UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Henri Poincaré

Anschauung und Logik in der Mathematik

Mit Anmerkungen von Heinrich Weber

Quelle:
Poincaré, Henri: Der Wert der Wissenschaft / ins Deutsche übertragen von E. Weber. — Leipzig, 1906, S. 8–25 und 213–216

Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques

Quelle:
Proceedings of the ... International Congress of Mathematicians / 2.1900, S. 115–130

Digitale Ausgabe erstellt von Gabriele Dörflinger
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2012

Zu den Autoren

Henri Poincaré, * Nancy 29.4.1854, † Paris 17.7.1912, lehrte ab 1881 als Professor an der Sorbonne in Paris. Er wurde 1887 zum Mitglied der Académie des Sciences gewählt und 1909 in die Académie française aufgenommen. Poincaré arbeitete auf rein mathematischen wie auf physikalischen Gebieten: so begründete er die algebraische Topologie (1892–1904) und forderte bereits 1904 die Invarianz aller Naturgesetze unter Lorentz-Transformationen. Poincaré beschäftigte sich oft mit philosophischen Problemen der Mathematik.

1905 publizierte Henri Poincaré (1854–1912) eine Sammlung von Aufsätzen, die unter dem Titel *La valeur de la science* zusammengefasst wurden.

Der erste Aufsatz *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques* geht auf einen Vortrag Poincarés zurück, den er als Schlussvortrag des 2. Internationalen Mathematikerkongresses am 11. August 1900 in Paris gehalten hatte. In diesem Aufsatz gibt er der Überzeugung Ausdruck, dass sowohl die für jede Weiterentwicklung nötige Intuition als auch die Sicherheit verschaffende Logik unverzichtbar für die Mathematik sind.

Emilie Weber, die bereits 1911 verstorbene Tochter des Mathematikers Heinrich Weber, übersetzte 1906 die Aufsatzsammlung ins Deutsche.

Das neben stehende Foto *Henri Poincarés* ist dieser deutschen Ausgabe entnommen.

Heinrich Weber, * Heidelberg 5.3.1842, † Straßburg 17.5.1913, war der Sohn des Heidelberger Gymnasialprofessors und Direktors der höhern Bürgerschule Georg Weber. Er habilitierte sich nach dem Studium in Königsberg 1866 in Heidelberg, wo er bis 1869 als Privatdozent und kurzzeitig als außerordentlicher Professor wirkte. 1970 folgte er einem Ruf als Ordinarius nach Zürich und wechselte 1875 nach Königsberg. Über Berlin, Marburg und Göttingen kam er 1895 nach Straßburg. Er arbeitete über mathematische Physik, Differentialgleichungen und algebraische Probleme. 1904 leitete er den III. Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg.

Inhaltsverzeichnis

Henri Poincaré
um 1885

Anschauung und Logik in der Mathematik

I.

Es ist unmöglich, die Werke der großen Mathematiker zu studieren, ja selbst die der kleinen, ohne zwei entgegengesetzte Tendenzen, oder vielmehr zwei vollständig verschiedene Geistesrichtungen zu unterscheiden. Die einen sind vor allem durch die Logik beeinflußt; wenn man ihre Werke liest, könnte man glauben, daß sie nur Schritt für Schritt vorrücken, nach der Methode eines Vauban, der mit seinen Belagerungswerken gegen eine Festung vorrückt, ohne dem Zufall das geringste zu überlassen. Die andern lassen sich durch die Anschauung leiten und machen, gleich kühnen Reitern im Vorpostengefecht, mit einem Schlag große Eroberungen, die aber nicht immer zuverlässig sind.

Nicht der zu bearbeitende Stoff veranlaßt sie zur einen oder anderen Methode. Wenn man die ersteren oft *Analytiker*, die anderen *Geometer* nennt, so bleiben die einen Analytiker, selbst bei geometrischen Arbeiten, während die anderen auch dann noch Geometer sind, wenn sie sich mit reiner Analyse beschäftigen. Es ist die Anlage des Geistes, die sie zu Logikern oder intuitiven Naturen macht, und sie können sich nicht davon befreien, wenn sie einen neuen Gegenstand vornehmen.

Es ist auch nicht die Erziehung, die in ihnen die eine der beiden Richtungen geweckt und die andere erstickt hat. Man wird zum Mathematiker geboren, nicht erzogen, und allem Anschein nach wird man auch zum Geometer oder zum Analytiker geboren.

Ich möchte Beispiele anführen, und es fehlt mir nicht daran, aber um den Gegensatz deutlich hervorzuheben, muß ich mit einem besonders schlagenden Beispiel beginnen; es sei mir gestattet, es an zwei lebenden Mathematikern zu zeigen.

Méray führt den Beweis, daß eine binomische Gleichung immer eine Wurzel hat, oder, gemeinverständlich ausgedrückt, daß jeder Winkel sich teilen läßt.

Wenn es eine Wahrheit gibt, die uns auf den ersten Blick als solche in die Augen fällt, so ist es diese. Wer zweifelt daran, daß ein Winkel sich immer in eine beliebige Anzahl gleicher Teile teilen läßt? Méray ist anderer Meinung, ihm scheint diese Voraussetzung keineswegs einleuchtend, und er widmet dem Beweis mehrere Seiten.

Nehmen wir dagegen Felix Klein, er studiert eine der allerabstraktesten Fragen der Funktionentheorie. Es handelt sich darum, ob auf einer gegebenen Riemannschen Fläche immer eine Funktion existiert, die gegebene Singularitäten zuläßt. Was macht der berühmte deutsche Geometer? Er ersetzt seine Riemannsche Fläche durch eine Metallfläche, deren elektrische Leitungsfähigkeit nach bestimmten Gesetzen variiert. Er verbindet zwei ihrer Punkte mit den zwei Polen einer elektrischen

Säule. Er sagt sich, daß der Strom hindurchgehen muß, und daß die Art, in der er sich über die Fläche verteilt, eine Funktion definiert, deren Singularitäten genau die durch das Problem geforderten sind.

Natürlich weiß KLEIN sehr gut, daß er damit nur ein Aperçu gemacht hat; trotzdem hat er nicht gezögert, es zu veröffentlichen. Und vermutlich glaubte er darin, wenn auch keinen strengen Beweis, so doch eine Art moralischer Gewißheit gefunden zu haben. Ein Logiker hätte eine derartige Vorstellung mit Abscheu von sich gewiesen, oder er wäre vielmehr gar nicht in die Lage gekommen sie abzuweisen, weil sie ihm nie in den Sinn gekommen wäre.

Ich möchte noch zwei Männer vergleichen, die der Stolz der französischen Wissenschaft sind, die uns erst kürzlich entrissen wurden, aber schon seit langem der Unsterblichkeit angehören: ich meine BERTRAND und HERMITE. Sie haben gleichzeitig die gleiche Schule besucht, sie genossen die gleiche Erziehung, waren den gleichen Einflüssen unterworfen. Und doch, welcher Unterschied! Das geht nicht nur aus ihren Schriften hervor; in ihren Vorträgen, ihrer Redeweise, ja selbst in ihrem Äußeren spricht es sich aus. Ihre Züge sind allen ihren Schülern unauslöschlich eingeprägt. All denen, die das Glück hatten, ihren Vorlesungen folgen zu dürfen, leben sie in frischem Andenken; es ist uns leicht, sie uns zurückzurufen.

BERTRAND ist beim Reden in steter Bewegung; bald scheint er einen äußeren Feind anzugreifen, bald zeichnet er durch eine Handbewegung die Figuren seiner Studien. Augenscheinlich erblickt er etwas und möchte es malen, darum nimmt er seine Zuflucht zu darstellenden Bewegungen. Ganz anders HERMITE; seine Augen scheinen die Berührung mit der Welt zu fliehen; nicht außen, in seinem Innern sucht er die Erkenntnis der Wahrheit.

Unter den deutschen Mathematikern dieses Jahrhunderts sind besonders zwei Namen berühmt, die der beiden Gelehrten, die die allgemeine Funktionentheorie geschaffen haben: WEIERSTRASS und RIEMANN. WEIERSTRASS führt alles auf die Betrachtung von Reihen und ihre analytische Umformung zurück, mit anderen Worten, er gründet die Analysis auf eine Art Erweiterung der Arithmetik. Man kann seine sämtlichen Schriften durchgehen, ohne eine Figur zu finden. RIEMANN hingegen nimmt sofort die Geometrie zu Hilfe, jede seiner Vorstellungen ist ein Bild, das man nie wieder vergißt, wenn man einmal den Sinn erfaßt hat.

In neuerer Zeit war LIE ein Mann der Anschauung; man konnte zweifeln, wenn man seine Werke las, man zweifelte nicht mehr, wenn man mit ihm gesprochen hatte; man sah sofort, daß er in Bildern dachte. Frau KOWALEVSKI war eine Logikerin.

