Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Otto Hölder** (1859–1937)

Titel: **Adolph Mayer** : Nekrolog
gesprochen in der öffentlichen Gesamtsitzung beider Klassen am 14. November 1908 von O. Hölder

Quelle: Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse
Band 60. 1908
Seite 353 – 373 .

Adolf Mayer wurde am 15. Februar 1839 zu Leipzig geboren. Er studierte zuerst in Heidelberg anfänglich Chemie, dann auch Mathematik und Mineralogie, danach in Göttingen, Leipzig, wieder in Heidelberg und in Königsberg. Mit einer Habilitationsschrift über Variationsrechnung erhielt er 1866 in Leipzig die Venia legendi. 1871 wurde er Extraordinarius, 1890 Ordinarius daselbst. Im Jahre 1900 setzte er wegen Krankheit vorübergehend aus, anfangs 1908 mußte er die ihm liebgewordene Tätigkeit ganz einstellen. Er suchte Heilung im Süden, starb aber schon am 11. April 1908 in Gries bei Bozen. Seine Arbeiten gehören den Gebieten der Differentialgleichungen, der Variationsrechnung und der Mechanik an.

(Rezension von Felix Müller (1843-1928) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 39. 1908, S. 40)

ADOLPH MAYER

NEKROLOG

GESPROCHEN IN DER ÖFFENTLICHEN GESAMTSITZUNG
BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1908

VON

O. HÖLDER, O. M.

Am 11. April 1908 verschied in Gries bei Bozen ADOLPH MAYER. In ihm haben wir ein hochgeschätztes, treues Mitglied verloren, das unserer Gesellschaft seit 1877 angehört hat. Von 1883 bis 1901 war er stellvertretender Sekretär der mathematisch-physischen Klasse.

MAYER ist am 15. Februar 1839 hier in Leipzig geboren. Er entstammte einer im 17. Jahrhundert aus St. Gallen eingewanderten Familie, deren Glieder, seitdem sie in Leipzig ansässig waren, stets dem Kaufmannsstand angehört und zwar meistens sich dem Bankfach gewidmet hatten. Seine Mutter ist ihm früh gestorben. Wissenschaftliche Begabung und Neigung wiesen ihn auf ein Universitätsstudium hin, und er wandte sich, nachdem er die Thomasschule absolviert hatte, nach Heidelberg, ursprünglich in der Absicht, Chemie zu studieren. Von Anfang an dehnte er dort seine Interessen auf Mathematik und Mineralogie aus. Er besuchte zwischendurch auch die Universität Göttingen, wo er besonders bei dem Mathematiker STERN hörte, und promovierte in Heidelberg mit einer mathematischen Arbeit. Es war vor allem die Anregung, die er an diesem Ort durch OTTO HESSE erfahren hatte, die ihn bestimmte, sich von nun an ganz der Mathematik zu widmen, wobei er aber die mathematische Physik nicht vernachlässigte.

MAYER brachte nach der Promotion ein Semester in Leipzig zu, wandte sich dann nach Heidelberg zurück, siedelte aber im Herbst 1862 nach Königsberg über. In dem Kreis des FRANZ NEUMANNschen mathematisch-physikalischen Seminars, in den er dort eintrat, und der auch persönlich eng zusammen hielt, hat MAYER manchen Freund gewonnen, mit dem er das ganze Leben hindurch in persönlicher und wissenschaftlicher Verbindung gewesen ist. Bis August 1865 blieb er in Königsberg. Hier hörte er auch die Vorlesungen von RICHELOT, und es ist eine von RICHELOT gegebene Anregung gewesen, die ihn auf das der Variationsrechnung angehörende

Thema seiner Habilitationsschrift gebracht hat, mit der er sich im Jahr 1866 in Leipzig die venia legendi erwarb.

Im Dezember 1871 wurde er zum außerordentlichen Professor befördert. Die Vorlesung, die er beim Antritt seiner Professur gehalten hat, handelte von der Geschichte des mechanischen Prinzips der kleinsten Aktion. Bald nach der Ernennung zum Extraordinarius, im Jahr 1872, hat Mayer mit Margarete Weigel den Ehebund geschlossen, der für die ganze Folgezeit die Grundlage seines Lebensglücks und damit auch seiner fortgesetzten Schaffensfreude gewesen ist. Nicht lange nachher erhielt er einen Ruf nach Freiburg. Es war teils die Anhänglichkeit an die Universität Leipzig, der er auch später treu geblieben ist und in deren Interesse er stets in der uneigennützigsten Weise gewirkt hat, teils die Anhänglichkeit an unsere Stadt, vor allem aber die zarte Rücksicht gegen seinen alternden Vater, die ihn veranlaßte, dem Ruf zu entsagen. 1881 wurde er ordentlicher Honorarprofessor, im Jahr 1890 Ordinarius.

Im Frühjahr 1900 wurde Mayer auf sein Ansuchen dauernd beurlaubt. Kurze Zeit hat er dann nur seinen wissenschaftlichen Arbeiten gelebt; bald aber nahm er die ihm lieb gewordenen Vorlesungen wieder auf und hielt auch wieder Übungen ab. In den Übungen pflegte er auch seinen Schülern persönlich näher zu treten, denen er ein hilfreicher Freund war. Im Anfang des Jahres 1908, mitten im Semester, mußte er seine Wirksamkeit einstellen. Er suchte im Süden Heilung von einem Leiden, das ihn schon längere Zeit bedrückte, und sollte zu unser aller Leide nicht mehr lebend von dort zurückkehren.

