Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Braunmühl, Anton von** (1853 – 1908)

Titel: **Trigonometrie, Polygonometrie und Tafeln von 1759 bis 1799**

Quelle: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik
Band 4. Von 1759 – 1799 / hrsg. von Moritz Cantor. – 1908, S. 403 – 450
Signatur UB Heidelberg: L 84-6::4

Orig.-Titel: Abschnitt XXIII.
Trigonometrie - Polygonometrie und Tafeln

Inhalt

ABSCHNITT XXIII

TRIGONOMETRIE · POLYGONOMETRIE UND TAFELN

VON

A. v. BRAUNMÜHL

Die Ausbildung der Trigonometrie durch Euler und dessen Zeitgenossen und Nachfolger.

Die definitive Umgestaltung der Trigonometrie war 1753 durch den ersten grundlegenden Aufsatz Eulers angebahnt worden (vgl. III², S. 560—561 und 867—869), obwohl derselbe seine praktische Bezeichnungsweise der trigonometrischen Funktionen schon viel früher in seinen zahlreichen Abhandlungen sowie in der „Introductio" angewendet hatte. Diese Bezeichnungsweise, die in der Hauptsache der noch jetzt gebräuchlichen entspricht, war auch von einigen der hervorragendsten Mathematiker, wie von den Franzosen Clairaut und d'Alembert, alsbald mit Glück gebraucht worden, während andere und darunter namentlich die Engländer sich noch ziemlich lange teils der älteren Abkürzungen[1]) bedienten, teils überhaupt keine Formeln schrieben. Die Wichtigkeit seiner Schreibweise für die ganze Mathematik hat Euler selbst mit folgenden Worten hervorgehoben[2]): „Wenn dies (nämlich die Einführung der trigonometrischen Funktionen in den Kalkül) auch nicht von großer Wichtigkeit scheinen möchte, da es hauptsächlich auf der von mir in die Rechnung eingeführten Bezeichnungsweise dieser Größen beruht ..., so hat doch eben diese Art der Bezeichnung nachmals der ganzen Analysis so große Hilfsmittel verschafft, daß dadurch ein fast neues Feld erschlossen wurde ..."

Ferner hat Euler[3]), wenn er dies auch nirgends ausdrücklich hervorhob, die trigonometrischen Funktionen nicht mehr allein als Linien, wie es bisher stets geschehen war, sondern fast durchweg als Verhältnisse aufgefaßt. Dies geht aus verschiedenen Stellen seiner Schriften auf das deutlichste hervor und war schon durch den Um-

---

[1]) Vgl. z. B. die Bezeichnung bei F. C. Maier, III², S. 559. Ausführlicheres hierüber in: A. v. Braunmühl, Die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie. Bibl. math. (3) III, 1902, p. 64—74. [2]) Subsidium calculi sinuum. Novi Comment. Acad. sc. Petrop. ad annos 1754/55, erschienen 1760, V, p. 164—165. [3]) So z. B. in „Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem". Novi Comment. Acad. Petrop. 1760/61 (erschienen 1763), VIII, p. 159 ff.; ferner in „Trigonometria sphaerica universa". Acta Acad. Petrop. 1779, I, p. 73. Vgl. auch die Übersetzung von E. Hammer, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 73, p. 41.

stand gefordert, daß er sie als Winkelfunktionen in die Analysis einführte[1]). Simon Klügel, auf den wir weiter unten noch ausführlich zu sprechen kommen werden, hat diese Neuerung mit folgenden Worten gekennzeichnet[2]): „Nach der alten Ansicht der goniometrischen Funktionen waren es bloße Linien, die man unter sich und mit dem Halbmesser zu Gleichungen verknüpfte ..., und hier den Halbmesser zur Einheit nehmen, war nur Ersparung im Schreiben, welche die Gleichartigkeit (Homogeneität) der Glieder zerstörte. Nach der neuen, durch Euler eingeführten, sind sie Zahlgrößen, welche die Gleichartigkeit der Glieder nicht aufheben, ..." Aber obwohl schon Eulers Arbeiten den Vorteil dieser Auffassung ins Licht setzten, und später Klügel und andere für sie eintraten, dauerte es noch bis tief in das 19. Jahrhundert hinein, bis dieselbe auch in der elementaren Trigonometrie durchgriff und überall festen Fuß faßte.

Ähnlich ging es auch mit jenem so einfachen und in seiner Tragweite doch so wichtigen Gedanken Eulers, die Seiten der ebenen und sphärischen Dreiecke mit a, b, c und die gegenüberliegenden Winkel mit den an den Ecken stehenden Buchstaben A, B, C zu bezeichnen, ein Gedanke, den er schon in jener Abhandlung von 1753 über die kürzeste Linie zur vollkommen symmetrischen Gestaltung der sphärischen Formelsysteme ausgenützt hatte. Obwohl das Vorteilhafte dieser Bezeichnung auf der Hand lag, fand auch sie nur ziemlich langsam allgemeine Verwendung.

Sehen wir uns um, was von Eulers Zeitgenossen und Nachfolgern sowie von ihm selbst von 1759 ab neues in der Trigonometrie geleistet wurde, so müssen wir um einige Jahre zurückgreifend einen Aufsatz des Engländers Francis Blake (1718—1780) mit dem Titel „Spherical Trigonometrie reduced to Plane"[3]) besprechen, der deshalb nicht übergangen werden kann, weil die darin angewandte Methode nachmals wiederholte Verwendung fand. Den Schlüssel zur Behandlung der sphärischen Dreiecke bot ihm der Fall, einen Winkel aus den drei Seiten zu bestimmen, den er folgendermaßen löste. Um

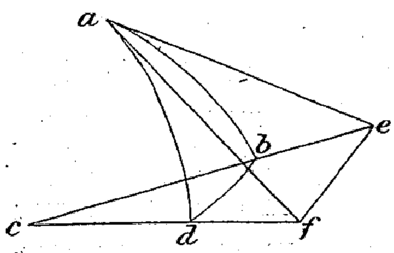


Fig. 19.

$\sphericalangle a$ in Δabd (Fig. 19) zu bestimmen, seien af und ae die Tangenten

---

[1]) Er sagt im Subsidium calculi sinuum a. o. a. O.: „Ebenso (wie Johann Bernoulli die Logarithmen zu analytischen Größen machte) glaube ich die Sinus und Tangenten der Winkel zuerst in den Kalkül eingeführt zu haben, so daß man sie wie andere Größen behandeln und mit ihnen alle Operationen ohne jedes Hindernis ausführen kann". [2]) Mathem. Wörterbuch, II, 1805, p. 618. [3]) P. T. XLVII, 1752, p. 441 ff.

der Bögen ad und ab und c sei das Zentrum der Kugel, dann ist $ce = \sec ab$, $cf = \sec ad$ und $\sphericalangle c = \operatorname{arc} bd$ bekannt. Somit ergibt sich aus Δcef die Seite ef, und da $af = \operatorname{tg} ad$, $ae = \operatorname{tg} ab$ ebenfalls bekannt sind, so findet man aus dem ebenen Δaef den $\sphericalangle eaf = a$. Im Grunde genommen ist Blakes Verfahren nur eine Vereinfachung der schon von den Arabern und Regiomontan ausgebildeten Methode.[1])

Im Jahre 1756[2]) versuchte ferner der Franzose Alexander-Gui Pingré (siehe XIX. Abschnitt, S. 14), der sich durchweg der Formelschreibweise Eulers bediente, die Nepersche Regel für rechtwinklige sphärische Dreiecke auf schiefwinklige auszudehnen, indem er die längst bekannten Sätze, welche sich durch Fällen eines senkrechten Bogens von einer Ecke eines Dreiecks auf die Gegenseite ergeben, in zwei Regeln zusammenfaßte, die nur auf jene beiden Aufgaben, in welchen drei Seiten oder drei Winkel gegeben sind, keine Anwendung fanden. Dieser Umstand veranlaßte später (1798) den Schotten Walter Fisher, Pingrés Regeln zu verbessern[3]), indem er sie durch vier in allen Fällen anwendbare Theoreme ersetzte, die jedoch wenig Verwendung fanden.

Jean François de Castillon kennen wir bereits als Herausgeber von Newtons kleineren Schriften (III^2, S. 508). Durch das Studium der Werke des letzteren wurde er offenbar zur Abfassung zweier Abhandlungen veranlaßt, die er 1764 und 1765 der Berliner Akademie vorlegte[4]) und in denen er eine neue Begründung einiger Sätze der ebenen Trigonometrie versuchte. So gab er eine geometrische Ableitung des Halbwinkelsatzes und zeigte, wie aus diesem sieben Theoreme fließen, die schon Newton in seiner Arithmetica universalis aufgestellt hatte.[5])

Eulers analytische Formeln wurden mit Glück verwendet in einer Dissertation aus dem Jahre 1760, die unter dem Präsidium von Johann Kies (1713—1781), Professor in Tübingen, von den Kandidaten des Magisteriums Hoffmann und Jäger verteidigt wurde. Sie führt den Titel „Trigonometria methodo plana et facili exposita" und gibt die goniometrischen Formeln sehr vollständig, ohne jedoch die trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse zu definieren. Dann werden die zehn Hauptgleichungen zwischen drei Stücken eines recht-

---

[1]) Vgl. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 1900, p. 68 und 129. [2]) Mém. de l'Acad. de Paris 1756 (erschienen 1762), p. 301. [3]) P. T. I, 2, 1758, p. 538—543. [4]) Propositions de Géométrie et de Trigonométrie élémentaire, démontrées d'une manière nouvelle. Mém. de l'Acad. de Berlin 1766 (publiziert 1768), p. 354—364. [5]) Arithmetica univ., Cap. XIII, Problemata geometrica.

winkligen sphärischen Dreiecks abgeleitet und auch die weniger bekannten Relationen zwischen vier Stücken aufgestellt, woran sich die Ableitung der Sätze für das schiefwinklige Dreieck mit Einschluß der Neperschen Analogien anreiht. Bemerkenswert ist die polare Gruppierung der sechs Dreiecksfälle zu zweien, die trotz Vietas Vorgang[1]) selten genug zu finden war. Die Formeln für das ebene Dreieck gewinnt Kies, wie das später noch oft geschah, durch Grenzübergang aus jenen für die Kugel, indem er $\sin A = A$, $\operatorname{tg} A = A$, $\cos A = 1$ setzt.

Um die Mitte des 18. Jahrhunderts wurde auch zum ersten Male die Notwendigkeit einer Kleinkreistrigonometrie auf der Kugel von d'Alembert betont. Nachdem derselbe bereits in seinen Réflexions sur la cause des vents, Paris 1757, durch eine ziemlich umständliche Rechnung gezeigt hatte, wie man eine Relation zwischen den Seiten eines Dreiecks herstellen kann, dessen Basis aus einem Kleinkreisbogen und dessen Schenkel aus Großkreisbögen bestehen, löste er einige Jahre später[2]) die Hauptaufgaben, den Neigungswinkel eines Klein- und eines Großkreises, welche dieselbe Sehne haben, zu bestimmen, die zwischen zwei solchen Kreisen liegende Fläche auszudrücken und endlich den Winkel der Ebenen zweier Kleinkreise anzugeben. Seinem Wunsche, andere möchten diese seine Ideen weiter ausführen, kam 1798 Charles Bossut nach, indem er sowohl mit Integralrechnung den Inhalt eines von drei Kleinkreisen gebildeten Dreiecks bestimmte, als auch einen elementaren Weg hierzu angab.[3])

Bedeutende Förderung fand die Trigonometrie durch verschiedene Arbeiten Johann Heinrich Lamberts. Lambert[4]) ist am 26. August 1728 in der damals schweizerischen Stadt Mülhausen im Oberelsaß geboren und als Mitglied der Berliner Akademie und Oberbaurat am 25. September 1777 gestorben. Aus einer unbemittelten Schneidersfamilie hervorgegangen, mußte er sich frühzeitig sein Brot als Schreiber verdienen, brachte es jedoch als Autodidakt sich fortbildend bald zum Hauslehrer bei dem Reichsgrafen Peter von Salis, wo er seinen Studien weiter obliegen konnte. Da aber Studieren und Produzieren bei ihm Hand in Hand ging, so bereitete er schon damals die wichtigsten seiner Werke vor. Nachdem er diese, nämlich die Photometrie, eine Schrift über die Kometenbahnen und die Kosmologischen Briefe zu Augsburg hatte erscheinen lassen, wurde er Mitglied der bayerischen Akademie der Wissenschaften mit 800 Gulden Gehalt, löste jedoch dieses Verhältnis bald wieder und kam nach ver-

[1]) Vgl. A. v. Braunmühl, Gesch. der Trig. I, p. 180—181. [2]) Recherches mathém. sur différents sujets. Miscellanea Taurin. IV, 1766—69, § 1, p. 127, 2. Zählung.
[3]) Traités de calcul différentiel et intégral, an VI, 1797/98, II, p. 522—531.
[4]) Allgem. deutsche Biographie XVII, p. 552—556.

schiedenen Versuchen eine dauernde Lebensstellung zu finden, die ihm Muße zu seinen wissenschaftlichen Arbeiten böte, endlich 1764 nach Berlin, wo er auf Veranlassung der dort herrschenden Schweizer Schule mit einem Gehalt von 500 Talern, der sich später auf 1100 Taler erhöhte, in die Akademie aufgenommen wurde. Seine wissenschaftliche Tätigkeit war eine äußerst fruchtbare und erstreckte sich sowohl auf die reine Mathematik, als auch auf alle mit der Praxis in Beziehung stehenden Anwendungen derselben. Alle seine Arbeiten sind, wenn auch nicht immer so bedeutend wie die Eulers und Lagranges, reich an originellen und fruchtbaren Gedanken und zeichnen sich durch eine in jener Zeit seltene Strenge der Beweisführung aus. Die gleiche Originalität zeigt sein Stil, der derb und oft schrullenhaft wie seine Persönlichkeit, doch nie die nötige Klarheit und Prägnanz vermissen läßt.

Für unser engeres Wissensgebiet kommen von seinen Publikationen zunächst die „Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“[1]) in Betracht. Im ersten Bande derselben spricht er sich (S. 369ff.) über die Art und Weise, wie die Trigonometrie zu fördern sei, eingehend aus, indem er hauptsächlich drei Gesichtspunkte im Auge hat: einmal, sagt er, könne man die Auflösung der einzelnen Dreiecksfälle durch Berechnung passender Tafeln vereinfachen, dann könne durch Benutzung der Algebra viel erspart werden und endlich könne man in der Verwendung der Trigonometrie zur Integralrechnung noch bedeutend weiter gehen.

Vorerst wandte sich nun Lambert der Neperschen Regel zu, indem er an Stelle des bisher durch einen Induktionsschluß bewerkstelligten Beweises derselben einen anderen setzte, der mehr das Wesen dieser merkwürdigen Regel aufdeckte und auf dem gleichen Gedanken beruhte, den schon Neper angewendet, aber nur angedeutet hatte. Christian von Wolf hatte in seinen Anfangsgründen der Mathematik[2]) den Wortlaut der Regel zum ersten Male in der Weise ausgesprochen, wie er heute noch allgemein angegeben wird. An ihn schloß sich Lambert an, indem er die Katheten des rechtwinklig sphärischen Dreiecks durch ihre Komplemente ersetzte und zeigte, daß die fünf zirkulären Stücke in fünf Dreiecken liegen, die sich in einem Zyklus um die Kugel aneinanderschließen, wie dies Fig. 20 veranschaulichen möge. Daselbst stellen $AadF$ und $ADcG$ zwei Großkreise dar, deren Pole P und Q sind, durch die der Kreis $cQPa$ geht. Ferner ist dPC irgend ein anderer Kreis durch P, welcher

[1]) 4 Bände, 8°, Berlin 1765—1772. [2]) Im 3. Teile, zweite Ausgabe von 1717, p. 144 und 152; die erste Ausgabe von 1710 enthält dieselbe noch nicht.

den ersten in C rechtwinklig schneidend das $\Delta\, ABC$ vollendet. Zieht man endlich noch Kreis $GHQb$ durch Q, so daß seine Ebene auf Dc senkrecht steht, so entstehen die fünf schraffierten Dreiecke, von denen Lambert aus ihrer Entstehung nachweist, daß sie die verlangte Eigenschaft haben, dieselben fünf zirkulären Stücke zu besitzen. So ist z. B. $\sphericalangle A$ in I gleich $90^0 - PD$ in II, gleich PQ in III, gleich $90^0 - FQ$ in IV und endlich wieder gleich A in V, und allgemein behalten ein Mittelstück und zwei anliegende Stücke sowie ein Mittelstück und zwei gegenüberliegende diesen Charakter in allen fünf Dreiecken bei.

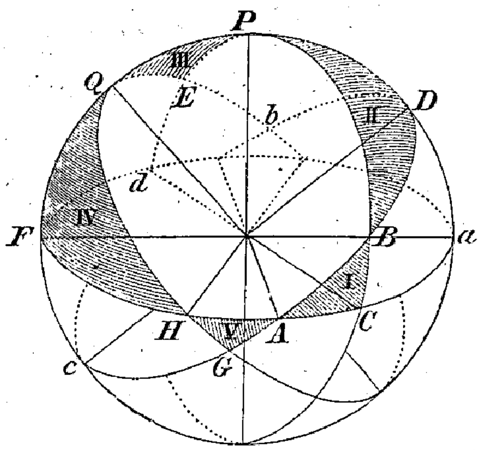
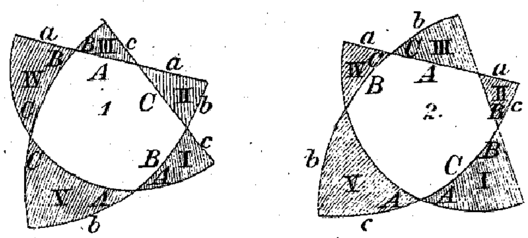


Fig. 20.

