# Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Braunmühl, Anton von** (1853–1908)

Titel: **Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung**

Quelle: Atti del [2.] Congresso Internationale di Scienze Storiche : (Roma, 1–9 Aprile 1903).
Band 12 (1904), S. 271-284
Seite 271 – 284.

Bisher sei noch nicht beachtet worden — so sagt der Verf. —, daß Newton nicht nur binomische Integrale behandelt hat, die sich durch endliche Ausdrücke darstellen lassen, sondern auch solche, bei denen eine solche Darstellung nicht möglich ist, ja auch das sei bis jetzt übersehen worden, daß er schon 1671 auch die allgemeinen trinomischen Integrale sehr wohl zu behandeln verstand und ihren zweifachen Charakter erkannte. Newtons Verfahren wird quellenmäßig aufgezeigt und berichtet, wie sein Schüler R. Cotes jene Untersuchungen weitergeführt hat, indem er, die geometrische Konstruktion und die Reihendarstellung verlassend, jene Integrale rein rechnerisch behandelte, unter Verwendung der logarithmischen und trigonometrischen Tafeln, d.h. sie auf logarithmische und Kreisfunktionen zurückführte (1712 u. 1722).

(Rezension von Peter Treutlein (1845–1912) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 35, 1904, S. 60)

# ATTI

DEL

# CONGRESSO INTERNAZIONALE

DI

# SCIENZE STORICHE

(ROMA, 1-9 APRILE 1903)

## VOLUME XII

Atti della Sezione VIII: STORIA DELLE SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE, NATURALI E MEDICHE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1904

2nd Congress

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1972

XXXI.

# BEITRAEGE ZUR GESCHICHTE DER INTEGRALRECHNUNG.

Comunicazione del prof. A. von BRAUNMÜHL.

Die Methode, deren sich Newton bediente, um Integrationen auszuführen, bestand bekanntlich darin, dass er die zu integrierende Funktion in eine konvergente Potenzreihe entwickelte und dann den seit Fermat und Wallis bekannten Satz über die Integration einer Potenz anwandte, weshalb er denselben auch an die Spitze seiner ersten Abhandlung « De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas » stellte, die aus den Jahren 1665-66 stammte. Aber dennoch hat es Newton auch verstanden, in gewissen Fällen Integrale in geschlossener Form anzugeben, wie dies die Leibnizsche Schule in erster Linie anstrebte. Bemerkungen hierüber finden sich mehrfach in seinen Schriften, so z. B. in seiner umfangreichen, längstens Ende 1671 druckfertigen, aber erst 1736 gedruckten Abhandlung « Methodus fluxionum et serierum infinitarum » worin er zwei Tafeln für Integrale angibt, die sich teils in geschlossener Form darstellen, teils, nach Newtons Ausdrucksweise, auf die Quadratur von Kegelschnitten zurückführen lassen. Sieht man sich diese Tafeln etwas näher an, so erkennt man in der Hauptsache drei verschiedene Gattungen von Integralen, die hier behandelt sind, nämlich Integrale rational-gebrochener Funktionen, binomische Integrale und Integrale von der Form $\int f(x, \sqrt{e + fx + gx^2})\, dx$, die wir kurz als trinomische bezeichnen wollen.

Dass Newton bezüglich der binomischen Integrale schon frühzeitig erkannte, in welchen Fällen sie sich durch endliche Ausdrücke darstellen lassen, hat Herr M. Cantor bereits angeführt (¹). Diesbezügliche Bemerkungen Newtons finden sich in dem zweiten für Leibniz

(¹) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* III₂, 1901, 185-186.

bestimmten Briefe vom 24. Oktober 1676 (1). Dagegen wurde die Frage, wie er binomische Integrale, bei denen eine solche Darstellung nicht möglich ist, behandelte, soviel uns bekannt, bisher nicht eingehend untersucht, noch weniger aber scheint bemerkt worden zu sein (2), *dass Newton schon* 1671 *auch die allgemeinen trinomischen Integrale sehr wohl zu behandeln verstand und ihren zweifachen Charakter erkannte.* Wir wollen uns daher im folgenden mit einer kurzen Besprechung des von Newton zu diesem Zwecke eingeschlagenen Verfahrens beschäftigen und dann zeigen, wie seine Untersuchungen von seinem Schüler und Freund Roger Cotes weitergeführt wurden. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, die noch zu wenig beachtete *Harmonia mensurarum* dieses Gelehrten genauer ins Auge zu fassen.