Mayers wissenschaftliche Tätigkeit bewegte sich im wesentlichen in den Gebieten der Differentialgleichungen, der Variationsrechnung und der Mechanik. Besteht zwischen diesen Gebieten an sich ein natürlicher Zusammenhang, so bildeten sie für Mayer in noch höherem Sinne eine Einheit, da seine Habilitationsschrift ihn auf das Prinzip der kleinsten Aktion geführt hat, das in seinen Interessen lange eine hervorragende Rolle spielte. Verwandelt doch dieses Prinzip die Probleme der Mechanik in Variationsaufgaben, bei deren Behandlung dann gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen in gegenseitigem Zusammenhang auftreten.

Sucht man den Einfluß festzustellen, den andere Mathematiker oder deren Werke auf MAYER ausgeübt haben könnten, so findet man diesen Einfluß nicht gerade bei denen am größten, deren Vorlesungen er gehört hat. Die Arbeitsweise MAYERS stimmt am meisten mit derjenigen analytischen Richtung überein, die JACOBI in seinen berühmten Vorlesungen über Dynamik innegehalten hat, welche Vorlesungen ja auch die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit enthalten. MAYER pflegte auch selbst eine Vorlesung von ähnlichem Plan unter dem Titel der Dynamischen Differentialgleichungen zu lesen, um die sich ein großer Teil seiner wissenschaftlichen Arbeit gruppiert hat. Auf die Wahl der Stoffe seiner Untersuchungen hat wohl auch die nahe Beziehung gewirkt, die er in den letzten Jahren von CLEBSCH zu diesem unterhalten hat, während er die Eleganz, mit der er seine Probleme behandelte, neben seiner eigenen Begabung wohl dem Vorbild seines ersten Lehrers HESSE verdankt.

Im folgenden werden nicht alle, aber doch die meisten Arbeiten MAYERS besprochen werden. Die erste von denen, die dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen angehören, hat er 1871 veröffentlicht.[1]) Sie betraf die sogenannte erste JACOBIsche Integrationsmethode der Differentialgleichungen erster Ordnung. JACOBI hatte diese Methode aus den Untersuchungen von HAMILTON und PFAFF abstrahiert, und sie kommt im Grund auf die Integrationsmethode CAUCHYS hinaus, die damals JACOBI noch unbekannt war. Diese Methode hat in der an sich übersichtlichen JACOBIschen Form den Nachteil, daß sich ihr gewisse spezielle Fälle nicht fügen. MAYER deckte den wahren Grund dieser Ausnahmen auf, der darin besteht, daß in diesen Fällen eine Determinante verschwindet, und gab eine Modifikation der Methode, durch die auch die Ausnahmefälle bewältigt werden können.

1) Mathematische Annalen Bd. 3, S. 435.

Im folgenden Jahre entdeckte Mayer in demselben Gebiet ein wichtiges Resultat.[1]) Er studierte den Zusammenhang zwischen den Systemen linearer homogener partieller Differentialgleichungen erster Ordnung und Systemen von linearen totalen Differentialgleichungen, die „unbeschränkt integrabel", d. h. ebensovielen unabhängigen endlichen Gleichungen mit ebensovielen willkürlichen Konstanten äquivalent sind. Er fand, daß ein solches System von $m - \mu$ totalen Differentialgleichungen in m Variabeln sich auf ein einziges System von $m - \mu$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen läßt. Daraus ergab sich ihm dann das Theorem, daß die Integration eines nach der Bezeichnung von Clebsch „vollständigen" Systems von μ linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in m unabhängigen Variabeln auf die Integration eines Systems von $m - \mu$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückkommt. Dieses Resultat kann auch ohne die Hinzuziehung der totalen Differentialgleichungen abgeleitet werden;[2]) es ist aber offenbar der Zusammenhang mit diesen gewesen, der Mayer auf die Substitution geführt hat, die das genannte Theorem erschließt. Durch dieses Theorem wurde nun die Zahl und Ordnung der Operationen, die zur Integration eines „vollständigen Systems" erforderlich sind, bedeutend verringert. Damit wurde aber auch an der sogenannten zweiten Jacobischen Integrationsmethode, d. h. an der eigentlichen Jacobischen Methode, die ein beliebiges simultanes System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf die Integration der vollständigen Systeme linearer homogener Gleichungen zurückführt, die weitgehendste Reduktion vorgenommen, die möglich ist, weshalb man jetzt auch von der Jacobi-Mayerschen Integrationsmethode für die allgemeinen Systeme erster Ordnung spricht.

1) ebenda Bd. 5, S. 448; m. vgl. auch Bulletin des sciences math. et astr. ser. I, tome 11 (1876), p. 87 u. p. 125 und diese Berichte, Bd. 43 (1891), S. 448.

2) Vgl. E. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, bearbeitet von C. Bourlet, deutsch von H. Maser. 1893, p. 57.

