Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Demonstração do Teorema de Pitágoras via Semelhança de Triângulos

por

Marcos Douglas Medeiros de Holanda

Abril/2020
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Licenciatura em Matemática

Demonstração do Teorema de Pitágoras via Semelhança de Triângulo

por

Marcos Douglas Medeiros de Holanda

sob a orientação do

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Abril/2020
João Pessoa - PB

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

H722d Holanda, Marcos Douglas Medeiros de.
Demonstração do Teorema de Pitágoras via Semelhança de Triângulo / Marcos Douglas Medeiros de Holanda. - João Pessoa, 2020.
48 f. : il.

Orientação: Adriano Alves de Medeiros.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Axioma. 2. Semelhança de Triângulos. 3. Teorema de Pitágoras. I. Medeiros, Adriano Alves de. II. Título.

UFPB/CCEN

Demonstração do Teorema de Pitágoras via Semelhança de Triângulos
por
Marcos Douglas Medeiros de Holanda

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Adriano Alves de Medeiros-UFPB (Orientador)

Prof. Esteban Pereira da Silva-UFPB

Prof. Márcio Silva Santos - UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Licenciatura em Matemática

03 de Abril de 2020

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

ATA Nº 8 / 2020 - CCEN-CGM (11.01.14.44)

Nº do Protocolo: 23074.024093/2020-41

João Pessoa-PB, 30 de Abril de 2020

AVALIAÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE

CURSO DO CURSO DE MATEMÁTICA

Aluno(a): Marcos Douglas Medeiros de Holanda

Matrícula: 11508397

Data da Defesa: 03/04/2020

Modalidade: Licenciatura

Forma de Avaliação: Vídeo conferencia

Título do Trabalho: DEMOSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS VIA SEMELHANÇA DE TRIANGULO.

	PROF ADRIANO ALVES DE MEDEIROS (Orientador)
Banca Examinadora:	PROF. ESTEBAN PEREIRA DA SILVA
	PROF. MARCIO SILVA SANTOS
Nota do Trabalho	9,3

(Assinado digitalmente em 05/05/2020 11:31)
ADRIANO ALVES DE MEDEIROS
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Matrícula: 2130828

Agradecimentos

- A Deus, pois tudo o que acontece em minha vida é devido a Ele. Sempre tive dificuldades durante a graduação, mas graças a Deus consegui superá-las.

- A todos os meus familiares, que me deram suporte e exemplo para prosseguir. Em especial a minha mãe, que sempre mostrou-me a importância de estudar.

- Ao professor Adriano Medeiros que me orientou neste trabalho, mesmo com todas as minhas limitações de horário, sempre estava disponível para me ajudar.

- À professora Flavia Jeronimo, que sempre acreditou em mim, motivou-me a continuar e, além disso, foi responsável por apresentar-me ao universo fascinante da Matemática.

- Aos professores do Departamento de Matemática - UFPB pelos conhecimentos transmitidos. Especialmente aos professores Jorge Costa e Bruno Ribeiro que, apesar de todos os compromissos profissionais, sempre me ajudaram com valiosos conselhos para seguir firme e forte na jornada acadêmica.

- Aos meus amigos de graduação que compartilharam comigo seus conhecimentos e suas dificuldades para que juntos pudéssemos crescer. Como também, àqueles que ensinei ou ajudei de alguma forma e me fizeram perceber, por muitas vezes, que suas dúvidas também eram minhas.

- À CAPES, pelo apoio financeiro e à UFPB, particularmente, ao Departamento de Matemática.

- Finalmente, gostaria de agradecer aos professores: Esteban Pereira da Silva e Marcio Silva Santos que aceitaram participar da banca, e assim, colaborar com este trabalho.

"O Senhor é o Meu Pastor e Nada Me Faltará."Salmos 23 - V.1

Resumo

Neste trabalho abordamos uma demonstração do Teorema de Pitágoras via semelhança de triângulos. Optamos por uma apresentação que parte dos Axiomas (ou Postulados) de Euclides, introduzindo os termos e resultados necessários para a compreensão desta demonstração.

Palavras-Chave: Axioma, Semelhança de Triângulos, Teorema de Pitágoras.

Abstract

This work approaches a demonstration of the Pythagorean Theorem via similarity of triangles. We choose a presentation starting from Euclid's Axioms (or Postulates), from which we introduce the terms and results necessary for the well understanding of the demonstration.

Keywords: Axiom, Similarity of Triangles, Pythagorean Theorem.

Sumário

Introdução

O Teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os três lados de qualquer triângulo retângulo. O Teorema de Pitágoras é nomeado em alusão ao pensador grego Pitágoras (570 a.C. - 495 a.C.) a quem, tradicionalmente, são creditados a descoberta e demonstração do resultado, seguindo uma narrativa eurocêntrica. Registros apontam que, anteriormente, babilônios, mesopotâmios, egípcios conheciam algorítimos capazes de determinar casos específicos do Teorema de Pitágoras, porém não há indícios de que o resultado era conhecido com a mesma generalidade estudada na escola pitagórica - veja [2].

Segundo a Professora Tatiana Roque, em [2], a Escola Pitagórica concebia o Teorema de Pitágoras como resultado aritmético e não geométrico, já que o método de encontrar as triplas pitagóricas não é suficiente para assegurar a validade geométrica do teorema em todos os casos.

Nossa abordagem tem início em uma breve apresentação da Geometria Euclidiana. Nesta oportunidade, introduzimos, dentre outras coisas, os conceitos básicos necessários para o entendimento da demonstração apresentada para o Teorema de Pitágoras. Além disso, esta escolha permite que nosso texto esteja auto contido, não exigindo do leitor pré-requisitos específicos da área para a compreensão desta obra.

No Capítulo 1, apresentamos o primeiro grupo de axiomas que é denotado por Axioma de Incidência e o segundo grupo que é denotado de Axioma de Ordem.

Nos Capítulos 2 e 3, apresentamos a noção de medida de comprimento e ângulos, respectivamente, partindo do conhecimento adquirido no Ensino Básico. Introduzimos uma analogia matemática correspondente por meio de axiomas.

A partir das noções de medida de segmentos e de ângulos, no Capítulo 4 introduzimos os conceitos de congruência de segmentos, ângulos e triângulos. São apresentados, também, teoremas que dão condições suficientes para a congruência de triângulos.

No Capítulo 5, enunciamos e demonstramos o Teorema do Ângulo Externo e algumas consequências imediatas do mesmo. No Capítulo 6, introduzimos o quinto grupo de axiomas que é denotado por Axioma das Paralelas e também é conhecido como o quinto postulado de Euclides.

Finalmente, no último capítulo, definimos o terceiro caso de semelhança de triângulo que foi possível demonstrar através dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Por fim utilizando todos os argumentos de forma imediata conseguimos demonstrar o Teorema de Pitágoras via semelhança de triângulo como queríamos.

Capítulo 1

Axiomas de Incidência e Ordem

Neste capítulo, tratamos dos Axiomas de Incidência e Ordem e apresentamos alguns conceitos decorrentes, os quais são necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos.

Definição 1.1 *Um axioma é uma proposição que tomamos como verdade absoluta. Um conjunto de axiomas é chamado de sistema axiomático, em que, sendo consistente, dá origem a uma teoria.*

As figuras geométricas elementares, no plano, são os pontos e as retas. O plano é constituído de pontos e retas.

Pontos e retas do plano satisfazem a cinco grupos de axiomas que serão apresentados ao longo destes capítulos.

O primeiro grupo de axiomas é constituído pelos axiomas de incidência.

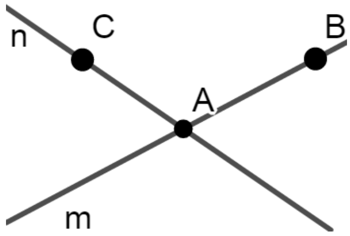
Axioma 1 *Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem a reta.*

Axioma 2 *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*

Definição 1.2 *Quando duas retas têm um ponto em comum, diz-se que elas se intersectam ou que elas se encontram naquele ponto.*

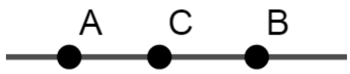
Proposição 1.3 *Duas retas distintas não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.*

Demonstração: Sejam m e n duas retas distintas. Observe que o nosso objetivo é mostrar que duas retas distintas não podem se intersectar em dois ou mais pontos. Observe que esse fato segue diretamente do Axioma 2, uma vez que, dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contem. Dessa forma, as retas m e n não se intersectam ou se intersectam em um único ponto. ■



Notação: Utilizaremos letras maiúsculas (A, B, C,...) para designar pontos, e letras minúsculas (a, b, c,...) para designar retas.

A figura abaixo apresenta uma reta e três pontos A, B e C desta reta. O ponto C localiza-se entre A e B ou, equivalentemente, os pontos A e B estão separados pelo ponto C.



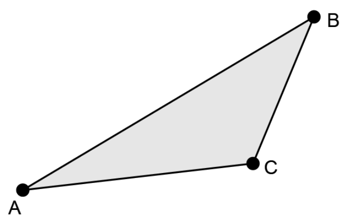
A noção de que um ponto localiza-se entre dois outros é um relação, entre pontos de uma mesma reta, que satisfaz aos Axiomas 3, 4 e 5 apresentados a seguir. Estes são referidos como axiomas de ordem.

Axioma 3 *Dados três pontos distintos de uma reta, só um deles localiza-se entre os outros dois.*

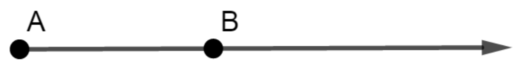
Definição 1.4 *O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado segmento AB. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.*

Muitas figuras planas são construídas usando-se os segmentos a mais simples delas é o triângulo, que é formado por três pontos que não pertencem a uma mesma reta e pelos três segmentos determinados por esses três pontos.

Os três pontos são chamados vértices do triângulo e os segmentos lados do triângulo.



Definição 1.5 *Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C, tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de semi-reta de origem A contendo o ponto B, e é representado por S_{AB}. O ponto A é, então, denominado origem da semi-reta S_{AB}*



Observe que dois pontos A e B determinam duas semi-retas S_{AB} e S_{BA} as quais contêm o segmento AB.

Proposição 1.6 *Para as semi-retas determinadas por dois pontos A e B tem-se:*

a) $S_{AB} \cup S_{BA}$ *é a reta determinada por A e B;*

b) $S_{AB} \cap S_{BA} = AB$

Demonstração:

a) Seja m a reta determinada por A e B. Como S_{AB} e S_{BA} são constituídas de pontos da reta m, então $S_{AB} \cup S_{BA} \subset m$. Por outro lado, se C é um ponto da reta m, então pelo axioma 3, uma das três possibilidades ocorre:

(1) C está entre A e B;

(2) A está entre B e C;

(3) B está entre A e C.