Bei unsern Studenten kann man denselben Unterschied bemerken. Die einen behandeln ihre Probleme lieber durch „die Analyse“, die andern durch „die Geometrie“. Die ersteren sind unfähig „im Raum zu sehen“, die andern würden bei langen Rechnungen rasch ermüden und verwirrt werden.

Beide Geistesrichtungen sind dem Fortschritt der Wissenschaft in gleichem Maße nötig; die Logiker sowohl wie die Intuitiven haben Großes geleistet, was die anderen nicht vermocht hätten. Wer wagte zu entscheiden, ob es besser sei, daß WEIERSTRASS nie etwas geschrieben hätte, oder daß es keinen RIEMANN gegeben hätte? Die Analyse und die Synthese haben also beide ihre berechtigte Stellung, aber es ist interessant zu erforschen, welche Rolle der einen und der andern in der Geschichte der Wissenschaft zukommt.

II.

Wunderbar! wenn wir die Werke der Alten lesen, sind wir versucht, sie alle zu den Intuitiven zu zählen. Und dennoch bleibt sich die Natur immer gleich; es ist nicht wahrscheinlich, daß sie erst in diesem Jahrhundert angefangen hat, Geister zu schaffen, die sich der Logik zuwenden.

Könnten wir uns in den Ideengang ihrer Zeit zurückversetzen, so würden wir bald erkennen, daß viele dieser alten Geometer ihrer Neigung nach Analytiker waren. EUKLID zum Beispiel hat ein Gerüst des Wissens aufgerichtet, an dem seine Zeitgenossen keinen Fehler finden konnten. Obgleich an diesem umfangreichen Gebäude jedes Stück aus der Anschauung entstanden ist, erkennt man daran auch heute noch ohne Mühe das Werk eines Logikers.

Nicht die Geister sind es, die sich geändert haben, wohl aber die Ideen; die intuitiven Geister sind die gleichen geblieben, aber ihre Leser haben andere Anforderungen an sie gestellt.

Worin liegt der Grund dieser Umwälzung?

Er ist nicht schwer zu entdecken. Die Anschauung kann uns nicht die Strenge, nicht einmal volle Gewißheit geben, davon hat man sich mehr und mehr überzeugt.

Ich will einige Beispiele anführen. Wir wissen, daß es stetige Funktionen gibt, die keine Derivierte haben. Nichts ist der Anschauung anstößiger als diese Behauptung, die uns durch die Logik aufgedrängt wird. Unsere Väter würden nicht gezögert haben zu sagen: „Es ist klar, daß jede stetige Funktion eine Derivierte hat, denn jede Kurve hat eine Tangente".

Wie kann uns die Anschauung so sehr täuschen? Das kommt daher, daß, wenn wir versuchen uns eine Kurve zu denken, wir sie uns nicht ohne Dicke vorstellen können; ebenso sehen wir eine Gerade, wenn wir sie uns vorstellen wollen, in der Form eines geradlinigen Streifens von einer gewissen Breite. Wir wissen wohl, daß diese Linien keine Dicke haben; wir bemühen uns, sie uns immer schmäler und schmäler zu denken und uns so der Grenze zu nähern; das gelingt uns auch bis zu einem gewissen Grade, aber wir erreichen diese Grenze niemals. Und nun ist es klar, daß wir uns zwei schmale Bänder, das eine geradlinig, das andere gekrümmt, immer in einer Lage vorstellen können, wo sie leicht ineinander eingreifen, ohne einander zu durchdringen.

So kommen wir also dazu, wenn wir nicht durch eine strenge Analyse gewarnt sind, zu folgern, daß eine Kurve immer eine Tangente hat.

Ich wähle als zweites Beispiel das DIRICHLETsche Prinzip, auf dem so viele Theorien der mathematischen Physik fußen; heute begründet man es durch sehr strenge, aber auch sehr lange Schlußfolgerungen, früher begnügte man sich mit einem summarischen Beweis. Ein gewisses Integral, das von einer willkürlichen Funktion abhängig ist, kann niemals gleich Null werden. Man schloß daraus, daß es einen kleinsten Wert haben müsse. Der Fehler dieser Folgerung zeigt sich uns sofort, da wir den abstrakten Ausdruck Funktion gebrauchen, und da wir vertraut sind mit all den Singularitäten, die die Funktionen aufweisen können, wenn man das Wort in seiner allgemeinsten Bedeutung versteht.

Es wäre nicht so, wenn man sich konkreter Bilder bediente, wenn man zum Beispiel diese Funktion als elektrische Spannung betrachtete; man hätte für erlaubt gehalten zu behaupten, daß das elektrostatische Gleichgewicht erreicht werden wird. Vielleicht aber hätte ein physikalischer Vergleich doch einiges Mißtrauen erweckt. Wenn man sich aber bemüht hätte, diese Folgerung in die Sprache der Geometrie, der Vermittlerin zwischen der Sprache der Analysis und der Sprache der Physik, zu übertragen, so hätten sich diese Zweifel sicher nicht gezeigt, und vielleicht könnte man auf diese Weise sogar heute noch unbefangene Leser täuschen.

Die Anschauung gibt uns keine Sicherheit, darum konnte diese Umwälzung vor sich gehen; jetzt müssen wir ergründen, wie sie vor sich gegangen ist.

Sehr rasch hat man eingesehen, daß die Strenge nicht in die Schlußfolgerungen eingehen konnte, wenn man sie nicht zuvor durch die Definitionen einführte.

Lange Zeit waren die Gegenstände, mit denen die Mathematiker sich beschäftigen, zum größten Teil schlecht definiert; man glaubte sie zu kennen, weil man sie sich mit den Sinnen oder der Einbildungskraft vorstellte; aber man hatte nur ein rohes Bild, keine genaue Idee, auf die man eine Schlußfolgerung hätte gründen können.

Hier in erster Linie mußten die Logiker mit ihren Bemühungen einsetzen.

So zum Beispiel bei den inkommensurablen Zahlen.

Die unbestimmte Idee der Stetigkeit, die wir der Anschauung verdanken, hat sich in ein kompliziertes System von Ungleichungen aufgelöst, das sich auf ganze Zahlen bezieht.

Hierdurch sind die Schwierigkeiten, die von dem Grenzübergang, oder von der Betrachtung des Unendlich-Kleinen herrühren, endgültig aufgeklärt.

Heute bleiben in der Analyse nur noch ganze Zahlen oder endliche oder unendliche Systeme ganzer Zahlen, die untereinander durch ein Netz von Gleichheits- oder Ungleichheitsverhältnissen verbunden sind.

Die Mathematik hat sich, wie man sagt, arithmetisiert.

III.

Eine Hauptfrage drängt sich uns auf. Ist diese Umwälzung beendet?

Haben wir die absolute Genauigkeit schon erreicht? In jedem Stadium der Umwälzung glaubten unsere Väter schon, sie erreicht zu haben. Wenn sie sich irrten, warum sollten nicht auch wir uns irren gleich ihnen?

Wir glauben, in unseren Schlußfolgerungen die Anschauung nicht mehr zu Hilfe zu rufen. Die Philosophen sagen uns, daß dies eine Einbildung sei. Die reine Logik führe uns stets nur zu Wiederholungen, sie könne nichts Neues schaffen, aus ihr allein könne keine Wissenschaft hervorgehen.

Die Philosophen haben in einer Beziehung recht; zur Arithmetik sowohl als zur Geometrie oder zu irgend einer Wissenschaft braucht es noch etwas anderes als die reine Logik. Dies andere zu bezeichnen steht uns nur das Wort *Intuition* zur Verfügung; aber wieviel verschiedene Begriffe liegen in diesem einen Wort.

Vergleichen wir die folgenden vier Axiome:

1. Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch einander gleich.

2. Wenn ein Satz für die Zahl 1 wahr ist, und man beweist, daß er für $n+1$ wahr ist, vorausgesetzt, daß er es für n ist, so ist er für alle ganzen Zahlen wahr.

3. Wenn auf einer Geraden der Punkt C zwischen A und B liegt, und der Punkt D zwischen A und C, so liegt der Punkt D zwischen A und B.

4. Durch einen Punkt kann man nur *eine* Parallele zu einer Geraden ziehen.

Alle vier müssen der Anschauung zugeschrieben werden, und doch ist das erste der Ausdruck eines Gesetzes der formalen Logik, das zweite ist in Wahrheit ein synthetisches Urteil *a priori*, der Grundstein der strengen mathematischen Induktion; das dritte ist eine Berufung auf die Einbildungskraft, das vierte eine verhüllte Definition.

Die Intuition ist nicht unbedingt auf die Wahrnehmung der Sinne gegründet; die Sinne würden bald machtlos werden; wir können uns zum Beispiel das Tausendeck nicht vorstellen, und doch behandeln wir anschaulich die Vielecke im allgemeinen, unter denen das Tausendeck als besonderer Fall einbegriffen ist.