An drei Stellen Newtonscher Schriften finden sich *trinomische Integrale* besprochen: in der « Methodus fluxionum » von 1671, in dem erwähnten Briefe an Leibniz von 1676 und in der « Quadratura curvarum », die 1706 publiziert wurde; doch brauchen wir nur die älteste Schrift ins Auge zu fassen, da in allen dieselben beiden Typen behandelt werden, die sich in der Form darstellen lassen:

$$a\int z^{n\eta-1}\sqrt{Z}\,dz \quad \text{und} \quad a\int \frac{z^{(n+1)\eta-1}}{\sqrt{Z}}\cdot dz,$$

wo $n=0,1,2,3$, $Z=e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$ ist und $\eta$ eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bedeutet. Die beigefügte Konstante $a$ haben wir, um Verwechslungen mit unserem Differentialzeichen zu vermeiden, an Stelle des von Newton stets gebrauchten Buchstabens $d$ gesetzt.

Newton erkennt nun zunächst, dass die Auswertung dieser Integrale, wenn man dieselben als bestimmte auffasst, auf die Quadratur von Flächenstücken zurückkommt, die von dem *Bogen eines Kegelschnittes*, der Abzissenaxe und zwei Ordinaten eingeschlossen werden. Setzt man nämlich mit Newton $z^{\eta}=x$, so gehen sie über in:

$$\text{(I)}\ \frac{a}{\eta}\int x^{n-1}\sqrt{X}\,dx \quad \text{und} \quad \text{(II)}\ \frac{a}{\eta}\int\frac{x^{n}\,dx}{\sqrt{X}},$$

wo $X=e+fx+gx^2$ bedeutet, und $y^2=e+fx+gx^2$ ist die Gleichung eines Kegelschnittes, der für $g>0$ eine Hyperbel, für $g<0$

(1) Opuscula I. Newtoni, Ed. Joh. Castillioneus, 1744, 335-338.

(2) Herr Cantor scheint die erstmalige Behandlung derselben Cotes zuzuerkennen. Vgl. a. a. O. $\text{III}_2$ 415.

eine Ellipse darstellt. *Diese beiden Fälle unterscheidet Newton stets*, indem er in seiner Zusammenstellung der Integralwerte auf die Figuren von Ellipse un Hyperbel verweist. Das einfachste dieser Integrale, das aus I für $n=1$ erhalten wird und das zwischen bestimmten Grenzen genommen direkt ein Flächenstück des Kegelschnittes darstellt, gibt er in der Form $\frac{a}{\eta}s = t = \frac{a}{\eta} \times \alpha\text{GDB}$, wobei $\alpha\text{GDB} = s$ eine der Flächen in Fig. 1. oder 2. bedeutet; auf dieses Integral $s = \int \sqrt{X}\,dx$ werden dann alle übrigen zurückgeführt.

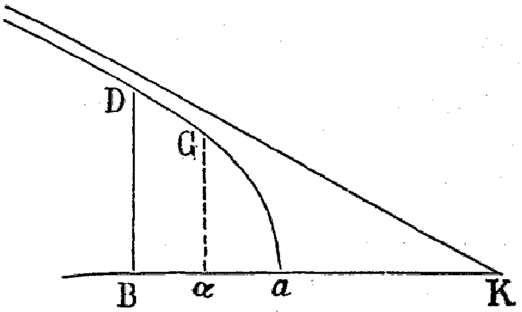


Fig. 1.

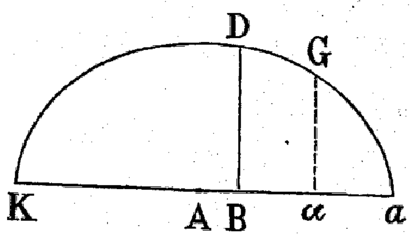


Fig. 2.

Die Frage, wie diese Reduktion ausgeführt wird, löst sich, wenn man die beiden Probleme VII und VIII (¹), auf welche Newton selbst verweist, betrachtet. Das erstere Problem lautet: « Beliebig viele Kurven zu finden, deren Flächen durch eine endliche Gleichung dargestellt werden können », und wird natürlich gelöst durch Differentiation willkürlich gewählter Funktionen. Als Beispiel führt er an:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^3 = 3x\sqrt{a^2+x^2}\,.$$

Diese Methode konnte ihm also direkt die beiden notwendigen Rekursionsformeln liefern:

$$\text{a)} \qquad \frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\sqrt{X^3}\right) =$$

$$= (n+2)\,gx^n\sqrt{X} + \frac{2n+1}{2}fx^{n-1}\sqrt{X} + (n-1)\,ex^{n-2}\sqrt{X}\,,$$

$$\text{b)} \qquad \frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\sqrt{X}\right) = \frac{ngx^n}{\sqrt{X}} + \frac{2n-1}{2}f\frac{x^{n-1}}{\sqrt{X}} + (n-1)\,e\frac{x^{n-2}}{\sqrt{X}}\,,$$

(¹) Methodus fluxionum, etc., 131-138.

welche bei der Reduktion jener Integrale die Hauptrolle spielen. Das zweite Problem, auf welches Newton verweist, lautet: « Beliebig viele Kurven zu finden, deren Flächen zur Fläche irgend einer gegebenen Kurve ein Verhältnis haben, das durch eine endliche Gleichung gegeben ist ». Die Lösung der Aufgabe besteht einfach in der Transformation des Integralausdruckes durch Einführung einer neuen Variabeln. Aus den verschiedenen Beispielen, die er hiefür gibt, greifen wir das eine heraus: Gegeben ist der Kreis $y^2 = ax - x^2$, es werden Flächen gesucht, die der Kreisfläche gleich sind.

