Universitätsbibliothek
Heidelberg

Gottfried Köthe, 1905–1989

Heinz Günther Tillmann

Dedicated to the memory of Professor Gottfried Köthe

Neu herausgegegeben von **Gabriele Dörflinger**,
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2007.

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Heinz Günther Tillmann
geb. 30. September 1924 in Unna-Massen

Professor Gottfried Köthe

Der Aufsatz erschien in
Note di Matematica Vol. X, Suppl. n.1, 9–21 (1990)
Der Autor gestattete freundlicherweise die Publikation des Aufsatzes im Internet.

Der Text wurde durch ein Texterkennungsprogramm wiedergewonnen.
Die Photographie stammt aus dem Universitätsarchiv Heidelberg.

Am 30. April 1989 starb in 84. Lebensjahr Gottfried Köthe, emeritierter ordentlicher Professor am Fachbereich Mathematik der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main. Er war noch bis wenige Wochen vor seinem Tode wissenschaftlich aktiv, und seine letzte Arbeit erscheint in diesem Band.

Gottfried Köthe wurde am 25.12.1905 in Graz (Österreich) geboren als Sohn des Kaufmanns und Ingenieurs Hugo Köthe und seiner Frau Josefa, geb. Jungl. Er besuchte in seiner Heimatstadt die Volksschule, dann das Realgymnasium, wo er im Sommer 1923 die Reifeprüfung ablegte. Anschließend studierte er an der Universität Graz — zwischendurch ein Semester in Innsbruck — Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie. Am 2.7.1927 promovierte er in Graz mit einer Dissertation «Beiträge zu Finslers Begründung der Mengenlehre». Anschließend studierte er ein Semester in Zürich bei Finsler, Fueter und Speiser, und ging von dort nach Göttingen, wo er Schüler von Emmy Noether wurde, die seine Interessen und auch seine Arbeiten der nächsten Jahre sehr nachhaltig geprägt hat. Schon nach wenigen Monaten in Göttingen trug Köthe auf dem Internationalen Mathematiker Kongress in Bologna (1928) seine ersten Ergebnisse zur Strukturtheorie der Ringe vor, durch die an Wedderbum anschließende Arbeiten von Artin (1927) und E. Noether verallgemeinert wurden.

In Göttingen wurde Köthe im WS 28/29 Hilfsassistent am mathematischen Institut, im Sommer 1929 erhielt er ein Stipendium und im WS 1929/30 übernahm er vertretungsweise eine Assistentenstelle bei Otto Toeplitz im Mathematischen Seminar in Bonn. Die Tätigkeit in Bonn führte zu einer engen wissenschaftlichen Zusammenarbeit von Köthe und Toeplitz, durch die die Kötheschen Interessen eine neue Richtung erhielten.

Zum WS 1930/31 ging er nach Münster auf eine planmäßige Assistentenstelle am Mathematischen Seminar bei Behnke und Neder. Hier habilitierte er sich am 31.1.1931 mit einer Arbeit «Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum». Im Jahre 1935 erhielt er einen Lehrauftrag für «Geometrie», der bald um das Gebiet «Angewandte Mathematik» erweitert wurde. Kurze Zeit später wurde ihm eine Dozentenstelle übertragen, und am 20.4.1937 erfolgte seine Ernennung zum außerplanmäßigen Professor.

Drei Jahre später wurde Gottfried Köthe auf ein planmäßiges Extraordinariat an der Universität Gießen berufen, das er zum 1.10.40 übernahm, und am 1.7.43 erfolgte dort seine Ernennung zum ordentlichen Professor.

Während des Krieges wurde er für längere Zeit zu einer Tätigkeit im Auswärtigen Amt einberufen und dort mit Dechiffrierarbeiten beauftragt.

Bald nach der Wiedereröffnung der Universität Mainz als «Johannes Gutenberg Universität» (SS 1946) folgte Köthe einem Ruf auf einen Lehrstuhl in Mainz und übernahm dort ab 15.10.46 die Leitung des Mathematischen Instituts, das er sehr tatkräftig auf- und ausbauen konnte. Es gelang ihm in kurzer Zeit, das Institut mit einer leistungsfähigen Bibliothek auszustatten und zu erreichen, daß das Institut schon in den 40er Jahren mit vier Lehrstühlen ausgestattet war, als sich die meisten deutschen Universitäten noch mit zwei oder drei mathematischen Lehrstühlen begnügen mußten.

In dieser Zeit entstanden auch einige seiner wichtigsten und ausstrahlendsten wissenschaftlichen Arbeiten, z.B. über die Stufenräume und deren Dualräume, die heute meist als «Köthe sequence spaces $\Lambda(A)$ » bezeichnet werden und über den Kötheschen Dualitätssatz für Funktionenräume der Funktionentheorie.

Aber auch auf die Gestaltung und Entwicklung der ganzen Joh. Gutenberg Universität nahm er wesentlichen Einfluß: als Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät von 1948–50 und als Rektor der Universität für die Amtsjahre 1954/55 und 1955/56, woran sich noch ein Jahr als Prorektor anschloß.

In diesen Leitungsfunktionen konnte er durch seine Sachlichkeit, Schlagfertigkeit und seinen nie erlahmenden Humor die gute Zusammenarbeit von Kultursministerium und Universität stärken, die Auslandsbeziehungen ausbauen und innerhalb der Universität manche Differenzen ausgleichen und so zum Gedeihen seiner Universität in besonders hohem Maße beitragen..