Zeichnet man daher mit Lambert die beiden stereographischen Figuren (Fig. 21), in denen die kleinen Buchstaben die Komplemente der Katheten bedeuten, so liefern die beiden darunter stehenden Gleichungen, für ein Dreieck bewiesen, die sämtlichen zehn Fälle der Neperschen Regel.



$\cos C = \sin A \sin B$ $\quad$ $\cos C = \cot A \cot B$

Fig. 21.

Man wird aus dem Vorstehenden erkannt haben, daß Lambert wirklich den wahren Grund der Neperschen Regel aufdeckte, indem er bei Aufstellung seines Beweises unbewußt mit dem Begriff der Gruppe operierte.[1])

An die Behandlung der Neperschen Regel schließt Lambert eine Zusammenstellung der wichtigsten goniometrischen Formeln an und gibt dann die Vorschriften zur Berechnung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke, die er mittels einer Höhe in zwei rechtwinklige zerspaltet. Die Anwendung jener Regel auf die beiden Teildreiecke und die Verbindung der Formeln zu einer einzigen Schlußformel führt ihn dann selbstverständlich wieder zu den schon längst bekannten Hauptgleichungen für das schiefwinklige Dreieck.

Da Lambert stets die praktische Verwendbarkeit der Formeln im Auge hatte, so stellte er auch eine Umformung des sphärischen

---

[1]) Vgl. O. Pund, Über Substitutionsgruppen in der sphärischen Trigonometrie usw. Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg III, 1897, p. 7, und C. O. Lovett in Bulletin of the American Math. Society, 2. Series, IV, 1898, p. 252.

Kosinussatzes, wie der Kotangentenformel für logarithmische Rechnung her, indem er z. B. im ersteren Falle in

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \quad \cos a = 1 - 2 \sin \frac{a}{2}^2$$

und

$$\frac{\cos (B - C)}{2 \sin B \sin C} = \sin \frac{\varphi}{2}^2$$

setzte, wodurch er die elegante Formel

$$\cos A = 2 \sin B \sin C \sin \frac{\varphi + a}{2} \sin \frac{\varphi - a}{2}$$

erhielt.[1])

Ferner muß noch erwähnt werden, daß Lambert ebenso wie Euler die trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse auffaßte, wenn er dies auch ebensowenig wie jener ausdrücklich hervorhob; dies beweist die Schreibweise seiner Formeln für die rechtwinkligen ebenen Dreiecke, wie

$$k = h \sin a = h \cos b, \quad c = h \cos a = h \sin b \text{ usw.},$$

wo h die Hypotenuse, k und c die beiden Katheten bezeichnen.

Noch von einer anderen Seite her suchte Lambert die Trigonometrie zu bereichern, indem er nämlich die Hyperbelfunktionen für sie verwertete. Schon Gregor von St. Vincentio, David Gregory und John Craig hatten durch die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, wenn auch unbewußt, die Grundlagen für diese Funktionen geschaffen, bei Newton traten dann bereits Vergleiche zwischen Kreis und gleichseitiger Hyperbel auf, und De Moivre hatte schon ziemlich deutlich erkannt, daß durch Vertauschung des Reellen mit dem Imaginären Kreisaufgaben in solche für die gleichseitige Hyperbel übergehen. Der erste aber, welcher eine Theorie der Hyperbelfunktionen begründete, war der von Lambert selbst genannte Graf Vincenzo Riccati (vgl. B III², S. 474), der sie mit Hilfe geometrischer Betrachtungen entwickelte[2]), während Lambert 1768 zuerst auf den Gedanken kam, sie zur Behandlung trigonometrischer Probleme zu verwerten.[3])

Ist (Fig. 22) CDQ ein Kreisquadrant, der den Ast Qq einer gleichseitigen Hyperbel in Q berührt, q ein beliebiger Punkt der Hyperbel, $qP \parallel QC$, PQ und $qp \perp QC$, $\sphericalangle PCQ = \omega$ der sogenannte

---

[1]) a. a. O., p. 415 ff. — Eine etwas andere Umgestaltung hat W. Croswell, Lehrer der Schiffahrtskunde, durch eine Regel ausgedrückt, gegeben: Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences II, part I, 1780 (veröffentlicht 1793), p. 18—20. [2]) Vgl. S. Günther, Lehre von den Hyperbelfunktionen, Halle 1880, Kap. I. [3]) Observations trigonométriques. Histoire de l'Académie de Berlin 1768, 24, p. 327.

„transzendente" und $\sphericalangle\, qCQ = \varphi$ der „gewöhnliche" Winkel, dann folgt aus der Figur: 1. $\operatorname{tg}\varphi = \sin\omega$, $CP = \sec\omega = Cp = \cosh u$ und $PQ = \operatorname{tg}\omega = pq = \sinh u$, wenn der zu Winkel φ gehörige Hyperbelsektor QCq mit u bezeichnet wird. Hieraus folgt dann leicht $du = \frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{1-\operatorname{tg}\varphi^2}$ und daraus hinwieder 2. $u = \log\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\omega}{2}\right)$. Somit kann man zu jedem Winkel φ den entsprechenden Hyperbelsektor berechnen, indem man sich der beiden Gleichungen 1. und 2. bedient. Damit konstruierte nun Lambert eine kleine Tabelle,

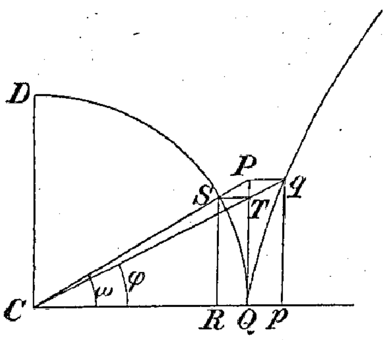


Fig. 22.

welche in der ersten Spalte links die Werte des Winkels ω von 0^0 bis 90^0 enthält und zu ihnen die entsprechenden Hyperbelsektoren, den sinhyp., den coshyp., die Logarithmen derselben, die tg. und log tg. des gewöhnlichen Winkels und endlich in der letzten Spalte diesen selbst gibt. Wie er dieselbe zur Vereinfachung trigonometrischer Rechnungen anwandte, erkennt man am besten aus einem Beispiel. Es soll für ein sphärisches Dreieck abc aus dem Winkel c und der Seite B[1]) eine Tabelle berechnet werden, die zu jedem Winkel c den zugehörigen Winkel a gibt. Dazu hat man

$$\sin B \operatorname{ctg} A = \cos c \cos B + \sin c \operatorname{ctg} a$$

und hieraus $\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos B} = \operatorname{tg} k \sec c' - \operatorname{tg} c'$, wenn $\operatorname{tg} k = \operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A$ und $c' = 90^0 - c$ ist. Sind nun die den Winkeln k und c' entsprechenden Hyperbelsektoren $\varkappa$ und γ, so hat man $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos B}{\cos h\varkappa} \sin h(\varkappa - \gamma)$, wodurch die Rechnung auf eine einzige Analogie gebracht ist und zwar auf die einfache Addition des konstanten Logarithmus von $\cos B : \cos h\varkappa$ zu dem Logarithmus von $\sin h(\varkappa - \gamma)$.

Dadurch, daß Euler die trigonometrischen Linien als „Rechnungsgrößen", wie er sagte, in die Analysis eingeführt hatte, hatte sich zunächst vielfach eine Trennung der elementaren Trigonometrie, die nur zur Berechnung der Figuren in der Ebene und auf der Kugel dient, von der heute nach Klügels Vorgang[2]) als Goniometrie bezeichneten Lehre von den Winkelfunktionen vollzogen. Dies läßt sich am deutlichsten aus zwei Schriften erkennen, die der preußische Offizier Georg Friedrich von Tempelhof (1737—1807)

---

[1]) Lambert bezeichnet durchweg die Seiten mit den großen, die gegenüberliegenden Winkel mit den kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabetes.

[2]) Mathematisches Wörterbuch II, p. 504.

unter dem Titel „Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen“ (Berlin 1769) und „Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen“ (Berlin und Stralsund 1770) veröffentlichte. Während nämlich in dem ersten Werke nur die wichtigsten goniometrischen Formeln sowie die Periodizität der trigonometrischen Funktionen geometrisch abgeleitet werden, und bei sämtlichen geometrischen Anwendungen sogar wieder der Radius r mitgeschleppt wird, indem die Funktionen durch Linien ersetzt werden, sind in das zweite Werk ganz verschieden hiervon die analytischen Formeln Eulers zur Dreiecksberechnung in ihrem vollen Umfange aufgenommen. Eine Vereinigung der beiden getrennten Gebiete wurde erst dadurch ermöglicht, daß Simon Klügel in seiner „Analytischen Trigonometrie“ (Braunschweig 1770) das Wesentliche in Eulers Auffassung erkannte, indem er die trigonometrischen Größen ausdrücklich als Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks definierte und sie zum ersten Male als trigonometrische Funktionen bezeichnete.[1] Das Buch Klügels weist aber außerdem noch andere bemerkenswerte Verdienste auf. Das wichtigste ist wohl die Erkenntnis, daß die Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktion allein „alle Lehrsätze über die Zusammensetzung der Winkel“ enthalten[2], was durch direkte Entwicklung aller einschlägigen Formeln aus diesen Theoremen gezeigt wird. Weitere Verdienste Klügels sind, daß er in diesem Buche die Ableitung der sechs Grundformeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks auf Dreiecke mit Seiten, die einen Quadranten überschreiten, ausdehnte, die hervorragende Verwendbarkeit der Neperschen Analogien für praktische Rechnungen hervorhob und nachwies, wie man mit Hilfe des Supplementardreiecks zu jeder Formel eine Polarformel angeben kann. Klügels Buch hat jedenfalls viel dazu beigetragen, Eulers analytische Behandlungsweise der Trigonometrie in weiteren Kreisen bekannt zu machen.

Aber auch Kästner (vgl. III², S. 576), der immer bestrebt war die neuesten Erscheinungen der mathematischen Literatur den Lesern seiner zahlreichen Schriften auf seine etwas breite und umständliche Weise zugänglich zu machen, bediente sich frühzeitig der Eulerschen Formelrechnung und veröffentlichte in seinen Astronomischen Abhandlungen (I. Sammlung Göttingen 1772), ähnlich wie Kies und Klügel, eine elementare Ableitung der hauptsächlichsten Formeln der sphärischen Trigonometrie. Auch gab er hier, wie in den Göttinger

---

[1]) a. a. O., p. 4 heißt es: „Ich will diese Verhältnisse mit einem allgemeinen Namen: trigonometrische Funktionen der Winkel nennen, als deren Stelle sie in der Rechnung vertreten“. [2]) Ebenda, p. 35.

Dissertationen[1]) und in seinen geometrischen Abhandlungen (2 Sammlungen, Göttingen 1790—91) und noch anderwärts[2]) vielfache Anwendungen auf astronomische, physikalische und geometrische Fragen, wobei er die trigonometrischen Formeln mit Gewandtheit handhabte, wenn auch die Eleganz seiner Lösungen durch das fast beständige Mitschleppen des Sinus totus beeinträchtigt wird.

Neun Jahre nach dem Erscheinen von Klügels Buch kam auch Euler noch einmal auf die sphärische Trigonometrie zurück[3]), deren Formelsystem er bereits vor 26 Jahren mit Hilfe höherer Rechnung abgeleitet hatte. Offenbar befriedigten ihn die inzwischen über diesen Gegenstand erschienenen Abhandlungen und Bücher nicht, und er wollte daher zeigen, wie man das ganze Formelsystem, das auch noch einiger Ergänzungen bedurfte, auf elementare Weise aus einer einzigen Figur ableiten könne. Als solcher bediente er sich des zum schiefwinkligen sphärischen Dreieck ABC gehörigen Dreikants, dessen Spitze im Mittelpunkt O der Kugel mit dem Halbmesser 1 liegt (Fig. 23). In den Ebenen COa und COb (a liegt auf OA und b auf OB) seien Ca und Cb senkrecht zu OC errichtet, ferner sei $bp \perp Ca$, $bq \perp Oa$, dann ist $\sphericalangle bqp$ der Neigungswinkel von $\sphericalangle \widehat{Oa}$, ferner ist $\sphericalangle COa$ $=$ Seite b, $\sphericalangle COb =$ Seite a und $\sphericalangle aOb =$ Seite c des sphärischen Dreiecks. Aus der Figur folgt dann unmittelbar:

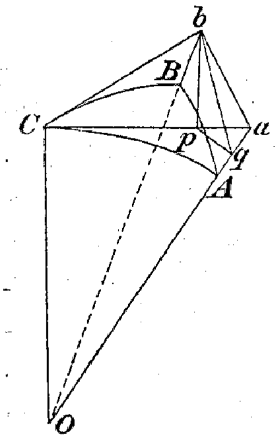


Fig. 23.

$$Ca = \operatorname{tg} b, \quad Oa = \sec b, \quad Cb = \operatorname{tg} a, \quad Ob = \sec a.$$

Hieraus folgt $bq = Ob \sin c = \frac{\sin c}{\cos a}$ und $Oq = Ob \cos c = \frac{\cos c}{\cos a}$. Da ferner $\sphericalangle aCb = \sphericalangle C$ des Dreiecks ABC ist, so hat man

---

[1]) Dissertationes mathematicae et physicae, quas Societati reg. sci. Gottingensi annis 1756—1766 exhibuit etc. Altenburgi 1771. Besonders zu bemerken sind darunter Nr. 7: Gnomonica universalis analytica 1762, eine Umarbeitung der Gnomonica analytica von 1754, hervorgerufen durch seine erweiterten Kenntnisse trigonometrischer Formeln; dann Nr. 9: „Quot sphaerae aequales mediam et se mutuo tangere possint", woselbst sich eine elegante Ableitung der Fläche eines sphärischen Dreiecks mit höherer Rechnung findet. [2]) So findet sich in Novi Comm. Soc. Gotting. VII ad annum 1776 (publiziert 1777), p. 92—141 bei Behandlung des optischen Problems von Alhazen (vgl. I[2], S. 744) eine näherungsweise Auflösung einer trigonometrischen Gleichung von der Form $\sin\varphi - B \operatorname{tg}\varphi = A$ und in Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik II, 1798, p. 174 wird die Wertänderung der beiden Seiten des Ausdruckes $\sec\varphi \pm \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(45^0 \pm \frac{\varphi}{2}\right)$ diskutiert und in Einklang gebracht, wenn φ von 0^0 bis 90^0 wächst. [3]) Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis

$$bp = Cb \sin C = \operatorname{tg} a \sin C \quad \text{und} \quad Cp = Cb \cdot \cos C = \operatorname{tg} a \cos C;$$

und da $\sphericalangle\, CaO = 90^0 - b$ ist, so folgt noch:

$$ap = Ca - Cp = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \cos C, \quad pq = ap \cos b = \sin b - \operatorname{tg} a \cos b \cos C$$

und

$$aq = ap \sin b = \frac{\sin b^2}{\cos b} - \operatorname{tg} a \sin b \cos C \text{ oder } \frac{\cos c}{\cos a} = \cos b + \operatorname{tg} a \sin b \cos C$$

und hieraus endlich

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Ähnlich liest man aus der Figur unmittelbar die Gleichung des Sinussatzes $\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a}$ und die in dieser Form neue Gleichung

$$\frac{pq}{bq} = \cos A = \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\sin c}$$

ab. Diese drei Gleichungen umfassen, wie Euler sagt, die ganze sphärische Trigonometrie, und in der Tat gelang es ihm durch einfache Rechnung aus ihnen alle jene Formeln abzuleiten, die heute den eisernen Bestand der sphärischen Trigonometrie bilden.

Auch die Existenz und die Eigenschaften des Supplementardreiecks, für das Euler jedoch keinen eigenen Namen hat, wurden in einem „Theorema" hervorgehoben, während eine Nebeneinanderstellung der Polarformeln nur für die Kosinus- und Kotangentensätze durchgeführt wurde — in diesem Punkte war Klügel bereits weiter gegangen. Dagegen erkannte Euler hier zuerst die sechs möglichen Formen der dritten Hauptgleichung, das Prinzip der zyklischen Vertauschung aber war ihm, wie seine Formelschreibung zeigt, entgangen.

Euler hat von seinen trigonometrischen Formeln den vielseitigsten Gebrauch gemacht in rein mathematischen und mechanischen, wie in astronomischen und physikalischen Untersuchungen. Wir wollen hier auf die wichtigsten hinweisen, die zur ersten Gruppe gehören. In den Petersburger Akten für das Jahr 1778[1]) hatte er bereits gezeigt, wie man die trigonometrischen Funktionen zur Lösung einiger schwieriger diophantischer Gleichungen benutzen könne und ebenda[2]) eine Abhandlung über die Messung der Körperwinkel durch die Inhaltsbestimmung sphärischer Figuren gegeben, bei welcher Ge-

---

breviter et dilucide derivata. Acta Acad. Petrop. 1779 (erschienen 1782), I, p. 72—86.

1) De casibus quibusdam maxime memorabilibus in Analysi indeterminata etc. Acta Acad. Petrop. ad annum 1778, pars II (erschienen 1781), p. 85—110.