Die letztere ist $s = \int \sqrt{ax - x^2}\, dx$ (Grenzen gibt Newton nirgends an, da überhaupt alle Integrale als bestimmte aufgefasst werden). Setzt man z. B. die Relation fest $x = \frac{z^2}{a}$, so erhält man dieselbe Fläche

$$s = \frac{2}{a^2}\int z^2 \sqrt{a^2 - z^2}\, dz, \quad \text{die der Kurve} \quad y = \frac{2z^2}{a^2}\sqrt{a^2 - z^2}$$

zugehört. Mit dieser Methode konnte Newton das Integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ mit Hilfe des Substitution

$$\text{c)} \quad x = \frac{1}{\xi} \quad \text{überführen in} \quad -\int \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi}}, \quad \text{wo} \quad \Xi = g + f\xi + e\xi^2$$

ist, und diese Form kommt ebenfalls in seiner Tabelle wiederholt vor. Die beiden Rekursionsformeln (a) und (b) und die Transformation (c) genügen aber zur Herstellung sämtlicher Integrale der angeführten beiden Gattungen.

Wir wollen dies an dem für $n = 0$ aus (I) zu erhaltenden Integrale $\frac{a}{\eta}\int \frac{\sqrt{X}\, dt}{x}$ erweisen, das relativ am schwersten zu erhalten war. Newton gibt in seiner Tabelle an:

$$\text{Abscissae} \begin{cases} z^\eta = x \\ \frac{1}{z^\eta} = \xi \end{cases} \qquad \text{Ordinatae} \begin{cases} \sqrt{e + f + gx^2} = u \\ \sqrt{g + f\xi + e\xi^2} = \gamma \end{cases}$$

Arearum valor:

$$\frac{4ae^2\xi\gamma + 2aef\gamma - 2afgux + 4aegu - 2af^2u - 8ae^2\sigma + 4afgs}{4\eta eg - \eta ff} = t,$$

wobei er bezüglich der beiden Kegelschnittflächen $\sigma = \int \sqrt{\Xi}\, d\xi$ und $s = \int \sqrt{X}\, dx$ auf die Figuren verweist, die wir oben anführten.

Der Gang der Ableitung war nun offenbar folgender. Es ist $\int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = \sqrt{X} + \frac{f}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + e \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$, eine Formel, die sich durch Ersetzung von $\sqrt{X}$ durch $\frac{X}{\sqrt{X}}$ und mit Anwendung der Rekursionsformel (b) für $n = 1$ unmittelbar ergibt. Ersetzt man jetzt mit Hilfe der Substitution (c) im zweiten Integrale $x$ durch $\frac{1}{\xi}$ so kommt:

$$\int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = \sqrt{X} + \frac{f}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} - e \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi}},$$

so dass nur mehr diese gleichgebauten Integrale auf die Form $\int dx \sqrt{X}$ gebracht zu werden brauchen, was wieder durch Anwendung der Rekursionsformel (b) für $n = 1$ geschieht, man erhält so:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{8g}{4eg - f^2} \int \sqrt{X}\, dx - \frac{2(f + 2gx)}{4eg - f^2} \sqrt{X}$$

und schliesslich:

$$\int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = \sqrt{X} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{f}{2} \left[ \frac{8g}{4eg - f^2} \int \sqrt{X}\, dx - \frac{2(f + 2gx)}{4eg - f^2} \sqrt{X} \right] \\ - e \left[ \frac{8e}{4eg - f^2} \int \sqrt{\Xi}\, d\xi - \frac{2(f + 2e\xi)}{4eg - f^2} \sqrt{\Xi} \right], \end{array} \right.$$

ein Ausdruck, der nach Beifügung des Faktors $\frac{a}{\eta}$ auf beiden Seiten bis auf die Bezeichnung mit dem Newtons übereinstimmt.

Auf ähnliche Weise konnte Newton die übrigen in den Formen (I) und (II) noch enthaltenen Integrale auf die Integrale $s$ und $\sigma$, oder wie er sagt, auf die Quadratur der Kegelschnitte reduzieren. Diese aber setzte er teils als *geometrisch bekannt* voraus, teils hatte er schon in den vorhergehenden Beispielen gezeigt, wie sich Flächenstücke derselben *durch seine Methode der Reihenentwicklung* finden lassen.