Nachdem ihm dieser Wurf gelungen war, widmete er sich eine Reihe von Jahren, bis 1877, ausschließlich den verschiedenen Integrationstheorien der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und den damit zusammenhängenden Theorien. Er machte 1872[1]) die eben veröffentlichte neue Methode von Lie dadurch allgemeiner zugänglich, daß er von dem Fundamentaltheorem Lies, auf dem die Methode beruht, und das besagt, daß die Integration eines Involutionssystems von m Gleichungen mit n unabhängigen Variabeln auf die Integration einer einzigen Gleichung mit $n - m + 1$ unabhängigen Variabeln zurückkommt, analytische Beweise gab. Mayer hat dann auch die Liesche Methode etwas erweitert[2]) und den Begriff der Berührungstransformation, im Zusammenhang mit dem Lie seine Methode gefunden hatte, in den Kreis seiner Untersuchungen gezogen. Er gab 1874 ein einfaches, von der Theorie des Pfaffschen Problems unabhängiges Verfahren an, die Bestimmung aller Berührungstransformationen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen,[3]) während Lie diese Aufgabe als einen speziellen Fall des Pfaffschen Problems aufgefaßt hatte. Auf die Berührungstransformationen ist er später (1893) wieder zurückgekommen in einer Arbeit, deren Zweck es war, die Lehre von den infinitesimalen Transformationen, insbesondere Berührungstransformationen, unabhängig von der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen darzustellen und dadurch die zum Verständnis jener Begriffe und ihrer Anwendungen notwendigen Vorkenntnisse zu verringern.[4])

1876 hat Mayer eine andere Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die älter ist als die seinige, die aber mehr Operationen zur Durchführung erfordert, näher untersucht.[5]) Es war dies die Weilersche Methode, auch, wie Mayers eigene, eine Ver-

1) Göttinger Nachrichten 1872, S. 467; vgl. auch Math. Annalen Bd. 6 (1873), S. 162 u. S. 192.

2) Math. Annalen Bd. 8 (1875), S. 313.

3) Gött. Nachr. 1874, S. 317 u. Math. Annalen Bd. 8 (1875), S. 304.

4) Diese Berichte 1893, S. 697.

5) Annalen Bd. 9, S. 347.

einfachung der zweiten JACOBIschen Methode. MAYER stellte das WEILERsche Verfahren in verschiedenen Punkten richtig und gab zum ersten Mal eine wirklich klare Darstellung des Verfahrens.

Nach dem Jahr 1877 hat sich MAYER weniger mit den Differentialgleichungen beschäftigt, doch hat er in dieser Zeit auch außer der schon erwähnten Arbeit über die infinitesimalen Berührungstransformationen noch einige andere veröffentlicht, die sich in dem mit den Differentialgleichungen unmittelbar zusammenhängenden Gebiet bewegten. So hat er 1880 das PFAFFsche Problem behandelt.[1]) Er wies zum ersten Mal darauf hin, daß bei der PFAFFschen Lösung dieses Problems nur für den Fall, daß eine gewisse Determinante nicht verschwindet, wirklich bewiesen wird, daß die Lösung — wenn die Zahl der unabhängigen Variabeln des umzuformenden PFAFFschen Ausdrucks gerade ist — möglich ist. Es wird also in dem Fall, in dem die betreffende Determinante gleich Null ist, im Grund die Existenz der Lösung vorausgesetzt, und es werden dann erst nachträglich auf Grund dieser Voraussetzung gewöhnliche Differentialgleichungen für die Lösung aufgestellt. MAYER gab nun für den genannten Fall wirklich sichere Grundlagen der PFAFFschen Methode. 1890 hat er sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigt und dabei für gewisse Typen die Kriterien der allgemeinen vollständigen Integrierbarkeit, d. h. der allgemeinen Zurückführbarkeit auf Quadraturen angegeben.[2])

Ich wende mich jetzt den Arbeiten zu, die der Variationsrechnung angehören. Die Habilitationsschrift[3]) aus dem Jahr 1866, die hierher gehört, ist bereits kurz erwähnt worden. Es handelt sich in dieser Arbeit um die Maxima und Minima der einfachen Integrale in dem Fall, daß n unbekannte Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_n$ sammt ihren ersten Differentialquotienten

1) Annalen Bd. 17, S. 523.

2) Diese Berichte Bd. 42, S. 491.

3) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale, 1866; m. vgl. dazu Journal für die reine und angewandte Math. Bd. 69, S. 238.

unter dem Integral stehen, und außerdem gewisse Differentialgleichungen erster Ordnung als Bedingungsgleichungen gegeben sind. CLEBSCH hatte bereits für diesen Fall eine Umformung der zweiten Variation des Integrals gefunden, die der für den einfachsten Fall schon von LEGENDRE aufgestellten entspricht. Die in der zweiten Variation unter dem Integral stehende Funktion wurde von CLEBSCH in drei Teile zerlegt. Der erste Teil ist eine quadratische Form F gewisser n Größen, die aus den Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$ und ihren Ableitungen linear und homogen gebildet sind. Der zweite Teil ist der totale Differentialquotient einer quadratischen Form der Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$ selbst, und der dritte ein linear und homogen aus den linken Seiten der Bedingungsgleichungen gebildeter Ausdruck. Es kommt dann, da die Variationen δy_1, $\delta y_2, \cdots \delta y_n$ an den Enden des Integrationsintervalls verschwinden sollen, schließlich nur auf den ersten der drei Teile an, der das Vorzeichen der zweiten Variation erkennen läßt.

Die Möglichkeit der genannten Umformung ist aber noch an eine Forderung geknüpft. Es tritt eine Determinante auf, deren Elemente außer von der unabhängigen Variabeln noch von willkürlichen Konstanten abhängen, und es müssen sich diese Konstanten so bestimmen lassen, daß die Determinante in dem ganzen Integrationsintervall $x_0 \cdots x_1$ von Null verschieden ist.