Was Poncelet unter dem *Stetigkeitsprinzip* versteht ist bekannt. Was bei einer reellen Größe zutrifft, sagt Poncelet, muß auch bei einer imaginären Größe zutreffen. Was bei einer Hyperbel, deren Asymptoten reell sind, zutrifft, muß auch bei einer Ellipse, deren Asymptoten imaginär sind, wahr sein. Poncelet war einer der aller intuitivsten Geister dieses Jahrhunderts; er war es mit Leidenschaft, fast mit Ostentation; er sah das Stetigköitsprinzip als eine seiner kühnsten Schöpfungen an, und doch beruht dieses Prinzip nicht auf dem Zeugnis der Sinne, es widerspricht vielmehr diesem Zeugnis, die Hyperbel der Ellipse gleichzustellen. Es war nur eine Art vorschneller und instinktiver Verallgemeinerung, die ich übrigens nicht verteidigen will.

Wir haben also mehrere Arten von Anschauung, erstens die Berufung auf die Sinne und die Einbildungskraft, dann die Verallgemeinerung durch Induktion, die den experimentellen Wissenschaften sozusagen nachgebildet wird; wir haben endlich die Anschauung der reinen Zahlen, aus der der zweite der ebengenannten Grundsätze hervorgegangen ist, und die allein die wahre mathematische Schlußfolgerung erzeugen kann.

Die zwei ersten können uns keine Sicherheit geben, das habe ich oben durch Beispiele gezeigt, aber wer könnte ernstlich an der dritten, wer könnte an der Arithmetik zweifeln?

Demnach gibt es, wenn man sich die Mühe machen will, streng zu sein, für die heutige Analyse nichts als Vernunftschlüsse oder die Berufung auf diese Intuition der reinen Zahl, die einzige, die uns nicht täuschen kann. Man kann sagen, daß heute die absolute Strenge erreicht ist.

IV.

Die Philosophen machen noch einen andern Einwurf: Was ihr an Strenge gewinnt, sagen sie, das verliert ihr an Objektivität. Ihr könnt euch zu eurem Ideal der Logik nur erheben, indem ihr die Fesseln zerschneidet, die euch an die Wirklichkeit knüpfen. Eure Wissenschaft ist makellos, aber sie kann es nur bleiben, indem sie sich in einen Turm von Elfenbein einschließt und sich jede Beziehung zur Außenwelt versagt. Sie ist aber gezwungen, ihn zu verlassen, sobald sie die geringste Anwendung versuchen will.

Ich will zum Beispiel beweisen, daß eine gewisse Eigenschaft einem gewissen Gegenstand zukomme, dessen Begriff mir anfangs undefinierbar erscheint, weil er der Anschauung entstammt. Ich scheitere zunächst mit meinem Versuch, oder ich muß mich mit ungefähren Beweisen begnügen; ich entschließe mich endlich, meinem Gegenstand eine genaue Definition zu geben, die mir erlaubt, diese Eigenschaften in einwandsfreier Weise festzustellen.

Und was dann? fragen die Philosophen. Es bleibt noch zu zeigen, daß der Gegenstand, der dieser Definition entspricht, auch genau der gleiche ist wie der, den die Anschauung dich kennen lehrte; oder noch besser, daß dieser wirkliche und konkrete Gegenstand, dessen Übereinstimmung mit deiner intuitiven Idee du sofort zu erkennen glaubst, deiner neuen Definition genau entspricht. Nur dann kannst du behaupten, daß er die in Frage stehende Eigenschaft besitzt; du hast die Schwierigkeit nur verschoben.

Das ist nicht richtig; man hat die Schwierigkeit nicht verschoben, man hat sie geteilt. Die Behauptung, um deren Begründung es sich handelte, besteht in Wirklichkeit aus zwei verschiedenen Wahrheiten, die man aber nicht von vornherein unterschieden hatte. Die erste ist eine mathematische Wahrheit, und die ist jetzt streng bewiesen. Die zweite ist eine experimentelle Wahrheit. Die Erfahrung nur kann uns lehren, ob dieses reale und konkrete Objekt dieser abstrakten Definition entspricht oder nicht. Diese zweite Wahrheit ist nicht mathematisch bewiesen, aber sie kann es auch nicht sein, so wenig wie ein empirisches Gesetz der Physik und Naturwissenschaft. Es wäre unvernünftig, mehr zu verlangen.

Ist es also nicht ein großer Fortschritt, unterschieden zu haben, was man lange Zeit mit Unrecht zusammengeworfen hatte?

Soll damit gesagt sein, daß nichts von diesem Einwurf der Philosophen übrig bleibt? Das will ich nicht sagen; die mathematische Wissenschaft nimmt, indem sie streng wird, den Charakter des Künstlichen an, der alle Welt befremdet; sie vergißt ihren historischen Ursprung; man sieht, wie die Fragen gelöst werden, können, man sieht nicht mehr, wie und warum sie gestellt wurden.

Das beweist uns, daß die Logik nicht genügt, daß die demonstrative Wissenschaft nicht die ganze Wissenschaft ist, und daß die Intuition ihre Rolle als Ergänzung, ich möchte sagen als Gegengewicht oder als Gegengift, beibehalten muß.

Ich hatte schon Gelegenheit, zu betonen, daß die Intuition ihren Platz im Unterricht der mathematischen Wissenschaft behaupten soll. Ohne sie wüßten sich die jungen Geister nicht in den Sinn der Mathematik zu finden, sie würden sie nicht lieben lernen und darin nichts sehen als ein leeres Wortgefecht. Besonders aber würden sie ohne sie nie fähig werden, die Mathematik anzuwenden.

Heute aber will ich vor allen Dingen von der Rolle der Anschauung in der Wissenschaft selber sprechen. Wenn sie dem Studenten nützlich ist, so ist sie es weit mehr noch dem schaffenden Gelehrten.

V.

Wir suchen die Wirklichkeit, aber was ist die Wirklichkeit?

Die Physiologen lehren uns, daß die Organismen aus Zellen zusammengesetzt sind; die Chemiker fügen hinzu, daß diese Zellen selbst wieder aus Atomen bestehen. Ist damit gesagt, daß diese Atome oder daß diese Zellen die Wirklichkeit darstellen, oder wenigstens die einzige Wirklichkeit? Ist die Art, wie diese Zellen gestaltet sind, und das, woraus die Einheit des Individuums entsteht, nicht auch eine Wirklichkeit, und eine weit interessantere als die der getrennten Elemente? Würde ein Naturforscher, der den Elephanten nie anders als mit dem Mikroskop studiert hat, glauben, dieses Tier genügend zu kennen?

Und in der Mathematik gibt es etwas dem Entsprechendes. Der Logiker zerlegt sozusagen jeden Beweis in eine sehr große Zahl Elementaroperationen. Wenn man alle diese Operationen, eine nach der anderen, prüft und gefunden hat, daß jede von ihnen fehlerlos ist, wird man dann glauben, den wahren Sinn des Beweises verstanden zu haben? Würde man ihn verstanden haben, selbst wenn es durch eine Anstrengung des Gedächtnisses gelänge, den ganzen Beweis zu wiederholen mit Anführung all der elementaren Schritte, in derselben Reihenfolge, in der sie der Erfinder angeordnet hat?

Offenbar nicht; wir besäßen noch nicht die volle Wirklichkeit; das gewisse Etwas, das die Einheit des Beweises ausmacht, würde uns ganz entgangen sein.

Die reine Analysis stellt uns eine Menge von Verfahren zur Verfügung, für deren Unfehlbarkeit sie uns bürgt; sie öffnet uns tausend Wege, die wir mit vollem Vertrauen betreten können, und bei denen wir sicherlich auf kein Hindernis stoßen; aber welcher von all diesen Wegen wird uns am schnellsten zum Ziele führen? Wer sagt uns, welchen wir wählen sollen? Wir brauchen eine Gabe, die uns von weitem das Ziel sehen läßt, und diese Gabe ist die Intuition. Sie ist dem Forscher nötig, um seinen Weg zu wählen, sie ist dem nicht weniger nötig, der seine Straße zieht und wissen möchte, warum er sie gewählt hat.

Wer einer Schachpartie beiwohnt, dem wird es zum Verständnis der Partie nicht genügen, die Regeln über den Lauf der Figuren zu kennen. Das würde ihm nur erlauben zu erkennen, daß jeder Zug den Regeln entsprechend gespielt wurde, und dieser Vorzug hätte sehr wenig Wert. Es wäre jedoch das gleiche, wie es dem Leser eines mathematischen Buches ginge, wenn er nur Logiker wäre. Die Partie verstehen, das ist etwas ganz anderes, das heißt wissen, warum der Spieler mit dieser Figur zieht anstatt mit jener anderen, was er auch hätte tun können, ohne die Spielregeln zu übertreten; das heißt den inneren Grund erkennen, der aus dieser Reihe aufeinanderfolgender Züge ein organisches Ganzes macht. Mit viel mehr Grund ist diese Fähigkeit dem Spieler selbst nötig, das heißt dem Erfinder.