Nach 11 Jahren in Mainz nahm Köthe zum 1.10.1957 einen Ruf auf den neugeschaffenen Lehrstuhl für Angewandte Mathematik an der Universität Heidelberg an und baute hier das Institut für Angewandte Mathematik auf. Nach zwei Jahren wurde er auch in Heidelberg zum Rektor gewählt für das Amtsjahr 1960–61 und konnte mit der Universität das 575-jährige Bestehen feiern. Anschließend war er zwei Jahre Prorektor.

In die Zeit der Tätigkeit in Heidelberg fielen auch noch einige weitere Höhepunkte seiner wissenschaftlichen und akademischen Tätigkeit: 1957–1958 war er Vorsitzender der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Vorsitzender des Fachausschusses Mathematik der Deutschen Forschungsgemeinschaft (1959–63). Im Jahre 1960 erschien sein wissenschaftliches Hauptwerk «Topologische lineare Räume I» als Band 107 der «Grundlehren»-Reihe des Springer-Verlages.

Im gleichen Jahr wurde er zum ordentlichen Mitglied der Heidelberger Akademie der Wissenschaften berufen.

Im Jahre 1961 erhielt er die Auszeichnung «Commandeur dans l'Ordre des Palmes Académiques», 1963 verlieh ihm die Braunschweigische Wissenschaftliche Gesellsschaft die Gauss-Medaille und 1965 zeichnete ihn die Université de Montpellier durch die Verleihung des Ehrendoktors (Dr.h.c.) aus.

Nach der 7 1/2-jährigen so erfolgreichen Tätigkeit in Heidelberg stellte sich Gottfried Köthe noch eine neue Aufgabe. Er nahm zum 1.5.65 den Ruf auf einen Lehrstuhl für Angewandte Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt an. Hier fand sich rasch wieder eine Schar von Schülern und jungen Forschern zusammen, so daß an dem bis 1964 vorwiegend von Algebra (R. Baer) Topologie und Geometrie (W. Franz, Ruth Moufang, W. Benz) geprägten Fachbereich nun auch die Analysis sich als kräftiger und fruchtbarer Zweig entwickeln konnte, wozu auch der 1964 auf den anderen Lehrstuhl für Angewandte Mathematik (Numerische Analysis) berufene F. Stummel wesentlich beitrug. 1966 erschien die 2. Auflage von «Topologische Lineare Räume I», 1969 die englische Fassung «Topological Vector Spaces I».

Die Arbeiten der 60er Jahre befaßten sich vorwiegend mit Problemen linearer

Operatoren, speziell dem der offenen Abbildungen und Fortsetzungsfragen. Diese Abhandlungen dienten auch der Vorbereitung des 2. Bandes «Topological Vector Spaces II», der 1979 als Band 237 der «Grundlehren» erschien und in erster Linie den linearen und bilinearen Abbildungen einschließlich der Theorie der Tensorprodukte gewidmet ist. In diesem Zusammenhang schrieb Köthe in den Jahren vor seiner Emeritierung, die 1971 erfolgte, eine Reihe von Arbeiten über nukleare Folgenräume. Nach dem Erscheinen des 2. Bandes seiner Monographie wandte er sich in den 80er Jahren wieder einem Themenbereich zu, den er schon in den Jahren 1931–35 behandelt hatte: den konvergenzfreien Räumen. Die inzwischen entwickelte Theorie der Nuklearität und der Tensorprodukte ermöglichten ihm hier wesentliche Fortsschritte. Die letzte Arbeit aus diesem Bereich hat er wenige Wochen vor seinem Tod abgeschlossen und zur Publikation eingereicht. Sie erscheint in diesem Band.

Im Jahre 1980, 50 Jahre nach Einreichung der Habilitationsschrift, verlieh die Math. Nat. Fakultät der Universität Münster Gottfried Köthe die Ehrendoktorwürde (Dr. rer. nat. h.c.). Es folgte wenige Monate später, im Jahre 1981, die gleiche Ehrung durch die Universitäten Mainz und Saarbrücken.

Das wissenschaftliche Werk

Gottfried Köthes wissenschaftliches Werk ist ganz wesentlich geprägt durch die Wirkung, die Emmy Noether in Göttingen und etwa 2 Jahre später Otto Toeplitz in Bonn mit ihren Ideen und Forschungsergebnissen auf ihn ausgeübt haben. Dementsprechend sind die ersten Publikationen der Strukturtheorie der Ringe und der Schiefkörper gewidmet und lassen sich auffassen als das Bestreben nach einer möglichst allgemeinen Erweiterung der Wedderburnschen Sätze für hyperkomplexe Systeme auf Algebren unendlichen Ranges. Wesentliches Element ist hier die Abschwächung des «Doppelkettensatzes», der Endlichkeit jeder aufsteigenden bzw. absteigenden Folge von Rechtsidealen in dem Ring $\mathcal{R}$, den auch Artin in seiner Verallgemeinerung von Wedderburn benutzte. Bereits wenige Monate nach seinem Eintreffen in Göttingen konnte Köthe auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Bologna (1928) die Artinschen Resultate verallgemeinern (vgl. [1]), wobei er als wesentlichen neuen Begriff das «Nilideal» (=Ideal aus nilpotenten Elementen, das aber nicht selbst nilpotent sein muß) einführte. Noch vor Ende 1928 hat Köthe die optimale Bedingung gefunden, die *notwendig* und *hinreichend* ist dafür, daß das Radikal (= Köthe Radikal) existiert und der Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist.

An Stelle der absteigenden Ketten-Bedingung wird nun verlangt

I a) Jedes regulär Rechtsideal J (d.h. J ist nicht Nilideal) enthält ein minimales reguläres Rechtsideal.

