Universitätsbibliothek
Heidelberg

Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Hermann von Helmholtz:
Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet.

Aus: Philosophische Aufsätze, *Eduard Zeller* zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet. Leipzig 1887. Fues' Verlag. S. 17 bis 52.

Digitale Ausgabe erstellt von Gabriele Dörflinger
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2010

Obgleich Zählen und Messen die Grundlagen der fruchtbarsten, sichersten und genauesten wissenschaftlichen Methoden sind, die wir überhaupt kennen, so ist über die erkenntnisstheoretischen Grundlagen derselben doch verhältnissmässig wenig gearbeitet worden. Auf philosophischer Seite mussten stricte Anhänger *Kant*'s, die an seinem System, wie es sich unter den Anschauungen und Kenntnissen seiner Zeit historisch nun einmal entwickelt hatte, festhalten, allerdings die Axiome der Arithmetik für a priori gegebene Sätze halten, welche die transcendentale Anschauung der Zeit in demselben Sinne näher bestimmen, wie die Axiome der Geometrie die des Raumes. Durch diese Auffassung war in beiden Fällen die Frage nach einer weiteren Begründung und Ableitung dieser Sätze abgeschnitten.

Ich habe mich bemüht, in früheren Aufsätzen nachzuweisen, dass die Axiome der Geometrie keine a priori gegebenen Sätze seien, dass sie vielmehr durch Erfahrung zu bestätigen und zu widerlegen wären. Ich hebe hier nochmals hervor, dass dadurch *Kant*'s Ansicht vom Raume, als transcendentaler Anschauungsform, nicht aufgehoben wird; meines Erachtens wird dadurch nur eine einzelne unberechtigte Specialbestimmung seiner Ansicht beseitigt, welche allerdings für die metaphysischen Bestrebungen seiner Nachfolger höchst verhängnissvoll geworden ist.

Nun ist es klar, dass die auch von mir vertretene empiristische Theorie, wenn sie die Axiome der Geometrie nicht mehr als unbeweisbare und keines Beweises bedürftige Sätze anerkennt, sich auch über den Ursprung der arithmetischen Axiome rechtfertigen muss, die zur Anschauungsform der Zeit in der entsprechenden Beziehung stehen.

Die Arithmetiker haben bisher an die Spitze ihrer Entwickelungen folgende Sätze als Axiome gestellt:

Axiom I. Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, sind sie unter sich gleich.

Axiom II. *Associationsgesetz der Addition*, nach *H. Grassmann*'s Benennung:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Axiom III. *Commutationsgesetz der Addition*:

$$a+b=b+a.$$

Axiom IV. Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.

Axiom V. Gleiches zu Ungleichem addirt giebt Ungleiches.

Weiter als die übrigen Arithmetiker, deren Arbeiten ich kenne, und gleichzeitig philosophische Gesichtspunkte verfolgend, sind die Hrn. *Hermann* und *Robert Grassmann*[1] in diese Untersuchung eingedrungen, und in der Ausführung der arithmetischen Schlussfolgerungen werde ich mich im Folgenden ihrem Wege durchaus anzuschliessen haben. Sie führen dabei die beiden Axiome II und III auf ein einziges zurück, was wir als `Grassmann's Axiom` bezeichnen wollen, nämlich:

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1),$$

von dem aus sie durch den sogenannten $(n + 1)$ Beweis die beiden obigen allgemeineren Sätze herleiten. Für die Lehre von der Addition der reinen Zahlen ist dadurch, wie ich im Folgenden zu zeigen hoffe, in der That die richtige Grundlage gewonnen. Aber in die Frage nach der objectiven Anwendung der Arithmetik auf physische Grössen kommt dadurch zu den beiden Begriffen der `Größe` und des `gleich groß`, deren Sinn im Gebiete der Thatsachen unerklärt bleibt, noch ein dritter hinzu, der der `Einheit`; und gleichzeitig scheint es mir eine unnöthige Beschränkung des Gültigkeitsgebietes der gefundenen Sätze zu sein, wenn man von vornherein die physischen Grössen nur als solche behandelt, die aus Einheiten zusammengesetzt seien.

An die Brüder *Grassmann* hat sich unter den neueren Arithmetikern auch Hr. *E. Schroeder*[2] im Wesentlichen angeschlossen, ist aber in einigen wichtigen Erörterungen noch tiefer gegangen. Während die früheren Arithmetiker den letzten Begriff der Zahl als den einer Anzahl von Gegenständen aufzufassen pflegten, konnten sie sich nicht ganz von den Gesetzen des Verhaltens dieser Gegenstände loslösen, und sie nahmen es einfach als Thatsache, dass die Anzahl einer Gruppe von Objekten unabhängig von der Reihenfolge, in der man sie zählt, zu finden ist. Hr. *Schroeder* ist, so viel ich gefunden habe, der Erste, welcher erkannt hat (l. c. S. 14), dass hierin ein Problem verborgen ist: auch hat er, meines Erachtens mit Recht, anerkannt, dass hier eine Aufgabe der Psychologie vorliegt, und andererseits die empirischen Eigenschaften zu definiren wären, welche den Objecten zukommen müssen, damit sie zählbar seien.

Ausserdem finden sich hierher gehörige Erörterungen, namentlich über den Begriff der Grösse, auch in *Paul du Bois-Reymond's allgemeiner Functionentheorie* (Tübingen, 1882) Th. I, Cap. 1 und in *A. Elsas*' Schrift „über die Psychophysik" (Marburg, 1886) S. 49 ff. Beide Bücher aber beschäftigen sich mit specielleren Untersuchungen, ohne die vollständigen Grundlagen der Arithmetik dabei zu erörtern. Beide glauben, den Begriff der Grösse von dem der Linie ableiten zu dürfen, ersteres im empirischen Sinne, letzteres im Sinne des stricten `Kantianismus`. Was ich gegen den letzteren Standpunkt einzuwenden habe, ist schon oben erwähnt und von mir in früheren Schriften auseinandergesetzt. Hr. *P. du Bois-Reymond* endet seine Untersuchung mit einer Paradoxie, wonach zwei entgegengesetzte Standpunkte, die beide in Widersprüche verwickeln, gleich möglich seien.

Da der letztgenannte Autor ein höchst scharfsinniger Mathematiker ist, der mit besonderem Interesse den tiefsten Grundlagen seiner Wissenschaft nachgespürt hat, so hat mich das von ihm erhaltene Schlussergebniss um so mehr ermuthigt, meine eignen Gedanken über das genannte Problem darzulegen.

Um den Standpunkt, welcher zu einfachen folgerichtigen Ableitungen und zur Auflösung der erwähnten Widersprüche führt, von vorn herein kurz zu bezeichnen, möge folgendes dienen: Ich betrachte die Arithmetik, oder die Lehre von den reinen Zahlen, als eine auf rein psycholo-

[1] *Hermann Grassmann*, Die Ausdehnungslehre. 1. Aufl., Leipzig 1844. Zweite Aufl. 1878. - *Robert Grassmann*, Die Formenlehre oder Mathematik. Stettin. 1872.

[2] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Leipzig, 1873

gischen Thatsachen aufgebaute Methode, durch die die folgerichtige Anwendung eines Zeichensystems (nämlich der Zahlen) von unbegrenzter Ausdehnung und unbegrenzter Möglichkeit der Verfeinerung gelehrt wird. Die Arithmetik untersucht namentlich, welche verschiedene Verbindungsweisen dieser Zeichen (Rechnungsoperationen) zu demselben Endergebniss führen. Das lehrt unter Andrem, auch ausserordentlich verwickelte Rechnungen, selbst solche, die in keiner endlichen Zeit zu beenden wären, durch einfachere zu ersetzen. Abgesehen von der damit gemachten Probe auf die innere Folgerichtigkeit unseres Denkens, würde freilich ein solches Verfahren zunächst ein reines Spiel des Scharfsinns mit eingebildeten Objecten sein, welches Hr. *P. du Bois-Reymond* spottend dem Rösselsprung auf dem Schachbrett vergleicht, wenn es nicht so ausserordentlich nützliche Anwendungen zuliesse. Denn mittels dieses Zeichensystems der Zahlen geben wir Beschreibungen der Verhältnisse reeller Objecte, die, wo sie anwendbar sind, jeden geforderten Grad der Genauigkeit erreichen können, und mittels desselben werden in einer grossen Anzahl von Fällen, wo Naturkörper unter der Herrschaft bekannter Naturgesetze zusammentreffen oder zusammenwirken, die den Erfolg messenden Zahlenwerthe durch Rechnung vorausgefunden.

Dann muss aber gefragt werden: Was ist der objective Sinn davon, dass wir Verhältnisse reeller Objecte durch benannte Zahlen als Grössen ausdrücken, und unter welchen Bedingungen können wir dies thun? Diese Frage löst sich, wie wir finden werden, in zwei einfachere auf, nämlich:

1. Was ist der objective Sinn davon, dass wir zwei Objecte in gewisser Beziehung für ***gleich*** erklären?

2. Welchen Charakter muss die physische Verknüpfung zweier Objecte haben, damit wir vergleichbare Attribute derselben als ***additiv*** verbunden, und diese Attribute demzufolge als ***Grössen***, die durch benannte Zahlen ausgedrückt werden können, ansehen dürfen? Benannte Zahlen nämlich betrachten wir aus ihren Theilen, beziehlich Einheiten, durch Addition zusammengesetzt.

Die gesetzmässige Reihe der Zahlen.