Wir wollen diesen Vergleich verlassen und zur Mathematik zurückkehren.

Wie ist es zum Beispiel mit der Idee der stetigen Funktion ergangen? Anfangs war sie nichts als ein wahrnehmbares Bild, zum Beispiel ein Strich, der mit Kreide auf einer schwarzen Tafel gezogen war. Dann hat sie sich nach und nach verfeinert, bald hat man sich ihrer bedient, um ein kompliziertes System von Ungleichheiten aufzustellen, welches sozusagen alle Linien des Urbildes wiedergab. Als dieses Gebäude beendet war, hat man gewissermaßen das Gerüst abgebrochen; man hat die grobe Darstellung, die ihm kurze Zeit als Stütze diente und in Zukunft nutzlos war, verworfen; es ist nichts geblieben als die dem Auge des Logikers tadellos erscheinende Konstruktion selbst. Und dennoch, wenn das Urbild unserem Gedächtnis vollständig entschwunden wäre, wie könnten wir erraten, durch welche Laune sich all diese Ungleichheiten in dieser Weise eine auf der anderen aufgebaut haben?

Es mag scheinen, als treibe ich Mißbrauch mit Vergleichen; trotzdem möchte ich noch einen anführen. Allgemein bekannt sind die feinen Gefüge von Kieselnadeln, die das Skelett gewisser Schwämme bilden. Wenn die organische Materie vergangen ist, bleibt nichts wie ein zerbrechliches und zierliches Spitzengewebe. Es ist in Wirklichkeit nichts als Kieselsäure; aber was interessant ist, das ist die Form, die diese Kieselsäure angenommen hat, und wir können sie nicht verstehen, wenn wir nicht den lebenden Schwamm kennen, der ihr gerade diese Form aufgeprägt hat. So ist es auch bei den alten intuitiven Begriffen unserer Väter, die, selbst wenn wir sie aufgegeben haben, ihre Form noch dem logischen Gerüst aufdrücken, das wir an ihre Stelle gesetzt haben.

Dieser Überblick ist dem Erfinder nötig; er ist dem ebenso nötig, der den Erfinder wirklich verstehen will; kann ihn die Logik uns geben?

Nein, der Name, den ihr die Mathematiker geben, genügt, um das zu beweisen. In der Mathematik heißt die Logik Analysis, und Analysis bedeutet Zerteilung, Zergliederung. Sie kann demnach keine anderen Werkzeuge haben als das Seziermesser und das Mikroskop.

Also hat die Logik sowohl als die Anschauung jede ihre unentbehrliche Aufgabe. Beide sind notwendig. Die Logik, die allein die Gewißheit geben kann, ist das Werkzeug des Beweises; die Intuition ist das Werkzeug der Erfindung.

VI.

Aber in dem Augenblicke, wo ich diesen Schluß ziehe, befällt mich ein Zweifel. Zu Anfang habe ich zwei Arten mathematischer Geister unterschieden, die einen logisch und analytisch, die andern intuitiv und geometrisch. Nun sind aber auch die Analytiker Erfinder gewesen. Die Namen, die ich soeben angeführt habe, ersparen mir, das auszuführen.

Das ist ein Widerspruch, wenigstens scheinbar, der erläutert werden muß.

Glaubt man erstens etwa, daß die Logiker immer vom Allgemeinen zum Besonderen zu Werk gegangen sind, wie es ihnen die Regeln der strengen Logik vorzuschreiben scheinen? Auf diese Weise hätten sie die Grenzen der Wissenschaft nicht erweitern können, wissenschaftliche Eroberungen macht man nur durch die Verallgemeinerung.

In einem Kapitel von *„Wissenschaft und Hypothese“* hatte ich Gelegenheit, die Natur der mathematischen Schlüsse zu behandeln, und ich habe gezeigt, wie uns diese Schlüsse, ohne dabei ihre unbedingte Strenge einzubüßen, vom Besonderen zum Allgemeinen führen können durch einen Vorgang, den ich die *mathematische Induktion* genannt habe.

Durch dieses Verfahren haben die Analytiker die Wissenschaft gefördert, und wenn man die Einzelheiten ihrer Beweise prüft, so findet man es jeden Augenblick neben den klassischen Syllogismen des Aristoteles.

Wir sehen also schon, daß die Analytiker nicht, nach Art der Scholastiker, nur Syllogismen bilden.

Glaubt man ferner, daß sie immer Schritt für Schritt vorgegangen sind, ohne das Ziel, das sie erreichen wollten, vor Augen zu haben? Sie mußten auch den Weg vorhersehen, der sie dahin führte, und dazu brauchten sie einen Führer.

Dieser Führer ist in erster Linie die Analogie.

So ist zum Beispiel eine den Analytikern wertvolle Schlußfolgerung die, die sich auf die Anwendung der *Majoranten* gründet. Es ist bekannt, daß sie schon zur Lösung vieler Probleme gedient hat. Worin besteht nun die Arbeit des Erfinders, der sie auf ein neues Problem anwenden will? Er muß zuerst die Analogie seiner Frage mit denen, die schon auf diese Weise gelöst sind, erkennen; er muß dann ergründen, wodurch diese neue Frage sich von den anderen unterscheidet und die Abänderungen klarlegen, die an der Methode vorgenommen werden müssen.

Aber wie erkennt man diese Übereinstimmungen und Unterschiede?

In dem Beispiel, das ich soeben angeführt habe, sind sie fast immer augenfällig, aber ich hätte andere finden können, wo sie weit versteckter sind; oft bedarf es eines ungewöhnlichen Scharfsinnes, um sie aufzudecken.

Die Analytiker müssen, um sich diese verborgenen Analogien nicht entgehen zu lassen, mit anderen Worten, um Erfinder sein zu können, wenn sie ihre Zuflucht nicht zu den Sinnen und der Einbildungskraft nehmen wollen, ein unmittelbares Gefühl davon haben, was die Einheit eines Schlusses ist, was sozusagen seine Seele und sein inneres Leben ist.

Wenn man sich mit Hermite unterhielt, so zog er nie ein greifbares Bild heran, und doch bemerkte man sehr bald, daß ihm die allerabstraktesten Begriffe gleich lebenden Wesen waren. Er sah sie nicht, aber er fühlte, daß sie nicht eine künstliche Zusammenfügung sind, sondern daß sie ein Prinzip innerer Einheit haben.

Aber, wird man einwerfen, das ist ja auch noch Intuition. Müssen wir daraus schließen, daß der zu Anfang gemachte Unterschied nur Schein war, daß es nur *eine* Art Geister gibt, und daß alle Mathematiker von der Anschauung beherrscht werden, wenigstens alle, die fähig sind zu erfinden?

Nein, unsere Unterscheidung entspricht etwas Wirklichem. Ich habe oben gesagt, daß es mehrere Arten der Anschauung gibt. Ich habe gesagt, wie sehr die Intuition der reinen Zahlen, aus der strenge mathematische Folgerungen hervorgehen können, von der Intuition der Wahrnehmungen unterschieden ist, bei der, genau genommen, die Einbildungskraft alle Kosten tragen muß.

Ist der Abgrund, der sie trennt, weniger tief als es zuerst den Anschein hatte? Wird man mit einiger Aufmerksamkeit erkennen, daß sogar diese reine Intuition nicht ohne die Hilfe der Sinne bestehen kann? Das ist Sache der Psychologen und Metaphysiker; ich will mich mit dieser Frage nicht befassen.

Es genügt, daß die Sache unentschieden ist, um mir ein Recht zu geben, einen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Arten der Anschauung zu erkennen und zu behaupten, daß sie nicht den gleichen Gegenstand haben und zwei verschiedene Fähigkeiten unserer Seele in Tätigkeit zu setzen scheinen. Man könnte sie zwei Scheinwerfern vergleichen, die auf zwei einander fremde Welten gerichtet sind.

Die Intuition der reinen Zahl, der reinen, logischen Form erleuchtet die, die wir *Analytiker* genannt haben.

Sie ist es, die ihnen nicht nur zu beweisen, sondern auch zu erfinden erlaubt. Durch sie können sie mit einem Blick den allgemeinen Plan eines logischen Aufbaues erkennen, und zwar ohne daß die Sinne helfend einzugreifen scheinen.

Wenn sie auch die Hilfe der Einbildungskraft zurückweisen, die, wie wir gesehen haben, nicht immer unfehlbar ist, so können sie doch vorrücken ohne Furcht sich zu täuschen. Glücklich die, die diese Stütze entbehren können! Wir müssen sie bewundern; aber wie selten sind sie!

Es gibt also Erfinder unter den Analytikern, aber es gibt wenige.

