UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Cajori, Florian** (1859 – 1930)

Titel: **Arithmetik, Algebra und Zahlentheorie von 1759 bis 1799**

Quelle: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik
Band 4. Von 1759 – 1799 / hrsg. von Moritz Cantor. – 1908, S. 37 – 198
Signatur UB Heidelberg: L 84-6::4

Orig.-Titel: Abschnitt XX.
Arithmetik — Gleichungslehre — Zahlentheorie

Inhaltsverzeichnis

Die Zahlen in eckigen Klammern geben die Seitennr. der PDF-Datei an.

ABSCHNITT XX

ARITHMETIK · GLEICHUNGSLEHRE ZAHLENTHEORIE

VON

F. CAJORI

Arithmetik.

Die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts war für Frankreich eine Zeit der Aufklärung, in welcher kühne Schriftsteller neue Ideen entfalteten. Die französische Revolution zerstörte die Feudalinstitute des Mittelalters in allen Gebieten der weltlichen Einrichtungen. Die Wissenschaften und das Schulwesen wurden von diesen welthistorischen Ereignissen tief beeinflußt. Die Schriften von Rousseau und Condillac, von den Enzyklopädisten und von Condorcet brachten neue Gedanken, nicht nur über philosophische Sachen im allgemeinen, sondern auch über die Erziehung und Mathematik im einzelnen. Ihr Einfluß auf den Elementarunterricht in der Mathematik wurde gegen das Ende des Jahrhunderts überwiegend. Diese Zeit weist in Frankreich neue Rechenbücher auf, deren Autoren sich auch mit der höheren Mathematik beschäftigten. Dennoch finden wir, daß hier, wie auch in anderen Ländern, veraltete Rechenbücher noch großen Absatz fanden. Das bekannteste unter den letzteren war L'Arithmétique du S^r Barrême .. augmentée .. de plus de 190 pages. par N. Barrême, Paris 1764, Rouen 1779. Die erste Auflage von François Barrême erschien 1677. Nicolas Barrême war „ein Nachkomme des Autors", wie wir aus der Auflage von 1713 entnehmen, welcher den Umfang dieses populären Werkes verdoppelte und deshalb erwähnt zu werden verdient.

Ein zweites Werk dieser Art war L'Arithmétique en sa perfection .. par F. Le Gendre, arithméticien. Die erste Auflage erschien in Paris 1646, eine zehnte 1691. Während des 18. Jahrhunderts wurden wenigstens sieben gedruckt. Eine erschien zu Paris 1774, eine andere zu Limoges 1781. Eine Vergleichung der Ausgabe von Lons le Saulnier 1812 mit denjenigen von 1774 und 1705 zeigt, daß die drei sich nur im Anhang voneinander unterscheiden und daß der Hauptteil während mehr als 100 Jahren ohne nennenswerte Abänderungen beharrte. Ein solches Beharren beim Alten in diesen und anderen Schulbüchern wirft ein düsteres Licht auf die Schulverhältnisse damaliger Zeit.

Weder in Barrême noch in F. Le Gendre findet man Dezimalbrüche; dieselben wurden, soweit wir ermitteln können, in praktischen französischen Rechenbüchern der Zeit beinahe ganz vernachlässigt. Nur gegen Ende des Jahrhunderts, als das metrische System Aufnahme fand, wurden Dezimalbrüche auch in Werken für Geschäftsleute eingeführt. Citoyen Blavier veröffentlichte 1798 in Paris ein Barrême décimal[1]) und die späteren Ausgaben von F. Le Gendres Büchlein enthalten einen Anhang über Dezimalbrüche.

Ein Werk, welches in den höheren Schulen in Frankreich, und durch Übersetzungen auch in anderen Ländern, während der zweiten Hälfte des Jahrhunderts weite Verbreitung erhielt, waren die 1741 in Paris gedruckten Leçons élémentaires de mathématiques des Astronomen Nicolas Louis de La Caille[2]) (1713–1762). Der erste Teil enthält eine kurzgefaßte, theoretische Arithmetik. Eine verbesserte und erweiterte Ausgabe des La Cailleschen Werkes wurde 1770 zu Paris von Abbé Marie, Professor der Mathematik an dem collége Mazarin, veranstaltet.

Unter den neu verfaßten arithmetischen Werken dieser Zeit sind diejenigen der bedeutenden Mathematiker Bézout, Bossut und Lacroix hervorzuheben. Étienne Bézout (1730—1783) wurde 1763 zum „examinateur des gardes de la marine" ernannt. Man hat von ihm zwei mathematische Schulbücher, Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Paris 1764 bis 1769, und Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, Paris 1770—1772, die in mehreren Auflagen erschienen und weite Verbreitung fanden. Der arithmetische Teil letzteren Werkes ist demjenigen des ersten, mit Ausnahme einiger ausgelassener Paragraphen, Wort für Wort gleich. Er wurde auch separat gedruckt. Auf das kaufmännische Rechnen legt Bézout wenig Nachdruck; er gibt sich viel Mühe, die theoretischen Teile klar zu machen, ohne den Schüler durch schwerverständliche Beweise abzuschrecken.

Charles Bossut (1730—1814) verfaßte einen Cours complet de mathématiques, dessen erster Teil, ein Traité élémentaire d'arithmétique, 1772 erschien. Er enthält eine Vorrede über die Grundideen der Arithmetik und der Algebra. Diese Arithmetik ist in gedrängtem Stile geschrieben und enthält nur weniges über Geschäftsrechnung. Daher fand es auch nur geringe Verbreitung.

Während in französischen Werken über das praktische Rechnen

---

[1]) A. De Morgan, Arithmetical Books, London 1847, p. 75. [2]) Vgl. „Intorno ad un' opera dell' Abate Nicolò Luigi de La-Caille" in B. Boncompagnis Bullettino, Tomo V, Roma 1872, p. 278—293.

Dezimalbrüche vernachlässigt oder ganz weggelassen werden, erhalten sie in Kompendien der Mathematik gehörige Beachtung. So gibt sich Lemoine in seinem Traité élémentaire de mathématiques pures, Paris 1790 (3e éd. 1797), Mühe dieselben gleich von Anfang aufzunehmen und die Grundoperationen für ganze Zahlen und Dezimalbrüche nebeneinander zu entwickeln. Edmé Marie Joseph Lemoine (d'Essoies) (1751—1816) war vor der Revolution Advokat, Lehrer des jungen Adels und Professor der Mathematik und Physik. Das obige Elementarwerk war für Schüler bestimmt, die Bézouts Werke zu umfassend fanden.

Weitreichenden Einfluß auf das Studium aller mathematischen Fächer hatte Sylvestre François Lacroix (1765—1843), welcher großen Anteil an der Organisation der öffentlichen Erziehung und an der Vorbereitung passender Schulbücher hatte. Im Jahre 1797 erschien zu Paris sein Traité d'arithmétique, welcher für den Gebrauch in der école centrale bestimmt war.

Gegen Ende des Jahrhunderts erschienen einige Arbeiten, welche neue Gedanken philosophischer Natur über arithmetische Operationen und die Sprache der Arithmetik und Algebra enthielten. Der erste uns bekannte Versuch, neue Grundoperationen einzuführen, ist von dem Marquis Fortia (1756—1843). Mit den Einschränkungen der gewöhnlichen Arithmetik nicht zufrieden, sucht er in seinem Traité d'arithmétique[1]), Avignon 1781, den Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division eine unendliche Anzahl höherer Operationen anzuschließen. Die sukzessive Multiplikation einer Zahl mit sich selbst nennt er puissanciation. Soll die Summe von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 gefunden werden, nennt er 1 den multiplicande, 8 den multiplicateur, die Summe das produit, mit dem Wort second hinzugefügt, um die multiplication seconde von der gewöhnlichen zu unterscheiden. Die multiplication seconde gibt hier das produit 36. Dasjenige von 3 mit 8 gibt 108 ($= 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24$). Ein Beispiel einer puissanciation seconde hat man in der Auffindung des Produkts der Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, 64, welches sich als das Produkt der ersten und letzten Zahl, puissancié durch die Hälfte der Anzahl von Zahlen, ergibt. Wenn in einer arithmetischen Progression $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + (n - 1)d)$ nicht nur $a = d$, sondern auch $a = n$ ist, gelangt man zur multiplication troisième. Das produit troisième, von 5 mit $2 = 5 + (5 + 10 + 15 + 20 + 25)$ $= 80$, von 5 mit $3 = 5 + (5 + 10 + 15 + 20 + 25) + (5 + 10 + \cdots + 50)$

[1]) Uns liegt die zweite Auflage von 1790 vor.

$= 5 + 75 + 275 = 355 = 5 +$ produit second von 5 mit $5 +$ produit second von 5 mit 10.

Man könne so fortfahren zu Operationen noch höherer Grade. Jede derselben habe ihre umgekehrte Operation. Fortia definiert nun eine numération seconde, worin die Einheit complexe und continue ist, complexe, weil sie aus Teilen bestehe, und continue, weil die Anzahl dieser Teile unendlich sei. Mit sich selbst multipliziert gebe die Einheit die Zahl 2; 2 mit 1 multipliziert gebe 3 usw. Wenn die Einheit der nombres continus 2 ist, dann ist der nombre continu 2 gleich 4 und der nombre continu 3 gleich 8. Die einfachste Operation der numération seconde ist die Multiplikation, welche der Addition in der gewöhnlichen Numeration entspricht. Sollen die nombres continus 481 und 1321 miteinander multipliziert werden, so ist das Resultat 1802. Ähnliches für die Division. $3421 \div 2212 = 1209$. Besteht die Einheit der nombres continus aus 3 gewöhnlichen Einheiten, dann ist der nombre continu $2 = 9$, der nombre continu $3 = 27$ usw. Wird nun 2 puissancié durch 3, so erhält man den nombre continu $6 = 729$. In diese numération seconde könne man auch puissances secondes usw. einführen. Fortia gibt dann weitere Auseinandersetzungen von nombres continus, deren Einheit 2 ist, und von höheren Numerationen. Es gelingt ihm aber nicht, dem Leser die Vorzüge seiner neuen Operationen, deren Formeln er der gewöhnlichen Algebra entlehnt, und seiner neuen Sprache überzeugend darzulegen.

Eine Schrift über Arithmetik und Algebra, welche ein Versuch einer Philosophie dieser Wissenschaften ist, wurde von Étienne Bonnot de Condillac (1715—1780) verfaßt. De Condillac war ein scharfsinniger Philosoph, ein Freund von Rousseau und Diderot. Durch ihn fand der Sensualismus des englischen Freidenkers John Locke Eingang in Frankreich und, über diesen hinausgehend, weitere Ausbildung. Alle Theorien von angeborenen Ideen verwerfend, nahm Condillac nur die Wahrnehmungen der fünf Sinne für Wahrheit an. Er erklärte die Funktionen des Denkens als Arten des Empfindens, die durch Übung vervollkommnet werden, und führte alle Verstandestätigkeit auf das Sprachvermögen zurück. Ohne Wörter könnte man keine abstrakten Ideen haben. Uns interessiert sein La Langue des Calculs, à Paris, An VI (1798), welches achtzehn Jahre nach seinem Tode veröffentlicht wurde. Seine metaphysischen Lehren sollten hier auf Arithmetik und Algebra Licht werfen. „Un, deux, trois usw., dies sind also die abstrakten Ideen der Zahlen; denn diese Wörter stellen die Zahlen dar als auf alles anwendbar und als auf nichts angewandt.... Wenn zum Beispiel, nachdem wir un doigt, un caillou, un arbre gesagt haben, wir un sagen, ohne etwas hinzuzufügen, haben wir in diesem Worte un die abstrakte Einheit. Wenn Sie glauben, daß abstrakte Ideen etwas anderes als Namen seien, bitte sagen Sie, wenn Sie können, was ist dieses andere?"[1]) „Sprachen sind nicht Sammlungen zufällig aufgenommener Ausdrücke.... Wenn der Gebrauch jedes Wortes eine Konvention voraussetzt, setzt diese Konvention eine Ursache für die Annahme jedes Wortes und eine Analogie voraus, die das Gesetz angibt, ohne welches es unmöglich wäre dasselbe wahrzunehmen und welches keine absolut willkürliche Wahl zuläßt."[2]) In der Sprache des Rechnens zeigt sich die Analogie klar. Das Zählen lernt man mit Hilfe der Finger. Man zählt bis 10, nimmt dann 10 als höhere Einheit an, fährt dann fort bis 100 usw. „Wenn wir uns aber nicht verirren wollen, müssen wir die Zahlenreihen durch Namen bezeichnen, weshalb die Namen im Rechnen so notwendig sind wie die Finger selbst."[3]) Das Numerationssystem, welches uns die Natur darbietet, zeigt uns jedesmal wie eine Zahl zusammengesetzt ist. Unsere Sprachen haben aber die Analogie nicht befolgt. „Zum Beispiel, wir sagen, soixante et douze; die Finger sagen aber sept dix plus deux, ein Ausdruck, den wir vorziehen, um der Analogie der von der Natur gegebenen Sprache zu folgen."[4]) Condillac betrachtet die Operationsarten in Arithmetik und Algebra im Lichte seiner Theorie von den Analogien. Er findet, daß die Algebra nichts anderes als eine Sprache sei[5]). Diese Ansicht hatte schon früher Clairaut in seinen Élémens d'Algèbre 1746 geäußert, und auch S. F. Lacroix stimmt[6]) derselben bei. Condillac behauptet, daß die Erfindungsmethode nichts anderes als die Analogie selbst sei[7]).

Wie das besprochene Werk die letzte (unvollendete) Arbeit Condillacs war, so ist das Büchlein Moyens d'apprendre à compter surement et avec facilité, par Condorcet, à Paris, 1799[8]), die letzte Schrift dieses berühmten Philosophen und Mathematikers. Es wurde in den letzten Tagen seines Lebens geschrieben, als er, in den Sturz der Girondisten verflochten, in der Nähe von Paris eine Zeitlang umherirrte, bis er erkannt und verhaftet wurde. Condillacs philosophische Studien trugen dazu bei, die Lehrmethode in neue Bahnen zu leiten. Das Büchlein von Condorcet erzielte Ähnliches durch eine klare, unkonventionelle Erklärung unseres Numerationssystems und

---

[1]) Condillac, La Langue des Calculs, 1798, p. 50. [2]) Ebenda, S. 1. [3]) Ebenda, S. 11. [4]) Ebenda, S. 18. [5]) Ebenda, S. 47. [6]) S. F. Lacroix, Essais sur L'Enseignement en Général et sur celui des Mathématiques en particulier, à Paris, An XIV, 1805, p. 235. [7]) Condillac, p. 232. [8]) Zweite Auflage erschien 1800.

der vier Rechnungsarten. De Morgan[1]) beschreibt das kleine Werk als „eine der einfachsten Erklärungen der elementarsten Arithmetik, die je erschienen ist". Das Werkchen besteht aus zwei Teilen. Der erste ist in leicht verständlicher Sprache für Kinder geschrieben. Der zweite Teil enthält philosophische und pädagogische Anweisungen für Lehrer. Manche seiner Ideen stimmen mit denen Condillacs überein. Für vingt setzt er duante und, um die Analogie nicht zu brechen, führt er die alten Bezeichnungen septante, octante und nonante ein. Eine englische Übersetzung des Büchleins wurde 1813 von Elias Johnston in Edinburgh veröffentlicht. Eine dritte englische Ausgabe erschien dort 1816.

Das Studium der praktischen Rechenkunst sollte sich nach und nach durch die Einführung des metrischen Systems bedeutend vereinfachen. Als um die Zeit des Ausbruchs der französischen Revolution der Drang nach Neuerungen in allen Richtungen immer stärker wurde, machte man 1788 den Vorschlag, auch die Gewichts- und Maßsysteme einer radikalen Umformung zu unterwerfen. Viele Städte Frankreichs hatten durch ihre Deputierten um ein gemeinsames Maß für das ganze Land gebeten. In der Sitzung der Pariser Akademie vom 14. April 1790 schlug Brisson vor, ein neues System auf eine natürliche Länge zu gründen, die immer wieder leicht aufgefunden werden könne[2]). Nach einem Antrage von Talleyrand legte die Nationalversammlung am 8. Mai 1790 dem französischen Könige die Bitte vor, den König von England einzuladen, bei der allgemeinen Maßreform mitzuwirken und Kommissare zu ernennen, die in Gemeinschaft mit den französischen die Reform durchführen sollten. Die Nationalversammlung beauftragte zugleich die Pariser Akademie, die französischen Kommissare zu wählen und die Länge des Sekundenpendels unter dem 45. Breitengrade als natürliche Grundlage des Maßsystems anzunehmen. Die Idee eines natürlichen Grundmaßes soll sich zuerst in einem Werke Gabriel Moutons des Jahres 1670 finden[3]).

Durch die Mitwirkung Englands hofften die Franzosen zu erzielen, daß ein neues System in anderen Ländern bessere Aufnahme finden würde. Diese großen kosmopolitischen Ideen sollten aber nicht so bald ausländischen Beifall finden. England lehnte, wahrscheinlich wegen der Hilfe, welche Frankreich den amerikanischen Kolonien in ihrem Freiheitskampfe geleistet hatte, das gemeinsame Vorgehen ab.

---

[1]) De Morgan, op. cit. S. 82. [2]) F. Rosenberger, Geschichte der Physik, Dritter Teil, Braunschweig 1887, S. 94. [3]) Gabriel Mouton, Observationes diametrorum solis et lunae apparentium etc., Lugd. 1670. V. Delambre, Base du système métrique décimal I, 11 und Rudolf Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 623.

Frankreich mußte allein an die Arbeit. Die französische Akademie unternahm es zwei Hauptfragen zu entscheiden: 1) Welche numerische Skale sollte als Verhältnis sukzessiver Ober- und Untereinheiten dienen, 2) welche unveränderliche Größe aus der Natur sollte als Einheit gewählt werden. Über die erste Frage stattete die folgende Kommission am 27. Oktober 1790 Bericht ab: Borda, Lagrange, Lavoisier, Tillet und Condorcet[1]). Für die Untersuchung der zweiten Frage ernannte die Akademie als Kommissionsmitglieder Borda, Lagrange, Laplace, Monge und Condorcet[2]).

Was numerische Skalen anbelangt, hatten Schriftsteller seit Leibniz öfters dem Binär-System Aufmerksamkeit geschenkt. In der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts findet man in vielen Rechenbüchern kurze Besprechungen desselben. Georg Friedrich Brander schrieb zu Augsburg 1767 (2. Aufl. 1775) eine Arithmetica binaria. Nicht selten findet man auch Angaben über das von Erhard Weigel (Bd. III, S. 39, 40) hochgeschätzte tetrabasische System. Das Duodezimalsystem hatte auch seine Anhänger, wie zum Beispiel Comte de Buffon, der dasselbe in seinem Essai d'Arithmétique morale[3]) (um 1760 geschrieben) bespricht.

Die französische Kommission hatte natürlich mit Veränderungen des Zahlensystems nichts zu tun. Selbst die französische Revolution vermochte das dezimale Zahlensystems nicht umzustürzen. Wohl aber mußte die Skale für das neue Maßsystem erwogen werden. Obschon die dezimale Einteilung leicht den Sieg davontrug, weil dieselbe dem Numerationssystem zugrunde liegt, scheinen die Mitglieder der Kommission darüber nicht ganz in Einklang gewesen zu sein. Es ist wohlbekannt, daß Lagrange einer der eifrigsten Verteidiger der reinen Dezimaleinteilung war. „Er wollte", sagt Delambre[4]), „das Dezimalsystem in seiner ganzen Reinheit haben; er konnte es Borda nicht verzeihen, daß dieser die Gefälligkeit gehabt hatte, Viertelmeter machen zu lassen. Er legte auf den Einwand, daß die Basis des Dezimalsystems so wenige Theiler habe, keinen Werth. Er bedauerte beinahe, daß sie keine Primzahl sey, wie 11, weil dann nothwendig alle Brüche einerley Nenner bekommen hätten. Man kann Dieses, wenn man will, für eine Übertreibung halten, die wohl dem besten Kopfe im Eifer des Streits be-

---

[1]) Hist. de l'Acad. pour 1788, Hist. p. 1—6. Vgl. G. Bigourdan, Le Système métrique des poids et mesures, Paris 1901, p. 17. [2]) G. Bigourdan op. cit., p. 17. [3]) Buffon, Suppl. à l'Hist. nat. 4, Paris 1777, p. 116.
[4]) „Nachricht von Lagranges Leben und Schriften" in J. L. Lagranges Math. Werke, deutsch herausgegeben von A. L. Crelle, 1. Bd., S. XLIX.

gegnet; aber er führte die Zahl 11 nur an, um die Zahl 12 abzuwehren, welche die kühneren Neuerer statt der 10 einführen wollten, die überall die Basis des Zahlensystems ist.“ Lagranges Vorliebe für die Zahl 10 und ihre Potenzen zeigte sich schon in Berlin, als er J. C. Schulze mitteilte, „daß es villeicht noch besser gethan seyn würde, wenn man, statt die trigonomischen Linien und ihre Logarithmen für Grade, Minuten und Secunden zu geben, dieselben in Graden und deren tausendste Theile nach Gellibrand Trigonometria Britannica an. 1633 berechnet lieferte“.[1])

Die Kommission für die Wahl einer Längeneinheit stattete am 19. März 1791 ihren Bericht ab. Sie entschied nicht für das von der Nationalversammlung vorgeschlagene Sekundenpendel als Einheit, sondern schlug vor, einem 1790 gemachten Vorschlage des Ingenieur-Geographen Bonne folgend[2]), den zehnmillionsten Teil des Erdquadranten als Urmaß zu wählen. Die Pendellänge wurde verworfen, weil sie von zwei ungleichartigen Elementen, der Schwere und der Zeit, abhänge. Eine dritte Einheit, der Quadrant des Erdäquators, wurde von der Kommission auch besprochen, wurde aber wegen der Schwierigkeit der Messung in unwirtlichen Gegenden von Afrika und Amerika unpassend gefunden.

Am 30. März 1791 wurde von der Nationalversammlung der zehnmillionste Teil des Erdmeridians als Maßeinheit festgesetzt. Méchain und Delambre begannen sogleich die hierzu nötige Gradmessung zwischen Dünkirchen und Montjouy (nicht weit von Barcelona).[3]) Die Arbeit wurde 1792 durch Aufhebung der Akademie eingestellt, aber bald wieder durch Ernennung einer neuen Kommission, bestehend aus Laplace, Lagrange, Berthollet, Borda, Brisson, Coulomb, Delambre, Hauy, Méchain, Monge, Prony und Vandermonde, fortgesetzt. Die Urmaße wurden angefertigt und 1799 dem Archiv der Republik einverleibt[4]). Das Meter war nun gleich 3 Fuß 11,296 par. Linien, oder etwas kürzer als der 1795 vorläufig angenommene Wert von 3 Fuß 11,44 par. Linien.

Um das neue System auch anderen Völkern annehmbar zu machen, wählte man für die Ober- und Unterabteilungen Namen, die nicht der französischen, sondern den neutralen griechischen und lateinischen Sprachen angehören.

Von großem Interesse sind die Elementarvorträge, welche 1795

---

[1]) Johann Carl Schulzes Neue und Erweiterte Sammlung Logarithmischer . . . Tabellen, I. Bd., Berlin 1778, Vorrede. [2]) Rosenberger, op. cit. S. 94. [3]) G. Bigourdan, op. cit. p. 109—155. [4]) Rosenberger, op. cit. S. 94.

auf der École normale in Paris von Lagrange und Laplace[1]) gehalten wurden. Die fünf Vorlesungen von Lagrange behandeln nur die Arithmetik und Algebra; Laplace berührt auch die Geometrie. Beim Nachlesen dieser Vorträge kann man leicht verstehen, wie die jüngeren Zuhörer auf der École normale denselben nicht immer folgen konnten, während Männer, wie S. F. Lacroix, der damals schon selbst als Lehrer berühmt war, denselben mit Begeisterung zuhörten. Schon in der ersten Vorlesung erklärt Lagrange die Kettenbrüche. Nachdem er im zweiten Vortrag die arithmetischen Operationen auseinandergesetzt, schreitet er in den übrigen zur Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades und der numerischen Gleichungen, und zur Verwendung der Kurven bei der Lösung der Probleme vor. Der Name „arithmetische Proportion" scheint ihm sehr ungeeignet, weil der Begriff der Proportion durch den Sprachgebrauch nur für geometrische Proportionen paßt. Man könnte Zahlen wie 3, 5, 7, 9 äquidifferent nennen, ein Ausdruck, den Lacroix in seine Arithmetik und Algebra aufnahm.

Die Ideen von Rousseau, Condillac, Condorcet und Lagrange fanden Ausdruck in der Arithmétique d'Émile, Paris 1795 (2. Aufl. 1802) des Schweizers Isaac Emmanuel Louis Develey[2]) (1764—1839). Er war aus Bretonnière bei Payerne gebürtig, studierte in Genf und war später Professor der Mathematik auf der Akademie zu Lausanne. Das obgenannte Werk enthielt sorgfältige Erklärungen der Grundprinzipien und das metrische System. Es wurde 1799 von der französischen Regierung in die Liste von Elementarwerken für den Schulgebrauch gesetzt. In der zweiten Auflage verweist es auf Schriften von Lagrange, Condillac und Condorcet. Das Werk enthält keine Aufgaben zur Übung.

In Italien sind für die Periode 1759—1799 keine nennenswerten Fortschritte in der Methode des Rechenunterrichts aufzuzeichnen. In kaufmännischen Werken wird nach gegebenen Regeln operiert. Die besten Erklärungen der Arithmetik findet man in den Kompendien der Mathematik von Odoardo Gherli[3]) und De la Caille. Wie früher angegeben, erschienen die Leçons élémentaires de mathématiques von De la Caille 1741 zu Paris. Mehrere Übersetzungen dieser Arbeit wurden in Italien veröffentlicht. Im Jahre 1772 wurde

---

[1]) Journal de l'école polytechnique, tome II, Paris 1812, p. 173—278 (Lagrange), p. 1—172 (Laplace). [2]) L. Isely, Histoire des sciences mathématiques dans la Suisse Française, Neuchâtel 1901, p. 174. [3]) Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure del Padre Odoardo Gherli, Domenicano, professore di Teologia Dogmatica nell' Università di Modena. Resi pubblici da Domenico Pollera, Tomo I, Modena 1770.

zu Venedig eine lateinische Ausgabe dieser Lectiones „ad quintam editionem Parisinam denuo exactae a C. S. e S. J.“ (= Carolo Scherffer, S. J.) herausgegeben. Ausgaben in italienischer Sprache erschienen in Neapel 1761 und 1776[1]), in Venedig 1775 und 1796 als eine Bearbeitung von Ruggero Giuseppe Boscovich, in Florenz 1781, 1782, 1787, 1791, 1796 und noch später. Selten hat ein ausländisches Werk größere Gunst genossen als La Caille in Italien.

Daß Spanien und Portugal in engerem intellektuellen Verkehr mit Italien und anderen Ländern als mit Frankreich standen, ersieht man aus der Mathematik. Zum Beispiel im Lesen der Zahlen findet die französische Definition der billion und trillion keine Gunst. Nur gegen Ende des Jahrhunderts findet man Spuren französischen Einflusses. Ich habe nur einen spanischen[2]) und einen portugiesischen[3]) Schriftsteller vorgefunden, welche im Zahlenlesen die dreizifferigen Perioden wählen.

Das im 18. Jahrhundert hervorragendste unter den älteren spanischen Rechenbüchern ist die Aritmetica practica y especulative von Juan Perez de Moya, einem Mathematiker des 16. Jahrhunderts. Die 13. und 14. Auflage dieses Werkes erschienen zu Madrid 1776 und 1784. Die 13. Auflage ist mit der zu Salamanca 1562 herausgegebenen Wort für Wort identisch. Das Werk ist ein Beispiel der langen Lebensdauer, welche manche arithmetische Schriften genossen haben.

Unter den neueren Rechenbüchern ist die Arismética para negociantes von Don Benito Bails, Madrid 1790, nennenswert. Don Bails wurde 1743 zu Barcelona geboren, war Lehrer der Mathematik an der Akademie von San Fernando und Mitglied der Akademie der Wissenschaften und Künste zu Barcelona. Sein bedeutendstes mathematisches Werk sind die Principios de matematica, deren zweite Auflage 1788 zu Madrid erschien. Seine Werke scheinen in Mexiko Eingang gefunden zu haben, denn 1839 wurden in der Stadt Mexiko die Principios de arismética von D. Benito Bails gedruckt. Bails war auch als Komponist bekannt.

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts findet man in Portugal größere mathematische Tätigkeit als in Spanien. Im Jahre 1772 wurde an der Universität in Coimbra durch die Tätigkeit von José Monteiro da Roche (1735—1819) und José Anastacio da Cunha (1744 bis 1787 ?) neues Leben in den mathematischen Unterricht gebracht[4]).

[1]) Bullettino Boncompagni, Tomo V, Roma 1872, p. 278—293.
[2]) Juan Gerard, Tratado completo de aritmética, Madrid 1798. [3]) José Anastacio da Cunha, Principios Mathematicos, Lisboa 1790. [4]) R. Guimarães, Les mathématiques en Portugal au XIX[e] siècle. Coimbre 1900.

Ersterer gab sich mehr mit Astronomie ab, übersetzte aber aus dem Französischen mathematische Werke von Bézout und mechanische Schriften von Bossut und Marie. Da Cunha lehrte an der Universität bis 1778, zu welcher Zeit er wegen Anklagen des Inquisitionstribunals die Universität verlassen und zwei Jahre im Gefängnis zubringen mußte. Er wurde dann Direktor des collegio de São Lucas und schrieb seine Principios mathematicos, Lisboa 1790, deren letzte Druckseiten er am Abend vor seinem Tode korrigierte[1]). Demnach wäre er 1790 gestorben. Eine französische Übersetzung wurde von seinem Schüler, J. M. D'Abren, zu Bordeaux 1811 herausgegeben. Dieses Werk von nur 302 Seiten enthält in sehr gedrängter Form Arithmetik, Geometrie, Algebra und Infinitesimalrechnung. Überall sucht der Verfasser strenge Beweise einzuführen. Seine Erklärungen enthalten öfters neue und frische Ideen.

