

**MENINGKATKAN PRESTASI CARTA KAWALAN
REJA UNTUK MENGAWAL DATA
BERAUTOKORELASI**

oleh

LAU SIE LING

**Disertasi diserahkan untuk memenuhi
keperluan bagi
Ijazah Sarjana Sains (Statistik)**

Mei 2003

787157

rb
f T3156.8
L367
2003

M/fiche
9070

PENGHARGAAN

Saya amat bersyukur kepada Tuhan kerana memberi peluang dan kebijaksanaan untuk saya menjalankan kajian disertasi ini serta membolehkan saya menempuhi pelbagai rintangan dengan jayanya dalam proses menjalani kajian disertasi ini. Di sini, saya ingin merakamkan setinggi-tinggi penghargaan kepada penyelia disertasi saya, Dr Michael Khoo Boon Chong kerana beliau bertungkus-lumus memberi bimbingan, tunjuk ajar dan nasihat yang sewajarnya kepada saya supaya kajian dalam disertasi ini dapat diselesaikan dengan lancar. Selain itu, saya juga amat menghargai kerjasama yang diberikan oleh pihak perpustakaan dan pembantu makmal komputer di Pusat Pengajian Sains Matematik untuk membenarkan saya menggunakan kemudahan tertentu dalam proses pencarian maklumat-maklumat berkenaan bagi tujuan menjalankan kajian disertasi ini. Saya juga ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada rakan-rakan sekursus dan rakan-rakan serumah saya atas galakkan dan bantuan yang dihulurkan oleh mereka dari segi perbincangan yang banyak membantu dalam pelaksanaan kajian ini. Akhir sekali, saya ingin mengucapkan terima kasih untuk ahli keluarga saya atas sokongan rohani mereka sepanjang tempoh kajian ini.

ISI KANDUNGAN

Muka Surat

PENGHARGAAN	ii
ISI KANDUNGAN	iii
SENARAI JADUAL	vii
SENARAI RAJAH	viii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	x
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Organisasi Disertasi	1
1.2 Carta Kawalan Proses Bagi Data Pembolehubah	2
1.2.1 Pengenalan	2
1.2.2 Carta Kawalan Shewhart $\bar{X} - R$	3
1.2.3 Carta Kawalan Shewhart $\bar{X} - S$	6
1.2.4 Carta Kawalan Purata Bergerak Berpemberat Eksponen (Exponentially Weighted Moving Average – EWMA)	10
1.2.5 Carta Kawalan Hasil Tambah Longgokan (Cumulative Sum – CUSUM)	12
1.2.6 Carta Kawalan Purata Bergerak (Moving Average – MA)	15
1.3 Anggapan-Anggapan Dalam Menggunakan Carta Kawalan Proses	16

BAB 2	TEORI DAN KONSEP ASAS	18
2.1	Panjang Larian Purata (Average Run Length – ARL)	18
2.2	Petua Larian (Runs Rules)	19
2.2.1	Petua Larian “Western Electric”	19
2.2.2	Petua Larian Oleh Nelson (1984)	20
2.2.3	Petua Larian Oleh Klein (2000)	23
2.2.3.1	Petua Larian 2-daripada-2	23
2.2.3.2	Petua Larian 2-daripada-3	26
2.3	Definisi Autokorelasi	28
2.4	Jenis Dan Kesan Autokorelasi Terhadap Kawalan Proses	29
2.4.1	Jenis Autokorelasi	29
2.4.2	Kesan Autokorelasi	31
BAB 3	KAWALAN PROSES BERSTATISTIK UNTUK DATA BERAUTOKORELASI	32
3.1	Kaedah ‘Model-Based’	32
3.1.1	Pengenalan	32
3.1.2	Kaedah Carta Kawalan Reja	33
3.1.3	Kaedah Penggunaan Statistik EWMA	34
3.1.4	Kaedah Carta Kawalan CUSUM Berdasarkan Reja-reja	38
3.1.5	Kaedah Carta Kawalan EWMA Berdasarkan Reja-reja	41
3.1.6	Carta Kawalan ‘Weighted Batch Means – WBM’	41

3.2	Kaedah 'Model-Free'	44
3.2.1	Pengenalan	44
3.2.2	Kaedah Carta Kawalan 'Unweighted Batch Means – UBM'	45
3.2.3	Kaedah Carta Kawalan CUSUM Yang Berdasarkan Cerapan Asal	47
3.2.4	Kaedah Carta EWMA Yang Berdasarkan Cerapan Asal	48
3.3	Perbandingan Prestasi Antara Carta-carta Kawalan Bagi Data Berautokorelasi	49
3.3.1	Perbandingan Prestasi Antara Carta Reja, Carta WBM Dan Carta UBM	49
3.3.2	Perbandingan Prestasi Antara Carta CUSUM Dan Carta EWMA	50
3.4	Kesimpulan	51

BAB 4	MENINGKATKAN PRESTASI CARTA KAWALAN REJA DENGAN MENGGUNAKAN PETUA LARIAN	53
4.1	Pengenalan	53
4.2	Carta Kawalan Reja Untuk Proses AR(1)	53
4.3	Carta Kawalan Reja Untuk Proses AR(1) Berdasarkan Petua Larian	55
4.4	Kajian Simulasi Untuk Menilai Prestasi Carta Kawalan Reja	57
4.5	Keputusan Simulasi	58
4.6	Perbincangan	68