Einen bedeutenden Schritt weiter ging Roger Cotes, indem er von der geometrischen Konstruktion und der Reihendarstellung absehend dahin strebte, die binomischen und trinomischen Integrale direkt der rechnerischen Behandlung mittelst der logarithmischen und trigonometrischen Tafeln zugänglich zu machen; d. h. er reduzierte sie auf logarithmische und Kreisfunktionen. Dazu hat er eine eigene Theorie, die *Logometria*, wie er sie nannte, geschaffen. Von seinen diesbezüglichen Untersuchungen hören wir zum ersten Male im Jahre 1712, indem er am 25. Mai dieses Jahres an Newton eine kleine Schrift mit dem Titel: « Elementa Logometriae » sandte (1), die dann 1714 in den Philosophical Transactions gedruckt wurde (2) und 1722 in der von Cotes' Nachfolger Robert Smith herausgegebenen *Harmonia mensurarum* abermals im Druck erschien.

In dieser Schrift führt er *als Mass eines Streckenverhältnisses* (*mensura rationis*) *den mit einer Konstanten multiplizierten Logarithmus dieses Verhältnisses* ein. Es ist dies genau derselbe Gedanke, der im vorigen Jahrhundert zur Einführung einer allgemeinen projektivischen Massbestimmung auf der geraden Punktreihe führte (3), nachdem Cotes' Schrift längst in Vergessenheit geraten war.

Der Gedankengang, durch den Cotes auf seine Massbestimmung geführt wurde, dürfte, wie aus Bemerkungen an verschiedenen Stellen seiner Schrift hervorgeht, folgender sein. Neper liess bekanntlich bei Schaffung seiner Logarithmen einen Punkt in der Weise eine Gerade « durchfliessen », dass die in den gleichen Zeitabschnitten: $0, 1, 2, 3, \ldots n \ldots$ durchlaufenen Wege durch die Glieder einer geometrischen Reihe

$$z_1\,,\, z_1\lambda\,,\, z_1\lambda^2\,,\, z_1\lambda^3\,,\,\ldots\, z_1\lambda^n \ldots$$

dargestellt wurden. Dann repräsentierten die die Lage des Punktes bestimmenden Masszahlen jener Zeitabschnitte die fortschreitenden Exponenten des Quotienten $\lambda$ oder die mit einer Konstanten multiplizierten Logarithmen des Verhältnisses irgend eines Progressiongliedes zum ersten, indem identisch

$$n = \frac{1}{\log \lambda} \log \left(\frac{\lambda^n z_1}{z_1}\right)$$

ist. Nachdem nun Newton den Bewegungsbegriff an die Spitze seines Fluxionskalküls gestellt hatte, lag es für Cotes nahe, diese Messung

(1) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* etc. 1850, 116-117.

(2) Nr. 338 für Januar bis März 1714, vol. XXIX, 5-45.

(3) F. Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* Göttinger Nachrichten Nr. 17 und ausführlich in *Mathematische Annalen*, IV, 1871, 573-625.

auf das Verhältnis zweier nach jenem Gesetze kontinuierlich wachsender Grössen zu übertragen. Soll daher in Fig. 3 das Verhältnis

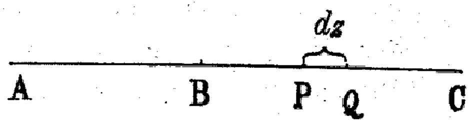


Fig. 3.

$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{z_m}{z_1}$ gemessen werden, und ist die Entfernung des fliessenden Punktes P von $\mathrm{A}=z=z_1\lambda^n=z_n$, so ist die Fluxion des Masses $\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AP}}=\frac{dz}{z}=\frac{z_1\lambda^n\log\lambda\, dn}{z_1\lambda^n}=\log\lambda\, dn$ und das Mass selbst

$$\frac{1}{\log\lambda}\int_{z_1}^{z_m}\frac{dz}{z}=\int_0^m dn=m\,,\ \text{also}\ m=\mathrm{M}\log\left(\frac{z_m}{z_1}\right),\ \text{wobei}\ \mathrm{M}=\frac{1}{\log\lambda}$$

nach Cotes der *Modulus des Systems* heisst, in welchem die Messung vorgenommen wurde (¹).

Wir haben bei uns dieser Ableitung lediglich der uns geläufigen Bezeichnungsweise bedient, um die Sache leichter zugänglich zu machen, statt wie Cotes alles an obiger Figur in Worten darzustellen.