Die meisten unter uns fühlen sich, wenn sie von weitem durch diese einzig reine Intuition sehen wollen, bald vom Schwindel erfaßt. Ihre Schwäche bedarf eines kräftigeren Stabes, und trotz der Ausnahmen, von denen wir eben gesprochen haben, ist es unzweifelhaft, daß die sinnliche Anschauung in der Mathematik das gewöhnlichste Werkzeug der Erfindung ist. Hier stellt sich eine Frage, die ich jetzt nicht nach allen ihren Einzelheiten erörtern und beantworten kann.

Ist es hier angebracht, eine neue Einteilung zu machen und unter den Analytikern die zu unterscheiden, die sich besonders dieser reinen Intuition bedienen, und die, die sich in erster Linie durch die formale Logik beeinflussen lassen?

Hermite zum Beispiel, den ich vorhin angeführt habe, kann nicht zu den Geometern gezählt werden, die Gebrauch von der sinnlichen Anschauung machen; aber er ist auch kein Logiker im eigentlichen Sinne. Er verbirgt seine Abneigung gegen das rein deduktive Verfahren nicht, das vom Allgemeinen ausgeht, um zum Einzelnen zu gelangen.

Anmerkungen von Heinrich Weber

Schön und lebendig hat der Verfasser hier die beiden Geistesrichtungen geschildert, die in der Mathematik und wohl auch in anderen Wissenschaften die Forschung leiten, die intuitive und die logische, oder die geometrische und die analytische; man könnte auch sagen die mathematische und die naturwissenschaftliche. Sollte sich aber nicht, und vielleicht gerade bei den hervorragendsten und bahnbrechendsten Geistern, beides vereinigen lassen? Helmholtz, der der Medizin den Augenspiegel geschenkt und die Physik und die Physiologie mit so vielen Entdeckungen bereichert hat, fühlte sich gedrungen, die Grundlagen der Geometrie zu untersuchen, und in der Theorie der Sinneswahrnehmungen nach den psychologischen Voraussetzungen zu forschen. Heinrich Hertz, dem wir die Entdeckung der elektrischen Wellen verdanken, hat sein System der Mechanik mit der scharfsinnigen Hypothese der unsichtbaren Massen nach seiner eigenen Aussage hauptsächlich in der Absicht ausgebildet, um seinem Bedürfnis nach logischer Reinheit Genüge zu tun. Auch den Verfasser unseres Werkes selber, dem wir auf dem Gebiete der reinen Mathematik und der mathematischen Physik so viele schöne Entdeckungen verdanken, dürfen wir zu diesen vielseitigen Naturen zählen.

Was die Intuition in der Naturwissenschaft zu leisten vermag, und wo sie ihre Grenzen findet, zeigt sich deutlich bei Goethe, dem die künstlerische Anschauung auch in der Natur alles war. In der Morphologie hat sie ihm die geheimen Gesetze enthüllt, wenn er zum Beispiel in den Staubfäden und Blütenblättern umgewandelte Blätter, in den Schädelknochen umgewandelte Wirbel erkannte. Hier zeigt die lebendige Anschauung dem feinsinnigen Beobachter leise Züge, die zu fein sind, um in Worten und Definitionen ausgedrückt zu werden, über die der nicht dafür Organisierte leicht hinwegsieht. Es ist, wie wenn man einen Bekannten aus Tausenden mit unfehlbarer Sicherheit herauskennt, ohne daß man es in Worte ausdrücken oder auch nur sich vergegenwärtigen kann, worin die Kennzeichen bestehen. In dem physikalischen Teil der Farbenlehre, wo die mathematische Zergliederung der Erscheinungen unerläßlich ist, mußte ein so ausschließlich intuitiver Geist wie Goethe scheitern.

Eine vortreffliche Darlegung dieses Unterschiedes findet sich in dem Aufsatz von Helmholtz: „*Über Goethes naturwissenschaftliche Arbeiten.*"

Zum Dirichletschen Prinzip (S. 6).

Das sogenannte DirichletschePrinzip ist eine Schlußweise, die in den Händen von Riemann außerordentlich fruchtbar gewesen ist, deren Strenge aber seitdem angefochten wird. Es beruht auf dem auf den ersten Blick evident erscheinenden Grundsatz, an dem selbst Gauss noch keinen Anstoß nahm, daß unter einer Menge von positiven Zahlwerten einer der kleinste sein muß. Dieser Satz ist unbestreitbar, wenn es sich um eine *endliche* Menge von Zahlen handelt. Daß es sich aber bei einer unendlichen oder stetig veränderlichen Menge von Zahlen nicht so verhält, kann folgendes Beispiel zeigen:

Sollen zwei Punkte A und B durch einen Weg miteinander verbunden werden, so weiß jeder, daß dieser Weg am kürzesten ist, wenn er geradlinig ist. Soll der Weg von A über B nach C führen, so wird es auch für diese Aufgabe ein Minimum der Weglänge geben, und zwar ist dieser kürzeste Weg aus den geraden Linien AB und BC zusammengesetzt. Liegen aber diese drei Punkte nicht in gerader Linie, so muß dieser Weg bei B einen Knick, eine scharfe Ecke haben. Soll also unter allen Wegen *ohne scharfe Ecke* der kürzeste gesucht werden, der von A über B nach C führt, so gibt es keinen solchen; denn der Weg wird um so kürzer, je mehr er sich dem geradlinigen Weg annähert, also je stärker seine Krümmung bei B ist.

Riemann selbst hat dieses Bedenken wohl empfunden und hat ihm durch eine besondere Betrachtung zu begegnen gesucht, die aber auch noch nicht alle denkbaren Möglichkeiten umfaßt.

Wie sehr sich die Ansichten über das, was an mathematischer Strenge zu fordern ist, im Laufe der Zeit ändern, das erkennt jeder, der einen Zeitraum der Geschichte der Wissenschaft überblickt, der sich nicht auf gar viele Jahrzehnte zu erstrecken braucht. Jede Kritik an den bisher für streng gehaltenen Schlüssen und Definitionen ruft neue Einwände und Bedenken hervor und begründet den Zweifel, ob selbst in der Arithmetik eine absolute Strenge möglich ist, die keinem Einwurf mehr Raum gibt. Man vergleiche hierüber, was in der ersten Anmerkung gesagt ist.

Majoranten (S. 11)

Der Ausdruck ,,*Majoranten*" ist bei den deutschen Mathematikern noch nicht allgemein bekannt. Wenn es sich zum Beispiel um die Konvergenz gewisser kompliziert gebauter, unendlicher Potenzreihen handelt, vergleicht man die Reihe mit einer anderen, deren Koeffizienten positiv und dem absoluten Wert nach größer sind als die Koeffizienten der ersten Reihe. Eine solche Reihe heißt eine *Majorante* der ersten, und die erste ist sicher konvergent, wenn es die zweite ist. Eine Majorante ist natürlich durch eine gegebene Reihe nicht bestimmt; man wählt sie möglichst einfach, so daß sie leicht auf ihre Konvergenz untersucht und womöglich sogar summiert werden kann. Auf diese Weise kann man zum Beispiel die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen feststellen, die gewissen Anfangsbedingungen genügen.

Dieser Methode hat sich bereits Cauchy unter dem Namen ,,Calcul des limites" bedient.

Man sehe über Majoranten: Goursat: Cours d'analyse, tome I, chapitre IX tome II. chapitre XIX. Poincaré widmet der Methode der Majoranten in dem Werke ,,Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste" ein besonderes Kapitel (t. I, chap. II).

DU RÔLE

DE L'INTUITION ET DE LA LOGIQUE

EN MATHÉMATIQUES,

PAR M. HENRI POINCARÉ (PARIS).

I.

Il est impossible d'étudier les Œuvres des grands mathématiciens, et même celles des petits, sans remarquer et sans distinguer deux tendances opposées, ou plutôt deux sortes d'esprits entièrement différents. Les uns sont avant tout préoccupés de la logique; à lire leurs Ouvrages, on est tenté de croire qu'ils n'ont avancé que pas à pas, avec la méthode d'un Vauban qui pousse ses travaux d'approche contre une place forte, sans rien abandonner au hasard. Les autres se laissent guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde.

Ce n'est pas la matière qu'ils traitent qui leur impose l'une ou l'autre méthode. Si l'on dit souvent des premiers qu'ils sont des *analystes* et si l'on appelle les autres *géomètres*, cela n'empêche pas que les uns restent analystes, même quand ils font de la Géométrie, tandis que les autres sont encore des géomètres, même s'ils s'occupent d'Analyse pure. C'est la nature même de leur esprit qui les fait logiciens ou intuitifs, et ils ne peuvent la dépouiller quand ils abordent un sujet nouveau.

Ce n'est pas non plus l'éducation qui a développé en eux l'une des deux tendances et qui a étouffé l'autre. On naît mathématicien, on ne le devient pas, et il semble aussi qu'on naît géomètre, ou qu'on naît analyste.