No caso (1), C pertence ao segmento AB; no caso (2), C pertence a S_{AB}; e no caso (3), C pertence a S_{AB}. Portanto, em qualquer caso, C pertence a $S_{AB} \cup S_{BA}$

b) Temos que o segmento AB está contido em S_{AB} e em S_{BA}. Logo $AB \subset S_{AB} \cap S_{BA}$. Reciprocamente, seja C um ponto em $S_{AB} \cap S_{BA}$, então obrigatoriamente C deve estar entre A e B, pois se fosse B entre A e C, teríamos que C não pertenceria a S_{BA}, o que é uma contradição.

Um raciocínio análogo vale para caso A entre B e C. Portanto, C está no segmento AB, mostrando que $S_{AB} \cap S_{BA} \subset AB$. Logo, $S_{AB} \cap S_{BA} = AB$ ■

Axioma 4 *Dados dois pontos distintos A e B, sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D, tal que B está entre A e D.*

Uma consequência imediata é que entre quaisquer dois pontos de uma reta existe uma infinidade de pontos. Também é uma consequência do Axioma 4 que uma semi-reta S_{AB} contém uma infinidade de pontos além daqueles contidos no segmento AB.

Considere uma reta m e dois pontos A e B que não pertencem a está reta. Diremos que A e B estão em um mesmo lado da reta m se o segmento AB não intersecta a reta m.

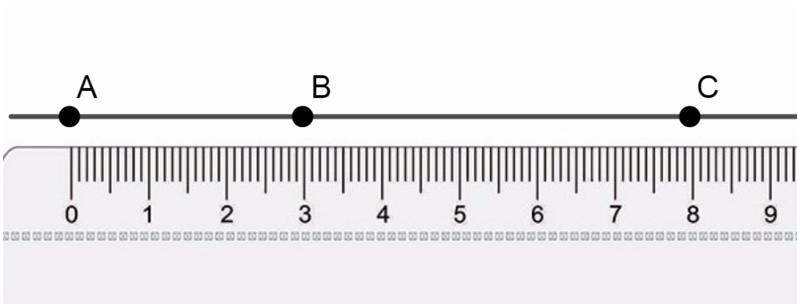
Definição 1.7 *Sejam m uma reta e A um ponto que não pertence a m. O conjunto constituído pelos pontos de m e por todos os pontos B, tais que A e B estão do mesmo lado da reta m, é chamado de semi-plano determinado por m contendo A, e será representado por P_{mA}*

Axioma 5 *Uma reta m determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a reta m.*

Capítulo 2

Axioma Sobre Medição de Segmentos

Iniciaremos esta seção com a seguinte imagem: considere uma régua graduada posicionada sobre um traço reto, onde marcamos os pontos A, B e C como na Figura abaixo



Na figura acima o traço que liga A e B mede 3cm, o traço que liga A a C mede 5cm.

Note que ao ponto B, corresponde (na régua) o número 3, e ao ponto C, o número 8. A medida do segmento BC é obtida pela diferença $8-3=5$. Obviamente a régua poderia ser colocada em outras posições e isso faria com que B e C correspondessem o números diferentes. No entanto, em cada caso, a diferença entre eles seria sempre 5cm.

A abstração dessa ideia se dá, na geometria, através dos axiomas a seguir.

Axioma 6 *A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e só se, os pontos são coincidentes.*

O número a que se refere este axioma é chamada de distância entre os pontos ou é referido como comprimento do segmento determinado pelos dois pontos.

Axioma 7 *Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Ao aplicarmos este axioma, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado coordenada daquele ponto.

De acordo com o Axioma 6, o comprimento de um segmento AB é sempre maior do que zero. Assim , se a e b são as coordenadas das extremidades deste segmento, o seu comprimento será a diferença entre o maior e menor destes números.

Nós indicaremos o comprimento do segmento AB pelo simbolo $\overline{AB}$. Portanto,

$$\overline{AB} = |b - a|.$$

Axioma 8 *Se o ponto C encontra-se entre A e B, então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$*

Proposição 2.1 *Se, em uma semi-reta S_{AB}, considerarmos um segmento AC com $\overline{AC} < \overline{AB}$, então, o ponto C estará entre A e B.*

Demonstração: Note que o ponto A não pode estar entre B e C, já que B e C estão na mesma semi-reta de origem A. Se o ponto B estivesse entre A e C então pelo Axioma 8, teríamos $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ e consequentemente $\overline{AB} < \overline{AC}$, o que contradiz a hipótese. Portanto, é o ponto C que está entre A e B. ■

Teorema 2.2 *Sejam A, B e C pontos distintos de uma mesma reta cujas coordenadas são, respectivamente, a, b e c. O ponto C está entre A e B se, e somente se, o número c está entre a e b.*

Demonstração: Se C está entre A e B então, pelo Axioma 8 tem-se que $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, ou seja,

$$|c - a| + |b - a| = |a - b|.$$

Vamos supor inicialmente que $a < b$. Neste caso, da igualdade acima, temos

$$|c - a| < b - a \quad \text{e} \quad |b - a| < b - a$$

como consequência

$$c - a < b - a \quad \text{e} \quad b - c < b - a$$

Logo,

$$c < b \quad \text{e} \quad a < c$$

Assim, c está entre a e b. Caso $b < a$, temos

$$|c - a| < a - b \quad \text{e} \quad |b - c| < a - b$$

$$\begin{array}{rcl} -(a-b) < c - a < a - b & \qquad & -(a-b) < b - c < a - b \\ -a + b < c - a & & -a + b < b - c \\ b < c & & c < a \end{array}$$

ou seja, c está entre a e b.
Reciprocamente, se c está entre a e b, então

$$|c-a| + |b-c| = |a-b|$$

Segue-se daí que $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$. Em particular

(1) $\overline{AC} < \overline{AB}$

(2) $\overline{CB} < \overline{AB}$

Agora consideremos as semi-retas determinadas pelo ponto A. Se C e B pertencem a mesma semi-reta, então por (1), usando a Proposição 2.1, temos que C está entre A e B.

Afirmação: C e B não podem estar em semi-retas distintas. De fato, se estivessem separados pelo ponto A, teríamos $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$, o que resultaria $\overline{BA} < \overline{BC}$, contradizendo (2). Com isso finalizamos a demonstração do teorema. ∎

Definição 2.3 *Chamamos de ponto médio do segmento AB a um ponto C deste segmento, tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.*

Teorema 2.4 *Um segmento tem exatamente um ponto médio.*

Demonstração (Existência): Sejam a e b as coordenada da extremidade do segmento. considere o número $c = \dfrac{a+b}{2}$.

De acordo com o Axioma 7, existe um ponto C da reta que tem c como coordenada. Desde que

$$\overline{AC} = |a-c| = \left|a - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|$$

$$\overline{CB} = |c-b| = \left|\frac{a+b}{2} - b\right| = \left|\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right|,$$

concluímos que $\overline{AC} = \overline{CB}$. Como o numero $\frac{a+b}{2}$ está entre os números a e b, segue-se do Teorema 2.2 que C está entre A e B. Logo C é um ponto médio de AB.

Unicidade: Seja C como obtido na prova da existência e seja C' um outro ponto do segmento AB, tal que $\overline{AC'} = \overline{C'B}$. Sejam a, b e c' as coordenadas dos pontos A, B e C', respectivamente. Então teremos:

(i) $c' - a = b - c'$, no caso em que $a < c' < b$
(ii) $a - c' = c' - b$, no caso em que $b < c' < a$

em ambos os caso, temos

$$c' = \frac{a+b}{2}$$

Logo, em qualquer caso, $c' = c$ e, portanto, pelo Axioma 7, $c = c'$, mostrando a unicidade do ponto médio. ∎

"A noção de distância é uma das noções mais básicas da geometria."[1]

Pelo que já vimos, ela satisfaz as seguintes propriedades:

1) Para quaisquer dois pontos A e B do plano, tem-se $\overline{AB} \geq 0$. Além disso, $\overline{AB} = 0$ se, e somente se, $A = B$.

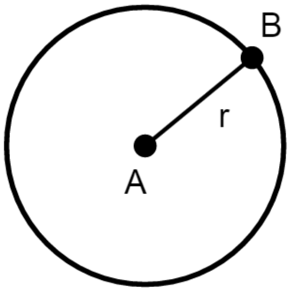
2) Para quaisquer dois pontos $\overline{AB} = \overline{BA}$

3) **(Desigualdade Triangular)** Para quaisquer três pontos A, B e C do plano tem-se:

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$$

Igualdade ocorre se, e somente se, B pertence ao intervalo AC.

Definição 2.5 *Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano, tais que $\overline{AB} = r$*



Todo ponto C que satisfaz a desigualdade $\overline{AC} < r$ é dito estar dentro do círculo. Se, ao invés, $\overline{AC} > r$, então C é dito estar fora do círculo. O conjunto dos pontos que estão dentro do círculo é chamado de disco de raio r e centro A.

Definição 2.6 *Diz-se que um conjunto de pontos do plano é limitado se for possível traçar um círculo que o contenha. Do contrário diz-e que ele é ilimitado.*

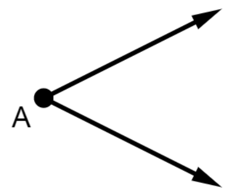
Exemplo 2.7 *Qualquer segmento é um conjunto limitado. De fato, dado AB, tome um círculo com centro no ponto A tento raio r, tal que $\overline{AB} < r$. Então, todos os pontos C e AB satisfazem a desigualdade $\overline{AC} < r$ e, portanto, estão dentro do círculo.*

Capítulo 3

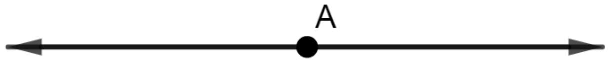
Axiomas Sobre a Medição de Ângulo

Neste capítulo, introduzimos a noção de ângulo e algumas definições que são importantes para obter nosso objetivo.

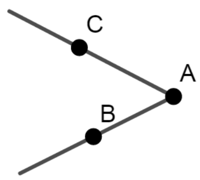
Definição 3.1 *Chamamos de ângulo a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem.*



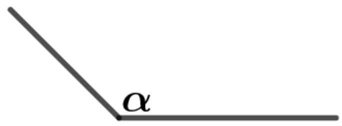
As semi-retas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo. Um ângulo formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso.



