

Embedding Komplemen Graph Sikel

Embedding Cycle Graphs Complements

Lilie Susilowati, Hendy & Yayuk Wayuni
Departemen Matematika FMIPA Universitas Airlangga

ABSTRACT

A graph is embeddable on a surface if it can be drawn on that surface without any edges intersect. The cycle graphs can always be embedded on the plane and the torus, but this is not occurred for their complements. We prove that the maximum order of cycle graphs such that their complements still can be embedded on the plane is 6. But, the maximum order of cycle graphs such that their complements still can be embedded on the torus is 9. Also, the crossing number of complements of cycle graphs which can't be embedded on the plane with minimum order will be presented.

Keywords: Embedding,, graph sikel.

PENDAHULUAN

Embedding suatu graph adalah penggambaran graph pada sebuah permukaan (surface) tanpa memuat perpotongan garis. Jika suatu graph dapat digambarkan pada bidang tanpa memuat perpotongan garis atau dengan kata lain dapat di-embed ke bidang maka graph tersebut disebut graph planar.

Karakteristik dari graph planar telah diketahui sebelumnya, diantaranya yaitu setiap subgraph dari graph tersebut planar (Bondy & Murty 1982), graph tersebut tidak memuat subgraph yang merupakan subdivisi dari salah satu diantara K_5 dan $K_{3,3}$ (Chartrand & Lesniak 1996) atau Jika $G(n,m)$ adalah graph planar dengan $n \geq 3$ maka $m \leq 3n - 6$ (Chartrand & Lesniak 1996).

Jika suatu graph telah diketahui nonplanar maka penggambaran graph tersebut pada bidang akan memuat perpotongan garis. Permasalahan yang timbul adalah berapa minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan. Bilangan perpotongan (*crossing number*) dari graph G dinotasikan dengan $\nu(G)$ adalah minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran graph G pada bidang. Dengan demikian graph G planar jika dan hanya jika $\nu(G) = 0$ (Chartrand & Lesniak 1996).

Pembahasan mengenai embedding suatu graph tidak terbatas hanya pada bidang namun terdapat permukaan lain yang menarik untuk diteliti. Salah satunya adalah *embedding*

suatu graph pada torus. Torus adalah permukaan yang memiliki bentuk menyerupai donat (Chartrand & Lesniak 1996). Torus dapat disajikan dalam ruang berdimensi dua yaitu dengan melakukan pemotongan secara vertikal dan horisontal. Hal ini bertujuan untuk mempermudah penggambaran suatu graph pada torus (Woodcock 2007).

Suatu graph dikatakan toroidal jika graph tersebut dapat di-embed ke torus. Komplemen graph G dinotasikan dengan \overline{G} adalah graph yang himpunan titiknya sama dengan himpunan titik pada G dan dua titik pada \overline{G} terhubung jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung pada G . Graph sikel adalah graph yang berbentuk satu sikel (Chartrand & Oellerman 1993). Graph sikel dengan order n dinotasikan dengan C_n merupakan graph planar dan graph toroidal karena berapapun ordernya C_n selalu dapat di-embed ke bidang maupun ke torus, namun komplemennya belum tentu demikian.

Dalam tulisan ini akan dibahas order maksimal dari graph sikel sehingga komplemennya tetap planar maupun toroidal. Selanjutnya akan dibahas bilangan perpotongan dari komplemen graph sikel nonplanar dengan order minimal.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Embedding komplemen graph sikel pada bidang

Sebelum membahas embedding $\overline{C_n}$ pada bidang, akan dibahas hubungan antara komplemen graph sikel berorder n dengan komplemen graph sikel berorder $n-1$ pada Lemma 2.1.

Lemma 2.1 Untuk $n \geq 4$, $\overline{C_{n-1}}$

merupakan subgraph dari $\overline{C_n}$.

Bukti: misalkan $V(C_{n-1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$.