2) De mensura angulorum solidorum. Ebenda, p. 31—54.

legenheit er die trigonometrischen Funktionen des sphärischen Exzesses S eines Dreiecks in den Seiten desselben durch elegante Formeln ausdrückte. Diese wurden noch in einer erst nach seinem Tode 1792 erschienenen Abhandlung weiter ergänzt, die ebenfalls aus dem Jahre 1778 stammte.[1]) Die in der ersteren Abhandlung mitgeteilte Formel $\operatorname{tg}\frac{S}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}}{1+\cos a + \cos b + \cos c}$, wo a, b, c die Seiten des Dreiecks sind, hat De Gua 1783[2]) wieder entwickelt, ohne jedoch Euler zu erwähnen. Endlich erschien 1786 ebenfalls posthum ein älterer Aufsatz von ihm[3]), in welchem er mit alleiniger Benutzung des Kosinussatzes die Relationen zwischen den sechs Linien, die vier Punkte in der Ebene verbinden, aufsuchte. Dabei wurde auch die Frage behandelt, wie man ein Kreisviereck bestimmt, dessen Seiten und Diagonalen durch rationale Zahlen ausgedrückt werden.

Mit besonderer Eleganz handhabten die Eulerschen Formeln bald sein Schüler Andreas Johann Lexell, sein Gehilfe Nikolaus Fuß und der Petersburger Astronom Friedrich Theodor Schubert. Der erste, auf den wir noch weiter unten eingehend zu sprechen kommen werden, hat in mehreren Abhandlungen[4]) eine ganze Reihe von wichtigen Theoremen über die Geometrie der Kugelkreise entwickelt, die geradezu die Grundlagen für alle späteren auf dieses Gebiet bezüglichen Arbeiten wurden. So wies er nach, daß die Spitzen aller sphärischen Dreiecke von gleicher Fläche, die über derselben Grundlinie stehen, auf einem Kleinkreise liegen[5]), berechnete in eleganten Formeln die sphärischen Radien des einem Dreieck umgeschriebenen und des ihm eingeschriebenen Kreises aus den Seiten, bzw. Winkeln desselben, gab ein Analogon zum Ptolemäischen Satze vom ebenen Sehnenviereck für das einem Kleinkreis eingeschriebene Viereck, berechnete den Radius von jenem aus den Seiten von diesem und löste die entsprechenden polaren Aufgaben. Auch übertrug er den Satz vom harmonischen Kreis auf die Kugel (Lexellscher Kreis).

Auch Nikolaus Fuß (vgl. III², S. 551) hat interessante Aufgaben der Kugelgeometrie behandelt[6]), die wir in folgender Form kurz zu-

---

[1]) Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum. Nova Acta Acad. Petrop. X, ad annum 1792 (erschienen 1797), p. 47—62. [2]) Mémoires de l'Académie de Paris 1783, p. 358. [3]) De symptomatibus quatuor punctorum in eodem plano sitorum. Acta Acad. Petrop. ad annum 1782 (erschienen 1786), pars I, p. 3ff. [4]) Acta Acad. Petrop. ad annum 1781, pars I (erschienen 1784), p. 112—126, und ebenda, 1782, pars I (erschienen 1786), p. 58—106 und pars II, p. 85—95. [5]) Einen Beweis dieses Satzes hatte Euler schon 1778 gegeben; posthum erschienen 1797 in Nova Acta Acad. Petrop. X, ad annum 1792. [6]) Nova Acta Acad. Petrop. II, ad annum 1784 (erschienen 1788), vorgelegt 1786,

sammenfassen können: Ein sphärisches Dreieck mit gegebener Basis so zu bestimmen, daß seine Spitze auf einem gegebenen größten Kreise liegt und der Dreieckswinkel an derselben oder die Fläche des Dreiecks ein Maximum oder die Summe der Schenkel ein Minimum wird. Auch fand er[1]) als Ort der Spitze eines sphärischen Dreiecks über gegebener Basis, für das die Summe der Schenkel konstant ist, eine „sphärische Ellipse", welche mit der ebenen Figur gleichen Namens viele Eigenschaften gemein hat.

Endlich hat Schubert, durch diese Arbeiten angeregt, 1786 und 1798 ähnliche Fragen untersucht, indem er[2]) z. B. das größte und kleinste sphärische Dreieck mit gegebener Basis und Höhe bestimmte und die geometrischen Örter eines Punktes auf der Kugelfläche behandelte[3]), für welchen das Verhältnis der Sinus oder der Kosinus der ganzen oder halben kürzesten Entfernungen von zwei festen Kugelpunkten konstant ist.

Auch der große Lagrange beschäftigte sich vorübergehend mit trigonometrischen Fragen. Außer einer Abhandlung über eine neue Begründung der sphärischen Trigonometrie, auf die wir weiter unten noch zu sprechen kommen, veröffentlichte er 1774 „Solutions de quelques problèmes d'Astronomie sphérique par le moyen des séries"[4]), worin er die Auflösung der transzendenten Gleichung $\operatorname{tg} x = m \operatorname{tg} y$ nach x durch die Reihe $x = y - \theta \sin 2y + \frac{1}{2}\theta^2 \sin 4y - \frac{1}{3}\theta^3 \sin 6y + \cdots$ darstellte, in welcher $\theta = \frac{1-m}{1+m}$ bedeutet. Indem er diese Gleichung sowohl mit jenen drei Fundamentalgleichungen des sphärischen Dreiecks, in denen Tangenten vorkommen, als auch mit den Neperschen Analogien verband, gelangte er zu mehreren, namentlich in der Astronomie und Geodäsie sehr brauchbaren Lösungen trigonometrischer Aufgaben. So erhielt er z. B. zur Bestimmung der Winkel β und γ eines sphärischen Dreiecks, von dem die Seiten b, c und der Winkel α gegeben sind mit Benutzung der erwähnten Analogien, die Reihenentwicklungen:

$$\gamma = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2}\right)\sin\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}^2\left(\operatorname{ctg}\frac{b}{2}^2 - \operatorname{tg}\frac{b}{2}^2\right)\sin 2\alpha + \cdots,$$

p. 70; auch Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, 1786, p. 241—245.

[1]) Nova Acta Acad. Petrop. III, ad annum 1785 (erschienen 1788), vorgelegt 1787, p. 90—99. [2]) Ebenda, IV, ad annum 1786 (erschienen 1789), vorgelegt 1786, p. 89—94. [3]) Ebenda, XII, ad annum 1794 (erschienen 1801), vorgelegt 1798, p. 196—216. [4]) Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, année 1776 (erschienen 1779), gelesen 1774, p. 214 ff. Oeuvres, Ed. Serret, IV, p. 275—298.

$$\beta = 180^0 - \alpha + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2} - \operatorname{ctg}\frac{b}{2}\right)\sin\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}^2\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2}^2 + \operatorname{ctg}\frac{b}{2}^2\right)\sin 2\alpha + \cdots,$$

welche nach Lagranges Bemerkung um so konvergenter sind, je kleiner c ist und je näher b an 90^0 liegt. Auch zeigte er, daß die Verwendung des Imaginären, durch welche er diese Formeln gefunden hatte, noch ähnliche Gleichungen komplizierterer Form zu lösen gestattet. Lambert hat 1777 ebenfalls ähnliche Gleichungen durch Reihen gelöst[1]), und desgleichen finden sich in Delambres großer Arbeit über die Bestimmung des Meridianbogens zwischen Dünkirchen und Barcelona[2]) trigonometrische Gleichungen mit Reihen behandelt, die mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten erhalten werden.

Bedeutende Verdienste um die Ausbildung der elementaren Trigonometrie in Eulerschem Sinne, sowie um die systematische Ausgestaltung derselben erwarb sich der Italiener Antonio Cagnoli (1743—1816). Cagnoli[3]), zu Zante geboren, zog sich bald von der zuerst gewählten diplomatischen Laufbahn zurück, lebte dann in Verona als Privatmann, wo er sich eine Sternwarte erbaute und wurde nach Gründung der cisalpinischen Republik von Napoleon an das Observatorium in Mailand berufen. Später wurde er Professor der Astronomie an der Kriegsschule in Modena. Er gehörte der von Lorgna gegründeten Società Italiana delle scienze an, welche Mathematiker, wie Malfatti, V. Riccati, Ruffini und Ferroni zu den ihrigen zählte, und wurde nach Lorgnas Tode Präsident dieser gelehrten Gesellschaft. Seine Trigonometria piana e sferica, welche 1786 italienisch und in französischer Übersetzung von N. M. Chompré in Paris in erster Ausgabe erschien, wurde 1804 in 2. Auflage italienisch zu Bologna und 1808 abermals französisch zu Paris publiziert und ist das vollständigste und umfassendste Handbuch jener Zeit, in dem man manches auch heute noch Interessante und Lesenswerte findet. Wenn auch Cagnoli noch immer ausschließlich mit trigonometrischen Linien rechnete, so nahm er doch die Einheit als Radius an und bediente sich der Eulerschen Funktionszeichen, denen er nur merkwürdigerweise die abkürzende Bezeichnung der Dreiecksseiten durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets nicht zugesellte. Cagnolis Hauptverdienst liegt darin, daß er wie Klügel die analytische Formel-

[1]) Bode, Astronomisches Jahrbuch für 1780, p. 67. [2]) Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, an VII (1798/99), Paris, 4°, p. 64 und 111. [3]) Poggendorff, Literarisch-biographisches Handwörterbuch, I, p. 359/60.

rechnung in den Vordergrund stellte und nur die notwendigsten Sätze aus Figuren ableitete. Auch bei Behandlung von komplizierten Dreiecksaufgaben, die er in eleganter Weise zu lösen verstand, setzte er sich stets die Herstellung einer allgemeinen Endformel zum Ziele.

Wesentlich Neues in bezug auf die ebene Trigonometrie war damals nicht mehr zu bringen; so ergibt denn die Durchsicht von Cagnolis Werk sowie einer ergänzenden Abhandlung[1]) vom Jahre 1794 als erwähnenswert nur eine Umgestaltung der Formel des ebenen Kosinussatzes für logarithmische Rechnung, aber auch hierin war ihm schon 1777 Johann Tobias Mayer[2]), der jüngere, zuvorgekommen. Zudem sei noch erwähnt, daß er auch die sogenannten Mollweideschen Gleichungen entwickelte und verwenden lehrte.[3])

Aus seinen Ergänzungen zur sphärischen Trigonometrie entnehmen wir die fundamentale Formel

$$\sin c \sin a + \cos c \cos a \cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b$$

als die erste Relation, welche zwischen den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks gegeben wurde.[4]) Ferner teilte er eine praktische Umgestaltung des sphärischen Kosinussatzes für logarithmische Rechnung mit[5]), abweichend von jener, die Lambert gegeben hatte (S. 411) und entwickelte Formeln, um die Stücke rechtwinklig sphärischer Dreiecke eventuell bis auf Zehntel-Sekunden genau erhalten zu können. Auch die Proportionen, zu welchen die Betrachtung zweier Dreiecke dieser Gattung führt, wenn sie einen Winkel oder die Hypotenuse gemeinsam haben, wurden von Cagnoli aufgestellt und außerdem wurden die Formeln abgeleitet, welche den Zusammenhang der Elemente eines sphärischen Dreiecks mit denen des zugehörigen Sehnendreiecks geben.[6]) In der eleganten Behandlung der trigonometrischen Gleichung $a \cos A + b \sin A = n$ aber war ihm schon Kästner 1772 zuvorgekommen.[7])

Wichtige Fortschritte machte in dem von uns betrachteten Zeitabschnitte auch die für die Astronomie und Geodäsie so notwendige

---

[1]) Cose trigonometriche. Memorie della Società Italiana, VII, 1794, p. 35ff.
[2]) Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, Göttingen 1777, 4 Bände, 8°, I, p. 12—13. [3]) Trigonometria, 1. Aufl. p. 122. [4]) Diese Formel findet sich allerdings erst in der Ausgabe von 1808, Nr. 1139, p. 326.
[5]) Diese Umformung steht schon in Cose trigonometriche, Nr. VI der sphärischen Probleme. [6]) Kap. VIII der ersten, Kap. XX der Auflage von 1808. Die elegante Formel $\cos A' = \cos A \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2}$ gibt z. B. den Winkel A' des Sehnendreiecks, der dem Winkel A im sphärischen entspricht.
[7]) Astronomische Abhandlungen 1774, p. 13—15.

Fehlerrechnung, bei welcher es sich um die Bestimmung der Veränderungen handelt, welche die Stücke eines Dreiecks erleiden, wenn gewisse derselben um sehr kleine Größen zu- oder abnehmen. Nachdem Cotes in seiner Aestimatio errorum 1722 dieselbe eingeführt (III^2, S. 360 und 412—414) und die wichtigsten Sätze geometrisch entwickelt hatte, publizierte De la Caille 1741 einen „Calcul des différences dans la trigonométrie sphérique"[1]), in welchem er Cotes' 18 Theoreme in 24 Formeln vereinigte, die er auf astronomische Aufgaben anwandte. Später haben sich namentlich Klügel, Kästner, Boscovich und Cagnoli mit Ausbildung dieses Wissenszweiges beschäftigt. Ersterer widmete ihm das 8. Kapitel seiner analytischen Trigonometrie und einen Aufsatz mit dem Titel „Trigonometrische Variationsrechnung zum Gebrauche bei Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse"[2]) und behandelte die vier wichtigsten Fälle, indem er ein Dreiecksstück konstant ließ und die endlichen Variationen der anderen untersuchte. Die beiden Hauptformeln, welche er erhielt, sind: $\Delta a = \cos C \Delta b + \cos B \Delta c$ und

$$\Delta B : \Delta C = (\sin c \Delta b - \cos a \sin b \Delta c) : (\sin b\, \Delta c - \cos a \sin c \Delta b),$$

die sich aus dem Kosinussatze und aus der Kotangentenformel ergeben. Kästner gab im ersten Bande seiner „Astronomischen Abhandlungen"[3]) ebenfalls eine analytische Ableitung der Cotesschen Theoreme und teilte auch Differentialformeln für ebene Dreiecke mit, aber das Verdienst, aus den vielen in der sphärischen Trigonometrie möglichen Relationen die vier Hauptgleichungen

$$\begin{aligned} da &= \cos C db + \cos B dc + \sin B \sin c\, dA, \\ \sin B da - \cos c \sin A db &= \sin c\, dA + \sin a \cos B dC, \\ \operatorname{ctg} a\, da - \operatorname{ctg} b\, db &= \operatorname{ctg} A dA - \operatorname{ctg} B dB, \\ dA &= \sin b \sin C da - \cos c dB - \cos b\, dC, \end{aligned}$$

die man heute als Fehlergleichungen bezeichnet, ausgewählt und in dieser Form geschrieben zu haben[4]), gebührt dem auch sonst verdienten Jesuiten Roger Boscovich (1711—1787). Dieser war in Ragusa geboren, wurde 1740 Professor der Mathematik und Philosophie am Collegium Romanum, dann Professor in Pavia, dann Directeur de l'optique de la marine in Paris, kehrte aber 1783 nach Italien zurück, wo er in Mailand starb. Aus Boscovichs Formeln folgen

[1]) Mémoires de l'Académie de Paris 1741, p. 238 ff. [2]) Bode, Astronomisches Jahrbuch für 1793, Berlin 1790, p. 178—182. [3]) A. a. O., p. 95 bis 107. [4]) Opera IV, 1785, 4°, p. 316—394, wo er auch die entsprechenden Formeln für ebene Dreiecke angibt (p. 322).

alle anderen, weshalb es ziemlich überflüssig war, daß Cagnoli noch 1798 eine Zusammenstellung von 139 Proportionen angab[1]; allerdings sind unter diesen auch die Formeln für endliche Variationen enthalten.

In Beziehung zu diesen Betrachtungen stehen auch die Methoden, welche anzuwenden sind, wenn in trigonometrischen Rechnungen die Logarithmen der Sinus von Winkeln, die nahe an 90^0 liegen, oder die der Kosinus sehr kleiner Winkel vorkommen, oder wenn direkt Funktionen kleiner Winkel zu bestimmen sind. Israel Lyons (1739 bis 1775), Rechner beim Board of Longitude in London, schlug hierzu ein Verfahren ein[2], das wir an einem von ihm gegebenen Beispiel erläutern wollen. Ist in dem bei B rechtwinkligen sphärischen Dreieck ABC $AB = c$ und $BC = a$ (klein gegen c) gegeben, und soll die Hypotenuse b berechnet werden, so setzt er $b = c + \zeta$, nimmt

$$\cos b = \cos a \cos c = \cos (c + \zeta) = \cos c - \sin c \sin \zeta - \cos c \operatorname{sinvers} \zeta$$

und erhält hieraus

$$\sin \zeta = \operatorname{ctg} c \operatorname{sinvers} a - \operatorname{ctg} c \operatorname{sinvers} \zeta.$$

Nun berechnet er mit alleiniger Benutzung des ersten Gliedes auf der rechten Seite einen Näherungswert für ζ und mit diesem dann als Korrektur das zweite Glied.