Representamos o ângulo da figura abaixo

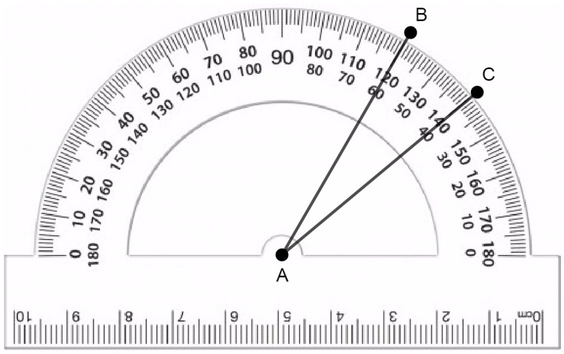


Por $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$. Quando nenhum outro ângulo exibido tem o mesmo vértice, podemos usar apenas a letra em que o vértice está, no exemplo acima, teríamos $\hat{A}$. Também podemos usar uma letra grega para representar o ângulo.



Considere a seguinte ilustração composta por três pontos não colineares, A, B e C; e dois traços retilíneos partindo do ponto A e passando pelos pontos B e C respectivamente. Posicionando um transferidor com centro em A, podemos mensurar a "abertura" determinada pelos traços retilíneos.

Como analogia matemática para esta ideia, associamos o ângulo que esta figura representa (o ângulo $B\hat{A}C$) a um número real correspondente à medida do ângulo. Para que esta analogia seja satisfatória, nossa associação deve satisfazer os axiomas a seguir.



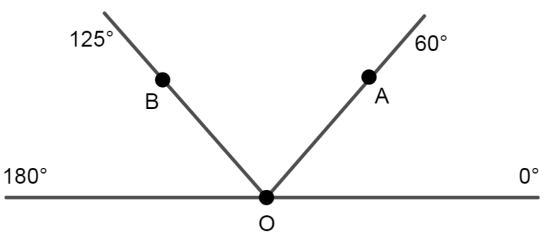
Axioma 9 *Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semi-retas coincidentes.*

Para facilitar o enunciado do próximo axioma, vamos dar a seguinte definição:

Definição 3.2 *Diremos que uma semi-reta divide um semi-plano se ela estiver contida no semi-plano e sa origem for um ponto da reta que o determina.*

Axioma 10 *É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre 0 e 180 e as semi-retas da mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.*

Ao fazer tal correspondência chamamos o número que corresponde a uma dada semi-reta de coordenada da semi-reta.



Na figura acima, a semi-reta S_{OA} tem coordenada 60, a semi-reta S_{OB} tem coordenada 125. Pelo Axioma 10, a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é $125 - 60 = 65$.

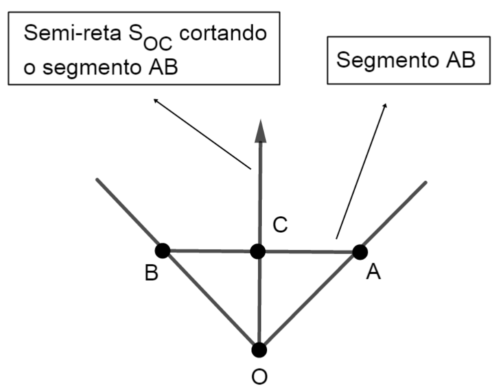
Em geral, se **a** e **b** forem coordenadas dos lados do ângulo $A\hat{O}B$, então $|a-b|$ é a medida deste ângulo. Indicaremos um ângulo e a sua medida pelo mesmo simbolo. Assim, escreveremos de uma maneira geral:

$$A\hat{O}B = |a-b|$$

Para significar que $|a-b|$ é a medida do angulo $A\hat{O}B$.

Observe que as semi-retas que formam um ângulo raso serão sempre numeradas por 0 e 180.

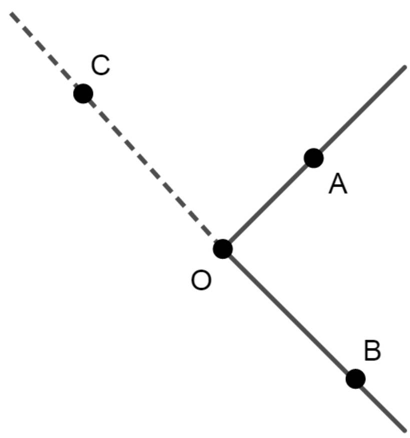
Definição 3.3 *Sejam S_{OA}, S_{OB} e S_{OC} semi-retas de mesma origem. Se o segmento AB interseptar S_{OC}, diremos que S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$.*



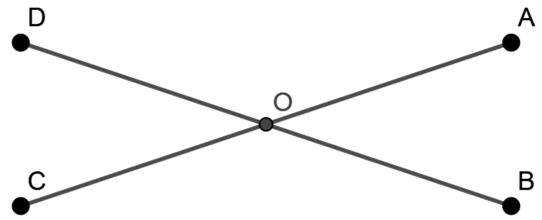
Axioma 11 *Se uma semi-reta S_{OC} divide um ângulo $A\hat{O}B$, então,*

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$$

Definição 3.4 *Dois ângulos são ditos suplementares se a soma de suas medidas é 180°. O suplemento de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados.*



Definição 3.5 *Quando duas retas distintas se interceptam, formam-se quatro ângulos, como indicado na figura a seguir*



os ângulos $A\hat{O}B$ *e* $D\hat{O}C$ *são opostos vértice, assim como* $A\hat{O}D$ *e* $B\hat{O}C$*.*

Proposição 3.6 *Ângulo opostos vértices têm a mesma medida.*

Demonstração: De fato, se $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são ângulos opostos pelo vértice, então eles têm o mesmo suplemento: $A\hat{O}D$, ou seja,

$$A\hat{O}B + A\hat{O}D = 180^\circ$$
$$D\hat{O}C + A\hat{O}D = 180^\circ$$

Portanto

$$A\hat{O}C = 180^\circ - A\hat{O}D = D\hat{O}C$$

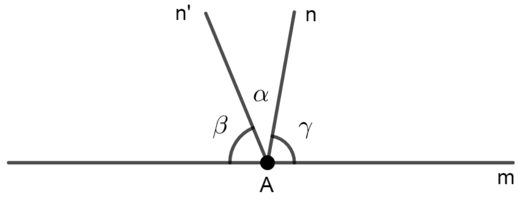
■

Definição 3.7 *Um ângulo cuja medida é 90° é chamado ângulo reto. Quando duas retas se intersectam formando um ângulo de 90°,dizemos que essas retas são perpendiculares.*

Teorema 3.8 *Por qualquer ponto e uma reta passa uma única perpendicular a está reta.*

Demonstração (Existência): Dada uma reta m e um ponto A sobre ela, as duas semi-retas determinadas por A forma um ângulo raso. Considere um dos semi-planos determinados pela reta m. Segue do Axioma 10 que existe uma semi-reta com origem em A em que sua coordenada será o número 90. Está semi-reta forma com as duas semi-retas determinadas pelo ponto A sobre a reta m, ângulos de 90°. Portanto ela é perpendicular a reta m.

(Unicidade)



Suponha que existem duas retas n e n' passando pelo ponto A e perpendiculares a m. Fixe um dos semi-planos determinados por m. As interseções das retas n e n' passando pelo ponto A e perpendicular a m. Fixe um dos semi-planos determinados por m. A interseções das retas n e n' com este semi-plano são semi-retas que formam um ângulo α e, como na figura acima, outros ângulos β e γ com as semi-retas determinadas pelo ponto A na reta m. Como n e n' são perpendiculares a m, então $\beta = \gamma = 90°$. Por outro lado, devemos ter $\alpha = \beta = \gamma = 180°$. Logo, $\alpha = 0°$ e as retas n e n' coincidem. ■

Capítulo 4

Congruência

Neste Capitulo apresentamos os três primeiros casos de congruência de triângulos e, como consequência, o Teorema do Triângulo Isósceles, o qual constitui também valiosa ferramenta para a resolução de vários problemas de construções geométricas.

Definição 4.1 *Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes se eles tem a mesma medida.*

Observação: A congruência entre segmentos ou ângulos é uma relação de equivalência.

Notação: Usaremos o simbolo "=" para representar congruência. Então $\overline{AB} = \overline{CD}$, quer dizer que AB e CD são congruentes.

Definição 4.2 *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Se ABC e EFG são dois triângulo congruentes e se

$$A \leftrightarrow E$$

$$B \leftrightarrow F$$

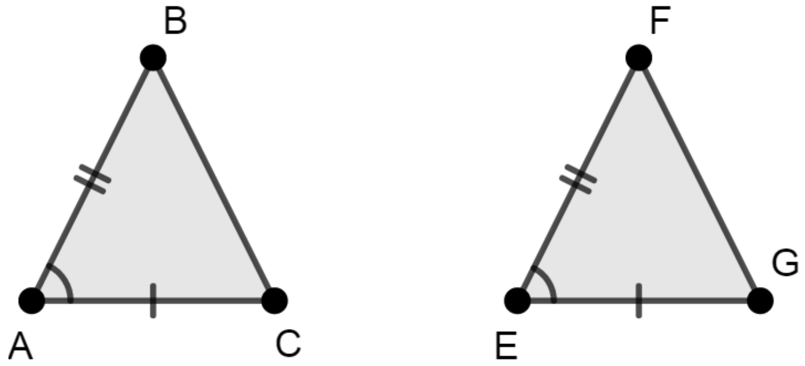
$$C \leftrightarrow G$$

é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes:

$\overline{AB} = \overline{EF}$	$\overline{BC} = \overline{FG}$	$\overline{BC} = \overline{FG}$
$\hat{A} = \hat{E}$	$\hat{B} = \hat{F}$	$\hat{C} = \hat{G}$

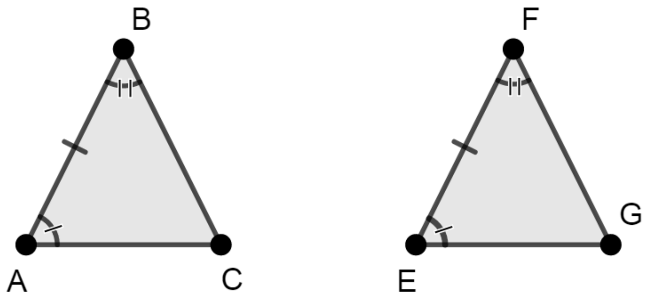
Escreveremos $ABC = EFG$ para significar que os triângulos ABC e EFG são congruentes e que a congruência leva A em E, B em F e C em G.