Ein Schüler von Da Cunha und Monteiro da Roche, namens José Maria D'Antas Pereira, veröffentlichte zu Lissabon 1798 ein Curso de estudos para uso do commercio, e da Fazenda. Das Werk ist eine „arithmetica universal" im Newtonschen Sinne, welches Rechenkunst und Algebra lehrt. Hauptsächlich von französischen Werken beeinflußt, hat Pereira ein ganz verdienstvolles Buch verfaßt. Während Da Cunha eine Billion als 10^9 definierte, nimmt Pereira dafür den in Portugal damals gebräuchlichen Wert 10^{12} an.

In Dänemark und in Norwegen, letzteres damals eine dänische Provinz, fand das 1680 in Kopenhagen veröffentlichte Rechenbuch von S. Mathissen, Compendium arithmeticum eller Wegviser hvor ved mand paa korteste og netteste maade kand ledsages til Regnekonstens rette brug, großen Beifall. Während des 18. Jahrhunderts folgten mehrere Ausgaben davon[2]).

Ein verdienstvolleres Werk wurde von Ole Andersen Borreby zu Kopenhagen 1765 unter dem Titel Mathesis puerilis eller Dansk skole mathematik herausgegeben. Nur der erste Teil wurde veröffentlicht, woraus man schließen darf, daß die im Buche enthaltenen neuen Ansichten geringen Anklang fanden. Der Autor widerspricht den alten mechanischen Lehrmethoden, macht an die Denkkraft der Schüler einigen Anspruch und sucht das Prinzip der Anschauung zur Anerkennung zu bringen. Sein Buch enthält aber keine Aufgabensammlung[3]).

Unter den älteren Rechenbüchern, welche in Holland zu dieser

---

[1]) Edinburgh Review, Vol. 20, 1812, p. 425; auch Frères-Hoefer, Nouv. Biogr. Générale. [2]) S. A. Christensen, Matematikens Udvikling i Danmark og Norge i det XVIII Aarhundrede, Odense 1895, S. 14—16. [3]) Ebenda, S. 30, 31.

Zeit weite Verbreitung fanden, war De vernieuwde Cyfferinge von Willem Bartjens[1]) (1584—1645), vermehrt und verbessert von Jan van Dam und von „weiteren Mängeln gereinigt" durch Klaas Bosch. Wir haben Ausgaben dieses Büchleins von 1771, 1779, 1792, 1794 angetroffen. Es werden darin das Übersichdividieren und andere alte Operations- und Lehrmethoden angegeben.

Von neuen Werken verdienen besonders hervorgehoben zu werden die Eerste Beginzelen der Reeken-Kunde, Rotterdam 1769, 1782, 1790, und die Institution du calcul numérique et littéral, Haag 1770, von Jean Jacques Blassière (1736—1791), dem zu Haag geborenen Mathematiker und Schüler von Johann Frederich Hennert, dem Autor der Elementa matheseos purae, Trajecti ad Rhenum 1766—68.

Es war das Ziel Blassières, die Theorie und Praktik der Arithmetik zù vereinigen. Sein letztgenanntes Werk ist eine Universalarithmetik, deren zweiter Teil ganz der Algebra gewidmet ist. Die Proportionenlehre wird sorgfältig entwickelt. Der Hauptsatz, daß das Produkt des ersten und letzten Gliedes demjenigen der zwei mittleren Glieder gleich sei, wird so bewiesen: In $A : B = C : D$ ist bewiesen, daß man homologe Glieder mit der gleichen Zahl multiplizieren darf, wodurch man $A \times B : B = C \times B : D$, und dann $A \times B : A \times B = C \times B : A \times D$ erhält. Da nun die zwei ersten Glieder einander gleich sind, müssen es die zwei letzten auch sein. Die Regeldetri und Gesellschaftsregel werden auf die Proportionenlehre gegründet und nach dem Reesschen Mechanismus gelehrt. Der Reessche Ansatz hat also im Lande seiner Geburt auch Freunde gefunden.

Im Reekenboek vor de Nederlandsche Jeugd, Leyden 1794, von Henri Aeneae (1743—1812) wird die „Ketting-Regel" auseinandergesetzt. Aeneae war ein Friesländer von Geburt, studierte auf der Universität Leyden und war 1795 Mitglied der internationalen Kommission für die Reform der Maß- und Gewichtssysteme.

Daß unter holländischen Lehrern bedeutendes Interesse für die Mathematik herrschte, ersieht man aus der Tatsache, daß in Holland das erste Journal der Elementar-Mathematik veröffentlicht wurde. Die Maandelykse mathematische Liefhebbery wurde von 1754 bis 1765 von Jakob Oostwoud (einem Lehrer zu Oost-Zaandam, in der Nähe von Amsterdam) zu Purmerend herausgegeben und von

---

[1]) B. Boncompagni, Bullettino, Tomo 14, Roma 1881, p. 533. Man findet eine „Bibliographie Neerlandaise Historico-Scientifique" im Bullettino, Tomo 14, p. 523—630; Tomo 15, p. 225—312, 355—440; Tomo 16, p. 393—444, 687—718.

Louis Schut bis 1769 fortgesetzt. Im ganzen erschienen 17 Bände, die hauptsächlich der Algebra gewidmet sind. Mathematische Aufgaben werden gestellt und aufgelöst. Diese Aufgaben wurden später in drei Serien herausgegeben[1]). Es war auch Jakob Oostwoud, welcher in den Niederlanden Interesse für die 1690 gegründete Hamburger Mathematische Gesellschaft erweckte. Von 1766—1790 traten viele holländische Lehrer dieser Gesellschaft bei. Die Auflösung dieser Beziehungen ist hauptsächlich der Gründung der Mathematischen Gesellschaft in Amsterdam 1778 zuzuschreiben. Den Anstoß hierzu gab Arnoldus Bastian Strabbe (1740—1805), ein Lehrer und Staatseichmeister in Amsterdam[2]), welcher seit 1775 Mitglied der Hamburger Gesellschaft war.

Wie schon früher (Bd. III², S. 513) hervorgehoben, hatten während unserer Zeitperiode die Philanthropen in Deutschland einen großen Einfluß auf das Schulwesen. Von den Schriften Rousseaus stark beeinflußt, wirkte Basedow in Dessau unermüdlich an der Verbesserung der deutschen Erziehung. Zu seiner Zeit wird es üblicher, Rechenbücher herauszugeben, die nicht allein für den Kaufmann, sondern hauptsächlich für die Schulen bestimmt sind und die Schärfung des Verstandes bezwecken. Im Jahre 1763 erschien Basedows Überzeugende Methode der auf das bürgerliche Leben angewandten Arithmetik zum Vergnügen der Nachdenkenden und zur Beförderung des guten Unterrichts in den Schulen, und 1774 sein Werk Bewiesene Grundsätze der reinen Mathematik (Leipzig), dessen erster Band der Zahlenkunst und Algebra gewidmet ist.

Um die beweisende Lehrart zu betonen, suchte er den Kettensatz und die Reessche Regel, welche zur einfachen Beweisführung für Elementarschulen nicht angelegt waren, durch eine neue Regel zu ersetzen. So entstand die „Basedowsche Regel". Wir benutzen diese Gelegenheit, zu bemerken, daß die Reessche Regel (Bd. III², S. 519, 520) in Deutschland, besonders im südlichen Teil, günstig aufgenommen wurde. Joseph Tanzer glaubte, „daß die Reessche Rechnung die größte Erfindung der gemeinen Arithmetik sey"[3]). Allgemeinen Beifall genoß aber weder diese Regel, noch der Kettensatz. J. F. Lorenz, Professor an der Schule des Stifts und Klosters

[1]) Festschr. herausgeg. v. d. Mathem. Gesellschaft in Hamburg, Erster Teil, Hamburg 1890, S. 79, 80. [2]) Ebenda, S. 48, 81, 82. Vgl. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen voor de geschiedenis der Wis- en Naturkundige Wetenschappen in de Nederlanden, 1878, S. 63—81. [3]) Joseph Tanzer, Mathematisches Lehrbuch zum Gebrauche der churfürstlichen Lyceen, Erster Teil, München 1780, S. 142.

Berge, drückt sich folgendermaßen darüber aus[1]): „Die gemeinen Rechenmeister pflegen überhaupt auch alle Proportionen, deren Lehre gar nicht ihre Sache ist, nach Ähnlichkeit ihres Kettensatzes, mittelst einer mechanischen Manier zu behandeln, welche unter dem Namen der Reesschen Regel nur gar zu bekannt und gemein ist.“ J. G. Prändel[2]) bemerkt, daß die Reessche Regel „auch wirklich in Deutschland eine geraume Zeit bei Geringköpfen viel Aufsehens machte“. In Holland wurde sie wenig gebraucht; in Frankreich und England haben wir sie nicht angetroffen.

Die Basedowsche Regel erforderte einiges Nachdenken. Wenn[3]) 1200 Mann 2400 Zentner Mehl in 4 Monaten verzehren, wieviel Mann kommen mit 4000 Zentner 3 Monate aus? Nach dem Basedowschen Verfahren schreibe man

1200 Mann	2400 Zentner	4 Monate	
? „	4000 „	3 „	

und entscheide, ob die Glieder der zweiten Zeile zu Multiplikatoren oder Divisoren werden. Es folgt das Schema:

?	1200
2400	4000
3	4

Unger hebt hervor, daß diese Regel den Übergang zu dem im 19. Jahrhundert beliebten Bruchsatz bildet.

Um die beweisende Rechenkunst zu fördern, gibt Johann Tessanek in einer Betrachtung über die arithmetische Regel zweyer falschen Sätze[4]) algebraische Beweise für diese allgemein ohne Demonstration angeführte Regel, und hebt hervor, daß die Methode auf Aufgaben höherer Grade unanwendbar sei.

Dem Mißbrauch, die Erfindung des größten gemeinschaftlichen Maßes zweier ganzen Zahlen in Lehrbüchern ohne allen Beweis anzuführen, hat Karsten durch einen kurzen und bündigen Beweis abzuhelfen gesucht[5]), während J. Pasquich einen zweiten Beweis lieferte[6]).

Die Philanthropen Christian Trapp (1745—1818) und Gottlieb Busse (1756—1835) betonten die Anschauung im Rechenunter-

---

[1]) Johann Friedrich Lorenz, Grundriß d. rein. u. angew. Mathematik, Erster Teil, Helmstädt 1798, S. 111. [2]) Johann Georg Prändels Arithmetik nebst einer kleinen Globuslehre, München 1795, S. 236. [3]) F. Unger, Die Methodik der Praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung, Leipzig 1888, S. 171. [4]) Abhandlungen einer Privatgesellschaft in Böhmen, 1. Bd., Prag 1775, S. 125—140. [5]) Lehrb. d. ges. Math., 1. Teil. [6]) Leipziger Magazin f. reine u. angew. Math., 1. Stück, 1787, S. 97—103.

richt so nachdrücklich, daß man sie als Vorläufer der Pestalozzischen Periode ansehen darf. Trapp sagt in seinem Versuch einer Pädagogik[1]), 1780: „Addieren und Subtrahieren kann man schon kleine Kinder an Nüssen usw. lehren, ohne daß sie Zahlen kennen; bis auf einen gewissen Grad auch Multiplizieren und Dividieren". In Busses Gemeinverständliches Rechenbuch für Schulen, 1786, und seiner Anleitung zum Gebrauche meines Rechenbuchs, 1786, werden qualitätslose Anschauungsmittel (Punkte, Striche) den sinnenreizenden Gegenständen (Nüsse, Äpfel) vorgezogen. Künsteleien und das Streben nach einer Universalregel, wie die Reessche, hält er für unerlaubt. Unger[2]) nennt Busse den geschicktesten Rechenmethodiker des 18. Jahrhunderts. Von weitreichendem Einfluß auf die Reform des Dorfschulwesens war Eberhard Freiherr von Rochow (1734—1805), der in seiner berühmten Schule in Rekahn die Zahlenkunst als eine Verstandesübung lehrte, sowie Peter Villaume (1746—1806), der nicht nur die Anschauung betonte, sondern auch die Beschränkung des Lehrstoffes und die Einführung des Kopfrechnens forderte[3]). Das Kopfrechnen wurde unter anderen auch von Friedrich Köhler in seiner Anweisung zum Kopfrechnen, 1797, empfohlen.

Von der alten Darstellungsweise verschieden waren auch die Versuche in Socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik von Johann Andreas Christian Michelsen, Berlin, Erster Band 1784, Zweyter Band 1785, Dritter Band 1786. Michelsen (1749—1797) war Professor der Mathematik und Physik am Vereinigten Berlinischen und Kölnischen Gymnasium, hatte großen Erfolg als Lehrer und beförderte die Wissenschaft durch die Übersetzung einiger Eulerschen Werke. Seine Socratischen Gespräche sind weitläufig, zeigen aber einen großen Fortschritt gegenüber von bloßen Regelsammlungen, die in unserer Periode noch vielfachen Absatz fanden. Michelsen führt hier und dort algebraische Symbole und algebraische Auseinandersetzungen ein. Diesen Versuch, für ältere Schüler die Arithmetik und Algebra miteinander zu verschmelzen, findet man in mehreren deutschen Anleitungen zur Mathematik, und derselbe darf gewiß als ein Fortschritt in der Methodik bezeichnet werden. Die Lehre von den Verhältnissen und der Regeldetri in der gemeinen praktischen Arithmetik hält er „nicht nur für überflüssig, sondern auch für zweckwidrig", weil man durch die

---

[1]) Wir zitieren nach E. Jänicke und G. Schurig Geschichte des Unterrichts in den math. Lehrfächern in der Volksschule, Gotha 1888, S. 44.

[2]) Unger, op. cit. S. 166, 167. [3]) E. Jänicke und G. Schurig, op. cit. S. 51.

welsche Praktik ohne sie fertig werden kann, und weil sie nur durch Umwege zum Ziele führt. Während Michelsen die Verhältnislehre für den Elementarunterricht abschaffen möchte, sucht Johann Georg Büsch in seinem Versuch einer Mathematik zum Nuzzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens, Hamburg 1773 (dritte Auflage 1790, vierte 1798) neue Definitionen einzuführen. „Die Art, wie Zahlen und Größen auseinander entstehen, ist ihr Verhältnis." Es gibt zwei Arten. „Die erste Art, wenn aus einer Zahl durch Hinzusetzung oder Wegnehmung einer andern Zahl eine neue Zahl entsteht, ist das Arithmetische Verhältnis", „Die zweite Art, wenn eine Zahl durch wiederholte Zusammensetzung einer andern oder eines Teils derselben entsteht, ist das Geometrische Verhältnis." Aus der Lehre von den Verhältnissen könne man die Bruchrechnung lichtvoll erläutern. Seine früheste Schrift darüber, so erzählt er im Jahre 1798, sei eine Probeschrift des Jahres 1756, er kenne aber kein Rechenbuch, in welchem seine Verhältnislehre ganz angenommen und daraus die Bruchrechnung und die Regeldetri hergeleitet wären[1]). Büsch (1728—1800) wurde 1756 Lehrer der Mathematik am Hamburger Gymnasium und bekleidete diese Stelle 44 Jahre lang bis zu seinem Tode. Er errichtete eine Handelsakademie in Hamburg und zeichnete sich durch gemeinnütziges Wirken und unermüdliche schriftstellerische Tätigkeit aus. Unter den begeisterten Jünglingen, deren Studien er in die rechten Bahnen zu lenken wußte, war der Astronom J. E. Bode.

Wir werden die Entwicklung methodischer Ideen für den Rechenunterricht in Deutschland nicht weiter verfolgen, bemerken aber, daß gegen Ende des Jahrhunderts in dieser Hinsicht hier größere Tätigkeit herrschte als in anderen Ländern[2]).

Büsch wurde im Jahre 1790, bei Gelegenheit der 100jährigen Jubelfeier der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg (Bd. II, S. 799), zum Ehrenmitglied dieser Gesellschaft ernannt[3]). Seit 1751 war Johann Reimer (1731—1803) Mitglied der obigen Gesellschaft, dessen schriftstellerische Tätigkeit wir kurz erwähnen. Bis 1783 erhielt jeder Eintretende einen Beinamen, und Reimer hieß „der Recreirende". In den Jahren 1767—1769 gab Reimer eine Wochenschrift Der gemeinnützige mathematische Liebhaber heraus.

---

1) Büsch, Mathematik zum Nutzen usw., 4. Aufl., 1798, S. 29, 30.

2) Weitere Auskunft über den Rechenunterricht in Deutschland findet man in den oben angeführten Werken von Unger und Jänicke und Schurig, sowie in M. Sterner, Geschichte der Rechenkunst, München und Leipzig 1891.

3) Festschr. herausg. v. d. Math. Gesellsch. in Hamburg a. i. 200jährigen Jubelfestes 1890, Leipzig 1890, S. 50.

Diese hing mit der Gesellschaft nicht weiter zusammen, als daß der Herausgeber ihr angehörte und daß andere Mitglieder sich anfangs für die Schrift interessierten. Reimer begründet das Aufhören der Wochenschrift im Jahre 1769 mit dem mangelnden Interesse vieler Mitglieder. Diese Wochenschrift ist unseres Wissens die zweite elementar-mathematische Zeitschrift in der Welt. Nur Oostwouds Monatsschrift war früher erschienen.

Die Wochenschrift war teils in deutscher, teils in holländischer Sprache abgefaßt und enthielt Aufgaben und deren Auflösungen. Diese waren durchweg sehr elementar, und meistens der Algebra, aber auch der rechnenden Geometrie sowie der Astronomie entnommen. Äußerst wenige waren originell. Die meisten sind aus Paul Halckes Sinnenconfect (Bd. III², S. 412) abgeschrieben. Anderes ist ähnlichen Werken entliehen.

Die Hamburger Gesellschaft hatte mehr auswärtige Mitglieder als einheimische. Im Jahre 1760 gab es neben 5 einheimischen 20 auswärtige Mitglieder. Im Jahre 1790 war die Zahl der auswärtigen auf 32 gewachsen, welche von Regensburg bis Stockholm und von Prag bis Amsterdam zerstreut waren. Von diesen waren 23 Holländer. Nach 1790 nahm letztere Zahl schnell ab, was einerseits den damaligen Kriegsunruhen und andererseits der 1778 erfolgten Gründung der Mathematischen Gesellschaft in Amsterdam zuzuschreiben ist[1]).

Die Arithmetik des Leontius Philippovisth Magnitzky (1669—1739) war beinahe das einzige Rechenbuch, welches während der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts in russischen Schulen gebraucht wurde[2]). Es erschien 1703 und enthielt auch einiges über Algebra und Geometrie. Während der Blütezeit des Regelrechnens geschrieben, machte es keine Ansprüche an die Denkkraft der Schüler. In der zweiten Hälfte des Jahrhunderts wurde es allmählich von anderen Werken verdrängt. In der ersten Hälfte war das Gymnasium der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg der einzige Ort, wo neue Ideen über den Rechenunterricht aufblühten. Dort wurde 1740 die Adodouroffsche Übersetzung des ersten Teiles von Leonhard Eulers Einleitung zur Rechen-Kunst, zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in Saint-Petersburg (erster Teil 1738; zweiter Teil

---

[1]) Festschr., S. 47, 48. [2]) V. V. Bobynin, „L'Enseignement mathématique en Russie" in L'Enseignement Mathématique (C. A. Laisant et H. Fehr, Directeurs), 1ère année, 1889, p. 81. Unsere Angaben über die Rechenkunst und Algebra in Rußland sind dieser Arbeit und der Russkaia Fiziko-Matematicheskaia Bibliografiia, sostavil V. V. Bobynin 1886—1900 entnommen.

1740) herausgegeben und im Gymnasium studiert. Der zweite Teil dieses Werkes, von Vasilii Kouznetzoff übersetzt, erschien 1760. Es war Eulers Absicht, alles recht deutlich zu erklären und zu beweisen. Obschon der mathematische Unterricht auf dem St. Petersburger Gymnasium unter der Lehrtätigkeit von Georg Wolfgang Krafft (1701—1754) und Vasilii Evdokimovich Adodouroff (1709 bis 1778) eine durchgreifende Erneuerung erfuhr, erwirkte derselbe doch nur geringen Einfluß auf andere Schulen Rußlands.

Ein anderes Werk, welches die alten dogmatischen Methoden durch eine beweisende Lehrart zu ersetzen suchte, war die 1752 erschienene Algebra von dem Ingenieur Kapitän-Lieutenant Nicolas Mouravief (1721—1770). Es war das erste Werk in russischer Sprache ganz diesem Fache gewidmet. Dann erschien ein Buch, welches der alle Beweise vermeidenden Darstellung folgte und viel größeren Beifall als das Mouraviefsche Werk genoß. Dies war die Universelle Arithmetik von Nicolas Kourganof (1725—1796), Professor der Mathematik und Navigation am Korps der adeligen Marinekadetten. In dieser Schule verdrängte dieses Werk die alte Arithmetik von Magnitzky.

Während der zweiten Hälfte des Jahrhunderts wurden hauptsächlich deutsche mathematische Werke gelesen. Dimitri Sergievitch Anitchkof (1740—1788), ein Lizentiat der 1755 gegründeten Universität von Moskau, wurde 1762 als Lehrer an der Universität und den dazu gehörigen Gymnasien angestellt. Er gab 1765 eine Übersetzung aus der lateinischen in die russische Sprache der verschiedenen Teile von Weidlers Institutiones Matheseos.., editio quinta, Vitembergae 1759, heraus. Uns interessieren hier nur zwei Teile, die Theoretische und Praktische Arithmetik, deren zweite und dritte Auflage 1787 und 1795 erschienen, und die Algebra, welche 1778 in zweiter Auflage herausgegeben wurde. Diese Werke, sowie diejenigen, welche von Anitchkof selbst nach dem Vorbilde der Weidlerschen und Wolffschen Werke geschrieben wurden[1]), brachten in russischen Elementarwerken der Mathematik die demonstrative Methode in den Vordergrund.

In Großbritannien ist die Methodenentwicklung für den Rechenunterricht langsamer fortgeschritten als in Deutschland. Das Anschauungsprinzip kam gar nicht in Betracht, wohl aber wurde die Beweisführung in den neueren Büchern dem bloßen Regelrechnen vorgezogen. Englische Rechenbücher unterscheiden sich von denen des Festlandes hauptsäch-

---

[1]) Theoretische und Praktische Arithmetik (Auflagen: 1764, 1775, 1786, 1793); Elemente der Algebra, oder litterale Arithmetik (1787).

lich darin, daß erstere den Dezimalbrüchen und der Sammlung von Übungsaufgaben viel größere Aufmerksamkeit schenken. Englische Bücher operieren mit größeren Zahlen. Ein Verfasser gibt z. B. eine Aufgabe, welche die Berechnung von 2^{144} erfordert, und diese wird mit 44 Ziffern durchgeführt[1]).

Zu dieser Zeit fanden Auflagen von den älteren Werken von Edward Cocker, Thomas Dilworth, John Hill und Edmund Wingate noch immer Absatz. Unter den verschiedenen Auflagen von Cockers Arithmetik[2]) erschienen zwischen 1725 und 1767 mehrere von Mrs. Slack unter dem Namen „George Fisher" herausgegeben[3]). Mrs. Slack hat unter dem Pseudonym „George Fisher" auch eine eigene Arithmetik geschrieben. Sie ist unseres Wissens die erste Frau, welche arithmetische Bücher zu verfassen unternahm.

1760 gab James Dodson eine Ausgabe der ungefähr 1629 zuerst erschienenen Arithmetik von Wingate heraus. De Morgan erklärt, daß Wingate, nach den in verschiedenen Auflagen vorgenommenen Abänderungen, sein Werk nicht wieder erkannt haben könnte[4]). Dodson war Lehrer der Mathematik zu Christ's Hospital, ein Freund De Moivres und ein Mitglied der Royal Society. Er ist ein Urgroßvater August De Morgans[5]).

De Morgan zählt dreißig Rechenbücher auf, welche in Großbritannien während der Periode 1759—1799 geschrieben wurden[6]). Hervorragend unter diesen war A complete treatise on Practical Arithmetic and Book-Keeping von Charles Hutton. Die 5. Auflage soll 1778 gedruckt worden sein; die 8. erschien in London 1788. In diesem kurzen Werke wird der Dezimalpunkt gegen den oberen Teil der Ziffer gesetzt, wie in 1·3, damit er nicht mit Satzzeichen verwechselt werden könne. Hutton bemerkt, daß er den

---

[1]) John Hill, Arithmetic, 1772, p. 144. [2]) Die erste Auflage erschien 1678, „perused and published by John Hawkins". Wenigstens 112 Auflagen sollen herausgegeben worden sein [V. Dictionary of National Biography]. Cockers Werk hatte vor dem 1661 erschienenen Rechenbuch des James Hodder den Vorzug, daß es Untersichdividieren, statt Übersichdividieren lehrte. Beide Bücher gaben Regeln ohne Beweise. Beide genossen weite Verbreitung. Näheres über Cocker findet man in De Morgans Arithmetical Books, S. 56 bis 62. Wohl zu verwerfen ist De Morgans Ansicht, daß Cockers Arithmetic nicht von Cocker, sondern von John Hawkins geschrieben wurde, daß Hawkins, um größeren Absatz zu erlangen, sich den Namen Cockers beilegte.

[3]) G. Valentin, „Die Frauen in den exakten Wissenschaften", Bibliotheca Mathematica, N. F., 1895, S. 75. [4]) A. De Morgan, op. cit. p. 73.

[5]) Memoir of Augustus De Morgan by his wife, Sophia Elizabeth De Morgan, London 1882, p. 233, 234. [6]) De Morgan, op. cit. p. 73—82.

Wink für diese Schreibweise aus Tabellen von Newtons Optics erhalten habe.

Ein anderes Werk war The Scholar's Guide to Arithmetic, London 1780 (6. Auflage 1795), von John Bonnycastle (1750 [?] bis 1821). Man findet darin Beweise für die Regeln, welche in einigen Fällen in algebraischer Sprache dargestellt sind, aber immer in kleinerem Druck in der Form von Anmerkungen, so daß sie ganz bequem übergangen werden konnten. 1851 erschien die 18. Auflage dieses Werkes. Bonnycastle war ein Autodidakt, stand einer Akademie in London vor und wurde ungefähr 1782 Professor der Mathematik an der königlichen Militärakademie bei Woolwich.

In Schottland stand die Arithmetic, Rational and Practical von John Mair in großer Gunst. Die erste Auflage soll 1766 erschienen sein[1]), die fünfte wurde 1794 in Edinburgh herausgegeben. Dies ist ein weitläufiges, vollständiges Werk, verständlich geschrieben, obschon das Versprechen alles gründlich zu beweisen, nicht überall durchgeführt ist. Mair war Lehrer in Ayr, später Rektor an der Perth Akademie und Verfasser von Schulbüchern über verschiedene Fächer.

In Irland erschien 1759 die Practical Arithmetic von einem Quäker John Gough (1721—1791), Schriftsteller und Lehrer in Cork und Dublin. Das Rechenbuch enthält Fragen und Antworten, einige davon in Versen: „Q. What is subtraction? A. Subtraction from a greater takes a less, and thereby shews the difference or excess“. Nach De Morgan[2]) soll die zweite Auflage große Erweiterungen erfahren haben, während die späteren für Schulzwecke wieder reduziert wurden. Der Name des Schriftstellers wurde in Irland ein Synonym der Arithmetik, und als gegen Mitte des 19. Jahrhunderts Thomsons Werk Eingang fand, erhielt es den Namen „Thomson's Gough“[3]).

Eines der brauchbarsten Bücher damaliger Zeit war The Tutor's Assistant von Francis Walkingame, dessen 28. Ausgabe in London 1798 gedruckt wurde. Eine Ausgabe davon erschien[4]) in London 1844.

Englische Rechenbücher legen großes Gewicht nicht nur auf Dezimal-, sondern auch auf Duodezimalbrüche. Ein Werk, The Measurer's Best Companion; or Duodecimals brought to Perfection, von Thomas Sutton, 1785 in Great-Yarmouth gedruckt, erklärt diesen Gegenstand mit großer Vollständigkeit. Es wird erzählt, daß

---

[1]) Allibones Dictionary of Authors. [2]) Ebenda, S. 79, 80. [3]) Ebenda, S. 80. [4]) Ebenda, S. 80.

ein Lehrer am Pembroke College auf der Universität Cambridge einem Studenten einmal folgenden Rat gab: „Vernachlässigen Sie keineswegs die Duodezimalen. Ich wurde Senior Wrangler 1767 durch meine Kenntnis der Duodezimalen.“[1])

Das Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen, welche schon in älteren englischen Büchern eine hervorragende Stelle erhielten, wurde theoretisch 1768 von John Robertson (1712—1776), damals Bibliothekar der Royal Society, früher Lehrer der Mathematik in Portsmouth, in einem Artikel erklärt[2]). Die Werte periodischer Dezimalbrüche werden durch Summation geometrischer Progressionen gefunden. In einem anderen Aufsatz erläutert er zwanzig Fälle in der Zinseszinsrechnung, worin jede der fünf Größen (Annuität, Zeit, Prozent, Betrag, Kapital) auf vier verschiedenen Wegen aus den übrigen hergeleitet wird[3]). Diese Schrift führt er als die Vervollständigung einer Arbeit des William Jones vor. Eine andere[4]) über die Konstruktion der Logarithmen durch Reihenentwicklung schreibt er ganz diesem William Jones zu.

Eine mathematische Gesellschaft existierte zu Spitalfields in London von 1717 bis 1845. Sie war also jünger als die Hamburger und älter als die Amsterdamer Gesellschaft. Sie war von Joseph Middleton, einem Verfasser mathematischer Bücher, gegründet und hatte Dolland, Simpson, Saunderson, Crossley, Parvissen und Gompertz als Mitglieder. Anfangs waren die Mitglieder Arbeiter, viele davon Seidenweber. Es wurde von jedem erwartet, daß er seine Pfeife, seinen Krug und sein Problem mitbringe[5]).

Während des 18. Jahrhunderts gab es in England keine Journale, welche sich ganz der Mathematik widmeten, wohl aber mehrere, welche Abteilungen für Elementarmathematik enthielten. Die berühmtesten unter diesen waren The Ladies' Diary, gegründet 1704, und The Gentleman's Diary, welche 1840 vereinigt wurden. Thomas Simpson war Herausgeber der Ladies' Diary von 1754 bis 1760, und er rühmte von dieser Jahresschrift, sie hätte mehr zum Studium und Fortschritt der Mathematik beigetragen als die Hälfte der Bücher speziell für diesen Zweck geschrieben[6]).