MAYER hat nun gezeigt, daß jene Determinante abgesehen von einem von der unabhängigen Veränderlichen x unabhängigen Faktor bei passender Bestimmung jener Konstanten mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial c_1} & \frac{\partial y_1}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial c_1} & \frac{\partial y_2}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial c_{2n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_{2n}}\right)_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \Delta(x, x_0)$$

zusammenfällt. In dieser Determinante sind $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Funktionen, welche die Differentialgleichungen lösen, die aus dem Nullsetzen der ersten Variation sich ergeben haben, und die noch die willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \cdots c_{2n}$ enthalten. Diese Konstanten sind aber in der Determinante nachträglich so zu spezialisieren, wie es der zu untersuchenden Lösung der Differentialgleichungen entspricht. Er konnte nun schließen, daß die zweite Variation gleich Null gemacht werden kann, wenn die auf der Seite von x_1 dem x_0 nächstliegende Wurzel der „Grenzgleichung" $\Delta(x, x_0) = 0$ in dem Integrationsintervall $x_0 \cdots x_1$ gelegen ist oder mit x_1 zusammenfällt, während andererseits, wenn die genannte Wurzel außerhalb des Intervalls liegt, die zweite Variation nur ein Vorzeichen annehmen und nicht verschwinden kann, falls jene quadratische Form F unter den betreffenden Bedingungen definit ist. So gelangte MAYER zu der wahren expliziten Form der verallgemeinerten JACOBIschen Bedingung.

MAYER hat angegeben, daß er den Zusammenhang der beiden Determinanten an speziellen Integralen bemerkt habe, deren Maxima und Minima er auf Grund einer Anregung von RICHELOT untersucht hat. Es bewahrheitete sich also auch an ihm, der seinen Herleitungen und Darstellungen die größte Allgemeinheit zu geben liebte, die Tatsache, daß wichtige und fruchtbare Beziehungen allgemeiner Art vielfach zuerst auf induktivem Wege gefunden werden.

MAYER hob selbst hervor, daß gewisse Fälle vorhanden sind, in denen die Strenge der Schlußweise nicht behauptet werden kann, und die noch einer näheren Untersuchung bedürfen. Streng genommen bedarf auch der Schluß auf das wirkliche Vorhandensein eines Extremums in dem Fall, daß die zweite Variation nur ein Vorzeichen haben und nicht gleich Null werden kann, und der Schluß auf das Nichtstattfinden eines Extremums in dem Fall, daß die zweite Variation verschwinden kann, noch eines Beweises, selbst dann, wenn es sich nur um das sogenannte schwache[1]) Extremum handelt.

1) Im einfachsten Fall der Variationsrechnung heißt ein Extremum ein schwaches, wenn, geometrisch gesprochen, die Kurve, die das Ex-

Doch dies ist erst später erkannt worden und zwar von WEIERSTRASS, der allerdings seine Untersuchungen nur in Vorlesungen bekannt gab, und von dem leider so früh verstorbenen LUDWIG SCHEEFFER, dessen Arbeiten MAYER aufs höchste geschätzt hat. Auch die LAGRANGEsche Multiplikatorenmethode, die MAYER angewendet hat, um die Bedingungsgleichungen zu berücksichtigen, war damals noch nicht bewiesen. Sie hat ihm den Stoff zu späteren Arbeiten geliefert.

1877 hat MAYER die Kriterien des Maximums und Minimums bei den isoperimetrischen Problemen untersucht.[1]) Er hat dabei ein Reziprozitätsgesetz gefunden, das in dem einfachsten Fall darauf hinauskommt, daß die Funktion, die unter dem Integral steht, das ein Extremum werden soll, mit derjenigen Funktion, die in der Bedingungsgleichung unter dem Integral vorkommt, vertauscht werden kann. Es kommt ihm auch bei dieser Untersuchung hauptsächlich auf die Diskussion der zweiten Variation an. Um dabei die Resultate der Habilitationsschrift anwenden zu können, faßt er die isoperimetrischen Probleme, in denen Integralbedingungen vorgeschrieben sind, als spezielle Fälle des allgemeineren Problems auf, in dem die Bedingungen in Form von Differentialgleichungen gegeben sind. Die Multiplikatorenmethode kommt auch hier wieder zur Anwendung; es ergibt sich aber hier sofort, daß die Multiplikatoren, die beim allgemeinen Problem Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind, sich auf Konstanten reduzieren. Darauf, daß eine solche Konstante in einem Fall, in dem Unstetigkeiten der Differentialquotienten der zu bestimmenden Funktionen zugelassen sind, nicht in verschiedenen Intervallen verschiedene Werte haben kann, hat MAYER ausdrücklich hingewiesen.

Integrale mit variabeln Grenzen hat er zuerst im Jahr 1884 betrachtet.[2]) Er ging dabei von der bekannten Auffassung

---

tremum vorstellen soll, nur mit solchen verglichen wird, die nicht bloß in ihrer Nähe verlaufen, sondern auch in den Richtungen wenig von ihr abweichen.

1) Diese Berichte Bd. 29, S. 114 und Annalen Bd. 13 (1878), S. 53.

