

Nenad Fric<sup>1</sup>, Zlatko Marković<sup>2</sup>, Milan Spremić<sup>3</sup>

## OPŠTA METODA ZA PRORAČUN BOČNOG I TORZIONOG IZVIJANJA ELEMENATA ČELIČNIH KONSTRUKCIJA

### *Rezime:*

Pored standardnih algoritma za proračun stabilnosti pritisnutih elemenata, elemenata opterećenih na savijanje, kao i ekscentrično pritisnutih elemenata konstrukcije, Evrokod 3 daje mogućnost da se ove kontrole sprovedu i primenom metode konačnih elemenata, kroz opštu metodu za bočno i bočno torziono izvijanje. U ovom radu je prikazana opšta metoda za bočno i bočno torziono izvijanje elemenata prema EN 1993-1-1. Takođe je urađen i numerički primer čiji su rezultati upoređeni sa rezultatima dobijenim prema alternativnim aneksima A i B Evrokoda i JUS-u.

*Ključne reči:* Evrokod, bočno-torziono izvijanje, metod konačnih elemenata

## GENERAL METHOD FOR DESIGN OF LATERAL AND TORSIONAL BUCKLING OF STEEL ELEMENTS

### *Summary:*

Beside standard procedure for stability design of structural elements in compression, bending, as well in compression and bending, Eurocode 3 offers possibility to make these calculations using finit element method through general method for lateral and lateral torsional buckling of structural elements. In this paper general method for lateral and lateral torsional buckling of structural elements is presented. Also, there is numerical example whose results are compared with results of Eurocodes alternative procedures and JUS.

*Key words:* Eurocode, lateral-torsion buckling, finit element method

---

<sup>1</sup> dipl.građ.inž, asistent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

<sup>2</sup> Dr, dipl.građ.inž, vanredni profesor, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

<sup>3</sup> Mr, dipl.građ.inž, asistent, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu

## 1 UVOD

Postupak proračuna nosivosti elemenata na izvijanje je dat u delu 6.3 Evrokoda EN 1993-1-1. Pored algoritama za proračun pritisnutih elemenata konstantnog poprečnog preseka (deo 6.3.1), elemenata konstantnog poprečnog preseka opterećenih na savijanje (deo 6.3.2) i elemenata konstantnog poprečnog preseka opterećenih savijanjem i aksijalnim pritiskom (deo 6.3.3), standard daje mogućnost proračuna i opštom metodom za bočno i bočno torziono izvijanje elemenata konstrukcije (deo 6.3.4). Opšta metoda može da se koristiti kada prve tri metode ne mogu da se primenjuju. Ona omogućava kontrolu nosivosti na bočno i bočno torziono izvijanje za elemente konstrukcije kao što su:

- samostalni (pojedinačni) elementi, višedelni ili ne, konstantnog poprečnog preseka ili ne, sa složenim uslovima oslanjanja ili ne;
- ravni okvirni sistemi ili podsistemi sačinjeni od ovakvih elemenata, koji su izloženi pritisku i/ili jednoosnom savijanju u ravni.

## 2 PRIKAZ POSTUPKA PRORAČUNA OPŠTOM METODOM ZA BOČNO I BOČNO-TORZIONO IZVIJANJE

Ova metoda se odnosi na bilo koji oblik nestabilnosti izvan ravni do kog može doći. Analiza nosivosti se vrši odvojeno za stabilnost i nosivost u ravni elementa i za fenomene bočnog i bočno-torzionog izvijanja, van ravni elementa. Provera nosivosti se vrši na osnovu sledećeg izraza:

$$\frac{\chi_{op} \alpha_{ult,k}}{\gamma_{M1}} \geq 1$$

gde su:

$\chi_{op}$  redukcioni faktor za relativnu vitkost  $\bar{\lambda}_{op}$  kojim se uzima u obzir bočno i bočno torziono izvijanje

Relevantna vitkost određuje se kao:  $\bar{\lambda}_{op} = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr,op}}}$

$\alpha_{ult,k}$  minimalna vrednost koeficijenta uvećanja proračunskog opterećenja u ravni elementa da bi se dostigla karakteristična nosivost najkritičnijeg poprečnog preseka. U obzir se ne uzimaju bočno i bočno torziono izvijanje ali se vodi računa o svim efektima usled geometrijskih deformacija i imperfekcija u ravni, kako globalnih tako i lokalnih.

$\alpha_{cr,op}$  minimalna vrednost koeficijenta uvećanja proračunskog opterećenja u ravni elementa da bi došlo do merodavnog oblika gubitka stabilnosti van ravni elementa (bočnog ili bočno-torzionog izvijanja).