Je voudrais citer des exemples et certes ils ne manquent pas; mais pour accentuer le contraste, je voudrais commencer par un exemple extrême; pardon, si je suis obligé de le chercher auprès de deux mathématiciens vivants.

M. Méray veut démontrer qu'une équation binome a toujours une racine. S'il est une vérité que nous croyons connaître par intuition directe, c'est bien celle-là. Qui doutera qu'un angle peut toujours être partagé en un nombre quelconque de parties égales? M. Méray n'en juge pas ainsi; à ses yeux, cette proposition n'est nullement évidente et pour la démontrer, il lui faut plusieurs pages.

Voyez au contraire M. Klein : il étudie une des questions les plus abstraites de la théorie des fonctions; il s'agit de savoir si sur une surface de Riemann donnée, il existe toujours une fonction admettant des singularités données : par exemple deux points singuliers logarithmiques avec des résidus égaux et de signe contraire. Que fait le célèbre géomètre allemand? Il remplace sa surface de Riemann par une surface métallique dont la conductibilité électrique varie suivant certaines lois. Il met les deux points logarithmiques en communication avec les deux pôles d'une pile. Il faudra bien que le courant passe, et la façon dont ce courant sera distribué sur la surface définira une fonction dont les singularités seront précisément celles qui sont prévues par l'énoncé.

Sans doute, M. Klein sait bien qu'il n'a donné là qu'un aperçu : toujours est-il qu'il n'a pas hésité à le publier; et il croyait probablement y trouver sinon une démonstration rigoureuse, du moins je ne sais quelle certitude morale. Un logicien aurait rejeté avec horreur une semblable conception, ou plutôt il n'aurait pas eu à la rejeter, car dans son esprit elle n'aurait jamais pu naître.

Permettez-moi encore de comparer deux hommes, dont l'un vient tout récemment de nous être enlevé par la mort, dont l'autre est encore notre doyen vénéré, mais qui tous deux sont depuis longtemps entrés dans l'immortalité. Je veux parler de M. Bertrand et de M. Hermite. Ils ont été élèves de la même école et en même temps; ils ont subi la même éducation, les mêmes influences; et pourtant quelle divergence; ce n'est pas seulement dans leurs écrits qu'on la voit éclater; c'est dans leur enseignement, dans leur façon de parler, dans leur aspect même. Dans la mémoire de tous leurs élèves, ces deux physionomies se sont gravées en traits ineffaçables; pour la plupart d'entre nous qui avons eu le bonheur de suivre leurs leçons, ce souvenir est encore tout récent; il nous est aisé de l'évoquer.

Tout en parlant, M. Bertrand est toujours en action; tantôt il semble aux prises avec quelque ennemi extérieur, tantôt il dessine d'un geste de la main les figures qu'il étudie. Évidemment, il voit et il cherche à peindre, c'est pour cela qu'il appelle le geste à son secours. Pour M. Hermite, c'est tout le contraire; ses yeux semblent fuir le contact du monde; ce n'est pas au dehors, c'est au dedans qu'il cherche la vision de la vérité.

Parmi les géomètres allemands de ce siècle, deux noms surtout sont illustres; ce sont ceux des deux savants qui ont fondé la théorie générale des fonctions, Weierstrass et Riemann. Weierstrass ramène tout à la considération des séries et à leurs transformations analytiques; pour mieux dire, il réduit l'Analyse à une sorte de prolongement de l'Arithmétique; on peut parcourir tous ses Livres sans y trouver une figure. Riemann, au contraire, appelle tout de suite la Géométrie à son secours, chacune de ses conceptions est une image que nul ne peut oublier dès qu'il en a compris le sens.

Plus récemment, Lie était un intuitif; on aurait pu hésiter en lisant ses Ouvrages, on n'hésitait plus après avoir causé avec lui; on voyait tout de suite qu'il pensait en images. M^me^ Kowalevski était une logicienne.

Chez nos étudiants, nous remarquons les mêmes différences; les uns aiment mieux traiter leurs problèmes « par l'Analyse », les autres « par la Géométrie ». Les premiers sont incapables de « voir dans l'espace », les autres se lasseraient promptement des longs calculs et s'y embrouilleraient.

Les deux sortes d'esprits sont également nécessaires aux progrès de la Science; les logiciens, comme les intuitifs, ont fait de grandes choses que les autres n'auraient pas pu faire. Qui oserait dire s'il aimerait mieux que Weierstrass n'eût jamais écrit, ou s'il préférerait qu'il n'y eût pas eu de Riemann? L'Analyse et la Synthèse ont donc toutes deux leur rôle légitime. Mais il est intéressant d'étudier de plus près quelle est dans l'histoire de la Science la part qui revient à l'une et à l'autre.

II.

Chose curieuse ! Si nous relisons les Œuvres des anciens, nous serons tentés de les classer tous parmi les intuitifs. Et pourtant la nature est toujours la même, il est peu probable qu'elle ait commencé seulement dans ce siècle à créer des esprits amis de la logique.

Si nous pouvions nous replacer dans le courant des idées qui régnaient de leur temps, nous reconnaîtrions que beaucoup de ces vieux géomètres étaient analystes par leurs tendances. Euclide, par exemple, a élevé un échafaudage savant où ses contemporains ne pouvaient trouver de défaut. Dans cette vaste construction, dont chaque pièce, pourtant, est due à l'intuition, nous pouvons encore aujourd'hui sans trop d'efforts reconnaître l'œuvre d'un logicien.

Ce ne sont pas les esprits qui ont changé, ce sont les idées; les esprits intuitifs sont restés les mêmes; mais leurs lecteurs ont exigé d'eux plus de concessions.

Quelle est la raison de cette évolution?

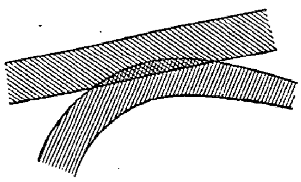
Il n'est pas difficile de le découvrir. L'intuition ne peut nous donner la rigueur, ni même la certitude, on s'en est aperçu de plus en plus.

Citons quelques exemples. Nous savons qu'il existe des fonctions continues dépourvues de dérivées. Rien de plus choquant pour l'intuition que cette proposition qui nous est imposée par la logique. Nos pères n'auraient pas manqué de dire : « Il est évident que toute fonction continue a une dérivée, puisque toute courbe a une tangente. »

Comment l'intuition peut-elle nous tromper à ce point? C'est que quand nous cherchons à imaginer une courbe, nous ne pouvons pas nous la représenter sans épaisseur; de même, quand nous nous représentons une droite, nous la voyons sous la forme d'une bande rectiligne d'une certaine largeur. Nous savons bien que ces lignes n'ont pas d'épaisseur; nous nous efforçons de les imaginer de plus en plus minces et de nous rapprocher ainsi de la limite; nous y parvenons dans une certaine mesure, mais nous n'atteindrons jamais cette limite.

Et alors il est clair que nous pourrons toujours nous représenter ces deux rubans étroits, l'un rectiligne, l'autre curviligne, dans une

Fig. 1.



position telle qu'ils empiètent légèrement l'un sur l'autre sans se traverser (*fig.* 1).

Nous serons ainsi amenés, à moins d'être avertis par une analyse rigoureuse, à conclure qu'une courbe a toujours une tangente.

Je prendrai comme second exemple le principe de Dirichlet; on s'est contenté d'abord d'une démonstration sommaire. Une certaine intégrale dépendant d'une fonction arbitraire ne peut jamais s'annuler. On en conclut qu'elle doit avoir un minimum. Le défaut de ce raisonnement nous apparaît immédiatement parce que nous employons le terme abstrait de *fonction* et que nous sommes familiarisés avec toutes les singularités que peuvent présenter les fonctions quand on entend ce mot dans le sens le plus général.

Mais il n'en serait pas de même si l'on s'était servi d'images concrètes, si l'on avait par exemple considéré cette fonction comme un potentiel électrique; on aurait pu croire légitime d'affirmer que l'équilibre électrostatique peut être atteint. Peut-être cependant une comparaison physique aurait éveillé quelques vagues défiances. Mais si l'on avait pris soin de traduire le raisonnement dans le langage de la Géométrie, intermédiaire entre celui de l'Analyse et celui de la Physique, ces défiances ne se seraient sans doute pas produites, et peut-être pourrait-on ainsi, même aujourd'hui, tromper encore bien des lecteurs non prévenus.

L'intuition ne nous donne donc pas la certitude. Voilà pourquoi l'évolution devait se faire; voyons maintenant comment elle s'est faite.

On n'a pas tardé à s'apercevoir que la rigueur ne pourrait pas s'introduire dans les raisonnements, si on ne la faisait entrer d'abord dans les définitions.

Longtemps les objets dont s'occupent les mathématiciens étaient pour la plupart mal définis; on croyait les connaître parce qu'on se les représentait avec les sens ou l'imagination; mais on n'en avait qu'une image grossière et non une idée précise sur laquelle le raisonnement pût avoir prise.

