\beta_{j-1}|}.$$

注意. 多重振動積分は部分積分を繰り返して定義される．変数の個数 J によらない ℓ_1, ℓ_2 で微分の階数を $|\alpha_j|\le\ell_1$, $|\beta_{j-1}|\le\ell_2$ でコントロールする．

注意. 定理 2 の例はすべて，仮定 2 を満たす．例として定理 2 (3) を説明する．
$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}$ を仮定し，$F(q,p) \equiv e^{\int_{[0,T)} B(t,q(t),p(t))dt}$ とすると

$$F_{\Delta_{T,0}} = \prod_{j=1}^{J+1} e^{\int_{[T_{j-1},T_j)} B(t,x_j,\xi_{j-1})dt}$$

と書ける．ゆえに $F_{\Delta_{T,0}}$ は上の仮定 2 を満たす．

2°. (3.1) の多重振動積分を J によらない正の定数 C でコントロールするため，以下を仮定する．

仮定 3. $0 < T \le \mathbf{T}$, $L \ge 0$ とする．任意の非負整数 ℓ_1, ℓ_2 に対し，正の定数 A_{ℓ_1,ℓ_2}, B_{ℓ_1,ℓ_2} が存在し，任意の分割 $\Delta_{T,0}$ と，$|\alpha_j| \le \ell_1$, $|\beta_{j-1}| \le \ell_2$ を満たす任意の多重指数 α_j, β_{j-1}, $j = 1,2,\ldots,J,J+1$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\prod_{j=1}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j}\partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}}\right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\right| \\
&\le A_{\ell_1,\ell_2}(B_{\ell_1,\ell_2})^{J+1}\prod_{j=1}^{J+1}(t_j)^{\min(|\beta_{j-1}|,1)} \\
&\quad\times\left(\sum_{j=1}^{J+1}\langle x_j\rangle + \sum_{j=1}^{J+1}\langle\xi_{j-1}\rangle + \langle x_0\rangle\right)^L \prod_{j=1}^{J+1}\langle\xi_{j-1}\rangle^{\delta|\alpha_j|-\rho|\beta_{j-1}|}.
\end{aligned}$$

注意. 定理 2 の例はすべて，仮定 3 を満たす．例として定理 2 (3) を説明する．
$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}$ を仮定し，$F(q,p) \equiv e^{\int_{[0,T)} B(t,q(t),p(t))dt}$ とすると

$$\partial_{\xi_{k-1}} F_{\Delta_{T,0}} = \prod_{j=1}^{J+1} e^{\int_{[T_{j-1},T_j)} B(t,x_j,\xi_{j-1})dt} \times \int_{[T_{k-1},T_k)} (\partial_\xi B)(t,x_k,\xi_{k-1})dt$$

と書ける．$\int_{[T_{k-1},T_k)} dt = t_k$ に注意すれば $F_{\Delta_{T,0}}$ が仮定 3 を満たすことが示せる．

注意. この仮定において，任意の分割 $\Delta_{T,0}$ であることに注意して欲しい．もし分割の個数が $J = 0,1,2,\ldots$ ならば $(B_{\ell_1,\ell_2})^1$, $(B_{\ell_1,\ell_2})^2$, $(B_{\ell_1,\ell_2})^3$, $\cdots$ でコントロールできる．

さらに，以下の補題にも注意する．

補題. $F_{T_2,T_1,0}(x_2,\xi_0,x_2,\xi_0,x_0) = F_{T_2,0}(x_2,\xi_0,x_0)$.

（証明） $x_1 = x_2$, $\xi_1 = \xi_0$ を代入した区分的定数経路を考えると，
$q_{T_2,T_1,0}(x_2,x_2,x_0) = q_{T_2,0}(x_2,x_0)$, $p_{T_2,T_1,0}(\xi_0,\xi_0) = p_{T_2,0}(\xi_0)$ より

$$\begin{aligned}
&F_{T_2,T_1,0}(x_2,\xi_0,x_2,\xi_0,x_0) = F\left(q_{T_2,T_1,0}(x_2,x_2,x_0), p_{T_2,T_1,0}(\xi_0,\xi_0)\right) \\
&= F\left(q_{T_2,0}(x_2,x_0), p_{T_2,0}(\xi_0)\right) = F_{T_2,0}(x_2,\xi_0,x_0). \qquad \square
\end{aligned}$$