$\overline{C_{n-1}}$ didapatkan dengan menghubungkan setiap pasangan titik $v_i, v_j \in V(C_{n-1})$ yang tidak terhubung pada C_{n-1} dan setiap pasangan titik yang terhubung pada C_{n-1} menjadi tidak terhubung. Selanjutnya graph $\overline{C_n}$ didapatkan

dengan menambahkan satu titik v_n pada $\overline{C_{n-1}}$ dengan menghubungkan titik v_n dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_{n-1}}) \setminus \{v_1, v_{n-1}\}$ serta titik v_1 dan v_{n-1} yang semula tidak terhubung menjadi

terhubung di $\overline{C_n}$. Dengan demikian jelas bahwa $\forall v_i \in V(\overline{C_{n-1}}), i = 1, 2, \dots, n-1$,

berlaku $v_i \in V(\overline{C_n})$. Demikian pula

$\forall v_i v_j \in E(\overline{C_{n-1}})$ dengan $i, j = 1, 2, \dots, n-1$,

$v_i v_j \in E(\overline{C_n})$. Sehingga

$V(\overline{C_{n-1}}) \subset V(\overline{C_n})$ dan $E(\overline{C_{n-1}}) \subset E(\overline{C_n})$.

Teorema 2.2 Untuk $3 \leq n \leq 6$, graph $\overline{C_n}$ merupakan graph planar.

Bukti : Untuk membuktikan suatu graph merupakan graph planar, cukup ditunjukkan bahwa graph tersebut dapat digambarkan kembali pada bidang tanpa memuat perpotongan garis. Pada lampiran 1 terlihat bahwa $\overline{C_n}$ dengan $3 \leq n \leq 6$ dapat digambarkan pada bidang tanpa memuat

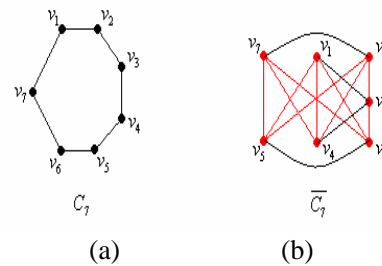
perpotongan garis, dengan demikian $\overline{C_n}$ planar untuk $3 \leq n \leq 6$.

Embedding $\overline{C_n}$ pada bidang dengan $3 \leq n \leq 6$ dalam bentuk gambar disajikan dalam lampiran 1.

Teorema 2.3 Untuk $n \geq 7$, graph $\overline{C_n}$ merupakan graph nonplanar.

Bukti : Dari Gambar 1(b) terlihat bahwa $\overline{C_7}$ memuat subdivisi dari $K_{3,3}$ dengan

demikian $\overline{C_7}$ nonplanar. Karena $\overline{C_n}$ dengan $n \geq 8$ selalu memuat $\overline{C_7}$ maka $\overline{C_n}$ nonplanar untuk $n \geq 8$.



Gambar 1. C_7 (a) dan komplemennya (b).

Embedding komplemen graph sikel pada torus

Graph $\overline{C_n}$ dengan $3 \leq n \leq 6$ sudah terbukti planar. Karena setiap graph planar dapat di-embed ke torus maka $\overline{C_n}$ dengan $3 \leq n \leq 6$ merupakan graph toroidal. Selanjutnya akan dibahas *embedding* $\overline{C_n}$ pada torus dengan $n \geq 7$.

Teorema 2.4 Untuk $7 \leq n \leq 9$, graph $\overline{C_n}$ merupakan graph toroidal.

Bukti : Untuk membuktikan suatu graph merupakan graph toroidal cukup ditunjukkan bahwa graph tersebut dapat digambarkan kembali pada torus tanpa memuat perpotongan

garis. Dari lampiran 2 terlihat bahwa $\overline{C_n}$ dengan $7 \leq n \leq 9$ dapat digambarkan pada torus tanpa memuat perpotongan garis. Dengan demikian untuk $7 \leq n \leq 9$, graph $\overline{C_n}$ merupakan graph toroidal.

Embedding $\overline{C_n}$ pada torus dengan $7 \leq n \leq 9$ dalam gambar disajikan pada lampiran 2.

Teorema 2.5 Jika G toroidal maka setiap subgraph dari G toroidal.

Bukti : Misalkan H adalah subgraph dari G yang nontoroidal, maka penggambaran H pada torus memuat perpotongan garis. Karena H adalah subgraph dari G maka penggambaran G pada torus akan memuat perpotongan garis sekurang-kurangnya sebanyak perpotongan garis yang dihasilkan oleh graph H . Dengan demikian G nontoroidal.