BAB 5 KESIMPULAN	70
5.1 Pengenalan	70
5.2 Sumbangan Disertasi	70
5.3 Kajian Masa Depan	71
RUJUKAN	74
LAMPIRAN-LAMPIRAN	
Lampiran A	
Pemalar-pemalar yang digunakan untuk membina carta kawalan pembolehubah.	78
Lampiran B(i)	
Program simulasi untuk carta reja asas tanpa penggunaan petua larian (1-1).	79
Lampiran B(ii)	
Program simulasi untuk carta reja yang menggunakan petua larian 2-daripada-2 (2-2).	80
Lampiran B(iii)	
Program simulasi untuk carta reja yang menggunakan petua larian 2-daripada-3 (2-3).	81

SENARAI JADUAL

Muka Surat

Jadual 2.1	Kebarangkalian peralihan bagi rantai Markov dengan tiga keadaan fana.	24
Jadual 2.2	Kebarangkalian peralihan bagi rantai Markov dengan tujuh keadaan fana.	27
Jadual 3.1	Saiz subkumpulan minimum yang diperlukan untuk carta UBM bagi data AR(1).	47
Jadual 3.2	Perbandingan ARL antara carta reja, carta WBM dan carta UBM bagi data AR(1).	50
Jadual 4.1	Nilai-nilai ARL bagi carta reja asas (1-1), carta reja berdasarkan petua larian 2-daripada-2 (2-2) dan carta reja berdasarkan petua larian 2-daripada-3 (2-3) di bawah set pekali autokorelasi yang positif dan set magnitud anjakan yang positif.	59
Jadual 4.2	Nilai-nilai ARL bagi carta reja asas (1-1), carta reja berdasarkan petua larian 2-daripada-2 (2-2) dan carta reja berdasarkan petua larian 2-daripada-3 (2-3) di bawah set pekali autokorelasi yang positif dan set magnitud anjakan yang negatif.	61
Jadual 4.3	Nilai-nilai ARL bagi carta reja asas (1-1), carta reja berdasarkan petua larian 2-daripada-2 (2-2) dan carta reja berdasarkan petua larian 2-daripada-3 (2-3) di bawah set pekali autokorelasi yang negatif dan set magnitud anjakan yang positif.	63
Jadual 4.4	Nilai-nilai ARL bagi carta reja asas (1-1), carta reja berdasarkan petua larian 2-daripada-2 (2-2) dan carta reja berdasarkan petua larian 2-daripada-3 (2-3) di bawah set pekali autokorelasi yang negatif dan set magnitud anjakan yang negatif.	65

SENARAI RAJAH

Muka Surat

Rajah 2.1	Carta kawalan yang dibahagikan kepada enam zon.	19
Rajah 5.1	Ringkasan untuk pengawalan proses univariat.	73

ABSTRAK

Masalah autokorelasi wujud dalam kebanyakan industri pengeluaran pada hari ini. Untuk mengatasi masalah autokorelasi tersebut, banyak kaedah telah dicadangkan oleh penulis-penulis berkenaan seperti Montgomery dan Mastrangelo (1991), Runger dan Willemain (1995), Atienza, Tang dan Ang (2002) dan penulis yang lain. Kaedah yang biasa dicadangkan ialah menggunakan kaedah dua langkah yang melibatkan penggunaan model siri masa. Kaedah dua langkah ini juga dikenali sebagai kaedah 'model-based'. Salah satu carta kawalan yang dibina daripada kaedah 'model-based' ialah carta kawalan reja. Namun begitu, carta kawalan reja tidak begitu sensitif terhadap anjakan kecil dalam min proses. Kajian ini mencadangkan suatu cara mudah untuk meningkatkan prestasi carta kawalan reja iaitu dengan mengaplikasikan petua larian 2-daripada-2 dan petua larian 2-daripada-3 ke atas carta reja tersebut. Melalui penggunaan petua-petua larian tersebut, didapati prestasi carta reja tersebut telah meningkat, iaitu ia dapat mengesan anjakan kecil dalam min proses dengan cepat. Walaupun dalam disertasi ini, kita hanya mempertimbangkan model siri masa $AR(1)$ sebagai contoh kajian, namun cara penggunaan petua larian dapat diperluaskan kepada model siri masa yang lain.

IMPROVING THE PERFORMANCE OF A RESIDUAL CONTROL CHART FOR THE MONITORING OF AUTOCORRELATED DATA

ABSTRACT

The autocorrelation problem exists in most manufacturing industries today. To overcome the autocorrelation problem, numerous methods have been suggested by the relevant authors such as Montgomery and Mastrangelo (1991), Runger and Willemain (1995), Atienza, Tang and Ang (2002) and other authors. A common method that has been suggested is to use a two-step method which involves the use of a time series model. This two-step method is also called the 'model-based' approach. One of the control charts that is constructed from a 'model-based' approach is the residual control chart. However, a residual control chart is not sensitive to small shifts in the process mean. This study has suggested an easy approach to improve the performance of a residual control chart by applying the 2-of-2 runs rule and 2-of-3 runs rule on the residual chart. By using these runs rules, it is found that the performance of a residual chart has improved, i.e., it can detect small shifts in the process mean quickly. Although in this dissertation, we only consider an AR(1) time series model as a research example, it should be noted that the use of runs rules can be extended to other time series models.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Organisasi Disertasi

Disertasi ini dibahagikan kepada lima bab utama. Bab 1 memberi penerangan tentang carta-carta kawalan pembolehubah. Carta kawalan Shewhart $\bar{X} - R$, carta Shewhart $\bar{X} - S$, carta Purata Bergerak Berpemberat Eksponen (Exponentially Weighted Moving Average – EWMA), carta Hasil Tambah Longgokan (Cumulative Sum – CUSUM) dan carta Purata Bergerak (Moving Average) dihuraikan secara terperinci. Selain itu, anggapan-anggapan asas yang diperlukan dalam pembentukan carta-carta kawalan tersebut juga ditekankan dalam bab ini.