An Stelle der aufsteigenden Ketten-Bedingung wird nur ein Spezialfall gefordert:

I b) Jede aufsteigende Kette von direkten Summen minimaler regulärer Rechtsideale J_ν

$$J_1 \subset J_1 \oplus J_2 \subset J_1 \oplus J_2 \oplus J_3 \subset \ldots \quad \text{mit} J_\nu \cdot J_\mu = 0 \quad \text{für} \nu \neq \mu$$

ist endlich.

Diese Bedingungen implizieren, daß das Radikal C als maximales Nilideal, das außerdem alle Links-Nilideale und Rechts-Nilideale enthält, existiert und der Restklassenring R/C vollständig reduzibel ist. Andererseits sind I a) und I b) auch notwendig dafür.

Der Theorie der Nilringe und nilpotenten Ringe sind weitere Arbeiten gewidmet.

Da bei seinen Verallgemeinerungen der Wedderburnschen Sätze für Ringe und Algebren ohne Endlichkeitsbedingung über dem Zentrum als einfache Bestandteile insbesondere volle Matrizenringe $\mathrm{Mat}(n, K)$ über beliebigen Schiefkörpern K auftreten, lag es nahe, das Interesse den Schiefkörpern zuzuwenden. So entstand dann eine größere Arbeit [7] «Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum», die Ende 1930 als Habilitationsschrift bei der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster eingereicht wurde.

In dieser Arbeit werden erstmals «algebraische» Schiefkörper $\mathcal{R}$ unendlichen Ranges über dem Zentrum P konstruiert:

Sind $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots,$ abzählbar viele Schiefkörper endlichen Ranges n_i über demselben Zentrum P, so ist das unendliche direkte Produkt $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \times \ldots = \bigcup_{n-1}^{\infty} \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \times \ldots \times \mathcal{R}_n$ ein algebraischer Schiefkörper unendlichen Ranges über P, falls die n_i paarweise teilerfremd sind.

Andererseits wird ein algebraischer Schiefkörper unendlichen Ranges $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2 \times \ldots$ über einem Zentrum P konstruiert, wobei alle $[\mathbb{Q}_i : P] = n_i = 2$ sind.

Weiterhin wird die Frage erörtert, wann ein unendlicher Schiefkörper $\mathcal{R}$ mit Zentrum P als direktes Produkt endlicher Schiefkörper mit Zentrum P darstellbar ist. Es gelingt zwar nicht die abschließende Lösung des Problems aber: Jeder Schiefkörper $\mathcal{R}$ abzählbar unendlichen Ranges über dem Zentrum P, der die Eigenschaft hat, daß je endlich viele Elemente in einem endlichen Schiefkörper mit Zentrum P liegen, ist unendliches direktes Produkt endlicher Schiefkörper über dem Zentrum P.

Weiterhin gilt unter den gleichen Voraussetzungen:

(*) $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{p1} \times \mathcal{R}_{p2} \times \ldots$ Dabei sind die $\mathcal{R}_{pi}$ ihrerseits Produkte von einfachen Schiefkörpern und die $\mathcal{R}_{pi}$ enthalten nur Elemente vom Grad p_i^r und für $i \neq j$ sind $\mathcal{R}_{pi}$ und $\mathcal{R}_{pj}$ (d.h. p_i und p_j teilerfremd.

Die Zerlegung (*) ist bis auf Isomorphie eindeutig. Dagegen muß die weitere Zerlegung der $\mathcal{R}_{pi}$ nicht mehr eindeutig sein, wofür ein Beispiel angeben wird.

Die Arbeit schließt mit einer Verallgemeinerung der R. Brauerschen Klassen-Gruppe der endlichen Schiefkörper durch Hinzunahme aller unendlichen Schiefkörper, die die Voraussetzungen der letzten beiden Sätze erfüllen:

Man erhält eine unendliche abelsche Gruppe, die die Brauersche Gruppe der endlichen Schiefkörper über P als Untergruppe enthält.

Mit dem Wechsel von Göttingen nach Bonn und der Zusammenarbeit mit Otto Toeplitz erhielten die ringtheoretischen Interessen eine neue Wendung, die dann zu ganz neuen, von Köthe entwickelten Theorien führte.

Toeplitz hatte bewiesen, daß der Ring von Hilberts beschränkten Matrizen $\sum_2$ ein maximaler Ring unendlicher Matrizen ist, der ja bekanntlich als Endomorphismenring des Hilbertraums l^2 zu interpretieren ist. Er hatte weiterhin den Ring $\sum_z$ der zeilenfiniten und $\sum_p = \sum_z^l$ der spaltenfiniten Matrizen als maximal erkannt In [6] fanden und studierten Köthe und Toeplitz den Ring der «halbfiniten» Matrizen $S = (s_{ij}), i, j \in \mathbb{Z}$, die sich als Endomorphismen des Raumes $\omega \oplus \varphi = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, x_i = 0$ für $i > i_0(x)\}$ deuten lassen.

Köthe hatte nun die entscheidende Idee, den Zusammenhang zwischen Matrizenringen und Endomorphismenringen linearer Vektorräumen herzustellen und von dort her die Maximalität zu charakterisieren. Er trug darüber auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1932 in Zürich vor [9]. Gemeinsam mit Toeplitz wurden diese Ideen ausgeführt in [11] und danach von Köthe allein weiterentwickelt und ausgestaltet. Wenn λ ein linearer Koordinatenraum $\varphi \subseteq \lambda \subseteq \omega$ und $\sum(\lambda)$ die Menge aller Matrizen $A = (\alpha ij)$ ist, die λ in sich transformieren ($Ax = (\sum \alpha_{ij} x_j) \in \lambda$) für $x \in \lambda$), so ist i.a. weder $\sum(\lambda)$ ein Matrizenring noch maximal. Wenn jedoch λ «vollkommen» ist, so wird $\sum(\lambda)$ stets ein maximaler Matrizenring.