Das Zählen ist ein Verfahren, welches darauf beruht, dass wir uns im Stande finden, die Reihenfolge, in der Bewusstseinsacte zeitlich nach einander eingetreten sind, im Gedächtniss zu behalten. Die Zahlen dürfen wir zunächst als eine Reihe willkürlich gewählter Zeichen betrachten, für welche nur eine bestimmte Art des Aufeinanderfolgens als die gesetzmässige, oder nach gewöhnlicher Ausdrucksweise „natürliche“ von uns festgehalten wird. Die Bezeichnung der „natürlichen“ Zahlenreihe hat sich wohl nur an eine bestimmte Anwendung des Zählens geknüpft, nämlich an die Ermittelung der ***Anzahl*** gegebener reeller Dinge. Indem wir von diesen eines nach dem andern dem gezählten Haufen zuwerfen, folgen die Zahlen bei einem natürlichen Vorgang auf einander in ihrer gesetzmässigen Reihe. Mit der Reihenfolge der Zahlzeichen hat dies nichts zu thun; wie die Zeichen in den verschiedenen Sprachen verschieden sind, so könnte auch ihre Reihenfolge willkürlich bestimmt werden, wenn nur unabänderlich irgend eine bestimmte Reihenfolge als die normale oder gesetzmässige festgehalten wird. Diese Reihenfolge ist in der That eine von Menschen, unsern Voreltern, die die Sprache ausgearbeitet haben, gegebene Norm oder Gesetz. Ich betone diesen Unterschied, weil das angeblich „Natürliche“ der Zahlenreihe mit der unvollständigeren Analyse des Begriffs der Zahl zusammenhängt. Die Mathematiker bezeichnen diese gesetzmässige Zahlenreihe als die der ***positiven ganzen Zahlen***. Die Zahlenreihe ist unserem Gedächtniss ausserordentlich viel fester eingeprägt als jede andere Reihe, was unzweifelhaft auf ihrer viel häufigeren Wiederholung beruht. Wir brauchen sie deshalb auch vorzugsweise, um durch Anknüpfung an sie die

Erinnerung anderer Reihenfolgen in unserem Gedächtniss zu festigen; d. h. wir brauchen die Zahlen als ***Ordnungszahlen***.

Eindeutigkeit der Folge.

In der Zahlenreihe sind Vorwärtsschreiten und Rückwärtsschreiten nicht gleichwerthige, sondern wesentlich verschiedene Vorgänge, wie die Folge der Wahrnehmungen in der Zeit, während bei Linien, die im Raume dauernd und ohne Aenderung in der Zeit bestehen, keine der beiden möglichen Richtungen des Fortschreitens vor der andern ausgezeichnet ist.

Thatsächlich wirkt in unserem Bewusstsein jeder gegenwärtige Act desselben, sei es Wahrnehmung, Gefühl oder Wille, zusammen mit den Erinnerungsbildern vergangener Acte, nicht aber zukünftiger, die zur Zeit im Bewusstsein noch gar nicht vorhanden sind, und der gegenwärtige Act ist uns bewusst als specifisch verschieden von den Erinnerungsbildern, die neben ihm bestehen. Dadurch ist die gegenwärtige Vorstellung in einen der Anschauungsform der Zeit angehörigen Gegensatz als die nachfolgende den vorausgegangenen gegenüber gestellt, ein Verhältniss, welches nicht umkehrbar ist, und dem nothwendig jede in unser Bewusstsein eintretende Vorstellung unterworfen ist. In diesem Sinne ist die Einordnung in die Zeitfolge die unausweichliche Form unserer inneren Anschauung.

Sinn der Bezeichnung.

Nach den vorausgegangenen Erörterungen ist jede Zahl nur durch ihre Stellung in der gesetzmässigen Reihe bestimmt.

Das Zeichen ***Eins*** legen wir demjenigen Gliede der Reihenfolge bei, mit dem wir beginnen.

Zwei ist die Zahl, welche unmittelbar, d. h. ohne Zwischenschiebung einer anderen Zahl in der gesetzmässigen Reihe auf Eins folgt.

Drei ist die Zahl, die ebenso unmittelbar auf Zwei folgt u. s. w.

Ein Grund, diese Reihe irgendwo abzubrechen, oder in ihr zu einem schon früher gebrauchten Zeichen zurückzukehren ist nicht vorhanden. Das dekadische System macht es in der That möglich, durch Combination von nur zehn verschiedenen Zahlzeichen in einfacher und leicht verständlicher Weise die Reihe unbegrenzt fortzusetzen, ohne je ein Zahlzeichen zu wiederholen.[3]

Die Zahlen, welche einer gegebenen Zahl in der gesetzmässigen Reihe folgen, nennen wir ***höher*** als jene, die, welche ihr vorangehen, ***niedriger***.[4] Es giebt das eine vollständige Disjunction, die in dem Wesen der Zeitfolge begründet ist, und die wir aussprechen können als:

Axiom VI. *Wenn zwei Zahlen verschieden sind, muss eine von ihnen höher sein als die andere.*

Addition reiner Zahlen.

Um allgemeine Sätze über die Zahlen aufzustellen, brauche ich die bekannten Bezeichnungen der Buchstabenrechnung. Jeder Buchstabe des kleinen lateinischen Alphabets soll jede beliebige Zahl bezeichnen können, aber innerhalb jedes einzelnen Theorems oder jeder einzelnen Rechnung immer dieselbe.

[3] Die „*Zahlentheorie*“ untersucht Zahlenreihen, in denen nach einer bestimmten Zahl immer wieder die Eins folgt, die sich also periodisch wiederholen.

[4] Ich vermeide hier noch ***grösser*** und ***kleiner***; dieser Unterschied schliesst sich passender an den Begriff der Anzahl; davon später.

Zeichenerklärung: Wenn ich irgend eine Zahl mit einem Buchstaben, z. B. a bezeichnet habe, will ich die in der normalen Reihe darauf folgende mit $(a+1)$ bezeichnen.

Dieses Zeichen $(a+1)$ soll also hier zunächst keine andere Bedeutung haben, als die angegebene. Ueberhaupt aber bedeuten, wie üblich, die Parenthesen, dass die von ihnen umschlossenen Zahlen zuerst in eine Zahl zusammengefasst werden sollen, ehe man die übrigen vorgeschriebenen Operationen ausführt.

Das Gleichheitszeichen $a = b$ soll hier in der reinen Zahlenlehre nur bezeichnen: „a ist dieselbe Zahl wie b.“ Daher folgt aus

$$a = b$$
$$c = b$$

unmittelbar $a = c$, denn die oberen beiden Gleichungen sagen aus, dass beide, a wie c dieselbe Zahl b sind. Dies stellt die Gültigkeit von Axiom (I) für die Reihe der ganzen Zahlen in der reinen Zahlenlehre fest.

Zählen der Zahlen.

Wir betrachten nunmehr die normale Zahlenreihe als festgestellt und gegeben. Jetzt können wir ihre Glieder selbst als eine in unserem Bewusstsein gegebene Reihe von Vorstellungen betrachten, deren Ordnung von einem beliebig gewählten Gliede ab wir wieder durch die von ***Eins*** beginnende normale Zahlenreihe bezeichnen können.

Definition: Ich bezeichne als $(a+b)$ diejenige Zahl der Hauptreihe, auf welche ich stosse, wenn ich bei $(a+1)$ Eins, bei $[(a+1)+1]$ Zwei u. s. w. zähle, bis ich bis b gezählt habe.

Die ***Beschreibung dieses Verfahrens*** lässt sich zusammenfassen in folgender Gleichung (*H. Grassmann*'s Axiom der Addition):

$$(a+b)+1 = a+(b+1) \qquad (1.)$$

Erläuterung: Diese Gleichung sagt aus, dass, wenn ich von $(a+1)$ als Eins ausgehend bis b gezählt, und dabei die mit $(a+b)$ bezeichnete Zahl gefunden habe, ich um eines weiter zählend in der ersteren Reihe auf $(b+1)$ komme, in der zweiten auf die dem $(a+b)$ folgende Zahl, nämlich $[(a+b)+1]$. So bezeichne ich also das in der Definition erwähnte $[(a+1)+1]$ auch mit $[a+(1+1)]$ oder $(a+2)$, weiter das $[(a+2)+1]$ mit $(a+3)$, und so fort ohne Grenzen.

In der Sprache der Arithmetik würden wir dies Verfahren ***Addition*** und die Zahl $(a+b)$ die ***Summe*** von a und b, a und b selbst die ***Summanden*** nennen; aber ich mache darauf aufmerksam, dass in dem angegebenen Verfahren die Grössen a und b nicht gleiche Rolle spielen, und es also erst bewiesen werden muss, dass sie vertauscht werden können ohne die Summe zu ändern, was weiter unten geschehen soll. Indessen, wenn wir dieses Bedenken im Auge behalten, können wir diese Bezeichnung acceptiren, und sagen, dass die Form $(a+b)$ vorschreibt, es solle b zu a addirt werden, und $(a+b)$ sei die Summe von a und b, wobei aber die Ordnung, dass b hinter a steht, zunächst festgehalten werden muss. Es mag deshalb a der ***erste***, b der ***zweite Summandus*** genannt werden. Dem entsprechend kann in folgerichtiger Anwendung dieser Bezeichnung jede Zahl $(a+1)$ als die Summe der vorausgehenden a und der Zahl Eins bezeichnet werden.

Das angegebene Verfahren der Addition wird in der gesetzmässigen Zahlenreihe stets ein Resultat ergeben müssen und zwar für dieselben Zahlen a und b stets dasselbe. Denn jeder

der Schritte, aus denen wir die Addition $(a+b)$ zusammengesetzt haben, ist ein Fortschritt in der Reihe der positiven ganzen Zahlen um eine Stufe, von $(a+b)$ zu $(a+b)+1$, und von b zu $(b+1)$. Jeder einzelne ist ausführbar, und jeder einzelne muss nach unseren Voraussetzungen über die unabänderliche Bewahrung der Zahlenreihe in unserem Bewusstsein immer wieder denselben Erfolg geben.