C'est là d'abord que les logiciens ont dû porter leurs efforts.

Ainsi pour le nombre incommensurable.

L'idée vague de continuité, que nous devions à l'intuition, s'est résolue en un système compliqué d'inégalités portant sur des nombres entiers.

Par là les difficultés provenant des passages à la limite, ou de la considération des infiniment petits, se sont trouvées définitivement éclaircies.

Il ne reste plus aujourd'hui en Analyse que des nombres entiers ou des systèmes finis ou infinis de nombres entiers, reliés entre eux par un réseau de relations d'égalité ou d'inégalité.

Les Mathématiques, comme on l'a dit, se sont arithmétisées.

III.

Une première question se pose. Cette évolution est-elle terminée? Avons-nous atteint enfin la rigueur absolue? A chaque stade de l'évolution nos pères croyaient aussi l'avoir atteinte. S'ils se trompaient, ne nous trompons-nous pas comme eux?

Nous croyons dans nos raisonnements ne plus faire appel à l'intuition; les philosophes nous diront que c'est là une illusion. La logique toute pure ne nous mènerait jamais qu'à des tautologies; elle ne pourrait créer du nouveau; ce n'est pas d'elle toute seule qu'aucune science peut sortir.

Ces philosophes ont raison dans un sens; pour faire l'Arithmétique, comme pour faire la Géométrie, ou pour faire une science quelconque, il faut autre chose que la logique pure. Cette autre chose, nous n'avons pour la désigner d'autre mot que celui d'*intuition*. Mais combien d'idées différentes se cachent sous ce même mot?

Comparons ces quatre axiomes :

1° Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

2° Si un théorème est vrai du nombre 1 et si l'on démontre qu'il est vrai de $n+1$, pourvu qu'il le soit de n, il sera vrai de tous les nombres entiers.

3° Si sur une droite le point C est entre A et B et le point D entre A et C, le point sera entre A et B.

4° Par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Tous quatre doivent être attribués à l'intuition, et cependant le premier est l'énoncé d'une des règles de la logique formelle; le second est un véritable jugement synthétique *a priori*, c'est le fondement de l'induction mathématique rigoureuse; le troisième est un appel à l'imagination; le quatrième est une définition déguisée.

L'intuition n'est pas forcément fondée sur le témoignage des sens; les sens deviendraient bientôt impuissants; nous ne pouvons par exemple nous représenter le chilogone et cependant nous raisonnons souvent par intuition sur les polygones en général, qui comprennent le chilogone comme cas particulier.

Vous savez ce que Poncelet entendait par le *principe de continuité.* Poncelet était l'un des esprits les plus intuitifs de ce siècle; il l'était avec passion, presque avec ostentation; il regardait le principe de continuité comme une de ses conceptions les plus hardies, et cependant ce principe ne reposait pas sur le témoignage des sens; c'était plutôt contredire ce témoignage que d'assimiler l'hyperbole à l'ellipse. Il n'y avait là qu'une sorte de généralisation hâtive et instinctive que je ne veux d'ailleurs pas défendre.

Nous avons donc plusieurs sortes d'intuitions; d'abord, l'appel aux sens et à l'imagination; ensuite, la généralisation par induction, calquée, pour ainsi dire, sur les procédés des sciences expérimentales; nous avons enfin l'intuition du nombre pur, celle d'où est sorti le second des axiomes que j'énonçais tout à l'heure et qui peut engendrer le véritable raisonnement mathématique.

Les deux premières ne peuvent nous donner la certitude, je l'ai montré plus haut par des exemples; mais qui doutera sérieusement de la troisième, qui doutera de l'Arithmétique?

Or, dans l'Analyse d'aujourd'hui, quand on veut se donner la peine d'être rigoureux, il n'y a plus que des syllogismes ou des appels à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte.

IV.

Les philosophes font encore une autre objection : « Ce que vous gagnez en rigueur, disent-ils, vous le perdez en objectivité. Vous ne pouvez vous élever vers votre idéal logique qu'en coupant les liens qui vous rattachent à la réalité. Votre Science est impeccable, mais elle ne peut le rester qu'en s'enfermant dans une tour d'ivoire et en s'interdisant tout rapport avec le monde extérieur. Il faudra bien qu'elle en sorte dès qu'elle voudra tenter la moindre application. »

Je veux démontrer, par exemple, que telle propriété appartient à tel objet dont la notion me semble d'abord indéfinissable parce qu'elle est intuitive. J'échoue d'abord ou je dois me contenter de démonstrations par à peu près; je me décide enfin à donner à mon objet une définition précise, ce qui me permet d'établir cette propriété d'une manière irréprochable.

« Et après, disent les philosophes, il reste encore à montrer que l'objet qui répond à cette définition est bien le même que l'intuition vous avait fait connaître; ou bien encore que tel objet réel et concret dont vous croyiez reconnaître immédiatement la conformité avec votre idée intuitive, répond bien à votre définition nouvelle. C'est alors seulement que vous pourrez affirmer qu'il jouit de la propriété en question. Vous n'avez fait que déplacer la difficulté. »

Cela n'est pas exact; on n'a pas déplacé la difficulté, on l'a divisée. La proposition qu'il s'agissait d'établir se composait en réalité de deux vérités différentes, mais que l'on n'avait pas distinguées tout d'abord. La première était une vérité mathématique et elle est maintenant rigoureusement établie. La seconde était une vérité expérimentale. L'expérience seule peut nous apprendre que tel objet réel et concret répond ou ne répond pas à telle définition abstraite. Cette seconde vérité n'est pas démontrée mathématiquement, mais elle ne peut pas l'être, pas plus que ne peuvent l'être les lois empiriques des Sciences physiques et naturelles. Il serait déraisonnable de demander davantage.

Eh bien, n'est-ce pas un grand progrès d'avoir distingué ce qu'on avait longtemps confondu à tort?

Est-ce à dire qu'il n'y ait rien à retenir de cette objection des philosophes? Ce n'est pas cela que je veux dire; en devenant rigoureuse, la Science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde; elle oublie ses origines historiques; on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent.

Cela nous montre que la logique ne suffit pas; que la Science de la démonstration n'est pas la Science tout entière et que l'intuition doit conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contrepoids ou comme contrepoison de la logique.

Dans l'*Enseignement mathématique*, cette Revue créée par M. Laisant et qui commence à être bien connue du monde savant, j'ai déjà eu l'occasion d'insister sur la place que doit garder l'intuition dans l'enseignement des Sciences mathématiques. Sans elle, les jeunes esprits ne sauraient s'initier à l'intelligence des Mathématiques; ils n'apprendraient pas à les aimer et n'y verraient qu'une vaine logomachie; sans elle surtout, ils ne deviendraient jamais capables de les appliquer.

Mais aujourd'hui, c'est avant tout du rôle de l'intuition dans la Science elle-même que je voudrais parler. Si elle est utile à l'étudiant, elle l'est plus encore au savant créateur.

V.

Nous cherchons la réalité, mais qu'est-ce que la réalité?

Les physiologistes nous apprennent que les organismes sont formés de cellules; les chimistes ajoutent que les cellules elles-mêmes sont formées d'atomes. Cela veut-il dire que ces atomes ou que ces cellules constituent la réalité ou du moins la seule réalité? La façon dont ces cellules sont agencées et d'où résulte l'unité de l'individu, n'est-elle pas aussi une réalité, beaucoup plus intéressante que celle des éléments isolés, et un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître suffisamment cet animal?

Eh bien, en Mathématiques, il y a quelque chose d'analogue. Le logicien décompose pour ainsi dire chaque démonstration en un très grand nombre d'opérations élémentaires; quand on aura examiné ces opérations les unes après les autres et qu'on aura constaté que chacune d'elles est correcte, croira-t-on avoir compris le véritable sens de la démonstration? L'aura-t-on compris même quand, par un effort de mémoire, on sera devenu capable de répéter cette démonstration en reproduisant toutes ces opérations élémentaires dans l'ordre même où les avait rangées l'inventeur?

Évidemment non, nous ne posséderons pas encore la réalité tout entière, ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration nous échappera complètement.

Dans ces édifices compliqués élevés par les maîtres de la Science mathématique, il ne suffit pas de constater la solidité de chaque partie et d'admirer l'œuvre du maçon, il faut comprendre le plan de l'architecte.

Or, pour comprendre un plan, il faut en apercevoir à la fois toutes les parties, et le moyen de tout embrasser dans un coup d'œil d'ensemble, c'est l'intuition seule qui peut nous le donner.

L'Analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infaillibilité; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance; nous sommes assurés de n'y pas rencontrer d'obstacles; mais, de tous ces chemins, quel est celui qui nous mènera le plus promptement au but? Qui nous dira lequel il faut choisir? Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition. Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle ne l'est pas moins à celui qui marche sur ses traces et qui veut savoir pourquoi il l'a choisie.