2) Ber. Bd. 36, S. 99.

aus, daß in diesem Fall das Problem in zwei Teile geteilt werden kann, indem zuerst, geometrisch gesprochen, die zu bestimmende Kurve — im einfachsten Fall — zwischen ihren Endpunkten denselben Vorschriften zu genügen hat, die gelten müßten, wenn das Problem eines Extremums bei festgehaltenen Endpunkten gestellt wäre, und dann noch eine Aufgabe des gewöhnlichen Maximums oder Minimums zur Bestimmung der nicht bekannten Endpunkte selbst zu lösen ist. Mayer fand, daß diese zweite Aufgabe sich leicht behandeln läßt, wenn man die Differentialgleichungen, die sich aus dem ersten Teilproblem ergeben, durch Zurückführung auf ihre Hamiltonsche partielle Differentialgleichung integriert hat. Mayer ging dabei auf die Größen zweiter Ordnung der Entwicklungen ein und setzte voraus, daß auch hinsichtlich der diese Größen betreffenden Kriterien das Problem durch seine Teilprobleme gleichwertig ersetzt werden kann. Er hat erst später, im Jahr 1896, die Frage nach der Berechtigung der Zerlegung der Aufgabe aufgeworfen und durch eine doppelte rechnerische Durchführung des Problems, einerseits nach der Zerlegungsmethode und andererseits in ungeteilter Behandlung, gezeigt, daß sich dabei dieselben Kriterien ergeben.[1])

Im Jahr 1885 hat Mayer einen Beweis der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode erbracht; es ist dies für den allgemeinen Fall, in dem Bedingungsdifferentialgleichungen vorgeschrieben sind, die erste Begründung der Methode, die gegeben worden ist.[2]) Er hatte, wie ich schon erwähnte, in seinen früheren Arbeiten die Multiplikatorenmethode „gewissermaßen als Axiom" akzeptiert. Eine mündliche Diskussion mit Ludwig Scheeffer, der die Methode für den Fall der isoperimetrischen Probleme bewiesen hatte, gab Mayer die Anregung zur Auffindung des allgemeinen Beweises.

Er ging von dem Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n')\,dx$$

1) Ber. Bd. 48, S. 436.

2) Ber. Bd. 37, S. 7; vgl. auch Annalen Bd. 26 (1886), S. 74

aus, in dem n Funktionen $y_1, \cdots y_n$ der unabhängigen Veränderlichen x samt ihren Ableitungen vorkommen, die noch durch die Bedingungsdifferentialgleichungen

$$\varphi_k(x, y_1, \cdots y_n, y_1', \cdots y_n') = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

aneinander geknüpft sind und für $x = x_0$ und $x = x_1$ vorgegebene Werte haben. Er machte nun zunächst den Ansatz, daß er die erste Variation

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} f dx$$

gleich Null setzte für solche Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$ der Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_n$, welche die Gleichungen

1) $$\delta \varphi_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots m)$$

erfüllen und an den Enden des Integrationsintervalls verschwinden. Für diesen bekannten Ansatz hat er keinen besonderen Beweis gegeben.[1]) Die Gleichungen 1) lassen nun $n - m$ von den Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_n$ willkürlich. Angenommen, es seien die Gleichungen 1) so beschaffen, daß man sie gerade nach den Differentialquotienten der Variationen

2) $$\delta y_{n-m+1}, \delta y_{n-m+2}, \cdots \delta y_n$$

auflösen kann, so sollen die übrigen Variationen

3) $$\delta y_1, \delta y_2, \cdots \delta y_{n-m}$$

versuchsweise einmal beliebig, nur so, daß sie für $x = x_0$ und $x = x_1$ verschwinden, angenommen werden. Die Variationen 2) würden sich nun aus den Differentialgleichungen 1) und daraus, daß auch sie für $x = x_0$ gleich Null sein müssen, für das ganze Intervall ergeben, und es würden dann die Werte dieser Variationen sich im allgemeinen nicht auch für $x = x_1$ von selbst gleich Null herausstellen. Die Bedingung, der zu Folge die Variationen 2) für $x = x_1$ verschwinden sollten, die anfangs mit gestellt wurde, muß also eine weitere Beschränkung der Variationen 3) bewirken.

1) Der Ansatz bedarf des Beweises. Vgl. A. KNESER, Lehrbuch der Variationsrechnung, 1900, S. 228 bis 235, wo dieser Punkt zum ersten Mal für den Fall von Bedingungsdifferentialgleichungen erledigt ist.

Mayer hat nun gefunden, daß diese Beschränkung dadurch ausgedrückt wird, daß ein von x_0 bis x_1 erstrecktes Integral, unter dem die Variationen 3) linear und homogen vorkommen, gleich Null sein muß. Damit war nun die weitere Behandlung der Frage auf eine den isoperimetrischen Problemen analoge Aufgabe gebracht, und diese wurde von Mayer nach Analogie des von Scheeffer bei den isoperimetrischen Problemen benutzten Verfahrens, dessen Grundgedanke von Weierstrass herrührt,[1]) gelöst.

Diesen Beweis hat Mayer 1895 auf das allgemeinste Problem der Variationsrechnung mit einer unabhängigen Veränderlichen ausgedehnt.[2]) Dieses allgemeinste Problem hatte er schon 1878 so gefaßt,[3]) daß er m Differentialgleichungen mit n gesuchten Funktionen der einen Veränderlichen x und $m < n$ angenommen hatte; es sollten dabei für $x = x_0$ die Werte aller Funktionen, für $x = x_1$ dagegen nur die Werte von $n - 1$ der Funktionen gegeben sein, während der Wert der $n$ten Funktion für das Argument $x = x_1$ unter den angenommenen Bedingungen ein Extremum werden sollte. Dieses Problem hatte Mayer damals behandelt, indem er die Multiplikatorenmethode als richtig vorausgesetzt hatte.