Es wird also sicher eine Zahl geben, die der Zahl $(a+b)$ entspricht, und nur eine. Dieser Satz würde dem Inhalt des *Axiom IV* entsprechen, wenn dieses auf die reinen Zahlen und die hier vorgeschriebene Art der Addition angewendet wird.

Andererseits folgt aus der angegebenen Beschreibung des Verfahrens, dass $(a+b)$ nothwendig von a verschieden, und zwar höher als a ist, wenn b eine von den ganzen positiven Zahlen ist.

Wenn c eine höhere Zahl ist als a, werde ich, von a stufenweise aufwärts zählend, nothwendig c erreichen müssen, und abzählen können, die wievielte Zahl c von a ans gezählt ist. Sie sei die b-te, dann ist

$$c = (a+b).$$

Wir wollen diesen Satz für spätere Citation bezeichnen als **Axiom VII.** *Wenn eine Zahl c höher ist, als eine andre a, so kann ich c als die Summe von a und einer zu findenden ganzen positiven Zahl b darstellen.*

Theorem I: *Von der Reihenfolge der Ausführung mehrerer Additionsacte.* (`Associationsgesetz` nach *Grassmann.*)

Wenn ich zu einer Summe $(a+b)$ eine Zahl c addiren soll, so erhalte ich dasselbe Resultat, wenn ich zur Zahl a die Summe $(b+c)$ addire. Oder als Gleichung geschrieben:

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (2.)$$

Beweis:

Der Satz ist, wie Gleichung (1) ausspricht, gültig für $c = 1$. Es soll gezeigt werden, dass, wenn er für irgend einen Werth von c richtig ist, er auch für den darauf folgenden $(c+1)$ richtig ist.

Es ist nämlich nach Gleichung (1):

$$\begin{aligned} [(a+b)+c]+1 &= (a+b)+(c+1) \\ [a+(b+c)]+1 &= a+[(b+c)+1] \\ &= a+[b+(c+1)] \end{aligned}$$

Letzteres nach Satz 1.

Also wenn der Satz 2 für den hier vorkommenden Werth von c gilt, so sind die links stehenden Ausdrücke der ersten beiden Gleichungen dieselben Zahlen, und es ist also auch

$$(a+b)+(c+1) = a+[b+(c+1)],$$

d. h. der Satz gilt auch für $(c+1)$.

Da er nun, wie vorher bemerkt, für $c = 1$ gilt, so gilt er auch für $c = 2$. Wenn er für $c = 2$ gilt, so gilt er auch für $c = 3$ u. s. w. ohne Grenzen.

Zusatz: Da die beiden in Gleichung (2) gesetzten Formen dieselbe Bedeutung haben, können wir für beide auch mit Weglassung der Klammern die Bezeichnung einführen:

$$a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c) \qquad (2a.)$$

Nur dürfen wir zunächst die Reihenfolge von a, b, c in diesen Ausdrücken nicht verändern, ehe wir nicht die Zulässigkeit einer solchen Vertauschung erwiesen haben.

Verallgemeinerung des Associationsgesetzes.

Wir verallgemeinern zuerst die in (2a) gegebene Bezeichnung.

$$R = a + b + c + d + \text{etc.} + k + l \qquad (2b.)$$

soll eine Summe bezeichnen, in der die einzelnen Additionen in der Reihe, wie sie geschrieben sind, ausgeführt werden, und zu kürzerer Bezeichnung sei

$$m + R = m + a + b + c + d + \text{etc.} + k + l,$$

während

$$m + (R) = m + (a + b + c + d + \text{etc.} + k + l);$$

dagegen ist nach dem Sinn dieser Schreibweise:

$$(R) + m = R + m.$$

Andere grosse lateinische Buchstaben sollen in demselben Sinne gebraucht werden, wie R.

Dann ist

$$R + b + c + S = [(R) + b + c] + S,$$

weil es gleichbedeutende Ausdrücke sind. Andererseits ist nach Gleichung (2a)

$$(R) + b + c = (R) + (b + c).$$

Also

$$\begin{aligned} R + b + c + S &= [R + (b + c)] + S \\ &= R + (b + c) + S \end{aligned}$$

d. h. statt alle Glieder der Reihe nach zu addiren, kann man zuerst zwei beliebige mittlere in eine Summe zusammenfassen.

Nachdem dies geschehen, ist die eben gebildete Summe $(b + c)$ nur durch eine einzige Zahl vertreten, und man kann in derselben Weise weitergehen, und irgend ein beliebiges anderes Paar aufeinander folgender Zahlen verbinden und so fort.

Also auch bei beliebig vielen Gliedern kann die Reihenfolge, in der die durch die einzelnen + Zeichen vorgeschriebenen Additionen ausgeführt werden, geändert werden, ohne dass sich die Gesammtsumme ändert.

Theorem II (**Commutationsgesetz** nach *H. Grassmann*): *Wenn in einer Summe aus zwei Summanden einer der Summanden Eins ist, kann die Ordnung derselben vertauscht werden.* Dem entspricht die Gleichung:

$$1 + a = a + 1 \qquad (3.)$$

Beweis: Die Gleichung ist richtig für $a = 1$. Wiederum ist zu zeigen, dass wenn sie für irgend einen bestimmten Werth von a richtig ist, sie auch für $(a + 1)$ richtig ist. Denn nach Gleichung (1) ist

$$(1 + a) + 1 = 1 + (a + 1).$$

Nach der Annahme soll für a Gleichung (3) gelten, folglich

$$(1 + a) + 1 = (a + 1) + 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$1 + (a + 1) = (a + 1) + 1, \qquad (3a.)$$

was zu erweisen war.

Da der Satz für $a = 1$ richtig, ist er auch für $a = 2$ richtig, und da er für $a = 2$ richtig, ist er auch für $a = 3$ richtig, u. s. w. ohne Grenzen.

Theorem III: *In jeder Summe aus zwei Summanden kann die Reihenfolge der Summanden geändert werden, ohne die der Summe entsprechende Zahl zu ändern.* Geschrieben:

$$a + b = b + a \qquad (4.)$$

Der Satz ist nach Theorem II richtig für $b = 1$. Wenn er für einen bestimmten Werth von b richtig ist, ist er auch für $(b + 1)$ richtig. Denn nach Theorem I ist:

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1),$$

nach unserer Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} (a + b) + 1 &= (b + a) + 1 &&= 1 + (b + a) \\ &= (1 + b) + a &&= (b + 1) + a. \end{aligned}$$

Von den letzten drei Schritten ist der erste und letzte nach Theorem II, Gleichung (3) gemacht, der mittlere nach Theorem I Gleichung (2). Folglich ist

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a$$

wie zu beweisen war.

Aus dem Satze

$$a + 1 = 1 + a,$$

folgt also

$$a + 2 = 2 + a,$$

aus diesem wieder

$$a + 3 = 3 + a,$$

und so fort ohne Ende.

Beweis von Axiom V. Wenn a und f verschiedene Zahlen sind, können wir, wie in *Axiom VII* gezeigt ist, immer eine positive ganze Zahl b bestimmen, so dass

$$(a + b) = f.$$

Dann ist

$$c + f = c + (a + b) = (c + a) + b.$$

Danach ist $(c + a)$ dann nothwendig verschieden von $(c + f)$, d. h.: *Verschiedene Zahlen zu derselben Zahl addirt, geben verschiedene Summen.*

Da aber nach Theorem III

$$\begin{aligned} c + f &= f + c \\ a + c &= c + a, \end{aligned}$$

so lässt sich die letzte Folgerung auch schreiben

$$(f + c) = (a + c) + b,$$

d. h. *dieselbe Zahl zu verschiedenen Zahlen addirt, giebt verschiedene Summen.*

Daraus folgt der für die Theorie der Subtraction und der Gleichungen wichtige Satz, dass zwei Zahlen, die bei der Addition derselben Zahl zu jeder von ihnen dieselbe Summe ergeben, identisch sein müssen.

Vertauschung der Ordnung beliebig vieler Elemente.

Bei der bisher beschriebenen Art des Abzählens behufs der Addition waren zwei Reihen von Zahlen, die in ihrer normalen Reihenfolge stehen geblieben waren, mit einander paarweise so combinirt, so dass $(n+1)$ der 1, $(n+2)$ der 2 u. s. w. zugeordnet würde. Nur die Anfangspunkte beider Folgen in der Zahlenreihe waren verschieden.

Wir wollen jetzt den allgemeineren Fall einer Zuordnung der Elemente zweier Reihen betrachten, von denen die eine eine bestimmte Folge bewahren soll, und daher durch die Zahlzeichen dargestellt werden kann, die andere aber veränderliche Folge habe. Für die letztere wollen wir hier als Zeichen die Buchstaben des griechischen Alphabets benutzen. Die letzteren haben allerdings auch eine unserem Gedächtnisse eingeprägte Reihenfolge, wie sie in der gewöhnlichen Aufstellung des Alphabets gegeben ist; wir wollen diese aber nur als eine unter vielen möglichen anderen durch zufällige Momente ausgezeichnete Reihe benutzen, deren festere Erinnerung uns die Uebersicht erleichtert, übrigens uns vorbehalten sie beliebig zu verändern. Andererseits aber verlangen wir, dass bei den auszuführenden Aenderungen der Folge dieser Elemente keines ausgelassen, und keines wiederholt werde. Das controlliren wir in unserem Gredächtniss am leichtesten, wenn wir festsetzen, dass die Gruppe als Elemente alle Buchstaben enthalten soll, die in der überlieferten Ordnung des Alphabets einem bestimmten z. B. κ vorausgehen.

Umstellung zweier aufeinander folgender Elemente einer Reihe.