さて $2m-(\rho-\delta)N\le 0$ とする．二重表象 $p(x_2,\xi_1,x_1,\xi_0)$ の擬微分作用素の漸近展開

$$\sum_{|\alpha_1|<N}\frac{(-i)^{|\alpha_1|}}{\alpha_1!}(\partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\partial_{x_1}^{\alpha_1}p)(x_2,\xi_0,x_2,\xi_0)+r_N(x_2,\xi_0),\quad |r_N(x_2,\xi_0)|\le Ct_2$$

を繰り返し，補題を用いて，主表象 $p(x_2,\xi_0,x_2,\xi_0)$ の経路を単純な経路に変えることを繰り返す．このとき，多くの剰余項が現れるが，多くの項 t_j を使って

$$\sum_{j=1}^{J+1}t_je^{\sum_{j=1}^{J+1}t_j}=Te^T\le \mathbf{T}e^{\mathbf{T}}<\infty$$

でコントロールする．このとき，(3.1) の多重振動積分は J によらない正の定数 C でコントロールできる．

注意． 多重表象の擬微分作用素 [9, §7.2] の観点から言えば，多重表象は

$$p=e^{-\sum_{j=1}^{J+1}\int_{[T_{j-1},T_j)}H(t,x_j,\xi_{j-1})dt}F_{\Delta_{T,0}}$$

である．多重表象の擬微分作用素の漸近展開の主部として

$$\sum_{\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|<N}\frac{(-i)^{\sum_{j=1}^{J}|\alpha_j|}}{\prod_{j=1}^{J}\alpha_j!}\left(\partial_{\xi_J}^{\alpha_J}\partial_{x_J}^{\alpha_J}\cdots\left(\partial_{\xi_2}^{\alpha_2}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\left(\partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\partial_{x_1}^{\alpha_1}p)\Big|_{\xi_1=\xi_0}^{x_1=x_2}\right)\Big|_{\xi_2=\xi_0}^{x_2=x_3}\right)\cdots\right)\Big|_{\xi_J=\xi_0}^{x_J=x_{J+1}}$$

を用いる．

3°. $|\Delta_{T,0}|\to 0$ のとき，(3.1) の多重振動積分を収束させるために，以下のように，仮定 3 に条件 (3.3) を追加する．粗く言えば，測度は底辺を考えるが，積分は底辺と高さの積を考える．条件 (3.3) は，もし 2 つの経路の差が小さければ，2 つの高さの差 $\partial_{x_s}F_{\Delta_{T,0}}$ も小さくなり $\sum_{j=1}^{J+1}\mu((T_{j-1},T_j])\le\mu((0,T])<\infty$ を満たす $\mu((T_{s-1},T_s])$ でコントロールできることを意味する．このとき，(3.1) の多重振動積分は $|\Delta_{T,0}|\to 0$ で収束する．

仮定 4. $0<T\le\mathbf{T}$, $L\ge 0$ とする．μ は区間 $[0,T]$ 上の Borel 測度とする．任意の非負整数 ℓ_1, ℓ_2 に対し，正の定数 A_{ℓ_1,ℓ_2}, B_{ℓ_1,ℓ_2} が存在し，任意の分割 $\Delta_{T,0}$, $|\alpha_j|\le\ell_1$, $|\beta_{j-1}|\le\ell_2$ を満たす任意の多重指数 α_j, β_{j-1}, $j=1,2,\dots,J,J+1$ に対し

$$\left|\left(\prod_{j=1}^{J+1}\partial_{x_j}^{\alpha_j}\partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}}\right)F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\dots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\right| \tag{3.2}$$

$$\le A_{\ell_1,\ell_2}(B_{\ell_1,\ell_2})^{J+1}\prod_{j=1}^{J+1}(t_j)^{\min(|\beta_{j-1}|,1)}$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{J+1}\langle x_j\rangle+\sum_{j=1}^{J+1}\langle\xi_{j-1}\rangle+\langle x_0\rangle\right)^L\prod_{j=1}^{J+1}\langle\xi_{j-1}\rangle^{\delta|\alpha_j|-\rho|\beta_{j-1}|}$$