Axioma 12 *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{EG}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, então $ABC = EFG$.*

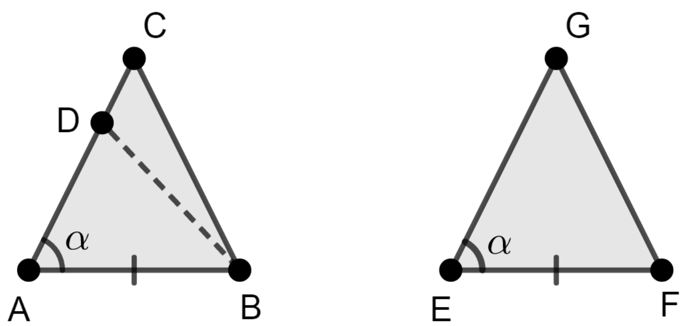


Esse axioma é conhecido como 1° caso de congruência de triângulos.

Teorema 4.3 (2° Caso de Congruência de Triângulos (ALA)) *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$ então $ABC = EFG$*



Demonstração: Sejam ABC e EFG dois triângulos, tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Seja D um ponto na semi-reta S_{AC} tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$.

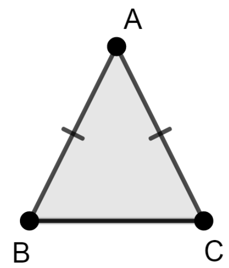


Pelo Axioma 12, temos que o triângulo $ABD = EFG$. Consequentemente, $A\hat{B}D = \hat{F}$. Mas, por hipótese, $\hat{F} = A\hat{B}C$. Assim, $A\hat{B}D = A\hat{B}C$. Com isso, as semi-retas S_{BD} e S_{BC} coincidem, ou seja, o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, os triângulos ABC e ABD coincidem. Desta forma, $ABC = EFG$. ■

Definição 4.4 *Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais, e o terceiro lado é chamado base.*

Proposição 4.5 *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração: Seja ABC em triângulo em que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Queremos mostrar que $\hat{B} = \hat{C}$

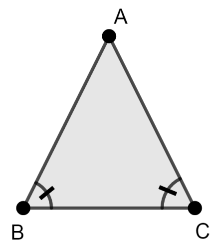


Para isso vamos mostrar que $ABC = ACB$.

Por hipótese, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB}$. Como $\hat{A} = \hat{A}$ Segue pelo Axioma 12 que os triângulos ABC e ACB são congruentes e, portanto, $\hat{B} = \hat{C}$. ■

Proposição 4.6 *Se em um triângulo ABC, tem-se dois ângulos congruentes, então, o triângulo é isósceles.*

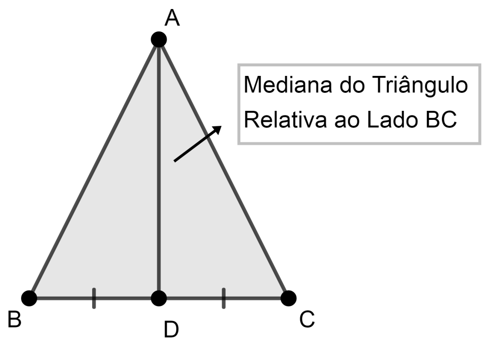
Demonstração: Seja ABC um triângulo em que $\hat{B} = \hat{C}$



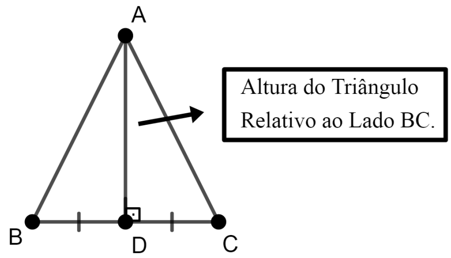
Comparemos o triângulo ABC com ACB. Por hipótese $\hat{B} = \hat{C}$ e $\hat{C} = \hat{B}$ além disso $\overline{BC} = \overline{CB}$. Então, temos o caso, ALA, segue do Teorema 4.3 (2° Caso de Congruência) que $ABC = ACB$ e temos o desejado. ■

Definição 4.7 *Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contém B e C. O segmento AD chama-se mediana do triângulo relativamente ao lado BC, se D for o ponto médio de BC. O segmento AD chama-se bissetriz do ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos congruentes, isto é, se $C\hat{A}D = D\hat{A}B$. O segmento AD chama-se altura do triângulo relativamente ao lado BC, se AD for perpendicular a reta que contém B e C.*

Se $\overline{BD} = \overline{DC}$

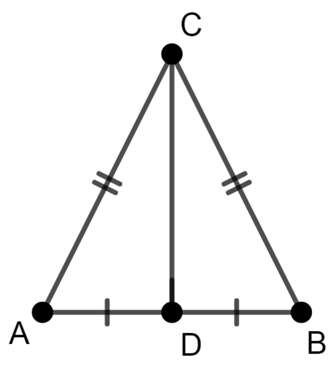


Se $C\hat{A}D = B\hat{A}D$, AD chama-se bissetriz do ângulo $\hat{A}$



Proposição 4.8 *Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo isósceles cuja base é AB

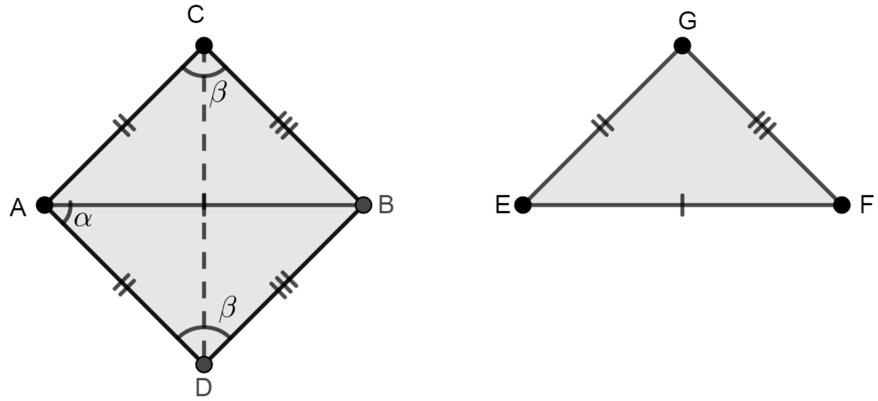


Por hipótese $\overline{AC} = \overline{CB}$ e $\overline{AD} = \overline{DB}$ e, pela Proposição 4.5, $\hat{A} = \hat{B}$.
Queremos mostrar que $A\hat{C}D = D\hat{C}B$ e que $A\hat{D}C = B\hat{D}C = 90°$

Afirmação: $ADC = BDC$.
De fato, temos que $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{DB}$ e $\hat{A} = \hat{B}$. Assim, pelo Axioma 12 temos a afirmação.
Segue da afirmação que $A\hat{D}C + B\hat{D}C = 180°$, temos que $A\hat{D}C = B\hat{D}C = 90°$.
Além disso, segue da afirmação que $A\hat{C}D = B\hat{C}D$, mostrando que CD é a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. ∎

Teorema 4.9 (3° Caso de Congruência de Triângulos (LLL)) *Se dois triângulos têm três lados correspondentes, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Sejam ABC e EFG dois triângulos, tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$.Vamos provar que $ABC = EFG$.



Escolha o ponto D no semi-plano em que C não está tal que $D\hat{A}B = \hat{E}$ e que $\overline{AD} = \overline{EG}$, observe que segue do Axioma 12 que os triângulos ADB e EGF são congruentes, pois temos o caso LAL.

Afirmação: $ADB = ACB$
De fato, observe que os triângulos ADC e DCB são isósceles. Com isso

$$A\hat{D}C = A\hat{C}D \quad \text{e} \quad B\hat{C}B = B\hat{C}D$$

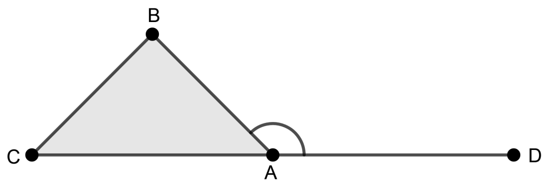
assim, $A\hat{C}B = A\hat{D}B$
Novamente pelo Axioma 12 (LAL), temos que os triângulos ADB e ACB são congruentes. Como $ADB = EGF$, concluímos que $EGF = ACB$. ∎

Capítulo 5

O Teorema do Ângulo Externo e suas Consequências

Apresentamos aqui o Teorema do Ângulo Externo para triângulos, o que nos permite demonstrar mais um caso de congruência de triângulos, o caso L.A.A. Demonstramos o conhecido Teorema da Desigualdade Triangular e mostramos algumas aplicações.

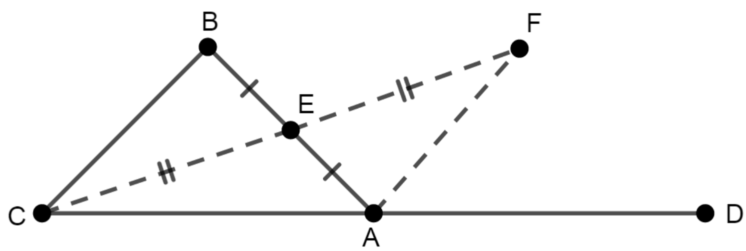
Definição 5.1 *Se ABC é um triângulo, os seus ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são chamados de ângulos internos ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo.*



O ângulo $B\hat{A}D$ é um ângulo externo adjacente ao ângulo interno $C\hat{A}B$.

Teorema 5.2 (Ângulo Externo) *Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer um dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Na semi-reta S_{CA} marque um ponto D, tal que A esteja entre C e D, como indicado na figura 5.2.



Devemos provar que $B\hat{A}D > \hat{B}$ e $B\hat{A}D > \hat{C}$.
Vamos provar inicialmente que $B\hat{A}D > \hat{B}$. Para isto, considere o ponto médio E do segmento AB. Na semi-reta S_{CE} marque um ponto F, tal que $\overline{CE} = \overline{EF}$. Trace AF.