Wenn zweien auf einander folgenden Zahlen n und $(n+1)$ zwei Elemente z. B. ϵ und ζ zugeordnet sind, so kann n entweder mit ϵ oder mit ζ verbunden werden; dies giebt die beiden Arten der Zuordnung

$$\begin{array}{cc} n & (n+1) \\ \epsilon & \zeta \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{cc} n & (n+1) \\ \zeta & \epsilon \end{array}$$

Indem wir statt der ersten dieser beiden Ordnungen die andre einführen, und alle übrigen zugeordneten Paare von je einer Zahl und einem Buchstaben unverändert lassen, so verliert keine Zahl den zugeordneten Buchstaben, kein Buchstabe die zugeordnete Zahl, wir wiederholen keinen Buchstaben und lassen auch keinen ausfallen. Wenn also die Reihe, welche die beiden ersten oben angeführten Paare enthielt, vor der Umstellung eine Gruppe ohne Lücken und ohne Wiederholungen war, so ist es auch die durch die Umstellung gewonnene.

Durch eine passende Wiederholung solcher Umstellungen benachbarter Elemente kann ich jedes beliebig gewählte Element der Gruppe zum ersten in der Reihe machen, ohne Wiederholungen oder Lücken in der Reihe zu erzeugen. Denn wenn das gewählte Element ξ das $n$te ist, kann ich es mit dem $(n-1)$ten, dann mit dem $(n-2)$ten u. s. w. vertauschen, so dass seine Stellenzahl immer niedriger wird, bis ich endlich bei der niedrigsten Stellenzahl der Gruppe, nämlich 1, ankomme.

In derselben Weise kann ich jedes Element der Reihe, dessen Stellenzahl höher als m ist, zum $m$ten Gliede der Gruppe machen, ohne Lücken oder Wiederholungen zu erzeugen. Bei diesem letzteren Verfahren behalten diejenigen Glieder der Reihe, deren Stellenzahl niedriger als m ist, dieselbe unverändert bei.

Daraus folgt: *Durch fortgesetzte Vertauschung benachbarter Glieder einer Gruppe kann ich jede mögliche Reihenfolge ihrer Glieder hervorbringen, ohne Elemente ausfallen zu lassen oder* *solche zu wiederholen.* Denn ich kann beliebig vorschreiben, welches das erste Glied der Reihe werden soll und dies nach dem angegebenen Verfahren ausführen. Dann kann ich vorschreiben, welches das zweite werden soll, und dies ebenso ausführen. Hierbei wird das eben zum ersten gewordene Element nicht aus seiner Stellung gebracht. Dann kann ich das dritte bestimmen u. s. w. bis zum letzten.

Theorem IV: *Attribute einer Reihe von Elementen, die sich nicht verändern, wenn beliebige benachbarte Elemente mit einander in ihrer Folge vertauscht werden, ändern sich bei keiner möglichen Aenderung der Reihenfolge der Elemente.*

Dies führt uns zunächst auf die *Verallgemeinerung des Commutationsgesetzes der Addition.*

Die grossen Buchstaben mögen wieder, wie bei der Verallgemeinerung des Associationsgesetzes, Summen von beliebig vielen Zahlen bedeuten. Dann ist nach dem verallgemeinerten Associationsgesetz

$$R + a + b + S = R + (a + b) + S.$$

Nach dem Commutationsgesetz für zwei Summanden ist

$$a + b = b + a.$$

Also da hiernach $(a + b)$ dieselbe Zahl wie $(b + a)$ ist:

$$\begin{aligned} R + a + b + S &= R + (b + a) + S \\ &= R + b + a + S \end{aligned}$$

Letzteres wieder nach dem Associationsgesetz.

Da man hiernach in der gegebenen Summe beliebige zwei auf einander folgende Elemente mit einander vertauschen kann, ohne den Betrag der Summe zu ändern, so kann man nach Theorem IV sie alle mit einander vertauschen und in beliebige Reihenfolge bringen, ohne die Summe zu ändern.

Damit sind die fünf grundlegenden Axiome der Addition für den von uns zu Grunde gelegten Begriff der Addition erwiesen und aus ihm hergeleitet. Nun ist noch nachzuweisen, dass dieser Begriff übereinstimmt mit demjenigen, der von der Ermittelung der Anzahl zählbarer Objecte ausgeht.

Dies führt uns zunächst zum Begriff der ***Anzahl*** der Elemente einer Gruppe. Wenn ich die vollständige Zahlenreihe von 1 bis n brauche, um jedem Elemente der Gruppe eine Zahl zuzuordnen, so nenne ich n die ***Anzahl*** der Glieder der Gruppe. Die der Aufstellung von Theorem IV vorausgegangenen Erörterungen zeigen, dass die *Anzahl der Glieder durch Aenderungen der Reihenfolge der Glieder unverändert bleibt*, wenn Auslassungen und Wiederholungen derselben vermieden werden.

Dieser Satz ist nun anwendbar auf reelle Objecte, als deren zeitweilig gegebene Namen man die α, β, γ u. s. w. betrachten kann. Nur müssen diese Objecte, wenigstens so lange das Ergebniss einer ausgeführten Zählung gültig sein soll, gewissen Bedingungen thatsächlich genügen, damit sie zählbar seien. Sie dürfen nicht verschwinden, oder mit andern verschmelzen, es darf keines sich in zwei theilen, kein neues hinzukommen, so dass jedem in Form eines griechischen Buchstaben gegebenen Namen auch dauernd ein und nur ein abgegrenztes, und als einzelnes erkennbar bleibendes Object entspricht. Ob diese Bedingungen bei einer bestimmten Klasse von Objecten eingehalten seien lässt sich natürlich nur durch Erfahrung bestimmen.[5]

Dass *die Gesammtzahl der Glieder zweier Gruppen denen kein Glied gemeinsam ist, nach dem vorher aufgestellten Begriff der Addition gleich der Summe der Anzahlen der Glieder beider Einzelgruppen ist*, ergiebt sich sogleich aus der oben beschriebenen Methode des Zählens. Man würde, um die Gesammtzahl zu finden, erst die eine Gruppe durchzählen können. Wenn sie p Glieder hat, würde die Zahl $(p+1)$ auf das erste Glied der andern Gruppe, $(p+2)$ auf das zweite kommen, und so fort, so dass die Gesammtzahl der Glieder beider Gruppen genau durch dasselbe Verfahren des Zählens gefunden wird, wie die oben definirte Summe der beiden Zahlen, welche die Anzahl der Elemente jeder Gruppe angeben.

Der oben beschriebene Begriff der Addition deckt sich also in der That mit dem Begriff derselben, der aus der Bestimmung der Gesammtanzahl mehrerer Gruppen zählbarer Objecte hervorgeht, hat aber den Vortheil, dass er ohne Beziehung auf äussere Erfahrung gewonnen werden kann.

Hiermit ist die Reihe der für Begründung der Arithmetik notwendigen Axiome der Addition für den nur aus innerer Anschauung entnommenen Begriff der Zahlen und der Summe, von dem wir ausgegangen sind, erwiesen, und zugleich die Uebereinstimmung des Ergebnisses dieser Art der Addition mit der, welche aus dem Zählen von äusseren zählbaren Objecten hergeleitet werden kann.

Die Theorie der Subtraction und Multiplication entwickelt sich von hier aus ohne weitere Schwierigkeiten, indem die ***Differenz*** $(a-b)$ definirt wird als diejenige Zahl, die man zu b addiren muss, um a als Summe zu erhalten, und die Multiplication als Addition einer Anzahl gleicher Zahlen. Hier brauche ich nur auf Herrn *Grassmann* zu verweisen, der die Multiplication reiner Zahlen durch die beiden Gleichungen definirt:

$$\begin{aligned} 1 \cdot a &= a, \\ (b+1) \cdot a &= b \cdot a + a. \end{aligned}$$

In Bezug auf die Subtraction ist nur zu bemerken, dass man die Zahlen als Zeichen einer Reihenfolge auch in absteigender Richtung in das Unbegrenzte fortsetzen kann, indem man von der 1 rückwärts zur 0, von da zu (-1), (-2) u. s. w. übergeht, und diese neuen Zeichen ebenso wie die früher allein gebrauchten positiven ganzen Zahlen behandelt. Dann hat die Differenz zweier Zahlen immer eine Bedeutung, und zwar nur eine; sie ist also eindeutig bestimmt.

Die Uebereinstimmung, wie der Unterschied zwischen den Gesetzen der Addition und Multiplication ist wegen des Folgenden hier noch zu besprechen.

Das Associationsgesetz und Commutationsgesetz gelten für beide Operationen. Es ist, wie wir gesehen:

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= a+(b+c) \\ a+b &= b+a \end{aligned}$$

Aber auch ebenso:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\ a \cdot b &= b \cdot a. \end{aligned}$$

Ein Unterschied zwischen den Grundeigenschaften beider Operationen zeigt sich erst, wenn man durch jede derselben eine Anzahl n gleicher Zahlen a verknüpft. Durch Addition verbun-

[5] Während des Druckes erfahre ich, dass Hr. Professor *L. Kronecker* die Begriffe der Zahl und Anzahl in einer Vorlesung des letzten Wintersemesters ähnlich entwickelt hat.

den geben diese das Product $n \cdot a$, welches selbst wieder dem Commutationsgesetz unterliegt:

$$n \cdot a = a \cdot n.$$

Durch Multiplication von n gleichen Factoren dagegen erhält man die Potenz a^n, in welcher a und n, besondere Fälle ausgenommen, nicht mit einander vertauscht werden können, ohne den Werth der Potenz zu ändern.

Ebenso zeigt sich für das Verhältniss jeder dieser Operationen in ihrer Verbindung mit der nächst höheren im einen Falle eine Analogie:

$$\begin{aligned} (a+b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \\ c^{a+b} &= c^a \cdot c^b \end{aligned}$$

Aber die Analogie fehlt bei der Commutation; denn es gilt nicht die gleiche Beziehung mehr für $(a+b)^c$ einerseits und $a^c \cdot b^c$ andererseits.