$\gamma_{M1}$  parcijalni koeficijent

U slučaju grede obostrano simetričnog preseka koja je opterećena savijanjem i pritiskom,  $\alpha_{ult,k}$  predstavlja recipročnu vrednost zbira odnosa proračunske vrednosti normalne

sile i karakteristične nosivosti na pritisak i maksimalnog proračunskog momenta i karakteristične vrednosti momenta nosivosti. Maksimalni proračunski moment određuje se po teoriji II reda pri čemu se početne imperfekcije u proračun uvode preko ekvivalentnog opterećenja, a sve prema odredbama tačke 5.3.2 EN 1993-1-1.

$$\frac{1}{\alpha_{ult,k}} = \frac{N_{Ed}}{N_{Rk}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rk}}$$

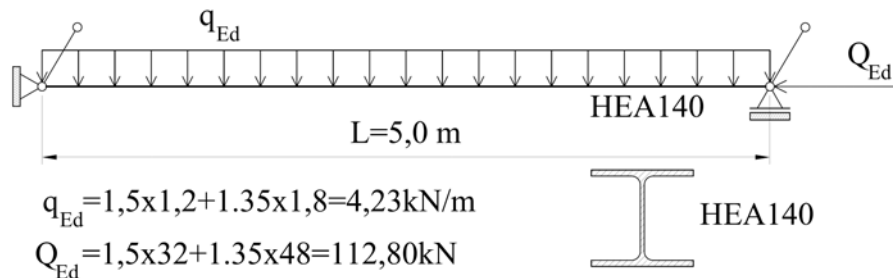
Dakle, za određivanje koeficijenata  $\alpha_{ult,k}$  koriste se metode definisane u poglavljima 6.2 – nosivost poprečnih preseka i u poglavlju 5.3 – nosivost elemenata primenom teorije drugog reda uzimajući u obzir lokalne i globalne imperfekcije.

Koeficijent  $\alpha_{cr,op}$  može da se odredi korišćenjem metode konačnih elemenata.

### 3 NUMERIČKI PRIMER

Da bi se ilustrovao postupak proračuna urađen je numerički primer primenom opšte metode proračuna.

U ovom primeru je razmatran stub visine 5,0 m statičkog sistema proste grede, poprečnog preseka HEA140 od čelika kvaliteta S235. Stub je opterećen jednakopodeljenim opterećenjem i aksijalnom silom pritiska i to: stalno opterećenje u iznosu od  $g_{Ed}=1,2$  kN/m' i  $G_{Ed}=32$  kN i korisno opterećenje od  $p_{Ed}=1,8$  kN/m' i  $P_{Ed}=48$  kN. Usvojeni su parcijalni koeficijenti sigurnosti za materijal i opterećenja u skladu sa Evrokodom:  $\psi_G=1,5$ ;  $\psi_Q=1,35$ ;  $\gamma_{MO}=1,0$ ;  $\gamma_{M1}=1,0$ .



Slika 1 – Statički sistem i opterećenje

Na početku, potrebno je odrediti vrednost ekvivalentnog opterećenja kojim se u proračun koeficijenta  $\alpha_{ult,k}$  uvode lokalne imperfekcije:

$$q_e = 8 \cdot N_{Ed} \cdot e_{0,d} / L^2 = 8 \cdot 112,8 \cdot 5 / 250 / 25 = 0,72 \text{ kN/m}$$

Za zadato opterećenje i sračunato ekvivalentno opterećenje, primenom teorije II reda određuju se momenat i normalna sila u nosaču:

$$M_{y,Ed} = 17,92 \text{ kNm}$$

$$N_{Ed} = 112,80 \text{ kN}$$

Poprečni presek HEA140 je klase 1 pa se granični moment nosivosti odeduje kao plastični moment nosivosti:

$$M_{y,Rd} = W_{pl} \cdot f_y / \gamma_{M0} = 173,4 \cdot 23,5 / 1,0 = 40,75 \text{ kNm}$$