Oleh kerana kajian simulasi kami melibatkan penggunaan panjang larian purata (Average Run Length – ARL) dan petua larian (runs rules), maka kami memperkenalkan panjang larian purata dan petua larian dalam Bab 2 sebelum kajian simulasi kami dibincangkan. Memandangkan masalah autokorelasi sering wujud dalam kawalan proses, maka definisi autokorelasi, jenis serta kesan autokorelasi terhadap kawalan proses juga dinyatakan dalam bab ini untuk menegaskan kepentingannya dalam usaha mengatasi masalah autokorelasi tersebut.

Dalam Bab 3, kami akan membincangkan kaedah-kaedah kawalan proses berstatistik yang digunakan untuk mengatasi masalah data berautokorelasi. Perbincangan ini merupakan hasil ulasan yang dipetik daripada buku teks kawalan kualiti dan jurnal-jurnal yang

berkaitan. Secara umumnya, kaedah-kaedah tersebut dapat dibahagikan kepada dua jenis yang utama iaitu: kaedah 'Model-Based' dan kaedah 'Model-Free'.

Kami menggunakan petua larian dalam carta kawalan reja (residual control chart) untuk meningkatkan prestasinya. Keputusan yang diperoleh dibincangkan dalam Bab 4. Kami menjalankan simulasi komputer ke atas carta kawalan reja yang asal dan carta kawalan reja yang menggunakan petua larian dengan program SAS. Kami akan membandingkan nilai ARL bagi carta kawalan yang menggunakan petua larian dengan carta kawalan yang tidak menggunakan petua larian di bawah pelbagai magnitud anjakan dan juga di bawah pelbagai nilai koefisien korelasi. Kajian simulasi ini dijalankan untuk proses autoregresi peringkat pertama (first-order autoregressive – AR(1)) sahaja.

Kami akan menyenaraikan sumbangan disertasi saya dalam Bab 5 dengan meninjau hasil ulasan jurnal-jurnal dan buku-buku yang berkenaan serta melalui peninjauan hasil kajian simulasi yang saya jalankan. Kajian masa depan juga dicadangkan untuk memberi panduan kepada mereka yang ingin menjalankan kajian dalam bidang atau skop ini pada masa depan.

1.2 Carta Kawalan Proses Bagi Data Pembolehubah

1.2.1 Pengenalan

Pada amnya, data yang digunakan untuk membentuk carta kawalan boleh diklasifikasikan kepada dua kategori iaitu data pembolehubah atau data atribut. Data pembolehubah (variable data) ialah cirian kualiti yang boleh diukur sebagai nombor pada suatu skala selanjar. Data atribut (attribute data) pula ialah cirian kualiti yang tidak boleh diukur pada

skala selanjar dan ia hanya boleh diklasifikasikan sebagai baik atau cacat. Oleh kerana dalam disertasi ini, kami hanya berminat terhadap data pembolehubah, maka saya memberi sorotan literatur untuk carta kawalan pembolehubah sahaja.

1.2.2 Carta Kawalan Shewhart $\bar{X} - R$

Anggapkan sesuatu cirian kualiti yang kita minati adalah bertaburan normal dengan min μ dan sisihan piawai σ dengan kedua-dua parameter itu diketahui. Jika x_1, x_2, \dots, x_n ialah suatu sampel dengan saiz n , maka purata (min) untuk sampel ini ialah:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \tag{1.1}$$

Diketahui bahawa $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Kebarangkalian bahawa min sampel, \bar{x} jatuh di antara selang

$$\mu + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1.2a}$$

dan

$$\mu - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1.2b}$$

ialah $1 - \alpha$.

Oleh itu, jika μ dan σ diketahui, persamaan (1.2a) dan (1.2b) dapat digunakan sebagai had kawalan atas (UCL) dan had kawalan bawah (LCL) masing-masing untuk carta kawalan bagi min sampel. Sebagai amalan biasa, $Z_{\alpha/2}$ digantikan dengan 3 supaya had-had

kawalan 3-sigma digunakan. Jika sesuatu min sampel jatuh di luar had-had kawalan ini, maka ia menandakan bahawa min proses tidak lagi bersamaan dengan μ .

Dalam situasi sebenar, kita biasanya tidak mengetahui nilai μ dan σ . Oleh itu, kedua-dua parameter ini akan dianggarkan dengan menggunakan satu set sampel atau satu set subkumpulan yang diambil daripada sesuatu proses yang dianggap berada dalam kawalan. Anggaran-anggaran tersebut biasanya dibuat berdasarkan sekurang-kurangnya 20 hingga 25 subkumpulan.

Katakan m subkumpulan bagi sesuatu cirian kualiti diambil daripada sesuatu proses dengan setiap subkumpulan mengandungi n cerapan. n biasanya adalah kecil (4, 5 atau 6). Saiz subkumpulan (n) adalah kecil supaya kos pensampelan dan pemeriksaan (inspection) dapat diminimumkan. Biarkan $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ mewakili min (purata) bagi setiap subkumpulan dengan bilangan subkumpulannya ialah m . Maka anggaran terbaik untuk min proses, μ ialah:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m} \quad (1.3)$$

$\bar{\bar{x}}$ akan digunakan sebagai garis tengah bagi carta kawalan \bar{X} .