Benannte Zahlen.

Zählung ungleicher Stücke, wie wir sie oben besprochen haben, brauchen wir der Regel nach nur zur Feststellung ihrer Vollzähligkeit.

Von viel grösserer Bedeutung und ausgedehnterer Anwendung ist das Zählen gleicher Objecte. Solche Objecte, die in irgend einer bestimmten Beziehung gleich sind und gezählt werden, nennen wir die ***Einheiten*** der Zählung, die Anzahl derselben bezeichnen wir als eine ***benannte Zahl***, die besondere Art der Einheiten, die sie zusammenfasst, die ***Benennung der Zahl***.

Eine Anzahl ist, wie wir oben gesehen haben, zerlegbar in Theile, welche im Ganzen ***additiv*** zusammengefasst sind. Die Summe zweier benannten Zahlen von gleicher Benennung ist die Gesammtzahl aller ihrer Einheiten, also nothwendig wieder eine benannte Zahl derselben Benennung. Wenn wir zwei verschiedene Gruppen von verschiedener Anzahl zu vergleichen haben, so bezeichnen wir die, welcher die höhere Anzahl zukommt, als die ***grössere***, die von niederer Anzahl als die ***kleinere***. Haben beide dieselbe Anzahl, so bezeichnen wir sie als ***gleich***.

Objecte oder Attribute von Objecten, die mit ähnlichen verglichen den Unterschied des grösser, gleich oder kleiner zulassen, nennen wir ***Grössen***. Können wir sie durch eine benannte Zahl ausdrücken, so nennen wir diese den ***Werth*** der Grösse, das Verfahren, wodurch wir die benannte Zahl finden, ***Messung*** der Grösse. Uebrigens gelangen wir in vielen thatsächlich ausgeführten Untersuchungen nur dazu, die Messung auf willkürlich gewählte, oder durch das gebrauchte Instrument gegebene Einheiten zurückzuführen; dann haben die Zahlen, die wir finden, nur den Werth von ***Verhältnisszahlen***, bis jene Einheiten auf allgemein bekannte (***absolute Einheiten der Physik***) zurückgeführt sind. Diese allgemein bekannten Einheiten sind aber nicht etwa durch ihren Begriff zu definiren, sondern nur an bestimmten Naturkörpern (Gewichten, Maasstäben) oder bestimmten Naturvorgängen (Tag, Pendelschlag) aufzuweisen. Dass sie allgemeiner bekannt sind durch Ueberlieferung unter den Menschen, ändert das Geschäft und den Begriff des Messens nicht, und erscheint diesem gegenüber nur als eine Zufälligkeit.

Im Folgenden werden wir zu untersuchen haben, unter welchen Umständen wir Grössen durch benannte Zahlen ausdrücken, d. h. ihren Werth finden können, und was wir damit an thatsächlichem Wissen erreichen.

Dazu müssen wir aber vorher den Begriff der Gleichheit und der Grösse nach ihrer objectiven Bedeutung erörtern.

Physische Gleichheit.

Das besondere Verhältniss, welches zwischen den Attributen zweier Objecte bestehen kann und welches von uns durch den Namen „Gleichheit“ bezeichnet wird, ist durch das schon oben angeführte **`Axiom I`** charakterisirt: *Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, sind sie unter sich gleich.* Darin liegt gleichzeitig, dass das Verhältniss der Gleichheit ein wechselseitiges ist. Denn aus

$$a = c$$
$$b = c$$

folgt ebenso gut $a = b$, wie $b = a$.

Gleichheit zwischen den vergleichbaren Attributen zweier Objecte ist ein ausnahmsweise eintretender Fall, und wird also in tatsächlicher Beobachtung nur dadurch angezeigt werden können, dass die zwei gleichen Objecte unter geeigneten Bedingungen zusammentreffend oder zusammenwirkend einen besonderen Erfolg beobachten lassen, der in der Regel zwischen anderen Paaren ähnlicher Objecte nicht eintritt.

Wir wollen das Verfahren, durch welches wir die beiden Objecte unter geeignete Bedingungen versetzen, um den genannten Erfolg beobachten und sein Eintreffen oder Nichteintreffen feststellen zu können, als die ***`Methode der Vergleichung`*** bezeichnen.

Wenn dieses Verfahren der Vergleichung sicheren Aufschluss geben soll über Gleichheit oder Verschiedenheit eines bestimmten Attributs der beiden Objecte, so wird der Erfolg desselben ausschliesslich und allein von der Bedingung abhängen müssen, dass beide Objecte das betreffende Attribut in dem bestimmten Maasse besitzen, immer vorausgesetzt, dass das Verfahren der Vergleichung regelrecht ausgeführt ist.

Aus dem oben angeführten Axiom folgt zunächst, dass *der Erfolg der Vergleichung ungeändert bleiben muss, wenn die beiden Objecte mit einander vertauscht werden.*

Ferner folgt, dass wenn die beiden Objecte a und b sich als gleich erweisen, und durch frühere Beobachtung mittels derselben Methode der Vergleichung gefunden ist, dass a auch gleich einem dritten Objecte c sei, nun auch die entsprechende Vergleichung von b und c beide als gleich ergeben muss.

Das sind Forderungen, die wir an die betreffende Methode der Vergleichung zu stellen haben. *Nur solche Verfahrungsweisen sind im Stande, Gleichheit zu erweisen, welche die genannten Forderungen erfüllen.*

Dass „gleiche Grössen für einander gesetzt werden können,“ folgt zunächst aus diesen Voraussetzungen für denjenigen Erfolg, auf dessen Beobachtung wir die Feststellung ihrer Gleichheit stützen.

Aber mit der Gleichheit in dem bisher besprochenen Falle kann naturgesetzlich die Gleichheit auch anderweitiger Wirkungen oder Verhältnisse der betreffenden Objecte zusammenhängen, so dass auch in diesen letzteren Beziehungen die betreffenden Objecte für einander gesetzt werden können. Wir pflegen dies sprachlich dann so auszudrücken, dass wir die Fähigkeit der Objecte den bei der ersten Art der Vergleichung entscheidenden Erfolg hervorzubringen, als ein Attribut derselben objectiviren, den gleichbefundenen Objecten gleiche Grösse dieses Attributs zuschreiben, und die anderweitigen Wirkungen, in denen sich die Gleichheit bewährt, als Wirkungen jenes Attributs, oder als erfahrungsgemäss nur von jenem Attribut abhängend bezeichnen. Der Sinn einer solchen Behauptung ist immer nur der, dass Objecte, die sich bei derjenigen Art der Vergleichung als gleich erwiesen haben, die über die Gleichheit dieses besondern Attributs entscheidet, sich auch in den bezeichneten anderweitigen Fällen gegenseitig ohne Aenderung des Erfolges ersetzen können.

Grössen, über deren Gleichheit und Ungleichheit durch dieselbe Methode der Vergleichung zu entscheiden ist, bezeichnen wir als „*gleichartig*." Indem wir das Attribut, dessen Gleichheit oder Ungleichheit hierbei bestimmt wird, durch Abstraction loslösen von Allem, was sonst an den Objecten verschieden ist, bleibt für die entsprechenden Attribute verschiedener Objecte nur der Unterschied der Grösse übrig.[6]

Ich erlaube mir, den Sinn dieser abstracten Sätze an einigen bekannten Beispielen zu erläutern.

Gewichte. Wenn ich zwei beliebige Körper auf beide Schalen einer richtigen Wage lege, wird im Allgemeinen die Wage nicht im Gleichgewichte sein, sondern eine Schale sinken.

Ausnahmsweise werde ich gewisse Paare von Körpern a und b finden, welche, auf die Wage gelegt, deren Gleichgewicht nicht stören.

Wenn ich alsdann a mit b vertausche, muss die Wage im Gleichgewicht bleiben. Das ist die bekannte Probe darauf, ob die Wage richtig ist, d. h. ob das Gleichgewicht an dieser Wage Gleichheit der Gewichte anzeigt.

Endlich bestätigt sich, dass, wenn das Gewicht von a nicht blos dem Gewichte von b, sondern auch dem von c gleich ist, dann auch $b = c$ ist. Das Gleichgewicht der Gewichte an einer richtigen Wage begründet also in der That eine Methode, eine Art der Gleichheit zu bestimmen.

Die Körper, deren Gewicht wir vergleichen, können übrigens aus den verschiedensten Stoffen bestehen, von verschiedenster Form und Volumen sein. Das Gewicht, das wir gleichsetzen, ist nur ein durch Abstraction ausgeschiedenes Attribut derselben. Wenn wir die Körper selbst als Gewichte, und diese Gewichte als Grössen bezeichnen, so dürfen wir dies nur, wo wir von allen anderen Eigenschaften derselben absehen können. Das hat seinen praktischen Sinn, so oft wir Vorgänge beobachten oder herbeiführen, bei deren Verlauf nur dies eine Attribut der mitwirkenden Körper in Betracht kommt, d. h. bei denen Körper sich gegenseitig ersetzen können, die sich an der Wage im Gleichgewicht halten. Dies ist z. B. der Fall, wenn wir das Beharrungsvermögen der betreffenden Körper messen. Dass aber Körper von gleichem Gewicht auch gleiches Beharrungsvermögen haben und sich auch in letzterer Beziehung einander ersetzen können, folgt nicht aus dem Begriff der Gleichheit, sondern nur aus unserer Kenntniss dieses besonderen Naturgesetzes für diese besondere Beziehung.

Abstände zweier Punkte.