Anders verfuhren Lambert und Cagnoli, die für solche Fälle die Ersetzung der zu berechnenden Formeln durch andere gleichwertige, aber brauchbarere vorschlugen. Ist z. B. die Entfernung x zweier sehr nahe beieinander gelegener Örter auf der Erde oder zweier Sterne aus ihren Entfernungen vom Pol c und $\varkappa$ und dem Unterschied λ der Längen oder Rektaszensionen zu bestimmen, so ersetzt Lambert[3] die Formel $\cos x = \cos c \cos \varkappa + \sin c \sin \varkappa \cos \lambda$ durch die gleichwertige $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\sin \frac{c - \varkappa}{2}^2 + \sin c \sin \varkappa \sin \frac{\lambda}{2}^2}$, für die man, falls $c - \varkappa$ und λ wenig von 1 oder 2 Graden verschieden sind, die Näherungsformel $\varkappa = \sqrt{\lambda^2 \sin c \sin \varkappa + (c - \varkappa)^2}$ nehmen kann. Ähnlich verfuhr Cagnoli[4], sprach aber das allgemein richtige Prinzip aus, daß man am sichersten rechnet, wenn man den gesuchten Winkel durch eine Tangente oder Kotangente bestimmt. So gebrauchte er z. B. für die Gleichung $\cos a = \frac{\cos b}{\cos c}$, im Falle b und c

---

[1] Memorie della Società Italiana VIII, 1, p. 214—218, vorgelegt 1798, und Trigonometria, 2. Aufl., p. 360—378. [2] P. T. LXV, 2, 1775, p. 470—484.
[3] Bodes Astronomisches Jahrbuch für 1778 (erschienen 1776), p. 205—210.
[4] Trigonometria, 1. Aufl. p. 250, 2. Aufl. p. 296.

nahezu gleich sind, die aus den Neperschen Analogien entstehende Formel $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+c}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{a-c}{2}}$.

Übrigens bemerkte Lambert auch, daß man sich zur Bestimmung der Sinus, Kosinus, Tangenten und Sekanten sehr kleiner Winkel der gewöhnlichen Tafeln der natürlichen goniometrischen Funktionen bedienen könne[1]), wenn man die Kotangenten und Kosekanten zu Hilfe nimmt. Will man z. B. $\sin 1'$ und $\cos 1'$ berechnen, so setzt man $\sin 1' = \frac{1}{\operatorname{cosec} 1'}$ und

$$\cos 1' = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec} 1'^2}} = 1 - \frac{1}{2 \operatorname{cosec} 1'^2} - \frac{1}{8 \operatorname{cosec} 1'^4} - \cdots.$$

Hat man dann $\operatorname{cosec} 1'$ auf 5 Dezimalen, so bekommt man hieraus $\sin 1'$ und mit Hilfe der Reihe auch $\cos 1'$ bis auf 12 Dezimalen genau.

Auch Kästner hat Formeln mitgeteilt, welche zur Berechnung sphärischer Dreiecke mit kleinen oder nahezu gleichen Stücken dienen[2]), und in dem Tafelwerk von Gardiner[3]), auf das wir unten noch zu sprechen kommen, finden sich bereits solche Formeln zusammengestellt.

Dem Gedanken, zur Berechnung der Funktionen eines sehr kleinen Winkels zu Reihenentwicklungen zu greifen, entsprang auch eine noch heute viel verwendete Regel zur Bestimmung von $\log \sin x$ und $\log \operatorname{tg} x$, die der Greenwicher Astronom Nevil Maskelyne (1732—1811) herleitete und die seinen Namen erhalten hat.[4]) Vernachlässigt man in den Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ die Glieder vom 4. Grade an, so erhält man $\sin x \sim x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$, $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$, oder da $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ innerhalb derselben Genauigkeitsgrenze $\sim 1 - \frac{x^2}{6}$ ist,

$$\sin x \sim x (\cos x)^{\frac{1}{3}}$$

und hieraus $\log \sin x \sim \log x + \frac{1}{3} \log \cos x$; genau ebenso folgt für

$$\log \operatorname{tg} x \sim \log x - \frac{2}{3} \log \cos x.$$

Die Regel ist, wie man leicht sieht, bequem zur Berechnung der

---

1) Bodes Astronomisches Jahrbuch für 1778 (publiziert 1776), p. 209.

2) Acta Acad. Elect. Moguntinae 1778—79 (erschienen 1780), p. 181—190.

3) W. Gardiner, Tables de Logarithmes; Ausgabe von Pezenas, Dumas und Blanchard, 1770, 4°.

4) Maskelyne hat dieselbe mitgeteilt in der Einleitung zu seiner Ausgabe der Tables of Logarithms von Michael Taylor, London 1792, 2°, Problem II, p. 21—22, ohne eine Begründung zu geben. Diese gab erst 1804 Tralles, Abhandl. der Berliner Akademie, 1804—1811, p. 17.

Logarithmen von $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$ für Winkel bis zu $5^0\,33'$, wenn in einer Logarithmentafel die Werte von

$$\frac{1}{3}\log\cos x = S \quad \text{und} \quad -\frac{2}{3}\log\cos x = T$$

notiert sind, was zum erstenmal in der 7stelligen Tafel von Callet 1795 der Fall war. Von ihr aus gingen die Zahlen S und T in die neuen vollständigen Logarithmentafeln über.

Mit einigen Worten sei auch noch auf die Näherungsformeln hingewiesen, welche infolge der Verfeinerung der astronomischen Beobachtungen und der geodätischen Messungen notwendig wurden. Man hatte sphärische Dreiecke mit sehr kleinen Winkeln lange Zeit wie ebene Dreiecke behandelt, bis J. L. Lalande (III^2, S. 500) zuerst 1763 darauf aufmerksam machte, daß dies nicht immer statthaft sei, ohne sich erheblichen Fehlern auszusetzen[1]), und durch eine allerdings nicht einwandfreie Rechnung fand, daß man dem ebenen Winkel B des bei A rechtwinkligen ΔABC die in Sekunden ausgedrückte Größe $\frac{1}{24}BC^2\sin 2B(3-\cos 2B)$ hinzufügen muß, um den entsprechenden sphärischen Winkel zu erhalten. Auch ergab sich ihm der Unterschied zwischen der geradlinigen und der sphärischen Hypotenuse zu $\frac{1}{8}\frac{AB^2\cdot AC^2}{BC}$.

Weit praktischer aber griff Adrien Marie Legendre die Sache an, als an ihn bei Gelegenheit der Feststellung der gegenseitigen Lage der Greenwicher und Pariser Sternwarten[2]) die Notwendigkeit herantrat, verhältnismäßig kleine Dreiecke auf der Erdkugel zu behandeln. In seiner berühmten Abhandlung „Sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la terre“ 1787[3]) sprach er den nach ihm benannten Satz aus[4]), daß ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten gegen den Kugelradius klein sind, wie ein ebenes mit denselben Seiten berechnet werden kann, wenn man von seinen Winkeln je den dritten Teil des sphärischen Exzesses in Abrechnung bringt. Lagrange erkannte den Vorteil und die Notwendigkeit einer solchen Berechnung darin, daß die vollen trigonometrischen Formeln für Dreiecke mit so kleinen Seiten, wie sie

---

[1]) Mémoires de l'Acad. de Paris 1763, p. 347—353. [2]) 1787 wurde auf Betreiben Cassinis de Thury eine Kommission von französischen und englischen Gelehrten zur Ausführung dieser Arbeit gewählt, welcher auch Legendre angehörte. [3]) Mémoires de l'Acad. de Paris 1787, p. 352 ff. [4]) A. a. O., p. 358.

hier in Betracht kommen, gar keine exakte Rechnung gestatten, und gab[1]) einen kurzen und sehr übersichtlichen Beweis des schönen Theorems.

Das Lehrgebäude der Trigonometrie. Versuche einer möglichst einfachen Begründung desselben.

Obwohl uns das Vorhergehende ein Bild von der theoretischen Entwicklung der Trigonometrie in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gab, dürfte es doch nicht überflüssig erscheinen, sich die Frage vorzulegen, wie rasch und in welchem Umfang die allmählich angewachsene Summe von neuen Kenntnissen in der Lehrbücherliteratur Verwertung fand, da gerade sie zur Ausbreitung der Wissenschaft in weiteren Kreisen dient und dadurch ihrerseits wieder auf das Wachstum jener befruchtend einwirkt. Wir wollen daher diese Frage durch den folgenden kurzen Überblick zu beantworten suchen.

In allen, auch den gelehrtesten Kompendien jener Zeit, mit einziger Ausnahme von Klügels Analytischer Trigonometrie, wurden die trigonometrischen Funktionen noch als Linien definiert, und dementsprechend wurde auch der Sinus totus oder Radius r mitgeführt. Nur zur Vereinfachung der Formeln setzten ihn manche Schriftsteller, wie Karsten[2]), Kästner und Cagnoli gleich 1. Eulers Bezeichnungsweise der Funktionen dagegen fand ziemlich rasche und umfassende Verbreitung, während der alte Gebrauch, die Lehrsätze in Proportionen zu schreiben, mit großer Zähigkeit festgehalten wurde.[3])

Die Aufstellung der Funktionen für alle 4 Quadranten wurde seit der Veröffentlichung von Eulers „Introductio" allgemein als notwendig erkannt, geschah aber immer noch, selbst für die Tangenten und Kotangenten, an der Figur, wodurch Irrtümer in den Zeichen nicht immer vermieden wurden. Durch die Beachtung der längst bekannten Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, oder wie sie damals stets geschrieben wurde: $\operatorname{tg}\alpha : r = \sin\alpha : \cos\alpha$, brach sich jedoch die Erkenntnis des Richtigen allmählich Bahn, so daß man a posteriori eine Übereinstimmung mit der geometrischen Interpretation suchen konnte[4]).

[1]) De quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques avec une analyse complète de ces triangles. Journal de l'École Polyt., 6. cah., 1798/99, p. 293 bis 296. [2]) Wenzeslaus Johann Gustav Karsten hat zwei hier einschlägige Werke geschrieben: Mathesis theoretica elementaris atque sublimior, Rostock 1760, 8°, und Lehrbegriff der gesammten Mathematik, 2. Teil, 2. Aufl., Greifswald 1786, 8°. [3]) Vgl. z. B. Legendres Éléments de Géométrie noch in der 14. Aufl. von 1832. [4]) Segner, Elementa Arithmeticae Geometriae et Calculi

Auch die Funktionen negativer Argumente wurden wenigstens in den umfassenderen Werken, wie bei Karsten und Legendre, in den Kreis der Betrachtung gezogen und richtig bestimmt. Die Ableitung der goniometrischen Formeln wurde trotz Euler und Klügel (vgl. S. 413) immer noch einzeln geometrisch vollzogen, das vollständigste Formelsystem hat wohl Cagnoli aufgestellt. Dagegen beschränkte man sich in den größeren Kompendien[1]) nicht mehr nur auf die Ableitung der elementaren Formeln, sondern man nahm auch aus der „Introductio" die trigonometrischen und zyklometrischen Reihen und den Satz von Moivre in sie auf, ja selbst die Teilungsgleichungen wurden zuweilen mit in den Kreis der Betrachtung gezogen.

Die Berechnung der ebenen Dreiecke hatte durch den Gebrauch der Formeln wohl etwas an Leichtigkeit gewonnen, aber infolge der beständigen Beibehaltung des Sinus totus ihre Vollendung noch nicht erreicht[2]), wozu noch der Umstand beitrug, daß Eulers praktische Bezeichnungsweise der Seiten und Winkel des Dreiecks von den meisten seiner Zeitgenossen, ja selbst von Cagnoli und Louis Bertrand in der ebenen Trigonometrie so wenig wie in der sphärischen angewendet wurde; eine rühmliche Ausnahme hiervon machten Kästner[3]) und Klügel. Daß die sämtlichen Sätze zur Berechnung der ebenen Dreiecke, wie wir sie jetzt benützen, damals bereits in Gebrauch waren, braucht kaum bemerkt zu werden; in ihrer Gesamtheit, selbst mit Einschluß der sogenannten Mollweideschen Gleichungen[4]) zusammengestellt und in unserer Art abgeleitet finden wir sie jedoch nur in Cagnolis Trigonometrie.

Geometrici in neuer Auflage Halae Magdeb. 1756; Abbé Sauri, Cours complet de mathématiques, t. I, Paris 1774, 8°, und Institutions mathématiques, Paris 1786, 4. Aufl., p. 206, wo ein kurzer Auszug der Trigonometrie aus dem Cours steht; P. C. Scherffer (S. J.), Institutionum geometricarum pars sec. sive Trigonometria plana. Vindob. 1770, 4°. Deutsche Übersetzung von einem Ungenannten, Halle 1782. Scherffer bemerkt, wie später auch Cagnoli, daß beim Durchgang durch Null und durch Unendlich ein Zeichenwechsel eintreten muß.

[1]) So nahm z. B. Louis Bertrand, ein Schüler Eulers, in sein zweibändiges Werk „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, Genève, II, 1778, 4°, alle Entdeckungen Eulers, die sich auf die Trigonometrie beziehen, auf. Ähnlich verfuhren Mauduit in seinen Principes de l'Astronomie sphérique ou traité complet de trigonométrie sphérique". Paris 1765, 8°, und Karsten in den o. a. Werken. [2]) Vgl. La Caille, Leçons élémentaires de mathématiques, Paris 1764, und Sauri in der schon angeführten Schrift, Étienne Bézout in seinem Cours de mathématiques, Paris, pars II, 1772, usw. [3]) In den späteren Auflagen seiner „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie" sowie in seinen „Geometrischen Abhandlungen", 1790—1791. [4]) Schon in der 1. Aufl. von 1786 stehen diese Gleichungen aus dem Sinussatze abgeleitet p. 122, übrigens finden

Bezüglich der Behandlung der sphärischen Trigonometrie muß man die graphischen und rechnerischen Methoden auseinanderhalten. Die ersteren, die sich in der alten Astronomie schon einer großen Beliebtheit erfreut hatten[1]), waren durch die Trigonometriae sphaericae constructio, Romae 1737, 4⁰, des uns schon bekannten Boscovich wieder neuerdings in Gebrauch gekommen. Sie beruhten in der Hauptsache auf der Orthogonalprojektion und wurden zur näherungsweisen Auflösung der sphärischen Aufgaben, vereinzelt, wie bei Mauduit, auch zur Ableitung der trigonometrischen Hauptsätze verwendet[2]). Antoine Remi Mauduit (1731—1815) war zuerst Professor der Mathematik an der École des ponts et chaussées, dann Professor der Geometrie am Collège de France in Paris und hat in seinen Principes d'astronomie sphérique ein reichhaltiges Werk geschaffen. Die ausführlichste Schrift aber, welche ohne Kenntnis der geschichtlichen Entwicklung der Jahrhunderte alten Methode alles längst Bekannte wieder neu fand und in organischen Zusammenhang brachte, war eine Schrift[3]) des Mathematiklehrers zu Montauban Siméon Fagon Valette (1719—1801) aus dem Jahre 1757, sie baut unmittelbar auf Boscovich auf, der jedoch nirgends genannt wird. Auch der Abbé Tommaso Valperga di Caluso (1737—1815), der erst Offizier auf der Flotte des Malteser-Ordens, dann Priester in Neapel und Turin war, woselbst er Professor der griechischen und orientalischen Sprachen und Direktor der Sternwarte wurde, hat noch 1786 eine ähnliche Arbeit, allerdings nicht in Form eines Lehrbuches veröffentlicht[4]).

Die weit wichtigere rechnerische Behandlung der sphärischen Trigonometrie, welche die Lehrbücher fast ausschließlich brachten, wurde damals im Gegensatze zu Eulers Methode, die er in seiner Abhandlung von 1779 befolgte, in der Weise vorgenommen, daß zuerst die Sätze für das rechtwinklige und dann jene für das schiefwinklige Dreieck als Folgerungen aus ersteren gebracht wurden. So leiten z. B. Segner, dessen vielbefolgte Bezeichnungsweise aus der nachfolgenden Figur 24 erhellt, und ebenso Sauri und Boscovich sowie viele andere auf diese Weise die folgenden fünf Gleichungen ab:

---

sie sich auch in Mauduits o. a. Werke p. 83 und 84 ohne Beweis aus den Neperschen Analogien der sphärischen Trigonometrie geschlossen.

1) A. v. Braunmühl, Gesch. d. Trig. I, Kap. 2, § 1, Kap. 3, § 2, Kap. 4, § 2, Kap. 7, § 1, Kap. 8, § 6. Ferner Zeuthen, Bibl. mathem. 1900, p. 20—27.
2) A. a. O., p. 65 ff. 3) Trigonométrie sphérique résolue par le moyen de la Règle et du Compas, Bourges 1757, 8⁰. 4) De l'utilité des projections orthographiques. Mémoires de l'Acad. de Turin II, 1786, p. 291—327.

1) $\sin H : \sin h = \sin m : \sin M$; 2) $\sin B : \sin b = \operatorname{ctg} M : \operatorname{ctg} m$;
3) $\sin N : \sin n = \cos M : \cos m$; 4) $\cos N : \cos n = \operatorname{ctg} H : \operatorname{ctg} h$;
5) $\cos B : \cos b = \cos H : \cos h$

und fügen ihnen noch die beiden durch korrespondierende Addition und Subtraktion aus 3) und 5) hervorgehenden Formeln:

$$\operatorname{ctg}\frac{N+n}{2} : \operatorname{tg}\frac{M+m}{2} = \operatorname{tg}\frac{m-M}{2} : \operatorname{tg}\frac{N-n}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B+b}{2} : \operatorname{tg}\frac{H+h}{2} = \operatorname{tg}\frac{H-h}{2} : \operatorname{tg}\frac{B-b}{2}$$

hinzu[1]). Die Methode, mit diesen 7 Formeln alle Dreiecksaufgaben zu behandeln, war damals sehr verbreitet, wenn auch manche Autoren noch nebenbei die allgemeinen Formeln für das schiefwinklige Dreieck entwickelten, indem sie die Hauptsätze aus dem Dreikant ableiteten und aus diesen dann die übrigen durch Rechnung gewannen. Andere wieder, wie Cagnoli, Scherffer, Karsten und Mauduit stellten sich als Grundlage ihrer Formeln den Kosinus-, den Sinussatz und die Kotangentenformel mit Hilfe der Sätze des rechtwinkligen Dreiecks her. Auch die Neperschen Analogien kommen bei den genannten Autoren vor, die auch ihre praktische Verwendung auseinandersetzten. Dagegen wird die Methode, das ganze Formelsystem durch Anwendung des Supplementardreiecks zu verdoppeln, merkwürdigerweise nirgends ausschließlich angewendet.