Bei den Beweisen für die Multiplikatorenmethode kam naturgemäß nur die erste Variation in Betracht. Die früher besprochenen Arbeiten Mayers aus dem Gebiet der Variationsrechnung beschäftigten sich alle mit der zweiten Variation, also im Grunde mit den feineren Bedingungen des schwachen Extremums. Die hinreichenden Bedingungen eines starken Extremums hat Mayer nicht bearbeitet. Vielleicht waren die Studien, die er in den letzten Jahren dem Hilbertschen Unabhängigkeitssatz gewidmet hat,[4]) der mit den Weierstrassschen Untersuchungen über das starke Extremum in naher Beziehung steht, als eine Vorbereitung dazu gedacht.

Die Arbeiten Mayers über die gewöhnlichen Maxima und Minima möchte ich im Anschluß an die Variationsrechnung

1) Vgl. Math. Annalen Bd. 25, S. 583. 2) Ber. Bd. 47, S. 129.
3) Ber. Bd. 30, S. 16.
4) Ber. Bd. 55 (1903), S. 131; Bd. 57, S. 49 und S. 313.

erwähnen. Er hat im Jahr 1881 eine Untersuchung über die Frage veröffentlicht[1]), unter welchen Bedingungen ein von einem Punkt auf eine krumme Oberfläche gefälltes Lot wirklich einen größten oder kleinsten Abstand des Punkts von der Oberfläche darstellt. MAYER fügte hier den bekannten Resultaten, die sich auf die Krümmungsradien beziehen und sich aus der Betrachtung der Glieder zweiter Ordnung in den benutzten Entwicklungen ergeben, einige neue und elegante Sätze hinzu, zu deren Beweis die Glieder dritter Ordnung beigezogen werden müssen. Er zeigte zugleich, daß die Resultate, wenn sie analytisch gefaßt werden, sich auf den Fall von beliebig vielen Variabeln ausdehnen lassen. Es ist dies die einzige geometrische Arbeit MAYERS.

Noch einige Male ist er auf die Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima zurückgekommen. Von diesen Arbeiten möchte ich besonders die im Jahr 1892 verfaßte[2]) hervorheben, in der er die schwierigen Fälle untersucht hat, in denen die Glieder zweiter Ordnung in der Entwicklung der Funktion, die ein Extremum werden soll, eine semidefinite Form bilden. Er hat dabei eine eigentümliche Definition des Extremums benutzt. So wird z. B. gesagt, daß eine Funktion von drei Veränderlichen $f(x_1, x_2, x_3)$ an der Stelle a_1, a_2, a_3 ein Minimum besitze, wenn, geometrisch gesprochen, für jede durch a_1, a_2, a_3 gehende Kurve, für die sich die Koordinaten in der Nähe der Stelle a_1, a_2, a_3 in gewöhnliche Potenzreihen eines Parameters entwickeln lassen, in der Entwicklung von

$$f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) - f(a_1, a_2, a_3)$$

das erste nicht verschwindende Glied von gerader Ordnung und positiv ist. Wollte man ohne weiteres annehmen, daß das Kriterium, das sich auf Grund der erwähnten Definition ergeben hat, für ein Extremum im gewöhnlichen Sinn hinreichend sei, so würde man eine Hypothese machen, deren Richtigkeit in Frage gezogen werden kann. MAYER hat deshalb selbst den eingeschlagenen Weg für nicht ganz einwurfsfrei erklärt, indem er zugleich bemerkte, daß man sich mit weniger strengen

1) Ber. Bd. 33, S. 28. 2) Ber. Bd. 44, S. 54.

Methoden behelfen müsse, wo ein absolut sicheres Fundament fehle. Eine Arbeit von Stolz, die befriedigende Fundamente gelegt hat, hatte er gerade nicht mehr benutzen können.

In einer früheren Arbeit (1889) hat Mayer die Reziprozitätsgesetze entwickelt,[1]) die im Gebiete der gewöhnlichen Maxima und Minima bestehen und die den von ihm in der Variationsrechnung bei den isoperimetrischen Problemen gefundenen Gesetzen analog sind.

Mayers erste mechanische Arbeit war historischer Art und wurde durch seine Antrittsvorlesung veranlaßt. Diese Untersuchung der Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion ist erst im Jahre 1877 gedruckt worden.[2]) Er hat hier namentlich die Anfänge des Prinzips völlig klar gelegt und insbesondere das Verdienst Eulers in das richtige Licht gesetzt, der zuerst ein präzises Prinzip, allerdings für einen speziellen Fall, aufgestellt hatte, während Maupertuis' Formulierungen ganz vager Natur waren. Hinsichtlich der Form, die Lagrange dem Prinzip gegeben und nicht ganz deutlich gefaßt hatte, kam er zu dem Ergebnis, daß Lagrange das von uns nach Hamilton benannte Prinzip gemeint haben müsse. Diese Auffassung hat Mayer später als nicht zutreffend erkannt und unumwunden zurückgenommen.[3])

Mit dem kinetischen Potential, d. h. mit dem Fall, daß das Potential von Massen nicht nur von ihren Lagen, sondern auch von ihren Geschwindigkeiten abhängt, hat er sich mehrfach beschäftigt. In der ersten dieser Untersuchungen aus dem Jahre 1877 hat er den allgemeinsten Ausdruck des kinetischen Potentials unter der Voraussetzung bestimmt, daß zugleich das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung erfüllt ist[4]), d. h. daß die Kräfte so beschaffen sind, daß sie im Gleichgewicht sein würden, falls das System starr wäre. Viel später (1896) hat Mayer die von v. Helmholtz

1) Ber. Bd. 41, S. 308.