Si vous assistez à une partie d'échecs, il ne vous suffira pas, pour comprendre la partie, de savoir les règles de la marche des pièces. Cela vous permettrait seulement de reconnaître que chaque coup a été joué conformément à ces règles et cet avantage aurait vraiment bien peu de prix. C'est pourtant ce que ferait le lecteur d'un livre de Mathématiques, s'il n'était que logicien. Comprendre la partie, c'est tout autre chose; c'est savoir pourquoi le joueur avance telle pièce plutôt que telle autre qu'il aurait pu faire mouvoir sans violer les règles du jeu. C'est apercevoir la raison intime qui fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé. A plus forte raison, cette faculté est-elle nécessaire au joueur lui-même, c'est-à-dire à l'inventeur.

Laissons là cette comparaison et revenons aux Mathématiques.

Voyons ce qui est arrivé, par exemple, pour l'idée de fonction continue. Au début, ce n'était qu'une image sensible, par exemple, celle d'un trait continu tracé à la craie sur un tableau noir. Puis elle s'est épurée peu à peu, bientôt on s'en est servi pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduisait pour ainsi dire toutes les lignes de l'image primitive; quand cette construction a été terminée, on a *décintré*, pour ainsi dire, on a rejeté cette représentation grossière qui lui avait momentanément servi d'appui et qui était désormais inutile; il n'est plus resté que la construction elle-même, irréprochable aux yeux du logicien. Et cependant si l'image primitive avait totalement disparu de notre souvenir, comment devinerions-nous par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres?

Vous trouverez peut-être que j'abuse des comparaisons; passez-m'en cependant encore une. Vous avez vu sans doute ces assemblages délicats d'aiguilles siliceuses qui forment le squelette de certaines éponges. Quand la matière organique a disparu, il ne reste qu'une frêle et élégante dentelle. Il n'y a là, il est vrai, que de la silice, mais, ce qui est intéressant, c'est la forme qu'a prise cette silice, et nous ne pouvons la comprendre si nous ne connaissons pas l'éponge vivante qui lui a précisément imprimé cette forme. C'est ainsi que les anciennes notions intuitives de nos pères, même lorsque nous les avons abandonnées, impriment encore leur forme aux échafaudages logiques que nous avons mis à leur place.

Cette vue d'ensemble est nécessaire à l'inventeur; elle est nécessaire également à celui qui veut réellement comprendre l'inventeur; la logique peut-elle nous la donner?

Non; le nom que lui donnent les mathématiciens suffirait pour le prouver. En Mathématiques, la logique s'appelle *Analyse* et analyse veut dire *division, dissection*. Elle ne peut donc avoir d'autre outil que le scalpel et le microscope.

Ainsi, la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration: l'intuition est l'instrument de l'invention.

VI.

Mais, au moment de formuler cette conclusion, je suis pris d'un scrupule.

Au début, j'ai distingué deux sortes d'esprits mathématiques, les uns logiciens et analystes, les autres intuitifs et géomètres. Eh bien, les analystes aussi ont été des inventeurs. Les noms que j'ai cités tout à l'heure me dispensent d'insister.

Il y a là une contradiction au moins apparente qu'il est nécessaire d'expliquer.

Croit-on d'abord que ces logiciens ont toujours procédé du général au particulier, comme les règles de la logique formelle semblaient les y obliger? Ce n'est pas ainsi qu'ils auraient pu étendre les frontières de la Science; on ne peut faire de conquête scientifique que par la généralisation.

Dans un travail imprimé dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, j'ai eu l'occasion d'étudier la nature du raisonnement mathématique et j'ai montré comment ce raisonnement, sans cesser d'être absolument rigoureux, pouvait nous élever du particulier au général par un procédé que j'ai appelé l'*induction mathématique*.

C'est par ce procédé que les analystes ont fait progresser la Science et si l'on examine le détail même de leurs démonstrations, on l'y retrouvera à chaque instant à côté du syllogisme classique d'Aristote.

Nous voyons donc déjà que les analystes ne sont pas simplement des faiseurs de syllogismes à la façon des scholastiques.

Croira-t-on, d'autre part, qu'ils ont toujours marché pas à pas sans avoir la vision du but qu'ils voulaient atteindre? Il a bien fallu qu'ils devinassent le chemin qui y conduisait, et pour cela ils ont eu besoin d'un guide.

Ce guide, c'est d'abord l'analogie.

Par exemple, un des raisonnements chers aux analystes est celui qui est fondé sur l'emploi des fonctions majorantes. On sait qu'il a déjà servi à résoudre une foule de problèmes; en quoi consiste alors le rôle de l'inventeur qui veut l'appliquer à un problème nouveau? Il faut d'abord qu'il reconnaisse l'analogie de cette question avec celles qui ont déjà été résolues par cette méthode; il faut ensuite qu'il aperçoive en quoi cette nouvelle question diffère des autres, et qu'il en déduise les modifications qu'il est nécessaire d'apporter à la méthode.

Mais comment aperçoit-on ces analogies et ces différences?

Dans l'exemple que je viens de citer, elles sont presque toujours évidentes, mais j'aurais pu en trouver d'autres où elles auraient été beaucoup plus cachées; souvent il faut pour les découvrir une perspicacité peu commune.

Les analystes, pour ne pas laisser échapper ces analogies cachées, c'est-à-dire pour pouvoir être inventeurs, doivent, sans le secours des sens et de l'imagination, avoir le sentiment direct de ce qui fait l'unité d'un raisonnement, de ce qui en fait pour ainsi dire l'âme et la vie intime.

Causez avec M. Hermite; jamais il n'évoquera une image sensible, et pourtant vous vous apercevrez bientôt que les entités les plus abstraites sont pour lui comme des êtres vivants. Il ne les voit pas, mais il sent qu'elles ne sont pas un assemblage artificiel, et qu'elles ont je ne sais quel principe d'unité interne.

Mais, dira-t-on, c'est là encore de l'intuition. Conclurons-nous que la distinction faite au début n'était qu'une apparence, qu'il n'y a qu'une sorte d'esprits et que tous les mathématiciens sont des intuitifs, du moins ceux qui sont capables d'inventer?

Non, notre distinction correspond à quelque chose de réel. J'ai dit plus haut qu'il y a plusieurs espèces d'intuition. J'ai dit combien l'intuition du nombre pur, celle d'où peut sortir l'induction mathématique rigoureuse, diffère de l'intuition sensible dont l'imagination proprement dite fait tous les frais.

L'abîme qui les sépare est-il moins profond qu'il ne paraît d'abord?

Reconnaîtrait-on avec un peu d'attention que cette intuition pure elle-même ne saurait se passer du secours des sens? C'est là l'affaire du psychologue et du métaphysicien et je ne discuterai pas cette question.

Mais il suffit que la chose soit douteuse pour que je sois en droit de reconnaître et d'affirmer une divergence essentielle entre les deux sortes d'intuition; elles n'ont pas le même objet et semblent mettre en jeu deux facultés différentes de notre âme; on dirait de deux projecteurs braqués sur deux mondes étrangers l'un à l'autre.

C'est l'intuition du nombre pur, celle des formes logiques pures qui éclaire et dirige ceux que nous avons appelés *analystes*.

C'est elle qui leur permet non seulement de démontrer, mais encore d'inventer. C'est par elle qu'ils aperçoivent d'un coup d'œil le plan général d'un édifice logique, et cela sans que les sens paraissent intervenir.

En rejetant le secours de l'imagination, qui, nous l'avons vu, n'est pas toujours infaillible, ils peuvent avancer sans crainte de se tromper. Heureux donc ceux qui peuvent se passer de cet appui! Nous devons les admirer, mais combien ils sont rares!

Parmi les analystes, il y aura donc des inventeurs, mais il y en aura peu.

La plupart d'entre nous, s'ils voulaient voir de loin par la seule intuition pure, se sentiraient bientôt pris de vertige. Leur faiblesse a besoin d'un bâton plus solide et, malgré les exceptions dont nous venons de parler, il n'en reste pas moins vrai que l'intuition sensible est en Mathématiques l'instrument le plus ordinaire de l'invention.

A propos des dernières réflexions que je viens de faire, une question se pose que je n'ai le temps, ni de résoudre, ni même d'énoncer avec les développements qu'elle comporterait.

Y a-t-il lieu de faire une nouvelle coupure et de distinguer parmi les analystes ceux qui se servent surtout de cette intuition pure et ceux qui se préoccupent d'abord de la logique formelle?

M. Hermite, par exemple, que je citais tout à l'heure, ne peut être classé parmi les géomètres qui font usage de l'intuition sensible;

mais il n'est pas non plus un logicien proprement dit. Il ne cache pas sa répulsion pour les procédés purement déductifs qui partent du général pour aller au particulier.

Je ne puis que soumettre ce nouveau sujet à vos méditations; car l'heure nous presse, et cette conférence est déjà trop longue.