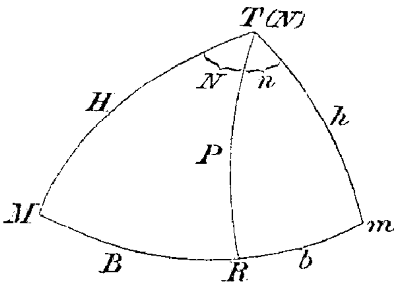


Fig. 24.

Wenn wir im vorhergehenden die hauptsächlichsten Methoden kennen gelernt haben, nach denen die Trigonometrie für den Unterricht entwickelt wurde, so müssen wir noch der am Ende des Jahrhunderts auftretenden Versuche gedenken, welche dahin zielten, das ganze trigonometrische Lehrgebäude auf die einfachstmögliche Grundlage zu stützen. Ohne diese bestimmte Absicht auszusprechen, leitete Kästner[2]) die Hauptformeln der ebenen Trigonometrie rechnerisch aus dem Sinussatze und der Winkelbeziehung $A + B + C = 180^0$ ab, und noch viel früher[3]) hatte der Oberberg-

[1]) Diese waren schon im 17. Jahrhundert von Thomas Baker (1625 bis 1690), Pfarrer in Bishop-Nymmet in Devonshire, mitgeteilt worden. Siehe A. v. Braunmühl, Gesch. d. Trig. II, p. 48. [2]) Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, z. B. 3. Aufl. 1774, p. 418; 4. Aufl. 1786, p. 505. Kästner wollte eigentlich nur eine „Vergleichung der Seiten des Dreiecks und eines seiner Winkel" finden. [3]) A. v. Braunmühl, Gesch. der Trig. II, p. 97—100. Oppels Schrift heißt: Analysis triangulorum 1746, 2⁰.

hauptmann Friedrich Wilhelm Oppel in Freiberg (1720—1769) gezeigt, daß sich aus der Kenntnis des Sinus- und Kosinussatzes die sämtlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie gewinnen lassen. Damit nicht zufrieden suchte De Gua de Malves (III², S. 576—577) zu zeigen[1]), daß die Kosinusformel allein zu diesem Aufbau genüge. Diesen Gedanken, den übrigens, wie De Gua selbst bemerkt, schon der Petersburger Akademiker F. C. Maier (III², S. 558—559) ausgesprochen hatte, führte er in der Abhandlung „Trigonométrie sphérique déduite très brièvement et complètement de la seule solution algébrique du plus simple des ses problèmes généraux etc.“ 1783 aus. Dabei hatte er die unglückliche Idee für seine neu aufgebaute Trigonometrie auch eine neue Funktionsbezeichnung einzuführen, die durch ihre Schwerfälligkeit die Lektüre seiner sonst verdienstlichen Abhandlung sehr unangenehm macht. Da sie jedoch keine Nachahmung fand, gehen wir auf dieselbe nicht weiter ein. De Gua leitet nun zunächst den Kosinussatz

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

geometrisch ab, indem er sich derselben Figur bedient, die wir bei F. Blake (S. 406) antrafen, und berechnet aus dieser Formel

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c} : (\sin b \sin c).$$

Da man aus der Symmetrie dieser Form erkennt, daß $\sin B$ und $\sin C$ denselben Zähler erhalten müssen, so folgt unmittelbar

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{\sin b \sin c} : \frac{1}{\sin c \sin a} : \frac{1}{\sin a \sin b} = \sin a : \sin b : \sin c,$$

also der Sinussatz. Durch sehr umfangreiche Rechnungen ergeben sich dann der Kosinussatz für die Winkel, die Kotangentenformel und noch 10 andere recht komplizierte Gleichungen, welche zu praktischer Verwendung zum Teil sehr wenig brauchbar sind.

Die abschreckenden Rechnungen De Guas veranlaßten Lagrange in der schon erwähnten Abhandlung „De quelques Problèmes relatifs aux triangles sphériques avec une Analyse complète de ces triangles“[2]) eine einfachere Ableitung zu geben. Kosinus- und Sinussatz erhält er wie De Gua, indem er aber dann den ersteren für die Seiten a und c ansetzt, mit Hilfe der zweiten dieser Formeln $\cos c$ aus der ersten eliminiert und $\sin c = \sin a \sin C : \sin A$ einführt, ergibt sich ihm als dritte Gleichung $\operatorname{ctg} a \sin b = \operatorname{ctg} A \sin C + \cos b \cos C$. Vor der

[1]) Mémoires de l'Acad. de Paris 1786, p. 291—343, vorgelegt 1783.

[2]) Journal de l'École Polytechnique, cahier 6, 1798/99.

eben erwähnten Einführung von $\sin c$ hatte sich Eulers Formel $\cos a \sin b = \cos b \sin a \cos C + \sin c \cos A$ ergeben; indem er nun in dieser a mit b und folglich auch A mit B vertauschte und den hierdurch erhaltenen Ausdruck für $\cos b \sin a$ in sie einführte, ergab sich mit Hilfe der Beziehung $\sin c = \sin b \sin C : \sin B$ leicht der Kosinussatz für die Winkel als vierte Hauptgleichung. Obwohl diese Formeln genügen, wie Lagrange sagt, um alle auf sphärische Dreiecke bezüglichen Aufgaben zu lösen, so leitet er dennoch aus ihnen die bekannten 6 Gleichungen für das rechtwinklige Dreieck sowie die Sätze zur Bestimmung der Seiten aus den Winkeln und der Winkel aus den Seiten ab und verschafft sich die Neperschen Analogien, indem er in beiden Fällen auch das Supplementardreieck verwendet.

Da Lagranges Arbeit unmittelbar an De Guas Gedanken anknüpfte, mußten wir ihre Besprechung gleich hier anfügen und können erst nachträglich noch auf eine Abhandlung des uns schon bekannten Schubert hinweisen, die schon 1796 erschienen war[1]) und denselben Gegenstand behandelte, ohne jedoch jener Lagranges an Übersichtlichkeit, Einfachheit und Eleganz gleichzukommen. Friedrich Theodor Schubert (1758—1825), geboren zu Helmstädt, begann seine Tätigkeit als Hauslehrer, wurde dann Revisor des hapsalschen Kreises in Esthland, beschäftigte sich aber hauptsächlich mit geographischen und astronomischen Studien, die ihm die Pforten der Akademie in Petersburg eröffneten, woselbst er Aufseher der Bibliothek und des Münzkabinetts dieser Anstalt wurde, Stellungen, die er bis zu seinem Tode inne hatte. Mit den Schriften der Alten wohlvertraut kam er auf den Gedanken, aus dem Satze des Menelaus[2]), mit dem schon Ptolemäus die sphärische Trigonometrie behandelt hatte, das ganze bekannte Formelsystem der Trigonometrie abzuleiten. Zunächst gewann er aus diesem Theorem die 6 Formeln für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke[3]), dann den Sinussatz und durch beständige Anwendung der gefundenen Formeln auf die Figur jenes Transversalensatzes von Menelaus die beiden Kosinusregeln, aus denen sich dann als einzige noch notwendige Regeln die Formel

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin A \sin c}{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A}$$

und ihre polare ergaben. Auch dieses schöne System gründet die ganze sphärische Trigonometrie auf einen einzigen Satz, die hierzu notwendigen Rechnungen stehen aber jenen Lagranges an Einfachheit bedeutend nach. Beachtung hat dasselbe wenig gefunden.

---

[1]) Trigonometria sphaerica e Ptolemaeo. Vorgelegt am 22. Dezember 1796, publiziert 1801 in Nova Acta Acad. Petrop. XII, p. 165—175. [2]) Vgl. dieses Werk I², p. 386. [3]) Vgl. I², p. 392—393.

Tetragonometrie, Polygonometrie und Polyedrometrie.

Nachdem infolge der Ausbildung der Formelsprache und der dadurch gewonnenen Geschmeidigkeit der analytischen Rechnung die Behandlung aller auf ebene Dreiecke bezüglichen Fragen eine Leichtigkeit geworden war, regte sich der Wunsch, auch für unregelmäßige Vierecke und allgemeine Polygone, deren typische Formen schon Stevin und Girard unterschieden hatten[1]), Formeln zu besitzen, welche eine Berechnung derselben direkt, d. h. ohne vorherige Zerschneidung in Dreiecke gestatten würden. Lambert war der erste, der in seiner „Anlage zur Tetragonometrie"[2]) diesen Gedanken verfolgte, um überflüssigen Rechnungen zu begegnen. Er gab ohne Beweis die vier Beziehungen an, welche zwischen je 6 Stücken eines ebenen Vierecks bestehen müssen. Da man jede von diesen nach einem der sechs Stücke auflösen kann, so ergeben sich 24 Fälle, von denen jedoch nur 14 verschieden sind, da mehrere Auflösungen dasselbe sagen, und drei Winkel bereits den vierten bestimmen, Umstände, die Lambert nicht berücksichtigt hat. Nimmt man noch eine Diagonale hinzu, so vermehren sich die möglichen Fälle, deren unvollständige Abzählung durch Lambert später Björnsen und Lexell ergänzten, während Johann Tobias Mayer in seine Inauguraldissertation von 1773[3]) Lamberts Irrtümer herübernahm. Der schon früher genannte J. T. Mayer war als Sohn des berühmten Astronomen gleichen Namens 1752 in Göttingen geboren, studierte und habilitierte sich daselbst, wurde dann Professor der Mathematik und Physik in Altdorf und Erlangen und starb als Professor der Physik in Göttingen 1830. In der genannten Schrift bemühte er sich hauptsächlich, logarithmisch brauchbare Gleichungen in der Tetragonometrie zu erhalten, was seine, wenn auch mangelhafte Abhandlung immer noch vorteilhaft von dem Buche unterscheidet, das der Däne Stephan Björnsen (1730—1798), Kalkulator der dänischen Landesvermessung, 1780 herausgab[4]). Dasselbe ebenfalls an Lambert anschließend bietet wenig elegante Formeln, wenn es auch Mayers Schrift an Vollständigkeit übertrifft, indem es noch die Fälle, welche mit Hinzunahme einer Diagonale entstehen, analytisch behandelt, geometrische Konstruktionen ableitet und die auftretenden Doppelwerte erklärt.

Der erste, welcher den geringen Wert solcher Detailuntersuchungen

---

[1]) Vgl. dieses Werk II^2, p. 665—666 und Bibliotheca math. 1900, I, p. 271.
[2]) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik II, 1770, p. 175—184. [3]) Tetragonometriae specimen I, Göttingen 1773. [4]) Introductio in Tetragonometriam ad mentem Lambert. Hauniae 1780, 8°.

erkennend eine allgemeine Methode zur Berechnung beliebiger Polygone entwickelte, war der schon genannte Petersburger Mathematiker Lexell. Andreas Johann Lexell, 1740 zu Åbo in Finland als Sohn des dortigen Bürgermeisters geboren, kam 1766 auf Grund einer Abhandlung über die Auffindung von Kurven aus den Eigenschaften ihrer Krümmung als Lektor an die Universität und als Professor an die Marineschule in Upsala. Als er 1768 an die Petersburger Akademie eine Abhandlung einsandte, in welcher er eine neue Methode zur Integration gewisser Differentialgleichungen auseinandersetzte, wurde Euler auf ihn aufmerksam und veranlaßte sofort seine Berufung nach Petersburg, der er auch Folge leistete und sich als Eulers treuer Mitarbeiter namentlich an dessen neuer Mondtheorie auszeichnete. Als der letztere 1783 starb, erhielt Lexell seine Stelle in der Akademie, in die er schon früher aufgenommen worden war, hatte sie jedoch nur mehr ein Jahr inne, indem er schon 1784 seinem Meister im Tode nachfolgte.

Lexell hat der Polygonometrie zwei Abhandlungen gewidmet, in denen er diesen Zweig der Trigonometrie eigentlich erst schuf[1]). Er löste darin die Aufgabe aus $2n-3$ Stücken eines n-Ecks, die dasselbe bestimmen, die übrigen zu berechnen, indem er das Polygon auf zwei zueinander senkrechte Linien, wovon er die eine mit einer Seite zusammenfallen ließ, orthogonal projizierte. Die beiden hierdurch sich ergebenden Gleichungen sind in seiner Schreibweise:

$$a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots$$
$$+ l \sin(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda) = 0,$$
$$a \cos\alpha + b \cos(\alpha+\beta) + c \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots$$
$$+ l \cos(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda) = 0,$$

wobei $a, b, c, \ldots l$ die Seitenlängen und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ die Außenwinkel des Polygons bedeuten, und die Beziehung besteht:

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda = 360^0.$$

Die beiden Gleichungen werden auch noch dadurch verallgemeinert, daß die Projektion des Polygons auf zwei beliebige sich in einer Ecke schneidende rechtwinklige Achsen vorgenommen wird; auch wird ihre allgemeine Gültigkeit für überschlagene Polygone und solche mit einspringenden Ecken an Beispielen dargetan, wobei nur zu beachten ist, daß die Summe der Außenwinkel in solchen Fällen ein Vielfaches von 2π beträgt.

Als spezielle Anwendungen zeigt Lexell, wie sich aus seinen

[1]) De resolutione polygonorum rectilineorum. Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774, p. 184—236 und XX, 1775, p. 80—122, publiziert 1775, resp. 1776.

Gleichungen die Grundformeln der Trigonometrie und der Tetragonometrie ergeben und fügt noch die entsprechenden für die Fünf- und Sechsecke hinzu. Diese Detailuntersuchungen, namentlich insoweit sie sich auf das Viereck beziehen, werden dann in der zweiten Abhandlung noch weiter ausgearbeitet, wobei eine vollständige Klassifizierung aller möglichen Fälle, auch jener, die mit Hereinziehung einer und zweier Diagonalen entstehen, vorgenommen wird.

Auf einer anderen Grundlage hat Simon L'Huilier eine Polygonometrie aufgebaut[1]). An ihre Spitze stellte er folgenden Satz: „Läßt man eine Seite des Polygons weg, bildet aus allen anderen die Produkte aus je zweien und multipliziert jedes Produkt mit dem Sinus des von den betreffenden Seiten gebildeten Winkels, so ist die Summe dieser $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Produkte gleich dem doppelten Inhalt des Polygons". Da man nun immer andere Seiten des Polygons weglassen kann, so erhält man n Ausdrücke für den Polygonsinhalt, die einander gleichgesetzt die fundamentalen Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons liefern. Außer dieser Formelgruppe verschafft sich L'Huilier aber noch zwei Fundamentalformeln, die identisch sind mit Lexells Projektionsformeln[2]), indem er den Polygonsinhalt einmal in der obigen Weise und dann als Summe eines durch eine Diagonale abgeschnittenen Eckdreiecks und des übrigbleibenden Polygons von $n-1$ Seiten bildet. Den übrigen Inhalt des Buches machen allgemeine und spezielle Anwendungen dieser Sätze aus.

Außerdem hat L'Huilier über seine Vorgänger hinausgehend noch in einer dem Institut national 1799 eingereichten Abhandlung „Théorèmes de Polyedrométrie", Paris 1805, seine Sätze auf Raumpolygone ausgedehnt und den Hauptsatz der Polyedrometrie aufgestellt, daß jede Seitenfläche eines Polyeders gleich der Summe der übrigen ist, wenn man jede mit dem Kosinus des Winkels multipliziert, den sie mit der ersten bildet. Doch wurden die notwendigen Bedingungen, unter denen allein dieser Satz gültig ist, weder von L'Huilier noch von Carnot[3]), der sich bald nach ihm mit Sätzen der Polyedrometrie und der Raumpolygone beschäftigte, angegeben.

Die Hauptsätze der Polygonometrie fanden in den Lehrbüchern merkwürdig schnell Eingang, so in Prändels vielbenutzter „Geometrie und ebene Trigonometrie", München 1793, die einen eigenen Abschnitt darüber enthält.

---

[1]) Polygonométrie ou de la mésure des figures rectilignes etc., Genève 1789, 4°. Es scheint dies das erste Lehrbuch der Polygonometrie zu sein. Mascheronis „Metodo di misurare i poligoni", Pavia 1787, konnten wir nicht einsehen. [2]) Dieselben stehen a. a. O. p. 18 und 20. [3]) Géométrie de position, 1803, p. 306.