Für einen Koordinatenraum λ ist nach Köthe der duale Raum (α-dual) λ^* definiert durch

$\lambda^* = \{u = (u_n) : \sum u_n x_n = u \cdot x$ absolut konvergent für alle $x = (x_n) \in \lambda\}$.

Offenbar ist stets $\lambda \subset (\lambda^*)^* = \lambda^{**}$ und λ heißt vollkommen, wenn $\lambda = \lambda^{**}$ gilt. λ^* ist stets vollkommen, und λ^{**} ist der kleinste vollkommene Raum, der λ enthält.

Für vollkommenes λ ist $\sum(\lambda)$ ein maximaler Matrizenring, und $\sum(\lambda)$ ist vollkommen in dem Sinne, daß sein Spaltenraum ein vollkommener Koordinatenraum ist. Umgekehrt ist jeder maximale, vollkommene Matrizenring $\sum$ gleich $\sum(\sigma), \sigma$ der Spaltenraum von $\sum$. In einem 2. Umkehrtheorem wird gezeigt, daß auch eine Vollständigkeitseigenschaft von $\sum$ ausreicht, damit $\sum$ von der Form $\sum(\sigma)$, also vollkommen ist.

Die linearen vollkommenen Räume haben sich dann durch die weiteren Arbeiten von Köthe als eine außerordentlich nützliche und gut handhabbare Klasse von Räumen erwiesen. Mit λ und λ^* als duales Paar hat man zunächst auf λ und λ^* die schwache Topologie τ_s, damit die (schwach) beschränkten Mengen, mit deren Hilfe Köthe die starke Topologie τ_b und andere zwischen τ_s und τ_b liegende Topologien definiert und untersucht.

So wird in [21] eine Topologie τ_g (der gleichmäßigen Konvergenz auf den «begrenzten» Mengen von λ^*) definiert, die sich als feinste Topologie erweist, die für Folgen den gleichen Konvergenzbegriff liefert wie die schwache Topologie τ_s. In [22], also 6 Jahre vor den berühmten Arbeiten von Mackey und Arens, zeigt Köthe für vollkommene Räume λ, daß die feinste Topologie τ auf λ, für die die stetigen Linearformen auf $\lambda(\tau)$ genau durch die Elemente von λ^* erzeugt werden, die Topologie τ_k der gleichmäßigen Konvergenz auf allen (absolut konvexen) schwach kompakten Teilmengen von λ^* ist. Damit ist der 1946 und 1947 von Mackey und Arens für beliebige lokalkonvexe Räume bewiesene fundamentale Satz für vollkommene Räume bereits 1939 vorhanden.

Nachdem schon 1935 J. von Neumann den Begriff des (lokal-)konvexen Vektorraums eingeführt und die Charakterisierung der Topologie durch Halbnormen ausgeführt hatte, wurde 1942 von Dieudonné («La dualité dans les espaces vectoriels topologiques») die erste umfassende Untersuchung der Theorie der lokalkonvcxen Räume ausgeführt und dabei die Köthesche Theorie der vollkommenen Räume wie auch Banachs Theorie der normierten Räume explizit als zwei spezielle Zweige in die allgemeine Theorie eingebettet. Viele Begriffe der Kötheschen Theorie erwiesen sich als nützlich für die allgemeine Theorie und auch die Ergebnisse und Methoden der vollkommenen Räume bestimmten weitgehend die Fragestellungen, die für die lokalkonvexen Räume von Bedeutung wurden.

Eine sehr wichtige Arbeit mit zahllosen Anwendungen entstand nach dem Wechsel von Giessen nach Mainz: «Die Stufenräume» [27].

Ist $A = (a_{jk})$ eine Matrix mit $a_{jk} \geq 0, a_{jk} \leq a_{jk+1}, \sup a_{jk} > 0$, so ist

$$\lambda' = \{x : |x_j| \leq M a_{jk} \quad \text{für ein } M \text{ und } k\},$$

der durch A bestimmte Stufenraum $\lambda' = \lambda'(A)$ und

$$\lambda = \lambda(A) = \{y : \sum |y_j||a_{jk}| < \infty \quad \text{für alle } k\},$$

der durch A bestimmte gestufte Raum.

In Stufenräumen und gestuften Räumen $\lambda(A)$ lassen sich beschränkte Mengen leicht charakterisieren, in Stufenräumen sind beschränkte Mengen schwach kompakt. Bei Quotientenbildung λ/μ, μabgeschlossener Teilraum von λ verhalten sich die Stufenräume gutartig: z.B. ist λ/μ stets wieder schwach (folgen)-vollständig, was bei beliebigen vollkommenen Räumen nicht der Fall sein muß. Bis in jüngste Zeit hinein haben sehr viele Autoren immer wieder gezeigt und ausgenutzt, daß sich zahlreiche Funktionenräume der Analysis oder deren Dualräume als gestufte oder Stufenräume darstellen lassen und dadurch in ihrer Struktur leicht handhaben lassen.