---

[1]) C. Wordsworth, Scholae Academicae, 1877, p. 73. [2]) Philosophical Transactions (London), Vol. 58, for the year 1768, p. 207—213. [3]) Ebenda, Vol. 60, for the year 1770, p. 508—517. [4]) Ebenda, Vol. 61, for the year 1771, p. 455—461. [5]) A. De Morgan, Budget of Paradoxes, p. 80, 232, 451; S. E. Morgan, op. cit. p. 123; P. A. Mac Mahon, Address before Section A, British Asia, Report 71, 1901. [6]) Andere periodische Schriften, welche sich teilweise der Elementarmathematik widmeten, waren The Palladium, 1749—1777 von Robert Heath als ein Rival der Ladies' Diary veröffentlicht; Miscellanea

In den Kolonien von Nordamerika wurden im 18. Jahrhundert hauptsächlich Rechenbücher von Großbritannien importiert[1]). Die erste amerikanische Auflage eines großbritannischen Werkes, welches ganz dem Rechnen gewidmet ist, war die Arithmetick: or, That necessary Art made most easie von James Hodder[2]), Boston 1719. 1779 erschien in Philadelphia ein Neudruck des populärsten englischen Werkes des 17. Jahrhunderts, nämlich Edward Cockers Arithmetick. Weitere Verbreitung als diese zwei hatte Thomas Dilworths Schoolmaster's Assistant, wovon wenigstens acht amerikanische Auflagen gedruckt wurden[3]). Es wurden hier auch die Rechenbücher von Daniel Fenning, John Gough und „George Fisher" gedruckt.

Das erste Werk aus der Feder eines amerikanischen Schriftstellers ist die Arithmetick, Vulgar and Decimal, Boston 1729. Das Buch ist anonym, wird aber Isaac Greenwood (1702—1745) zugeschrieben[4]). Ungleich den obengenannten ausländischen Werken setzt es die Kenntnis der Grundoperationen voraus und macht einigen Anspruch an die Denkkraft der Schüler. Vielleicht aus diesen Gründen fand es sehr geringe Verbreitung. Isaac Greenwood war Professor der Mathematik und Naturphilosophie an der Universität Harvard von 1727 bis 1738.

Scientifica Curiosa, Vol. I, 1766, mit Charles Hutton als Mitarbeiter; The Scientific Receptacle, von Thomas Whiting 1791 in London gegründet; The Stockton Bee: or Monthly Miscellany, 1793; The Gentleman's Mathematical Companion, von 1798 bis 1804 jährlich in London gedruckt. Diese Schriften standen mir zu Washington in der Bibliothek des Herrn Dr. Artemas Martin zur Verfügung. Es gab mehrere andere Journale gleicher Art, z. B. The Mathematical Magazine and Philosophical Repository von G. Mitchell, T. Moss und anderen, 1761; Huttons Mathematical Miscellany, The London Magazine, The British Oracle. (Vgl. T. T. Wilkinson, Memoir of the Rev. John Lawson, Manchester 1854; Bolton, Catalogue of Scientific and Technical Periodicals, 1665—1895, Washington 1897.)

1) Holländische Einwanderer des 17. Jahrhunderts brachten die Coffer-Konst von Pieter Venema († 1612) mit. Dies Buch war so hoch geschätzt, daß 1730 in New York eine englische Übersetzung davon gedruckt wurde (F. Cajori, The Teaching and History of Mathematics in the U. S., Bureau of Education Washington 1890, p. 13). 2) Die erste Auflage erschien in London 1661 (August de Morgan, op. cit. p. 46). 3) Philadelphia 1769, Hartford 1786, New York 1793 und 1806, New London 1797, Philadelphia 1805, Brooklyn 1807, Albany 1824. 4) Eine ausführlichere Beschreibung des Werkes findet man in „Notes on the History of American Text-books on Arithmetic" by James M. Greenwood and Artemas Martin in The Report of the Commissioner of Education for 1897—1898, Washington, D. C., p. 802—805; Cajori, op. cit. p. 14.

Erst über fünfzig Jahre später begegnen wir einem zweiten amerikanischen Autor, dem Nicolas Pike, dessen New and Complete System of Arithmetic 1788 in Newburyport gedruckt wurde. Nicolas Pike (1743—1819) absolvierte die Universität Harvard und war während vieler Jahre Lehrer in Newburyport. Seine Arithmetik enthielt auch ganz kurze Kapitel über Logarithmen, Trigonometrie, Kegelschnitte und Algebra.

In der Beweismethode des arithmetischen und algebraischen Teils galt ihm Bonnycastle als Vorbild. Alle Beweise erscheinen als Anmerkungen in kleinerem Druck. Während dreißig Jahren wurde das Werk viel gelesen; anfangs diente es als Text für den mathematischen Kursus auf den Kollegien. Es wurde von Professoren mehrerer amerikanischen Kollegien empfohlen und Georg Washington sandte dem Autor einen Brief, worin er seine Anerkennung ausdrückte.

Als nach dem Revolutionskrieg die Vereinigten Staaten 1789 zu der Verfassung gelangten, die sie noch heutzutage haben, und die Früchte der erstrittenen Freiheit zu genießen anfingen, erhielt das Schulwesen auch neuen Aufschwung. In dem Zeitraum 1789—1799 erschienen über ein Dutzend neuer Rechenbücher[1]), von denen The Schoolmaster's Assistant von Daboll, New London 1799, das hervorragendste war. Es legt auf Dezimalbrüche viel größeres Gewicht als damals üblich war. Nathan Daboll (ungefähr 1750 bis 1818) war Lehrer in Connecticut.

1792 wurde ein neues Münzsystem eingeführt. Seit dem ersten Gepräge 1794 verdrängten dollars und cents allmählich die englischen pounds und shillings. Die Rechenbücher schlossen sich der neuen Ordnung an. Durch diese Münzveränderung wurden die ausländischen Schriftsteller Dilworth und Cocker aus amerikanischen Schulen allmählich verdrängt. Zu erwähnen ist noch, daß The American Accomptant von Chauncy Lee, welches 1797 in Lansingburgh erschien, das früheste Rechenbuch ist, worin das Dollarzeichen $ sich vorfindet[2]). Nicolas Pike gab 1788 für mills, cents, dimes, dollars folgende Abkürzungen: *m*, *c*, *d*, *D*. Lee schreibt, ohne weitere Erklärungen, für mill /, cent //, dime ǂ, dollar #. In Handschriften von Robert Morris, dem Finanzier der Revolution, findet man das Dollarzeichen $ schon 1793. Gründliche Studien über den Ursprung des Zeichens sind nicht vorgenommen worden; man hat aber wenigstens sieben verschiedene Hypothesen darüber[3]).

[1]) Vide Greenwood and Martin, op. cit. p. 809—814; Cajori, op. cit. p. 46, 47. [2]) Greenwood and Martin, op. cit. p. 812. [3]) Vgl. Malcolm Townsend, U. S.; an Index to the United States of America, Boston 1890, S. 420.

In dem Lesen der Zahlen und in der Ausführung der vier Rechnungsarten mit ganzen Zahlen sind während der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts keine neuen Methoden erschienen, wohl aber ist ein Fortschritt zu größerer Übereinstimmung über den relativen Wert der verschiedenen Methoden und ein allmähliches Verwerfen der komplizierteren derselben wahrnehmbar. Die Wörter Billion, Trillion usw. werden in allen europäischen Ländern, außer Frankreich, sowie auch in den Staaten von Nordamerika, als 10^{12}, 10^{18} usw. definiert. Den Gebrauch dieser Wörter im Sinne von 10^9, 10^{12} usw. findet man schon in der Arithmétique von G. Trenchant, Lyon 1566; der Gebrauch wurde in Frankreich im 17. Jahrhundert allgemein[1]). Daß hier und dort ein Rechenbuch zu finden ist, welches die Wörter Billion, Trillion, ja sogar das Wort Million noch gar nicht gebraucht, ist nicht auffallend[2]). Das Alte läßt sich nicht so leicht verdrängen.

S. F. Lacroix[3]) bemerkt, daß man im Handel statt billion das Wort milliard brauche. F. Legendre schreibt milliars. Wir haben milliard in praktischen französischen Rechenbüchern allgemein gefunden; Barrême und Pierre Sénebier[4]) schreiben auch milliasses für trillions. In der Arithmétique raisonnée et demontrée, welche Leonhard Euler zugeschrieben wird[5]), heißt 10^9 milliard,

---

[1]) Encyclopédie des sciences mathématiques, Ed. Française, Tome I, 1904, p. 17. [2]) Das Wort Million ist z. B. in De Vernieuwde/Cyfferinge van Mr. Willem Bartjens, Herstelt, vermeerdert ende verbetert Door Mr. Jan van Dam, ... Amsterdam 1771, nicht zu finden. Dort ist 1000000 = Dupzendmaal-Dupzend. Ähnliches findet man in J. C. Huths Die kürzeste, bequemste und leichteste Art zu Rechnen, Halberstadt 1774 (wie wir aus der Geschichte des Unterrichts in den mathematischen Lehrfächern in der Volksschule, bearbeitet von E. Jänicke und G. Schurig, Gotha 1888, S. 17, entnehmen). In dem Abbaco ovvero Pratica Generale Dell' Aritmetica ... esposto da Girolamo-Pietro Cortinovis, maestro d'Aritmetica Pratica. Quarta Edizione. Venezia 1759, wird das Wort Billion nicht gebraucht, und 976000000000000 = novecento, e settantasei milioni, di milioni. [3]) Traité élémentaire d'arithmétique, Paris 1807, p. 5. [4]) Sénebier, Traité d'arithmétique, Lausanne 1774, p. 7. [5]) L'arithmétique raisonnée et démontrée, oeuvres posthumes de Léonard Euler, traduite en françois par Daniel Bernoulli, directeur de l'Observatoire de Berlin etc. Corrigée et considérablement augmentée par M. De la Grange, Berlin, chez Voss & fils et Decker & fils, 1792. Man glaubte zunächst in diesem Werke eine französische Übersetzung von Eulers 1738—40 erschienenen, jetzt sehr seltenen Einleitung zur Rechenkunst zu sehen, aber P. H. Fuß und G. Valentin sind der Ansicht, daß hier ein literarischer Betrug vorliegt, und daß Euler, Daniel Bernoulli und Lagrange kein Wort von diesem Werke geschrieben haben. Fuß führt im Bull. Ac. Petrop. Classe math. 9, 1851, S. 340—341 die ersten Sätze des Werkes von 1738 und desjenigen von 1792 an und findet keine Ähnlichkeit zwischen beiden. Auch hebt er hervor, daß Daniel Bernoulli nie directeur de l'observatoire de Berlin war und nicht

10^{12} billiard, 10^{15} trilliard. Hätte sich diese Sprachweise erhalten, wäre man heutzutage von Verwirrung frei; es würden 10^9, 10^{12}, 10^{15} milliard, billiard, trilliard, und 10^{12}, 10^{18}, 10^{24} billion, trillion, quadrillion heißen.

Es ist bemerkenswert, daß das seit Anfang des 16. Jahrhunderts in Spanien von Ciruelo und Ortega gebrauchte Wort cuento für 10^6 (siehe Bd. II², S. 386, 387) sich erhalten hat und von Perez de Moya und Bails in ihren von uns früher angeführten Werken dem Worte millone vorgezogen wird. Für 10^{12} schreibt Bails bicuentos und Perez de Moya cuento de cuento.

Die Ausführungen der Addition und Multiplikation waren mit den jetzigen Methoden identisch. Im Multiplizieren fing man allgemein mit der niedrigsten Ziffer des Multiplikators an. Einige Autoren aber machen darauf aufmerksam, daß vorteilhaft mit der höchsten Ziffer des Multiplikators angefangen werden kann[1]). Es werden drei Arten des Subtrahierens gelehrt. Wenn eine Ziffer im Subtrahend

---

der Übersetzer von Eulers Algebra ist. In der Vorrede des Werkes von 1792 heißt es nämlich: „le fameux Bernoulli, traducteur de l'Algèbre de ce savant [Euler], a cru rendre service au public, en traduissant un Ouvrage . . .“ Valentin hebt in der Bibliotheca Mathematica N. F. 12, 1898, S. 49 hervor, daß in Quérards La France littéraire III, 1829, p. 233 ein Werk, L'arithmétique démontrée, opérée et expliquée von C. F. Gaignat de L'Aulnays de Nantes, Paris 1770, angeführt wird, mit der Anmerkung: „Cet ouvrage a été reimpr. en 1792 comme un ouvrage posthume de Léonard Euler, etc.“ (folgt der obige Titel). Wir haben zwei verschiedene Ausgaben der Eulerschen Arithmetik vom Jahre 1792 gesehen, die sich aber nur durch das Titelblatt, einen Satz in der Vorrede und eine kurze Anmerkung unterscheiden. Der Titel der anderen Ausgabe lautet: „L'arithmétique raisonnée et démontrée, oeuvres posthumes de Léonard Euler, traduite en françois par Bernoulli, directeur de l'Observatoire de Berlin etc. (Berlin, chez Voss & fils et Decker & fils, 1792“). Der letzte Satz in der Vorrede der ersten Ausgabe, welcher sich auf Lagrange bezieht, wird weggelassen. Auf S. 616 der zweiten Ausgabe wurde hinzugefügt: „De l'Imprimerie de Grangé, rue de la Parcheminerie“. Bisher ist es niemandem möglich gewesen, alle in Frage kommenden Werke einsehen zu können, weshalb die Geschichte des Werkes nicht definitiv bestimmt ist. In den Oeuvres complètes en François de L. Euler, publiées par M. M. Dubois et Drapiez in Belgien wurde die Arithmetik des Jahres 1792 als echt angenommen und 1839 als dritter Band herausgegeben. Um sie den damaligen Schulbedürfnissen anzupassen, wurde sie so gründlich bearbeitet, daß sie mit dem Buche des Jahres 1792 beinahe keine Ähnlichkeit hat. Von nun an werden wir letzteres als „Euler-Bernoulli“ zitieren.

[1]) Z. B. W. J. G. Karsten, Lehrbuch der gesamten Mathematik. Der Erste Theil, Greifswald 1767, S. 128; John Mair, Arithmetic, 1794, S. 59; Lagrange, Math. Elementarvorlesungen, deutsche Separatausg. von Dr. H. Niedermüller, Leipzig 1880, S. 22, 23.

größer ist als die darüber stehende, so wird in ungefähr dreiviertel der Rechenbücher eine Einheit von der nächst höheren Ziffer im Minuend geborgt und wird dann vielleicht mit einem Punkte bezeichnet, daß letztere sodann um eins weniger gelte. Statt die folgende Ziffer des Minuenden um eine Einheit zu verkleinern, wird in der zweiten Methode die folgende Stelle im Subtrahenden um eins vermehrt. Diese Erklärung findet man öfter in französischen und italienischen als in deutschen Werken. Manche Schulbücher enthalten beide Methoden. In den Vorlesungen von Laplace, 1795 auf der Normalschule in Paris gehalten, werden beide Arten erklärt[1]). In einem dritten Verfahren, welches selten erscheint, wird, wie früher bei Riese und Rudolff, die untere Ziffer erst von der geborgten 10 abgezogen und die obere Ziffer hernach dazu addiert. Michelsen gibt noch einen anderen Weg. Man ziehe die Ziffer des Minuenden von der Ziffer des Subtrahenden ab, und subtrahiere den Rest von neuem von 10, und lasse dann die folgende Ziffer des Minuenden eins weniger gelten[2]). In allen von uns gelesenen Werken sagt man: 2 von 5 bleibt 3; niemals wird 2 und 3 macht 5 angegeben. Die Operation geht beinahe immer von rechts nach links.

Division ist eine bedeutend schwierigere Operation, wofür zur Zeit der Renaissance viele Methoden vorgeschlagen wurden. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts findet der Sturz der während zweier Jahrhunderte gemeinen Divisionsformen statt und größere Uniformität in den Operationen tritt ein. Die Rechenmeister der Zeitperiode 1759 bis 1799 reden von zwei Hauptmethoden, die um die Herrschaft kämpften, 1. das Übersich- oder Oberwärtsdividieren, oder die Turmmethode, 2. das Untersich- oder Unterwärtsdividieren. Diese Einteilung der damals bekannten Divisionsformen ist nicht fundamental. Die Hauptfrage ist nicht, ob man oberwärts oder unterwärts fortschreiten solle; wohl aber, ob man die Teilprodukte sofort abziehen solle oder nicht, ob im Bilden der Produkte man mit der höchsten oder mit der niedrigsten Ziffer des Divisors anfangen solle, und was überhaupt die anschaulichste Anordnung der Ziffern sei. Die verschiedenen Divisionsarten, welche in dieser Zeitperiode gebraucht wurden, lassen sich so anordnen, daß man stufenweise von einer extremen Form zur anderen fortschreiten kann. Unten machen wir dies an folgenden Beispielen klar:

---

[1]) Journal de l'école Polytechnique ou Bulletin du Travail fait à cette école, 7. et 8. cahiérs, Tome II, A Paris 1812. Leçons de Mathématiques, données à l'école normale, en 1795 par M. Laplace, p. 8. [2]) Versuch in Socratischen Gesprächen usw. von J. A. C. Michelsen, I. Bd., 1784, S. 133.

```
A B C ⎫ D E F G H
a b c ⎭
```

Wir haben hier zwei Anordnungen, A B C D E F G H und a b c D E F G H. Die Divisionsarten a, b, c unterscheiden sich von A, B, C darin, daß man in ersterer beim Bilden der Teilprodukte mit der ersten Ziffer zur Linken anfängt und nach rechts geht, während in letzterer man mit der ersten Stelle zur Rechten anfängt und nach links schreitet.

A.

```
 32
3188 ┌quotient
6754 └  18     reste 328
----
3577
 35
```

F. Le Gendre[1]), 1774 (6754 : 357).

a.

```
   |1
    2
   37
    49|6
   801
  1977|3
  56331 | 118 163/476
  47666 |
   477  |
    4
```

Christian Pescheck[2]), 1759 (56331 : 476).

B.

```
Diviseur 469| 387046
Produit  825   11861
                 242
                   1
```

„Euler-Bernoulli", 1792, p. 173 (387046 : 469).

b.

```
        2  1
        3232|1
        55553|2
        090254
346 | 21255000|1 | 258594 121/346
    | 89473645   |
```

Johann Friedrich Heynatz[3]), 1780 (89473645 : 346).

---

[1]) L'arithmétique en sa perfection, mise en pratique selon l'usage des financiers, gens de pratique, banquiers, et marchands . . . par F. Le Gendre, Arithméticien, Dernière édition, corrigée . . ., Paris 1774, p. 50. [2]) M. Christian Peschecks . . Deutliche Erklärung derer Kaufmann- und öconomischen Rechnungen, als da sind: Thara- und Fusti-Rechnung; . . ., Budissin 1759, S. 11. [3]) M. Johann Friedrich Heynatz, Rektors zu Frankfurt an der Oder, Handbuch . . ., Zweiter Theil, welcher ein ausführliches Rechenbuch enthält. Zweyte vermehrte und verbesserte Auflage. Berlin 1780, S. 106.

C.

Dividende Diviseur
4787
108 | 37
347 | 129
14

„Euler-Bernoulli", 1792, p. 165 (4787 : 37).

c.

346 | 89473645 | 2125500 1 | $258594\frac{121}{346}$
090254
555532
32321
2 1

Johann Friedrich Heynatz, 1780, S. 106.

D.

4
203
17812
123456 | 233
105644 | 528
1588
15

Barrême, 1764, p. 227 (123456 : 528).

E.

12|2
426|7
34|72685|2137
68
34
102
238

John Mair[1]), 1794 (72685 : 34).

F.

$72634 \mid 2594\frac{2}{28}$
28
56
166
28
140
263
28
252
114
28
112
2

Johann Georg Prändel[2]), 1795 (72634 : 28).

G.

		Divisore	Dividendo
7980.	1.	7980	148431
15960.	2.	Quoz:	18
23940.	3.		7980
31920.	4.		68631
39900.	5.		63840
47880.	6.	Residuo	4791
55860.	7.		
63840.	8.		
71820.	9.		

Odoardo Gherli[3]), 1770 (148431 : 7980).

[1]) John Mair, Arithmetic, Rational and Practical, Edinburgh 1794, p. 89.
[2]) Johann Georg Prändels . . . Arithmetik . . . München 1795, S. 47.
[3]) Gli Elementi Teorico-Pratici delle matematiche pure del Padre Odoardo Gherli, Domenicano . . . Tomo I, Modena 1770, p. 19.

H.

```
75347 | 53
53    | 1421 34/53
---
223
212
---
 114
 106
 ---
   87
   53
   --
   34
```

Étienne Bézout[1]), 1797
(75347 : 53).

In A. und a. werden die Teilprodukte sofort abgezogen, die Reste über den Dividend geschrieben, der Divisor unter den Dividend gesetzt und nach rechts gerückt, und jede Ziffer durchgestrichen, sobald man damit fertig ist. A. wird von „Euler-Bernoulli" 1792, von Pescheck 1741 und von Barrême 1764 division à l'Espagnole genannt. a. heißt bei Pescheck die gemeine Art, bei Barrême die division à la Françoise, bei „Euler-Bernoulli" à la Françoise briève, bei J. F. Maler[2]) 1765 das Teutsche Dividieren. Über die Divisionen aufwärts sagt Johann Georg Prändel[3]): „Ihr Aussehen ist sehr geschmeidig; aber sie haben die Beschwerlichkeit, daß sich ein begangener Fehler nicht so leicht entdecken läßt, wie beym Abwärtsdividieren, folglich meistens die Operation von Neuem angefangen werden muß". „Ich bin überzeugt," sagt Heinatz[4]) 1799, „daß die meisten Menschen darum nicht ordentlich rechnen, weil ihnen die Turmmethode des Dividierens zu viel Schwierigkeiten macht."

In b. wird der Divisor links und nur einmal geschrieben, während in c. die Reste unten gesetzt werden. Letztere wird von Pescheck die welsche Art und von „Euler-Bernoulli" division à la Françoise longue genannt. Schon über 200 Jahre früher erwähnt Rudolff diese französische Manier des Rechnens[5]).

In B. wird der Divisor nur einmal geschrieben. Divisor und

---

[1]) Cours de Mathématiques, à l'usage du corps de l'Artillerie. Par M. Bézout . . . Tome Premier, . . . à Paris 1797, v. st. An V, p. 44. [2]) Kurzer und deutlicher Unterricht zum Rechnen . . . Jacob Friderich Maler . . . zweite und verbesserte Auflage, Carlsruhe 1765, S. 62. [3]) Op. cit. S. 50. [4]) Jänicke und Schurig, op. cit. S. 58. [5]) Sterner, op. cit. S. 279.

Quotient werden links gesetzt, und die Reste unter den Dividend. Bei „Euler-Bernoulli" heißt diese Art division à l'italienne longue. „Diese Art des Dividirens ist die kürzeste unter allen, und ob sie gleich auch nicht leicht ist, so muß man doch um des daraus zu hoffenden Nutzens willen die auf ihre Erlernung zu wendende Mühe nicht achten."[1]).

C. ist der vorigen Form sehr ähnlich. Der Divisor und Quotient stehen rechts, und Ziffern werden nicht durchgestrichen. „Euler-Bernoulli", sowie Barrême, nennen diese Art division à l'italienne briève.

In D. werden die vollständigen Produkte unter den Dividend und die Reste über denselben gesetzt. Das sofortige Abziehen findet hier nicht statt. „Euler-Bernoulli" und Barrême geben dieser Form den Namen division à la Portugaise.

Eine ganz ähnliche Manier ist E., wo der Divisor links steht und Ziffern nicht durchgestrichen werden.

F. ist eine mit der heutigen beinahe identische Form, worin der Divisor für jede Multiplikation wiederholt wird. Dieser Divisor wird öfters in Klammern gesetzt oder weiter nach links geschrieben, um bei der Subtraktion weniger im Wege zu sein. Diese Art wurde in Deutschland viel gebraucht. Barrême nennt sie division à l'italienne longue und Pescheck die französische Art[2]).

In G. wird durch Hilfe der Addition das zweifache, dreifache usw. des Divisors gefunden, so daß man die Rechnung ohne Einmaleins, „ja sogar ohne Neppersche Stäbe"[3]) durchführen und den Quotienten ohne Raten finden kann[4]). „Das Dividiren ohne Ein mal Eins nennt man das Indianische"[5]).

H. ist eine alte Form, die Ende des 18. Jahrhunderts in den besten Werken alle anderen Arten verdrängt hatte. Um Verwirrung zu vermeiden, wird nach jeder Subtraktion die nächste Ziffer im Dividend mit dieser zum gebliebenen Reste heruntergezogenen Ziffer öfters mit einer geraden Linie verbunden; oder die Anzahl Ziffern, die noch nicht heruntergezogen sind, wird nach jedem neuen Teildividend durch Punkte angedeutet[6]).

---

[1]) Heynatz, op. cit. S. 114. [2]) Sterner, op. cit. S. 330. [3]) Heynatz, op. cit. S. 116. [4]) Es ist bemerkenswert, daß diese Divisionsart schon von Adrianus Romanus (1561—1615) in einer Schrift Nova Multiplicandi, Dividendi, Quadrata componendi, Radices extrahendi ratio, multò quam pervulgata certior, facilior, & majoribus maximè numeris accommodatio, erklärt wurde. [Vide H. Bosmans, S. J., „La Méthode D'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres" in Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, T. XXVIII, 2e partie.] [5]) J. F. Maler, op. cit. S. 62. [6]) J. F. Maler, op. cit. S. 63, nennt diese Methode die Portugiesische.

Um genauere Angaben über den Gebrauch der verschiedenen Divisionsarten zu machen, bemerken wir, daß von den Werken, die während der Jahre 1759—1799 gedruckt wurden und dem Übersichdividieren Aufmerksamkeit schenken, die meisten Ausgaben früher erschienener Werke sind. Von 103 mathematischen Büchern, die uns zur Einsicht vorlagen, sind Bartjens und Pescheck die einzigen, die das Übersichdividieren ausschließlich benutzen. Die ersten Auflagen beider Werke erschienen lange vor der Zeit, die wir jetzt betrachten. Nur 16 Bücher erklären das Oberwärts- sowohl als das Unterwärtsdividieren. Die übrigen — ungefähr fünfsechstel der ganzen Anzahl — erklären das Unterwärtsdividieren, nämlich eine oder mehrere der Formen C, F, G, H; gewöhnlich ziehen sie eine der Arten F, G, H der Form C vor.

Bei Dezimalbrüchen werden von etwa einviertel der Schriftsteller dieser Zeit die abgekürzten Multiplikations- und Divisionsmethoden erklärt. Die abgekürzte Multiplikation wird theoretischer- und praktischerseits in einer Abhandlung von Isidoro Bernareggi (1735 bis 1808), Priester und Professor der Mathematik an der königlichen Schule zu Lodi, behandelt[1]). Bernareggi untersucht die Anzahl der Dezimalstellen in den Faktoren, welche notwendig sind, damit der Fehler im Produkte eine vorgelegte Grenze nicht übersteige. In der Ausführung der Multiplikation schreibt er die Ziffern des Multiplikators in entgegengesetzter Reihenfolge. In seiner Aritmetica riformata, Milano 1797, werden diese Ideen für Schulzwecke dargestellt.

Ein anonymes Werkchen über den gleichen Gegenstand, Essai sur les nombres approximatifs, Paris, an VII — 1799, wird Jean Antoine François Massabiau (1765—1837) zugeschrieben[2]) welcher ein eifriger Anhänger der Prinzipien von 1789 war und 1795 die Normalschule in Paris besuchte. In diesem Aufsatze stellt er sich die Aufgabe, allgemeine Formeln für die durch Kombination annähernder Zahlen entspringenden Fehler herzuleiten. Soll z. B. eine solche Zahl N durch eine andere N' dividiert werden, wo Q und Q' beziehungsweise die genauen Werte darstellen, so daß $Q = N \pm e$ und $Q' = N' \pm e'$, dann wird der Fehler $(\pm N'e \mp Ne') : N'(N' \pm e')$. Von den vier Werten, welche dieser Ausdruck annehmen kann, ist $(N'e + Ne') : N'(N' - e')$ der größte. Wenn $e = e' = \frac{1}{2}(10^{-n})$, und $\pm x$ die Entfernung vom Dezimalpunkte der höchsten Ziffer im Quotienten

[1]) Memorie di matematica e fisica della società Italiana, Tomo VI, Verona 1792, p. 1—70. [2]) Biogr. Universelle (Michaud).

$N : N'$ darstellt, während y dieselbe für $10^n N'$ repräsentiert, dann hat man, für $N > N'$, $z = x + n + 1 - y$ und, für $N < N'$, $z = n + 1 - y$, wo der Fehler im Quotient kleiner als $10^z : 2(10^n)$ sein soll. Man soll z. B. die Anzahl Dezimalstellen finden, um, in der Division von $Q = 63.04545\ldots$ mit $Q' = .6666\ldots$, den Fehler $< \frac{1}{.2}(10^{-2})$ zu machen. Hier ist $x = 2$, $y = n$, $z = n - 2$, folglich $n = 5$, die erforderliche Anzahl Dezimalstellen im Dividend und Divisor.