Julat subkumpulan diperoleh dengan nilai cerapan terbesar ditolak dengan nilai cerapan terkecil dalam sesuatu subkumpulan, iaitu:

$$R = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}} \quad (1.4)$$

Biarkan R_1, R_2, \dots, R_m mewakili julat-julat untuk setiap subkumpulan dengan bilangan subkumpulannya ialah m . Maka, purata julat ialah:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (1.5)$$

Dengan itu, varians proses boleh dikawal dengan memplotkan nilai-nilai julat sampel, R pada carta R . Had-had kawalan untuk carta R ialah:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= D_4 \bar{R} \\ \text{CL} &= \bar{R} \\ \text{LCL} &= D_3 \bar{R} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Kita mentakrifkan

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \quad (1.7a)$$

dan

$$D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \quad (1.7b)$$

Nilai-nilai pemalar d_2 , d_3 , D_3 dan D_4 untuk saiz subkumpulan, n yang berlainan diberikan dalam Lampiran A.

Jika varians proses berada dalam kawalan, maka had-had kawalan untuk carta \bar{X} boleh dibentuk seperti berikut:

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$$

$$CL = \bar{\bar{x}} \tag{1.8}$$

$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$$

Kita mentakrifkan

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \tag{1.9}$$

Nilai pemalar A_2 bergantung kepada saiz subkumpulan, n (sila rujuk kepada Lampiran A).

1.2.3 Carta Kawalan Shewhart $\bar{X} - S$

Walaupun carta \bar{X} dan R digunakan dengan meluas dalam situasi sebenar, tetapi carta \bar{X} dan S adalah lebih digemari berbanding dengan carta \bar{X} dan R apabila:

- i) Saiz subkumpulan, n adalah sederhana besar, iaitu $n > 10$ atau 12.
- ii) Saiz subkumpulan, n adalah berbeza-beza.

Jika σ^2 ialah varians bagi sesuatu taburan kebarangkalian tertentu yang tidak diketahui, maka penganggar saksama bagi σ^2 ialah varians sampel yang ditunjukkan seperti berikut:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \tag{1.10}$$

Walau bagaimanapun, sisihan piawai sampel, S bukan penganggar saksama bagi σ . Jika taburan asas bagi sesuatu proses ialah taburan normal, maka S ialah penganggar saksama untuk $c_4 \sigma$. c_4 ialah nilai pemalar yang bergantung kepada saiz subkumpulan, n (sila rujuk

kepada Lampiran A). Boleh ditunjukkan bahawa $c_4 = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}$. Sisihan piawai untuk S ialah $\sigma\sqrt{1-c_4^2}$.

Di bawah kes nilai sisihan piawai σ diberikan, had-had kawalan 3-sigma untuk carta S ialah:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= c_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1-c_4^2} \\ \text{CL} &= c_4\sigma \\ \text{LCL} &= c_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1-c_4^2} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Garis tengah bagi carta S ialah $c_4\sigma$ kerana $E(S) = c_4\sigma$.

Pemalar-pemalar B_5 dan B_6 yang ditakrifkan dalam persamaan (1.12a) dan (1.12b) seperti berikut sering digunakan untuk membentuk had-had kawalan bagi carta S .

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1-c_4^2} \tag{1.12a}$$

$$B_6 = c_4 + 3\sqrt{1-c_4^2} \tag{1.12b}$$

Nilai-nilai B_5 dan B_6 untuk saiz sampel, n yang berlainan diberikan dalam Lampiran A. Jadi, had-had kawalan untuk carta S dengan diberikan nilai sisihan piawai σ adalah ditunjukkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= B_6\sigma \\ \text{CL} &= c_4\sigma \\ \text{LCL} &= B_5\sigma \end{aligned} \tag{1.13}$$

Jika varians proses berada dalam kawalan, yakni tiada tanda bahawa proses berkenaan berada di luar kawalan dalam carta S , maka had-had kawalan untuk carta \bar{X} boleh dibentukukkan seperti berikut (diberikan nilai piawai μ dan σ):

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu + A\sigma \\ \text{CL} &= \mu \\ \text{LCL} &= \mu - A\sigma \end{aligned} \tag{1.14}$$

Kita mentakrifkan $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$ dan nilai pemalar A bergantung kepada saiz subkumpulan, n (sila rujuk kepada Lampiran A).

Bagi kes yang nilai sisihan piawai σ tidak diberikan, varians proses perlu dianggarkan dengan menganalisis data lepas. Untuk kes ini, σ dianggarkan seperti berikut:

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i, \tag{1.15}$$

dengan m sebagai bilangan subkumpulan yang diambil daripada data lepas. Telah dibuktikan oleh Montgomery (2001) bahawa statistik $\frac{\bar{S}}{c_4}$ ialah penganggar saksama untuk σ . Oleh itu, had-had kawalan apabila σ tidak diketahui ialah:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \\ \text{CL} &= \bar{S} \\ \text{LCL} &= \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Pemalar-pemalar B_3 dan B_4 yang ditakrifkan dalam persamaan (1.17a) dan (1.17b) seperti berikut adalah biasa digunakan untuk membentuk carta S bagi kes nilai sisihan piawai σ tidak diberikan.

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \quad (1.17a)$$

$$B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \quad (1.17b)$$

Maka, had-had kawalan bagi carta S tersebut dibentuk seperti berikut:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= B_4 \bar{S} \\ \text{CL} &= \bar{S} \\ \text{LCL} &= B_3 \bar{S} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Perhatikan bahawa $B_4 = B_6/c_4$ dan $B_3 = B_5/c_4$.

Had-had kawalan yang sepadan untuk carta \bar{X} ialah:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{S}}{c_4 \sqrt{n}} \\ \text{CL} &= \bar{\bar{X}} \\ \text{LCL} &= \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{S}}{c_4 \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m}$ dengan m ialah bilangan subkumpulan yang digunakan untuk mengira $\bar{\bar{X}}$.