Compraremos os triângulos CEB e FAE. Note que $\overline{BE} = \overline{AE}$, $\overline{CE} = \overline{EF}$ e $B\hat{E}C = A\hat{E}F$, pois são opostos pelo vértice. Pelo caso LAL, temos que $A\hat{E}F = B\hat{E}C$. Consequentemente, $\hat{B} = E\hat{A}F$. Como a semi-reta S_{AF} divide o ângulo $B\hat{A}D$, então $E\hat{A}F < B\hat{A}D$. Portanto, $\hat{B} < B\hat{A}D$. ■

Proposição 5.3 *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor do que 180°.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Vamos mostrar que $\hat{B} + \hat{C} < 180°$. Seja θ o ângulo externo ao triângulo adjacente a C. Então, pelo teorema 5.2, $\hat{B} < \theta$. Desta forma, usando que $\hat{C} + \theta = 180°$, temos

$$\hat{B} + \hat{C} < \theta + \hat{C} = 180°$$

■

Corolário 5.4 *Todo triângulo possui, pelo menos, dois ângulos internos agudos.*

Demonstração: De fato, se um triângulo possuísse dois ângulos internos não agudos, sua soma seria maior ou igual a 180°, o que não pode ocorrer de acordo com a proposição anterior. ■

Corolário 5.5 *Se duas retas distintas m e n são perpendiculares a uma terceira, então, m e n são interceptam.*

Demonstração:

Se m e n se intersectassem, formar-se-ia um triângulo com dois ângulos agudos, o que é um absurdo pelo corolário anterior

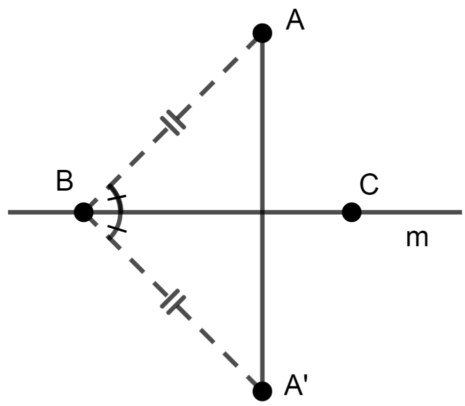
■

Definição 5.6 *Duas retas que não se intersectam são ditas paralelas.*

A proposição seguinte fornece um método de construção de retas perpendiculares. Como consequência do Corolário 5.5, este método pode ser utilizado para construção de retas paralelas.

Proposição 5.7 *Por um ponto fora de uma reta passa uma e somente uma reta perpendicular a reta dada.*

Demonstração (Existência): Seja m uma reta e A um ponto fora desta reta. Tome sobre m dois pontos distintos B e C. Trace AB. Se AB já é perpendicular a m, terminamos a construção. Caso contrário, considere, no semi-plano que não contem A, uma semi-reta com origem em B, formando com S_{BC} um ângulo congruente a $A\hat{B}C$.



Nessa semi-reta tome o ponto A' de modo que $\overline{BA} = \overline{BA'}$, o triângulo ABA' é isósceles.
Afirmação: O segmento AA' é perpendicular a m. De fato, como $\overline{BA} = \overline{BA'}$, o triângulo ABA' é isósceles. Desde que BC é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}A'$, pois $A\hat{B}C = A'\hat{B}C$, segue que BC é perpendicular a AA'.
(Unicidade) Se existissem duas retas distintas passando por A é sendo ambas perpendiculares a reta m, formaríamos um triângulo com dois ângulos retos, que seria um absurdo, como vimos anteriormente. ■

Definição 5.8 *O ponto A', obtido a partir de A e m na construção anterior, é chamado de reflexo do ponto A relativamente à reta m.*

O reflexo é caracterizado pelas seguintes condições:

(a) AA' é perpendicular a m;

(b) m corta AA' no seu ponto médio.

A função F_m que associa cada ponto do plano o seu reflexo relativamente a uma reta m fixada, é chamada reflexão e te as seguintes propriedades:

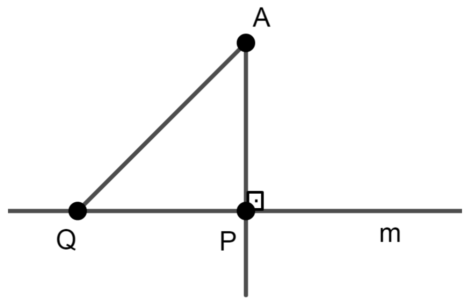
1) $F_m(F_m(A)) = A$, para todo ponto A;

2) $F_m(A) = A$ se, e só se, $A \in m$;

3) $\overline{F_m(A)F_m(B)} = \overline{AB}$, ou seja, F_m preserva distância entre pontos do plano;

4) Se $A \in m$, $B \notin m$ e $B' = F_m(B)$, então, m é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}B'$.

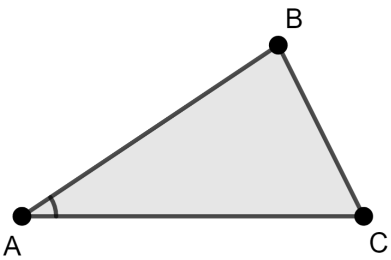
Dado um ponto A e uma reta m, a perpendicular a m passando por A intercepta m em um ponto P chamado: Pé da perpendicular baixada do ponto A à reta m.



Se Q é qualquer outro ponto de m, o segmento AQ é dito ser oblíquo relativamente a m.

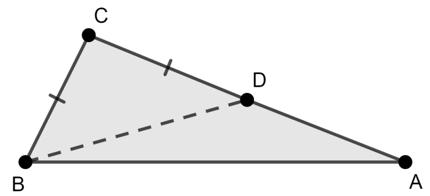
Na figura, o segmento QP é chamado de projeção de segmento QA sobre a reta m. É uma consequência da proposição seguinte que $\overline{QA} > \overline{QP}$ e que $\overline{QA} > \overline{AP}$. O número $\overline{AP}$ é chamado de distância do ponto A à reta m.

Dado um triângulo ABC, diremos que o lado BC opõe-se ao ângulo $\hat{A}$ ou, de maneira equivalente, que o ângulo $\hat{A}$ é oposto ao lado BC.



Proposição 5.9 *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então, seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

Demonstração: A primeira parte segue como consequência imediata das proposições 4.5 e 4.6 (Resultado do Triângulo Isósceles).
Vamos provar a segunda parte. Considere um triângulo ABC em que $\overline{BC} < \overline{AC}$ e vamos mostra que $C\hat{A}B < C\hat{B}A$.



Marque sobre a semi-reta S_{CA}, um ponto D tal que $\overline{CD} = \overline{BC}$. Como $\overline{BC} < \overline{AC}$, segue que D pertence ao segmento AC e, como consequência, a semi-reta S_{BD} divide o ângulo $C\hat{B}A$. Portanto, tem-se

$$C\hat{B}A > C\hat{B}D$$

Agora observe que

$$C\hat{B}D = C\hat{D}B > C\hat{A}B$$

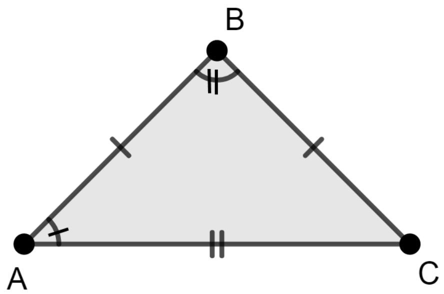
pois BCD é um triângulo isósceles e a desigualdade é devido BDC ser ângulo externo ao ângulo BDA.
Portanto,

$$C\hat{B}A > C\hat{A}B$$

■

Proposição 5.10 *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então, os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.*

Demonstração: A primeira parte segue novamente das proposições 4.5 e 4.6. Para a segunda parte considere um triângulo ABC e que $C\hat{A}B < C\hat{B}A$ e vamos mostrar que



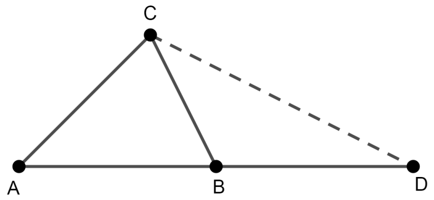
$\overline{BC} < \overline{AC}$. Note que temos três possibilidades:

1. $\overline{BC} < \overline{AC}$
2. $\overline{BC} = \overline{AC}$ Não pode pela primeira parte.
3. $\overline{BC} < \overline{AC}$ Segue da proposição anterior que $C\hat{B}A < C\hat{A}B$ (oposto a nossa hipótese).

Portanto, o único caso possível é o primeiro $\overline{BC} < \overline{AC}$, como queríamos provar.
■

Teorema 5.11 *Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração: Dado um triângulo ABC, mostraremos que $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$



Marque um ponto D na semi-reta S_{BA}, de modo que
$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$
Então, $\overline{BC} = \overline{BD}$, de onde segue que o triângulo DBC é isósceles com base CD. Desta forma,
(1) $B\hat{C}D = B\hat{D}C$
Note que devido B estar entre A e D, segue que
(2) $B\hat{C}D < A\hat{C}D$.
De (1) e (2), temos

$$B\hat{D}C = B\hat{C}D < A\hat{C}D$$

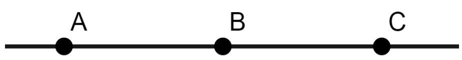
Pela proposição anterior, $\overline{AC} < \overline{AD}$. Logo,

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

■

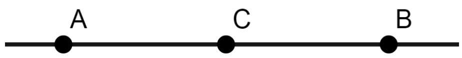
Teorema 5.12 (Desigualdade Triangular) *Dados três pontos distintos A, B e C do plano, tem-se que $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. A igualdade ocorre se e somente se B pertencer ao segmento AC.*

Demonstração: Se A, B e C não estiverem sobre uma mesma reta, então eles determinam um triângulo e a desigualdade é consequência do teorema anterior. Se estiverem sobre uma mesma reta, seja a, b e c, respectivamente, as suas coordenadas.



Temos que,

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$



$$|a - b| = |a - c| + |b - c| \qquad\qquad |a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

■

Esse teorema nos mostra uma restrição para construção de um triângulo de lados 5, 3 e 9 não é possível.

Proposição 5.13 *Sejam a, b e c três números positivos.
Suponha que $|a - b| < c < a + b$. Então, pode-se construir um triângulo cujo lados medem a, b e c.*

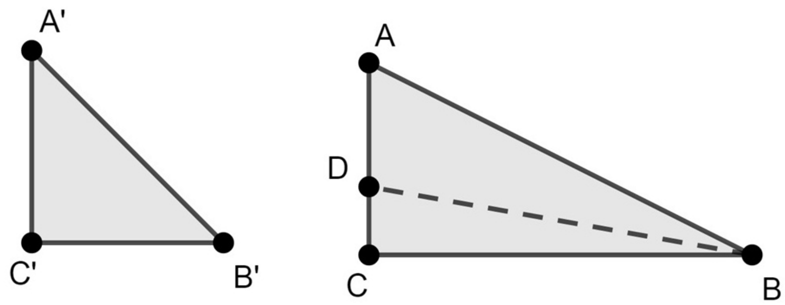
Definição 5.14 *Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa, e os outros dois lados são denominados catetos.*

Observação:

1. Os ângulos opostos aos catetos são agudos;
2. A hipotenusa é maior do que qualquer dos catetos;
3. Segue da desigualdade triangular, o comprimento da hipotenusa é menor do que a soma do comprimento dos catetos.

Teorema 5.15 (Congruência de Triângulos Retângulos)
Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são C e C'. Se alguma das condições abaixo ocorrer, então dois triângulos são congruentes.