Zum Schlusse dieses Kapitels möge noch auf spezielle Untersuchungen über Vierecke und Polygone hingewiesen werden, mit denen sich Nik. Fuß am Ende des Jahrhunderts beschäftigte. In einer ersten Abhandlung von 1794[1]) löste er auf trigonometrischem Wege Aufgaben, welche sich darauf bezogen, aus gewissen gegebenen Stücken ein Viereck zu konstruieren, dem man einen Kreis umschreiben und einen anderen einschreiben kann und berechnete die Radien dieser Kreise, den Abstand ihrer Mittelpunkte und die noch fehlenden Stücke solcher Vierecke. In der zweiten Abhandlung von 1798[2]) dehnte er diese Untersuchungen auf symmetrisch irreguläre Polygone aus, womit er solche Polygone bezeichnete, denen man einen Kreis um- und einen anderen einschreiben kann und die so beschaffen sind, daß sie durch den gemeinsamen Durchmesser dieser beiden Kreise in zwei kongruente Hälften geteilt werden[3]). Auch hier werden alle Einzelaufgaben trigonometrisch behandelt und die Konstruktionen aus den Formeln abgeleitet. Der Zielpunkt der Arbeit ist die Lösung des allgemeinen Problems: einem gegebenen Kreis ein n-Eck einzuschreiben, dem selbst wieder ein Kreis eingeschrieben werden kann. Direkt gelöst wurde jedoch diese Aufgabe nur bis zum 8-Eck einschließlich, indem man, wie er sagte, hieraus bereits ersehen könne, wie man bei höherer Eckenzahl verfahren müsse.

Trigonometrische und andere Tafeln. Zyklometrie. Trigonometrische Reihen.

Nachdem bereits Isaak Newton auf die Benutzung der unendlichen Reihen zur Berechnung logarithmisch-trigonometrischer Tabellen hingewiesen, und der unermüdliche Abraham Sharp[4]) zu Beginn des 18. Jahrhunderts mit ihrer Hilfe darauf bezügliche Rechnungen in großer Zahl ausgeführt hatte, wurden die letzteren von Gardiner in einer Neuauflage von Sherwins Logarithmentafel 1741 publiziert. Die zahlreichen Auflagen dieser zuerst 1705 erschienenen Mathematical tables von Sherwin, von denen Gardiners weitere Ausgabe von 1742 die korrekteste sein soll[5]), laufen bis 1771 fort, wo die fünfte

[1]) Nova Acta Acad. Petrop. 1792, X (erschienen 1797), p. 103—125.
[2]) Ebenda, 1795/96, XIII (erschienen 1802), p. 166—189. [3]) J. Steiner stellte (Journal für Math. und Phys. II, 1827, p. 96 und 289) die Relation zwischen den Radien der erwähnten Kreise und der Distanz ihrer Mittelpunkte für das Fünf-, Sechs- und Achteck auf, C. G. Jacobi aber wies (ebenda, III, p. 376) nach, daß diese Formeln mit den von Fuß gegebenen zusammenstimmen müssen, da dieser ohne es zu bemerken, den allgemeinsten Fall bereits behandelt hatte. [4]) Über ihn vgl. dieses Werk, III², S. 86. [5]) Tables of Logarithms for all numbers from 1 to 102100, and for the Sines and Tangents etc., London 1742.

Auflage derselben erschien, und enthalten die Briggschen Logarithmen aller Zahlen bis 99 und die Logarithmen der Primzahlen von 100 bis 1097 auf 61 Stellen nach Sharps Rechnungen[1]) sowie siebenstellige Logarithmen aller Zahlen bis 1000 und von 10000 bis 101000. Außerdem finden sich darin Tafeln für die Sinus, Tangenten, Sekanten und Sinus versus und ihrer Logarithmen für alle Bogenminuten ebenfalls auf 7 Stellen. Eine Neuauflage von Gardiners Tafelwerk in französischer Sprache wurde 1770 von dem Jesuiten Esprit Pezenas (1692—1776), Direktor der Sternwarte in Avignon, besorgt, der hierzu die von Gabriel Mouton (vgl. III², S. 77) mit dessen Differenzenmethode[2]) berechneten Zahlen benutzte, ohne jedoch seine Tafeln aller Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für die Sekunden der ersten und letzten 4 Grade zu veröffentlichen. Lalande, der dies lebhaft bedauerte, setzte in einer Abhandlung von 1761[3]) ein Interpolationsverfahren zur Berechnung solcher Tafeln auseinander und veranstaltete 1781 und noch später Neuausgaben der 1760 zum erstenmal erschienenen Tables des Logarithmes pour les Sinus, Tangentes etc. von Lacaille. Diese Tafeln waren wegen ihrer Handlichkeit (Duodezformat) und Exaktheit sehr beliebt und blieben langezeit im Gebrauch; 1832 wurden sie noch einmal von Köhler herausgegeben[4]).

Eine der wichtigsten Tafelsammlungen, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts erschienen, enthielten Lamberts „Zusätze zu den logarithmisch trigonometrischen Tabellen zur Erleichterung und Abkürzung der bei Anwendung der Mathematik vorfallenden Berechnungen", Berlin 1770, 8⁰. Diese auf eine Anregung Lagranges entstandene Tafelsammlung[5]) wurde 1788 von dem mit Lambert im Briefwechsel stehenden und von ihm vielfach unterstützten Anton Felkel (geb. 1740) in Lissabon in lateinischer Sprache neu aufgelegt. Wir wollen auf die wichtigsten Tafeln dieser Sammlung hinweisen. Lambert hatte schon im II. Bande seiner Beiträge zur Mathematik die Teiler aller Zahlen von 1 bis 10200 gegeben, ferner hatte Heinrich Ajema 1767 eine Tafel der Teiler aller Zahlen von 1 bis 10000

[1]) Zuerst veröffentlicht in seiner Geometry improved, London 1717.
[2]) Mouton hat sein Verfahren zuerst angewendet in „Observationes diametrorum solis et lunae", Lugd. 1670, 4⁰, und damit die Logarithmen der Sinus und Tangenten auf 10 Dezimalen berechnet. Das diese Tafeln enthaltende Manuskript reichte er der Pariser Akademie ein, und Pezenas konnte es benutzen. [3]) Sur les interpolations ou sur l'usage des différences secondes, troisièmes etc. Mémoires de l'Acad. de Paris 1761, p. 125—139.
[4]) Glaisher, Report of Mathematical Tables in Report of the British Association, London 1874, p. 1—175 [künftig nur als „Glaisher" zitiert], p. 153.
[5]) Brief an d'Alembert vom 4. April 1771. Lagrange, Oeuvres, éd. Serret, XIII, p. 195.

zu Löwen veröffentlicht und sowohl im Dictionnaire encyclopédique wie auch in Harris Lexikon der Künste und Wissenschaft war je eine solche Tafel für alle nicht durch 2, 3, 5 teilbaren Zahlen von 1 bis 100000 nach John Pell (vgl. II[2], S. 713) mitgeteilt worden; diese dehnte Lambert unter Vornahme der nötigen Korrekturen auf alle Zahlen bis 102000 aus (Tab. I) und fügte noch Tafeln für die Primzahlen bis 101977[1]) bei (Tab. II und VI), zu deren Bildung er in der Einleitung eine Reihe von Sätzen mitteilt. Felkel hat die Teilertafel fortgesetzt, indem er 1776 in Wien eine sehr praktisch eingerichtete Tabelle erscheinen ließ, die die Divisoren bis 336000 enthielt (vgl. S. 202). Nach Angabe von Gauß hatte er seine Rechnung sogar bis 2000000 getrieben, jedoch ist der Rest nicht mehr im Druck erschienen. Auch die Tafel der Primzahlen wurde 1772 von Marci bis 400000 fortgesetzt, während Johann Neumann zu Dessau 1785 Tabellen der Primzahlen und der zusammengesetzten Teiler aller Zahlen bis 100100 mitteilte und Vega eine Faktorentafel bis 400000 in seinen Vorlesungen (1793) drucken ließ.

Außer den Primzahltafeln enthält Lamberts Sammlung noch kleinere Tabellen der Quadrat- und Kubikzahlen, der Potenzen von 2 bis 2^{70}, von 3 und 5 bis zur 50sten Potenz, eine Tafel für die Werte der Exponentialfunktion e^{-x}, von $x = 0{,}1$ bis $x = 10$, nebst den Entwicklungen von e^x, $\frac{1}{2}(e^x + 1)$, $\log(a + x)$ usw. in Reihen und Kettenbrüche, dann eine Tafel der siebenstelligen hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100 (Tab. XIII) und eine ebensolche der Zahlen von 1,01 bis 10 in Intervallen von 0,01. Bemerkenswert ist die XIX. Tafel, welche die Werte der Sinus von 3^0 zu 3^0 in algebraischen Ausdrücken zusammenstellt, um gegebenenfalls verschiedene Rechnungen mit aller Schärfe vornehmen zu können. Über die Aufstellung dieser Tabelle verbreitete er sich in seinen Beiträgen zur Mathematik II (S. 133—139) und zeigte, daß die einzelnen Funktionswerte aus 15 verschiedenen Wurzeln durch Addition und Subtraktion allein zusammengesetzt sind[2]). Außerdem enthält Lamberts Samm-

[1]) J. G. Krüger hatte schon 1746 zu Halle im Magdeburgischen eine Primzahltafel bis 100999 gegeben, die er nach Aussage Lamberts von Peter Jäger erhalten hatte, und von Giuseppe Pigri (1728 etwa —1804) waren 1758 Nuove tavole degli elementi dei numeri dall' 1 al 10000 in Pisa veröffentlicht worden. Diese Tafeln enthalten alle Zahlen innerhalb der gegebenen Grenzen durch Primzahlprodukte dargestellt und sollten nach des Autors sanguinischer Hoffnung die Benutzung der Logarithmen überflüssig machen. Eine Methode zur Aufsuchung der Primzahlteiler hat auch Johann Tessanek in Abhandlungen einer Privatgesellschaft in Böhmen, I, Prag 1775, p. 1—64 angegeben und mit derselben eine Tafel von 1 bis 1000 berechnet (p. 53—60). [2]) Eine Ableitung derselben

lung noch eine Tafel (XXI), in welcher die hauptsächlichsten trigonometrischen Formeln zusammengestellt sind, die zur Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke dienen, Tafeln für die Längen der Kreisbögen auf 27 Dezimalen von 1^0 bis 100^0, von da ab in Intervallen von 30^0 und endlich für Minuten und Sekunden; ferner Tabellen zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen kleiner Winkel, zur Bestimmung der Sinus aller Grade mit ihren ersten 9 Vielfachen auf 5 Dezimalen usw. Zum Schlusse mag noch auf die Tafeln zur Erleichterung der Auflösung höherer Gleichungen, wie der Gleichungen 3. und 4. Grades, und endlich auf die Tafel der hyperbolischen Logarithmen (Tab. XXXII) aller ganzen Winkelgrade des 1. Quadranten hingewiesen werden. Im ganzen umfaßte die mit großer Sachkenntnis zusammengestellte Sammlung Lamberts 45 Tafeln in einem sehr handlichen Oktavbändchen.

Ein wichtiges Tabellenwerk war damals auch die „Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln“ von Johann Karl Schulze (1749—1790), einem Schüler Lamberts, welche 1778 in Berlin in zwei Oktavbänden erschien. Außer den siebenstelligen Briggsschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 finden sich daselbst die hyperbolischen Logarithmen der Primzahlen von 1 bis 10000, die der holländische Artillerieoffizier Wolfram auf 48 Dezimalen berechnet hatte, ferner eine Tafel für die Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Bögen von 0^0 bis 2^0 von Sekunde zu Sekunde berechnet, dann im II. Bande Tafeln der Sinus, Tangenten und Sekanten mit den zugehörigen Briggsschen und hyperbolischen Logarithmen für die 4 ersten und 4 letzten Grade in Intervallen von $10''$, für den übrigen Teil des Quadranten aber von Minute zu Minute berechnet. Auch die Längen der „Zirkulbögen“ für alle Grade auf 27 Dezimalen, ferner für alle Minuten und Sekunden sind für den Radius 1 angegeben, und außerdem ist noch eine Interpolationstafel aufgenommen. Auch findet sich darin eine Tafel für rationale Trigonometrie, die nach Lamberts Angaben berechnet wurde. Sie gibt für 100 rechtwinklige Dreiecke die Seiten, für welche die Tangente des halben spitzen Winkels $> \frac{1}{25}$ ist. Hier mag erwähnt werden, daß Lambert auf die sogenannte rationale Trigonometrie, mit welcher sich schon Vieta[1]) und De Lagny[2]) beschäftigt

hat Cagnoli 1794 in „Cose trigonometriche“, Mem. della Soc. Italiana VII, p. 2 bis 3 gegeben.

[1]) Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus, Lutetiae 1579 in fol. Darin: Canonion triangulorum Laterum rationalium. Vgl. die Beschreibung desselben bei Hunrath in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik; Heft 9, p. 221—225. [2]) Sur le calcul analytique et indéfini des Angles

hatten, durch einen Brief aufmerksam geworden zu sein scheint, den ihm ein gewisser Pater Simon Baum vom St. Salvatororden am 15. Oktober 1773 schrieb; darin teilte er ihm mit, daß er 223 Sinuswerte in rationalen Zahlen bestimmt habe und noch 20000 zu berechnen gedenke, welche zur Behandlung von Dreiecken dienen, deren Seiten und Inhalt rational sind. In seiner Antwort auf diesen Brief am 14. Dezember des gleichen Jahres teilte ihm Lambert mit, er habe eine Tafel für alle Brüche, deren Nenner 100 ist, berechnet, und aus dieser Tafel könne man schon 200 rationale Sinus finden, was völlig genüge. Ferner sei allgemein $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ gesetzt, so folgt

$$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{b^2 + a^2}, \quad \cos 2\alpha = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

und hieraus z. B. für $\frac{a}{b} = \frac{3}{11}$

$$\sin 2\alpha = \frac{33}{65}, \quad \cos 2\alpha = \frac{56}{65}, \quad \alpha = 30^0\, 30'\, 27''.$$

Diese Überlegungen waren es jedenfalls, die die Entstehung der Schulzeschen Tafel verursachten, nur war dieselbe leider mit so vielen Fehlern behaftet, daß sie Bretschneider 1841[1]) noch einmal berechnen mußte.

Schulzes Werk scheint jedoch das Bedürfnis nach Logarithmentafeln nicht befriedigt zu haben, weshalb Georg Freiherr von Vega (1756—1802) sich mit der Herausgabe ähnlicher Werke befaßte, die bald sehr populär wurden. Vega, in Zagarika in Krain geboren, trat früh in die österreichische Armee, war als Hauptmann zugleich Professor der Mathematik beim Bombardierkorps in Wien, machte die Feldzüge gegen die Türken 1788 und gegen Frankreich 1793 bis 1797 mit, in denen er sich sehr auszeichnete, und stieg bis zum Oberstleutnant. 1802 wurde er entseelt in der Donau gefunden; später ergab sich, daß er von einem Müller ermordet worden war[2]). Während er seine Professur inne hatte, veröffentlichte er zunächst „Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln“, Wien 1783, 8⁰, die in zahllosen Neuauflagen und Bearbeitungen bis heute im Gebrauche blieben. Das Werk umfaßte die siebenstelligen Logarithmen der

des triangles etc. Mémoires de l'Académie de Paris 1729, insbesondere p. 318.

[1]) Archiv für Mathematik und Physik I, p. 96—101. [2]) K. Döhlemann, Georg von Vega. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1894, XXXIX, p. 204 bis 211.

Zahlen und der trigonometrischen Funktionen sowie die goniometrischen Funktionen selbst, die Längen der Kreisbögen und verschiedene den Kreis und die Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke betreffende Formeln. 1794 erschien dann in Leipzig „Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch“ und im gleichen Jahre Vegas vollständigstes und bedeutendstes Werk in dieser Richtung, der „Thesaurus logarithmorum completus ex Arithmetica logarithmica, et ex Trigonometria arteficiali“, Lipsiae 1794, 2°. Die erste Tafel desselben, der „Magnus Canon logarithmorum vulgarium“ enthält die 10stelligen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000 ohne Differenzen und von 1000 bis 100999 mit Differenzen, die 2. Tafel, der Magnus Canon logarithmorum vulgarium trigonometricus gibt die 10stelligen Logarithmen der Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten und zwar zwischen 0° und 2° in Intervallen von 1″ und für die übrigen Winkel von 10″ zu 10″ mit Angabe der Differenzen. Außerdem findet man noch darin Tafeln für Kreisbogenlängen, eine umfassende Sammlung trigonometrischer Formeln und Wolframs hyperbolische Logarithmen der Primzahlen. Vegas Thesaurus war, wie er selbst sagt, eine Neuberechnung von Vlacks Tafeln (II², S. 443 ff.), und er glaubte die Fehler jener Tabellen so verbessert zu haben, daß er für jeden ihm angezeigten Fehler einen Dukaten zu zahlen versprach. Doch genügte, wie nachmals Gauß in einer Besprechung des Werkes nachwies[1]), die Tafel II der Anforderung, die Tabulargröße dürfe niemals um mehr als eine halbe Einheit der letzten Dezimalstelle von dem wahren Werte abweichen, keineswegs.

Ein Jahr nach dem Erscheinen des Thesaurus kam in Paris die Tafelsammlung von François Callet (1744—1798) heraus, die wir schon S. 423 anführten[2]). Sie umfaßte im ganzen 11 wichtige Tafeln in einem nicht übermäßig dicken Oktavband und berücksichtigte neben der alten Teilung des Quadranten auch die Hundertteilung desselben. Die Haupttafeln enthalten 7stellige Logarithmen der Zahlen wie der trigonometrischen Funktionen, doch sind auch die gewöhnlichen und hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1200 und von 101000 bis 101179 sowie die gewöhnlichen und hyperbolischen Antilogarithmen von 0,00001 bis 0,00179 in Intervallen von 0,00001 und von 0,000001 bis 0,000179 in Intervallen

---

[1]) Astronomische Nachrichten 1851, Nr. 756, Werke III, p. 257—264. Vgl. dagegen die Ansicht von Leber „Tabularum ad faciliorem interpolationis computationem utilium Trias“, Vindob. 1897. [2]) Tables portatives de logarithmes 1795, 8°. Die umfangreiche Einleitung (118 Seiten) enthält eine genaue Angabe der Berechnung der Tafeln. Neudrucke erschienen 1827, 1829, 1853, 1890.

von 0,000001 sämtlich auf 20 Dezimalen mitgeteilt und die ersten, zweiten und dritten Differenzen angegeben. Außerdem ist noch eine Tafel bemerkenswert, die die Sinus und Logarithmen derselben auf 15 Dezimalen für je 10′ des hundertteiligen Quadranten gibt. Was die Berechnung der natürlichen Sinus in diesem Werke betrifft, so hat sie Callet wahrscheinlich durch Interpolation aus der „Trigonometria arteficialis“ von Vlack vollzogen[1]).