Takrifkan $A_3 = 3/(c_4 \sqrt{n})$. Maka had-had kawalan untuk carta \bar{X} ialah:

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$$

$$CL = \bar{\bar{X}} \tag{1.20}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}$$

Nilai-nilai pemalar A_3, B_3 dan B_4 diberikan dalam Lampiran A.

1.2.4 Carta Kawalan Purata Bergerak Berpemberat Eksponen (Exponentially Weighted Moving Average – EWMA)

Carta kawalan EWMA merupakan suatu alternatif yang baik untuk carta kawalan Shewhart apabila kita berminat dalam pengesanan anjakan yang kecil dalam proses. Carta EWMA diperkenalkan oleh Roberts (1959) dan ia biasanya digunakan untuk mengawal proses yang terdiri daripada data jenis ukuran individu. Di sini, kita membincangkan carta EWMA yang mengawal min proses sahaja.

Statistik EWMA ditakrifkan sebagai:

$$Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \tag{1.21}$$

dengan $0 < \lambda \leq 1$ sebagai pemalar pelicinan (smoothing constant) dan nilai permulaan Z_i merupakan nilai sasaran proses iaitu $Z_0 = \mu_0$. Kadangkala μ_0 tidak diketahui, maka nilai Z_0 diperoleh daripada nilai purata data permulaan, yakni $Z_0 = \bar{\bar{X}}$. Perhatikan bahawa:

$$\begin{aligned} Z_i &= \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1} \\ &= \lambda X_i + (1 - \lambda)[\lambda X_{i-1} + (1 - \lambda)Z_{i-2}] \\ &= \lambda X_i + \lambda(1 - \lambda)X_{i-1} + (1 - \lambda)^2 Z_{i-2} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Penggantian berterusan dibuat ke atas Z_{i-j} dengan $j = 2, 3, \dots, i$ seperti yang dilakukan dalam persamaan (1.22) dan proses lelaran ini membolehkan kita memperoleh statistik EWMA seperti berikut:

$$Z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j} + (1-\lambda)^i Z_0 \quad (1.23)$$

Pembarat $\lambda(1-\lambda)^j$ menyusut secara geometri terhadap usia min sampel (i). Hasil tambah pembarat-pembarat $\lambda(1-\lambda)^j$ menuju kepada satu apabila i adalah besar kerana

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j &= \lambda \left[\frac{1-(1-\lambda)^i}{1-(1-\lambda)} \right] \\ &= 1-(1-\lambda)^i \end{aligned} \quad (1.24)$$

Jika cerapan-cerapan X_i adalah pembolehubah rawak yang tidak bersandar dengan varians σ^2 , maka varians Z_i ialah

$$\sigma_{Z_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \left[1-(1-\lambda)^{2i} \right] \quad (1.25)$$

Jadi, had-had kawalan bagi carta EWMA ialah

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} \left[1-(1-\lambda)^{2i} \right]} \\ \text{CL} &= \mu_0 \\ \text{LCL} &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} \left[1-(1-\lambda)^{2i} \right]} \end{aligned} \quad (1.26)$$

di mana L ialah lebar had-had kawalan.

Perhatikan bahawa $[1 - (1 - \lambda)^{2i}]$ menghampiri satu apabila i bertambah besar. Ini bermakna apabila carta EWMA sudah digunakan untuk beberapa tempoh masa (time periods), maka had-had kawalan akan menghampiri suatu nilai malar seperti yang ditunjukkan berikut:

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \\ \text{CL} &= \mu_0 \\ \text{LCL} &= \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Crowder (1987, 1989) dan, Lucas dan Saccucci (1990) telah mengemukakan graf dan jadual yang digunakan untuk mencari nilai-nilai λ dan L yang sesuai berdasarkan nilai ARL dalam kawalan dan juga nilai ARL di luar kawalan bagi tujuan merekabentuk carta EWMA. Secara amnya, nilai λ yang kecil adalah lebih sensitif untuk mengesan anjakan yang kecil manakala nilai λ yang besar pula lebih sensitif kepada anjakan yang besar.

1.2.5 Carta Kawalan Hasil Tambah Longgokan (Cumulative Sum – CUSUM)

Carta kawalan CUSUM pertama kali diperkenalkan oleh Page (1954) di England. Carta CUSUM boleh dibina bagi kedua-dua ukuran individu dan min subkumpulan. Ia juga merupakan suatu alternatif yang baik apabila pengesanan terhadap anjakan yang kecil dalam sesuatu proses adalah penting. Di sini, kita mempertimbangkan carta CUSUM yang mengawal min proses sahaja.

Biarkan X_i mewakili cerapan ke- i bagi sesuatu proses. Apabila proses berada dalam kawalan, X_i mempunyai taburan normal dengan min μ_0 dan sisihan piawai σ . Kita menganggap bahawa anggaran terhadap nilai σ dapat dicari atau nilai σ diketahui. Kadangkala, μ_0 dianggap sebagai nilai sasaran bagi ciriian kualiti X .

Terdapat beberapa cara untuk mendapatkan statistik CUSUM dalam carta kawalan, salah satu cara yang paling popular ialah CUSUM algoritma (tabular or algorithmic CUSUM). Carta CUSUM algoritma diperolehi dengan cara mengumpul perubahan X_j yang melebihi nilai μ_0 (perubahan ini diwakili oleh statistik C_i^+) dan juga mengumpul perubahan X_j yang kurang daripada nilai μ_0 (perubahan tersebut diwakili oleh statistik C_i^-). Statistik C_i^+ dan C_i^- masing-masing dikenali sebagai CUSUM sisi atas dan CUSUM sisi bawah.