Akibat 2.6 Untuk $n \geq 7$, graph $\overline{C_n}$ toroidal jika dan hanya jika terdapat graph hasil *embedding* $\overline{C_{n-1}} + v_1v_{n-1}$ pada torus yang memuat region dengan batas S sedemikian hingga $\{v_2, v_3, \dots, v_{n-2}\} \subseteq V(S)$.

Teorema 2.7 Graph $\overline{C_n}$ dengan $n \geq 10$ adalah graph nontoroidal.

Bukti : Dari Lampiran 2 terlihat bahwa batas setiap region yang dihasilkan pada *embedding*

$\overline{C_9}$ pada torus merupakan segitiga. Dengan demikian penambahan garis v_1v_9 pada graph $\overline{C_9}$ akan menghasilkan graph yang nontoroidal. Karena graph $\overline{C_9} + v_1v_9$ tidak dapat digambarkan pada torus tanpa memuat perpotongan garis maka graph $\overline{C_9} + v_1v_9$ merupakan graph nontoroidal. Berdasarkan akibat 2.6 maka graph $\overline{C_{10}}$ merupakan graph nontoroidal. Karena graph $\overline{C_{10}}$ merupakan subgraph dari setiap graph $\overline{C_n}$ dengan

$n > 10$, maka graph $\overline{C_n}$ dengan $n > 10$ merupakan graph nontoridal.

Bilangan perpotongan (crossing number) dari komplemen graph siklus nonplanar

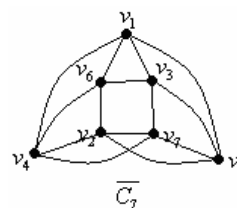
Dari subbab 2.1 dapat disimpulkan bahwa komplemen graph siklus dengan order lebih besar atau sama dengan tujuh merupakan graph nonplanar. Selanjutnya akan dibahas bilangan perpotongan yang dimiliki Komplemen graph siklus nonplanar dengan order minimal yaitu 7, 8 dan 9.

Proposisi 2.8 Graph $\overline{C_n}$ merupakan graph $n - 3$ regular .

Proposisi 2.9 Banyaknya garis pada $\overline{C_n}$ adalah $\frac{n(n-3)}{2}$.

Proposisi 2.10 Bilangan perpotongan dari komplemen graph siklus dengan order 7 adalah 1.

Bukti : Berdasarkan teorema 2.3 $\overline{C_7}$ nonplanar, dengan demikian didapatkan $\nu(\overline{C_7}) \geq 1$. Karena $\overline{C_7}$ dapat digambarkan pada bidang dengan memuat 1 perpotongan garis (Gambar 2) maka terbukti bahwa $\nu(\overline{C_7}) = 1$.



Gambar 2. Embedding $\overline{C_7}$ pada bidang

Proposisi 2.11 Bilangan perpotongan dari komplemen graph siklus dengan order 8 adalah 2.

Bukti : Berdasarkan teorema 2.3 $\overline{C_8}$ nonplanar, dengan demikian didapatkan $\nu(\overline{C_8}) \geq 1$. Misalkan pada penggambaran $\overline{C_8}$ pada bidang memuat c perpotongan, dimana

jelas bahwa $c \geq 1$. Pada setiap perpotongan ditempatkan satu titik baru sehingga didapatkan sebuah graph bidang terhubung baru misalkan graph N . Graph N merupakan graph planar yang memuat $8+c$ titik. Berdasarkan Proposisi

2.9 $\overline{C_8}$ memuat 20 garis, dengan demikian graph N memuat $20+2c$ garis. Karena graph N merupakan graph planar maka berlaku :

$$20 + 2c \leq 3(8 + c) - 6$$

$$20 + 2c \leq 24 + 3c - 6$$

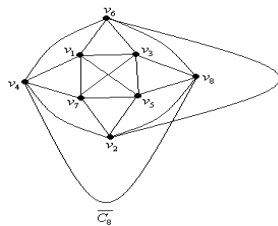
$$20 + 2c \leq 18 + 3c$$

$$2 \leq c$$

Dari sini diperoleh bahwa bilangan perpotongan bagi $\overline{C_8}$ bernilai tidak kurang dari

2. Karena $\overline{C_8}$ dapat digambarkan pada bidang dengan memuat 2 perpotongan garis (Gambar

3) maka terbukti bahwa $v(\overline{C_8}) = 2$.