Die Zeichensprache der Arithmetik und Algebra hatte in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts bedeutende Vollständigkeit und Uniformität erlangt. Die Zeichen + und − findet man beinahe überall. In mehreren holländischen Werken und einem deutschen Werke[1]) sind wir statt − dem alten Rudolffschen Zeichen ÷ begegnet. In der Maandelykse mathematische Liefhebbery, 1754—69, wird ÷ regelmäßig als Subtraktionszeichen geschrieben. Wie unten angedeutet, galt ÷ in England als Divisionszeichen und auf dem Festlande als Symbol einer arithmetischen Progression. In dieser Liefhebbery findet man auch die eigentümliche Bezeichnung von $\sqrt{\frac{4225}{65}}$ als $\sqrt{4225} = 65$, und $\frac{x+1}{xx+2x+1}\sqrt{}$ als

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Außer in der Proportionenlehre hatte = in allen Gebieten der Rechenkunst als Zeichen der Gleichheit sich eingebürgert. Während der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts verschwanden die letzten Spuren[2]) des Descartesschen ∝. Auch in der Proportionenlehre war = in Deutschland üblich. Leibniz' Sprache folgend wurde dort beinahe immer für geometrische Proportion $a : b = c : d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ geschrieben, während in Frankreich, Spanien, Portugal, Italien und England das Oughtredsche Zeichen :: allgemeinen Beifall genoß und $a : b :: c : d$ die gewöhnliche Bezeichnungsart war. Überhaupt herrschte damals bedeutende Verschiedenheit in der Zeichensprache für arithmetische und geometrische Proportionen und Pro-

---

[1]) Arithmetisches Handbuch für Lehrer in den Schulen ... von Carl Christian Illing, Dresden-Friedrichstadt 1793, S. 11. [2]) M. Gallimard in seiner Méthode Théorique et Pratique D'Arithmétique, D'Algèbre et de Géométrie ..., Paris 1753, p. 26, sagt: = signifie est égale à, ∝ signifie tout simplement, égal à, ou qui est égal à. Er schreibt S. 42: „Donc $x \propto \frac{90}{6} = 15$". Odoardo Gherli, op. cit., 1770, Tomo I, p. 6, erinnert den Leser daran, daß „Il Cartesio in vece di = usa il segno ∝".

gressionen. Für die Regeldetri hatte man in früheren Jahrhunderten verschiedene Bezeichnungen. Als im 18. Jahrhundert diese Regel mehr und mehr als eine Anwendung der Proportion, der Gleichheit zweier oder mehrerer Verhältnisse, aufgefaßt wurde, fand die frühere Zeichensprache dieser Regel öfters Eingang unter den Proportionssymbolen. Bartjens[1] 1771 schreibt $\overset{\text{elle}}{4} — \overset{\text{guld.}}{9} — \overset{\text{elle}}{16}$. Für das unbekannte vierte Glied gibt er gar kein Symbol. Pescheck 1759 und viele andere tun desgleichen. Thomas Dilworth[2] klagt, daß einige Meister lange Striche statt Punkte gebrauchen, um die Glieder zu trennen, was nicht recht sei, weil in $a:b::c:d$ die : zeigen, daß die zwei ersten und die zwei letzten Glieder in gleicher Proportion seien, während das :: die zwei Paare trenne und zugleich zeige, daß das zweite Glied zum dritten sich nicht wie das erste zum vierten verhalte. Die Proportion als die Gleichheit zweier Verhältnisse ist von Dilworth noch nicht klar erfaßt. Rivard[3] schreibt 1768 eine geometrische Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $a.b::c.d$. M. l'Abbé Maries Auflage von De la Caille[4] schreibt $a.b::c.d$ oder $a:b::c:d$; während die lateinische Auflage des De la Caille[5] 1762 und die italienische Auflage von Boscovich[6] 1796 $a:b::c:d$, $a:b=c:d$, oder $a|b\|c|d$ enthalten. Die lateinische Übersetzung gibt auch $a.b::c.d$, und die italienische $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Die arithmetische Proportion deuteten Rivard, De la Caille und Bézout[7] durch $a.b:c.d$ an. In deutschen Büchern findet man öfters $a.b = c.d$ oder $a - b = c - d$. Mit Recht klagt Scheibel[8], daß wenn $a.b = c.d$ geschrieben wird, man den Punkt mit dem Multiplikationszeichen leicht verwechseln könne.

Die geometrischen und arithmetischen Progressionen wurden noch immer in die Rechenbücher aufgenommen. Allgemein brauchte man $\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{-}}$ als das Symbol der geometrischen Progression ($\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{-}}$ 1 . 2 . 4 . 8 . 16) und, mit der Ausnahme von England, öfters $\div$ als das Symbol der

[1] Bartjens-Jan van Dam, op. cit. S. 36. [2] Thomas Dilworth, op. cit., unter The Explication of some Marks used in this Compendium.
[3] Éléments de Mathématiques par M. Rivard, Professeur de Philosophie en l'Université de Paris. Sixième Édition, Revue et augmentée de nouveau par l'Auteur. A Paris 1768, p. 135. [4] Leçons de Mathématiques par M. l'Abbé de la Caille, avec des augmentations par M. l'Abbé Marie, Paris 1770, p. 148. [5] De la Caille, Lectiones . . . a C.[arolo] S.[cherffer] e S. J. Viennae, Pragae, et Tergesti 1762, p. 76. [6] Elementi . . . del Padre Ruggero Giuseppe Boscovich. Editione terza italiana . . . in Venezia 1796, p. 115.
[7] Bézout, op. cit., Tome I, p. 128. [8] Einleitung zur Mathematischen Bücher Kentnis, Breslau 1781, Bd. I, S. 679.

arithmetischen Progression (÷ 3 . 6 . 9 . 12 . 15). In Großbritannien gilt das ganz ähnliche von J. H. Rahn 1659 zuerst gebrauchte Symbol ÷ statt : als Divisionszeichen; weshalb von Schriftstellern, welche überhaupt für die arithmetische Progression die Notwendigkeit eines Zeichens fühlten, ÷ gebraucht wurde. Diese Bezeichnung findet man auch mitunter in deutschen Büchern[1]). W. Emerson[2]) bezeichnet eine harmonische Proportion durch ∴ und eine harmonische Progression durch $\div\!\!\div$.

Algebra.

Im Studium der Algebra war viel größerer Verkehr zwischen den verschiedenen Ländern Europas als im Studium der Arithmetik. Wegen der Abwesenheit einer streng provinziellen Behandlungsweise der Algebra wird es nicht nötig sein, die Geschichte dieser Wissenschaft in jedem Lande einzeln zu verfolgen.

Einige Werke über Algebra, die während der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, und zwar 1740—1748, verfaßt wurden, waren noch während der zweiten Hälfte sehr einflußreich, nicht nur im Lande ihrer Entstehung, sondern in ganz Europa, wo immer die Wissenschaft betrieben wurde. Von englischen Werken heben wir das Elements of Algebra von Nicholas Saunderson (1682—1739) hervor, welches 1740 zu Cambridge in zwei Bänden erschien. Dieser blinde Mathematiker stand als Jüngling im Briefwechsel mit Sir Isaac Newton und war der Nachfolger von Whiston als Lucasian Professor der Mathematik an der Universität Cambridge. Weite Verbreitung in England fand der Auszug aus dem Originalwerk: Select parts of Professor Saunderson's Elements of Algebra for the use of students at the Universities. Die 3. Auflage davon wurde 1771 in London veröffentlicht, die 4. Auflage 1776, die 5., von John Hellins (?—1827) verbessert, 1792. Das Originalwerk wurde 1756 in französischer Übersetzung von Elie de Joncourt zu Amsterdam und Leipzig in zwei Bänden herausgegeben. Eine deutsche Übersetzung rührt von Johann Philipp Grüson, Professor am adelichen Cadettencorps in Berlin, her. (Erster Teil 1798, Halle; zweiter Teil 1805.)

---

1) Z. B. in der Unterweisung in den philos. u. math. Wissenschaften für die obern Classen d. Schulen u. Gymnasien von Johann Jacob Ebert, Prof. d. Math. zu Wittenberg. Dritte vermehrte u. verbesserte Auflage, Leipzig 1787, S. 187. 2) The Doctrine of Proportion, Arithmetical and Geometrical . . ., London 1763, p. 2.

Ein anderer englischer Schriftsteller, den wir erwähnen müssen, ist Thomas Simpson (1710—1761), Professor an der königlichen Militärakademie zu Woolwich. Seine Treatise on algebra wurde 1745 in London gedruckt; eine dritte Auflage 1767, eine fünfte 1782, eine achte 1804. Die erste amerikanische Ausgabe erschien 1809 in Philadelphia. Eine Übersetzung in französischer Sprache wurde 1771 in Paris veröffentlicht.

Ein drittes Werk wurde von dem schottischen Mathematiker Colin Maclaurin unter dem Titel Treatise of Algebra 1748 zu London veröffentlicht, wovon die 4. Auflage 1779 erschien.

Die weite Verbreitung von De La Cailles Leçons élémentaires de mathématiques nicht nur in Frankreich, sondern auch in Italien, ist von uns schon früher hervorgehoben worden (S. 47, 48). Eine lateinische Übersetzung durch „C. S. e S. J.“ (= Carolo Scherffer, S. J.) erschien 1762 zu Wien, Prag und Triest. Scherffer verfaßte eine Anzahl eigener Lehrbücher, von welchen die Institutiones analyticae, Wien 1770, hier Erwähnung verdienen.

Das bedeutendste Werk dieser Zeit war aber das nach der heuristischen Methode verfaßte Éléments d'algèbre des Alexis Claude Clairaut, Paris 1746.

Dieses berühmte Werk wurde 1752 von Christlob Mylius (1678—1754) zu Berlin ins Deutsche übersetzt und an der Universität Göttingen gebraucht, bis es von Kästners Kompendien verdrängt wurde[1]). Clairauts Algebra erschien in holländischer Sprache 1760 zu Amsterdam, von Arnoldus Bastiaan Strabbe übersetzt. Eine 5. französische Ausgabe in zwei Bänden von S. F. Lacroix erschien 1797 in Paris. Diese enthält Anmerkungen und Nachträge über Gleichungstheorie, Kettenbrüche und Logarithmen, den Vorlesungen von Lagrange und Laplace an der Normalschule entnommen, und eine einleitende Elementarschrift über Arithmetik, die in der Vorrede als größtenteils die Arbeit des jungen Jean Baptiste Biot (1774—1862) bezeichnet wird. Lacroix schrieb an Pietro Paoli von Pisa, diese Ausgabe sei doppelt so umfangreich als die früheren und enthalte Theorien, die vorher nie in Elementarwerken erklärt worden seien[2]). Die 6. Auflage (1801 zu Paris) ist vom Citoyen Jean Guillaume Garnier (1766—1840), Professor an der Polytechnischen Schule, bearbeitet und enthält eine arithmetische Ab-

---

[1]) C. H. Müller, „Studien z. Gesch. d. Math. . . . an der Univ Göttingen“, Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., 18. Heft, Leipzig 1904, S. 113. Eine zweite Auflage, Berlin 1778, enthielt Zusätze von G. F. Tempelhof. [2]) Memorie della regia accademia di scienze, Modena, Serie III, Tom. I, 1898, Sezione di Scienze, p. 109.

handlung von Charles Marie Simon Théveneau (1759—1821) Clairauts Algebra wurde von Mathematikern hoch geschätzt. Lambert schien in seinen ersten Schriften Forschungsergebnisse, die nicht im Clairaut zu finden waren, als neu und deshalb der Veröffentlichung würdig anzusehen.

Im Jahre 1758 erschien in Halle der zweite Teil des Cursus mathematici von Johann Andreas Segner (1704—1777), damals Professor an der Universität Halle. Dieser Teil führte den Titel Elementa analyseos finitorum und behandelte die Algebra. Obschon Segner einer der besten Mathematiker und Physiker in Deutschland war, fand sein Kursus nicht viele Leser. Segner schrieb in Latein und stellte auch an die Fähigkeiten seiner Schüler hohe Ansprüche. Von 1735—1754 war er Professor der Naturlehre und Mathematik in Göttingen. Sein Nachfolger an dieser Universität war Abraham Gotthelf Kästner, welcher 1760 in Göttingen unter dem Titel Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen ein Werk verfaßte, welches den Bedürfnissen des Universitätsunterrichts in Deutschland entsprach und zugleich die Lehren der großen Mathematiker seiner Zeit so erfolgreich popularisierte, daß es lange Zeit das beliebteste Kompendium war. Eine zweite Ausgabe erschien 1767; eine sechste vor dem Schlusse des Jahrhunderts.

Als zweite, während der Periode 1759—1799 verfaßte Schrift nennen wir den algebraischen Teil des schon früher (S. 40) angeführten Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, 1764—1769, von Bézout, worin eine elementare Darstellung der von Bézout 1764 veröffentlichten berühmten Abhandlung über die Auflösung von Gleichungen (S. 98) gegeben ist. In seinem Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, 1770—1772, wird diese Darstellung weggelassen, wahrscheinlich weil die Sache für Anfänger zu schwer war. Sonst ist die Algebra von 1770—1772 mit der früheren beinahe identisch.

Der zweite Teil eines achtbändigen Werkes, betitelt Lehrbegrif der gesamten Mathematik von Wenceslaus Johann Gustav Karsten (1732—1787), erschien 1768 zu Greifswald. Karsten lehrte seit 1760 an der neuen Universität Bützow. Durch sein Werk erhielten die auf Mittel- und Hochschulen eingeführten Kompendien von Wolf, Segner, Kästner eine gefährliche Konkurrenz[1]).

Ohne Zweifel das einflußreichste Buch über Algebra im 18. Jahrhundert ist die Vollständige Anleitung zur Algebra von Leonhard Euler (erste deutsche Ausgabe 1770 in St. Petersburg). Die

[1]) Allg. Deutsche Biographie (Art. v. Günther).

Entstehungsweise des Werkes ist interessant. Euler schrieb in der Gazette litt. de Berlin, 1768, fol. 245, ich „nehme mir die Freiheit, Ihnen von meinen Arbeiten Nachricht zu ertheilen, mit welchen ich mich seit dem Verlust meines Gesichtes beschäftigt habe, der von Herrn Krafft und meinem älteren Sohne dadurch ersetzt worden, daß sie meine Ideen ausgearbeitet und öfters durch ihre eigne Ansichten weiter ausgeführt haben“[1]). Bestimmtere Auskunft findet man im Vorbericht zur Ausgabe von 1770: Um das Lehrbuch zu verfertigen, „erwählte er sich einen jungen Menschen, den er mit sich aus Berlin zur Aufwartung genommen hatte, und der ziemlich fertig rechnen, sonsten aber nicht den geringsten Begriff von der Mathematik hatte: er war seines Handwercks ein Schneider, und gehörte was seine Fähigkeit anlangt, unter die mittelmäßigen Köpfe. Dem ohngeachtet hat er nicht nur alles wohl begriffen, was ihm sein großer Lehrer vorsagte, und zu schreiben befahl, sondern er wurde dadurch in kurzer Zeit in den Stand gesetzt die in der Folge vorkommende schwere Buchstaben-Rechnungen ganz allein auszuführen.“

Im Vorbericht der Ausgabe von 1770 wird auch mitgeteilt, daß „schon vor zwey Jahren eine russische Uebersetzung zum Vorschein gekommen ist“. In etwas kleinerem Druck als die erste deutsche Ausgabe erschien 1771 eine zweite, welche als Verlagsort in vielen Exemplaren Lund, in anderen St. Petersburg angab. Eine Übersetzung ins Französische wurde von Johann Bernoulli III., Direktor an der Sternwarte zu Berlin, angefertigt und von Joseph Louis Lagrange mit Zusätzen über die unbestimmte Analysis versehen. Diese berühmte Ausgabe erschien 1774 zu Lyon. Andere französische Ausgaben erschienen zu Lyon 1795 (an III), St. Petersburg und Paris 1798, Paris 1801[2]).

Valentin[3]) nennt zwei holländische Ausgaben, Amsterdam 1773, Dordrecht 1807.

Eine lateinische Ausgabe, mit den Zusätzen von Lagrange, wurde 1790 in Venedig gedruckt. In den Jahren 1796—1797 veröffentlichte Johann Philipp Grüson zu Berlin die erste deutsche Ausgabe nach der von 1771, obgleich 1789 ein Auszug von Eulers Algebra von Johann Jacob Ebert, Professor der Mathematik zu Wittenberg, in Frankfurt am Main geliefert worden. Eine andere deutsche Ausgabe erschien in St. Petersburg im Jahre 1802. Es ist auffallend,

---

1) Scheibel, Einl. zu Math. Bücherkentnis, Breslau 1781, Bd. I, S. 102.

2) G. Valentin in Bibliotheca Mathematica, N. F. 12, 1898, S. 42. 3) Ebenda, S. 42. Hier werden auch einige andere, von uns nicht angeführte Ausgaben angegeben.

daß vor 1797 keine englische Übersetzung angefertigt wurde. In diesem Jahre gab John Hewlett unter der Mitwirkung seines Schülers Francis Horner zu London eine solche aus dem Französischen, wovon die zweite Auflage 1810, die dritte 1822 und die fünfte 1840 erschien. In der zweiten schreibt der Herausgeber überall x^2 statt des früher gebräuchlichen $x \,.\, x$, und x^3 statt $x \,.\, x \,.\, x$. Im Jahre 1818 gab John Farrar, Professor der Mathematik an der Harvard Universität zu Cambridge in Massachusetts, einen Auszug heraus, welcher den Titel führt An Introduction to the Elements of Algebra, . . ., Selected from the Algebra of Euler.

In Italien schrieb Padre Odoardo Gherli 1771 zu Modena den zweiten Teil des schon auf S. 47 angeführten siebenbändigen Kompendiums, Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure, worin die Algebra mit großer Vollkommenheit erklärt wird. In der Vorrede zum letzten Bande wird ein Gratulationsschreiben von Lagrange an Gherli angeführt, worin Lagrange den Autor auch auf seine eigenen Abhandlungen über die Auflösung von Gleichungen in den Berliner Memorien der Jahre 1770 und 1771 (veröffentlicht 1772 und 1773) aufmerksam macht. Es folgt dann ein Auszug dieser Abhandlungen. Gherlis Bücher fanden in Italien nur geringen Absatz, was vielleicht ihrem unpassenden Quartoformat zuzuschreiben ist.

Pietro Paoli, Professor an der Universität Pisa, gab 1794 ein Werk mit dem Titel Elementi d'algebra in drei Bänden heraus, deren erster der Algebra von endlichen Größen gewidmet ist. Obschon die Elementarteile eher kurz gefaßt sind, wurde das Werk von Mathematikern hoch geschätzt.

Im Jahre 1799 (an VII) erschien in Paris die erste Auflage der Élémens d'algèbre von Sylvestre François Lacroix, ein Werk, welches nicht nur in Frankreich, sondern in ganz Europa und in den Vereinigten Staaten großen Einfluß auf den Unterricht ausübte. Im gleichen Jahre veröffentlichte James Wood in Cambridge seine Elements of Algebra, die auf den englischen Universitäten lange Zeit als „standard work" galten[1]).

Nachdem wir nun die bedeutenderen Lehrbücher über Algebra, welche während der Zeit gedruckt wurden, aufgezählt haben, werden wir die damalige Darstellung von Grundprinzipien dieser Wissenschaft unserem Studium unterziehen. Wie wurde der Zahlbegriff aufgefaßt? Inwieweit wurde die Algebra logisch entwickelt? Wir machen die einleitende Bemerkung, daß die Mathematik noch allgemein als die

---

[1]) W. W. R. Ball's Mathematics at Cambridge, 1889, p. 110.

Wissenschaft von der Größe definiert wurde. Man findet diese Definition z. B. in den Werken von Christian Wolff[1]), Kästner[2]), La Caille[3]), Sauri (1741—1785)[4]), Bézout[5]), D'Alembert[6]), Abel Bürja[7]), Georg Vega (1756—1802)[8]), Johann Georg Büsch[9]), Johann Friedrich Lorenz[10]), Georg Metzburg[11]), Johann Heinrich Voigt[12]), Pietro Paoli[13]). In keinem Lehrbuch sind wir einer wesentlich verschiedenen Definition begegnet. Sie ist alt, kann aber kaum griechischen Ursprungs sein, denn die Griechen hatten eine Geometrie, worin Probleme vorkamen, wie dasjenige, zu entscheiden, ob vier Punkte auf einer Ebene liegen. Solche Probleme hatten mit Größenbestimmungen nichts zu tun. Im 17. und 18. Jahrhundert fand der Ausdruck, Mathematik „die Wissenschaft von der Größe", wenig Anstoß. Immanuel Kant war mit demselben nicht einverstanden. Einige Ideen von Lagrange, die in seinen Untersuchungen über Gleichungen enthalten sind und die Keime der Substitutionstheorie sind, passen in diese Auffassung der Mathematik nicht hinein. Dennoch war sie bei Mathematikern beinahe universal.

Wenn aber Mathematik die Wissenschaft von der Größe ist, dann muß der einfachste mathematische Akt — das Zählen — notwendig als eine Messung und die Zahl als ein Verhältnis angesehen werden. Dieser Schluß wurde aber unseres Wissens in Wirklichkeit nicht gezogen, obschon viele Autoren dem Beispiel von Newton folgten und die Zahl als ein Verhältnis betrachteten. An den Begriff der meßbaren Größen anknüpfend, drückt sich Christian Wolff so aus: „Zahl ist dasjenige, was sich zur Einheit verhält wie eine gerade Linie zu einer gewissen anderen Geraden"[14]). Bei Ausmessungen kommt es darauf an, sagt Leonhard Euler[15]), „daß man bestimme, in was für einem Verhältniß die vorgegebene Größe gegen dieses [Einheits-] Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß

---

1) Mathemat. Lexicon, Leipzig 1716, Artikel „Mathematik". 2) Anfangsgründe d. Arithmetik, Geometrie usw., Göttingen 1758, S. 3. Dieses Werk wurde später mit neuen Teilen unter dem Titel Anfangsgründe der Mathematik zusammenbegriffen. 3) Leçons élémentaires de mathématiques, Paris 1770, p. 1. 4) Cours complet de mathématiques par M. l'Abbé Sauri, ancien professeur de philosophie en l'université de Montpellier, T. I, Paris 1774, p. 1. 5) Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, Paris 1797, p. 1. 6) Encyclopédie méthodique, „Mathématique". 7) Der selbstlernende Algebrist, I. Teil, Berlin und Libau 1786 (Vorrede). 8) Vorles. ü. d. Mathematik, I. Bd., 3. Aufl., Wien 1802, S. 2. 9) J. G. Büsch, op. cit. S. 1. 10) J. F. Lorenz, op. cit., Bd. I, 1798, S. III. 11) Anleitung zur Mathematik, I. Teil, Wien 1798, S. 1. 12) Grundlehren d. reinen Math., Jena 1791, S. 1. 13) Paoli, op. cit. T. I, S. 1.
14) Elementa matheseos universae (Elementa arithmeticae) Halae 1710, art. 10.
15) Anleitung zur Algebra, I. Teil, St. Petersburg 1770, S. 5.

eine Zahl nichts anders ist als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht. Hieraus ist klar, daß sich alle Größen durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller mathematischen Wissenschaften darin gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen ... genau in Erwegung ziehe, und vollständig abhandele." Hier ist der Gedankengang dem von uns oben angedeuteten entgegengesetzt. Die quantitative Idee wird der Zahl zugeschrieben und daraus der Schluß gezogen, daß Mathematik die Wissenschaft von der Größe sei. Dann und wann findet man auch in anderen Lehrbüchern dieser Zeit die Zahl ausdrücklich als ein Verhältnis erklärt. „Das 1 selber ist eine Zahl: denn 1 hält eine Verhältnuss zu eins", sagt einer[1]). „Das Verhältnis irgend einer Größe zu einer gleicher Art, die als Einheit erwählt ist, wird eine Zahl genannt, und man nennt Arithmetik die Wissenschaft von solchen Verhältnissen"[2]). Gewöhnlich wird aber der Begriff des Verhältnisses oder des Messens nicht so scharf hervorgehoben, so daß man im Zweifel ist, ob das Zählen als ein wirkliches Messen aufgefaßt wurde. „Eine Menge von Dingen einer Art heißt eine ganze Zahl", sagt Kästner[3]). Diese Definition der Zahl ist der Euklidischen, „eine aus Einheiten bestehende Menge", ganz ähnlich und hat keine notwendige Verknüpfung mit Verhältnissen. Bei Euklid waren Verhältnisse keine Zahlen. Bei Bézout[4]) scheint der Meßbegriff vorzuherrschen, denn er sagt: „le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unités, une quantité est composée" und „l'unité est une quantité que l'on prend .. pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce". Andere Schriftsteller führen unbedeutende Wortänderungen ein. „Mehrere gleichnamige Einheiten machen eine Zahl aus"[5]). „Mehrere solche zusammengestellte Einheiten geben eine ganze Zahl"[6]). Ob bei diesen und ähnlichen Ausdrücken, die in Lehrbüchern allgemein vorkommen, die Zahl ausschließlich als ein Verhältnis anzunehmen ist oder nicht, hängt davon ab, ob die Schriftsteller stillschweigend den Gedankengang von Newton und Wolf oder von Euklid befolgten.

J. F. Heynatz[7]) macht die Bemerkung: „Einige leugnen, daß Eins oder die Einheit eine Zahl sey, und lassen nur das, was durch die Wiederholung der Einheit herauskömmt .. für eine Zahl gelten".

---

[1]) Jacob Friederich Maler, Unterricht zum Rechnen, Carlsruhe 1765, S. 23. [2]) E. Develey, Arithmétique D'Émile, 2. Éd., Paris 1802, p. 2. [3]) Kästner, op. cit. S. 21. [4]) Bézout, op. cit. T. I, p. 2. [5]) Matthias Haußer, Analytische Abhandlung der Anfangsgründe d. Mathematik, I. Teil, Wien 1778, S. 1. [6]) Johann Georg Prändels Arithmetik, München 1795, S. 3
[7]) Heynatz, op. cit. S. 3.

Condillac[1]) hebt hervor, daß wenn eine Zahl als eine Menge von Einheiten angenommen wird, 1 keine Zahl sei. Gherli[2]) sagt ausdrücklich: „l'unità non è numero".

Kästner nennt einen Bruch eine ganze Zahl, deren Einheit ein Teil der ursprünglichen Einheit ist und so viele Einheiten hat, als der Zähler anzeigt. Irrationalzahlen oder surdische Zahlen lassen sich nach Kästner „weder durch ganze Einheiten noch durch Theile der Einheit vollkommen richtig ausdrücken"[3]).

Einen ganz neuen Zahlbegriff, welchem die Mathematiker des 18. Jahrhunderts gar keine Aufmerksamkeit schenkten, gab Immanuel Kant 1781 in seiner Kritik der reinen Vernunft[4]), worin er sich so ausspricht: „Das reine Schema der Größe aber (quantitatis), als eines Begriffes des Verstandes ist die Zahl, welche eine Vorstellung ist, die die successive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammen befaßt; also ist die Zahl nichts anderes als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge". Erst im 19. Jahrhundert wurde dieser auf die Vorstellung der Zeit gegründete Zahlbegriff von einigen Mathematikern (z. B. W. R. Hamilton) freundlich aufgenommen.

Die Erweiterung des Zahlbegriffs durch die Einführung negativer Zahlen war die Folge des Bedürfnisses, die Subtraktion allgemein ausführen zu können. Eine solche Allgemeinheit wurde in der Entwicklung der Algebra schon früh als eine große Bequemlichkeit erkannt. Zur Einführung negativer Zahlen durch die Not gedrungen, war es den Mathematikern nie gelungen, die Theorie derselben von störenden Paradoxien zu befreien. In der zweiten Hälfte des Jahrhunderts wurden die allgemeinen Erklärungen negativer Zahlen und ihrer Operationsregeln allmählich als unzureichend erkannt, ohne daß aber im 18. Jahrhundert eine strenge Entwicklung der logischen Voraussetzungen erreicht wurde. Gegen Ende des Jahrhunderts begegnet man Forschern da und dort, die den Zahlbegriff auf positive Zahlen beschränken möchten, um dadurch die „Pfuschereien" in der Mathematik zu vermeiden. Der Einwand gegen imaginäre Zahlen war noch stärker als gegen die negativen, obschon alle Mathematiker ersten Ranges von beiden ohne Bedenken beständigen Gebrauch machten.

Ein Schriftsteller, welcher während der letzten vierzig Jahre des Jahrhunderts in England eine Reaktion gegen den Gebrauch von

---

[1]) La langue des calculs, p. 42. [2]) Gherli, op. cit. T. I, p. 2. [3]) Kästner, op. cit. S. 102. [4]) Kants sämtl. Werke, herausgeg. von Hartenstein, III, S. 144.

negativen und imaginären Größen in der Algebra hervorzurufen suchte und bei einigen gewissenhaften Mathematikern nicht ersten Ranges auch Anerkennung fand, war Francis Maseres (1731 bis 1824). Schon früher hatte Robert Simson, welcher 1711 zum Professor der Mathematik an der Universität von Glasgow ernannt wurde und während beinahe fünfzig Jahren diese Stelle bekleidete, negative Zahlen in der Algebra verworfen[1]). Maseres schrieb 1758 zu London eine in der Gleichungstheorie weiter zu besprechende Dissertation on the use of the negative sign etc. Er war damals „fellow of Clare-Hall" in Cambridge. In dieser und in späteren Schriften sucht er negative, sowie imaginäre Größen aus der Algebra zu verbannen, durch welche die sonst klare und elegante Wissenschaft bewölkt worden sei. Eine negative Größe definiert er als eine Zahl, die von einer größeren abgezogen werden soll. Der Ausdruck $a - b$ habe keinen Sinn, wenn $b > a$ ist; $(-5)(-5) = +25$ bedeute nur, daß $5 \times 5 = 25$, ohne Rücksicht auf Zeichen, oder es sei lauter Unsinn. So lange er nur im Bereich der positiven Zahlen zu rechnen unternahm, mußten natürlich alle wirklich negativen Zahlen sinneswidrig erscheinen.

Die Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und ebenen und sphärischen Trigonometrie von A. G. Kästner, welche im gleichen Jahre (1758) zu Göttingen erschienen, enthalten eine wirkliche Erweiterung des Zahlbegriffs, obschon die Exposition noch immer mangelhaft ist. „Entgegengesetzte Größen heißen Größen von einer Art, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden, daß die eine die andere vermindert" (I. Cap., Art. 90). „Man kann die verneinende Größe als etwas, das von der bejahenden abgezogen werden muß, ansehen, und also mit dem Zeichen — bezeichnen, wenn die bejahende + hat" (Art. 92). „Die verneinende Größe kann die bejahende übertreffen" (Art. 93). „Dieses Negative, das übrig bleibt, ist eine wirkliche Größe, nur der, die als positiv betrachtet wird, entgegengesetzt" (Art. 94). Die Auffassung, daß eine verneinende Größe „abgezogen werden muß", hat bis in das 19. Jahrhundert gedauert.

Von Kästner beeinflußt, verfaßte Immanuel Kant 1763 eine Schrift, Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen[2]). „Einander entgegengesetzt ist, wovon Eines dasjenige aufhebt, was durch das Andere gesetzt ist.

---

[1]) C. Wordsworth, Scholae Academicae: Some Account of the Studies at English Universities in the 18. Century, 1877, p. 68. [2]) I. Kant, Sämmtliche Werke, herausg. v. G. Hartenstein, Bd. II, Leipzig 1867, S. 71—79.

