Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Pringsheim, Alfred** (1850–1941)

Titel: **Zur Transformation 2. Grades der hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung**

Quelle: Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik : Originalberichte der Verfasser.
Band 1 (1877),
Seite 67 – 71.

Selbstrezension Alfred Pringsheims zu seinem Aufsatz:

Zur Transformation 2. Grades der hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung
In: *Mathematische Annalen.* – 9 (1875), S. 445–475

A. Pringsheim: Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. (Math. Annalen Bd. IX.)

Wie Herr Professor Koenigsberger im 67. Bande des Crelle'schen Journals gezeigt hat, geht eine hyperelliptische Thetafunction mit zwei Variablen durch eine Transformation zweiten Grades in ein Aggregat von vier Theta-Quadraten oder von zwei Theta-Producten über, je nachdem gewisse mit $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ bezeichnete, für die Transformation charakteristische ganze Zahlen, die aus den Charakteristiken m_1^λ, m_2^λ, n_1^λ, n_2^λ des zu transformirenden $\vartheta_\lambda(v_1', v_2')$ und den Transformations-Zahlen des Schemas

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho_{21}' & \varrho_{22}' & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho_{11}' & \varrho_{12}' & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{vmatrix}$$

zusammengesetzt sind, *sämmtlich* gerade sind oder nicht. Ich befasse mich hier speciell mit der ersten Klasse von Transformationen, also mit Transformations-Gleichungen von der Form

$$\text{(I)} \quad E \,.\, \vartheta_\lambda(v_1', v_2') = (\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2)$$

und leite zunächst aus deren Betrachtung einen Beweis des für *alle* Transformationen zweiten Grades gültigen Satzes her, dass —

> bei jeder Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung aus dem Ausdrucke für *eine* transformirte ϑ-Function sich *drei und immer nur drei* weitere transformirte ϑ-Functionen durch Substitution von halben Perioden ableiten lassen.

Die Untersuchung der Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ für alle 15 Hermite'schen Repräsentanten der nicht aequivalenten Transformations-Klassen lehrt nämlich, dass es für jede Transformation zweiten Grades gerade 4 Indices λ von der Beschaffenheit gibt, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade Zahlen werden, dass mithin 4 transformirte ϑ-Functionen in der Form (I) erscheinen. Daraus folgt zunächst, dass aus einem Transformations-Ausdrucke von der Form (I) sich *höchstens* noch drei weitere durch Substitutionen halber Perioden herleiten lassen; und da diese Eigenschaft offenbar unabhängig vom Index λ und dieser besonderen Gestalt der Transformations-Gleichung ist, vielmehr lediglich auf der Beziehung der Argumente

v_1, v_2 und v_1', v_2' beruht, so gilt dieselbe für jede beliebige Transformation 2. Grades. Andererseits lässt sich zeigen, dass die Anwendung aller 15 möglichen Substitutionen halber Perioden auch *nicht weniger* als drei Veränderungen auf den Index λ hervorbringen kann, woraus dann unmittelbar der obige Satz in seiner ganzen Allgemeinheit folgt. Derselbe lässt schliesslich noch eine Erweiterung auf Transformationen von beliebigem paaren Grade zu, sofern man nur diejenigen Transformationen ausschliesst, bei denen alle Transformations-Zahlen durch 2 oder eine Potenz von 2 theilbar sind (was bei Transformationen zweiten Grades vermöge der Bedingungsgleichung $\Sigma_\alpha(\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 2$ nicht stattfinden kann).

Eine weitere Betrachtung, die sich unmittelbar an die Transformations-Gleichungen von der Form (I) anknüpfen lässt, bezieht sich auf die linearen homogenen Relationen, wie sie zwischen gewissen Combinationen von 4 Theta-Quadraten stattfinden. — Da die Wahl der Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in (I) einzig und allein durch die Bedingung beschränkt ist, dass zwischen den betreffenden 4 Theta-Quadraten keine lineare Relation stattfindet, so folgt aus der Unmöglichkeit, für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Indices ungerader ϑ-Functionen zu wählen, dass zwischen den Quadraten von je vier ungeraden ϑ-Functionen eine solche Relation stattfinden muss. Combinirt man nun die 6 ungeraden ϑ-Functionen sechsmal zu je 4, in der Weise, dass man die Indices cyclisch vorrücken lässt, bestimmt alsdann die Coefficienten der Gleichungen von der Form:

$$(\alpha)\,\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\,\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\,\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\,\vartheta_\delta^2(v_1, v_2) = 0$$

durch Substitution halber Perioden und Nullsetzen der Argumente, wendet alsdann auf jede der resultirenden 6 Gleichungen alle 15 möglichen Substitutionen halber Perioden an, so erhält man im Ganzen 96 homogene lineare Relationen von je 4 ϑ-Quadraten in einer sehr übersichtlichen Zusammenstellung. Dieselben sind den von Rosenhain in seinem „Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre periodes etc.“ S. 425 erwähnten aequivalent; behufs der Vergleichung hat man nur festzuhalten, dass den von Rosenhain für seine φ-Functionen gewählten Indices

0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3

der Reihe nach die ϑ-Indices

0	01	03	12	$i.1$	-14	$i.13$	$i.02$	2	$i.24$	23	01	34	$i.3$	4	5

entsprechen (wobei der Factor i oder das Zeichen — sich selbstverständlich auf die betreffende ϑ-Function, nicht auf den Index bezieht).

Ich betrachte schliesslich noch den speciellen Fall von Transformationen zweiten Grades, welcher die transformirte hyperelliptische ϑ-Function als ein Product zweier elliptischen ϑ-Functionen und somit die von Jacobi (in Crelle's Journal Bd. 8) auf rein algebraischem Wege hergestellte Reduction gewisser hyperelliptischer Integrale auf elliptische liefert. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für dieses Zerfallen der transformirten hyperelliptischen Functionen in Producte von elliptischen Functionen ist die, dass der transformirte Modul $\tau_{12}' = 0$ ist und dass mithin $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ vermöge der Gleichung

$$\vartheta_{14}(v_1', v_2'; \tau_{11}', 0, \tau_{22}') = \vartheta_1(v_1', \tau_{11}') \cdot \vartheta_1(v_2', \tau_{22}')$$

für die Nullwerthe der Argumente verschwindet. Da aber, wie Herr Koenigsberger gezeigt hat, ein gerades transformirtes ϑ für die Nullwerthe der Argumente nur dann verschwinden kann, wenn es sich in der Form (I) darstellt, und ausserdem für keine der 15 Repräsentanten-Transformationen $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ in der Form (I) erscheint, so folgt, dass man, um Transformationen von der gewünschten Beschaffenheit zu erhalten, jene Repräsentanten-Transformationen noch mit solchen Linear-Transformationen combiniren muss, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ für den Index 14 sämmtlich gerade Zahlen werden. Ich zeige nun, dass man hierbei leicht auf die folgenden 4 Linear-Systeme geführt wird:

$$\begin{vmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&-1 \\ 0&0&0&1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1&0&0&0 \\ -1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \end{vmatrix}$$

welche der Reihe nach mit den vier Grundformen der 15 Repräsentanten combinirt, 15 neue Transformations-Systeme zweiten Grades liefern, die der obigen Bedingung genügen. Die Festsetzung

$$\vartheta_{14}(v_1', v_2')_{v_1'=v_2'=0} = (\alpha)\,\vartheta_\alpha^2 + (\beta)\,\vartheta_\beta^2 + (\gamma)\,\vartheta_\gamma^2 + (\delta)\,\vartheta_\delta^2 = 0$$

liefert dann für diese 15 Transformationen 15 verschiedene Bedingungsgleichungen von der Form

$\varphi(\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, \varkappa^2\lambda^2, \varkappa^2\mu^2, \lambda^2\mu^2) = 0$ (wo φ eine Linearfunction bedeutet), unter denen sich auch die von Jacobi behandelte Bedingung

$$\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$$

befindet. Diesen einen Fall führe ich nun vollständig durch, bediene mich jedoch hierbei nicht der betreffenden unter den eben erwähnten Transformationen, sondern — um schliesslich genau das Jacobi'sche Resultat zu erhalten — einer daraus durch ein neues Linear-System abgeleiteten, nämlich der Transformation