Dieser Massbestimmung bediente er sich nun, um Integrale, die Newton bisher auf die Quadratur der Hyperbel zurückgeführt hatte, durch Logarithmen auszudrücken. Aber er ging noch weiter. Schon in seiner Logometria bemerkte (²) er bei Gelegenheit der Komplanation der Oberfläche des verlängerten Rotationsellipsoides, dass hier das Mass eines imaginären Ausdruckes auftrat, gab aber sofort an, dass man in einem solchen Falle dasselbe durch *das Mass eines reellen Bogens* in bezug auf den Radius als Modulus ersetzen könne, d. h. « durch einen Bogen, dessen Sinus bekannt ist », so dass man ihn mit Hilfe der Tafeln rechnerisch bestimmen kann. Er erkannte also hier den Zusammenhang des Logarithmus mit den zyklometrischen Funktionen. Hierin waren ihm allerdings Leibniz und Johann Bernoulli zuvorgekommen, die schon im Jahre 1702 auf einen solchen Zusammenhang aufmerksam wurden (³), und Bernoulli hatte 1703 in den Acta Eruditorum eine kurze Bemerkung hierüber veröffentlicht, die auch 1704 in den Mémoires de l'Académie de Paris für 1702

(¹) *Harmonia mensurarum*, p. 4.

(²) *Philosophical Transactions* a. a. O. 32, *Harm. mens.* 28.

(³) Vgl. die Darstellung bei M. Cantor III₂, 362-363 im Zusammenhang mit der Ergänzung, die Herr Staeckel in *Bibliotheca Mathem.* (3) I 1900, 109-111 gegeben hat.

wieder erschien. Cotes wird dieselbe wohl kaum entgangen sein und sie mag ihn vielleicht zu jener Ausdehnung seines Masses auf die Winkel veranlasst haben. Da er jedoch bei Einführung desselben gelegentlich des erwähnten Beispieles zu einer andern Gleichung als Bernoulli gelangte, nämlich zu unserer Fundamentalgleichung $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, die hier zum erstenmale auftritt (¹), so wollen wir seine Ueberlegung etwas näher ins Auge fassen. Ist in Fig. 4 ANB

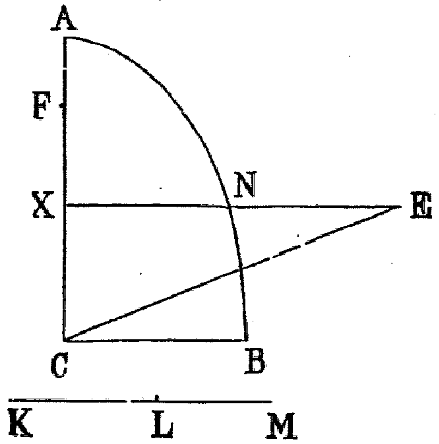


Fig. 4.

der Meridian eines abgeplatteten Rotationsellipsoides, AC die Rotationsaxe $= b$, $CB = a$ die halbe grosse Axe, F der Brennpunkt, X ein beliebiger Punkt auf AC, XN || CB und E auf CB so gewählt, dass $CE = \frac{CA^2}{CF} = \frac{CA^2}{\sqrt{CB^2 - CA^2}} \left(= \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$ wird; sei ferner $KL = \frac{XC \, . \, XE}{CE}$ $\left(\text{d. h. also } KL = y \sqrt{1 + y^2 \frac{a^2 - b^2}{b^4}}\right)$ und LM das Mass des Verhältnisses von $EX + XC$ zu CE in bezug auf den Modulus CE $\left(\text{also } LM = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \log\left(y \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^4}} + \sqrt{1 + y^2 \frac{a^2 - b^2}{b^4}}\right)\right)$, so ist die gesuchte Oberfläche $F_1$, die der Bogen BN bei der Rotation erzeugt,

$$F_1 : BC^2\pi = (KL + LM) : CB,$$

(¹) Hierauf haben schon Herr Timtchenko, *Histoire de la théorie des Fonctions* (russisch) 1889, 527-528, sowie Herr G. Vacca, *Revue de mathématiques*, 1900, 65 aufmerksam gemacht.

d. h.

$$\text{(I)}\quad F_1 = \pi a \left\{ y\sqrt{1 + y^2\,\frac{a^2 - b^2}{b^4}} + \right.$$
$$\left. + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log\left( y\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^4}} + \sqrt{1 + y^2\,\frac{a^2 - b^2}{b^4}} \right) \right\}.$$

Ist aber jetzt $CB (= a) < CA (= b)$, hat man also ein verlängertes Rotationsellipsoid (Fig 5), so ist nach Cotes $CE = \frac{CA^2}{CF}$, ferner

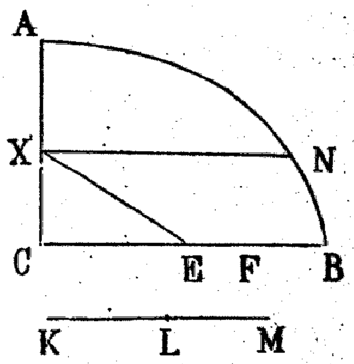


Fig. 5.