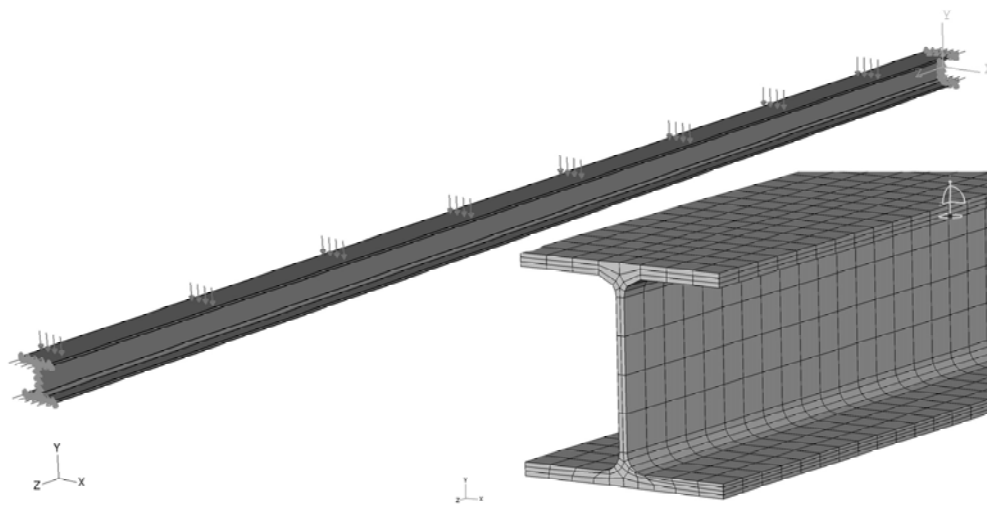
$$N_{Rd} = A \cdot f_y / \gamma_{M0} = 31,4 \cdot 23,5 / 1,0 = 737,90 \text{ kN}$$

Iz navedenog sledi:

$$1/\alpha_{ult,k} = N_{Ed} / N_{Rd} + M_{y,Ed} / M_{y,Rd} = 112,80 / 737,90 + 17,92 / 40,75 = 0,5926$$

$$\alpha_{ult,k} = 1,69$$

Za određivanje koeficijenta  $\alpha_{cr,op}$  korišćen je prostorni model grede primenom programa na bazi konačnih elemenata ABAQUS. Definisani su odgovarajući granični uslovi koji sprečavaju torziju krajnjih poprečnih preseka (viljuškasto oslanjanje). Opterećenje je raspodeljeno po površini gornje nožice i površini preseka na mestu pokretnog oslonca, slika 2.



Slika 2 – Prostorni model sa opterećenjem i graničnim uslovima i mreža konačnih elemenata

Korišćeni su linearni trodimenzionalni konačni elementi C3DR8 sa 8 čvorova. Mreža je postepeno progušćavana do dostizanja zadovoljavajuće stabilnosti i konvergencije rezultata. Nad formiranim modelom je primenjena analiza elastične stabilnosti pri čemu je korišćen algoritam Lanczos-ovih vektora. Prvi oblik gubitka stabilnosti odgovara kombinaciji bočnog i bočno-torzionog izvijanja, kao što je prikazano na slici 3.

Dalje je neophodno odrediti koeficijent redukcije  $\chi_{op}$  i to kao manju vrednost od:

$\chi$  za bočno izvijanje u skladu sa 6.3.1 EN 1993-1-1

$\chi_{LT}$  za bočno torziono izvijanje u skladu sa 6.3.2 EN 1993-1-1

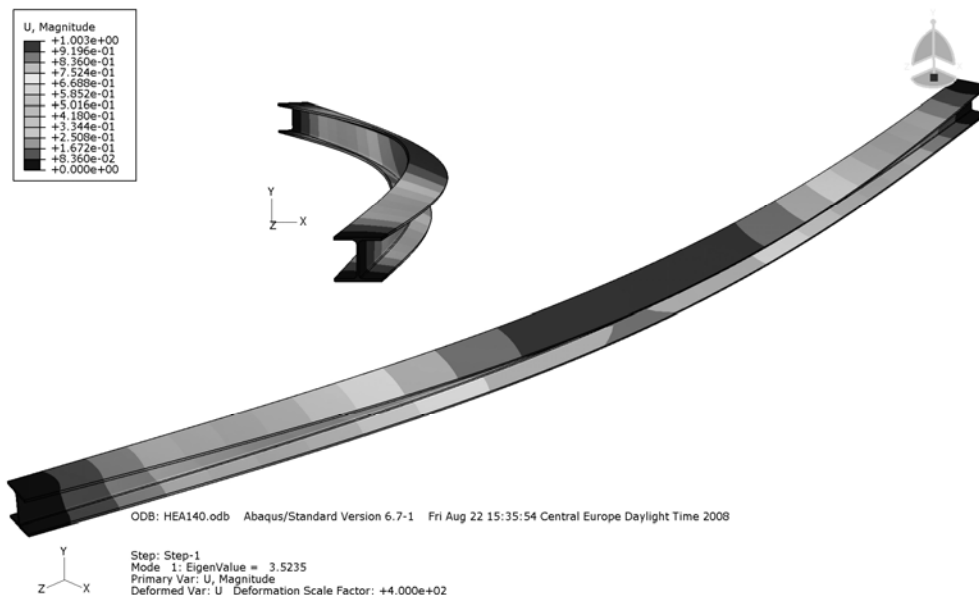
obe sračunate za globalnu relativnu vitkost  $\bar{\lambda}_{op}$ .

$$\bar{\lambda}_{op} = \sqrt{\alpha_{ult,k} / \alpha_{cr,op}} = \sqrt{1,69 / 3,52} = 0,69$$