Biasanya carta CUSUM yang digunakan untuk mengesan anjakan parameter dalam proses dikenali sebagai carta satu sisi (one-sided chart) iaitu sama ada carta CUSUM sisi atas atau carta CUSUM sisi bawah. Bagi carta dua sisi (two-sided chart) pula, carta CUSUM diperolehi dengan menggunakan carta CUSUM sisi atas dan carta CUSUM sisi bawah secara serentak.

Berikut merupakan statistik-statistik CUSUM algoritma untuk carta dua sisi:

$$C_i^+ = \text{maks}[0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (1.28a)$$

$$C_i^- = \text{maks}[0, (\mu_0 - K) - X_i + C_{i-1}^-] \quad (1.28b)$$

atau

$$C_i^+ = \max\{0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+\} \quad (1.29a)$$

$$C_i^- = \min\{0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^-\} \quad (1.29b)$$

dengan nilai-nilai permulaan $C_0^+ = C_0^- = 0$. K dikenali sebagai nilai rujukan dan ia biasanya dipilih sebagai nilai pertengahan antara nilai sasaran μ_0 dan nilai min luar kawalan, μ_1 yang perlu dikesan dengan cepat. Jika salah satu daripada C_i^+ atau C_i^- melebihi selang keputusan (decision interval), H , maka proses dikatakan berada di luar kawalan.

Carta kawalan CUSUM algoritma dua sisi direkabentuk dengan mencari nilai-nilai K dan H yang memberikan prestasi ARL yang baik. H dan K ditakrifkan seperti berikut:

$$H = h\sigma \quad (1.30a)$$

$$K = k\sigma \quad (1.30b)$$

σ ialah sisihan piawai untuk pembolehubah, X , yang digunakan untuk membentuk statistik CUSUM. Biasanya, $h = 4$ atau $h = 5$ dan $k = \frac{1}{2}$ akan menghasilkan carta CUSUM yang mempunyai ciri-ciri ARL yang baik dalam mengesan anjakan yang magnitudnya kira-kira 1σ dalam min proses.

Kebanyakan pengguna carta CUSUM lebih suka menggunakan carta CUSUM terpiawai.

Untuk kes ini, biarkan $Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$ sebagai nilai terpiawai untuk X_i . Statistik CUSUM ditakrifkan seperti berikut:

$$C_i^+ = \max\{0, Y_i - k + C_{i-1}^+\} \quad (1.31a)$$

$$C_i^- = \max\{0, -k - Y_i + C_{i-1}^-\} \quad (1.31b)$$

1.2.6 Carta Kawalan Purata Bergerak (Moving Average – MA)

Carta kawalan Purata Bergerak merupakan salah satu jenis carta kawalan berpemberat masa (time-weighted) yang mudah dan ia dibentuk berdasarkan purata bergerak tak berpemberat.

Jika cerapan-cerapan individu, X_1, X_2, \dots dikutip, maka purata bergerak berjarak w pada masa i ditakrifkan seperti berikut:

$$M_i = \frac{X_i + X_{i-1} + \dots + X_{i-w+1}}{w}, \quad i \geq w \quad (1.32)$$

Varians statistik M_i ialah

$$\begin{aligned} \text{Var}(M_i) &= \frac{1}{w^2} \sum_{j=i-w+1}^i \text{Var}(X_j) \\ &= \frac{1}{w^2} \sum_{j=i-w+1}^i \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{w} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Jika μ_0 mewakili nilai sasaran bagi min proses, maka had-had kawalan 3-sigma bagi carta kawalan purata bergerak ialah

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} \\ \text{CL} &= \mu_0 \\ \text{LCL} &= \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{w}} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Pada amnya, nilai w yang besar lebih berkesan untuk mengesan anjakan yang kecil. Perhatikan bahawa apabila $i < w$, tidak ada w cerapan lagi untuk mengira purata bergerak yang berjarak w . Oleh itu, M_i dikira seperti berikut:

Jika $w = 3$, maka

$$M_1 = \frac{X_1}{1} = X_1$$

$$M_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$M_i = \frac{X_i + X_{i-1} + X_{i-2}}{3}, i \geq 3 \quad (1.35)$$

1.3 Anggapan-Anggapan Dalam Menggunakan Carta Kawalan Proses

Anggapan-anggapan piawai yang biasa dibuat dalam penggunaan carta kawalan proses ialah cerapan-cerapan yang diambil daripada proses yang berada dalam kawalan mestilah bertaburan secaman dengan taburan normal, $N(\mu, \sigma^2)$, dan tidak bersandar antara satu sama lain.

Katakan sesuatu cirian kualiti pada masa t , X_t , bagi proses yang berada dalam kawalan dapat diwakili oleh model berikut:

$$X_t = \mu + \epsilon_t, t = 1, 2, \dots, \quad (1.36)$$

di mana ϵ_t ialah reja rawak piawai pada masa t . ϵ_t bertaburan normal dan tidak bersandar dengan min 0 dan sisihan piawai σ . Model ini dikenali sebagai model Shewhart. Kadangkala ϵ_t digunakan sebagai cerapan dalam pembentukan carta kawalan. ϵ_t boleh menggambarkan perkaitan berstatistik antara semua X_t , jika ia memenuhi anggapan ketakbersandaran kerana ia merupakan sebahagian daripada X_t . Oleh sebab ϵ_t tidak boleh

dicerap, maka ia dianggap daripada model tertentu (biasanya model siri masa) sebagai penganggar bagi ϵ .

Jika anggapan kenormalan tidak dipenuhi pada tahap yang rendah atau sederhana, carta kawalan bagi proses tertentu tetap berfungsi dengan baik. Tetapi jika anggapan ketakbersandaran cerapan dalam sesuatu proses tidak dipenuhi, maka carta kawalan bagi proses berkenaan tidak akan berfungsi dengan baik walaupun tahap kebersandaran cerapannya rendah. Oleh itu, anggapan ketakbersandaran cerapan dalam proses adalah sangat penting dalam usaha pembentukan carta kawalan bagi sesuatu proses.