Das einfachste geometrische Gebilde, welches einer Grössenbestimmung fähig ist, ist der Abstand eines Paares von Punkten. Um aber dem Abstand wenigstens für die Zeit der messenden Vergleichung einen bestimmten Werth zu geben, müssen die Punkte feste Verbindung haben, wie z. B. zwei Zirkelspitzen. Die bekannte Methode der Vergleichung des Abstandes zweier Paare besteht darin, dass wir untersuchen, ob sie zu congruenter Deckung gebracht werden können oder nicht. Dass diese Methode Gleichheit festzustellen geeignet ist, dass die Congruenz in jeder Lage, bei Vertauschung der beiden Punktpaare in jeder beliebigen Weise immer wieder stattfindet, dass zwei Punktpaare, die einem dritten congruent sind, auch unter sich congruent sind, bestätigt die Erfahrung. So können wir den Begriff gleicher Abstände oder Entfernungen bilden.

[6] Hrn. *H. Grassmann*'s Bestimmung der Gleichheit: „Gleich ist dasjenige, von dem man stets dasselbe aussagen kann, oder allgemeiner, was in jedem Urtheile sich gegenseitig substituirt werden kann," würde verlangen, dass in jedem einzelnen Falle, wo man auf Gleichheit schliesst, diese höchst allgemeine Forderung, die missverständlicher Deutung ausgesetzt ist, angelegt werde.

Von da. aus kann man zum Begriff der geraden Linie und deren Länge fortschreiten. Man denke sich zwei festliegende Punkte, durch die die Linie gehen soll. Eine ***gerade Linie*** ist eine solche, in der kein Punkt seine Lage ändern kann, ohne mindestens einen seiner Abstände von den festliegenden Punkten zu ändern. Eine ***krumme Linie*** dagegen können wir um zwei ihrer Punkte drehen, wobei sich wohl die Lage, aber nicht der Abstand der übrigen Punkte von jenen beiden ändert. Die ***Länge*** zweier begrenzter gerader Linien setzen wir gleich, wenn ihre Endpunkte gleichen Abstand haben, also congruent, gelagert werden können, wobei auch die Linien congruent zusammenfallen. Der Begriff der Länge giebt insofern etwas mehr, als der Begriff des Abstandes. Wenn wir zwei Punktpaare von verschiedenem Abstand a, b und a, c in a zusammenfallend, und in gerader Linie gelagert denken, so dass ein Stück dieser Linie beiden gemeinsam ist, so fällt entweder b in die Linie ac, oder c in die Linie ab. Dies giebt einen Gegensatz, der dem des grösser und kleiner entspricht; während der Begriff des Abstandes unmittelbar nur den des gleich oder ungleich giebt.

Zeitmessung setzt voraus, dass physische Vorgänge gefunden seien, die, in unverändert gleicher Weise und unter gleichen Bedingungen sich wiederholend, wenn sie in demselben Moment begonnen haben, auch wieder gleichzeitig enden, wie z. B. Tage, Pendelschläge, Ablaufen von Sand- und Wasseruhren. Die Berechtigung für die Annahme der unveränderten Dauer bei der Wiederholung liegt hierbei nur in dem Umstande, alle verschiedenen Methoden der Zeitmessung, sorgfältig ausgeführt, immer wieder übereinstimmende Resultate liefern. Wenn zwei solche Vorgänge a und b gleichzeitig beginnen und gleichzeitig enden, so gehen sie nicht nur in der gleichen sondern in derselben Zeit vor sich. In Bezug auf die Zeit ist zwischen beiden kein Unterschied, und deshalb auch keine Vertauschung möglich. Und wenn ein dritter Vorgang c, mit a gleichzeitig beginnend, in derselben Zeit sich beendet, thut er es auch mit dem gleichzeitig vorgehenden b.

Wir vergleichen **Helligkeiten** zweier sichtbarer Felder, indem wir sie an einander rücken, so dass jede andere Abgrenzung zwischen ihnen wegfällt ausser dem Unterschiede der Helligkeit, und nachsehen, ob noch eine erkennbare Grenze zwischen ihnen bleibt.

Wir vergleichen **Tonhöhen**, wenn es sich um kleine Unterschiede handelt, durch das Phänomen der Schwebungen, welche fehlen müssen, wenn die Höhen gleich sind. Wir vergleichen die **Intensitäten elektrischer Ströme** am Differentialgalvanometer, welches sie in Ruhe lassen müssen, wenn sie gleich sind u. s. w.

Es müssen also für die Aufgabe, Gleichheit in verschiedenen Beziehungen zu constatiren, höchst verschiedene physische Mittel aufgesucht werden, die aber alle den oben gestellten Forderungen genügen müssen, wenn sie eine Gleichheit beweisen sollen.

Das erste Axiom: „Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, sind sie unter sich gleich,“ ist also nicht ein Gesetz von objectiver Bedeutung, sondern es bestimmt nur, welche physische Beziehungen wir als Gleichheit anerkennen dürfen.

Um Beispiele zu citiren, wo der Satz von der Gleichheit des Dritten geradezu einer mechanischen Ausführung zu Grunde liegt, erinnere ich an das Schleifen ebener Glasflächen. Wenn zwei solche unter fortdauernder Rotation der einen gegen einander abgeschliffen werden, können beide kugelig werden, die eine concav und die andere convex. Wenn drei abwechselnd gegen einander abgeschliffen werden, müssen sie schliesslich eben werden. Ebenso macht man die Kanten genauer metallener Lineale gerade, indem man je drei gegen einander abschleift.

Ueber additive physische Verknüpfung[7] gleichartiger Grössen.

Die Vergleichung von Grössen, so weit wir sie bisher behandelt, giebt Aufschluss über die Frage, ob sie gleich oder ungleich sind, aber noch kein Maass für die Grösse ihres Unterschiedes, falls sie verschieden sein sollten. Sollen aber die betreffenden Grössen durch benannte Zahlen vollständig bestimmt werden können, so muss die grössere der beiden Zahlen als Summe der kleineren und ihres Unterschiedes darstellbar sein. Zu untersuchen ist also, unter welchen Bedingungen wir eine physische Verknüpfung gleichartiger Grössen als Addition ausdrücken dürfen.

Die Verknüpfungsweise, um die es sich hierbei handelt, wird im Allgemeinen von der Art der Grössen, die verknüpft werden sollen, abhängen. Wir addiren z. B. Gewichte, indem wir sie einfach in dieselbe Wagschale legen. Wir addiren Zeitperioden, indem wir die zweite genau in dem Augenblick beginnen lassen, wo die erste aufhört; wir addiren Längen, indem wir sie in bestimmter Weise, nämlich in *gerader Linie*, an einander setzen u. s. w.

1. *Gleichartigkeit der Summe und der Summanden.* Da die besprochene Verknüpfung *Grössen einer bestimmten Art* betreffen soll, so wird ihr Resultat nicht geändert werden dürfen, wenn ich eine oder mehrere der Grössen mit gleich grossen gleichartigen Grössen vertausche. Denn diese werden dann nur durch dieselbe Zahl mit derselben Benennung ersetzt, die sie schon selbst hatten. Aber auch das Ergebniss der Verknüpfung muss, wenn es die Summe der verknüpften Grössen darstellen soll, gleichartig den Theilen sein, da die Summe zweier benannten Zahlen wieder eine Zahl derselben Benennung ist, wie schon oben bemerkt. *Also über das Gleichbleiben des Ergebnisses der Verknüpfung bei Vertauschung der Theile muss durch dieselbe Methode der Vergleichung entschieden werden, mit der wir die Gleichheit der zu vertauschenden Theile festgestellt haben.* Das ist der thatsächliche Sinn der Forderung, dass die Summe gleichartiger Grössen den Summanden gleichartig sein muss.

So kann ich z. B. in einer Summe von Gewichten die einzelnen Stücke durch solche von anderem Material, aber gleichem Gewicht ersetzen. Die Summe behält dann gleiches Gewicht; ihre übrigen physikalischen Attribute aber können sich ändern.

2. *Commutationsgesetz.* Das Resultat der Addition ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Summanden verknüpft werden. Dasselbe muss gelten von physischen Verknüpfungen, die als Additionen zu betrachten sein sollen.

3. *Associationsgesetz.* Die Verbindung zweier gleichartiger Grössen kann auch physisch geschehen, indem statt beider eine ungetheilte Grösse derselben Art eingesetzt wird, die ihrer Summe gleich ist. Dadurch sind jene beiden dann vor allen andern additiv vereinigt.

So kann z. B. beim Wägen ein Fünfgrammstück statt fünf einzelner Grammstücke gesetzt werden.

Das Ergebniss der Verknüpfung also darf dadurch nicht geändert werden, dass ich statt einiger der zu verknüpfenden Grössen andere einführe, die der Summe derselben gleich sind.

Uebrigens lässt sich zeigen, dass, wenn die beiden ersten Forderungen allgemein erfüllt sind, auch die dritte erfüllt ist.

Man denke sich die Elemente in der Reihenfolge hinter einander geordnet, wie sie in einem ersten Falle mit einander verknüpft werden sollen, So dass jedes einzelne dem Ergebniss der Verknüpfung der ihm vorausgehenden angefügt wird, in derselben Weise, wie wir es oben für die Addition von $[a + b + c+$ etc.$]$ vorgeschrieben haben. Wenn nun in einem zweiten Falle verlangt wird, irgend welche von diesen Grössen vor den andern zu verknüpfen, so können wir diese nach dem Commutationsgesetz, welches der Voraussetzung nach gelten soll, in erste und

[7] „Verknüpfung“ ist ein *Grassmann*’scher Terminus, dort freilich, überwiegend subjectiv gewendet, hier nur objectiv.

zweite Stelle setzen, wo sie dann vor den andern zu verknüpfen sind, ohne dass wir das Resultat ändern. Alsdann können wir nach der ersten unserer obigen Bedingungen das Ergebniss dieser Verknüpfung auch ersetzen durch ein anderes ungetheiltes Object, welches als Grösse gleicher Art betrachtet, gleich gross ist.