Gambar 3. Embedding $\overline{C_8}$ pada bidang

Selanjutnya diperoleh bilangan perpotongan bagi $\overline{C_9}$ adalah 9 dengan melibatkan penggambaran $\overline{C_8}$ yang memuat dua perpotongan garis pada Gambar 3 diatas.

Teorema 2.12 Bilangan perpotongan bagi komplemen graph sikel dengan order 9 adalah 9.

Bukti : Berdasarkan teorema 2.3 $\overline{C_9}$ nonplanar, dengan demikian didapatkan $v(\overline{C_9}) \geq 1$. Misalkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ pada bidang memuat c perpotongan, dimana jelas bahwa $c \geq 1$. Pada setiap perpotongan ditempatkan satu titik baru sehingga didapatkan

sebuah graph bidang terhubung baru misalkan graph W . Graph W merupakan graph planar yang memuat $9 + c$ titik. Berdasarkan

Proposisi 2.9 $\overline{C_9}$ memuat 27 garis, dengan demikian graph W memuat $27+2c$ garis. Sehingga berlaku :

$$27 + 2c \leq 3(9 + c) - 6$$

$$27 + 2c \leq 27 + 3c - 6$$

$$6 \leq c$$

Dari sini diperoleh bahwa bilangan perpotongan bagi $\overline{C_9}$ tidak kurang dari 6.

Dilain pihak graph $\overline{C_9}$ didapatkan dengan cara menambahkan satu titik yaitu v_9 pada $\overline{C_8}$ kemudian menghubungkan v_9 dengan

$v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$, serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung. Untuk mendapatkan bilangan

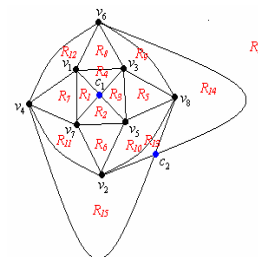
perpotongan bagi $\overline{C_9}$ dipilih penggambaran

$\overline{C_8}$ dengan jumlah perpotongan garis yang minimum. Berdasarkan Proposisi 2.11 diperoleh bahwa minimum jumlah perpotongan

garis bagi $\overline{C_8}$ adalah 2. Pada Gambar 3

terlihat bahwa penggambaran $\overline{C_8}$ pada bidang memuat 2 perpotongan. Selanjutnya pada

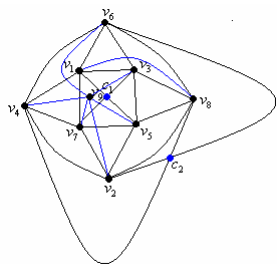
penggambaran $\overline{C_8}$ tersebut ditempatkan titik baru yaitu c_1 dan c_2 pada masing-masing perpotongan, sehingga dihasilkan graph bidang baru misalkan graph Q yang memuat 16 region (Gambar 4).



Gambar 4. Region-region pada $\overline{C_8}$

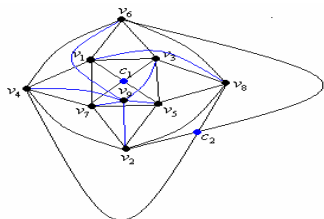
Selanjutnya titik v_9 dapat berada pada salah satu diantara 15 region atau berada pada exterior region R_{16} .

Misalkan v_9 berada pada R_1 . Pada Gambar 5 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 8 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $8+2=10$.



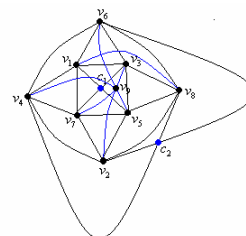
Gambar 5. Penambahan titik v_9 pada R_1

Misalkan v_9 berada pada R_2 . Pada Gambar 6 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 8 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $8+2=10$.



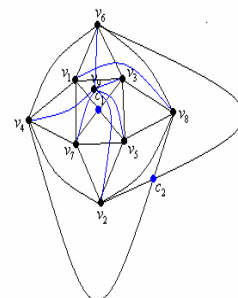
Gambar 6. Penambahan titik v_9 pada R_2

Misalkan v_9 berada pada R_3 . Pada Gambar 7 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 10 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $10+2=12$.