Malangnya, anggapan ketakbersandaran cerapan adalah tidak realistik dalam keadaan sebenar terutamanya dalam proses pengeluaran. Kebanyakan cerapan dalam proses tertentu adalah bersandar antara satu sama lain dan keadaan ini dikenali sebagai autokorelasi. Autokorelasi biasanya diakibatkan oleh kemajuan dalam teknologi pensampelan. Faktor-faktor lain yang menyebabkan autokorelasi data adalah seperti penukaran syif kerja, penggiliran operator yang berlainan dalam melakukan kerja yang sama, penggantian mekanik atau juruteknik dan fungsi dalaman mesin sendiri dalam proses pengeluaran.

BAB 2

TEORI DAN KONSEP ASAS

2.1 Panjang Larian Purata (Average Run Length - ARL)

Pemilihan saiz sampel dan kekerapan pensampelan yang sesuai bagi pembentukan sesuatu carta kawalan adalah berdasarkan prestasi carta kawalan tersebut yang boleh dinilai melalui panjang larian purata (ARL). ARL ialah purata bilangan titik yang mesti diplotkan pada carta kawalan sebelum sesuatu titik memberikan isyarat luar kawalan. Untuk sebarang carta kawalan Shewhart,

$$ARL = \frac{1}{p}, \quad (2.1)$$

dengan p ialah kebarangkalian bahawa sebarang satu titik tertentu yang jatuh di luar had had kawalan.

ARL boleh dibahagikan kepada dua jenis iaitu ARL dalam kawalan atau ARL nominal (in-control ARL - ARL_0) dan ARL luar kawalan (out-of-control ARL - ARL_1). Semakin besar ARL nominal, semakin baik prestasi carta kawalan berkenaan. Namun, semakin besar ARL luar kawalan, semakin teruk prestasi carta kawalan berkenaan.

$$ARL_0 = 1/\alpha \quad (2.2a)$$

$$ARL_1 = 1/(1 - \beta) \quad (2.2b)$$

α (ralat Jenis-I) = kebarangkalian bahawa satu titik memberi isyarat luar kawalan apabila proses sebenarnya berada dalam kawalan.

β (ralat Jenis-II) = kebarangkalian bahawa satu titik memberi isyarat dalam kawalan apabila proses sebenarnya berada di luar kawalan.

2.2 Petua Larian (Runs Rules)

Sebarang titik yang jatuh di luar had kawalan 3-sigma mewakili satu kemungkinan akan wujud sebab-sebab terumpukkan dalam proses. Walau bagaimanapun, sebab-sebab terumpukkan boleh juga menyebabkan variasi yang tidak rawak antara had-had kawalan 3-sigma. Variasi seperti ini tidak dapat dikesan oleh had-had kawalan 3-sigma tetapi masalah ini dapat diatasi dengan menggunakan petua larian. Walaupun terdapat pelbagai jenis petua larian, namun di sini saya hanya menyatakan empat jenis petua larian yang utama. Semua petua larian yang akan dinyatakan adalah merujuk kepada Rajah 2.1 seperti berikut.

+ 3 σ	
+ 2 σ	A
+ 1 σ	B
Garis Tengah	C
- 1 σ	C
- 2 σ	B
- 3 σ	A

Rajah 2.1 Carta Kawalan Yang Dibahagikan Kepada Enam Zon

2.2.1 Petua Larian "Western Electric"

"Western Electric Handbook" (1956) telah mencadangkan satu set petua penentuan untuk mengesan corak variasi yang tidak rawak dalam carta kawalan. Dengan merujuk kepada

Rajah 2.1, berikut ialah petua “Western Electric” yang menyimpulkan bagaimana sesuatu proses dianggap berada di luar kawalan.

Petua 1: Sebarang titik jatuh di luar had-had kawalan 3-sigma.

Petua 2: Dua daripada tiga titik berturutan yang melepasi had-had amaran 2-sigma (warning limits) iaitu titik-titik tersebut jatuh pada zon A.

Petua 3: Empat daripada lima titik berturutan jatuh pada zon C.

Petua 4: Lapan titik berturutan jatuh pada salah satu belah garis tengah.

Petua-petua di atas hanya diaplikasikan pada sebelah garis tengah dalam satu masa sahaja. Oleh itu, satu titik yang jatuh di atas had amaran atas dan diikuti segeranya dengan satu titik yang jatuh di bawah had amaran bawah tidak akan memberi amaran bahawa proses adalah berada di luar kawalan. Petua tersebut biasanya digunakan untuk meningkatkan kepekaan carta kawalan terhadap anjakan kecil dalam proses.

2.2.2 Petua Larian Oleh Nelson (1984)

Petua (lebih dikenali sebagai ujian) berikut dicadangkan oleh Nelson (1984) bagi mengesan sebab-sebab terumpukkan dalam proses. Anggapan-anggapan berikut perlu dibuat sebelum petua larian ini digunakan:

i) Proses adalah bertaburan normal.

ii) Sampel-sampel yang berturutan, iaitu $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ adalah tidak bersandar antara satu sama lain dan bertaburan secaman, $N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$.

Ujian 1:

Satu titik melewati zon A. Ujian ini dicadangkan oleh Shewhart (1931). Ia akan memberi tanda isyarat luar kawalan jika terdapat anjakan yang besar dalam min atau kenaikan dalam variasi proses.

Ujian 2:

Sembilan titik berturutan berada dalam zon C atau melepasinya. Ujian ini sensitif terhadap anjakan kecil dalam min proses.