Als nächstes möchte ich auf die beiden Arbeiten «Dualität in der Funktionentheorie» [39] und «Die Randverteilungen analytischer Funktionen» [38] eingehen, die sehr starke Wirkung für die Forschungen vieler Mathematiker gehabt haben. Für eine offene oder abgeschlossene Menge $M \subset \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei $H(M)$ der Raum der auf M lokalholomorphen (d.h. auf Umgebungen von M holomorphen) Funktionen f, wobei f ür $\infty \in M$ noch $f(\infty) = 0$ gefordert werde. Für G offen wird auf $H(G)$ die Topologie der kompaktgleichmäßigen Konvergenz definiert. $H(G)$ ist mit dieser Topologie ein Fréchet-Raum mit der Montel-Eigenschaft:

Beschränkte Mengen sind relativ kompakt (Satz von Montel).

Für abgeschlossenes A ist $A = \cap U_n, U_n \supset A$ offen, mit $U_n \supset \overline{U_{n+1}} \supset U_{n+1}$ und $H(A) = \lim_{\rightarrow} H(U_n) = \lim_{\rightarrow} HB(\overline{U}_n)$ sei der topologische induktive Limes der F-Räume $H(U_n)$ bzw. der Banach-Räume $HB(\overline{U}_n)$, der in $\overline{U}_n$ beschränkten, in U_n holomorphen Funktionen mit der Norm $||g|| = ||g||_{U_n} = \sup\{|g(z)|, z \in U_n\}$.

Wegen der stetigen Einbettungen

$$H(U_n) \rightarrow HB(U_{n+1}) \rightarrow H(U_{n+1})$$

stimmen beide Limites überein.

Es wird dann der Köthesche Dualitätssatz bewiesen:

Für offenes G sind die Räume $H(G)$ und $H(\hat{\mathbb{C}}\backslash G) = H(G')$ zueinander dual. Für $f \in H(G), \tilde{u} \in H(G')$ wird die duale Paarung durch $\langle f, \tilde{u} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\tilde{u}(z)dz = u(f)$ gegeben, wobei Γ ein geeigneter (von $\tilde{u}$ abhängiger) Zyklus in G ist. Für $u \in H(G')$ ist $\tilde{u}(\xi) = u(\frac{1}{z-\xi}$ die Fantappiésche Indikatrix des Funktionals u . Die Dualität gilt als starke Dualität

$H(G')$ ist der starke Dual von $H(G), H(G') \cong H(G')_b$ und $H(G')'_b \simeq H(G)$.

Dieser Dualitätssatz wurde wenig später von Grothendieck auf beliebige Mengen M ausgedehnt und auch auf Räume vektorwertiger Funktionen $H(M, E)$ mit Werten in einen lokalkonvexen Raum E übertragen.

Er bewies:
(*) $H(G, E)' \cong H(G', E')$,
(**) $H(G', F) \cong H(G, F')$,
und (*) ist eine topologische Isomorphie bzgl. der starken Topologie auf dem Dualraum wenn E ein (F)-Raum ist. Für (**) gilt das gleiche, wenn F ein Banach-Raum ist. Nach Eschmeier (1986) gilt die starke Dualität in (**) auch noch, wenn F ein (DF)-Raum ist, womit eine befriedigende Symmetrie erreicht wird.

Der Köthesche Dualitätssatz hat in der Folge zahlreiche Anwendungen gefunden, von denen die wohl wichtigste von Köthe selbst in [38] begonnen wurde.

Für eine endliche analytische Jordankurve $\gamma \subset \mathbb{C}$ führt die natürliche Einbettung $H(\gamma) \subset C^\infty(\gamma) = \mathcal{E}(\gamma)$, die stetig mit dichtem Bild ist, dazu, daß für die Dualräume die Inklusion $\mathcal{E}(\gamma) \subset H'(\gamma) = H(\gamma') = H(G_0) \oplus H(G_1)$ gilt. Jede Distribution u auf γ ist danach durch ein Paar $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ von holomorphen Funktionen bestimmt, die durch $\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} u[\frac{1}{z-\xi}]$ bestimmt sind. Köthe konnte die dafür benötigten Funktionen durch «Langsames Wachstum» gegen γ charakterisieren. Der Distributionsraum $D'(\gamma) = \mathcal{E}'(\gamma)$ läßt sich also beschreiben als Raum der Paare langsam wachsender holomorpher Funktionen, und beliebige Paare $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ stellen die Elemente einer größeren Klasse verallgemeinerter Funktionen dar, die Köthe als «Randverteilungen» der analytischen Funktionen $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ bezeichnete. Für den Fall daß γ durch ∞ geht erhält man zunächst nur eine Darstellung der Distributionen mit kompaktem Träger als Randverteilungen. Durch ein Mittag-Leffler-artiges Heftungsverfahren konnte ich dann zeigen, daß sich alle Distributionen auf $\mathbb{R}$ als Randverteilungen analytischer Funktionen in oberer und unterer Halbebene darstellen lassen, und die Distributionenräume wurden (auch topologisch) als Randverteilungen langsam wachsender holomorpher Funktionen dargestellt.

D. Vogt gelang dann eine Übertragung auf höhere Dimensionen, so daß auch der Distributionsraum $D'(\mathbb{R}^N)$ in den Raum der Randverteilungen eingebettet wurde. Dies führte zur Rechtfertigung und zum besseren Verständnis von Rechenverfahren der Physik, bei denen singuläre Integrale in $\mathbb{R}^N$ durch Verlagerung des Integrationswegs ins Komplexe ausgewertet wurden, was nun einer bestimmten distributionstheoretischen Deutung der Integrale entsprach.