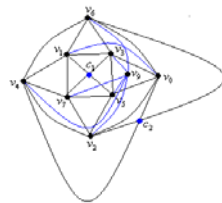
Gambar 7. Penambahan titik v_9 pada R_3

Misalkan v_9 berada pada R_4 . Pada Gambar 8 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 10 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $10+2=12$.



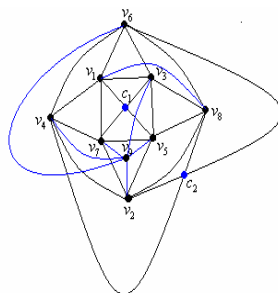
Gambar 8. Penambahan titik v_9 pada R_4

Misalkan v_9 berada pada R_5 . Pada Gambar 9 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 9 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $9+2=11$.



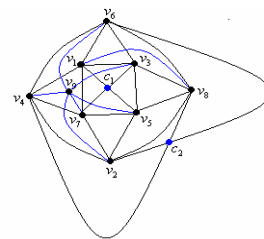
Gambar 9. Penambahan titik v_9 pada R_5

Misalkan v_9 berada pada R_6 . Pada Gambar 10 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 7 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $7+2=9$.



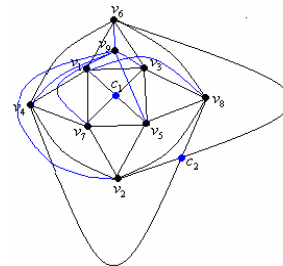
Gambar 10. Penambahan titik v_9 pada R_6

Misalkan v_9 berada pada R_7 . Pada Gambar 11 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 7 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $7+2=9$.



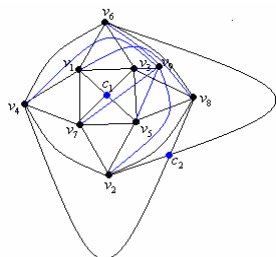
Gambar 11. Penambahan titik v_9 pada R_7

Misalkan v_9 berada pada R_8 . Pada Gambar 12 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 11 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $11+2=13$.



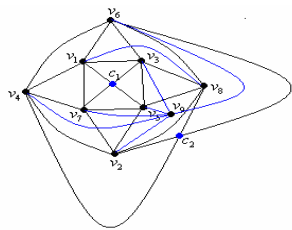
Gambar 12. Penambahan titik v_9 pada R_8

Misalkan v_9 berada pada R_9 . Pada Gambar 13 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 11 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $11+2=13$.



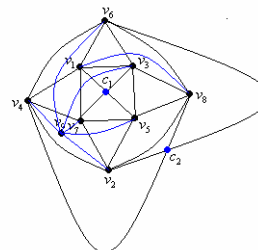
Gambar 13. Penambahan titik v_9 pada R_9

Misalkan v_9 berada pada R_{10} . Pada Gambar 14 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 7 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $7+2=9$



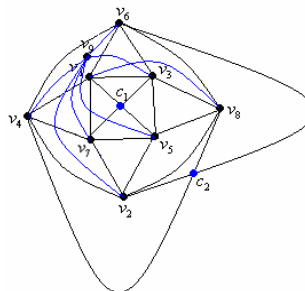
Gambar 14. Penambahan titik v_9 pada R_{10}

Misalkan v_9 berada pada R_{11} . Pada Gambar 15 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 7 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $7+2=9$.



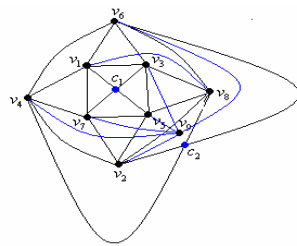
Gambar 15. Penambahan titik v_9 pada R_{11}

Misalkan v_9 berada pada R_{12} . Pada Gambar 16 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 9 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $9+2=11$.



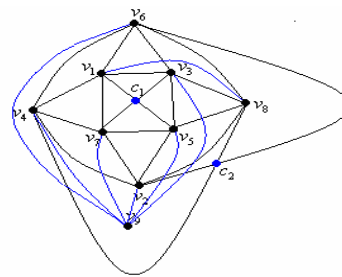
Gambar 16. Penambahan titik v_9 pada R_{12}

Misalkan v_9 berada pada R_{13} . Pada Gambar 17 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 8 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $8+2=10$.