Von den um jene Zeit in England erschienenen Tafelsammlungen haben wir die trefflichen Mathematical Tables, London 1785, 8⁰, zu nennen, die Charles Hutton (siehe Abschnitt XIX, S. 16), seit 1773 Professor an der Militärakademie zu Woolwich, herausgab. Sie erlebten bis 1858 Neuauflagen unter beständiger Verbesserung. Die ersten sechs derselben enthalten eine äußerst wertvolle Einleitung über die Geschichte der Logarithmen. Außerdem finden sich in dieser Sammlung Antilogarithmen, d. h. die Zahlen zu den Logarithmen von 0 bis 0,00149 in Intervallen von 1 Hunderttausendstel auf 20 Dezimalstellen berechnet, und logistische Logarithmen, d. h. die Werte von $\log 3600'' - \log x$, von $x = 1''$ bis $x = 5280''$ in Sekundenintervallen auf 4 Dezimalen.

Ein bedeutendes Werk ist auch die dreibändige von Michael Taylor (1756—1789), einem Rechner für den Nautical Almanac, in London 1792 in-4⁰ herausgegebene Tafelsammlung mit einer Vorrede von Nevil Maskelyne, dem wir schon begegneten. Unter den durchweg 7stelligen Tafeln befindet sich eine (die III.) von 450 Seiten mit nahe $3\frac{1}{2}$ Millionen Ziffern; sie enthält die Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten und wurde durch Interpolation aus Vlacks 10stelliger Tafel mit Kürzung auf 7 Stellen berechnet. Außerdem hat Taylor noch 1780 eine Sexagesimaltafel publiziert.

Als man in Frankreich in den ersten Jahren der großen Umwälzung, welche die Revolution auf allen Gebieten hervorgerufen hatte, auch die Maße und Gewichte reformierte, indem man überall das Dezimalsystem einführte, lag es nahe, den schon früher vereinzelt aufgetauchten Gedanken der Dezimalteilung des Winkels wieder aufzunehmen und dafür neue logarithmisch-trigonometrische Tafeln zu schaffen, ähnlich wie sie einst Briggs berechnet hatte (vgl. II², S. 743). Die Anregung hierzu ging von Carnot, Prieur und Brunet aus, und mit der Leitung des Unternehmens, welches in großem Maßstabe angelegt wurde, ward 1794 der zum Vorstande des Katasterbureaus (1791) ernannte Ingenieur Gaspard de Prony (1755—1839) betraut.

[1]) Glaisher, a. a. O., S. 93 nach Hoberts und Idelers Angabe (1799).

Dieser teilte seine Hilfsarbeiter in drei Gruppen. Die Herstellung der für die Rechnung notwendigen Formeln lag in den Händen berühmter Mathematiker, wie Delambre und Legendre, die zweite Gruppe bestand aus Rechnern, die mit der Analysis vertraut waren, während die Mitglieder der dritten Sektion, zu denen man hauptsächlich die durch das neue Regime brotlos gewordenen Perückenmacher heranzog, nur die Additionen und Differenzenrechnungen auszuführen hatten. Dabei vollzog man[1]) die Berechnung der Sinus von 10^0 zu 10^0 mittelst der Reihe, die Sinus der zwischenliegenden Bögen wurden von Grad zu Grad mit der Formel

$$\sin(a+b) = 2\cos a \sin b + \sin(a-b)$$

bestimmt, und alles übrige wurde durch eine geschickt angelegte Differenzenrechnung ausgefüllt, deren auf Moutons Methode beruhende Einrichtung man hauptsächlich Legendre verdankte[2]). Das Werk umfaßt handschriftlich 17 Bände in Folio und enthält neben einer ausführlichen Einleitung über die Herstellung usw. der Tafeln die natürlichen Sinus für jeden 10000sten Teil des Quadranten auf 25 Dezimalen, um sie sicher auf 22 zu haben, mit Angabe von 7 oder 8 Kolonnen Differenzen, ferner die Logarithmen der Sinus und der Tangenten für jedes Hunderttausendstel des Quadranten auf 14 Dezimalen mit 5 Differenzen, dann die Logarithmen der Verhältnisse der Sinus und der Tangenten zu ihren Bögen für die 5000 ersten Hunderttausendstel des Quadranten in 14 Dezimalen, weiter die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 auf 19 Dezimalen und die der Zahlen von 10000 bis 200000 mit 14 Dezimalstellen und 5 Differenzen. Das begonnene Riesenwerk war also wirklich dem Plane gemäß zu Ende geführt worden, blieb aber leider unveröffentlicht, da der bereits angefangene Druck wegen der Zerrüttung der Finanzen eingestellt werden mußte. Übrigens hat dasselbe an Wert bedeutend verloren, da die Hundertteilung des Quadranten in der Folge keinen Eingang fand, obwohl sie Legendre in seiner vielbenutzten Trigonometrie den Rechnungen zugrunde legte, und auch bald kleinere Tafeln, wie die „Tables trigonométriques décimales“ von Borda[3]) in Frankreich und die „Nou-

---

[1]) Mémoires de l'Institut V, an XII, p. 56—66: Rapport sur les grandes tables trigonométriques décimales du cadastre par Lagrange, Laplace et Delambre und Bulletin de la Société Philomathique de Paris III, 1811, Bericht von denselben. Vgl. auch Comptes rendus de l'Acad. de Paris 1858, XLVI, p. 911 bis 912; ferner Annales de l'Observatoire impérial de Paris IV, 1858, p. 123 bis 150, endlich Nouvelles Annales XIV, 1855, p. 14—17 des historischen Teils.
[2]) Connaissance de temps 1817, p. 219—233. [3]) Tables trigonométriques déci-

velles tables trigonométriques" von Hobert und Ideler[1]) in Deutschland erschienen, die sich dieser Teilung bedienten. In der Vorrede zu letzterem Werk, welches das erste war, das in Deutschland die zentesimale Teilung des Quadranten einzuführen suchte, wird der Differenzenmethode zur Berechnung der Tafeln das Wort geredet und in der Tat hatte die Herstellung der „Tables du Cadastre" das Übergewicht dieser Methode über die direkte Berechnung auf das schlagendste dargetan.

Obwohl man sich, wie schon am Anfang dieses Abschnittes erwähnt, zur Berechnung der Logarithmen stets der unendlichen Reihen bediente, machte sich doch am Ende des Jahrhunderts das Bestreben geltend, elementare Methoden herzustellen, mit denen eine solche Berechnung wenigstens für die Zahlenlogarithmen möglich wäre. Der Prediger der französischen Gemeinde und nachmalige Professor der Mathematik an der Académie militaire in Berlin, Abel Bürja (siehe S. 29) veröffentlichte 1786[2]) zwei solche Methoden zur direkten Berechnung der Logarithmen. Die erste beruhte darauf, daß er durch abwechselndes Ziehen der zweiten und der fünften Wurzel aus 10 und den hierdurch entstehenden Zahlen die zu den Logarithmen

$$0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots\ 0{,}9;\quad 0{,}01,\ 0{,}02,\ \ldots\ 0{,}09;\quad 0{,}001,\ 0{,}002,\ \ldots\ 0{,}009 \text{ usw.}$$

gehörigen Numeri bildete, dann die ersten 9 Vielfachen dieser Zahlen berechnete und alles in einer Tafel vereinigte, in welcher die Logarithmen vom größten zum kleinsten abnehmen. Diese „Hilfstafel"[3]) hat er bis zu $\frac{1}{10^{19}}$ fortgeführt. Den zu einem gegebenen Logarithmus, z. B. zu 0,463 ... gehörigen Numerus findet man dann, indem man die Faktoren von $10^{0,4} \cdot 10^{0,06} \cdot 10^{0,003} \ldots$ in jener Tafel aufschlägt und miteinander multipliziert, was durch die Vielfachen in der Tafel erleichtert wird. Auch die umgekehrte Aufgabe läßt sich, wie Bürja zeigt, mit der Hilfstafel leicht lösen[4]).

Die zweite Methode, die er mitteilte, diente dazu, jeden Loga-

---

males ou Tables des logarithmes ... revues, augmentées et publiées, par J. B. J. Delambre, Paris, an IX (1800/1), klein-8°.

[1]) Nouvelles tables trigonométriques calculées pour la division décimale du quart de cercle, Berlin 1799, 8°. [2]) Der selbstredende Algebraiste 1786 und Mémoires de l'Acad. de Berlin 1786/87 (publiziert 1792), p. 433—478, und kürzer im Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik von J. Bernoulli und Hindenburg 1786, p. 90—105. [3]) A. a. O., p. 456—478. Das Verfahren ist wahrscheinlich Long nachgebildet, der es in P. T. 1714, XXIX, Nr. 339, p. 52—54 gab. [4]) Dem Gedanken, wenn auch nicht der Form nach dieselbe Methode hatte schon Brook Taylor 1717 in den P. T. Vol. XXX, Nr. 352, p. 618—622, entwickelt.

rithmus einer Zahl ohne Tafel zu finden und beruhte auf der Darstellung desselben durch einen Kettenbruch. War z. B. der Logarithmus von 262144 zur Basis 128 zu bestimmen, so setzte man $128^{p+\frac{1}{q}} = 262144$, daraus folgt sofort $p = 2$, und hiermit leicht $16^q = 128$; ist jetzt $q = r + \frac{1}{s}$, so folgt wieder $r = 1$ und hiermit $8^s = 16$ usw., so daß sich schließlich der gesuchte Exponent in der Form $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = 2\frac{4}{7}$ darstellt. Fast genau die gleiche Methode hat 1795 der Amerikaner David Rittenhouse (1732—1796) gegeben[1]), ob mit oder ohne Kenntnis von Bürjas Abhandlung, läßt sich wohl nicht mehr feststellen.

In allen Tafelwerken jener Zeit wurde natürlich, wie auch heute noch, der Zahl π gedacht; so finden sich z. B. in Lamberts Sammlung (Tafel XXIV) π, $\log \pi$, $\frac{1}{\pi}$, $\sqrt{\pi}$ auf 18 Dezimalen angeführt, und Vega gab in seinem Thesaurus (p. 633) π auf 140 Stellen an, von denen 136 richtig sind. Die Methoden, mit denen man π berechnete, beruhten hauptsächlich auf dem Kunstgriff, den zuerst Machin angewendet hatte (vgl. III², S. 364—365), nämlich $\frac{\pi}{4}$ in die Summe zweier oder mehrerer Bögen mit rationalen Tangenten zu zerlegen, die dann einzeln mit der Arkustangensreihe berechnet wurden. Euler war es, der zuerst diesen Gedanken wieder aufgriff und auf das vollkommenste ausbeutete, indem er schon 1737[2]) durch Einführung spezieller Zahlenwerte in die allgemeine Formel

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{p} = \operatorname{arctg}\frac{1}{p+q} + \operatorname{arctg}\frac{q}{p^2+pq+1}$$

solche Zerlegungen vornahm und außerdem die Reihe

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{ax-y}{ay+x} + \operatorname{arctg}\frac{b-a}{ab+1} + \operatorname{arctg}\frac{c-b}{cb+1} + \cdots$$

herstellte, die z. B. für $\frac{x}{y} = 1, a, b, c, \ldots$ gleich den ungeraden Zahlen der Zahlenreihe die Reihe

---

[1]) Method of raising the common Logarithm of any Number immediately (gelesen am 12. August 1795). Transactions of the American philosophical Society, IV, Philadelphia 1799, p. 69—71, Nr. IX. [2]) De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. Comment. Acad. Petrop. IX, 1737 (erschienen 1744), p. 100.

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 9} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 16} + \cdots$$

lieferte. Auf solche auch vom analytischen Standpunkt interessante Reihen kam er später (1762/63) noch einmal zurück[1]), indem er sich mit ihrer Summation beschäftigte. Daran anschließend hat dann Johann Friedrich Pfaff (1765—1825), Universitätsprofessor zu Helmstädt und dann zu Halle, diese Reihenkategorie von allgemeinerem Standpunkt systematisch untersucht[2]) und zu den schon von Euler summierten Reihen auch noch solche hinzugefügt, deren Summe durch einen Bogen ausgedrückt wird, dessen Tangente transzendente Größen einschließt.

Eulers Formeln wurden vielfach zur Berechnung von π benutzt (vgl. S. 299, 300). So hat z. B. Vega das oben angeführte Resultat aus der Eulerschen Formel $\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{3}{79}$ gewonnen, wozu er noch zur Kontrolle $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ nahm, und Karl Buzengeiger (1771—1835), zuerst Magister in Ansbach, dann Professor der Mathematik in Freiburg im Breisgau, gab die auf ähnliche Weise gebildete neue Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 8\operatorname{arctg}\frac{1}{10} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{515} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$ [3])

an, die auf sehr rasch konvergente Reihen führt. Ebenso teilte Ch. Hutton, dem wir schon wiederholt begegneten, drei ähnliche Zerlegungen von $\frac{\pi}{4}$ mit[4]), berechnete aber die Teilbögen nicht mit der gewöhnlichen Arkustangensreihe, sondern mit der viel rascher konvergenten Reihe:

$$\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \cdots\right\},$$

die er durch Transformation aus ersterer erhielt. Euler hatte übrigens diese Reihe schon 1755 in seiner Differentialrechnung aufgestellt[5]) und teilte sie 1779 der Petersburger Akademie mit, indem er durch Einführung derselben in die Formel

---

[1]) De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt. Novi Comment. Acad. Petrop. IX, 1762/63 (erschienen 1764), p. 40—52. [2]) De progressionibus arcuum circularium etc., wie bei Euler, Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792 (vorgelegt 1795, erschienen 1797), p. 123—184. [3]) Klügel, Wörterbuch I, p. 666. [4]) P. T. 1776, p. 476. Vgl. über die weitere Geschichte dieser Reihe, die wiederholt neu gefunden wurde, Glaisher in Messenger of Mathematics II, 1873, p. 119 ff. [5]) Pars II, Kap. 2, p. 318.

$$\pi = 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{79}$$

die äußerst bequeme Formel:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{28}{10} \left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \cdots\right\} + \frac{30366}{100000} \left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \cdots\right\}$$

erhielt. Mit ihr berechnete er, nach seiner Angabe, π in einer Stunde auf 20 Dezimalen[1]).

In einer anderen Abhandlung vom 17. Juni desselben Jahres[2]) bildete Euler die leicht zu beweisende Gleichung:

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{2-x} = 2\int_0^x \frac{dx}{4+x^4} + 2\int_0^x \frac{x\,dx}{4+x^4} + \int_0^x \frac{x^2\,dx}{4+x^4},$$

entwickelte diese Integrale in Reihen, setzte $x = \frac{1}{2}$ und dann $= \frac{1}{4}$ und erhielt dadurch Reihen für $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ und $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$, welche in die Gleichung $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$ eingesetzt ebenfalls einen zur Berechnung von π brauchbaren Ausdruck lieferten.

Zu einer anderen interessanten Abhandlung über das hier einschlägige Gebiet wurde Euler durch einen von Descartes gemachten Versuch der Kreisrektifikation veranlaßt[3]) (vgl. S. 259, 260). Zu diesem Zweck hatte Descartes an das Quadrat $\widehat{bf}$ (Fig. 25) das Rechteck $\widehat{cg}$, dessen vierte Ecke auf der Diagonale liegt und dessen Fläche gleich $\frac{1}{4}$ des Quadrates ist, angelegt, an dieses wieder ein Rechteck $\widehat{dh} = \frac{1}{4}$ des vorhergehenden usw. Dadurch war er schließlich zu einem Grenzpunkt x gelangt, der so liegt, daß ax dem Durchmesser des gesuchten Kreises gleich wird. Dabei hatte er angegeben, daß ab der Durchmesser des dem Quadrate eingeschriebenen Kreises, ac der Durchmesser des dem Achteck eingeschriebenen, ad jener des dem Sechzehneck eingeschriebenen Kreises usw. ist, so

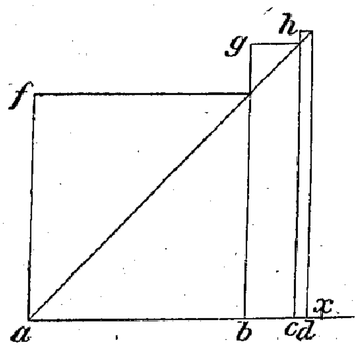


Fig. 25.