$KL = \frac{XC \, . \, XE}{CE}$, und LM « *ist das Mass des Winkels* $XEC\,(= \varphi)$ *in bezug auf den Modulus* EC, *d. h. es ist gleich dem Bogen, dessen Sinus* $\frac{XC}{CE}$ *ist* ». Die vom Bogen BN erzeugte Fläche wird dann:

$$F_2 : CB^2\pi = (KL + LM) : CB,$$

d. h. in unserer Schreibweise:

$$\text{(II)}\qquad F_2 = \pi a \left\{ y\sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^4}\,y^2} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \varphi \right\},$$

wo $\sin\varphi = y\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^4}}$ ist. Nun fügt aber Cotes bei: « Man könnte aber die Dimension dieser Oberfläche auch durch die Logometrie bestimmen, aber nur unausrechenbar (d. h. durch einen imaginären Ausdruck). Denn wenn irgend ein Bogen des mit dem Radius CE beschriebenen Kreisquadranten den Sinus CX und den Cosinus XE hat, so wird der Bogen, falls man den Radius CE als Modulus nimmt, das Mass des Verhältnisses $EX + XC\sqrt{-1}$ zu CE sein, wenn man ihn mit $\sqrt{-1}$ multipliziert », dh. also

$$i\varphi = \log(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Diese Gleichung ergab sich ihm unmittelbar, indem er in (I) $b > a$ voraussetzte und das Resultat mit dem direkt gewonnenen (II) verglich; denn unter dieser Voraussetzung geht Gleichung (I) über in:

$$\text{(III)}\quad F_1 = \pi a \left\{ y \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^4} y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2}{i\sqrt{b^2 - a^2}} \log \left( i y \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^4}} + \sqrt{1 - y^2 \frac{b^2 - a^2}{b^4}} \right) \right\},$$

wo $y\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^4}} = \sin\varphi$, $\sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^4} y^2} = \cos\varphi$ ist.

Der hiedurch ermöglichte Uebergang von dem Masse eines Verhältnisses zu dem eines Winkels ist es, worin Cotes die *Harmonia mensurarum* erkennt [1].

Ueber die Auswertung der hier und in den zahlreichen andern Beispielen der Logometria vorkommenden Integrale spricht sich Cotes nicht weiter aus, offenbar weil sie sich durch Newtons Methoden ohne besondere Schwierigkeit auf die Quadraturen der gleichseitigen Hyperbel und des Kreises zurückführen liessen und dadurch unmittelbar die gesuchten Masse ergaben.

Cotes wurde in Mitte seiner wissenschaftlichen Tätigkeit vom Tode überrascht. Darin liegt wohl auch der Grund, warum sich eine weitere Ausarbeitung seiner Massbestimmung in bezug auf den Winkel in seinen Schriften nicht findet. Der Herausgeber seines Nachlasses, sein Vetter Robert Smith, hat jedoch diese Lücke mit Benützung

[1] Er sagt in der *Harmonia mensurarum*, p. 28-29: « Ceterum ex praecedentibus intelligi potest, quanta sit cognatio inter angulorum atque rationum mensuras, quamque levi mutatione in se invicem facillime convertantur pro variis ejusdem Problematis casibus... Mirabilem illam Harmoniam alterius declarare lubet, Exemplo desumpto ab eadem Figura circum axes suos convoluta, ecc. » — Auch mögen noch die p. 35-36 angeführten Worte erwähnt werden, welche beweisen, dass Cotes die Tragweite dieser *Harmonie* erkannt hat; wenigstens ahnte er, dass er einen neuen Massbegriff von grosser Allgemeinheit gefunden hatte. Sie lauten: « Geometris integrum erit, ex adductis hactenus Exemplis de Methodo nostra judicare; quam quidem, si proba fuerit, ulterius excolere pergent et excolendo latius promovebunt. Patet utique campus amplissimus, in quo vires suas experiri poterunt, praesertim si Logometriae Trigonometriam insuper adjungant, quibus miram quandam affinitatem in se invicem euntibus intercedere notabam. Hisce quidem Principiis haud facile crediderim generaliora dari posse; cum tota Mathesis vix quicquam in universo suo ambitu complectatur, praeter angulorum et rationum Theoriam ».

der Notizen des Autors in dessen Sinne ausgefüllt ([1]), indem er als Mass eines Winkels den mit einem Modulus M multiplizierten Bogen definierte, dessen trigonometrische Tangente ($t$) in Bezug auf einen Kreis mit dem Radius ($r$) gegeben ist; demnach ist also das Mass des Winkels $\varphi$:

$$\mathrm{M} \operatorname{arctg} \frac{t}{r}, \quad \text{wobei } \mathrm{M} = r \frac{\pi}{180} = r \cdot 0{,}0174532925\ldots$$

darstellt, eine Zahl, die schon Cotes berechnet hatte ([2]), und die wir heute noch als Modulus bezeichnen.