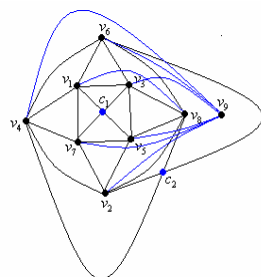
Gambar 17. Penambahan titik v_9 pada R_{13}

Misalkan v_9 berada pada R_{15} . Pada Gambar 19 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 8 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $8+2=10$.



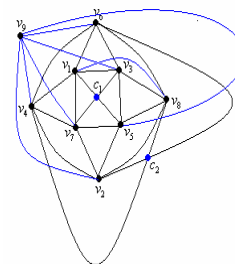
Gambar 19. Penambahan titik v_9 pada R_{15}

Misalkan v_9 berada pada R_{14} . Pada Gambar 18 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 10 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $10+2=12$.



Gambar 18. Penambahan titik v_9 pada R_{14}

Misalkan v_9 berada pada *exterior region* R_{16} . Pada Gambar 20 terlihat bahwa jika v_9 ditambahkan pada graph Q kemudian titik tersebut dihubungkan dengan setiap $v_i \in V(\overline{C_8}) \setminus \{v_1, v_8\}$ serta titik v_1 dan v_8 yang semula tidak terhubung menjadi terhubung, akan dihasilkan 10 perpotongan garis yang minimum. Dengan demikian minimum jumlah perpotongan garis yang dihasilkan pada penggambaran $\overline{C_9}$ adalah $10+2=12$.



Gambar 20. Penambahan titik v_9 pada R_{16}

Dari kemungkinan-kemungkinan di atas diperoleh kesimpulan yaitu :

Sembilan perpotongan garis yang minimum dihasilkan pada penempatan v_9 di R_6, R_7, R_{10}, R_{11} (empat daerah).

Sepuluh perpotongan garis yang minimum dihasilkan pada penempatan v_9 di R_1, R_2, R_{13}, R_{15} (empat daerah).

Sebelas perpotongan garis yang minimum dihasilkan pada penempatan v_9 di R_5, R_{12} (dua daerah).

Dua belas perpotongan garis yang minimum dihasilkan pada penempatan v_9 di R_3, R_4, R_{14}, R_{16} (empat daerah).

Tiga belas perpotongan garis yang minimum dihasilkan pada penempatan v_9 di R_8, R_9 (dua daerah).

Terlihat bahwa minimum jumlah perpotongan garis pada penggambaran $\overline{C_9}$ pada bidang adalah 9 yaitu apabila titik v_9 ditempatkan pada R_6 atau R_7 atau R_{10} atau R_{11} .

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dari hasil pembahasan diatas diperoleh kesimpulan :

Order maksimal dari C_n sehingga komplemennya tetap planar adalah 6.

Order maksimal dari C_n sehingga komplemennya tetap toroidal adalah 9.

$$v(\overline{C_7}) = 1, v(\overline{C_8}) = 2, v(\overline{C_9}) = 9$$

Saran

Pembahasan *embedding* komplemen graph sikel pada tulisan ini dibatasi pada dua jenis permukaan yaitu pada bidang dan torus. Oleh karena itu pembahasan dapat dikembangkan lebih lanjut dengan melakukan penelitian pada jenis permukaan lain seperti *embedding* pada 2-torus maupun *embedding* pada mobius strip. Pembahasan tentang bilangan perpotongan dari