Nachdem dies geschehen, können wir wiederum die beiden nächst zu verknüpfenden Grössen oder Summen von Grössen an die beiden ersten Stellen bringen u. s. f., bis alle in vorgeschriebener Reihenfolge verknüpft sind. Bei keiner dieser Operationen ändern wir die Grösse des endlichen Ergebnisses der Verknüpfungen.

Eine physische Verknüpfungsweise von Grössen gleicher Art kann also als Addition angesehen werden, wenn das Ergebniss der Verknüpfung, als Grösse derselben Art verglichen, nicht geändert wird, weder durch Vertauschung der einzelnen Elemente unter sich, noch durch Vertauschung von Gliedern der Verknüpfung mit gleichen Grössen gleicher Art.

Wenn wir in eben beschriebener Weise die Verknüpfungsmethode der betreffenden Grössen gefunden haben, so ergiebt sich nun auch, welche grösser, welche kleiner sind. Das Product der additiven Verknüpfung, das Ganze, ist grösser als die Theile, aus denen es hergestellt ist. Bei den einfachsten Grössen, mit denen wir von frühester Jugend her zu thun hatten, wie Zeiten, Längen, Gewichten, haben wir nie gezweifelt, was grösser und was kleiner sei, weil wir eben von jeher additive Verknüpfungsmethoden derselben kannten. Hier ist aber zu überlegen, dass die Methode der Vergleichung, wie wir sie oben beschrieben haben, uns im Allgemeinen nur belehrt, ob die Grössen gleich oder ungleich seien. Wenn zwei Grössen x einander gleich sind, sind auch alle in gleicher Weise durch Rechnung gebildete Functionen derselben gleich. Von diesen werden einige bei steigendem x zunehmen, andere abnehmen. Welche von diesen Functionen eine additive physische Verknüpfung zulassen, ist erst durch besondere Erfahrung zu entscheiden. Lehrreich sind dann solche Fälle, wo zweierlei Arten der additiven Verknüpfung möglich sind. So bestimmen wir genau durch dieselbe Methode der Vergleichung, ob zwei Drähte gleichen galvanischen Widerstand w, beziehlich gleiches Leitungsvermögen λ haben, denn es ist

$$w = \frac{1}{\lambda}.$$

Widerstände addiren wir, wenn wir die Drähte hinter einander verbinden, so dass die durchgeleitete Elektricität nach einander jeden einzelnen durchströmen muss. Das Leitungsvermögen der Drähte addiren wir, wenn wir die Drähte neben einander legen und alle ihre Anfänge unter einander, alle ihre Enden auch unter einander verbinden. So objectiviren wir hier als physikalische Grössen zwei verschiedene Functionen derselben Variablen. Hat ein Draht grösseren Widerstand, so hat er geringeres Leitungsvermögen und umgekehrt. Die Frage, was grösser, was kleiner sei, wird also bei beiden in entgegengesetztem Sinne beantwortet. Ebenso lassen sich elektrische Condensatoren (Leydener Flaschen) neben einander und hinter einander verbinden. Im ersteren Falle addiren sie die Capacität im letzteren Falle die Spannung (Potential) für gleiche Ladung. Erstere wächst, wenn letztere abnimmt.

Wiederum dürfen wir uns nicht wundern, wenn die Axiome der Addition sich im Naturlaufe bewahrheiten, da wir als Addition nur solche physische Verknüpfungen anerkennen, die den Axiomen der Addition genügen.

Theilbarkeit der Grössen und Einheiten.

Bisher haben wir die Grössen noch nicht in Einheiten zu zerlegen gebraucht. Der Begriff der Grösse, sowie ihrer Gleichheit und ihrer Addition, konnte ohne eine solche Zerlegung gewonnen werden. Die höchste Vereinfachung der Darstellung der Grössen erhalten wir aber in der That erst, wenn wir sie in Einheiten auflösen und als benannte Zahlen ausdrücken.

Grössen, welche addirt werden können, sind im Allgemeinen auch zu theilen. Kann eine jede der vorkommenden Grössen als additiv nach dem für Grössen dieser Art gültigen Additionsverfahren aus einer Anzahl gleicher Theile zusammengesetzt angesehen werden, so kann jede von ihnen nach dem Associationsgesetz der Addition überall, wo nur der Werth dieser Grösse entscheidet, durch die Summe ihrer Theile vertreten werden. So wird sie dann durch eine benannte Zahl ersetzt, andre Grössen der gleichen Art durch andere Anzahlen derselben Theile. Die Beschreibung der einzelnen Grössen gleicher Art kann dann einem Zuhörer, der die als Einheit gewählten gleichen Theile kennt, durch blosse Angabe der Zahlen überliefert werden.

Sind die vorkommenden Grössen nicht ohne Rest durch, die gewählten Einheiten auszudrücken, so theilt man die Einheiten wieder in bekannter Weise und kann auf diese Art eine Werthbestimmung jeder der vorkommenden Grössen bis zu beliebiger Genauigkeit geben. Vollkommene Genauigkeit ist allerdings nur für rationale Verhältnisse zu erreichen.

Irrationale Verhältnisse können an den reellen Objecten vorkommen; in Zahlen aber können sie nie vollständig genau dargestellt, sondern ihr Werth nur zwischen beliebig zu verengernde Grenzen eingeschlossen werden. Diese Einengung zwischen Grenzen genügt für alle Berechnungen solcher Functionen, deren Werthe bei immer kleiner werdenden Aenderungen der Grössen, von denen sie abhängen, ebenfalls immer kleinere Aenderungen erleiden, welche schliesslich unter jeden angebbaren endlichen Betrag fallen können. Namentlich gilt dies für die Berechnung aller differentiirbaren Functionen der irrationalen Grössen. Dagegen lassen sich allerdings auch discontinuirliche Functionen bilden, zu deren Berechnung die Kenntniss der noch so eng gezogenen Grenzen, zwischen denen der irrationale Werth liegt, nicht genügt. Diesen gegenüber bleibt die Darstellung irrationaler Grössen durch unser Zahlensystem immer ungenügend. In der Geometrie und Physik aber sind wir solchen Arten der Discontinuität noch nicht begegnet..

Werthbestimmungen von Eigenschaften. (Physikalische Constanten, Coëfficienten.) Ausser den bisher besprochenen Grössen, welche direct als solche zu erkennen sind, weil sie additive Verbindung zulassen, giebt es aber noch eine Reihe von anderen, auch durch benannte oder unbenannte Zahlen ausdrückbaren Verhältnissen, für welche noch keine additive Verbindung mit gleichartigen bekannt ist. Sie werden gefunden, so oft sich ein naturgesetzlicher Zusammenhang zwischen additiven Grössen bei Vorgängen zeigt, die durch die Besonderheiten irgend einer bestimmten Substanz, oder eines bestimmten Körpers, oder die vorausgegangene Art der Einleituug des betreffenden Vorgangs beeinflusst werden.

So z. B. zeigt das Brechungsgesetz des Lichtes an, dass zwischen dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels Lichtstrahls bestimmter Wellenlänge, der aus dem Leeren in eine gegebene durchsichtige Substanz eintritt, ein bestimmtes Verhältniss bestehe. Die Zahl, welche dieses Verhältniss ausdrückt, ist aber verschieden für verschiedene durchsichtige Stoffe, bezeichnet also eine Eigenschaft derselben, ihr Brechungsvermögen. Aehnliche Grössen sind das specifisclie Gewicht, Wärmeleitungsvermögen, elektrische Leitungsvermögen, Wärmecapacität u. s. w. Daran schliessen sich diejenigen Werthe. (Integrationsconstanten der Dynamik), die während des ungestörten Ablaufs einer einmal eingeleiteten Bewegung eines begrenzten Körpersystems unverändert bleiben.

Es ist der Physik nach und nach gelungen, alle diese Werthe auf Einheiten zurückzuführen, die aus den drei fundamentalen Maasseinheiten der Zeit, der Länge und der Masse durch Multiplication. Potenzirung und ihre inversen Operationen zusammenzusetzen sind.

Der Unterschied zwischen diesen Werthen und den additiven Grössen wird in der Sprache der Physiker und Mathematiker nicht streng festgehalten. Auch die ersteren werden oft

Grössen genannt, da sie durch benannte Zahlen auszudrücken sind; der Terminus **Coëfficient** bezeichnet ihre physikalische Natur verhältnissmässig besser. Der Unterschied ist aber nicht wesentlich; denn gelegentlich können neue Entdeckungen auf additive Verbindungen solcher Coëfficienten führen, wodurch sie in die Reihe der direct bestimmbaren Grössen einrücken würden. Einigermaassen entspricht der genannte Unterschied wohl dem. den ältere Metaphysiker in dem Gegensatz der **extensiven** und **intensiven Grössen** anzuzeigen wünschten, Hr. *P. du Bois-Reymond* nennt die ersteren **lineäre Grössen**, die letzteren **nicht lineäre**.

Andererseits geht aber aus der gegebenen Ableitung hervor, dass man erst additive Grössen gebildet haben muss, ehe man Coëfficienten bestimmen kann. Denn die Gleichung, welche ein Naturgesetz ausdrückt, kann die Werthbestimmung eines Coëfficienten nur geben, wenn alle andern darin vorkommenden Grössen schon als Grössen bestimmt sind. Die Bestimmung von additiven Grössen muss also stets vorangehen, ehe man die Werthe nicht additiver finden kann,

Addition ungleichartiger Grössen.