Die Auffassung der Resolvente eines linearen Operators T als Indikatrix einer operatorwertigen Distribution führte zu einer Bereicherung der Spektraltheorie.

Für gewisse Klassen von Operatoren mit Spektrum in γ oder $\mathbb{R}$ und «langsam wachsender» Resolvente ließ sich der analytische Funktionalkalkül auf Klassen von differenzierbaren Funktionen mit Zerlegung der Eins ausdehnen. Dies führt zu entsprechenden Zerlegungen der Operatoren, zur Existenz vieler invarianter Teilräume und den Eigenschaften, die C. Foias dann der Definition der zerlegbaren Operatoren zugrundelegte.

Ein Höhepunkt in Gottfried Köthes wissenschaftlichem Werk war das Erscheinen seiner Monographie «Topologische Lineare Räume I» im Jahre l960. Dieser Band wurde sehr rasch das Standardwerk über topologische Vektorräume. Es stellte sehr umfassend sowohl den neuesten Stand der algebraischen Theorie (Vektorräume über beliebigen Körpern, Lineartopologische Räume) als auch die lokalkonvexe, für die Analysis wichtige, Theorie umfassend dar. Dabei enthielt das Werk zahlreiche Resultate, die hier zum ersten Male publiziert wurden, und viele Hinweise auf noch offene Fragen. Die Theorie der vollkommenen Folgenräume λ wird als spezieller Zweig der lokalkonvexen Theorie dargestellt Die umfassenden Kenntnisse des Verfassers in diesem Zweig ermöglichten es ihm, durch Beispiele und Gegenbeispiele die Grenzen der Möglichkeiten der Verallgemeinerung klassischer Sätze und Methoden aufzuzeigen und zu dokumentieren, daß gewisse Sätze der allgemeinen Theorie «scharf» sind in dem Sinne, daß gewisse Voraussetzungen nicht entbehrt oder abgeschwächt werden können. In den folgenden Auflagen (1966, 1969, 1983) konnten jeweils zahlreiche neue Ergebnisse aufgenommen werden, die zunächst als offene Fragen formuliert waren.

In der Vorbereitung des Bandes «Topological Vector Spaces II» (1979) veröffentlichte Köthe eine Reihe von Abhandlungen [58-62], [65-67], die sich mit Linearen Abbildungen, insbesondere mit Fragen der offenen Abbildungen (= top. Homomorphismen), mit unstetigen Abbildungen und mit Fortsetzbarkeitsfragen befaßten. Den linearen Abbildungen und Räumen linearer und bilinearer Abbildungen sollte der Band II gewidmet sein. Dabei spielten topologischc Tensorprodukte und Nuklearität eine wichtige Rolle. Die in diesen Bereichen entwickelten Methoden und die damit erzielten Ergebnisse erwiesen sich auch als fruchtbar, als sich Gottfried Köthe in den 80er Jahren wieder einem Thema zuwandte, das er schon zwischen 1931 und 1935 behandelt hatte: Konvergenzfreie Räume. Es war ihm gelungen, die Isomorphieklassen konvergenzfreier Räume durch Invarianten zu beschreiben und für jede Klasse eine Normalform anzugeben, die im wesentlichen durch eine Ordinalzahl a bestimmt war. Für die Tensorprodukte ergab sich, daß wegen der Nuklearität der konvergenzfreien Räume alle natürlichen topologischen Tensorprodukte zusammenfielen, so daß nur ein Tensorprodukt zu behandeln war.

Es gelang G. Köthe nun anzugeben, wie sich die Invarianten des Tensorprodukts, $\lambda\hat{\oplus}\mu$ aus den Invarianten von λ und von μ berechnen ließen. In [87] konnten die entsprechenden Probleme auch für die Dualräume gelöst werden.

In seiner letzten Arbeit [90] behandelt er das Problem der Charakterisierung der komplementierten Teilräume in konvergenzfreien Räumen, womit er dieses Thema, das ihn gewissermaßen wieder in einen algebraischen-kombinatorischen Bereich führte, in einer sehr abgerundeten Form hinterläßt.

Eine Reihe von Würdigungen verstorbener Mathematiker (Prüfer [13]. Toeplitz [57], [80, 81], Sebastiao e Silva [75], Jörgens [76], Pannwitz [77], Mazur [88] und die Lemberger Schule [89]) sind wertvolle Beiträge zur Mathematikgeschichte, die sich auf das Miterleben der Entwicklungen stützen.

Schriftenverzeichnis von Gottfried Köthe

[1] *Struktur der Ringe, die die Durchschnittsminimalbedingung erfüllen*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna (1928), 75-77.

[2] *Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist*, Math. Zeitschrift 32(1930), 161-186.

[3] *Ein Beitrag zur Theorie kommutativer Ringe ohne Endlichkeitsvoraussetzung*, Nachrichten von der Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen Math. Phys. Klasse (1930), 195-207.

[4] *Über maximale nilpotenle Unterringe und Nilringe*, Math. Annalen 103 (1930), 359-363.

[5] *Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungslheorie kontinuierlicher Gruppen*, Math. Annalen 103 (1930), 545-572.

[6] Mit O. Toeplitz, *Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen*, Journal reine angew. Math. 165 (1931), 116-127.

[7] *Habilitationsschrift: Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum*, Math. Annalen 105 (1931), 15-39.

[8] *Über Schiefkörper und Unterkörper 2. Art über dem Zentrum*, Journal reine angew. Math. 166 (1932), 182-184.

[9] *Maximale Systeme unendlicher Matrizen*, Intern. Math. Kongress Zürich (1932), Bd. 2, 29-30.