2) Geschichte des Prinzips der kleinsten Action, Leipzig, 1877, übersetzt in Boncompagni, Bull. bibl. stor. sc. mat. 1878.

3) Ber. Bd. 38 (1886), S. 343.

4) Ber. Bd. 29, S. 86 u. Math. Annalen Bd. 13 (1878), S. 20.

aufgestellten Bedingungen bewiesen, denen die in den Koordinaten und deren ersten und zweiten Ableitungen ausgedrückten Komponenten der auf ein materielles System wirkenden Kräfte entsprechen müssen, damit ein kinetisches Potential existiert.[1]) Während v. HELMHOLTZ den Beweis seiner Formeln nur angedeutet, und KOENIGSBERGER für den Beweis einen anderen Weg angegeben und zugleich die Formeln bedeutend verallgemeinert hatte, benutzte MAYER in der erwähnten Arbeit ein besonderes JACOBIsches Variationsverfahren, durch das dann auch die interessanten KOENIGSBERGERschen Formeln mit äußerst wenig Rechnung vollständig hergeleitet werden.

Aus dem Jahre 1879 ist eine Arbeit[2]) über die relative Bewegung eines Systems irgendwie verbundener materieller Punkte um ihren Schwerpunkt. Hier bestimmte MAYER die Anzahl und Ordnung der Operationen, die im Sinne der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen nötig sind, um die Bewegung, die relativ zum Schwerpunkt statt hat, auf bloße Quadraturen zurückzuführen. Dabei wird vorausgesetzt, daß für diese relative Bewegung das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft und die drei Flächensätze gelten. Dies ist eine Untersuchung ganz im Geist der JACOBIschen Dynamik, die sich mit den Vorteilen beschäftigt, „welche man bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung aus der besonderen Form dieser Gleichungen ziehen kann.“ In ähnlichem Sinne hat MAYER 1893 die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer rauhen Kurve oder einer rauhen Fläche[3]) und 1902 die vollständige Bestimmung der Rotation eines starren Körpers unter der Voraussetzung, daß seine Winkelgeschwindigkeit schon gefunden ist,[4]) erörtert.

In den Jahren 1898 bis 1902 hat sich MAYER ausschließlich mit Mechanik und zwar hauptsächlich mit dem Stoß und der Reibung beschäftigt. In einer Arbeit[5]) aus dem Jahr 1898 hat er gewisse Sätze verallgemeinert, die ROUTH gegeben hatte, und die erlauben, die sämtlichen nach einem Stoß eintretenden

1) Ber. Bd. 48, S. 519. 2) Ber. Bd. 31, S. 34.
3) Ber. Bd. 45, S. 379. 4) Ber. Bd. 54, S. 53.
5) Ber. Bd. 50, S. 246; vgl. auch Bd. 51, S. 215.

Geschwindigkeiten durch eine Minimumsaufgabe zu finden, falls der Stoß nur darin besteht, daß gewissen Punkten des materiellen Systems bestimmte Geschwindigkeitsänderungen oder dem ganzen System bestimmte, vorher nicht vorhandene Verbindungen plötzlich aufgezwungen werden. Mayer setzte diese Sätze mit dem Gaussschen Prinzip des kleinsten Zwangs in Verbindung, für das er eine besondere Vorliebe hatte.

1899 hat er den Fall betrachtet, daß ein materielles System Ungleichungen unterworfen ist,[1]) und hat einen Trugschluß, der sich in die bekannten Arbeiten Ostrogradskys eingeschlichen hatte, und der von Study zuerst bemerkt worden war, ausführlich dargelegt. Zugleich hat er auch die Stöße unter der Voraussetzung behandelt, daß dabei Ungleichungen gelten.[2])

In den eben erwähnten Arbeiten hatte Mayer von Reibung vollständig abgesehen. 1901 fing er an, die Gesetze der gleitenden Reibung in ihren Konsequensen zu untersuchen.[3]) Er beschränkte sich auf den Fall, daß die Reibung nur in einem Punkte wirkt. Dabei richtete er sein Augenmerk besonders auf einen solchen Moment, in dem Ruhe herrscht, während in dem unmittelbar darauf folgenden Zeitintervall ein Gleiten eintritt.[4]) Er stellte sich nun eine besondere Frage, die vorher noch nicht aufgeworfen worden war. Handelt es sich z. B. darum, daß ein und derselbe Punkt des materiellen Systems auf einer festen Kurve oder Fläche gleitet, so wird dieser Punkt in dem betrachteten kleinen Zeitintervall aus der Ruhe heraus eine kleine Geschwindigkeit bekommen, die mit seiner Beschleunigung gleiche Richtung hat; es wird deshalb die Reibung in dem Zeitintervall der Beschleunigung entgegengesetzt und absolut gleich dem vollen Produkt von Normaldruck und Reibungskoeffizient sein. Nimmt man nun die Reibungskraft gleich diesem Produkt in irgend einer Richtung an, so ergeben die Differentialgleichungen der Bewegung zusammen mit den Bedingungsgleichungen des Systems den

1) Ber. Bd. 51, S. 224. 2) ebenda S. 245.

3) Ber. Bd. 53, S. 235.

4) Die Kräfte können möglicherweise auch erst zu wirken anfangen.