Diese Entgegensetzung ist zwiefach; entweder logisch durch den Widerspruch, oder real, d. i. ohne Widerspruch." „Es sind die negativen Größen nicht Negationen von Größen, wie die Ähnlichkeit des Ausdrucks ihn hat vermuten lassen, sondern etwas an sich selbst wahrhaftig Positives, nur was dem andern entgegengesetzt ist." Seine Exposition der Zeichen + und — ist nicht so gewandt. „Da die Subtraction ein Aufheben ist, welches geschieht, wenn entgegengesetzte Größen zusammengenommen werden, so ist klar, daß das — eigentlich nicht ein Zeichen der Subtraction sein könne, wie es gemeiniglich vorgestellt wird, sondern das + und — zusammen nur zuerst eine Abziehung bezeichnen. Daher $-4-5=-9$ gar keine Subtraction war, sondern eine wirkliche Vermehrung und Zusammenthuung von Größen einerlei Art. Aber $+9-5=4$ bedeutet eine Abziehung, indem die Zeichen der Entgegensetzung andeuten, daß die eine in der anderen, soviel ihr gleich ist, aufhebe."

Um den Gedankengang in Lehrbüchern in größerer Kürze darstellen zu können, werden wir die Erklärungen in Eulers Vollständige Anleitung zur Algebra (1770) vorführen und sie kurz mit denen anderer Autoren vergleichen. Das Werk ist in populärem Stile geschrieben. Was logische Entwicklung von Grundprinzipien anbelangt, kann es aber mehreren anderen Werken dieser Zeit nicht vorgestellt werden. Der Ruhm dieses Lehrbuches scheint uns eher dem zweiten Teile, über die unbestimmte Analysis, als dem ersten Teile zuzuschreiben zu sein.

In Art. 8 sagt Euler: „Wann zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addiert werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird". Art. 11: „Wann hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen — minus angedeutet, welches soviel als weniger ist, und derselben Zahl, welche weggenommen wird, vorgesetzt wird". Nach dieser Einführung von + und — als Operationszeichen liest man folgendes in Artikel 16: „Hier kommt also die Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen eine jegliche Zahl vor sich stehen hat; daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen zu nennen, diejenigen aber, welche das Zeichen — vor sich haben, werden verneinende oder negative Größen genennet". Sind nach dieser Erklärung die Zeichen + und — noch immer überall als Operationszeichen zu betrachten? Hat man in den gewöhnlichen Rechenbüchern nicht auch negative Zahlen an Stellen, wo das Zeichen — benutzt wird? Kann eine negative Zahl zu einer anderen addiert werden? Darüber gibt der Autor keine genügende Auskunft.

Die Zeichen + und − in der Algebra immer nur als Operationszeichen ausdrücklich zu erklären, und sie hernach ohne zulängliche Auseinandersetzungen auch zur Bezeichnung positiver und negativer Zahlen zu gebrauchen, war ein allgemeines Verfahren in Lehrbüchern damaliger Zeit. Man findet es in den Werken von Clairaut, Maclaurin, Thomas Simpson, W. Emerson, William Trail[1]), Bézout, Sauri, Blassière, Büsch, Bürja, Prändel, Karsten, Gherli, Paoli, Da Cunha und Bossut. Daß bei diesem Verfahren die Erschaffung einer neuen Zahlengattung für die Verallgemeinerung der Subtraktion nicht klar hervortritt, ersieht man aus der Bemerkung von Thomas Simpson, daß $-a$ in einem Sinne so unmöglich sei wie $\sqrt{-b}$, da es nicht möglich sei, a von nichts abzuziehen, und der Begriff oder Irrglaube einer Größe weniger als Nichts sinneswidrig sei. Trail behauptet, eine negative Größe an sich sei unerklärlich. In einer Pariser Promotionsschrift des Jahres 1774 heißt es[2]): Keine absolute Größe kann $= -a$; weshalb die Zeichenregel in der Multiplikation nur für Polynomien gilt. Daß die Möglichkeit negativer Zahlen von vielen geleugnet wurde, erhellt auch aus einer Promotionsschrift gleichen Jahres an der Universität Kopenhagen, worin negative Größen durch Beispiele erklärt werden[3]).

In einigen Lehrbüchern werden + und − zuerst zur Bezeichnung entgegengesetzter Zahlen angewandt und dann später stillschweigend auch als Operationszeichen gebraucht. Dieses ist z. B. bei Saunderson[4]), Le Blond und Haußer der Fall. Die zweifache Bedeutung von + und − wird aber in einigen wenigen Schriften recht sorgfältig erklärt, z. B. in der Traité élémentaire de l'analyse mathématique, Paris 1797, von Jacques Antoine Joseph Cousin (1739—1800), Professor an dem Collége de France. Das Werk wurde von ihm zur Zeit der Schreckensherrschaft im Gefängnis geschrieben.

Bei der Multiplikation ist folgendes bei Euler (Artikel 32) von Interesse: „Wir wollen erstlich $-a$ mit 3 oder $+3$ multipliciren;

[1]) Elements of Algebra for the Use of Students in Universities, 3rd Ed. 1789 (1st Ed. 1778). Im Dict. of the anonymous and pseudonymous literature of Great Britain, by S. Halkett and J. Laing, Edinburgh 1882, p. 238, wird dieses Werk dem Rev. William Trail, Professor der Mathematik am Marishal College zu Aberdeen, zugeschrieben. [2]) Theses mathematicas demonstrabit Theodorus Anna Bourrée de Corberon, 1774 „Nulla quantitas absoluta est $= -a$; hinc in solis polynomiis obtinet signorum regula". [3]) S. A. Christensen, op. cit. S. 180. [4]) Saundersons Algebra, übersetzt von Grüson, Halle 1798, I. Teil, S. 102, 123.

weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß wann diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müsse, folglich wird das gesuchte Product $-3a$ seyn.“ Nicht so klar ist der nächste Ausspruch, daß „wann eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde“, da der Fall, wo $+a$ mit $-b$ multipliziert werden soll, gar nicht besprochen wird. Euler fährt fort (Art. 33): „Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nämlich, wann $-$ mit $-$ multiplicirt wird, oder $-a$ mit $-b$. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab: ob aber das Zeichen $+$ oder $-$ dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß, so viel aber ist gewis, daß es entweder das eine, oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen $-$ seyn? Dann $-a$ mit $+b$ mult. giebt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben, was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es muß das Gegentheil herauskommen, welches nehmlich heißt, $+ab$. Hieraus entsteht die Regul, $-$ mit $-$ multiplicirt giebt $+$ eben so wohl als $+$ mit $+$.“ Diese Aussprüche soll der Leser augenscheinlich als einen Beweis der paradoxischen Zeichenregel akzeptieren, obschon man dieselben kaum eine Demonstration nennen darf. Euler hätte beinahe ebenso gut behaupten können, das Produkt sei $-ab$, weil es eben nicht das geben kann, was $+a$ mit $+b$ gibt; ein Schluß‘ den wir später (S. 85) bei Daniel Porro wirklich vorfinden. Euler sucht gar nicht zu entscheiden, inwieweit die Operationsregeln einfach auf Voraussetzungen beruhen und inwieweit sie wirklich bewiesen werden können.

Die Beweisführungen dieser Regel in anderen Lehrbüchern weichen gewöhnlich von der Eulerschen bedeutend ab. „Um zu beweisen,“ sagt Saunderson[1]), „daß $+4$ multiplizirt mit -3, -12 macht, multiplizire man $+4$ nach einander mit $+3$, 0 und -3, und die Produkte machen eine arithmetische Progression; die zwey ersten sind 12 und 0, das dritte also -12, und das Produkt von $+4$ mit -3 gleich -12.“ Schreibt man hier überall -4 und $+12$, statt $+4$ und -12, hat man Saundersons Nachweis, daß $- \cdot - = +$. Der Leser muß dabei mit dem Satze „bekannt gemacht worden seyn“, daß wenn Zahlen in arithmetischer Progression durch einen Multiplikator, oder wenn eine Zahl durch jede Zahl einer arithmetischen Progression multipliziert wird, die Produkte ebenfalls eine arithmetische Progression bilden. Dieser ohne Beweis angenommene Satz birgt aber wichtige Voraussetzungen in sich.

---

[1]) Saunderson, Aufl. Grüson, 1798, I, S. 113.

Die Nachweise von Segner[1]), Karsten[2]) und Da Cunha[3]) ruhen auf einem unbewiesenen Satz und setzen zu gleicher Zeit stillschweigend voraus, daß $1 \cdot + b = + b$ und $1 \cdot - b = - b$ ein Teil dessen, was die Autoren beweisen wollen. Der Satz lautet: Wenn in einer Proportion die zwei ersten Glieder gleiche (oder ungleiche) Zeichen haben, müssen die zwei letzten auch gleiche (oder ungleiche) Zeichen haben. Es ist $1 : a = - b : a\,(-b)$, $1 : - a = b : (-a)\,b$, $1 : a = b : a \,.\, b$, $1 : - a = - b : (-a)(-b)$. Also müsse $+ a \cdot - b$ und $- a \cdot + b = - ab$, aber $+ a \cdot + b$ und $- a \cdot - b = + ab$ sein.

Clairaut betrachtet in seiner Algebra (Art. 43, 44, 45, 60) das Produkt $(a-b)(c-d)$, wo $(a-b)$ so viel mal zu nehmen ist, als in $(c-d)$ Einheiten sind. Man hat $(a-b)\,c = ac - bc$. Um aber das richtige Resultat zu erlangen, muß man $(a-b)\,d$ oder $ad - bd$ abziehen, wodurch man das wahre Endresultat $ac - bc - ad + bd$ erhält. „Es erhellet folglich zugleich, daß das Glied $bd, \ldots$ das Zeichen $+$ hat, da indessen die Buchstaben b und $d, \ldots$ das Zeichen $-$ haben.“ Damit ist aber Clairaut nicht zufrieden. Man muß noch sehen, „ob, wenn zwo negative Größen, als $-b$ und $-d$, keine positive Größe vor sich haben, ihr Produkt noch bd sey“. Zu dem Zweck setzt er $a = c = 0$ und erhält $- b \cdot - d = + bd$. Thomas Simpson geht nicht so weit; er betrachtet das Produkt von $(a-b)(c-d)$, ohne am Ende $a = c = 0$ zu setzen, und erkennt einen Vorzug seines Verfahrens darin, daß Multiplikator und Multiplikand beide zusammengesetzte Größen sind. Einfache Größen, wie $-b$ und $-c$, unabhängig von anderen, seien unmögliche Größen, wegen der Unmöglichkeit, Etwas von Nichts abzuziehen. Es sei deshalb lächerlich durch wirkliche Demonstration zeigen zu wollen, was das Produkt von $-b$ und $-c$ oder von $\sqrt{-b}$ und $\sqrt{-c}$ sein muß, wenn man von den Werten der zu multiplizierenden Größen keine Idee habe.

William Frend[4]) kritisiert das Clairautsche Verfahren $a = c = 0$ zu setzen, weil Clairaut das Zeichen $-$ als Subtraktionszeichen definiert habe, und die Subtraktion, in der Abwesenheit eines Minuenden, keinen Sinn habe, also $-b$ und $-d$ nicht selbständig existieren können. Der Beweis, den wir von Simpson entnahmen, wird von Bézout, Sauri, Lhuilier[5]) und vielen anderen Autoren angegeben.

Eine zweite weitverbreitete Beweismethode entnehmen wir aus

---

[1]) Segner, op. cit. I, S. 43. [2]) Karsten, op. cit. II, S. 77, 79. [3]) Da Cunha, Principios mathematicos, Lisboa 1790, p. 101. [4]) Principles of Algebra, London 1796, p. 514—518. [5]) Anl. zur Elementaralgebra, 1. Teil, Tübingen 1799. Lhuilier war seit 1795 Professor in Genf.

den Vorlesungen von Laplace[1]) 1795. „Cette règle“, sagt er, „présente quelques difficultés.“ Das Produkt von $-a$ mit $b-b$ ist $+0$, dasjenige von $-a$ mit $+b$ ist $-ab$, weshalb $-a\cdot -b$ den Wert $+ab$ annehmen muß. Diesen Nachweis gaben auch W. Emerson[2]), Maclaurin (5. Auflage), Basedow und Paulus Mako.

In den zwei letzten Demonstrationen wird die Natur der stillschweigend vorausgesetzten Gesetze leichter wahrgenommen. In beiden sollte das distributive Gesetz als logischer Vordersatz angeführt sein. In allen „Beweisen“ der Zeichenregel für die Multiplikation, welche im 18. Jahrhundert gegeben wurden, werden Schlüsse gezogen, welche auf kein Grundgesetz zurückgeführt werden und deshalb in Wirklichkeit keine Deduktionen, sondern bloß Expositionen einer in der Praxis nützlich gefundenen Verfahrungsweise sind.

Ein Werk, welches der Unklarheit in der Auseinandersetzung der Grundprinzipien der Algebra seinen Ursprung verdankt, wurde von François Daniel Porro (1729—1795) von Besançon anonym unter dem Titel L'Algèbre selon ses vrais principes, à Londres, à Paris et à Besançon 1789, veröffentlicht. Früher erschien von ihm Exposition du calcul des quantités négatives, Avignon (Besançon) 1784. Der Autor klagt, in der gewöhnlichen Darstellung der Algebra hätten die Zeichen $+$ und $-$ je vier Bedeutungen. Das Symbol $-$ bedeute 1) Subtraktion, 2) negative Größe, 3) Division, wie in a^{7-5}, 4) Multiplikation, wie in „$\frac{1}{-a^3} = 1 \times a^3$, parce que la quantité a^3 précédée du signe $-$, devient facteur du numérateur en changeant son signe“. Auch sei die Multiplikationsregel, $-\cdot-$ gibt $+$, zu verwerfen, denn diese Regel sei die Ursache des Streits über negative Größen, Imaginäres, den irreduktiblen Fall und Logarithmen negativer Größen. Dieses Übel könne man dadurch beseitigen, daß man annehme $+\cdot+$ gibt $+$ und $-\cdot-$ gibt $-$. Diese zwei Prinzipien gäben zwei Kalkülssorten, deren jede ihre eigenen Regeln hätte. In diesen Schriften hervorzuheben ist wohl der Gedanke des Autors, daß Grundoperationen in Algebra hauptsächlich Voraussetzungen sind, und daß verschiedene Annahmen verschiedene Arten der Algebra liefern.

Die Theorie negativer Größen wird auch von einem Professor der Mathematik an dem Collége national de Toulouse, Gratien Olléac, in einer Schrift, Sur des théories nouvelles des nombres opposés, des imaginaires et des équations du

---

[1]) Journal de l'école polytechnique. Septième et huitième cahiers. T. II, Paris 1812, p. 30. [2]) Treatise of Algebra, London 1780.

troisième degré, à Toulouse, an II (1794) behandelt. Man solle die Wolfsche Idee der Heterogenität entgegengesetzter Zahlen, der zufolge sie miteinander keine Verhältnisse haben können, als absurd fallen lassen und die Descartessche Idee der Realität der negativen sowohl als der positiven Zahlen annehmen.

An der Universität Cambridge sowie auch auf anderen Hochschulen in England hatte Baron Maseres' arithmetische Auffassung der Algebra gegen Ende des Jahrhunderts viele Nachfolger, denn nur durch die Fortschaffung negativer Zahlen glaubte man die Algebra zu den auf strenge Beweise gegründeten Wissenschaften zählen zu dürfen.

Uns ist nur eine Schrift bekannt, worin der Standpunkt von Maseres kritisiert wird. In einer Schrift On the use of negative quantities in the solution of problems by algebraic equations[1]) beklagt William Greenfield, Pfarrer der St. Andrewskirche und Professor der Rhetorik an der Universität Edinburgh, daß Maseres sein Geschick der Umstürzung, statt der Befestigung, der Theorien des Negativen zugewandt habe. Er selber versucht eine Erklärung, indem er das Zeichen — immer nur als Subtraktionszeichen ansieht. Wenn ein Problem es erlaubt, eine Unbekannte x in zwei entgegengesetzten Lagen anzunehmen, dann wird die Gleichung, welche die Bedingungen ausdrückt, die x in einer seiner Lagen verlangt, und deren positive Wurzeln die Werte von x für dieselbe Lage geben, zu gleicher Zeit auch, durch ihre negativen Wurzeln, die Werte von x für die entgegengesetzte Lage liefern. Ähnliches schließt Greenfield für den Fall, wo eine bekannte Größe entgegengesetzte Lagen einnehmen kann. Die Rechtfertigung negativer Größen beruht also bei Greenfield auf der Kenntnis, daß wirklich zwei Probleme auf einmal gelöst werden, und man für beide richtige Resultate erreicht.

Um den Einfluß von Maseres auf Lehrer der Mathematik zu erkennen, braucht man nur die Lehrbücher von Nicolas Vilant[2]), Professor der Mathematik an der Universität St. Andrews zu Edinburgh, von Thomas Manning[3]) in Cambridge, von W. Ludlam[4]), „fellow of St. John's College" in Cambridge, zu durchblättern. Besonders in der Exposition der Gleichungstheorie kommt Maseres' Standpunkt stark zum Vorschein. Ludlam lehrt, daß entgegengesetzte

[1]) Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. 1, Edinburgh 1788, p. 131 bis 145. [2]) Elements of Mathematical Analysis, Edinburgh 1798. [3]) Introduction to Arithmetic and Algebra, Cambridge 1796. [4]) Rudiments of Mathematics designed for the use of students at the Universities, 5th Ed., London 1809.

Größen kein Verhältnis hätten. Die Proportion $-1:1=1:-1$ werde als eine wunderbare Paradoxie angeführt, da -1 (eine Zahl weniger als 0 und deshalb weniger als 1) zu einer größeren sein sollte, wie diese größere zur kleineren. In diesen Verhältnissen dürfe man aber nur die absoluten Werte in Betracht ziehen[1]).

Nach Maseres war der bekannteste Gegner des Negativen in England zu dieser Zeit William Frend (1757—1841). Er promovierte 1780 an Christ's College in Cambridge als zweiter „wrangler". Nachdem er ein halb Dutzend Jahre lang als Tutor der Mathematik an der Universität gewirkt hatte, wurde er durch die Paradoxien, über „Zahlen weniger als Nichts", über $-a\cdot-b=+ab$, über imaginäre Zahlen, deren Produkt die Einheit ist, zur Verwerfung aller negativen und imaginären Zahlen und zur Vorbereitung eines Lehrbuches einer streng arithmetischen Buchstabenrechnung geführt. So entstand sein Werk, Principles of Algebra, London 1796, mit einem Appendix über Gleichungen von Francis Maseres.

Die Argumente, welche diese Gegner der Algebra vorbrachten, waren unanfechtbar. Der Ausdruck, negative Zahlen sind „weniger als Nichts" oder, nach Newton, „nihilo minores", war nicht gehörig definiert und deshalb paradoxisch. Negative Zahlen, definiert als solche, die „abgezogen werden müssen", waren gewiß sinneswidrig, sobald der Subtrahend größer als der Minuend angenommen wurde. Man versuchte in den Lehrbüchern das Unmögliche zu tun, nämlich negative Zahlen aus positiven Zahlen abzuleiten, ohne die Operation der Subtraktion ausdrücklich zu erweitern oder den Begriff „weniger als Nichts" zu beleuchten. Eine solche Erweiterung oder Beleuchtung hätte die Verallgemeinerung des Zahlbegriffs erfordert. In keinem Lehrbuche erschienen aber negative Zahlen in klarem Lichte, als eine willkürliche Erweiterung des Zahlbereichs, oder als eine Annahme (Voraussetzung), welche mit der Annahme positiver Zahlen auf gleicher Stufe stand und in der Definition selbst die Existenz negativer Zahlen begründete.

Die besprochene Reaktion ist eine eigentümliche Erscheinung in der Geschichte der Mathematik. Gewiß fehlte es dem Robert Simson, Maseres und Frend an Einsicht, an einem ins Innere eindringenden Erkennen. Sonst, statt negative und imaginäre Zahlen, welche nie falsche Resultate lieferten und eine große Ökonomie im mathematischen Arbeiten erzielten, zu verwerfen, wären sie tiefer in die Theorie derselben gedrungen, um ihre logischen Grundlagen zu

[1]) Rudiments of Mathematics, S. 31.

entdecken. Der erste, der an der Universität Cambridge dieses versuchte und die Opposition gegen die Erweiterung des Zahlbereichs zu entfernen strebte, war Robert Woodhouse, welcher 1801 in den Philosophical Transactions eine Abhandlung über Algebra veröffentlichte. Eine 1806 dort gedruckte Arbeit über imaginäre Größen vom Abbé Buée soll dem Lesen von Frends Algebra seinen Ursprung verdanken. Ein Brief von Buée an Frend führt auf diese Vermutung[1]).

In Deutschland erschien 1795 ein Artikel Über die Lehre von den entgegengesetzten Größen[2]) von Georg Simon Klügel (1739—1812), Professor zu Halle, worin der Verfasser nahe daran war, einen wichtigen Schritt in der Exposition der Algebra vorzunehmen. Er führt acht Vorschriften für die gemeinen Operationen der Buchstabenrechnung an, welche das distributive Gesetz ausdrücken. Z. B. VII:

$$(a+b)(c-d) = a(c-d) + b(c-d) = ac - ad + bc - bd.$$

Es findet sich hier ein Versuch vor, die Formalgesetze der Algebra festzusetzen. Es wird aber angenommen, daß in der Formel VII der Subtrahend kleiner als der Minuend sei. Jeder Rest und Quotient wird ursprünglich als positiv angesehen. Aus VII erhelle es, daß ein Produkt aus zwei Faktoren das Zeichen — erhält, wenn die Faktoren verschiedene Zeichen haben.

So lange über negative Zahlen keine klaren Begriffe existierten, ist nicht zu verwundern, wenn imaginäre Größen allgemein als unmöglich angesehen wurden. Euler drückt sich in seiner Algebra (Art. 143, 144) so aus: „Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als 0, oder etwa 0 selbst; so ist klar, daß die Quadratwurzel von Negativ-Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden.... Von diesen behauptet man also mit allem Recht, daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht einmahl nichts selbsten, als aus welchem Grund sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müssen.“ Eine andere Auffassung findet man in einem Werke, Éléments de mathématiques à l'usage des écoles nationales, Toulouse et Paris 1781 (nouv. Éd., Paris, an X) von Roger Martin (? — 1811), welcher sich viel Mühe nimmt, die Grundprinzipien deutlich darzulegen. Nach Euklid definiert er die Einheit als den abstrakten Begriff dessen, was irgend ein einziges

[1]) A. De Morgan, Trigonometry and Double Algebra, London 1849, p. V.

[2]) Archiv d. r. u. a. Math. (Hindenburg), Bd. I, 1795, S. 309—319, 470—481.

Dasein vorstellt, und die Zahl als eine Menge gleicher Einheiten. Irrationale und imaginäre Größen seien auch Zahlen. Nehme man $\sqrt{-1}$ als Einheit, könne man $2\sqrt{-1}$, $3\sqrt{-1}$ durch Wiederholungen erlangen, was für den Begriff einer Zahl genüge. „Rien n'empêche donc de mettre les imaginaires au rang des nombres."

In einer Schrift, On the arithmetic of impossible quantities[1]) gibt John Playfair (1748—1819), der schottische Mathematiker und Physiker, eine naive Erklärung, warum der Gebrauch von imaginären Größen zu richtigen Resultaten führe. Operationen mit imaginären Schriftzeichen, obschon in sich selbst unsinnig, seien Kennzeichen für andere, welche Sinn mit sich führen. Dies werde bei der Berechnung von Sinus und Kosinus in bezug auf den Kreis und die Hyperbel besprochen. Wenn Untersuchungen, die mit imaginären Größen durchgeführt werden, ebenso erfolgreich zur Wahrheit leiten, als solche mit reellen Größen, so könne dieser Umstand nur einer Analogie zugeschrieben werden, welche zwischen den untersuchten Gegenständen existiere, eine Analogie, die so eng sei, daß jede Eigenschaft des einen auf den anderen Gegenstand übertragen werden könne. Demnach könne jeder Ausdruck, den er beim Kreise abgeleitet habe, durch Substitution von $\sqrt{1}$ für $\sqrt{-1}$, in einen für die Hyperbel gültigen Ausdruck umgeändert werden. Die mit imaginären Symbolen durchgeführten Operationen, obschon an sich absurd, dienen als Wegweiser zu solchen, welche verständlich seien. Diese Abhandlung Playfairs machte großen Eindruck in England, und 1801 fand Robert Woodhouse[2]) es noch nötig, die Unzulänglichkeit dieser Erklärung hervorzuheben.

Eine eigentümliche Angabe findet man in W. Emersons Treatise of Algebra, welcher 1780 zu London erschien. Auf S. 67 heißt es: „Wenn imaginäre Wurzeln miteinander multipliziert werden, geben sie immer —, sonst würde ein reelles Produkt von unmöglichen Faktoren entspringen, was sinneswidrig wäre. Also $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-ab}$, und $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-b} = -\sqrt{-ab}$, etc. Auch $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$, und $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +a$, etc." Diese widersprüchlichen Angaben werden nicht weiter erklärt oder angewandt. Überhaupt ist die Entwicklung fundamentaler Begriffe bei Emerson sehr mangelhaft.

In Huttons Mathematical and Philosophical Dictionary, London 1796, wird im Artikel „Imaginary" hervorgehoben, daß man über die Arithmetik imaginärer Größen noch keine Übereinstimmung

[1]) Phil. Trans., Vol. 68 for the year 1778, Pt. I, p. 318—343. [2]) Phil. Trans., 1801, S. 89.

erreicht habe. Euler schreibe in seiner Algebra $(\sqrt{-3})^2 = -3$, setze aber $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$. Wie könne die Gleichheit oder Ungleichheit der Faktoren die Zeichen beeinflussen? Er schreibe auch $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, woraus $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{+1}$ zu ziehen sei. Über die Behauptung von Emerson, daß das Produkt imaginärer Größen selbst imaginär sein müsse, bemerkt Hutton, daß die Schriftsteller in ihren Ansichten hierüber ziemlich gleich geteilt seien.

Imaginäre Zahlen werden in der Geschichte der Gleichungstheorie sehr oft auftreten. Auch spielen sie in der Diskussion über Logarithmen von negativen Zahlen eine hervorragende Rolle.

Wir lassen nun einige Einzeluntersuchungen folgen.

Die Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche wird von Nicolaus Fuß in seinen Meditationes circa resolutionem fractionis $x^m/(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ etc. in fractiones simplices, ubi simul demonstratio insignis theorematis arithmetici occurrit[1]) durch einen von dem Verfahren Eulers in seinen Institutiones calculi integralis verschiedenen Vorgang ausgeführt. Fuß setzt (I), $(x^m/(x-a)(x-b)(\text{etc.}) = \alpha/x - a + \beta/x - b + \cdots$, multipliziert nun mit $(x-a)$ und nimmt $x = a$, woraus $\alpha = a^m/(a-b)(a-c)(\text{etc.})$ hervorgeht. Die gleiche Methode ergibt die Werte von $\beta, \gamma, \ldots$ Multipliziert man beide Seiten von (I) mit x, und setzt $x = \infty$, hat man $1 = \alpha + \beta + \cdots$, wenn $m + 1$ der Anzahl Faktoren n gleich ist; wenn aber $m + 1 < n$ ist, ergibt sich $0 = \alpha + \beta + \cdots$ Letztere Formeln enthalten den im Titel angedeuteten arithmetischen Satz.

Eine neue Bruchvereinfachungsmethode wurde von Euler in der Abhandlung Nova methodus fractiones quasconque rationales in fractiones simplices resolvendi[2]) auseinandergesetzt. Wir wählen das einfache Beispiel eines Bruches $\frac{P}{Q}$, dessen Nenner den Faktor $(z-a)^2$ hat. Man setze $z = a + \omega$ und gebe dem Bruch die Form

$$\frac{A + B\omega + C\omega^2 + \cdots}{B' + C'\omega + D'\omega^2 + \cdots}\cdot\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \cdots),$$

woraus sich $\alpha = \frac{A}{B'}$, $\beta = \frac{B}{B'} - \frac{AC'}{B'^2}, \cdots$ ergibt. Die Methode ist auch auf transzendente Funktionen anwendbar. In der Behandlung des Bruches $\frac{\sin\Phi}{\tan\Phi - \cos\Phi}$ werden, im Laufe der Analysis, imaginäre

[1]) Acta Acad. scient. imp. Petr. pro anno 1777, pars prior. Petropoli 1778, p. 91—104. [2]) Ebenda. 1780, pars prior. Petropoli 1783, p. 32—46.

Winkel eingeführt, die von der Unerschrockenheit, mit welcher Euler imaginäre Größen zu gebrauchen gewöhnt war, Zeugnis geben.

Einen Satz über Mittelwerte teilt Johann Nikolaus Tetens (1736—1807), Professor in Kiel, in einer Schrift, Beweis eines Lehrsatzes von dem Mittelpunkte der Coefficienten in den Polynomien[1]) mit. Er sei darauf bei der Berechnung von Leibrenten gekommen. Hat man $P = a + bx + cx^2 + \cdots + tx^m$ und $\mu(a + b + c + \cdots + t) = b + 2c + 3d + \cdots + mt$, auch $\Pi = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots \tau x^m$, wo $\nu(\alpha + \beta + \cdots + \tau) = \beta + 2\gamma + \cdots + n\tau$, dann hat man in $P\Pi = A + Bx + \cdots + Tx^{mn}$, $(\mu + \nu)(A + B + \cdots + T) = B + 2C + \cdots mnT$. Dann folgen Betrachtungen über das Durchschnittsglied.

Burja[2]) schlägt für den Elementarunterricht eine Methode zur Logarithmenberechnung vor, welche direkter sei als die älteren Methoden und geringere Kenntnisse voraussetze als die Reihenmethode. Sie besteht in der sukzessiven Ausziehung der Quadratwurzel von 10, der 5. Wurzel dieser Quadratwurzel, der Quadratwurzel des letzten Resultats usw., um dadurch die Zahlen zu finden, deren Logarithmen 0,5, 0,1, 0,05, 0,01, 0,005 usw. sind. Durch Kombination dieser Resultate kann irgend ein Logarithmus im Briggschen Systeme gefunden werden. In einer anderen Schrift, Essai d'un nouvel algorithme des logarithmes[3]) schlägt er den Logarithmuskalkül als eine den sechs primitiven Operationen der Arithmetik (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung, Wurzelausziehung) anzureihende Operation vor, und bezeichnet mit $\frac{a}{\overline{b}} = m$ eine Zahl a, deren Logarithmus, zur Basis b, m ist.