[10] *Erweiterung des Zentrums einfacher Algebren*, Math. Annalen 107 (1933), 761-766.

[11] Mit O. Toeplitz, *Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen*, Journal reine angew. Math. 171 (1934), 193-226.

[12] *Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring*, Math. Zeitschrift 39 (1934), 31-44.

[13] Mit H. Behnke, *Heinz Prüfer*, Jahresbericht der DMV 45 (1935), 32-40.

[14] *Die konvergenzfreien linearen Räume abzählbarer Stufe*, Mat. Annalen 111 (1935), 229-258.

[15] *Über die Auflösung von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten in linearen lopologischen Räumen*, Congress Intern. des Mathematiciens Oslo (1936), Bd. 2, 118-119.

[16] *Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im Hilberlschen Raum*, Math. Zeitschrift 41 (1936), 137-152.

[17] *Die Gleichungstheorie im Hilbertschen Raum*, Math. Zeitschrift 41 (1936), 153-162.

[18] *Die Teilräume eines linearen Koordinatenraumes*, Math. Annalen 114 (1937), 99-125.

[19] *Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie*, Jahresbericht der DMV 47 (1937), 125-144.

[20] Mit G. FLEDDERMANN aus dem Nachlaß herausgegeben: *Heinz Prüfer, Projektive Geometrie*, 314 Seiten, Verlag Noske, Borna (1936).

[21] *Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Journal reine angew. Math. 178 (1938), 193-213.

[22] *Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen*, Math. Annalen 116 (1939), 719-732.

[23] *Das Reziprokentheorem für zeilenabsolute Matrizen*, Monatshefte für Math, und Physik 47 (1939), 224-233.

[24] *Unendliche Abelsche Gruppen und Grundlagen der Geometrie*, Jahresbericht der DMV 49 (1939), 97-113.

[25] Mit H. HERMES, *Theorie der Verbände*, Artikel 13 in der Neuauflage der Encyklopädie der Mathematik (1940), 28 Seiten, Teubner-Verlag.

[26] *Die Quotientenräume eines linearen vollkommenen Raumes*, Math. Zeitschrift 51 (1947), 17-35. :

[26a] *Zusammenhänge zwischen der Funktionentheorie und der Theorie der Gleichungen mit ∞-vielen Unbekannten*, Ber. Math. Tagung Tübingen (1946), 92-94.

[27] *Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume*, Math. Zeitschrift 51(1948), 317-345.

[28] *Verbände*, Artikel VI der FIAT Review of German Science (1948), Pure Mathematics, Bd. l, 81-95.

[29] *Funktionalanalysis, Integraltransformationen.* Artikel XXII der FIAT Review of German Science (1948), Pure Mathematics, Bd. 2, 99-112.

[30] *Eine axiomatische Kennzeichnung der linearen Räume vom Typus ω*, Math. Annalen 120 (1949), 634-649.

[31] Mit O. Toeplitz (aus dem Nachlaß herausgegeben:) *Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie*, Comm. Math. Helvetici 23 (1949), 222-242.

[32] Mit O. Toeplitz (aus dem Nachlaß herausgegeben:) *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, Bd. 1, 181 Seiten, Springer (1950).

[33] *Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume*, Math. Zeitschrift 52 (1950), 627-630.

[34] *Über zwei Sätze von Banach*, Math. Zeitschrift 53 (1950), 203-209.

[35] *Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume*, Math. Nachrichten 4 (1951), 70-80.

[36] *Die verschiedenen Reziproken einer unendlichen Matrix*, Monatshefte für Math. 55 (1951), 153-156.

[37] *Eine einfache Klasse lokalkonvexer linearer Räume*, Proc. Int. Math. Congress, Bd. 1, Harvard University (1950).

[38] *Die Randverteilungen analytischer Funktionen*, Math. Zeitschrift 57 (1952), 13-33.

[39] *Dualität in der Funktionentheorie*, Journal reine angew. Math. 191 (1953), 30-49.

[40] *Lineare Räume mit linearer Topologie*, Proc. Int. Math. Congress Amsterdam, Bd. I (1954), 236-37.

[41] *A teoria dos espacos localmente convexos e a suas aplicacoes à Analise*, Academia des ciencias de Lisboa, Biblioteca de Altos Estudos (1954), 24 Seiten.

[42] *Sobre a nao contradicao de Mathematica*, Gazeta de Mathematica XI, Nr. 58 (1954), 1-5.

[43] *Zur Theorie der kompakten Operatoren in lokalkonvexen Räumen*, Portugaliae Mathematica 13 (1954), 97-104.

[44] *Das Bild der heutigen Mathematik*, Rektoratsrede, Experientia Bd. XI (1955), 249-254.

[45] *Nicolas Bourbaki, Forscher und Wissenschaftler im heutigen Europa*, Gestalter unserer Zeit Bd. 3, Gerhard Stalling Verlag (1955), 367-375.

[46] *Bericht über neuere Entwicklungen in der Theorie der topologischen Vektorräume*, Jahresbericht der DMV 59(1956), 19-36.

[47] *Bernhard Riemann*, in «*Die großen Deutschen*», Propyläen-Verlag Berlin (1956), 395-405.

[48] Mit F. W. Schäfke, *Wissensschaftliche Redaktion der deutschen Übersetzung von Gelfand-Neumark, Die unitären Darstellungen der klassischen Gruppen*, Akademie Verlag Berlin (1957), 7,353 Seiten.