1. $\overline{BC} = \overline{BC'}$ e $\hat{A} = \hat{A}$;
2. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$;
3. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\hat{A} = \hat{A}$.



Demonstração: (Caso 1)

$$\hat{C} = \hat{C'} \text{ (reto)}, \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ e } \hat{A} = \hat{A}$$

Marque D sobre a semi-reta S_{CA} de sorte que $\overline{CD} = \overline{C'A'}$. Os triângulos CDB e $C'A'B'$ são congruentes pelo caso LAL. Como consequência $C\hat{D}B = \hat{A'}$. Uma vez que $C\hat{A}B = \hat{A'}$, por hipótese, concluímos que $C\hat{D}B = C\hat{A}B$.
Afirmação: $A = D$
De fato, se não fosse, A, D e B formam um triângulo em que $C\hat{D}B$ e $C\hat{A}B$ são ângulos externo e interno não adjacentes, logo não poderia ocorrer a igualdade acima. Então A e D coincidem e logo $CAB = C'A'B'$, concluímos o desejado. ■

Capítulo 6

O Axioma das Paralelas

Neste capítulo, após alguns resultados, apresentamos o Postulado das Paralelas ou Postulado de Euclides, pois é o que caracteriza a Geometria Euclidiana, a qual passaremos a desenvolver.

Axioma 13 *Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela à reta m.*

Observação: Mostramos no capítulo anterior a existência de uma reta paralela a m passando por um ponto fora de m. O ganho está na unicidade.
O resultado a seguir é uma consequência imediata do Axioma 13.

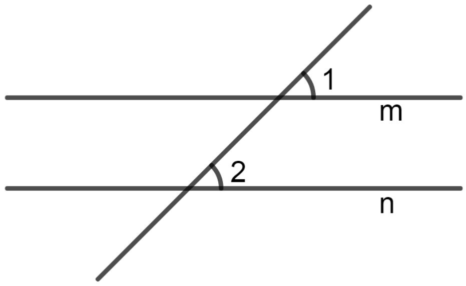
Proposição 6.1 *Se a reta m é paralela às retas n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes.*

Demonstração: Suponha que n_1 e n_2 não coincidem e são paralelas entre si, elas teriam um ponto de interseção, digamos P. Mas então, n_1 e n_2 seriam distintas paralelas à reta m passando por P. Disso contradiz o axioma 13. Logo, n_1 e n_2 são paralelas. ■

Corolário 6.2 *Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.*

Demonstração: Sejam n_1 e n_2 retas paralelas. Suponha que uma reta m corta n_1 e não corta n_2, então m e n_2 seriam paralelas. Como m e n_1 não são paralelas nem coincidentes isso contradiz a proposição anterior. ■

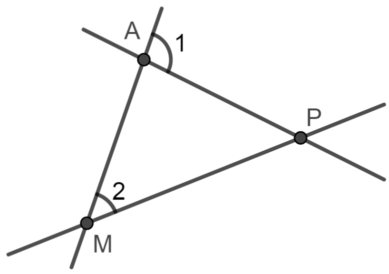
A definição de retas paralelas não é tão simples de ser usada como parece, pois como retas são infinitas em comprimento, como poderemos provar que duas retas não se intersectam?



Como decidir se as retas m e n são paralelas? A resposta será em função dos ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$.

Proposição 6.3 *Sejam m, n, $\hat{1}$ e $\hat{2}$ como a figura anterior se $\hat{1} = \hat{2}$, então as retas m e n são paralelas.*

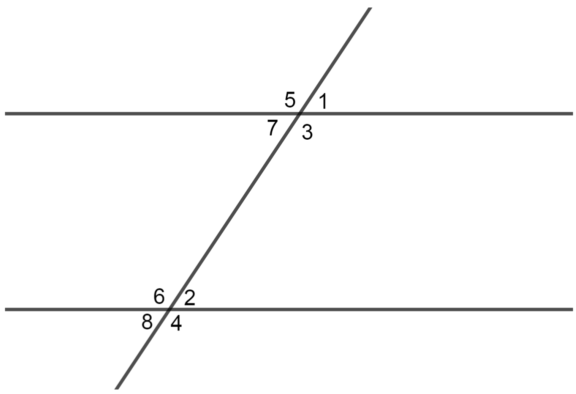
Demonstração: De fato, se m interceptasse n em algum ponto P, formaríamos um triângulo, por exemplo



Como $\hat{1}$ é ângulo externo não adjacente ao ângulo $\hat{2}$ segue que $\hat{1} \neq \hat{2}$, o que contradiz a hipótese. Portanto, m e n não se intersectam. ∎

Quando duas retas são cortadas por uma transversal formam-se oito ângulos como indicado na figura abaixo.

Quatro deles são correspondentes aos outros quatro, a saber:



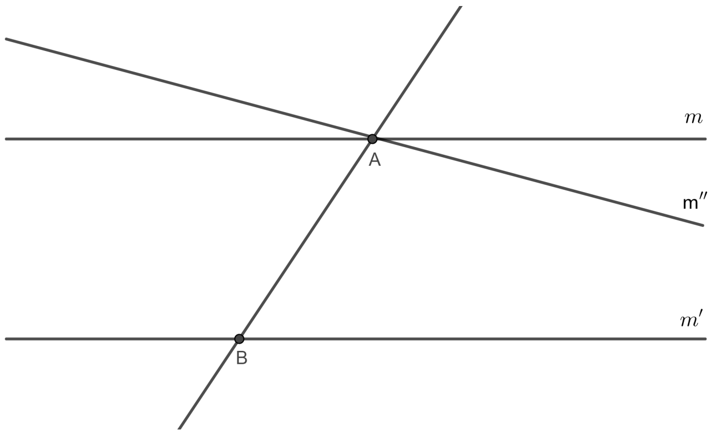
Observe que $\hat{1} = \hat{7}$, $\hat{2} = \hat{8}$, $\hat{3} = \hat{5}$ e $\hat{4} = \hat{6}$ por serem opostos pelo vértice. Como consequência, se $\hat{1} = \hat{2}$, então, todos os outros pares de ângulos correspondentes serão congruentes. Além disso, teremos que $\hat{3} + \hat{2} = 180°$. Inversamente, se $\hat{3} + \hat{2} = 180°$, então, $\hat{1} = \hat{2}$.

Proposição 6.4 ***A*** - *Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, obtivermos* $\hat{3}+\hat{2}=180°$, *então as retas são paralelas.*
B - *Se, ao cortarmos duas retas com uma transversal os ângulos correspondentes forem congruentes, então as retas são paralelas.*

O Axioma 13 permite-nos mostrar que a inversa desta proposição é também verdadeira.

Proposição 6.5 *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então, os ângulos correspondentes são congruentes.*

Demonstração: Sejam m e m' nos pontos A e B, respectivamente

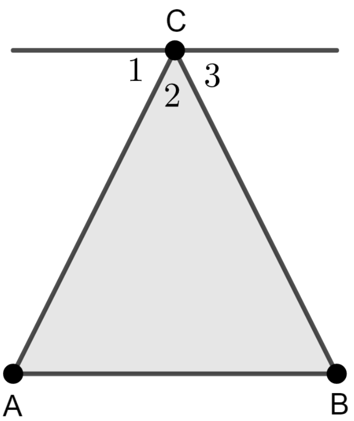


Considere m'' uma reta passando pelo ponto A e formando com a transversal quatro ângulos congruentes aos ângulos correspondentes formados por m' pela mesma transversal. De acordo com a proposição anterior, m' e m'' são paralelas. De acordo com a proposição 6.1 e o Axioma 13, m e m'' são coincidentes. ■

Vamos agora apresentar duas consequências importantes do Axioma 13.

Teorema 6.6 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.*

Demonstração: Considere o triângulo ABC. No ponto C considere uma reta paralela ao lado AB, como na figura e enumere os ângulos formados



Observe que $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=180°$. Note que AC é transversal a duas paralelas. Assim, $\hat{A}=\hat{1}$. Analogamente, $\hat{B}=\hat{3}$. Desta forma, $\hat{A}+\hat{B}+A\hat{C}B=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=180°$ ■
A proposição seguinte relaciona uma série de corolários imediatos deste teorema:

Corolário 6.7 *a) A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90°;*

b) Cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60°;

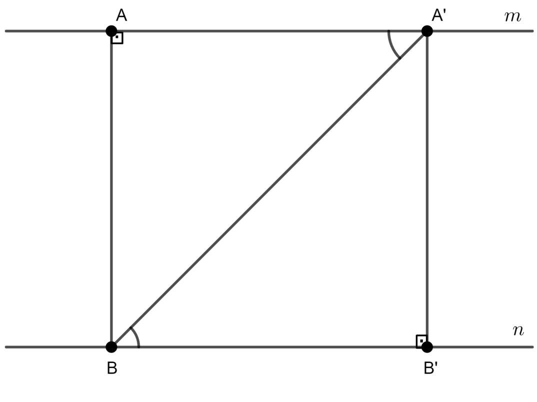
c) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.

d) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

A prova deste Corolário é deixado a cargo do leitor. O Teorema apresentado a seguir nos diz que retas são equidistantes.

Teorema 6.8 *Se m e n são retas paralelas, então, todos os pontos de m estão à mesma distância da reta n.*

Demonstração: Seja m e n retas paralelas. Sobre m, tome dois pontos A e A', e deles baixe perpendiculares à reta n. Sejam B e B' respectivamente os pés destas perpendiculares.



Devemos provar que $\overline{AB}=\overline{A'B'}$. Para isto, trace $A'B$ como indicado na figura acima.

Observe que $A\hat{A'}B=A'\hat{B}B$ e que $A'\hat{A}B=90°$
Considerando AB e $A'B$ transversais. Portanto os triângulos $AA'B$ e $B'BA'$ são triângulos retângulos com um ângulo agudo e hipotensa congruentes. Pelo Teorema 5.15 são congruentes.