Christian Kramp (1760—1826) entwickelt in einer Abhandlung, Fractionum Wallisianarum Analysis[4]), einen Kalkül für die Berechnung der Werte von Brüchen wie der von Wallis gebrauchte Ausdruck von $\frac{\pi}{2}$. Kramp schreibt $a(a + \nu)(a + 2\nu) \cdots (a + n\nu - \nu)$ so $a^{n\pi\nu}$, wo π an dieser Stelle nur als Separationszeichen dient. Er erhält $a^{m\pi\nu} \div (a + n\nu)^{m\pi\nu} = a^{n\pi\nu} \div (a + m\nu)^{n\pi\nu}$ und, wenn $a + n\nu = b$, $a^{m\pi\nu} \div b^{m\pi\nu} = a^{\frac{b-a}{\nu}\pi\nu} \div (a + m\nu)^{\frac{b-a}{\nu}\pi\nu}$. Nimmt man $b - a = d$ und m unendlich groß, dann wird $a(a + \nu)(a + 2\nu)$ etc. in inf. $\div (a + d)(a + d + \nu)$ etc. in inf. $= a^{\frac{d}{\nu}\pi\nu} \div (\infty\,\nu)^{\frac{d}{\nu}}$.

---

1) Leipziger Magazin für r. u. a. Math. (Hindenburg), 1787, S. 55—62.
2) N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences, 1786—1787, Berlin 1792, p. 433—478.
3) Ebenda, 1788 et 1789, Berlin 1793, p. 300—325.
4) Nova Acad. Elect. Moguntinae scient. utilium, ann. 1797—1799, Erfurti 1799, p. 257—292.

Nun wird $a^{m\pi\nu}$ in die Reihe entwickelt $a^m(1 + Aa^{-1}\nu + Ba^{-2}\nu^2 +$ etc., wo $A \div m(m+1) = (m-1) \div 2(m+1)$, $2B \div (m-1)(m+1) = A(m-1) \div 2(m+1-\frac{m}{12}$, etc., oder, wenn diese divergiert, in die Reihe $U(1 + Au + Bu^2 + \cdots)$, wo $u = \nu \div (a + n\nu)$ und $U = a^{n\pi\nu}(a+n\nu)^m \div (a+m\nu)^{n\pi\nu}$. Auf den Bruch $\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7}$ etc. angewandt, wird dessen Wert $2^{\frac{1}{2}\pi^2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}\pi^2}$ berechnet. Wenn man in

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1-m}{1-n}\cdot\frac{1+m}{1+n}\cdot\frac{2-m}{2-n}\cdot\frac{2+m}{2+n}\text{ etc.}$$

für n, $\frac{1}{2} - n$, und für m, $\frac{1}{2} - m$ schreibt, hat man einen ähnlichen Bruch, der, für $m = n$, einen Ausdruck für $\tan m\pi$ liefert, welcher Kramp neu zu sein glaubt, da dem berühmten Pfaff, in seinem Werk Beiträge zur Summationslehre, die Herleitung einer solchen Form nicht gelungen sei.

Wichtige Untersuchungen wurden von Waring in England vorgenommen.

Edward Waring (1734—1798)[1]) wurde bei Shrewsbury geboren, ging 1753 auf das Magdalen College in Cambridge, wo er 1757 promovierte und „senior wrangler" ward. Er wurde 1760, bevor er durch Erlangung der Magisterwürde sich qualifiziert hatte, zum Lucasianprofessor der Mathematik in Cambridge erwählt. Francis Maseres war sein Rivalkandidat. Wegen seiner Jugend fand Warings Kandidatur Opposition. Um seine Fähigkeiten zu zeigen, sandte er vor der Wahl das erste Kapitel seiner Miscellanea Analytica herum, welches von William Samuel Powell wegen einiger unbedeutender Fehler angegriffen wurde. Es erschienen mehrere Streitschriften. Waring wurde in diesem Streite von seinem Freunde, John Wilson vom Peterhouse College, unterstützt. Seine Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus wurde 1762 zu Cambridge veröffentlicht, seine Meditationes algebraicae 1770, seine Proprietatis algebraicarum curvarum 1772, seine Meditationes analyticae 1776. Diese Werke enthalten viel Neues, sind aber in der Darstellungsmethode sehr mangelhaft. Er soll in Cambridge keine Vorlesungen gehalten haben. Seine tiefen Untersuchungen waren zur Mitteilung durch Vorlesungen nicht geeignet, sagt Dr. Parr. Waring soll gestanden haben, daß er in England, außer in Cambridge, von niemandem je gehört habe, der seine Schriften gelesen und verstanden habe. Mit Mathematikern des

[1]) Dictionary Nat. Biog. (L. Stephen).

Festlandes scheint er wenig in Briefwechsel gewesen zu sein. Im Jahre 1782 bemerkte er, daß er 1763 ein Exemplar seiner Miscellanea an L. Euler, und 1770 Exemplare seiner Meditationes algebraicae an D'Alembert, Bézout, Montucla, Euler, Lagrange und Frisi geschickt habe. Aber nur Frisi habe den Empfang des Werkes bestätigt[1]). In seinen Schriften erwähnte aber Lagrange 1771 die Verdienste Warings. Die Meditationes algebraicae seien ein „ouvrage rempli d'excellentes recherches"[2]). Waring wurde 1763 als Mitglied der Royal Society of London aufgenommen, aber schon 1757 schickte er, wie er selber erzählt[3]), einige Untersuchungen ein, welche er zur Zeit seiner Kandidatur 1759 drucken ließ. Unter diesen soll eine Methode, die Anzahl imaginärer Wurzeln in der Quartic und Quintic und in $x^n \pm Ax^m \pm B = 0$ zu finden, gewesen sein[4]). Es ist wahrscheinlich letztere Mitteilung, welche 1764 von der Royal Society gedruckt wurde[5]). Ohne Beweis führt er dort Sätze über die Anzahl komplexer Wurzeln der Gleichungen $x^4 + qx^2 - rx + s = 0$, $x^5 + qx^3 - rx^2 + sx - t = 0$ an. Ist in der Quartic der Ausdruck $256s^3 - 128q^2s^2 + (144r^2q + 16q^4)s - 27r^4 - 4r^2q^3$ negativ, so existieren zwei imaginäre Wurzeln; ist dieser Ausdruck positiv, und entweder $-q$ oder $q^2 - 4s$ negativ, dann sind alle Wurzeln imaginär; verschwindet dieser Ausdruck, und ist entweder $-q$ oder $q^2 - 4s$ negativ, so sind die zwei ungleichen Wurzeln imaginär. Ähnliche, aber viel weitläufigere Ausdrücke sind für die Quintic angegeben[6]). Waring war der erste, ein solches Kriterium für die Quintic abzuleiten. Dieses ist durch eine von ihm erfundene Transformation erzielt worden, wodurch eine Gleichung deduziert wird, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeldifferenzen der vorgelegten Gleichung sind, um dadurch notwendige, sowie auch hinreichende Bedingungen für das Vorhandensein imaginärer Wurzeln zu erhalten. In den Miscellanea analytica, 1762, S. 17, werden die drei ersten Glieder der allgemeinen transformierten Gleichung ohne Ableitung angegeben. Wenn die Zeichen derselben beständig abwechseln, habe die vorgelegte Gleichung keine imaginären Wurzeln. Dieses berühmte Verfahren hat später Lagrange unabhängig ausgearbeitet. In seinen nachfolgenden Werken hat er aber Warings Priorität angezeigt[7]).

Waring fängt in den Miscellanea analytica mit der Ab-

---

[1]) Meditationes algebraicae, Ed. tertia, 1782, p. XXI. [2]) Lagrange, Oeuvres, T. III, p. 370. [3]) Med. alg. 1782, p. XXVIII. [4]) Phil. Trans. (London), Vol. 77, 1787, p. 71. Vgl. Med. alg. 1782, p. 91. [5]) Phil. Trans., Vol. 53. For the year 1763, London 1764, p. 294—298. [6]) Abgedruckt in Med. alg. 1782, p. 85, und in Lagrange, De la résol. des équat. num. Note III. [7]) De la résolution des équations numériques, Paris, An VI, Note III.

leitung seiner Formel für die Potenzsummen der Wurzeln an. Sie unterscheidet sich von den Newtonschen dadurch, daß statt durch rekurrierende Darstellung eine Summe s_n durch Summen niedrigeren Grades, $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots$, zu berechnen, sie die Summe ganz unabhängig von früheren Ergebnissen darstellt. Auch führt Waring eine Formel für die Darstellung eines Koeffizienten der Gleichung durch die Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots$ an. Gleichfalls als Waringsche Formeln bekannt sind diejenigen[1]), mittels welcher man beliebige ganze symmetrische Funktionen mit Gliedern $\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \varepsilon^e$ usw. direkt als Funktionen der Gleichungskoeffizienten ausdrücken kann. Er skizziert dann das Verfahren, mittels symmetrischer Funktionen eine Gleichung zu finden, deren Wurzeln irgend eine gegebene Relation zu den Wurzeln einer oder mehrerer gegebenen Gleichungen haben. Durch die Annahme $v = x^{\frac{1}{n}}$ könne man dasselbe zur Wegschaffung von Radikalen $x^{\frac{1}{n}}$ anwenden. Um imaginäre Wurzeln einer Gleichung $x^{2n} - px^{2n-1} + qx^{2n-2} - rx^{2n-3} + \text{etc.} = 0$ zu entdecken, gibt er ohne Nachweis die Regel S. 18: Man eliminiere v aus den zwei Gleichungen $2nv^{2n-1} - (2n-1)pv^{2n-2} + (2n-2)qv^{2n-3} - \text{etc.} = 0$ und $v^{2n} - pv^{2n-1} + qv^{2n-2} - \text{etc.} = w$; wenn in der resultierenden Gleichung $w^{2n-1} - Pw^{2n-2} + Qw^{2n-4} - \text{etc.} = 0$, P, Q, etc. alle positiv sind, habe die vorgelegte Gleichung keine reellen Wurzeln. Um die Grenzen von Wurzeln zu bestimmen, transformiert er die gegebene Gleichung in eine andere, deren Wurzeln die reziproken Wurzeldifferenzen $1/(\alpha - \beta)$, $1/(\alpha - \gamma)$, $1/(\alpha - \delta)$, etc. der vorgelegten Gleichung sind. Diese Methode wurde später von Lagrange wieder erfunden[2]).

Waring nimmt Wurzelformen wie

$$x = \sqrt[n]{a + \sqrt{-b^2}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b^2}}$$

an, und berechnet durch Wegschaffung der Radikalen die entsprechende Gleichung. Mit einer solchen Auflösungsmethode hatte Euler schon 1732 (Bd. III², S. 574) experimentiert. Für die Quartic machte Waring die Annahme[3]) $x = \sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} + \sqrt[4]{\gamma}$ und leitet die kubische Gleichung zur Bestimmung von α, β, γ ab. Für die Quintic macht er die ganz ähnliche Voraussetzung[4]) $x = \sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\beta} + \sqrt[5]{\gamma} + \sqrt[5]{\delta}$ und läßt dann die unklare Bemerkung folgen: „Ich habe durch Berechnung gefunden, daß die biquadratische Gleichung, deren Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind, not-

[1]) Misc. analyt., p. 8. [2]) Lagrange, op. cit., Note III. [3]) Misc. analyt., p. 45. [4]) Ebenda, p. 47.

wendig irrationale Größen habe, und daß die vorgelegte Gleichung durch diese Methode nicht auflösbar ist"[1]). Was sollen irrationale Größen hier bedeuten? Waren nach der Ansicht des Verfassers Irrationale anderer Natur als Radikale? Oder gründete er seinen Einwand gegen irrationale Koeffizienten der Quartic auf die scheinbare Unmöglichkeit dieselben zu berechnen? Daß die Auflösung von Gleichungen gewöhnlich auf der Lösung von Hilfsgleichungen höherer Grade beruht, davon hat sich Waring durch seine Beispiele von Gleichungen, welche vorgelegte Wurzelformen haben, überzeugt[2]).

Waring schlägt aber noch eine andere Wurzelform vor, welche einige Jahre später auch Euler und Bézout benutzten. Mit lakonischer Kürze sagt Waring[3]): „Aufzulösen $x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2} + c\sqrt[n]{p^3} + d\sqrt[n]{p^4} \ldots A\sqrt[n]{p^{n-4}} + B\sqrt[n]{p^{n-3}} + C\sqrt[n]{p^{n-2}} + D\sqrt[n]{p^{n-1}}$. Man rotte die irrationalen Größen aus und erhalte

$$x^n - \overline{n \times aD + bC + cB + dA}, \text{ etc. } x^{n-2} + \text{etc.} = 0.$$

Daraus kann man die Auflösung kubischer Gleichungen entnehmen." Letztere Lösung wird durchgeführt.

Im 18. Jahrhundert beschäftigte sich die Pariser Akademie der Wissenschaften dreimal mit der Bestimmung der Anzahl imaginärer Gleichungswurzeln. Das erstemal 1743, als de Gua eine Abhandlung mitteilte; das zweitemal, als Fontaine seine Resultate vorlegte, und das drittemal, als 1772 du Séjour seine Studien veröffentlichte. Die Untersuchungen von de Gua und die erste Schrift von Fontaine sind schon im dritten Band dieser Geschichte besprochen worden. Eine zweite Arbeit des Fontaine, L'art de résoudre les équations, wurde 1764 veröffentlicht[4]). Es ist ein langer Aufsatz, welcher die Methoden seiner ersten Schrift auch auf Gleichungen 4. und 5. Grades anzuwenden sucht. Er zählt für quartische Gleichungen 617 mögliche Fälle auf. Sein Verfahren ist für praktische Zwecke ungeeignet und von theoretischer Seite, wie Lagrange[5]) hervorgehoben hat, unbefriedigend.

In einer Abhandlung De functionum algebraicarum integrarum factoribus trinomialibus realibus commentatio[6]) nimmt Franz Ulrich Theodor Aepinus (1724—1802) die Wurzelexistenz stillschweigend an und zeigt, daß, wenn $x + m + n\sqrt{-1}$ ein Faktor

---

[1]) Man sehe auch Meditationes algebraicae, 1782, p. 182, 183. [2]) Miscellanea analyt., p. 47. [3]) Ebenda, p. 44. [4]) Mémoires donnés à l'acad. roy. des sciences, non imprimés dans leur temps. Par M. Fontaine, de cette académie, Paris 1764, p. 432—588. [5]) De la résol. des équat. num., Note VII. [6]) Novi Comm. acad. Sc. imp. Petropolitanae, Tom. VIII, 1760 et 1761, Petropoli 1763, p. 169—180.

von $x^m + ax^{m+1} + \cdots$, es $x + m - n\sqrt{-1}$ auch ist. Dabei wählt er für $m + n\sqrt{-1}$ die trigonometrische Form $\alpha(\cos\Phi + \sin\Phi\sqrt{-1})$, so daß

$$x^\nu = \alpha^\nu(\cos\nu\Phi + \sin\nu\Phi\sqrt{-1}).$$

Durch Substitution des Wertes von x ergibt sich die Gleichung $P + Q\sqrt{-1} = 0$ und $P = Q = 0$, worauf dann folgt, daß $x = \alpha(\cos\Phi - \sin\Phi\sqrt{-1})$ die Relation $P - Q\sqrt{-1}$ liefert und deshalb eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist.

In der Abhandlung De Resolutione aequationum cuiusvis gradus[1]) macht L. Euler einen seiner Abhandlung[2]) von 1732 ähnlichen Versuch, die allgemeine Auflösung algebraischer Gleichungen zu finden. Wie vor dreißig Jahren, so glaubt er jetzt aus der Tatsache, daß eine quadratische Gleichung durch die Ausziehung von Quadratwurzeln, eine kubische Gleichung durch Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln, und eine Gleichung vierten Grades durch Ausziehung biquadratischer Wurzeln gelöst werden kann, annehmen zu dürfen, daß sich die Wurzelform einer Gleichung n^{ten} Grades durch Radikale nicht höher als n^{ter} Ordnung ausdrücken lasse. Statt aber, wie 1732, für eine solche (vom zweiten Gliede befreite) Gleichung die Wurzelform von $n - 1$ Gliedern

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \cdots$$

anzunehmen, stellt er jetzt einen allgemeineren, gewisse Schwierigkeiten der älteren Form vermeidenden Ausdruck auf,

$$x = w + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + \cdots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}},$$

wo w eine rationale Zahl ist, und „$A, B, \ldots, Q$ entweder rationale Größen oder mindestens keine n^{te} Wurzel enthalten". Er hoffe, daß diese Form allen Anforderungen genüge, da die übrigen Wurzeln dadurch bestimmt sind, daß man für $\sqrt{v}$ nacheinander alle Werte von $\sqrt[n]{1}\sqrt[n]{v}$ einsetzt. Die Voraussetzung, daß $A, B, \ldots, Q$ im allgemeinen algebraische Zahlen seien, ist in unserer Zeit als unmöglich anerkannt. Euler zeigt, daß die Wurzeln der Gleichungen der ersten vier Grade sich auf diese Weise ausdrücken lassen. Durch die Tatsache, daß alle damals bekannten, auflösbaren Gleichungen diese Wurzelform besaßen, ist Euler von der Richtigkeit seiner Annahme überzeugt. „Aus diesen Gründen", sagt er, „ist die neue Wurzelform zur höchsten Wahrscheinlichkeit erhoben." Bemerkenswert ist es noch, daß Eulers Form in etwas präziserer Fassung die Grundlage des Abelschen Be-

---

[1]) N. Comm. Petr., T. IX, pro annis 1762 et 1763, p. 70—98. [2]) Diese Vorlesungen, Bd. III, 2. Aufl., S. 574.

weises der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösungen höherer Gleichungen bildet[1]). In der Auflösung der vom zweiten Gliede befreiten biquadratischen Gleichung setzt Euler $x = A\sqrt[4]{v} + B\sqrt[4]{v^2} + C\sqrt[4]{v^3}$ und findet dann die Gleichung vierten Grades, welche diese Wurzelform hat. Quadriert man beide Seiten von $x - B\sqrt{v} = A\sqrt[4]{v} + C\sqrt[4]{v^3}$, so erhält man $x^2 - 2Bx\sqrt{v} + B^2v = A^2\sqrt{v} + 2ACv + C^2v\sqrt{v}$ oder $x^2 + (B^2 - 2AC)v = 2Bx\sqrt{v} + (A^2 + C^2v)\cdot\sqrt{v}$. Quadriert man abermals, so erhält man die rationale Gleichung $x^4 = 2(B^2 + 2AC)vx^2 + 4(A^2 + C^2v)Bvx + A^4v - B^4v^2 + C^4v^3 + 4AB^2Cv^2 - 2A^2C^2v^2$. Wenn $a = \sqrt{-1}$, $b = -1$, $c = -\sqrt{-1}$, dann sind die drei übrigen Wurzeln dieser Gleichung $x = Aa\sqrt[4]{v} + Bb\sqrt[4]{v^2} + Cc\sqrt[4]{v^3}$, $x = Ab\sqrt[4]{v} + B\sqrt[4]{v^2} + Cb\sqrt[4]{v^3}$, $x = Ac\sqrt[4]{v} + Bb\sqrt[4]{v^2} + Ca\sqrt[4]{v^3}$. Ist nun die gegebene Gleichung $x^4 = A'x^2 + B'x + C'$, so kann man die Werte von A, B, C, v durch die Gleichungen $A' = 2(B^2 + 2AC)v$, $B' = 4(A^2 + C^2v)Bv$, $C' = (A^2 + C^2v)^2v - (B^2 + 2AC)^2v^2 + 8AB^2Cv^2$ bestimmen. Setzt man $B = 1$, so erhält man die kubische Gleichung für die Bestimmung von v, nämlich,

$$v^3 - \frac{1}{2}A'v^2 + \frac{1}{4}\left(C' + \frac{1}{4}A'^2\right)v - \frac{1}{64}B'^2 = 0.$$

Die vier Wurzeln gibt Euler in dieser Form:

$$x = \sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{B'\sqrt{v} + 2A'v - 4v^2},$$

$$x = \sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{B'\sqrt{v} + 2A'v - 4v^2},$$

$$x = -\sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{-B'\sqrt{v} + 2A'v - 4v^2},$$

$$x = -\sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{-B'\sqrt{v} + 2A'v - 4v^2}.$$

Euler wendet diese Methode auf die Gleichung fünften Grades $x^5 = A'x^3 + B'x^2 + C'x + D'$ an. Die angenommene Wurzelform ist nun $x = A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v^4}$. Das obige Verfahren befolgend, bildet er vier Gleichungen für die Bestimmung der Werte von A, B, C, D, v. Die Elimination von A, B, C, D führt er aber nicht durch. Er hätte eine Gleichung des vierundzwanzigsten Grades in v gefunden. Es folgen nun Bemerkungen, die wir in deutscher

[1]) Vgl. J. Pierpont, „Zur Geschichte der Gleichung des V. Grades (bis 1858)" in Monatsh. f. Math. u. Phys., VI. Jahrg., Wien 1895, S. 23.

Übersetzung wiedergeben: „Wenn nun gegenteilig die Größen A, B, C, D, sowie der Buchstabe v, durch die Koeffizienten A', B', C', D' bestimmt werden könnten, hätte man die allgemeine Auflösung aller Gleichungen fünften Grades. Aber gerade darin liegt die größte Schwierigkeit, da kein Weg offen steht, die Buchstaben A, B, C, D, von welchen zwar einer nach Willkür angenommen werden kann, nacheinander so zu eliminieren, daß eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten v und den gegebenen Werten $A'B'C'D'$ entstehe, die auch keine überflüssigen Wurzelzeichen einschließe. Wir dürfen gewiß vermuten, daß, wenn diese Elimination richtig durchgeführt ist, man endlich eine Gleichung vierten Grades erhalten wird, welche den Wert von v selbst festsetzt. Denn wenn die Gleichung einen höheren Grad erreichte, dann würde der Wert von v selbst Wurzelzeichen desselben Grades enthalten, was verstandeswidrig erscheint.“

Auf Spezialfälle übergehend nimmt er 1) $C = D = 0$ an und erhält die auflösbare Gleichung $x^5 = 5\,Px^2 + 5\,Qx + \frac{Q^2}{P} + \frac{P^3}{Q}$, 2) $B = C = 0$ an und erhält die Gleichung $x^5 = 5\,Px^3 - 5\,P^2x + D$, deren Auflösung schon früher De Moivre gezeigt hatte, 3) die Koeffizienten A', B', C', D' als gewisse rationale Funktionen fünf neuer Größen an und erhält eine Gleichung, deren Wurzeln bekannt sind.

Diese Abhandlung wurde 1785 von Graf Franz Schafgotsch[1]) und 1791 von J. A. C. Michelsen[2]) in das Deutsch übersetzt. Ein mühevoller Versuch Schafgotschs, die von Euler angedeutete Resolvente zu finden, blieb ohne Erfolg.

Ungefähr zu gleicher Zeit erschien eine andere hervorragende Arbeit, Sur Plusieurs Classes d'Équations de Tous les Degrés, qui admettent une solution algébrique[3]), aus der Feder von Étienne Bézout. Er geht von der Idee aus, daß alle binomischen Gleichungen auflösbar sind. Wenn es deshalb möglich wäre, alle Gleichungen in binomische zu transformieren, hätte man das Ziel erreicht. Er erklärt seine Methode durch kubische Gleichungen und nimmt dann das Studium derjenigen n^{ten} Grades auf. Es sei $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ die vorgelegte Gleichung. Man setze $y^3 + h = 0$ und $(x + b)y = x + a$. Letztere Gleichung wird so gewählt, daß die Elimination von y zwischen den zwei letzten eine kubische Gleichung gibt, die mit der vorgelegten verglichen werden kann. Man erhält

---

[1]) Abh. d. Böhmisch. Gesellsch. d. Wiss., Prag 1785, S. 177—236, 1. Abteil.
[2]) Theorie der Gleich. aus den Schriften der Herren Euler u. de la Grange, Berlin 1791. [3]) Histoire de l'Acad. Roy. des Sciences, Année 1762, Paris 1764, p. 17—73.

auf diese Weise $p = \frac{3a + 3bh}{1+h}$, $q = \frac{3a^2 + 3b^2h}{1+h}$, $r = \frac{a^3 + b^3h}{1+h}$. Eliminiert man h, dann hat man $p(a+b) - 3ab = q$ und $p(a^2 + ab + b^2) - 3ab(a+b) = 3r$, woraus man weiter erhält $a + b = \frac{pq - 9r}{p^2 - 3q}$ und $ab = \frac{q^2 - 3pr}{p^2 - 3q}$. Es sind nun a und b die zwei Wurzeln der Gleichung $a^2 - \frac{pq - 9r}{p^2 - 3q} + \frac{q^2 - 3pr}{p^2 - 3q} = 0$. Man hat jetzt $y^3 = -h = \frac{p - 3a}{p - 3b}$ und $x = \frac{a - by}{y - 1}$, woraus sich endlich

$$x = -\frac{1}{3}p + \frac{1}{3}\sqrt[3]{[(3a-p)^2(3b-p)} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{[(3a-p)(3b-p)^2]}$$

ergibt. Diese Methode verfolgend, sucht er nun die Bedingungen dafür, daß die Gleichung n^{ten} Grades sich in eine binomische transformieren lasse. Er nimmt $y^n + h = 0$ und $y = \frac{x+a}{x+b}$ an, und eliminiert y. Er erhält eine Gleichung n^{ten} Grades in x, worin er das zweite Glied gleich Null setzt und so $h = -\frac{a}{b}$ erhält. Alle Koeffizienten der resultierenden Gleichung sind rationale Funktionen von a und b. Es können deshalb die zwei Koeffizienten des dritten und vierten Gliedes willkürlich angenommen werden, wonach sich alle übrigen als Funktionen dieser zwei ausdrücken lassen. Dies sind die gesuchten Bedingungen. In der Auflösung einer Gleichung n^{ten} Grades, welche diesen Bedingungen entspricht, löse man anfangs eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln a und b sind. Dann können h und y berechnet werden, sowie x. Die allgemeine algebraische Auflösung von $y^n + h = 0$ kannte Bézout nicht; er verfolgte die De Moivresche trigonometrische Behandlungsweise. Er untersucht dann die Gleichungen, deren Wurzeln die Form $x = \sqrt[n]{a^{n-1}b} + \sqrt[n]{a^{n-2}b^2}$, $n < 8$, haben, und zeigt, daß der irreduktible Fall, wo a und b imaginär sind, für x reelle Werte gibt.

Bézout setzt seine Untersuchungen in einer zweiten Abhandlung, Sur la résolution générale des équations de tous les degrés[1]) fort. Unterdessen ist ihm Eulers Arbeit von 1762 bekannt geworden. Sein jetziges Verfahren läßt sich aus seiner Behandlung der biquadratischen Gleichung ersehen. Er setzt $y^4 - 1 = 0$ und $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$. Multipliziert man letztere mit $y, y^2, \ldots,$ erhält man

[1]) Histoire de l'Acad. Roy. des Sciences Année 1765, Paris 1768, p. 533 bis 552.

$$ay^3 + by^2 + cy + x = 0,$$
$$by^3 + cy^2 + xy + a = 0,$$
$$cy^3 + xy^2 + ay + b = 0,$$
$$xy^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

aus welchen sich durch Elimination von y^3, y^2, y eine Gleichung vierten Grades in x ergibt. Vergleicht man deren Koeffizienten mit p, q, r in $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, so hat man die Bestimmungsgleichungen $4ac + 2b^2 = -p$, $4a^2b + 4bc^2 = q$, $a^4 + c^4 - b^4 - 2a^2c^2 + 4ab^2c = -r$. Sucht man nun a und c zu berechnen, so erhält man eine Gleichung des 24ten Grades; sucht man aber zuerst b, dann hat man eine des 6ten Grades, die als eine kubische angesehen werden kann. Die Werte von x erhalten die Form

$$x = -a - b - c,$$
$$x = +a - b + c,$$
$$x = +a\sqrt{-1} + b - c\sqrt{-1},$$
$$x = -a\sqrt{-1} + b + c\sqrt{-1}.$$

Wenn der Exponent n eine zusammengesetzte Zahl ist, wird ein zweites, etwas kürzeres Verfahren beschrieben. Die Bestimmungsgleichungen für den Fall $n = 5$ findet Bézout abschreckend. „Obschon ich diese letzten Gleichungen auf mehrere Weisen verändert und verschiedene Mittel zur Abkürzung der Elimination gefunden habe, bin ich doch noch nicht imstande, die Schlußresultate anzugeben.“ Auch sagt er: „Durch den Vergleich von Eulers Abhandlung mit der meinigen sieht man, daß, obschon beide Methoden zu den gleichen Resultaten führen, wir voneinander bedeutend abweichen in der Schätzung des Grades der Gleichung, auf welcher die Auflösung der vorgelegten Gleichung beruht. Dieser gelehrte Analyst glaubt, dieser Grad sei immer niedriger als der der vorgelegten Gleichung; ich glaube im Gegenteil, er ist immer viel höher, daß aber die Gleichung keine anderen Schwierigkeiten als jene aller niedrigeren Grade umfaßt.“ Der Grad dieser Resolventen sei $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$, und der Exponent der Unbekannten jedes Gliedes sei ein Vielfaches von n. Die Größen $a, b, c, \ldots$ nennt Bézout coëfficiens indéterminés, ohne eine Meinung zu äußern, ob sie algebraisch seien.

Die Eliminationsmethode, welche heutzutage die Eulersche genannt wird, ist in seiner Schrift Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations[1]) erklärt. Er zeigt den Gedankengang zuerst an den speziellen Gleichungen $z^2 + Pz + Q = 0 = (z - w)(z + A)$ und $z^3 + pz^2 + qz + r = 0 = (z - w)(z^2 + az + b)$, wo w die gemeinsame Wurzel und A, a, b unbestimmte Koeffizienten sind. Daraus folgen

$$(z^2 + Pz + Q)(z^2 + az + b) = (z^3 + pz^2 + qz + r)(z + A),$$

und die Bestimmungsgleichungen $P + a = p + A$, $Q + Pa + b = q + pA$, $Pb + Qa = qA + r$, $Qb = rA$, welche durch Elimination von A, a, b das erwünschte Resultat liefern.

Wilhelm Otto Reitz (1702—1768), ein Lehrer in Rotterdam und Middelburg, veröffentlichte eine Schrift[2]) über die Auflösung der Quartik, worin er Kunstgriffe angibt, um Fälle zu lösen, wo durch Addition eines Trinoms $a^2x^2 + 2abx + b^2$ zu beiden Seiten, die Seiten Quadratformen annehmen können.