Eine grosse Rolle in der Physik spielen solche Objecte, die bei verschiedenen Methoden der Vergleichung gleichzeitig zwei oder drei, auch mehrere verschiedenartige Grössen darstellen, welche alle bei derselben Art physischer Verknüpfung der Objecte addirt werden. Dahin gehört zunächst die sehr grosse Zahl der im Raume gerichteten Grössen, die in der Physik vorkommen, d. h. Grössen, die einen bestimmten Werth und zugleich eine bestimmte Richtung anzeigen, die man aber aus mehreren Componenten von fester Richtung (zwei in der Ebene, drei im Raume) zusammengesetzt sich vorstellen kann. Am einfachsten wird im Allgemeinen die Uebersicht der Verhältnisse, wenn man die Componenten, die in derselben Weise zur Resultante zu verknüpfen sind, wie das im Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte vorgeschrieben ist, drei rechtwinkeligen Coordinataxen parallel wählt. In diese Klasse gehören Verschiebungen eines Punktes im Raume, seine Geschwindigkeit, Beschleunigung, dieser entsprechend die ihn bewegende Kraft, ferner Rotationsgeschwindigkeiten und verschwindend kleine Drehungen, Strömungsgeschwindigkeiten von schweren Flüssigkeiten, Elektricität und Wärme, magnetische Momente u. s. w.

Bei additiven Verbindungen summiren sich die gleich gerichteten Componenten; diese Summen können wieder in eine Resultante zusammengefasst werden. Alle physischen Verknüpfungen solcher Grössen, bei denen der Erfolg nur von der Grösse und Richtung der endlichen Resultante abhängt, können als beruhend auf solchen additiven Verknüpfungen angesehen werden, wie dies für zwei Dimensionen *Gauss* in der geometrischen Deutung der imaginären Grössen, für mehrere *H. Grassmann* als Addition geometrischer Strecken, und *R. Hamilton* in der Lehre von den Quaternionen durchgeführt hat. Dabei muss wieder das Commutationsgesetz erfüllt sein; so können wir unendlich kleine Drehungen eines festen Körpers um zwei verschiedene Axen in eine resultirende Drehung zusammensetzen, ebenso Rotationsgeschwindigkeiten, aber nicht endliche Drehungen, weil bei solchen es nicht mehr gleichgültig ist, ob man erst um Axe a und dann um die Axe b dreht, oder umgekehrt.

Aber auch in der Mischung farbigen Lichtes kommt ein ähnliches Verhältniss vor. Jede Quantität farbigen Lichtes kann in Beziehung auf ihren sinnlichen Eindruck dargestellt werden als die Vereinigung dreier Lichtquanta von passend gewählten Grundfarben. Mischung mehrerer Farben wirkt dann auf das Auge, wie drei Lichtquanta der drei Grundfarben vereinigt wirken würden, welche man für jede einzelne Grundfarbe erhält, wenn man die entsprechenden Quanta, die in sämmtlichen vereinigten Einzelfarben vorkommen, addirt. Hierauf beruht die Möglichkeit der geometrischen Darstellung der Gesetze der Farbenmischung durch Schwerpunktsconstructionen, wie sie *Newton* zuerst vorgeschlagen hat.

Multiplication benannter Zahlen.

Eine benannte Zahl $(a \cdot x)$, worin x die Art der Einheiten bezeichnen soll, a deren Anzahl, kann man mit einer reinen Zahl n multipliciren. Dies fällt einfach unter die oben angeführte Definition des Productes als der Summe von n gleichen Summanden a. Da die Summe gleichartiger Summanden eine ihnen gleichartige Grösse ist, so ist auch das Product $(n \cdot a)$ eine Grösse von derselben Benennung wie a. Das Commutationsgesetz passt auf dieses Product, insofern

$$n \cdot (a \cdot x) = a \cdot (n \cdot x),$$

d. h. man kann auch a als reine Zahl betrachten, und neue benannte Summanden $(n \cdot x)$ bilden.

Ebenso ist das Gesetz der Multiplication einer Summe unmittelbar gegeben:

$$\begin{aligned} (m+n) \cdot (a \cdot x) &= m \cdot (a \cdot x) + n(a \cdot x) \\ n \cdot (a \cdot x + b \cdot x) &= n \cdot (a \cdot x) + n(b \cdot x). \end{aligned}$$

Die Multiplication benannter Zahlen mit reinen Zahlen bleibt also ganz in dem Rahmen der Definitionen und Sätze, die oben für die Multiplication reiner Zahlen unter sich abgeleitet sind.

Anders ist es mit der Multiplication zweier oder mehrerer benannter Zahlen. Diese hat nur in bestimmten Fällen einen Sinn, wenn besondere physische Verknüpfungen unter den betreffenden Einheiten möglich sind, die den drei Gesetzen der Multiplication unterworfen sind:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \cdot a \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \\ a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \end{aligned}$$

Das bekannteste Beispiel solcher multiplicativer Verbindungen aus der Geometrie ist der Werth des Inhalts von Parallelogrammen und Parallelepipeden, ausgedrückt durch das Product zweier oder dreier Längen, nämlich einer Seite und einer oder zweier Höhen. Die Physik bildet aber eine grosse Anzahl solcher Producte verschiedener Einheiten, und dem entsprechend auch Beispiele von Quotienten, Potenzen und Wurzeln, derselben. Bezeichnen wir eine Länge mit l, eine Zeit mit t, eine Masse mit m, so ist die Benennung

einer Fläche	l^2
eines Volumens	l^3
einer Geschwindigkeit	$\frac{l}{t}$
einer Bewegungskraft	$\frac{m \cdot l}{t^2}$
einer Arbeit	$\frac{m \cdot l^2}{t^2}$
des Drucks auf eine Fläche	$\frac{m}{l \cdot t^2}$
der Spannung in einer Fläche	$\frac{m}{t^2}$
einer Dichtigkeit	$\frac{m}{l^3}$
eines magnetischen Quantum	$\frac{l}{t}\sqrt{m \cdot l}$
einer magnetischen Kraft	$\frac{l}{t}\sqrt{\frac{m}{l}}$

u. s. w.

Die meisten dieser Verbindungen beruhen auf der Bestimmung Coëfficienten; aber viele dieser Grössen können doch auch additive physische Verknüpfungen liefern, wie Geschwindigkeiten, Strömungen, Kräfte, Drucke, Dichtigkeiten u. s. w.

Alle diese multiplicativ definirten Einheiten sind aber ungleichartig denen, aus denen sie erzeugt sind, und bekommen einen Sinn nur durch die Kenntniss besonderer geometrischer oder physikalischer Gesetze.

Zu erwähnen ist hier die besondere Abart der Multiplication, welche *H. Grassmann* in seiner Ausdehnungslehre für gerichtete Grössen aufgestellt hat, und die auch in der Theorie der Quaternions zu Grunde gelegt ist. Diese stellt ein anderes Commutationsgesetz auf, nämlich

$$a \cdot b = -b \cdot a$$

und giebt in der That eine grosse Vereinfachung in der Bezeichnung, wenn auch nicht in der Berechnung der Werthe, welche durch Zusammenwirken verschieden gerichteter Grössen erzeugt werden.

Das Product zweier Strecken ist in dieser Rechnungsart der Inhalt des Parallelogramms, was beide als Seiten hat; aber die parallelogrammatische Fläche wird auf der einen Seite als positiv, auf der andern als negativ angesehen. Die eine Seite der Fläche ansehend, muss ich, um von der Seite a durch den Winkel zur Seite b überzugehen, den Winkel rechtsdrehend durchlaufen; die andere Seite ansehend, komme ich umgekehrt linksdrehend von b nach a. Darauf beruht der Unterschied in der Folge $(b \cdot a)$ und $(a \cdot b)$.

Es genügt, hier diese Rechnungsformen erwähnt zu haben und ihre Stellung zu den Rechnungsformen der reinen Zahlenlehre bezeichnet zu haben, da die Aufgabe der vorliegenden Arbeit nur erfordert, die Bedeutung und Berechtigung der Rechnung mit reinen Zahlen und die Möglichkeit von deren Anwendung auf physische Grössen zu zeigen.

Dass wir irgend ein physisches Verhältniss als Grösse hinstellen, kann also immer nur auf empirischer Kenntniss gewisser Seiten seines physischen Verhaltens beim Zusammentreffen und Zusammenwirken mit andern beruhen. Ich fasse dabei die Congruenz zweier Raumgrössen, die an Körpern vorkommen, oder durch Körper abgegrenzt sind, im Sinne meiner früheren Arbeiten über die Axiome der Geometrie ebenfalls als ein physisches Verhältniss, welches empirisch zu constatiren ist. Wir müssen *erstens* die Methode der Vergleichung der betreffenden Grössen, wodurch ihre Art charakterisirt ist, und *zweitens* entweder die Methoden der additiven Verknüpfung oder die Naturgesetze kennen, in denen sie als Coëfficienten vorkommen, um sie durch benannte Zahlen ausdrücken zu können.

Die grosse Vereinfachung und Uebersichtlichkeit der Auffassung, die wir durch Rückführung der bunten Mannigfaltigkeit der uns vorliegenden Dinge und Veränderungen auf quantitative Verhältnisse erreichen, ist tief im Wesen unserer Begriffsbildung begründet. Wenn wir den Begriff einer Classe bilden, fassen wir in ihm alles zusammen, was bei den Objecten, die in die Classe gehören, gleich ist. Wenn wir ein physisches Verhältniss als benannte Zahl auffassen, haben wir aus dem Begriff ihrer Einheiten auch alles entfernt, was ihnen als verschieden in der Wirklichkeit anhaftet. Sie sind Objecte, die wir nur noch als Exemplare ihrer Classe betrachten, und deren Wirksamkeit nach der untersuchten Richtung hin auch nur davon abhängt, dass sie solche Exemplare sind. In den aus ihnen gebildeten Grössen bleibt dann nur der zufälligste der Unterschiede, der der Anzahl stehen.