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

welche ebenfalls $\vartheta_{14}(v_1', v_2')$ in der Form (I) liefert und für $\vartheta_{14}(0,0) = 0$ die Bedingung $\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$ gibt. Ich berechne nun die Ausdrücke der transformirten Theta's mit den Indices 23, 5, 0, führe darauf die Integrale ein, und drücke die ϑ-Functionen mit den Argumenten v_1, v_2 und v_1', v_2' durch die oberen Integralgrenzen, die mit Null-Argumenten durch die Integralmoduln aus. Die auf diese Weise resultirenden, ziemlich complicirten algebraischen Beziehungen geben die Reduction einer Summe von zwei hyperelliptischen Integralen von der Form:

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$(\text{wo } R(x) = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\varkappa^2\lambda^2 x)),$$

und ebenso

$$\int_0^{x_1} \frac{x\,dx.}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

auf je eine Summe von zwei elliptischen Integralen von der Form:

$$A\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} + B\int_0^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}};$$

Jacobi gibt die Reduction *eines* solchen hyperelliptischen Integrals. Um diese zu erhalten, hat man nur $x_2 = 1$ zu setzen, wodurch $y_2 = -y_1$ wird: alsdann gehen die erwähnten algebraischen Beziehungen genau in die von Jacobi gegebenen über, sobald man die Jacobi'schen Bezeichnungen in der richtigen Weise einführt. — Endlich wird noch erwähnt, dass die auf zwiefache Weise zu ermöglichende Bestimmung der Constanten A, B — einmal durch Einsetzen der algebraischen Transformations-Ausdrücke, dann auch vermöge der Beziehung zwischen v_1, v_2 und v_1', v_2' — eine Beziehung für die Periodicitäts-Moduln der hyperelliptischen Integrale von der Eigenschaft $\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$ liefert. Dieselbe lautet

$$\frac{K_{11}}{K_{21}} = -\frac{K_{11} + 2K_{12}}{K_{21} + 2K_{22}} = -\varkappa\lambda$$

wo K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} die bekannten, sog. reellen Periodicitäts-Moduln des betreffenden hyperelliptischen Integrales bedeuten.

Berlin. A. Pringsheim.

Hamburger: Zur Theorie der Integration eines Systems von n linearen partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung mit 2 unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen. (Borch. J. Bd. 81. S. 243—280.)

Hinsichtlich der Systeme simultaner partieller Differenzialgleichungen, in welchen die Zahl der Gleichungen mit der Anzahl der abhängigen Variablen übereinstimmt, sind dem Verf. ausser der von Jacobi (Crelles J. Bd. II. S. 321) ausgeführten Integration einer besonderen Klasse derselben, nämlich der s simultanen Gleichungen:

$$A_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial z_1}{\partial x_n} = B_1, \cdots A_1 \frac{\partial z_s}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial z_s}{\partial x_n} = B_s$$

$$(A_1 \,..\, A_n,\ B_1 \,..\, B_s \text{ Functionen von } x_1 \,..\, x_n,\ z_1 \,..\, z_s)$$

keine allgemeineren Untersuchungen bekannt geworden. Man kann indess die Methoden von Monge und Ampère zur Integration partieller Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit 2 Veränderlichen und namentlich die Erweiterung derselben durch Herrn Natani (Die höhere Analysis in 4 Abtheilungen. Berlin 1866, p. 365—390) auf Gleichungen höherer Ordnung und mit mehr unabhängigen Variablen als Beiträge zur Theorie der simultanen partiellen Differenzialgleichungen bezeichnen.

In der vorliegenden Abhandlung, welche durch die erwähnten Natani'schen Untersuchungen veranlasst ist, wird zunächst folgendes System von n linearen partiellen Differenzialgleichungen mit x und y als unabhängigen und $z_1 \,..\, z_n$ als abhängigen Variablen betrachtet:

$$(1)\quad \begin{cases} \overset{1}{a}_1 p_1 + \cdots + \overset{1}{a}_n p_n + \overset{1}{\alpha}_1 q_1 + \cdots + \overset{1}{\alpha}_n q_n = e_1 \\ \vdots \\ \overset{n}{a}_1 p_1 + \cdots + \overset{n}{a}_n p_n + \overset{n}{\alpha}_1 q_1 + \cdots + \overset{n}{\alpha}_n q_n = e_n, \end{cases}$$

wo $p_\varkappa = \dfrac{\partial z_\varkappa}{\partial x}$, $q_\varkappa = \dfrac{\partial z_\varkappa}{\partial y}$, und die Coefficienten a, α, e Functionen