Bézouts Untersuchungen über die algebraische Auflösung von Gleichungen führten ihn zu dem Eliminationsproblem. Er fand, daß Newtons Eliminationsmethode, durch Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers, öfters fremde Lösungen gibt, daß das Verfahren von Euler und Cramer, durch symmetrische Funktionen, nur auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf einmal anwendbar ist. Im Falle mehrerer Gleichungen müsse man sie paarweise nehmen und die Endgleichung sei höheren Grades als notwendig ist. In einer Abhandlung Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues[3]) fängt Bézout mit einem Lemma an, um die Resultante von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten zu finden. Sind $a, b, c, d, \ldots$ die Koeffizienten der ersten Gleichung, $a', b', c', d', \ldots$ und $a'', b'', c'', d'', \ldots$ diejenigen der zweiten und dritten Gleichung usw., dann bilde man die Permutationen ab, ba und schreibe $ab - ba$. Mit diesen zwei und c bilde man alle möglichen Permutationen und beachte einen Zeichenwechsel, wenn c in ab oder ba seine Stelle ändert. Man hat $abc - acb + cab - bac + bca - cba$. Auf gleiche Weise verfahre man mit dem Buchstaben d und den übrigen Koeffizienten der ersten Gleichung. Setzt man den letzten Ausdruck gleich Null, so hat man die Bedingung, daß die vorgelegten Gleichungen simultan seien. Diese Polynomen sind Determinanten, die durch eine einfache Regel niedergeschrieben werden können. Bézout schreitet dann zur Elimination zweier Un-

---

[1]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1764, Berlin 1766, p. 91 bis 104. [2]) Verhandelingen uitgegeeven door de Hollandsche Maatschappye der Weetenschappen, te Haarlem, IX Deels III. Stuk 1767, S. 1—43. [3]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1764, Paris 1767, p. 288—338.

bekannten aus zwei Gleichungen m^{ten} und m'^{ten} Grades, indem er die erste Gleichung mit einem Polynom $M'x^{m'-1} + N'x^{m'-2} + \cdots$ multipliziert und die zweite mit einem Polynom $Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + \cdots$ und die Produkte addiert. Der Koeffizient jeder Potenz von x in dieser Summe wird nun $= 0$ gesetzt. Sind z. B. die vorgelegten Gleichungen $Ax^2 + Bx + C = 0$, $A'x^2 + B'x + C' = 0$, multipliziert man beziehungsweise mit $Mx + N$, $M'x + N'$, und läßt die Koeffizienten von x in der Summe der Produkte verschwinden, dann hat man $AM + A'M' = 0$, $BM + B'M' + AN + A'N' = 0$, $CM + C'M' + BN + B'N' = 0$, $CN + C'N' = 0$. Man darf hier den willkürlichen Koeffizienten M gleich A' setzen, dann wird $M' = -A$. Durch Elimination von N, N' erhält man einen Ausdruck, den man leichter durch die Formeln obgenannten Lemmas niederschreiben kann. Dies Verfahren läßt sich, wie Bézout erklärt, auf drei oder mehrere Gleichungen ausdehnen. Um die Operationen abzukürzen, schlägt er vor, daß man bei den Gleichungen $Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + T = 0$, $A'x^{m'} + B'x^{m'-1} + \cdots T' = 0$, im Falle $m = m'$, die erste nacheinander mit A', $A'x + B'$, $A'x^2 + B'x + C'$, $\cdots$, und die zweite nacheinander mit A, $Ax + B$, $Ax^2 + Bx + C$, $\cdots$ multipliziere und jedesmal die Differenz der entsprechenden Produkte niederschreibe. Man erhalte auf diese Weise m Gleichungen $m - 1^{\text{ten}}$ Grades. Man soll dann jede Potenz von x als eine Unbekannte betrachten, und das Lemma liefere die Bedingung für die simultane Existenz dieser m Gleichungen. Die Frage, ob die Werte der verschiedenen Potenzen von x bei der Annahme, daß sie verschiedene Unbekannte vorstellen, miteinander verträglich seien, wird nicht berührt. Das Endresultat erkennt man als eine symmetrische Determinante. Ist $m' < m$, dann multipliziere man die zweite Gleichung mit $Ax^{m-m'}$, $Ax^{m-m'+1} + B^{m-m'}$, .. und verfahre wie oben. Der Grad der Resultante wird achtsam untersucht und nicht größer als das Produkt der Ordnungsexponenten der zwei Gleichungen gefunden.

In der Schrift Nova criteria radices aequationum imaginarias dignoscendi[1]) erklärt Euler, daß die damals aufgestellten Kriterien für imaginäre Wurzeln die Existenz solcher Wurzeln in einer Gleichung wie $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 24x + 108 = (x^2 + 8x + 18) \cdot (x^2 - 4x + 6) = 0$ nicht kund machen. Clairauts Algebra und die Veröffentlichungen von Waring aus den Jahren 1762 und 1764 waren ihm also nicht bekannt. Euler stellt drei Prinzipien auf: Erstens, sind alle Wurzeln einer Gleichung reell, dann hat die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate derjenigen der vorgelegten Gleichung

[1]) N. Comm. Petr., Tom. XIII, pro anno 1768, Petropoli 1769, p. 89—119.

sind, lauter positive Wurzeln, und die Zeichen ihrer Koeffizienten wechseln beständig ab. Zweitens, in der Gleichung $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \pm \cdots = 0$ mit reellen Wurzeln muß die Summe der Quadrate der Wurzeldifferenzen positiv sein und folglich $a^2 > \frac{2n}{n-1} b$. Drittens, hat die Gleichung $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = 0$ lauter reelle Wurzeln, dann haben die zwei davon abgeleiteten Gleichungen $n-1^{\text{ten}}$ Grades auch lauter reelle Wurzeln: $nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + \cdots = 0$, $ax^{n-1} + 2bx^{n-2} + 3cx^{n-3} + \cdots = 0$. Den Nachweis dafür zieht er aus der Kurventheorie. Für die erste betrachtet er $\frac{du}{dx} = 0$, und für die zweite setzt er erst $x = 1/z$. Durch Wiederholung der Operation fließen aus den zwei Gleichungen $n-1^{\text{ten}}$ Grades drei Gleichungen $n-2^{\text{ten}}$ Grades und vier Gleichungen $n-3^{\text{ten}}$ Grades usw., bis man endlich auf quadratische Gleichungen kommt, deren Wurzeln leicht erkennbar sind. Es ist zu beachten, daß von diesen drei Kriterien keines hinreichend ist, und keines die Anzahl imaginärer Wurzeln anzeigt, im Falle, daß solche sich vorfinden. Die zwei ersten Prinzipien findet man schon in Newtons Arithmetica universalis.

Das dritte Prinzip Eulers wird auch von J. H. Lambert in seinen Observations sur les équations d'un degré quelconque[1]) hergestellt. Um die Bedingung für die Existenz gleicher Wurzeln einer Gleichung $z^3 + az^2 + bz + k = 0$ zu bestimmen, findet Lambert den größten gemeinschaftlichen Teiler zwischen $z^3 + az^2 + bz + k$ und $3z^2 + 2az + b$, und setzt den letzten Rest gleich Null. In einer zweiten Abhandlung des gleichen Jahres[2]) bemerkt Lambert, daß Analysten wenig Hoffnung hegen, die allgemeine Auflösung algebraischer Gleichungen zu erzielen, weshalb es wünschenswert sei, Kunstgriffe für die Auffindung der Wurzeln für Spezialfälle zu entdecken. Er beschäftigt sich hauptsächlich mit numerischen Gleichungen. Nach einem seiner Vorschläge bilde man eine zweite Gleichung, deren Wurzeln die Summe je zweier Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Diese Hilfsgleichung lasse sich öfters in rationale Faktoren zerlegen und liefere die erwünschte Lösung.

Francisco de Toschi a Fagnano untersucht in einer Schrift, De infinitarum aequationum resolutione, quarum radices sub eadem forma exhibentur, qua radix cubica, quae dicitur Cardani[3]) Gleichungen, die mit $x^3 + \frac{3a^2}{4}x + \frac{a^2y}{4} = 0$ oder

---

[1]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1763, Berlin 1770, p. 278 bis 291. [2]) Ebenda, S. 292—310. [3]) Nova Acta Eruditorum, 1770, p. 200—227.

$t^6 + 2a^2yt^3 - a^6 = 0$ $\left(\text{wo } 2x = t - \frac{a^2}{t} \text{ gesetzt ist}\right)$ verwandt sind. Statt dieser Gleichung 6^{ten} Grades nehme man $t^{2n} + 2a^{n-1}t^n y - a^{2n} = 0$, worin n eine ganze oder gebrochene, positive oder negative, ja sogar eine irrationale Zahl sein möge. In jedem Falle habe man $2a^{\frac{1-n}{n}} x = (-y \pm \sqrt{y^2 + a^2})^{\frac{1}{n}} - (y \pm \sqrt{y^2 + a^2})^{\frac{1}{n}}$. Jede Gleichung, die sich auf die Form der obigen $2n^{\text{ten}}$ Grades reduzieren läßt, zeigt Wurzeln der Cardanschen Art. Wenn n eine gerade Zahl ist und man bei $\pm$ das untere Zeichen nimmt, sei die Wurzel durch Imaginäres verunstaltet; ist aber n ungerade, sei es gleichgültig, welches Zeichen man nimmt. Durch Differentiation der Wurzelform und Kombination erhält er $\frac{n\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \mp \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a^2}}$. Dann durch Integration und Transformation wird

$$2a^{n-1}y = (x + \sqrt{x^2 + a^2})^n - (-x + \sqrt{x^2 + a^2})^n,$$

eine Gleichung, die die Cardansche Wurzelform besitzt. Indem man für x $t - \frac{a^2}{t}$ einsetzt, gelangt man zur ursprünglichen Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades. Dann folgen geometrische Betrachtungen, aus welchen hervorgeht, daß die Konstruktion aller dieser Gleichungen durch die Seiten rechtwinkliger Dreiecke nach der Cotes'schen Methode für Kubikgleichungen erzielt werden kann.

Ein durch leichtfaßliche Darstellung für den Unterricht geeignetes Werk über Gleichungstheorie wurde von Mako unter dem Titel De arithmeticis, et geometricis aequationum resolutionibus liber duo 1770 in Wien veröffentlicht. Paul Mako de Kerek Gede (1724?—1793) war ein ungarischer Jesuit, welcher durch seine Lehrtätigkeit in Mathematik und Physik an der Theresianischen Akademie in Wien Geschmack für die Mathematik erweckte.

Der Pariser Astronom und Physiker Achille Pierre Dionis du Séjour (1734—1794) veröffentlichte[1]) einen Beweis, daß $x^3 - px + q = 0$ für den irreduktiblen Fall, $4p^3 > 27q^2$, keine Wurzel von der Form $a + b\sqrt{-1}$ haben kann, und, da D'Alembert gezeigt habe, daß alle imaginären Wurzeln diese Form annehmen, müssen alle drei Wurzeln reell sein. Dieser Gedanke wird in einer Abhandlung Pour déterminer le nombre des racines réelles et des racines imaginaires ...[2]) weiter entwickelt und auf Gleichungen dritten und vierten Grades angewandt. Er setzt voraus, daß jede

---

1) Histoire de l'académie royale des sciences, année 1768, Paris 1770, p. 207, 208. 2) Ebenda, année 1772, II. Partie, Paris 1776, p. 377—456.

Wurzel sich in der Form $a + b\sqrt{-1}$ ausdrücken lasse, wo a reell ist, b aber diesmal entweder reell oder eine durch $\sqrt{-1}$ nicht teilbare imaginäre Größe ist. Für x substituiert er $a + b\sqrt{-1}$ und bildet aus dem Resultate zwei Gleichungen, wovon die eine aus den mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ behafteten Gliedern besteht und die andere alle übrigen Glieder enthält. Erhält nun a in einer dieser Gleichungen einen willkürlichen Wert, dann läßt sich der korrelative Wert von b bestimmen. Setzt man diese Werte von a und b in die andere Gleichung ein, so erhält man Ausdrücke für die Bestimmung der Spezialgleichung desselben Grades, welche $x - a - b\sqrt{-1}$ als Faktor enthält. Stellt sich b als eine durch $\sqrt{-1}$ nicht teilbare imaginäre Größe heraus, dann ist dieser Faktor imaginär, in anderen Fällen ist er reell. Setzt man z. B. in der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ den Wert $a + b\sqrt{-1}$ für x, dann erhält man nach obiger Anweisung die zwei Gleichungen (α) $a^3 - 3ab^2 + ap + q = 0$, (β) $b^2 - 3a^2 - p = 0$. Eliminiert man b^2, so wird (γ) $2a(4a^2 + p) - q = 0$. Der kleinste Wert, den a^2 in (β) annehmen kann, ist 0. Setzt man in (α) $a = 0$ und $b = \pm\sqrt{p}$, so wird $q = 0$, und $x \pm \sqrt{-p} = 0$ ist ein Faktor der Gleichung. Aus (β) zieht man $b = \pm\sqrt{3a^2 + p}$; für Werte von $p > -3a^2$ ist b also immer reell und zwei Wurzeln der Kubik sind immer imaginär; $b = 0$ ist der Grenzwert. Setzt man in (α) $b = 0$ und $a = \pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$, so wird $4p^3 + 27q^2 = 0$, in welchem Falle $x \mp \sqrt{\frac{-p}{3}} = 0$. Nun kann b nicht reell sein, wenn y in der Gleichung (1) $3a^2 + p - y = 0$ nicht positiv ist. Diese Gleichung, in Verbindung mit (α) und (β), liefert $4p^2 + 27q^2 = 4y(4y - 3p)^2$, woraus zu ersehen ist, daß die vorgelegte Gleichung nur dann imaginäre Wurzeln haben kann, wenn y positiv, und folglich $4p^3 + 27q^2$ positiv ist. Séjour läßt eine ausführliche Besprechung der Quartik und die geometrische Deutung seiner Resultate folgen. Lagrange drückte sich über Séjours Verfahren anerkennend aus[1]), möchte aber dasselbe auf die Quintik übertragen sehen. Dies soll Séjour kurz vor seinem Tode wirklich erzielt haben; die neue Abhandlung sei aber verloren gegangen[2]).

Die Hauptresultate über Gleichungen in der Miscellanea analytica, 1762, wurden von Waring in etwas veränderter Form in

---

[1]) Lagrange, Oeuvres, T. XIV, p. 71. [2]) Michaud, Biogr. univ.; Laplace, „Leçons de math. données à l'école normale", Journ. de l'école polyt. T. II, Paris 1812, p. 44.

den Meditationes algebraicae, 1770, wiedergegeben. Letzteres ist aber ein größeres Werk und enthält vieles, was sich im ersten nicht vorfindet oder dort nur ganz kurz angedeutet ist. Die einschlagenden Neuerungen finden sich aber alle schon im ersten Werke.

Er zeigt unter anderem folgende Methode, die Grenzwerte von Wurzeln festzusetzen: Hat $(A)\ x^n - px^{n-1} + \text{etc.} = 0$ die reellen Wurzeln α, β, γ, etc., wo $\alpha > \beta > \gamma > \cdots$, dann hat $(B)\, nx^{n-1} - (n-1)px^{n-2} + \text{etc.} = 0$ die reellen Wurzeln π, ϱ, $\sigma, \ldots$, welche bezüglich zwischen α und β, β und γ etc. liegen; auch liegen die Wurzeln von $hA + mB = 0$, wenn h und m gleiche Zeichen haben, bezüglich zwischen α und π, β und ϱ etc.; wenn aber h und m entgegengesetzte Zeichen haben, ist eine Wurzel von $hA + mB = 0$ größer als α, während die übrigen bezüglich zwischen π und β, ϱ und γ etc. liegen. Wenn h und m gleichzeichig sind, liegt eine Wurzel von $hA + mB = 0$ zwischen der kleinsten positiven und Null, und eine andere zwischen der kleinsten negativen und Null von der Gleichung $A = 0$. Nun leitet er mehrere Regeln ab, welche annähernd die Anzahl imaginärer Wurzeln einer Gleichung angeben[1]), die aber wegen ihrer komplizierten Natur keine Aufnahme gefunden haben. Ist die vorgelegte Gleichung[2]) $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \text{etc.} = 0$, so eliminiere man x zwischen derselben und $nx^{n-1} - (n-1)px^{n-2} + \text{etc.} = v$ oder zwischen $x^n - px^{n-1} + \text{etc.} = v$ und $nx^{n-1} - (n-1)px^{n-2} + \text{etc.} = 0$, und man kann aus der Gleichung $v^n - Av^{n-1} + Bv^{n-2} + \cdots + S = 0$ immer die genaue Anzahl imaginärer Wurzeln in einer Kubik, Quartik und Quintik entnehmen, und in einer höheren Gleichung entscheiden, ob sich imaginäre Wurzeln vorfinden. Das letzte Glied entscheidet ferner, ob die Anzahl solcher Wurzeln 2, 6, 10 etc. oder 0, 2, 8 etc. ist. Um Descartes' Zeichenregel nachzuweisen, wird hervorgehoben, daß bei Multiplikation des Polynoms durch $(x - a)$ die Anzahl der Zeichenwechsel um 1 oder 3 oder 5 etc. vermehrt wird. Die Diskussion komplexer Wurzeln nimmt 80 Seiten von Warings Quarto-Werke ein.

Es wird[3]) eine Methode vorgeführt, Annäherungen zu imaginären Wurzeln zu finden. Ist $a + b\sqrt{-1}$ ein Näherungswert, so kann man größere Genauigkeit durch die Substitution von $x = a + a' + (b + b')\sqrt{-1}$ in die vorgelegte Gleichung und die Festsetzung der beiden Werte, a' und b', durch Auflösung der erfolgten Bestimmungsgleichungen erlangen. Dann wird ein Verfahren skizziert, um aus

---

[1]) Meditationes algeb., ed. tertia, 1782, p. 68, Problem IX ff. [2]) Ebenda, p. 87, Problem XIII, XIV. [3]) Ebenda, p. 268.

Inkrementen der Koeffizienten die Inkremente der Wurzeln zu berechnen. Endlich wird nach der Anzeige in der Vorrede[1]) „bewiesen, daß jede Gleichung reelle oder imaginäre Wurzeln von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ habe". Jede Gleichung[2]) $x^n - px^{n-1} + \text{etc.} = 0$ könne in irgend eine andere $x^n - Px^{n-1} + \text{etc.} = 0$ durch beständige Addition von Größen $-p'x^{n-1} + q'x^{n-2} - \text{etc.}$ (wo p', q', ... möglich kleinste Größen sind, so gewählt, daß mehr als zwei Wurzeln niemals einander gleich werden) transformiert werden. Deshalb müsse irgend eine Wurzel der Gleichung $x^n - Px^{n-1} + \text{etc.} = 0$ in der Formel $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ enthalten sein. Es ist diese eine der Stellen in Warings Schriften, so allgemein und kurz gefaßt, daß sie beinahe wertlos sind. James Wood, ein Verehrer Warings, gesteht, daß der Verfasser hier den Leser über die Wurzelexistenz im Zweifel lasse. Uns scheint die Wurzelexistenz stillschweigend vorausgesetzt; Waring wollte wahrscheinlich nur nachweisen, daß sogar die sogenannten unmöglichen Wurzeln immer in der Form $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ enthalten sind.

Die Theorie der Gleichungen wird nun von Lagrange, dem größten Mathematiker des 18. Jahrhunderts, mit einschlagenden Abhandlungen bereichert. Wir halten einige Augenblicke inne, kurz seinen Lebenslauf zu schildern. Joseph Louis Lagrange[3]) (1736 bis 1813) wurde zu Turin am 25. Januar geboren. Sein Urgroßvater[4]) war ein geborener Pariser und war als Kavalleriekapitän im Dienste Königs Emanuel II. nach Sardinien gegangen, der ihn durch Verheiratung mit einer Dame Conti an Turin fesselte. Lagranges Vater war Kriegszahlmeister und seine Mutter die Tochter eines

---

[1]) Ebenda, p. XLI. [2]) Ebenda, p. 272. [3]) Wir benutzen folgende Schriften: 1) Nachricht von Lagrange's Leben und Schriften, vorgelesen von Delambre am 3. Januar 1814 in der Akademie der Wissenschaften zu Paris [Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'institut de France, année 1812], übersetzt von A. L. Crelle und gedruckt in J. L. Lagrange's mathematische Werke, herausgegeben von A. L. Crelle, Erster Band, Berlin 1823. 2) Précis Historique sur la vie et la mort de Joseph-Louis Lagrange, par MM. J. J. Virey et Potel, Paris 1813. 3) Intorno alla vita ed alle opere di Luigi Lagrange. Discorso letto nel R. Liceo Galilei di Pisa dal Cav. Angelo Forti, Roma 1869. 4) Notizen von Guyton Morveau in A. L. Crelle, op. cit. I, p. LXIX—LXXI. 5) Einige Zusätze zu vorstehenden Nachrichten von Lagrange's Leben von A. L. Crelle in op. cit. I, p. XCV bis XCIX. 6) Joseph Bertrand, Éloges Académiques, nouvelle série, Paris 1902, p. 291—311 (Extrait du Journal des Savants, septembre 1888). 7) A. Harnack, Gesch. d. K. Preuß. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1900. 8) Cossalis Elogio di L. Lagrange war uns nicht zugänglich. [4]) Nach Forti, op. cit. S. 8, und Virey et Potel, op. cit. p. 4, wurde er am 30. Januar geboren; nach Forti war sein Großvater, nicht sein Urgroßvater, im Dienste Emanuels II. von Sardinien.

reichen Arztes zu Cambiano. Durch gewagte Unternehmungen verlor der Vater sein Vermögen. Der junge Lagrange interessierte sich anfangs für Cicero und Virgil; erst später zeigte sich Neigung für Mathematik. Zuerst studierte er die Geometrie der Griechen, dann erregte eine Abhandlung des Astronomen Halley, worin die Vorzüge der Analysis hervorgehoben wurden, in ihm großen Eifer für die Analysis. Er machte so ausgezeichnete Fortschritte, daß er vor seinem 20. Jahre[1]) die Stelle eines Professors der Mathematik an der Königlichen Artillerieschule zu Turin bekleiden konnte. In Verbindung mit einigen seiner Schüler gründete er die Turiner Akademie. Zu dieser Zeit bearbeitete er seine neuen Methoden für die Maxima und Minima, schrieb über rücklaufende Reihen und Wahrscheinlichkeitsrechnung. In der Abhandlung über die Fortpflanzung des Schalles behandelte er einen schwierigen Gegenstand, an welchem Newton, Taylor, Daniel Bernoulli und D'Alembert gearbeitet hatten, und trat gleichsam als Schiedsrichter auf, der jedem zeigte, worin er in diesem Streite recht oder unrecht hatte. Lagranges Arbeiten veranlaßten Euler ihn in die Berliner Akademie aufnehmen zu lassen. Am 2. Oktober 1759 meldete Euler seine Aufnahme an.

Lagrange sehnte sich die Pariser Gelehrten, mit denen er in Briefwechsel war, persönlich kennen zu lernen. Er nahm eine Einladung seines Freundes Carraccioli an, mit ihm über Paris nach London zu reisen. In Paris wurde er von D'Alembert, Clairaut, Condorcet, Fontaine, Nollet, Marie und anderen gut aufgenommen. Plötzlich erkrankt, konnte er seinem Freunde nicht nach London folgen. Nach Turin zurückgekehrt, widmete er sich mit neuem Eifer der Mathematik. Als Euler sich entschied, Berlin zu verlassen, um nach St. Petersburg zu gehen, bot Friedrich der Große die Präsidentenstelle seiner Akademie D'Alembert an. D'Alembert hatte aber keine Lust Paris zu verlassen und schlug Friedrich vor, Lagrange an Eulers Stelle zu setzen. Diesen Vorschlag hatte schon Euler selbst gemacht. Lagrange wurde berufen. Sein Aufenthalt zu Turin hatte ihm wenig mehr gefallen. Er fand dort niemand, der Mathematik mit Erfolg studierte. Er schrieb: „Je suis déterminé à me tirer d'ici à quelque prix que ce soit.“[2])

Lagrange nahm die Stelle in Berlin am 6. November 1766 an. Während seines zwanzigjährigen Aufenthaltes in Berlin lebte er so ganz seiner Wissenschaft, daß ihm die Händel der Welt beinahe unbekannt blieben.

[1]) Nach Virey im 15., nach Delambre im 16., nach Forti im 18. Jahre.
[2]) Vide Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche, Editore Carlo Clausen, Torino, T. IV, 1901, p. 4.

Veranlassung zur Verlegung seines Wohnortes nach Paris waren der Tod Friedrichs des Großen und die Veränderungen, welche danach in Preußen stattfanden oder befürchtet wurden. Mit der Bedingung, daß er der Berliner Akademie noch einige Memoiren liefere, nahm er Abschied und kam 1787 in Paris an. Er wurde mit Wohlwollen empfangen und ihm eine Wohnung im Louvre zugeteilt. Aber von dieser Zeit bis zur Gründung der Polytechnischen Schule verlor er den Geschmack an mathematischen Untersuchungen; er war zerstreut und schwermütig. Zwei Jahre lang lag seine Mécanique analytique, 1788 von Legendre herausgegeben, ungeöffnet auf seinem Schreibtische. Metaphysik, Medizin, Botanik, Chemie teilten sich in seine Muse. Lavoisiers Chemie fand er „so leicht wie Algebra".

Die Hinrichtung Lavoisiers versetzte ihn in große Trauer. „Sie haben nur einen Augenblick gebraucht," sagte er zu Delambre, „um diesen Kopf fallen zu machen, und hundert Jahre vielleicht werden nicht hinreichen, einen ähnlichen hervorzubringen." Zu dieser Zeit sank das französische Papiergeld im Werte, und Lagrange geriet in drückenden Mangel. Durch die Vermittlung eines seiner deutschen Freunde wurde ihm aus Preußen eine Pension von 300 Talern pro Jahr für die ganze Zeit seit seiner Abreise von Berlin zugeschickt. Bei der Gründung der Normalschule in Paris wurde er zum Lehrer ernannt, die ephemere Existenz derselben ließ ihm aber kaum Zeit, die Grundsätze der Arithmetik und Algebra vorzutragen. Es war die Polytechnische Schule, welche Lagrange der Analysis wiedergab.

In der Unterhaltung war er sanft und beinahe schüchtern. Seine Rede begann gewöhnlich mit einem „Ich weiß nicht". Von den Verdiensten anderer sprach er mit größter Achtung. Auf die Frage, wie die Mathematik am besten zu studieren sei, verwies er auf Eulers Schriften. Er war zweimal verheiratet. In Berlin vermählte er sich mit seiner Cousine, deren früher Tod ihn tief betrübte. In Paris heiratete er 1794 die junge Tochter des Astronomen Lemonnier, die ihm ihre schönsten Jahre widmete und sein Leben versüßte.

Euler verfaßte seine Abhandlungen in Latein, aber Lagrange benutzte die allgemeiner verständliche französische Sprache. Während Euler mit naiver Schaffensfreudigkeit und großer Begeisterung alle Teile der Mathematik entwickelte und Wichtiges und Unwichtiges mit gleicher Weitläufigkeit darlegte, so daß seine Schriften zu einem kaum zu überwältigenden Umfange anwuchsen, schrieb Lagrange mit größerer Sorgfalt, nahm sich mehr Mühe allgemeine Gesichtspunkte zu erreichen und seine Resultate in knappe und elegante Form zu bringen. Eulers Schriften lesen sich „wie Novellen"; diejenigen

Lagranges sind mehr abstrakt, dringen tiefer und zeigen größere Präzision der Darstellung.

Lagrange machte einen neuen Angriff auf das Eliminationsproblem in einer Schrift, Sur l'élimination des inconnues dans les équations[1]). Wenn zwischen zwei simultanen Gleichungen $0 = 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \cdots$ und $0 = 1 + Ax + Bx^2 + \cdots = (1 - \alpha x)(1 - \beta x) \cdots$, bezüglich m^{ten} und n^{ten} Grades, x eliminiert werden soll, ist es klar, daß das Produkt $\Pi = (1 + a\alpha + b\alpha^2 + \cdots)(1 + a\beta + b\beta^2 + \cdots) \cdots = 0$ sein muß. Der Logarithmus dieses Produktes Π liefert n Glieder, $\log(1 + a\alpha + a\alpha^2 + \cdots) +$ etc., wovon jedes in eine Reihe entwickelt wird. Dann zieht er die Theorie der symmetrischen Funktionen zu Hilfe und erhält eine Reihe $\Pi = 1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \cdots$, welche Π als eine Funktion von $a, b, c, \ldots$ und $A, B, C, \ldots$ ausdrückt. Die Gleichung $\Pi = 0$ hat kein Glied, worin die $a, b, c \ldots$ zusammen die Dimension m, und die $A, B, C, \ldots$ zusammen die Dimension n übersteigen. Das Verfahren ist schwerfällig und hat keine weite Annahme gefunden.

Die bedeutendste Abhandlung über Gleichungstheorie des 18. Jahrhunderts ist wohl die Arbeit von Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations[2]), denn darin, wie in keiner anderen, werden allgemeine Gesichtspunkte erreicht und die Grundlagen der Methoden gelegt, auf welche später Ruffini, Abel und Galois weiter bauten. Er fängt mit der kubischen Gleichung an und zeigt, daß ihre Lösung von einer Resolventen-Gleichung sechsten Grades abhängt, die er réduite derjenigen dritten Grades nennt. Sind a, b, c die Wurzeln der kubischen Gleichung, y eine Wurzel der réduite und α, β die imaginären Werte von $\sqrt[3]{-1}$, so hat man $3y = a + \alpha b + \beta c$. Da der Wert des y nicht direkt von a, b, c, sondern von den Koeffizienten der kubischen Gleichung abhängt, in denen die drei Wurzeln gleichförmig eintreten, so ist klar, daß man in dem Ausdruck für $3y$ die drei Größen a, b, c willkürlich vertauschen kann, wodurch man sechs verschiedene Werte für $3y$ erhält. Wenn nun $Aa + Bb + Cc$ einen Wert von y darstellt, worin A, B, C von a, b, c unabhängig sind, so kann man a, b, c auf alle mögliche Weisen vertauschen und so die sechs Wurzeln und endlich die Resolvente selbst herleiten. Er erklärt die Tschirnhausensche Auf-

[1]) Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1769, t. 25, Berlin 1771, p. 303—320 = Oeuvres, T. III, p. 141—154. [2]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1770, Berlin 1772, p. 134—215; année 1771, Berlin 1773, p. 138—254 = Oeuvres, T. III, p. 205—421.

lösungsmethode und zeigt, daß diese, sowie alle anderen, die Auffindung von Resolventen, deren Wurzeln entweder $x' + x''\alpha + x'''\alpha^2$ oder $(x' + x''\alpha + x'''\alpha^2)^3$ sind und deren Grad entweder der sechste oder der zweite ist, erfordern.