Ujian 3:

Enam titik berturutan yang naik atau turun dengan berterusan. Ujian ini megasan perubahan dalam min proses. Perubahan yang kecil akan diberi isyarat sebelum dikesan oleh Ujian 1.

Ujian 4:

Empat belas titik berturutan yang mempunyai corak naik-turun secara bergilir-gilir. Kesan sistematik ini adalah disebabkan oleh penggunaan dua buah mesin atau dua orang operator secara bergilir-gilir.

Ujian 5:

Dua daripada tiga titik yang berturutan berada dalam zon A atau melepasinya. Ujian ini biasanya memberi isyarat apabila terdapat anjakan dalam min proses walaupun ia juga agak sensitif terhadap kenaikan dalam variasi proses.

Ujian 6:

Empat daripada lima titik berturutan berada dalam zon B atau melepasiya. Ujian ini juga sensitif terhadap anjakan dalam min proses.

Ujian 7:

Lima belas titik berturutan berada dalam zon C (di atas atau di bawah garis tengah). Corak yang digambarkan dalam ujian ini menunjukkan proses adalah tidak rawak. Ia disebabkan oleh masalah penstrataan (stratification problem) iaitu terdapat dua atau lebih jenis taburan bagi setiap subkumpulan dalam sesuatu proses yang sama. Jika taburan-taburan tersebut tidak mempunyai min yang sama, maka ini akan menyebabkan julat had-had kawalan menjadi sangat besar.

Ujian 8:

Lapan titik berturutan pada kedua-dua bahagian garis tengah dengan tiada sebarang titik dalam zon C. Ujian ini direka untuk mengesan keadaan pencampuran (mixture situation) taburan dalam sesuatu proses. Misalnya, dalam satu proses yang sama, sesuatu subkumpulan berasal daripada taburan tertentu manakala subkumpulan yang lain pula berasal daripada taburan lain.

Ujian 1, 2, 5 dan 6 dijalankan dalam kawasan sebelah atas dan sebelah bawah garis tengah carta kawalan secara berasingan manakala Ujian 3, 4, 7 dan 8 pula boleh dijalankan terhadap keseluruhan kawasan dalam carta kawalan tersebut. Penggunaan ujian-ujian di atas adalah bergantung kepada keadaan. Pada permulaan sesuatu program latihan, Ujian 1 adalah baik digunakan secara individu. Penggunaan Ujian 1 hingga Ujian 4 merupakan set

yang baik bagi mengesan sebab-sebab terumpukkan yang biasa berlaku dalam situasi sebenar. Bagi kajian kejuruteraan, tambahan penggunaan Ujian 5 dan Ujian 6 akan meningkatkan kepekaan carta kawalan dalam mengesan perubahan min proses. Ujian 7 dan Ujian 8 pula digunakan untuk mengesan masalah pensampelan (penstrataan dan pencampuran).

2.2.3 Petua Larian Oleh Klein (2000)

Klein (2000) telah mencadangkan carta kawalan Shewhart \bar{X} yang menggunakan petua larian 2-daripada-2 dan petua larian 2-daripada-3 untuk mengesan anjakan min dalam proses. Bagi petua larian 2-daripada-2, dua titik berturutan di atas had kawalan atas atau dua titik berturutan di bawah had kawalan bawah akan memberi isyarat luar kawalan. Bagi petua larian 2-daripada-3 pula, dua daripada tiga titik berturutan di atas had kawalan atas atau dua daripada tiga titik berturutan di bawah had kawalan bawah akan memberi isyarat luar kawalan. Seterusnya, cara-cara terperinci untuk memperoleh had-had kawalan yang menggunakan kedua-dua petua larian tersebut juga dibincangkan seperti berikut.

2.2.3.1 Petua Larian 2-daripada-2

Suatu carta kawalan boleh dibahagikan kepada tiga kawasan: satu kawasan di atas had kawalan atas, satu kawasan di bawah had kawalan bawah dan satu kawasan di antara kedua-dua had kawalan atas dan bawah.

Pertimbangkan rantai Markov penyerapan (absorbing Markov chain) berikut bagi petua larian 2-daripada-2 yang mempunyai tiga keadaan fana (transient state):

Keadaan {1} : Tiada sebarang titik melepasi mana-mana had kawalan.

Keadaan {2} : Terdapat satu titik di atas had kawalan atas (UCL).

Keadaan {3} : Terdapat satu titik di bawah had kawalan bawah (LCL).

Keadaan {4} : Dua titik berturutan melepasi salah satu had kawalan (UCL atau LCL).

Kebarangkalian peralihan (transition probabilities) bagi rantai Markov di atas ditunjukkan dalam jadual berikut:

Jadual 2.1 Kebarangkalian peralihan bagi rantai Markov dengan tiga keadaan fana.

		Keadaan pada masa $t + 1$			
		1	2	3	4
Keadaan pada masa t	1	p	pU	pL	0
	2	p	0	pL	pU
	3	p	pU	0	pL
	4	0	0	0	1

Jangkaan masa perjalanan pertama (expected first passage times) dari keadaan {1} kepada keadaan penyerapan {4} (keadaan di luar kawalan) adalah bersamaan dengan panjang larian purata dalam kawalan, ARL_0 . Jangkaan masa perjalanan pertama dari setiap keadaan fana kepada keadaan penyerapan dapat diperolehi dengan menyelesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$M_{14} = 1 + (p)M_{14} + (pU)M_{24} + (pL)M_{34} \quad (2.3a)$$

$$M_{24} = 1 + (p)M_{14} + (pL)M_{34} \quad (2.3b)$$

$$M_{34} = 1 + (p)M_{14} + (pU)M_{24} \quad (2.3c)$$