In Cotes' hinterlassenen Papieren fand sich auch ein zweiter Teil der *Harmonia mensurarum*, welcher « Theoremata tam logometrica, tam trigonometrica, quae datarum fluxionum fluentes exhibent per mensuras » enthielt. Diese Theoreme sind nichts anderes, als eine Sammlung von Integraltafeln und umfassen im ganzen 18 Typen, unter denen sich Integrale rationaler Funktionen, binomische und trinomische Integrale befinden, die Cotes sämtlich auf Logarithmen und Arcusfunktionen zurückführt. Von den trinomischen Integralen sind ausser den beiden Klassen, die wir schon bei Newton kennen lernten, auch noch die beiden Typen:

$$a \int \frac{z^{\theta\eta - 1} \sqrt{\mathrm{Z}}\, dz}{k + lz} \quad \text{und} \quad a \int \frac{z^{\theta\eta - 1}\, dz}{(k + lz)\sqrt{\mathrm{Z}}}$$

ausgerechnet und zwar alle für ganzzahlige positive und negative Werte von $\theta$.

Wir wollen das einfachste Beispiel $\int \frac{z^{\eta-1}\, dz}{\sqrt{\mathrm{Z}}}$, das für $z^\eta = x$ in $\frac{1}{\eta} \int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}$ übergeht aus diesen Tafeln herausgreifen ([3]) und zeigen, wie es von Cotes behandelt wird. Für dasselbe gibt er den Wert an:

$$\frac{1}{\eta g} a \mathrm{R} \left| \frac{\mathrm{R} + \mathrm{T}}{\mathrm{S}} \right., \text{ wobei } \mathrm{R} = \sqrt{g} \text{ der Modulus}, \ \mathrm{T} = \frac{\frac{1}{2} f + g z^\eta}{\sqrt{\mathrm{Z}}},$$

$$\mathrm{S} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} f^2 - eg}{\mathrm{Z}}}$$

ist.

([1]) Opera miscellanea R. Cotes, die den Anhang der *Harmonia mensurarum* bilden; namentlich Note I und III, p. 94-97.

([2]) Ebenda p. 95.

([3]) *Harm. mens.* p. 61.

In betreff dieser Bezeichnung heisst es in einer kurzen vorausgeschickten Einleitung: « Die Grössen R, S, T bezeichnen entweder das Verhältnis oder den Winkel, durch deren Mass die Fluente der Fluxion zu bestimmen ist. Wenn nämlich R die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist, geben sie ein Verhältnis, dessen Wert R + T zu S ist; wenn aber R die Quadratwurzel aus einer negativen Grösse ist, so geben sie den Winkel, dessen Tangente und Sekante sich zum Radius verhalten wie T und S zu R, sofern jene negative Grösse durch Aenderung des Zeichens wieder durch eine positive ersetzt wird ».

Setzen wir im Falle eines positiven $g$ den Integralwert nach dieser Regel zusammen, so lautet er in unserer Schreibweise:

$$\frac{1}{\eta g}\, a\sqrt{g}\, \log \frac{\sqrt{g}\sqrt{Z} + \frac{1}{2}f + gz^n}{\sqrt{\frac{1}{4}f^2 - eg}}$$

und kann mit Hilfe der Konstanten der Integration, die übrigens auch bei Cotes noch nirgends angeführt wird (¹), leicht auf die uns geläufige Form gebracht werden:

$$\frac{a}{\eta\sqrt{g}} \log\left(\frac{f}{2\sqrt{g}} + z^n\sqrt{g} + \sqrt{Z}\right) + C.$$

Ist aber $g$ negative, also der Modulus R imaginär, so ist $-\dfrac{a}{\eta\sqrt{g}}$ mit dem Bogen $\varphi$ zu multiplizieren, der aus seiner Tangente $\dfrac{T}{R}$ oder seiner Sekante $\dfrac{S}{R}$ gefunden werden kann; demnach wird das Integral in diesem Falle:

$$-\frac{a}{\eta\sqrt{g}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}f - gz^n}{\sqrt{g}\sqrt{Z}}\right) \quad \text{oder} \quad -\frac{a}{\eta\sqrt{g}} \operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{4}f^2 + eg}}{\sqrt{g}\sqrt{Z}}\right),$$

wo $Z = e + fz^n - gz^{2n}$ ist.

(¹) In dieser Beziehung standen die englischen Mathematiker jener Zeit den deutschen noch nach. Denn während in England die Integrale noch durchweg nur als bestimmte aufgefasst werden, hatte Johann Bernoulli schon 1691 die Integration als die Umkeen der Differentiation auffassend die Notwendigkeit den Beifügung einer willkürlichene Konstanten erkannt. Vgl. Bernoullis, *Integralrechnung*. Opera, B. III, 388 und 412.