$\alpha_{LT} = 0,21$  kriva izvijanja "a" prema 6.3.2.2 EN 1993-1-1

$$\Phi_{LT} = 0,5 \cdot \left[ 1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{op} - 0,2) + \bar{\lambda}_{op}^2 \right] = 0,79$$

$$\chi_{LT} = 1 / \left( \Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{op}^2} \right) = 0,85$$



Slika 3 – Deformisan oblik u prvom modu (faktor uvećanja opterećenja 3,52)

$\alpha = 0,49$  kriva izvijanja "c" prema 6.3.2.1 EN 1993-1-1

$$\Phi = 0,5 \cdot \left[ 1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda}_{op} - 0,2) + \bar{\lambda}_{op}^2 \right] = 0,86$$

$$\chi = 1 / \left( \Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}_{op}^2} \right) = 0,73$$

Konačno imamo da je:  $\chi_{op} = \min(\chi, \chi_{LT}) = 0,73$  pa se može izvršiti provera globalne nosivosti na izvijanje posmatranog nosača izvan ravni:

$$\chi_{op} \cdot \alpha_{ult,k} / \gamma_{M1} = 0,73 \cdot 1,69 / 1,0 = 1,23 \geq 1,0$$

Recipročna vrednost sračunatog koeficijenta daje nam stepen iskorišćenosti preseka koji u ovom slučaju iznosi 0,81 ili 81%.

### 3.1 POREĐENJE REZULTATA

Radi što boljeg uvida u odnos između rezultata dobijenih primenom različitih standarda i različitih postupaka proračuna u okviru istih standarda, dat je pregled stepena iskorišćenja nosača iz navedenog numeričkog primera, sračunatih prema sledećim standardima:

- JUS U.E7.096
- EN 1993-1-1 6.3.3 aneks A
- EN 1993-1-1 6.3.3 aneks B

U radu [3] određena je vrednost stepena iskorišćenja nosača prema navedenim standardima i ti rezultati su ovde i prikazani.

**Tabela 1 - Poređenje rezultata različitih propisa**

Naziv metode	Koeficijent iskorišćenosti
Evrokod 3; EN 1993-1-1 6.3.3 aneks A	0,96
Evrokod 3; EN 1993-1-1 6.3.3 aneks B	0,92
JUS U.E7.096	0,86
Evrokod 3; EN 1993-1-1 6.3.4 opšta metoda	0,81

#### **4 ZAKLJUČAK**

Pored mogućnosti proračuna stabilnosti nosača primenom aneksa A i aneksa B Evrokod 3 ostavlja mogućnost da se u slučaju bilo kakve nedoumice proračun sprovede primenom metode konačnih elemenata. Redak je slučaj da standardi daju bilo kakva uputstva za primenu metode konačnih elemenata ali svakako koristan. Na taj način su obuhvaćeni svi mogući slučajevi. Međutim, ovakav proračun zahteva određena znanja iz metode konačnih elemenata, upotrebu odgovarajućeg softvera i svakako više vremena.

Na osnovu priloženih rezultata može se zaključiti da je opšta metoda za bočno i bočno torziono izvijanje u poređenju sa ostalim postupcima proračuna, čiji su rezultati prikazani, najnaprednija. Međutim, razlike u dobijenim rezultatima ne prelaze 15 procenata što govori da su i druge metode dovoljno pouzdane (na strani sigurnosti).

#### **LITERATURA**

- [1] *Evrokod 3, DESIGN OF STEEL STRUCTURES, Part 1-1: General rules and rules for buildings*, CEN (European Committee for Standardisation) : 2005.
- [2] *Evrokod 3, DESIGN OF STEEL STRUCTURES, Part 1-3: General rules – Supplementary rules for cold-formed members and sheeting*, CEN (European Committee for Standardisation) : 2006.
- [3] *Designer's guide to EN 1993-1-1 Eurocode 3: Design Of Steel Structures, General Rules And Rules For Buildings* / L.Gardner , D.A.Nethercot , Thomas Telford // London.
- [4] *Evrokod 3: Proračun čeličnih konstrukcija deo 1-1: Opšta pravila i pravila za proračun zgrada* / Z.Marković // Seminar: Evrokodovi za konstrukcije, Saopštenja pozvanih učesnika , Beograd 2006.
- [5] *Metalne konstrukcije* / D.Budevac, Z.Marković, D.Čukić, D.Tošić // Građevinska knjiga , Beograd 2007.
- [6] *Uporedna analiza proračuna ekscentrično pritisnutih elemenata prema Evrokodu 3 i JUS-u* / Milan Spremić, Marković Zlatko, Nenad Fric // Simpozijum društva građevinskih konstruktera Srbije, Zlatibor 2008.godine