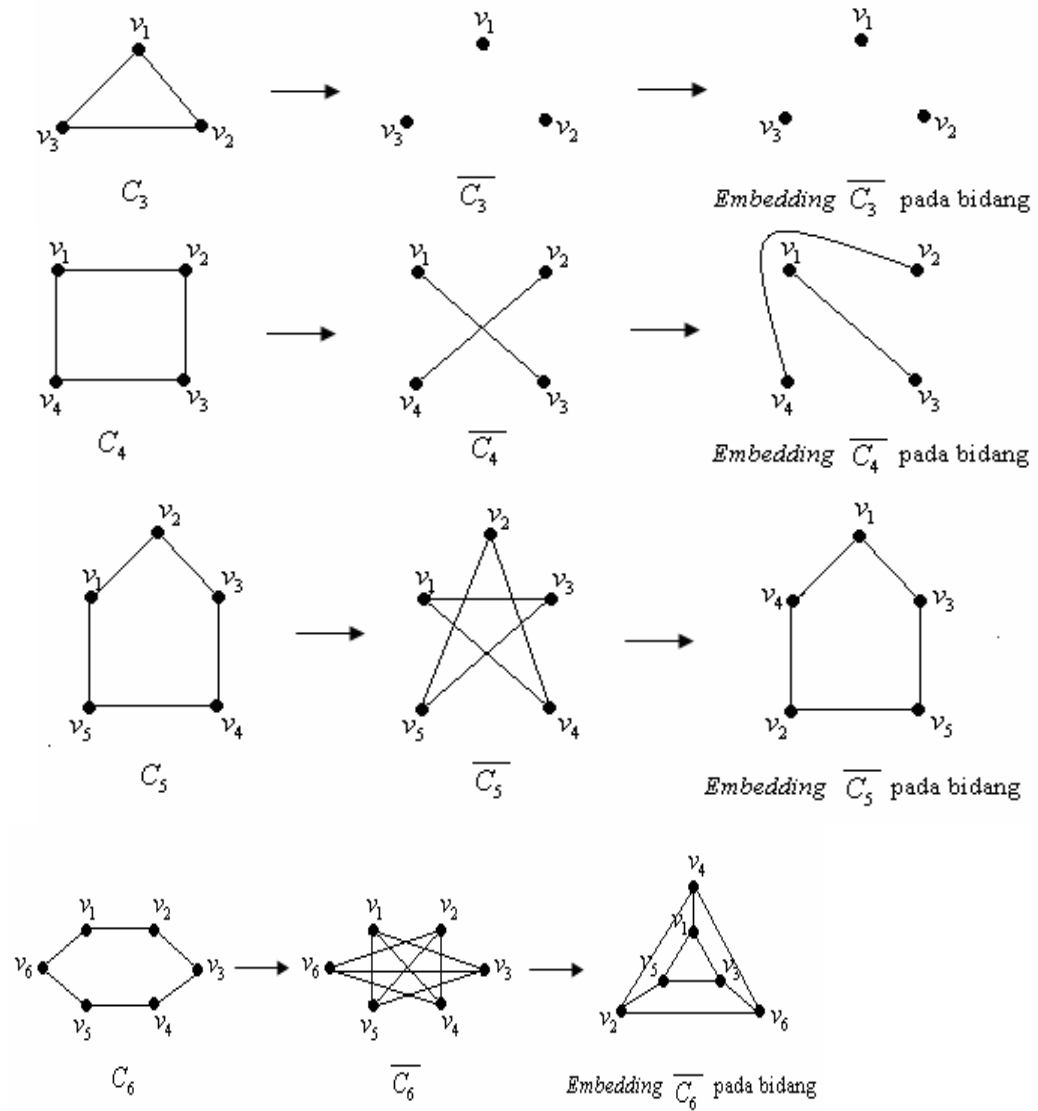
komplemen graph sikel $\overline{C_n}$ pada tulisan ini terbatas pada $7 \leq n \leq 9$. Pembahasan ini dapat dilanjutkan dengan membahas Bilangan

perpotongan dari Komplemen graph sikel $\overline{C_n}$ untuk $n > 9$. Selain itu dapat dibahas *toroidal crossing number* dari Komplemen graph sikel nontoroidal.

DAFTAR PUSTAKA

- Bondy JA & Murty USR. 1982. *Graph Theory with Applications*. NorthHolland. New York.
- Chartrand G & Lesniak L. 1996. *Graphs and Digraphs*. 3rd edn. Chapman and Hall, London.
- Chartrand G & Oellerman OR. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. McGraw-Hill Inc, Canada.
- Woodcock RJ. 2004. *A Faster Algorithm for Torus Embedding*, https://dspace.library.uvic.ca:8443/dspace/bitstream/1828/130/1/jwoodcock_thesis.pdf, 12 Juli 2007.

Lampiran 1: *Embedding* \overline{C}_n pada bidang dengan $3 \leq n \leq 6$



Lampiran 2: Embedding $\overline{C_n}$ dengan $7 \leq n \leq 9$ pada torus