Uebrigens gibt Cotes in einer Ergänzungstabelle sogar noch andere Formen für seine Integrale an, so dass man z. B. den Wert des letzten Integrals auch aus den Formeln

$$-\frac{a}{\eta\sqrt{g}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{g}\sqrt{Z}}{\frac{1}{2}f-gz^{\eta}}\right) \text{ und } -\frac{a}{\eta\sqrt{g}}\,\mathrm{arcsec}\left(\frac{\sqrt{eg+\frac{f^2}{4}}}{\frac{1}{2}f-gz^{\eta}}\right)$$

bestimmen kann.

R. Smith, der auch zu diesen Theoremen von Cotes einige Noten schrieb, zeigt jedoch nicht (¹), wie dieselben erhalten wurden, sondern nur, wie man sie a posteriori verifizieren kann; es besteht aber kein Zweifel, dass Cotes' Methode von der uns geläufigen wenig verschieden war, da er ja die Rationalisierung eines Differentialausdruckes durch Einführung einer neuen Variabeln kannte. Auch Cotes selbst schweigt sich hierüber aus, hat haber seinen Tafeln eine Reihe von Theoremen angehängt, aus denen man entnehmen kann, wie er jede Klasse von Differentialausdrücken auf den einfachsten unter ihnen zurückführt. Auch die hiezu verwendete Methode ist keine andere als die heute übliche der Bildung von Rekursionsformeln durch Differentiation, wie wir sie bei Newton schon fanden. Wie systematisch er dabei verfuhr, möge noch folgendes Beispiel zeigen, das er als Theorem III p. 68 anführt.

Ist $Z=e+fz^{n}+gz^{2n}$ und setzen wir im folgenden zur Abkürzung durchweg $z^n=x$, so kommt zunächst $X=e+fx+gx^2$; ist dann ferner

$$\begin{array}{ll} \dot{A}=a\,x^{\theta-1}\,X^{\omega-1} & \dot{D}=a\,x^{\theta+2}\,X^{\omega-2} \\ \dot{B}=a\,x^{\theta}\quad X^{\omega-1} & \dot{F}=a\,x^{\theta-1}\,X^{\omega} \\ \dot{C}=a\,x^{\theta+1}\,X^{\omega-1} & \dot{G}=a\,x^{\theta}\quad X^{\omega}; \end{array}$$

so ergibt sich durch Differentiation von $x^\theta X^\omega$:

$$\frac{d\,(x^\theta X^\omega)}{dx}=\theta e\dot{A}+f(\theta+\omega)\dot{B}+g\,(\theta+2\omega)\dot{C}$$

und hieraus

$$\text{(I)}\quad x^\theta X^\omega=\theta e A+f(\theta+\omega)B+g\,(\theta+2\omega)\,C,$$

wo $A=\int\dot{A}dx$ etc. ist. Ebenso erhält man durch Differentiation von

(¹) Er sagt p. 97: « Horum Theorematum inventionem analyticam non est instituti mei hic tradere ».

$x^{\theta+1}X^{\omega}$, Einführung der obigen Werte von $\dot{A}$, $\dot{B}$... und darauffolgende Integration:

(II) $x^{\theta+1}X^{\omega} = e(\theta+1)B + f(\theta+1+\omega)C + g(\theta+1+2\omega)D$.

Die obige Tabelle aber liefert direkt die Werte:

$$\dot{F} = e\dot{A} + f\dot{B} + g\dot{C} \text{ und } \dot{G} = e\dot{B} + f\dot{C} + g\dot{D},$$

wenn man $X^{\omega} = X^{\omega-1}(e + fx + gx^2)$ setzt, woraus:

(III) $F = eA + fB + gC$ und (IV) $G = eB + fC + gD$

folgen. Mit Hilfe dieser vier Gleichungen lassen sich jetzt A, B, C, D linear durch F und G ausdrücken, wodurch vier Rekursionsformeln gewonnen sind.

Die 18 Integraltafeln, welche Cotes selbst nach Angabe von Smith vor 1714 berechnet hatte, ergänzte letzterer, nachdem er in Cotes' Nachlass dessen bekanntes Theorem über die Zerlegung eines Binoms in reelle Faktoren gefunden hatte, zu einer Sammlung von nicht weniger als 94 Tafeln, von denen sich 6 auf trinomische Integrale beziehen. Zu den vier schon von seinem Vorgänger behandelten Typen fügte er nämlich noch die beiden

$$a\int\frac{z^{\theta\eta-1}\,dz}{(k+lz^{\eta}+mz^{2\eta})\sqrt{Z}} \quad \text{und} \quad a\int\frac{z^{\theta\eta-1}\sqrt{Z}\,dz}{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}}$$

hinzu. Auch führte er für alle Tabellen eine gleichmässige Bezeichnungsweise ein, welche einigen Vorzug vor jener besass, die wir bei Cotes kennen lernten, doch war auch sie noch schwerfällig genug, und erst dem gewandten Formensinne Eulers gelang es, auch hier eine passende Reform anzubahnen.