Normaldruck samt der Größe und Richtung der Beschleunigung des Punktes. Falls nun diese Richtung nicht der angenommenen der Reibung entgegengesetzt herauskommt, kann diese der angenommenen Richtung entgegengesetzte nicht die wahre Bewegungsrichtung des Punktes sein. Es ist möglich, daß auf diese Weise jede angenommene Richtung auf einen Widerspruch führt, und sich somit die Bewegung des Punktes als unmöglich erweist. MAYER stellte sich nun die Frage, ob in jedem Fall, in dem jene Differentialgleichungen die Bewegung als unmöglich erscheinen lassen, die Gesetze der Reibung, so wie sie für die Ruhe formuliert werden, wirklich den Ruhezustand als möglich ergeben, d. h. also, ob nicht in den Gesetzen der Reibung selbst ein Widerspruch enthalten ist. Er gelangte zu dem Resultat, daß im allgemeinen kein Widerspruch auftritt. Außerdem hat er noch die Frage beantwortet, wann bei einem starren Körper, der sich auf rauher Unterlage bewegt, der Normaldruck, den der Körper auf die Unterlage ausübt, unabhängig von der Reibung ist.

Im Jahre 1902 hat MAYER den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung untersucht,[1]) wobei er die Methoden, die von DARBOUX und ROUTH in der Behandlung dieser Frage benutzt worden sind, mit einander verbunden hat.

Nach diesen Arbeiten erschienen als letzte Veröffentlichungen MAYERS in den Jahren 1903—1905 die schon erwähnten Untersuchungen über den HILBERTschen Unabhängigkeitssatz.

Überblicken wir ADOLPH MAYERS wissenschafliche Lebensarbeit, so bietet sich ein überaus einheitliches und zugleich reiches Bild dar. Er hat drei nahe zusammenhängende und doch weite Felder der Wissenschaft mit großem Erfolge bebaut. Arbeiten anderer auf diesen Gebieten hat er genau verfolgt und vielfach eigene Untersuchungen an sie angeknüpft. Es lag in seiner Natur, daß er nur bei der gewissenhaftesten Durchführung seiner Arbeiten Befriedigung empfand, und so

1) Ber. Bd. 54, S. 208 u. 327.

hat er von Anfang an nach Exaktheit und Vollständigkeit gestrebt und stets nach den Ausnahmen der „im allgemeinen" geltenden Sätze gesucht. War er von einer mehr formal eleganten analytischen Richtung ausgegangen, so entwickelte er sich nach der strengeren Seite hin, indem er mehr und mehr dazu kam, Annahmen, die er früher ohne weiteres zugelassen hatte, zu beweisen. Er war aber nicht geneigt, durch solche Anforderungen der Strenge sich zu sehr aufhalten zu lassen; nicht überall ging er auf die Grundlagen der Analysis zurück und er hat es öfters ausgesprochen, daß Annahmen nichts schaden, wenn sie nicht stillschweigend gemacht werden. Fand er an einer seiner Arbeiten etwas zu verbessern, so hob er ausdrücklich hervor, was ihm an seinem früheren Standpunkte nicht mehr genügte. Seinem aufrichtigen und bescheidenen Charakter wurde dieses Zugeständnis nicht schwer.

Die geschilderten Grundzüge seines wissenschaftlichen Wesens kamen auch seinen Schülern zu gute in den Vorlesungen, die er auf das sorgfältigste ausarbeitete und in denen er niemals Schwierigkeiten verschleierte und umging, sondern die Zuhörer dahin zu bringen suchte, die Schwierigkeiten zu überwinden.

Wir aber dürfen ihn in seiner Sorgfalt, in seiner Aufrichtigkeit, in der Bescheidenheit, Einfachheit und Selbstlosigkeit, die ihn in seiner wissenschaftlichen und amtlichen Wirksamkeit wie im Leben ausgezeichnet haben, als ein leuchtendes Vorbild betrachten. Diesem Vorbild nachzustreben, wollen wir nie müde werden.

Verzeichnis
der im vorstehenden nicht angeführten Arbeiten Mayers.

1870. Der Satz der Variationsrechnung, welcher dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der Mechanik entspricht, Math. Annalen, Bd. 2, S. 143.

1871. Über die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Funktion, Annalen, Bd. 4, S. 88.

1872. Zur simultanen Integration linearer partieller Differentialgleichungen, Gött. Nachr. S. 315.

1872. Zur Theorie der vollständigen Lösungen und der Transformation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, ebenda S. 405.

1873. Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Gött. Nachr. S. 299.

1877. Über den Multiplikator eines JACOBIschen Systems, Math. Ann. Bd. 12, S. 132.

1880. Über die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwertung durch die Methoden von LIE, Math. Ann. Bd. 17, S. 332.

1883. Über die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst, Ann. Bd. 22, S. 368.

1887. Über ein Bewegungsproblem, diese Ber. Bd. 39, S. 123.

1889. Zur Theorie des gewöhnlichen Maximums und Minimums, ebenda Bd. 41, S. 122.

1890. Zur Theorie der vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln, Ann. Bd. 37, S. 399.

1899. Die Gleichgewichtsbedingungen reibungsloser Punktsysteme und die verschiedenen Arten des Gleichgewichtes, Leipziger Programm.

1899. Zur Theorie der Bewegung von Punktsystemen unter dem Einfluß von Potentialkräften, diese Ber. Bd. 51, S. 1.

Druckfertig erklärt 5. I. 1909.]

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHZIGSTER BAND.

1908.

MIT EINER TAFEL.

I.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1908.