[49] Mit H. G. Tillmann, *Wissenschaftliche Redaktion der deutschen Übersetzung von Neumark, Normierte Algebren*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1959), 572 Seiten.

[50] *Sobre la teoria de los espaacios vectoriales topologicos*, Publicaciones del Seminario Mathematico de Zaragoza, 1 (1959), 5-18.

[51] *Topologische lineare Räume I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 107, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1960), XII, 456.

[52] *Une caractérisation des espaces bornologiques*, CBRM Colloque sur l' analyse fonctionnelle tenu à Louvain (1961),39-45.

[53] *Probleme der linearen Algebra in topologischen Vektorräumen*, Proceedings of the International Symposium on linear spaces, Jerusalem 1961, Acad. Press. (1961), 290-298.

[54] *Die Spieltheorie, ein neuer Zweig der angewandten Mathematik*, Heidelberger Jahrbücher V (1961), 17-24. Rektoratsrede.

[55] Mit F. Ballier, *Strukturwandel in der heutigen Mathematik*, Grundzüge der Mathematik, Bd. III, Göttingen (1962), 548-576.

[56] *Vollständige lokalkonveze Räume abzählbarer Dimension*, Archiv der Mathematik, 13 (1962), 377-384.

[57] Mit H. Behnke, *Otto Toeplitz zum Gedächtnis*, Jahresbericht der DMV 66 (1963), 1-16.

[58] *Homomorphismen von (F)-Räumen*, Mathematische Zeitschrift 84 (1964), 219-221.

[59] *General Linear Transformations of Locally Convex Spaces*, Math. Annalen 159 (1965), 309-328.

[60] *Hebbare lokalkonvexe Räume*, Math. Annalen 165 (1966), 181-195.

[61] *Über einen Salz von Sobczyk*, Anais da Faculdade de Ciéncias do Porto; fasc. 3/4 Bd. 49 (1966), 1-6.

[62] *Fortsetzung linearer Abbildungen lokalkonvexer Räume*, Jahresbericht der DMV 68 (1966), 193-204.

[63] *Funktionalanalysis*, Die Johann Wolfgang Goethe Universität (1966), 33-40.

[64] *Topologische lineare Räume I*, 2. Auflage, Springer (1966).

[65] *Liftable locally convex spaces*, Bull. Math, de la Soc. Sci. Math, de la R.S. de Roumanie 11 (95 Nr. 2) (1967), 177-179.

[66] *Die Bildräume abgeschlossener Operatoren*, Journal reine angew. Math. 232 (1968), 110-111.

[67] *Abbildungen von (F)-Räumen in (LF)-Räume*, Math. Annalen 178(1968), 1-3.

[68] *Über nukleare Folgenräume*, Studia Math. 31(1968), 267-271.

[69] *Topological vector spaces I*, Translated by H. Garling (Grundlehren Bd. 159) XV, 456 Seiten, Springer (1969).

[70] *Stark nukleare Folgenräume*, Journal Fac. Sci. Tokyo Section IA, 17 (1970), Nr. 1-2, 291-296.

[71] *Nuclearity and sequence spaces*, Colloque Analyse Fonct. Liége (1970), 13-18.

[72] *Nucleare (F)- und (DF)-Folgenräume*, Theory of sets and topology, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1972), 327-332.

[73] *Nuclear sequence spaces*, Math. Balkanica 1 (1971), 144-146.

[74] *On the closed graph theorem*, Proc. Symposium Functional Analysis Istanbul Silivri (1973), 1-8.

[75] *J. Sebastiao e Silva el l'analyse fonctionelle*, Anais de Faculdade de Ciencias do Porto 56 (1973), Fax. 4, 1-11.

[76] *Das wissenschaftliche Werk von Konrad Jörgens*, Jahresbericht der DMV 77 (1975), 78-88.

[77] *Erika Pannwitz*, Zentralblatt für Mathematik Bd. 309 (1976), zwei Seiten nach dem Titelblatt.

[78] *Bounded and compact subsets of ε-tensor products*, Comm. Math., Special Vol. I dedicated to W. Orlicz (1978), 191-195.

[79] *Topological vector spaces II*, (Grundlehren Bd. 237), Springer (1979), 331 Seiten.

[80] *Toeplitz and the theory of sequence spaces*, Otto Toeplitz Centennial, Operator Theory, Advances and Applications Vol. 4, Birkhäuser (1982), 575-584.

[81] *In memory of Otto Toeplitz*, Otto Toeplitz Centennial, 545-556. Übersetzung von U. Toeplitz von: *Erinnerungen an Otto Toeplitz*, Bonner Mathematische Schriften Nr. 143 (1982), 9-23.

[82] *Topological vector spaces I*, Second printing revised, Springer (1983).

[83] *On a class of nuclear spaces I*, Portugaliae Math. 41 (1982), 125-138.

[84] *On a class of nuclear spaces II*, Math. Nachrichten 119(1984), 157-164.

[85] *Tensor products of spaces of countable degree*, Collectanea Math. 34 (1984), 137-155.

[86] *Tensor products of convergence free spaces*, Aspects of Mathematics and its Applications, Elsevier Science Publishers (1986), 485-494.

[87] *Duality of tensor products of convergence free spaces*, Collectanea Math. 37 (1986), 125-133.

[88] *Stanislaw Mazur's Contributions to Functional Analysis*, Math. Annalen 277 (1987), 489-528.

[89] *Stefan Banach und die Lemberger Schule*, Erscheint in: Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Westf. Wilhelms-Universität Münster (1991).

[90] *On complemented subspaces of convergence free spaces*, Note di Matematica (1991).