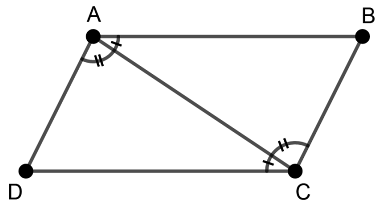
$$A\leftrightarrow B \qquad B\leftrightarrow A' \qquad A'\leftrightarrow B$$

Logo, $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ ■

Definição 6.9 *Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados são paralelos.*

Proposição 6.10 *Em um paralelogramo, lados e ângulos opostos são congruentes.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um paralelogramo



Trace a diagonal AC. Como AB e DC são paralelos, então $B\hat{A}C = A\hat{C}D$. Como AD e BC são paralelos $C\hat{A}D = A\hat{C}B$. Como, além disso, AC é comum aos triângulos, eles são congruentes pelo caso ALA. Logo,

$$\overline{AD} = \overline{BC},\ \overline{AB} = \overline{DC},\ \hat{B} = \hat{D} \text{ e } \hat{A} = \hat{C}.$$

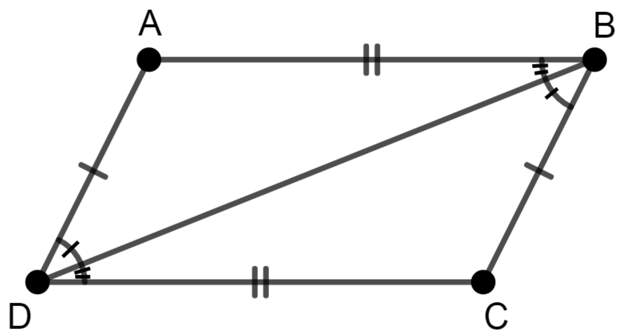
∎

Proposição 6.11 *As diagonais de um paralelogramo se intersectam em um ponto que é o ponto médio das duas diagonais.*

Os próximos dois resultados nos dão condições suficientes para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

Proposição 6.12 *Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então, o quadrilátero é um paralelogramo.*

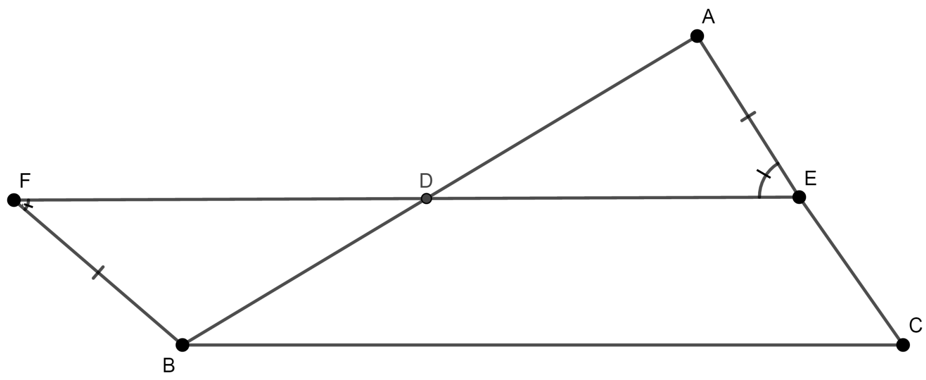
Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero em que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$



Trace a diagonal BD do quadrilátero. Os triângulos ABD e CDB são congruentes pelo caso LLL.
Logo, $C\hat{B}D = B\hat{D}A$ e $C\hat{D}B = D\hat{B}A$. A primeira igualdade garante que AD paralelo BC e a segunda que AB paralelo DC.
Logo, $ABCD$ é um paralelogramo. ∎

Proposição 6.13 *Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então, o quadrilátero é um paralelogramo.*

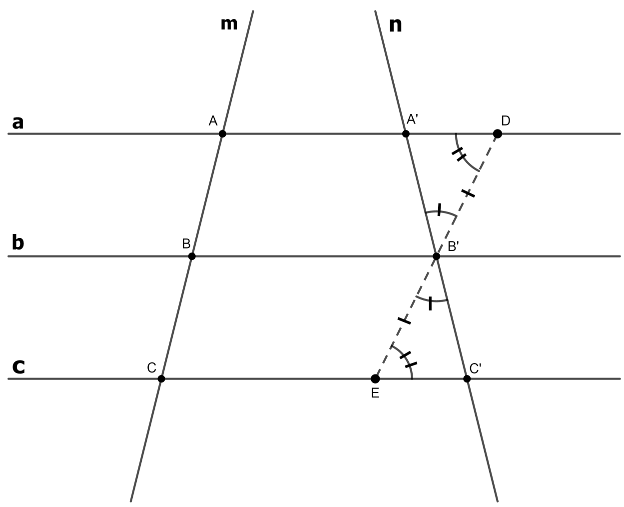
Teorema 6.14 *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado é tem metade de seu comprimento.*



Demonstração: Seja ABC um triângulo. Designe D ponto médio de AB e E ponto médio de AC. Devemos provar que DE é paralelo a BC e que $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Para isso, marque na semi-reta S_{ED} um ponto F, tal que $\overline{FD} = \overline{DE}$. Como $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $A\hat{D}E = F\hat{D}B$ (oposto pelo vértice) então os triângulos ADE e FDB são congruentes. Como consequência temos
$D\hat{F}B = A\hat{E}D$ e $\overline{FB} = \overline{AE}$. Logo, FB e EC são paralelos e tem o mesmo comprimento. Segue da Proposição 6.14 que o quadrilátero $FBCE$ é um paralelogramo. Portanto, $FE//BC$ e $\overline{FE} = \overline{BC}$. Como D é o ponto médio de FE, concluímos $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ■

Proposição 6.15 *Suponha que três retas paralelas, a, b e c, cortam as retas m e n nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. se o ponto B encontra-se entre A e C, então o ponto B' também encontra-se entre A' e C'. se $\overline{AB} = \overline{BC}$, então, também tem-se $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$*

Demonstração:



Sejam a, b e c retas paralelas e m e n resta que intersectam estas paralelas nos pontos A, B e C e A', B' e C', como indicado na figura acima. Se B está entre A e

C, então A e C estão, em semi-planos distintos relativamente a reta b. Observe que A e A' estão em um mesmo semi-plano determinado por b, já que a e b são retas paralelas e A e A' pertencem a reta a. Do mesmo modo, C e C' estão em um mesmo semi-plano determinado por b. Podemos, portanto, concluir que A' e C' estão em semi-planos distintos relativamente à reta b.

Logo, b intercepta o segmento $A'C'$ em um único ponto como B' é o ponto de interseção da reta n com a reta b'' e A' e C' pertencem a n, concluímos que o ponto de interseção de $A'C'$ com b é exatamente o ponto B'. Assim B' está no segmento $A'C'$ e está entre A' e C'.
Para demonstrar a segunda parte, trace pelo ponto B', uma reta paralela a m. Esta corta as retas a e c em pontos D e E, respectivamente.
Afirmação: Os triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ são congruentes. De fato, $DB'BA$ e $B'ECB$ são paralelogramos, então $\overline{DB} = \overline{AB}$ e $\overline{B'E} = \overline{BC}$. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$ por hipótese, então, concluímos que $\overline{DB'} = \overline{B'E}$.

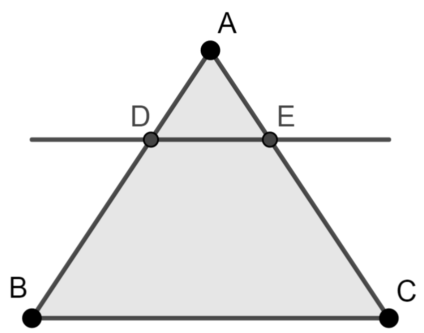
Observe que os ângulos $D\hat{B}A'$ e $E\hat{B}'C'$ são congruentes por serem oposto pelo vértice e $B'\hat{D}A'$ e $B'\hat{E}C'$ são também congruentes por serem ângulos correspondentes determinados por uma transversal cortadas pelas paralelas a e c. Isto prova a nossa afirmação. Da congruência de triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ decorre imediatamente que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$ ■

Esta proposição pode ser generalizada de maneira quase imediata para o caso em que as duas transversais cortam um número qualquer de paralelas.

Corolário 6.16 *Suponha que k retas paralelas $a_1, a_2, ..., a_k$ cortam duas retas m e n nos pontos $A_1, A_2, ..., A_k$ e nos pontos $A'_1, A'_2, ..., A'_k$, respectivamente. Se $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = ... = \overline{A_k - 1A_k}$ então, $\overline{A'_1A'_2} = \overline{A'_2A'_3} = ... = \overline{A_k - 1'A'_k}$*

Teorema 6.17 *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então, ela os divide na mesma razão.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Considere uma reta paralela ao lado BC que corta os lados AB e AC, respectivamente, nos pontos D e E, como na figura abaixo:



Devemos provar que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Para isto, tome um pequeno segmento AP_1 na semi-reta S_{AB}, de modo que as razões $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP_1}}$ e $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$ não sejam número inteiros.

Consideremos na semi-reta S_{AB} os pontos $P_2, P_3, ..., P_k$ tais que

$$k - \overline{AP_1} = \overline{AP_k}$$

Para todo $k \geq 2$. Então existem dois números inteiros m e n tais que:

$$\begin{array}{c} \text{D está entre } P_m \text{ e } P_{m+1} \\ \text{B está entre } P_n \text{ e } P_{n+1} \end{array}$$

Tem-se portanto:

$$\begin{array}{r} m \cdot \overline{AP_1} < \overline{AD} < (m+1) \cdot \overline{AP_1} \\ n \cdot \overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1) \cdot \overline{AP_1} \end{array}$$

É, então, simples concluir destas desigualdades que:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{m+1}{n} \tag{6.1}$$

Tracemos pelos pontos $P_1, P_2, ..., P_{n+1}$ retas paralelas a BC. Estas retas, segundo (6.17), cortam a semi-reta S_{AC} em pontos $Q_1, Q_2, ..., Q_{n+1}$, os quais também satisfazem a

$$k \cdot \overline{AQ_1} = \overline{AQ}$$

Para todo k, $2 \leq k \leq n+1$. Além disso, o ponto E encontra-se entre Q_m e Q_{m+1} e o ponto C entre Q_n e Q_{n+1}. O mesmo raciocínio feito acima pode ser repetido aqui, obtendo-se como resultado a desigualdade:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n} \tag{6.2}$$

As desigualdades (6.1) e (6.2) permite-nos concluir que

$$\left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} \tag{6.3}$$

Observe que, como $m \leq n$, temos:

$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{(m+1) \cdot (n+1) - m \cdot n}{n \cdot (n+1)} =$$

$$= \frac{m \cdot n + m + n + 1 - m \cdot n}{n \cdot (n+1)} \leq \frac{2 \cdot n + 2}{n \cdot (n+1)} = \frac{2 \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1)} = \frac{2}{n}$$

ou seja, as razões $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ e $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ diferem não mais do que por $\dfrac{2}{n}$. Quanto maior for o segmento AP_1 tanto maior será o número n e menor $\dfrac{2}{n}$. Como o lado esquerdo de (6.3) não depende de n, concluímos a prova. ■

Capítulo 7

Semelhança de Triângulos

Neste capítulo, vamos mostrar o terceiro caso de semelhança de triângulos, tendo em vista que este caso particular vai contribuir de maneira eficiente para o objetivo do nosso trabalho, que é a demonstração do Teorema de Pitágoras.