を満たし，また $1 \le s \le J+1$ を満たす任意の整数 s に対し，もし $|\alpha_s| > 0$ ならば

$$\left| \left(\prod_{j=1}^{J+1} D_{x_j}^{\alpha_j} \partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}} \right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, \xi_J, x_J, \ldots, \xi_1, x_1, \xi_0, x_0) \right| \tag{3.3}$$
$$\le A_{\ell_1,\ell_2} (B_{\ell_1,\ell_2})^{J+1} \mu((T_{s-1}, T_s]) \prod_{j=1,\, j\neq s}^{J+1} (t_j)^{\min(|\beta_{j-1}|,1)}$$
$$\times \left(\sum_{j=1}^{J+1} \langle x_j \rangle + \sum_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle + \langle x_0 \rangle \right)^L \prod_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle^{\delta|\alpha_j| - \rho|\beta_{j-1}|}$$

を満たす．ただし $\mu((T_{s-1}, T_s])$ は区間 $(T_{s-1}, T_s]$ の測度 μ とする．

注意． 定理 2 の例はすべて，仮定 4 を満たす．例として定理 2 (3) を説明する．$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{\delta|\alpha| - \rho|\beta|}$ を仮定し，$F(q,p) \equiv e^{\int_{[0,T)} B(t,q(t),p(t))dt}$ とすると

$$\partial_{x_s} F_{\Delta_{T,0}} = \prod_{j=1}^{J+1} e^{\int_{[T_{j-1},T_j)} B(t,x_j,\xi_{j-1})dt} \times \int_{[T_{s-1},T_s)} (\partial_x B)(t, x_s, \xi_{s-1}) dt$$

と書ける．ゆえに $\mu((T_{s-1}, T_s]) = \int_{[T_{s-1},T_s)} dt$ とおけば $F_{\Delta_{T,0}}$ は条件 (3.3) も満たす．

参考文献

[1] S. Albeverio, Høegh-Krohn, S. Mazzucchi, Mathematical theory of Feynman path integrals, Lecture notes of Math. 523, Springer, Berlin, 1976. 2nd corrected and enlarged edition 2008.

[2] S. Albeverio, G. Guatteri, S. Mazzucchi, Phase space Feynman path integrals, J. Math. Phys. 43 (2002) 2847–2857.

[3] W. Bock, M. Grothaus, A white noise approach to phase space Feynman path integrals. Teor. Imovir. Mat. Stat. 85 (2011), 7-21.

[4] I. Daubechies, J. R. Klauder, Quantum mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians. J. Math. Phys. 26 (1985) 2239-2256.

[5] R. P. Feynman, An operator calculus having applications in quantum electrodynamics, Appendix B, Phys. Rev. 84, (1951) 108–236.

[6] D. Fujiwara, The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension, Nagoya Math. J. 124 (1991) 61–97.

[7] W. Ichinose, A mathematical theory of the phase space Feynman path integral of the functional, Comm. Math. Phys. 265 (2006) 739–779.

[8] H. Kitada, H. Kumano-go, A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrödinger equation, Osaka J. Math. 18 (1981) 291-360.

[9] H. Kumano-go, Pseudo-Differential Operators, The MIT press, Cambridge, MA, 1981.

[10] N. Kumano-go, A construction of the fundamental solution for Schrödinger equations, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 2 (1995) 441–498.

[11] N. Kumano-go, A Hamiltonian path integral for a degenerate parabolic pseudo-differential operators, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 3 (1996) 57–72.

[12] N. Kumano-go, A proof of H. Kumano-go–Taniguchi theorem for multi-products of Fourier integral operators, Osaka J. Math. 35 (1998) 357–380.

[13] N. Kumano-go, Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives by time slicing approximation, Bull. Sci. math. 135 (2011), 936–987.

[14] N. Kumano-go and D. Fujiwara, Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations, Bull. Sci. math. 132 (2008), 313–357.

[15] N. Kumano-go and A. S. Vasudeva Murthy, Phase space Feynman path integrals of higher order parabolic type with general functional as integrand, Bull. Sci. math. (In Press, Available online 6 November 2014).

[16] N. Kumano-go, Phase space Feynman path integrals of higer order parabolic type, RIMS Kôkyûroku, **1958** (2015), 201–217.

[17] S. Mazzucchi, Mathematical Feynman Path Integrals and Their Applications, World Scientific Pub Co Inc, 2009.

[18] L. S. Schulman, Techniques and Applications of Path Integration, Monographs and Texts in Physics and Astronomy, Wiley-Interscience, New York, 1981, with new supplementary section, Dover Publications, 2005.

[19] C. Tsutsumi, The fundamental solution for pseudo-differential operators of parabolic type, Proc. Japan Acad. 50 (1974) 11–15.

[20] O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman, Hamiltonian Feynman path integrals via Chernoff formula, J. Math. Phys. 43 (2002) 5161–5171.