[1]) Investigatio quarundam serierum, Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793, p. 133 ff., gelesen am 7. Juni 1779 (erschienen 1798), p. 133. In einem anderen Aufsatze, der erst 1862 in den Opera posthuma L. Euleri von P. H. Fuß et Nic. Fuß I, p. 288 veröffentlicht wurde, wird diese Reihe noch auf einem etwas anderen Wege abgeleitet. Dort findet sich obige Angabe für die Zeit der Berechnung. [2]) Nova Acta Acad. Petrop. XI, p. 150. [3]) Oeuvres de Descartes

daß endlich ax der Durchmesser des dem Polygon mit unendlich vielen Seiten eingeschriebenen Kreises, d. h. der gesuchte Kreisdurchmesser selbst wird. Euler beweist nun zunächst die Richtigkeit dieser Konstruktion und leitet dann aus ihr die Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{32} + \cdots = \frac{4}{\pi}$$

ab. Diese Reihe gibt ihm aber sofort Veranlassung, die Summe der allgemeineren Reihe $\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} + \cdots$ zu suchen, die er auch leicht in der Form $\frac{1}{\varphi} - 2\operatorname{ctg} 2\varphi$ findet. Aus dieser Gleichung wird dann unter anderem auch die Faktorenfolge gewonnen:

$$\frac{2\varphi}{\sin 2\varphi} = 1 : \left(\cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{4} \cos\frac{\varphi}{8} \cdots\right),$$

die im speziellen für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ jene schon Vieta bekannte Beziehung liefert (vgl. II[2], S. 595), welche als das erste unendliche Produkt gilt[1]).

Auch Eulers jüngerer Zeitgenosse Lambert hatte schon 1758 an die Quadraturversuche des Gregorius a St. Vincentio (II[2], Kap. 81) anknüpfend eine Ableitung dieser Faktorenfolge in einer Abhandlung[2]) gegeben, auf deren Inhalt wir, soweit er unser Gebiet betrifft, noch kurz eingehen wollen. Er sagt daselbst, da die Länge eines Kreisbogenstückes $AM = v$ (Fig. 26) zwischen dem Sinus $AS = y$ und der Tangente AF liegt, so wird es auf der Verlängerung des Durchmessers $AB = 2$ einen Punkt P in der Entfernung $AP = z$ geben, der mit M verbunden, einen Punkt Q auf AF liefert, der zwischen S und F liegt. Bezeichnet man MS mit $x = \operatorname{sinvers} v$, so ergibt sich leicht die Beziehung $z = \frac{vx}{v-y}$. Wenn man in dieser x und y durch die bekannten Reihen ersetzt, so findet man zunächst für z die Reihe

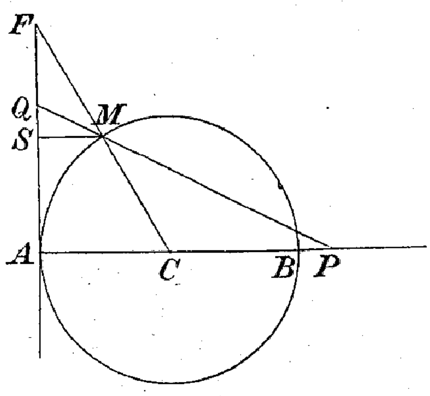


Fig. 26.

Ed. Cousin, XI, p. 442—443. Eulers Abhandlung führt den Titel: Annotationes in locum quondam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem. Nov. Comment. Acad. Petrop. VIII, 1760/61, p. 157ff. (erschienen 1763). Später gab auch J. Fr. de Tuschio a Fagnano in Acta Eruditorum 1771, p. 406—418 einen Beweis der Konstruktion.

1) Übrigens hat Euler diese Formel von anderen Betrachtungen ausgehend schon früher gefunden: Comment. Acad. Petrop. IX, 1737 (erschienen 1744), p. 234—235. Sie tritt auch wieder auf in Opuscula analytica L. Euleri, Petropoli 1783, 4°, p. 345. 2) Observationes variae in mathesin puram. Acta Helvetica III, Basileae 1758, § 10, p. 132.

$$z = 3 - \frac{1}{10} v^2 - \frac{1}{4200} v^4 + \frac{1}{126000} v^6 + \cdots,$$

durch welche P so bestimmt wird, daß $AQ = v$ ist. Nimmt man ferner $z = 3$ an, so ergibt der hierdurch bestimmte Punkt P eine sehr einfache und genaue Methode zur Rektifikation des Bogens $v = AM = AQ$. Lambert weist die Richtigkeit seiner Behauptung dadurch nach, daß er mit seiner Formel eine kleine Tabelle berechnet und die Unterschiede der gefundenen und der wahren Werte bestimmt. Weiter ergibt sich aus der Figur die Proportion

$$QS : SF = (1 - x) : (3 - x),$$

aus welcher für sehr kleine x $(x = 0)$ folgt, daß $FQ = 2SQ$ oder $\operatorname{tg} v - v = 2(v - \sin v)$ ist, woraus

$$\operatorname{arc} v = \frac{\operatorname{tg} v + 2 \sin v}{3} \quad \text{und} \quad \pi = \frac{180^0}{v^0} \frac{\operatorname{tg} v^0 + 2 \sin v^0}{3}$$

sich viel genauer ergibt, als wenn man, wie gewöhnlich, das arithmetische Mittel zwischen $\operatorname{tg} v$ und $\sin v$, oder den Seiten der um- und eingeschriebenen Polygone bildet.

Nicht unerwähnt wollen wir auch die Versuche lassen, welche im fernen Japan in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gemacht wurden, um die Zahl π auf eine größere Anzahl Dezimalen zu bestimmen, und welche beweisen, daß die Japaner damals im Besitze von Methoden waren, die im Abendlande der Erfindung des Infinitesimalkalküls unmittelbar vorhergingen.

Japans berühmtester Mathematiker Kōwa Seki (vgl. III², S. 669) gilt als der Erfinder einer solchen Methode, und aus der von ihm gegründeten Schule gingen mehrere Mathematiker hervor, die seine Erfindung ausbauten. Bemerkenswert sind einige unendliche Reihen für $\arcsin x$, welche sich bei verschiedenen japanischen Mathematikern finden. So wurde in dem Werke Ho en san Kyo von Yoshihide Matsunaga von 1739 der Wert von π auf 50 Stellen für $x = \frac{1}{2}$ aus der gewöhnlichen Arkussinusreihe berechnet, die Newton (III² S. 74) in seiner Analysis per aequationes abgeleitet hatte[1]). Ajima (oder Yasujima?)[2]) aber (etwa 1737—1797) gab außer jener Reihe auch noch die zwei folgenden:

$$\frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}\right) = x - \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} \frac{1}{2\beta+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\beta - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2\beta} x^{2\beta+1}$$

---

[1]) Sie steht übrigens auch bei Wallis „De Algebra Tractatus", Opera II, Oxoniae 1693, p. 383. [2]) Vgl. über diese Lesart den Aufsatz von Y. Mikami im Jahresbericht der Mathematikervereinigung, 1906, p. 254.

und

$$\arcsin x = \sqrt{1-x^2} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2\beta}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\beta+1)} x^{2\beta+1}.$$ [1])

Außerdem finden sich in japanischen Schriften aus jener Zeit auch Darstellungen der Zahl π durch Näherungswerte von Kettenbrüchen[2]). So stammt von Y. Arima aus dem Jahre 1766 der auf 12 Stellen richtige Näherungsbruch $\frac{5419351}{1725033}$ und der auf 30 Stellen zutreffende Bruch $\pi = \frac{428224593349304}{136308121570117}$, während G. Kurushima († 1760) $\pi^2 = \frac{98548}{9985}$ angab.

Versuche, den Charakter der Zahl π zu ergründen, waren schon von De Lagny (III², S. 120) gemacht worden. Derselbe war bereits 1719 zu dem wichtigen Satze gelangt[3]), den er allerdings nicht beweisen konnte, daß, wenn die Tangente eines Bogens eine rationale Zahl ist, der Bogen selbst irrational sein muß, und hatte daraus die Folgerung gezogen, daß die Kreisrektifikation durch Radius und Tangente geometrisch unmöglich sei[4]). Dieser Satz war es, der Lambert zum Ausgang seines Beweises für die Irrationalität von π im Jahre 1767 diente[5]), und den er „außerordentlich scharfsinnig und im wesentlichen einwandfrei" gestaltete[6]).

Lamberts Zeitgenossen scheinen allerdings entweder seine Arbeit nicht beachtet oder die Bedeutung des Schrittes, den er in der Erkenntnis des Charakters der Zahl π durch diesen exakten Beweis ge-

---

[1]) Auf die hier mitgeteilten Reihen ist von P. Harzer: „Die exakten Wissenschaften im alten Japan", Rede gehalten zu Kiel am 27. Januar 1905, hingewiesen worden (p. 33—34). Daselbst werden auch die Quellen, aus denen Harzer geschöpft hat, genau angegeben. [2]) Harzer, a. a. O., p. 29, Anmerk. 5. Vgl. auch T. Hayashi, The values of π by the japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries. Bibliotheca math. 1902, p. 273—275. [3]) Mémoires de l'Acad. de Paris, 1719, p. 141. [4]) Ebenda, 1727, p. 124—125. [5]) Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. Lu en 1767. Histoire de l'Acad. de Berlin 1761 (sic!), p. 265—322, und in populärer Darstellung in den Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik II, p. 140—169. [6]) Man sehe über den Wert von Lamberts Beweis: A. Pringsheim, „Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π"; Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. bayr. Akad. der Wissensch. 1898, XXVIII, Heft 2, p. 325—337. Hierzu sei noch bemerkt, daß Lambert in seiner Erkenntnis noch weiter ging, indem er in einem Briefe an Holland (Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von J. Bernoulli, I, p. 254) sagt: „Die Art, wie ich dies bewiesen habe, läßt sich so weit ausdehnen, daß zirkuläre und logarithmische Größen nicht Wurzeln von rationalen Gleichungen sein können".

tan hatte, nicht erkannt zu haben, sonst hätte nicht selbst Euler noch 1771 seine ziemlich unfruchtbaren Spekulationen über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, die er bereits in der Introductio[1]) an die Lösung transzendenter Gleichungen, wie $s = \cos s$, $s = \sin 2s$ usw. angeknüpft hatte, wiederholen können[2]). Der ganze Charakter von Lamberts auf absolute Exaktheit zielender Beweisführung steht eben so ganz außerhalb der fast nur auf formale Erweiterung der Mathematik hinzielenden Tätigkeit seiner Zeitgenossen, daß eine Nichtbeachtung derselben wohl verstanden werden kann.

Haben wir uns mit der Besprechung der Methoden zur Berechnung der Zahl π bereits einen Übergriff in das Gebiet der Analysis erlaubt, so müssen wir auch noch in kurzem der übrigen Errungenschaften auf diesem Gebiete gedenken, die mit den trigonometrischen Funktionen in Zusammenhang stehen. Wir erinnern uns (III², S. 716 bis 717), daß Euler schon in der Introductio 1748 und noch früher (1743)[3]) die Summe einer endlichen Zahl von Sinus oder Kosinus, deren Argumente in arithmetischer Progression fortschreiten, auf nicht einwandsfreie Weise gewann, indem er sich divergenter unendlicher Reihen bediente. Die einfachen und stichhaltigen Ableitungen, deren wir uns heute noch bedienen, haben erst Klügel[4]), Cagnoli[5]) und später wieder Francesco Pezzi[6]) († 1813), Ingenieur und Professor der Mathematik an der Universität Genua, gegeben, und Cagnoli hat auch noch die Summen der n^{ten} Potenzen der Sinus und Kosinus solcher Winkel berechnet, nachdem schon 1748 Gregorio Fontana (1735—1803), der Nachfolger Boscovichs an der Universität Pavia war, eine Ableitung dieser Summen mit Hilfe des Imaginären mitgeteilt hatte[7]). Aber auch diese Gelehrten glaubten noch alle die Reihen ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz ins Unendliche fortsetzen zu dürfen.

Auch für die längst bekannten Formeln, welche den Sinus und den Kosinus ganzzahliger Vielfachen eines Winkels durch die Potenzen der Sinus und Kosinus oder einer dieser Funktionen allein ausdrücken, haben Klügel[8]), Cagnoli[9]) und andere neue Ableitungen gegeben,

[1]) B, II, Kap. 22. [2]) Considerationes cyclometricae. Novi Commentarii Acad. Petrop. XVI, p. 160 ff. [3]) Miscellanea Berolinensia VII, p. 129. [4]) Analytische Trigonometrie 1770, p. 39—43. [5]) Trigonometria, 2. Aufl., p. 117—118. [6]) Memorie della Società Italiana XI, 1803, p. 21 ff. [7]) Ebenda, II, 1784, p. 424 ff. [8]) Analytische Trigonometrie 1770, p. 46—65. [9]) Cose trigonometriche, Memorie della Società Italiana VII, 1794 und Trigonometria, p. 104—108, woselbst übrigens wieder kritiklos unendliche Reihen benutzt werden. In demselben Kapitel IX werden auch die umgekehrten Formeln für $\sin x^n$ und $\cos x^n$ mittels des Imaginären abgeleitet.

von denen die des Irländers John Brinkley (1797)[1]) die vollständigste ist, da derselbe das Koeffizientengesetz mittels des Schlusses von n auf $n+1$ bewies.

Für ein ganzzahliges gerades oder ungerades n liefern diese Entwicklungen bekanntlich direkt die Teilungsgleichungen der trigonometrischen Funktionen. Nun wußte man schon seit Wallis, daß im ersteren Falle $2n$, im letzteren n Wurzeln vorhanden sind, auch hatten bereits Euler 1748 (vgl. III², S. 716) und noch viel eingehender Kästner 1756[2]) Untersuchungen über Zeichen und Gruppierung dieser Wurzeln angestellt, dennoch glaubte D'Alembert 1768 noch einmal auf diese Fragen zurückkommen zu müssen[3]) und Klügel, Karsten und andere folgten ihm nach. Der erstere der beiden zuletztgenannten Männer schloß an seine Überlegungen auch die Produktdarstellung von $\sin nz$ und $\cos nz$ für ein ganzzahliges n an und fügte[4]) noch eine stichhaltige Ableitung des Satzes von Cotes bei, die als eine Erweiterung und Vereinfachung des schon von Johann Bernoulli mitgeteilten Beweises[5]) angesehen werden muß.

Was die Ableitung der Potenzreihen für $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ anlangt, so wurde gewöhnlich die uns schon aus III², S. 708 bekannte Methode Eulers angewendet, oder man bestimmte in der mit unbestimmten Koeffizienten angenommenen Reihenform die Koeffizienten mit Differentialrechnung; L'Huilier[6]), der so elementar als möglich verfahren wollte, verwendet hierzu die Differenzenrechnung. Eine elementare Ableitung gab auch 1798[7]) Jakob de Gelder (1765—1848), Professor in Leyden. In umfassendster Weise aber hat den analytischen Teil der Trigonometrie Pietro Ferroni mit Hilfe des Infinitesimal-

---

[1]) Transactions of the R. Irish Academy VII, 1800, p. 27ff. Brinkley erwähnt hier, daß Waring in seinen Curvarum algebraicarum proprietates, 1772, Theor. 26 für ein ungerades n mit seinem Satze über die Potenzsummen zuerst einen exakten Beweis gegeben habe, daß diese Methode aber für ein gerades n versage. [2]) Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulares definientibus, Dissertatio 1756, Altdorfii 1771. Über die algebraische Auflösbarkeit der einen speziellen Fall bildenden Kreisteilungsgleichungen sah man damals noch sehr unklar; so sagt Mosdorff, Acta Erud. 1751, man werde wohl kaum jemals dazu kommen, zu untersuchen, wann sich diese Gleichungen algebraisch lösen lassen, und Klügel betont ebenfalls a. a. O., p. 66, daß die trigonometrischen Tafeln die Auflösung der Teilungsgleichungen geben, welche die Algebra bis jetzt nicht allgemein geben kann. [3]) Opuscules V, p. 222—227. [4]) Analytische Trigonometrie, Kap. 4, Nr. XXXI. [5]) Opera IV, p. 67. [6]) P. T. 1796, p. 142 und Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae 1795, 4°, Kap. 3. [7]) Over de reeksen, dienende om de rapporten van de cirkelbogen tot derzelver sinussen etc. zoonder behulp der differentiaal- och integraal-rekening afteleiden. Verhandelingen van het Genotschap te Rotterdam XII, 1798.

kalküls in seinem großen Werke „Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometriae sublimis theoria nova methodo pertracta". Florenz 1782, 4°,[1]) behandelt. Der Autor hat gehalten, was er im Titel seines Werkes versprochen, indem er eine vollständige Theorie der Exponential- und trigonometrischen Größen entwickelte, wobei er die entsprechenden Formeln für Kreis- und Hyperbelfunktionen stets nebeneinander stellte.

Die Reihendarstellungen der ersteren erhielt er von der Reihe für z^{iv} ausgehend, wo er zunächst dem z einen ganz beliebigen Wert erteilte und dann $z = e$ oder $= C$ setzte, wie er die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnete. Dadurch erhielt er die seit Euler bekannten Darstellungen des Sinus und Kosinus durch die Exponentialfunktion und die Fundamentalformel $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, die ihn für $\sin x = v$, $\cos x = \sqrt{1 - v^2}$ zur Gleichung

$$xi = \log(iv + \sqrt{1 - v^2})$$

führte. Indem er dann für die Wurzel die binomische Reihe einführte und den Logarithmus durch die bekannte Reihenentwicklung ersetzte, gewann er auch die Reihe für $\arcsin v$. Bei Ableitung dieser Reihe, deren Koeffizientengesetz übrigens nicht bewiesen wird, findet sich auch der Versuch, die Konvergenz mittels des Quotienten zweier aufeinander folgender allgemeiner Glieder zu bestimmen, ein Beweis dafür, daß am Ende des 18. Jahrhunderts die Erkenntnis der Notwendigkeit, die Bahn rein formaler Entwicklungen zu verlassen, sich allmählich einstellte.

---

[1]) Kap. 5—8.