Definição 7.1 *Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.*

Com isto, queremos dizer que, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e se

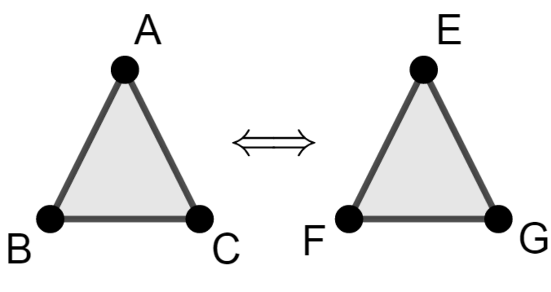
$$A \leftrightarrow E,\ B \leftrightarrow F \text{ e } C \leftrightarrow G$$

é a correspondência que estabelece a semelhança, então, valem simultaneamente as seguintes relações

$$\hat{A} = \hat{E},\ \hat{B} = \hat{F},\ \hat{C} = \hat{G}$$

e

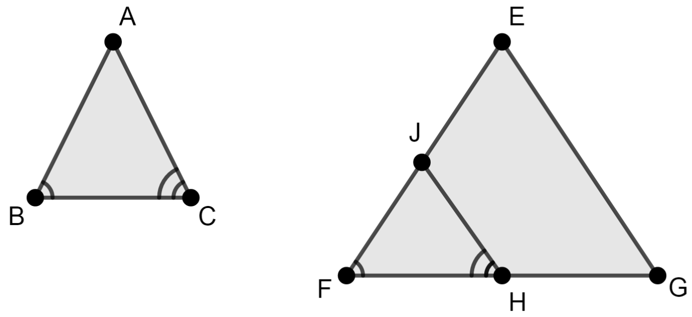
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}} \rightarrow \text{Razão de Proporcionalidade Entre os Dois Triângulos}$$



Observe que dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade 1. A reciproca também é verdadeira.

Teorema 7.2 *Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então, os triângulos são semelhantes.*

Demonstração: Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, segue que $\hat{C} = \hat{G}$, já que $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Desta forma, necessitamos mostrar que os lados dos triângulos são proporcionais.



Sobre a semi-reta S_{EF} marque um ponto H de modo que $\overline{AB} = \overline{EH}$. Agora por H considere uma reta paralela ao segmento FG e seja J a interseção dessa semi-reta como o lado EG. Com isso, segue que os triângulos ABC e EHJ são congruentes pelo caso ALA.

Pelo Teorema 6.18 segue que

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}}$$

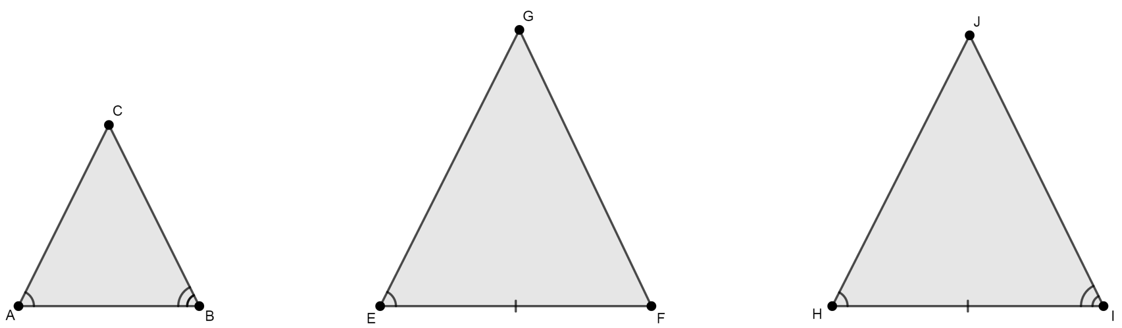
Pela congruência anterior $\overline{EH} = \overline{AB}$ e $\overline{EJ} = \overline{AC}$. Daí,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$$

A outra razão segue de forma análoga. ■

Teorema 7.3 *Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então, os triângulos são semelhantes.*

Demonstração:



Construa um triângulo HIJ que tenha $\overline{HI} = \overline{EF}$, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$.
Pelo Teorema 7.2, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes.
Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$$

Como $\overline{HI} = \overline{EF}$, a hipótese $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ e a igualdade acima implica que

$$\overline{HJ} = \overline{EG}$$

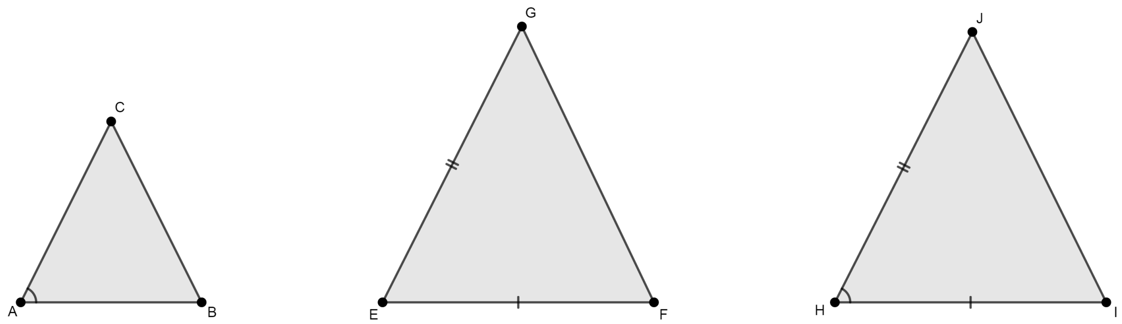
Como $\overline{HI} = \overline{EF}$ (por contradição) e $\hat{A} = \hat{E} = \hat{H}$, segue do caso LAL que os triângulos $EFG = HIJ$, isso conclui a prova já que ABC é semelhante a HIJ. ■

Teorema 7.4 (3º Caso Semelhança de Triângulo) *Se, em dois triângulos ABC e EFG, tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

então, os dois triângulos são semelhantes.

Demonstração:



Construa um triângulo HIJ que tenha $\hat{H} = \hat{A}$, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$.
Pelo Teorema 7.3 os triângulos ABC e HIJ são semelhantes. Assim

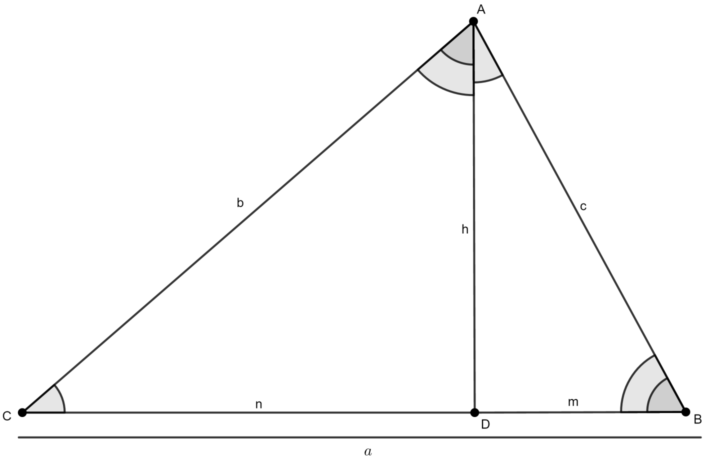
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}$$

Daí, pela hipótese do teorema, temos

$$\overline{FG} = \overline{IJ}$$

de onde segue que $EFG = HIJ$, pelo caso (LLL) isso finaliza a prova do teorema.
■

Seja ABC um triângulo com ângulo reto no vértice A. Trace a altura AD do vértice A ao lado BC.



Observe que sendo AD perpendicular à BC, então os triângulos CDA e BDA são retângulos em D. Desde que $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ e $\hat{B} + B\hat{A}D = 90°$, $B\hat{A}D = \hat{C}$ e $D\hat{A}C + \hat{C} = 90°$, $D\hat{A}C = \hat{B}$

Logo, pelo Teorema 7.2, os triângulos são ambos semelhantes ao triângulo ABC e semelhantes entre si.

- Da semelhança entre ADB e CDA:

$$\frac{m}{h} = \frac{c}{b} = \frac{h}{n}$$

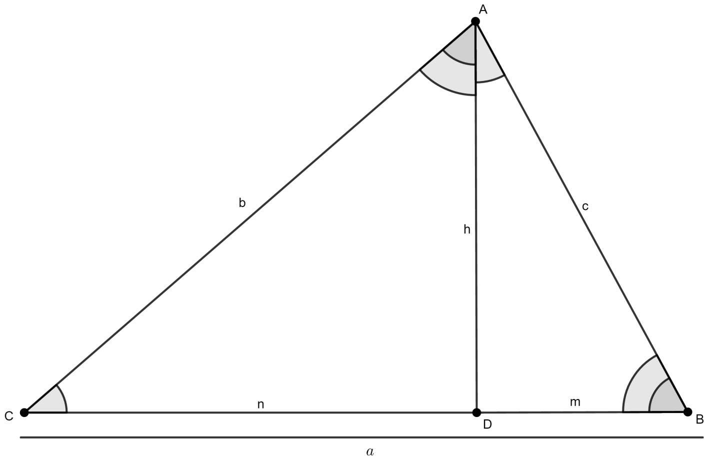
Daí,

$$h^2 = m \cdot n$$

com isso, provamos a seguinte proposição.

Proposição 7.5 *Em todo triângulo retângulo a altura do vértice do ângulo reto é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

Teorema 7.6 (Teorema de Pitágoras) *Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimento dos catetos.*



ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração: Da semelhança de ADB e ABC, temos

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a}$$

Da semelhança entre CDA e ABC, temos

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$$

Logo,

$$a \cdot m = c^2 \text{ e } a \cdot n = b^2$$

Daí,

$$a \cdot (m + n) = b^2 + c^2$$

Note que $m + n = a$, o que finaliza a prova. ■

O resultado seguinte é uma recíproca do Teorema de Pitágoras.

Proposição 7.7 *Um triângulo possui lados medindo a, b e c. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado que mede a.*

Demonstração: Construa um triângulo cujos catetos meçam exatamente b e c. Neste novo triângulo, de acordo com o Teorema de Pitágoras, a hipotenusa mede $\sqrt{a^2 + c^2} = a$. Logo, este novo triângulo retângulo tem lados medindo a, b e c. Pelo caso LLL, esse triângulo é congruente ao original e, portanto, o triângulo original é retângulo e com hipotenusa a. ■

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, João Lucas Marques.: *Geometria Euclidiana Plana.* 2ª ed., Fortaleza, Sociedade Brasileira de Matemática, (1995) p.17.

[2] Roque, Tatiana.: *História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas.* Rio de Janeiro, Zahar, (2012).