In diesen Untersuchungen hatte Lagrange Gelegenheit, die Kriterien abzuleiten, damit zwei Gleichungen mehr als eine Wurzel miteinander gemein haben. Sind $P = 0$, $Q = 0$ die zwei Gleichungen, nehme man $P = y$ und schaffe x aus beiden Gleichungen weg. Man bekommt $y^m + ay^{m-1} + \cdots + py^2 + qy + r = 0$. Da nun $r = 0$ sein muß, damit $P = 0$ und $Q = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so wird zu zwei gemeinschaftlichen Wurzeln $r = 0$, $\frac{dr}{d\xi} = 0$, und zu dreien $r = 0$, $\frac{dr}{d\xi} = 0$ und $\frac{d^2r}{d\xi^2} = 0$, etc. erfordert, wo ξ das letzte Glied der einen von den gegebenen Gleichungen ist.

Zur Gleichung vierten Grades schreitend, bespricht Lagrange die Methoden von Ferrari, Descartes, Tschirnhausen, Euler, Bézout und zeigt den Zusammenhang und die gegenseitige Abhängigkeit derselben. Er gibt die a priori Gründe an, warum einige davon auf Resolventen dritten, andere auf solche sechsten Grades führen, die aber zum dritten erniedrigt werden können. Die Wurzeln dieser Resolventen sind Funktionen der Größen x', x'', x''', x^{IV}, solcher Art, daß, wenn alle möglichen Permutationen der vier Größen stattfinden, nur drei verschiedene Werte entspringen, wie bei $x'x'' + x'''x^{\mathrm{IV}}$, oder sechs Werte, von denen je zwei entgegengesetzte Zeichen aber gleichen absoluten Wert haben, wie bei $x' + x'' - x''' - x^{\mathrm{IV}}$, oder auch sechs Werte, die in drei solche Paare verteilt werden können, daß, wenn man die Summe oder das Produkt der Werte jedes Paares bildet, diese drei Summen oder drei Produkte, bei irgend einer Permutation der x', x'', x''', x^{IV} immer unverändert bleiben. Auf der Existenz solcher Funktionen ruht die allgemeine Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Lagrange kennt zwei Methoden, durch deren Hilfe man vielleicht die allgemeine Auflösung der quintischen Gleichung erwarten dürfe: die Tschirnhausensche Methode und diejenige von Euler und Bézout. Diese ergeben eine allgemeine und einheitliche Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen, erfordern aber bei der Quintik die Lösung einer Gleichung des 24ten Grades, die gewiß nicht auf einen niedrigeren als den 5ten Grad reduziert werden kann. Lagrange sucht a priori die Tragweite dieser Methoden zu ermitteln. Um die Gleichung

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \cdots = 0$$

nach **Tschirnhausen** zu lösen, setzt man $x^\nu + fx^{\nu-1} + gx^{\nu-2} + \cdots + y = 0$, worin $f, g, \ldots$ unbestimmte Koeffizienten sind, und erhält $y^\mu + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + Cy^{\mu-3} + \cdots = 0$, wo $A, B, C, \ldots$ rationale, ganze Funktionen von $f, g, \ldots$ sind. Man darf $A = B = C = \cdots = 0$ setzen, so daß $y^\mu + V = 0$. Ist μ zusammengesetzt und $= \nu\omega$, so erhält man im allgemeinen eine Resolvente des Grades $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{\omega^{\nu-1}}$. Wenn μ prim ist, ist sie des Grades $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\mu - 1)$, kann aber immer in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\mu - 2)$ Gleichungen $\mu - 1^{\text{ten}}$ Grades, mit Hilfe einer Gleichung $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\mu - 2)^{\text{ten}}$ Grades, zerlegt werden. Für $\mu = 5$ ist der Grad letzterer Gleichung 6; für $\mu = 7$ ist er 120. Wie hoch aber auch der Grad $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\mu - 2)$ sein mag, bietet ihre Lösung keine Schwierigkeiten dar, die man nicht zugleich in der vorgelegten Gleichung μ^{ten} Grades findet, denn die $\underline{\mu - 2}$-Wurzeln sind bekannte Funktionen der μ Wurzeln $x', x'', x''' \ldots$, und deshalb nicht unabhängig voneinander, sondern durch $\underline{\mu - 2} - \mu$ Beziehungen miteinander verbunden. Resolventen der gleichen Grade ergeben sich im allgemeinen aus **Eulers** und **Bézouts** Methoden. Eine zweite Auflösungsmethode von **Bézout** wird untersucht. Dieselbe liefert für die Gleichung 6^{ten} Grades eine Resolvente des 10^{ten} Grades, die, **Bézouts** Vermutung zuwider, nicht in zwei Gleichungen zerlegt werden kann.

Mit diesen kurzgefaßten Auseinandersetzungen des dritten Teils der **Lagrangeschen** Schrift schreiten wir zum letzten Teil, wo er zeigt, daß alle bekannten Auflösungsmethoden sich auf das gleiche allgemeine Prinzip reduzieren lassen. Dieses besteht darin, Funktionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung zu finden, solcherart, daß 1) die Gleichung oder Gleichungen, von denen diese Funktionen die Wurzeln sind, von niedrigerem Grade als dem der vorgelegten sind, oder wenigstens in solche zerlegt werden können, 2) man die gesuchten Wurzeln auf bequeme Weise herleiten kann. Die Auflösungskunst besteht also in der Entdeckung solcher Funktionen. Ist es möglich, für $\mu > 4$ solche Funktionen zu finden? Dies sei im allgemeinen sehr schwer zu beantworten. Für $n < 5$ sei $x' + yx'' + y^2x''' + \cdots + y^{\mu-1}x^{(\mu)}$ die allgemeine Form der einfachsten Funktion der Wurzeln $x', x'', \ldots$, wo y eine imaginäre μ^{te} Einheitswurzel ist. Da für $n \gtreqless 5$ diese Funktion nicht zum Ziele führt, müsse die Auflösung durch neue Funktionen erfolgen, wenn sie überhaupt möglich sei. Bisher habe er solche Funktionen nur a posteriori gesucht, nun wolle er zeigen, wie rationale Funktionen a priori zu finden seien.

Sind (§ 95) $x', x'', x''', \ldots$ die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, f rationale Funktionen dieser Wurzeln, und nimmt man im allgemeinen das Produkt von so vielen Faktoren

$$t - f[(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})\ldots],$$
$$t - f[(x'')(x')(x''')(x^{\mathrm{IV}})\ldots],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

als Versetzungen unter den Wurzeln $x', x'', \ldots$ möglich sind, nämlich $\omega = \underline{|\mu}$ Faktoren, so ist $\underline{|\mu}$ die Anzahl Wurzeln von einer irreduziblen Gleichung $\Theta \equiv t^{\omega} - Mt^{\omega-1} + Nt^{\omega-2} - \cdots = 0$, wo M die Summe aller Funktionen, N die Summe aller Produkte je zweier Funktionen etc. darstellt. Es folgt, daß $M, N, \ldots$ rationale Funktionen der Koeffizienten sind, welche, wie schon Cramer und Waring gezeigt hatten, direkt berechnet werden können. Wenn nicht jede Permutation ungleichförmige Funktionen liefert, und man gleiche Funktionen ausschließt, stellt sich $\Theta = 0$ von niederem Grade heraus. Es ergibt sich das Resultat (§ 99), daß 1) alle gleichartigen Funktionen von $x', x'', \ldots$ (nämlich Funktionen von denselben Wurzeln, die bei einer gewissen Permutation sich gleichzeitig ändern oder sich nicht ändern) durch Gleichungen von gleichem Grade bestimmt sind; 2) daß dieser Grad der Anzahl verschiedener Werte der Funktion gleich ist und immer $\underline{|\mu}$ oder ein Teiler von $\underline{|\mu}$ ist, 3) daß diese Funktionen berechnet werden können. Eine solche Funktion kann rational durch eine gleichartige Funktion ausgedrückt werden. Hat man zwei rationale Funktionen, y und t, solcher Art, daß sich t für jede Wurzelpermutation verändert, welche zugleich in y eine Variation hervorbringt, dann läßt sich y rational durch t und den Koeffizienten der vorgelegten Gleichung ausdrücken. Lagrange erkennt diesen Lehrsatz als einen der wichtigsten in der Gleichungstheorie (§ 100). 61 Jahre später erhielt dieser Satz eine allgemeinere Formulierung durch Évariste Galois. Die Eigenschaften dieser rationalen Funktionen werden durch die Kombinationsrechnung („calcul des combinaisons") untersucht. Man findet darin die Keime der großen Substitutionstheorie. Lagrange sagt (§ 109): „Dies sind, wenn ich nicht irre, die wahren Gründe von der Auflösung der Gleichungen, und der eigentliche Weg, welcher uns dahin führen kann." In der Vorrede des dritten Abschnitts sagt er: „Aus diesen Betrachtungen erhellet, daß es äußerst zweifelhaft ist, ob die Methoden, von welchen wir geredet haben, zu einer vollständigen Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, und noch viel mehr der höheren Grade führen können."

Kurz nach Lagranges Abhandlung erschien eine andere wichtige Arbeit, Mémoire sur la résolution des équations[1]) von Alexandre Théophile Vandermonde (1735—1796)[2]), einem Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften und seit 1782 Direktor des Conservatoire pour les arts-et-métiers. Die Untersuchungen von Waring, Lagrange, Marguerie (S. 118), Condorcet wurden ihm erst nach der Einreichung seines Memoires bekannt. Vandermonde hebt hervor, daß die wesentliche Bedingung für die allgemeine Auflösung der Gleichungen darin bestehe, eine Funktion der Summe der Wurzeln, der Summe der Produkte je zweier ihrer Wurzeln, der Summe der Produkte je dreier ihrer Wurzeln etc. zu finden, die gegen irgendwelche Wurzel indifferent sei. Diese Untersuchung zerfalle in drei Teile: 1) eine Funktion der Wurzeln zu finden, die solchen dieser Wurzeln, die man wünscht, gleich sei, 2) dieser Funktion eine Form zu geben, daß sie auch der Vertauschung der Wurzeln unter sich indifferent sei, 3) darin die Werte der Summe der Wurzeln, der Summe der Produkte je zweier ihrer Wurzeln etc. einzusetzen. Er fängt mit 3) an und berechnet Tafeln, die die Werte symmetrischer Funktionen, durch die Gleichungskoeffizienten ausgedrückt, angeben. Eine Funktion der in 1) verlangten Art ist

$$\frac{a}{n}\Big[a + b + c + \text{etc.} + \sqrt[n]{(a + r_1 b + r_2 c + \cdots)^n}$$
$$+ \sqrt[n]{(a + r_1^2 b + r_2^2 c + \cdots)^n} + \cdots + \sqrt[n]{(a + r_1^{n-1} b + r_2^{n-1} c + \cdots)^n}\Big],$$

die a, b oder c etc. indifferent gleich ist, wo $a, b, c, \ldots$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung und $1, r_1, r_2, r_3, \ldots$ die n^{ten} Einheitswurzeln sind. Ist $n = 3$, hat man

$$a = \frac{1}{3}[(a + b + c) + (a + r_1 b + r_2 c) + (a + r_1^2 b + r_2^2 c)],$$

$$b = \frac{1}{3}[(a + b + c) + r_2(a + r_1 b + r_2 c) + r_2^2(a + r_1^2 b + r_2^2 c)],$$

$$c = \frac{1}{3}[(a + b + c) + r_1(a + r_1 b + r_2 c) + r_1^2(a + r_1^2 b + r_2^2 c)].$$

Ferner $(a + r_1 b + r_2 c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r_1(a^2 b + b^2 c + c^2 a) + 3r_2(a^2 c + b^2 a + c^2 b)$, welcher Ausdruck nun leicht als eine Funktion der Koeffizienten der vorgelegten Gleichung ausgedrückt werden kann. Desgleichen für $(a + r_1^2 b + r_1^2 c)^3$. Auf diese Weise folgt nun die Auflösung. Vandermonde sucht nun seine Methode auf die Quintic und höhere Gleichungen anzuwenden. Hier stößt er auf Schwierig-

[1]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1771, Paris 1774, p. 365 bis 416. [2]) Über Vandermondes Vornamen sehe man H. Simon in Zeitschr. f. Math. u. Physik, 41. Jahrg., Hist.-Lit. Abth.

keiten, die obige Bedingung 2) zu erfüllen. Er schließt, daß die Auflösung der Quintic sich auf die einer Gleichung sechsten Grades stütze, deren Koeffizienten rationale Funktionen derjenigen der vorgelegten Gleichung seien. Für die Gleichung sechsten Grades entdeckt er Resolventen 10. und 15. Grades. Man substituiere in den letzten die obgenannten Funktionen. Wenn diese Gleichungen sich dann nicht auf solche vierten oder niedrigeren Grades reduzieren lassen, suche man die Resolventen der Gleichungen 10. und 15. Grades auf etc. Sei die allgemeine Quintic überhaupt lösbar, dann komme man endlich zum Ziele. Für die Quintic entdeckte er auch eine Resolvente fünften Grades. Er hat keine der angeführten Resolventen wirklich berechnet. Er ist der erste, der eine algebraische Lösung für $x^{11} - 1 = 0$ angab.

In der Vandermondeschen, sowie in einigen Teilen der vorangehenden Lagrangeschen Abhandlung findet man eine Auflösungsmethode, welche den Namen Kombinationsmethode erhalten hat[1]). Die älteren Verfahrungsarten von Tartaglia, Tschirnhausen, Waring, Bézout werden zum Unterschiede Substitutionsmethoden genannt. Auch Lagrange hat diese gebraucht. In ersterer werden a priori eine oder mehrere einfache Kombinationen der Wurzeln angenommen und Resolventen zur Bestimmung dieser Kombinationen abgeleitet. Vandermondes Annahme dient als Beispiel. In der Substitutionsmethode substituiert man für x eine Funktion von einer oder mehreren neuen Unbekannten, die zu Resolventen mit möglichst einfachen Wurzelformen führen. Als Beispiel solcher Funktionen führen wir die Wurzelformen von Euler, Waring, Bézout und Lagrange und die Cardansche Annahme für kubische Gleichungen, $x = y + z$, oder die Tschirnhausensche, $y = a + bx + cx^2$, an.

Die Newtonsche Formel für die Potenzsummen der Wurzeln wird von Kästner in einer 1757 verfaßten, aber erst 1771 gedruckten Schrift[2]) nach der Methode der vollständigen Induktion bewiesen. Die unvollständige Induktion sei in der Mathematik zu meiden. Auch in seinen Anfangsgründen der Algebra, § 316, klagt Kästner, daß viele Schriftsteller Gesetze allgemein annehmen, welche nur bei besonderen Fällen als richtig erwiesen sind, wie z. B. beim binomischen Lehrsatz. Es werde berichtet, „Reyneau habe Harriots Lehrsatz aus seiner Analyse demontrée weggelassen, weil er die Regeln der Algebra demonstriren wollte". „Ich hatte eben so viel Eifer die Regeln zu demonstriren, als Reyneau kann gehabt haben, und in

[1]) L. Matthiessen, op. cit., p. 238, 789. [2]) Dissertationes math. et phys. quas soc. reg. scient. Gottingensi annis 1756—1766 etc., Altenburgi 1771, p. 1—8.

der That wäre es eine Schande für einen Deutschen, wenn er da nicht demonstriren wollte, wo selbst ein Franzose dieses unternimmt." Die Franzosen seien von der Euklidischen Beweisschärfe abgewichen, um Leuten das Studium der Mathematik zu erleichtern.

An eine Arbeit von Gabriele Manfredi anknüpfend, gab Gianfrancesco Malfatti in einem bedeutenden Artikel, De aequationibus quadrato-cubicis disquisitio analytica[1]) die Lösungen quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen, und überträgt dann seine Methode auf Gleichungen fünften Grades. Der Arbeiten von Waring und Bézout tut er keine Erwähnung. Wie Euler und Bézout nimmt er als Wurzelform der Gleichung $x^5 - 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0$

$$x + m\sqrt[5]{f^4} + p\sqrt[5]{f^3} + q\sqrt[5]{f^2} + n\sqrt[5]{f} = 0,$$

wo $f = 1$ genommen wird, und erhält

$$x^5 - 5(mn + pq)x^3 + 5(m^2q + n^2p + mp^2 + nq^2)x^2$$
$$- 5(m^3p + n^3q + mq^3 + np^3 - m^2n^2 + mnpq - p^2q^2)x + m^5 + n^5$$
$$+ p^5 + q^5 + 5(mn - pq)(mp^2 + nq^2 - m^2q - n^2p) = 0.$$

Malfatti setzt $mn = y$, $pq = u$, $m^2q + n^2p = r$, $mp^2 + nq^2 = t$. Zur weiteren Abkürzung schreiben wir $m^3p + n^3q = v$ und $mq^3 + np^3 = w$. Malfatti erhält nun $uv = rt - yw$, $vw = r^2u + t^2y - 4u^2y^2$, und aus diesen letzten $2uv = rt + s$, $2yw = rt - s$, wo $s = \sqrt{r^2t^2 - 4r^2u^2y - 4t^2uy^2 + 16u^3y^3}$. Dann wird $vr = (m^5 + n^5)u + y^2t$, $wt = (p^5 + q^5)y + u^2r$. Durch Elimination von v und w folgen $2u^2(m^5 + n^5) = (rt + s)r - 2tuy^2$ und $2y^2(p^5 + q^5) = rt^2 - 2ru^2y - ts$. Durch Vergleichung der Koeffizienten der vorgelegten und der derivierten Gleichung hat man

$$y + u = a, \quad r + t = b,$$

$$\frac{-rt(y+u) + (u-y)s}{2uy} + y^2 - uy + u^2 = c,$$

$$\frac{r^2ty^2 + rt^2u^2 - 2ty^4u - 2ryu^4 + (ry^2 - tu^2)s}{2u^2y^2} + 5(y-u)(t-r) = d.$$

Die dritte Relation gibt $s(u - y) = rt(y + u) - 2uy^3 + 2u^2y^2 - 2u^3y + 2cuy$. Setzt man hierin $t = b - r$ und quadriert, so erhält man

[1]) Atti dell' Accademia delle Scienze di Siena detta de' Fisio-critici, L'anno 1771, T. IV, p. 129—184.

$$r^4 - 2br^3 + (2y^3 - y^2u - yu^2 + 2u^3 - cy - cu + b^2)r^2$$
$$+(-3by^3+4by^2u-2byu^2-bu^3+bcy+bcu)r+y^5u-6y^4u^2+11y^3u^3$$
$$-6y^2u^4+yu^5-2cy^3u+2cy^2u^2-2cu^3y+c^2yu+b^2y^3-2b^2y^2u+b^2yu^2=0$$

und, für s seinen Wert in der vierten Bestimmungsgleichung einsetzend,

$$(y+u)r^3 - (by - 2bu)r^2$$
$$+(2y^4 - 12y^3u + 22y^3u^2 - 12yu^3 + 2u^4 + b^2u - cy^2 - cu^2)r - by^4$$
$$- 6by^3u - 11by^2u^2 + 6byu^3 - bu^4 + bcu^2 - dy^2u + dyu^2 = 0.$$

Eliminieren wir nun r, sagt Malfatti, so werden wir die langersehnte Resolvente erhalten. Er schreibt $25uy = z + 5a^2 - \frac{5c}{3}$ und setzt die Resolvente in die Form

$$\Big\{z^3 - 5z\left(3a^2c - \frac{4c^2}{3} + ab^2 + bd\right) + 20a^2c^2 - \frac{560}{27}c^3 + \frac{155}{6}ab^2c$$
$$+ 5b^4 + 15a^2bd + \frac{40}{3}bcd + \frac{5}{2}ad^2\Big\}^2 + \left(z - \frac{5}{4}a^2 - \frac{5}{3}c\right).$$
$$(d^4 + 30abd^3 - 108a^5d^2 + 180a^3cd^2 - 80ac^2d^2 + 165a^2b^2d^2$$
$$+ 90b^2cd^2 - 360a^4bcd + 560a^2bc^2d - 160bc^3d - 80a^3b^3d$$
$$+ 630ab^3cd - 108b^5d + 400a^4c^3 - 640a^2c^4 + 256c^5$$
$$+ 100a^3b^2c^2 - 720ab^2c^3 - 135b^4c^2) = 0.$$

Man wird gewiß zugestehen, daß Malfatti seine Elimination sehr scharfsinnig durchgeführt hat. Vor ihm hatte niemand dieses Ziel erreicht. Da die Gleichungen des 2., 3., 4. und 5. Grades Resolventen des 0., 1., 3., 6. Grades besitzen, spricht Malfatti die Vermutung aus, daß eine Gleichung $n+2^{\text{ten}}$ Grades eine Resolvente $\frac{1}{2}(n^2+n)^{\text{ten}}$ Grades besäße. Er äußerte aber diese Ansicht mit Schüchternheit, besonders da Euler den Resolventengrad niedriger als den Gleichungsgrad zu stellen schien. Da Malfatti seine Resolvente sechsten Grades nicht allgemein lösen kann, sucht er Spezialfälle aufzulösen. Er erkennt das Vorhandensein rationaler Faktoren der Resolvente als genügende Bedingung, und findet nicht nur alle vor ihm als auflösbar bekannten Fälle, sondern auch noch neue Fälle.

In der Tat entdeckt er alle auflösbaren Fälle, denn es ist von E. Luther[1]) gezeigt worden, daß die hinreichenden Bedingungen auch zugleich notwendig sind[2]).

[1]) Crelle, Bd. 34. [2]) Vgl. J. Pierpont, loc. cit., S. 36; auch Francesco Brioschi, „Sulla risolvente di Malfatti . . .“ in Memorie del reale istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, Vol. 9, terzo della serie seconda, p. 217 bis 223, 224—227.

In einer Abhandlung, Sur les équations résolues par M. de Moivre[1]) behandelt de Castillon die früher von Euler und Bézout besprochene De Moivresche Gleichung

$$a = z^n - nz^{-2}\sqrt[n]{b^2} + \frac{n(n-3)}{\underline{|2}} z^{n-4}\sqrt[n]{b^4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{\underline{|3}} z^{n-6}\sqrt[n]{b^6}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{\underline{|4}} z^{n-8}\sqrt[n]{b^8} - \text{etc.},$$

die $z = \frac{\sqrt[n]{(a+\sqrt{(a^2-4b^2)}} + \sqrt[n]{(a-\sqrt{(a^2-4b^2)})}}{\sqrt[n]{2}}$ als Wurzel hat. De Moivre gab keinen Beweis; Euler verifizierte die Lösung für $n \gtreqless 5$. Castillon beobachtet das Bildungsgesetz der Glieder dieser Gleichungen, mit Hilfe dessen das Resultat der Substitutionen viel leichter gefunden wird, und bespricht die irreduktiblen Fälle.

Im Jahre 1773 erschien ein Mémoire sur la résolution des équations en général, et particulièrement sur l'équation du 5e degré[2]) von Jean-Jacques de Marguerie (1742—1779), einem jungen, aus Mondeville bei Caen gebürtigen Schiffsleutnant. Auf einer Fahrt nach Rußland machte er die Bekanntschaft von L. Euler. Er beteiligte sich am nordamerikanischen Freiheitskampf und starb in einer Seeschlacht der Franzosen gegen die Engländer. Seine mathematischen Schriften sind uns nur durch die Angaben von Lagrange und seinem Biographen[3]) bekannt. Lagrange pries die Talente des jungen Mannes[4]) und schrieb an ihn[5]): „Ihre Methode die Resolventengleichung irgendwelchen Grades zu finden gefällt mir. Sie hat den Vorzug diese Gleichung in der einfachsten Form zu liefern... Ich bewundere, wie Sie durch geeignete Substitutionen Mittel gefunden haben, den Eliminationskalkül zu vereinfachen und besonders, wie Sie sich von nutzlosen Faktoren befreien, die den Grad der Endgleichung viel höher machen als er sein sollte. Ich glaube Sie sind der erste, welcher das Resultat der Elimination für den 5. Grad gegeben hat."

In seinen Réflexions sur la forme des racines des équations déterminées, la réduction et la solution de ces équations[6]) gibt Le Marquis de Condorcet allgemeine Überlegungen, die er bei der Durchsicht der Arbeiten von Euler, Bézout,

---

[1]) Nouveaux mémoires de l'acad. roy. des sciences et belles-lettres, année 1771, Berlin 1773, p. 254—272. [2]) Mémoires de l'acad. roy. de marine, T. 1, Brest 1773, p. 1. [3]) Prosper Levot in Biographie universelle (Michaud), N. Éd. [4]) Lagrange, Oeuvres, T. XIV, p. 17, Brief an Condorcet vom 24. Febr. 1774. [5]) Ebenda, p. 270. [6]) Mélanges de Phil. et de Math. de la Soc. Roy. de Turin, pour les années 1770—1773, Classe Math., p. 1—7.

Waring, de Marguerie, Lagrange und Vandermonde machte. Er geht von der unsicheren Annahme aus, daß die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades ganze algebraische Funktionen ihrer Koeffizienten sein müssen und keine Radikale höherer als n^{ter} Ordnung zulassen. Er nimmt dann die ältere Eulersche Wurzelform $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \cdots$ an, bespricht den Grad und die Reduktibilität der Gleichung für die Bestimmung von A und zieht den Schluß, „daß die Methode für die Auflösung der Gleichungen 2., 3., 4. Grades sich auf höhere Grade ausdehnen lasse und daß die Schwierigkeit, welche von der Höhe der Gleichung oder der Wurzelform entspringt, nur die ungeheure Komplikation der Berechnung betreffe, welche dann die Auflösung der Aufgabe erfordere; daß man aber immer zur gesuchten Lösung gelange". Condorcet veröffentlicht im gleichen Bande[1]) Nouvelles recherches, worin er seine Ideen weiter entwickelt und sie soweit modifiziert, daß er die Existenz unlösbarer Gleichungen nicht als unmöglich, wohl aber als unwahrscheinlich erklärt. Wenn eine Gleichung keine allgemeine und endliche Wurzelform besitze, werde man dieses dadurch herausfinden, daß man in den von ihm vorgeschlagenen Operationen auf eine andere Gleichung n^{ten} Grades geführt werde, die keine rationalen Divisoren enthalte, wenn n eine Primzahl ist; oder wenn n nicht prim ist, daß man auf eine Gleichung komme nicht niedrigeren Grades als $(n-2)(n-3)\ldots 3 . 2 . 1$. Diese Ideen werden von ihm auch im Artikel „Équations Déterminées" in der Encyclopédie méthodique (Mathématiques) erklärt.

In der Abhandlung Sur la forme des racines imaginaires des équations[2]) gibt Lagrange einen Beweis des Satzes, daß jede imaginäre Wurzel einer Gleichung auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ gebracht werden kann. Nachdem er D'Alemberts auf der Kurventheorie beruhenden Nachweis (1746), Eulers Nachweis (1749) und de Foncenex' (1759), über welchen im XXI. Abschnitte berichtet werden wird, kurz besprochen und ihre Schwächen aufgedeckt hat, schreitet er zur Ausfüllung der Lücken in Eulers Beweise. Lagrange nimmt im allgemeinen die Wurzelexistenz ohne Beweis an. Auch wird als bewiesen vorausgesetzt, daß jede Gleichung von ungeradem Grade und mit reellen Koeffizienten wenigstens eine reelle Wurzel habe. Er erklärt, daß das Eulersche Verfahren, um eine Funktion $f(x)$ vom Grade $2m$, $m > 1$, in zwei reelle Faktoren

---

[1]) Mélanges de Phil. et de Math. de la Soc. Roy. de Turin, pour les années 1770—1773, Classe Math., p. 236—264. [2]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1772, Berlin 1774, p. 222—258 = Lagrange, Oeuvres, T. III, p. 479—516.

zu zerlegen, nicht immer zum Ziele führt, da dasselbe auf Formeln für die Bestimmung der Koeffizienten führt, die in gewissen Fällen unbestimmt, $\frac{0}{0}$, sind. Es gelingt Lagrange, diesen Einwurf gegen die Methode Eulers und de Foncenex' zu beseitigen, indem er hier seine in den Réflexions sur la résolution des équations, Sektion IV, n. 100, entwickelte Permutationstheorie anwendet, welche den Wert einer rationalen Funktion y der Wurzeln zu berechnen lehrt, sobald man den Wert einer anderen Funktion t kennt, solcherart, daß t für alle Permutationen sich ändert, wofür sich y ändert. Gauß äußerte sich anerkennend über diese Arbeit. Der große Lagrange habe die Sache „so tief durchforscht, daß nichts Weiteres zu wünschen bleibt; abgesehen davon, daß vielleicht bei seiner vorausgehenden Behandlung der Eliminationstheorie, auf welche sich die gesammte Untersuchung stützt, einige zweifelhafte Punkte zurückbleiben“[1]).

De Foncenex' Beweis wird von Louis Bertrand in Schutz genommen[2]). Bertrand behauptet, daß das Verfahren des Verfassers nur in sehr seltenen Fällen mißlinge. In diesen könne man eine Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der vorgelegten Gleichung seien, als Hilfsgleichung ableiten, welche zum Ziele führe. Diese Aussage wird nur für die Quartic bewiesen. Wenn Lagranges Einwurf gegen $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ gelte, gelte er gegen $x^4 - (A^2 - 2B)x^3 + (B^2 - 2AC + 2D)x^2 - (C^2 - 2BD)x + D^2 = 0$ nicht. Da nun die Quadratwurzeln einer Größe $a + b\sqrt{-1}$ von der gleichen Form wie dieselbe sind, sei der Satz für die Quartic bewiesen. Auch bei Bertrand wird die Wurzelexistenz ohne weiteres vorausgesetzt.

In einer Schrift, Sur des irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle[3]), entwickelt Vandermonde eine neue Darstellungsweise der Irrationalen, indem er eine Verallgemeinerung des Symbols $p^n = p \cdot p \cdot p \ldots$ (n Faktoren) annimmt, worin die zweiten statt der ersten Differenzen der Faktoren Null sind. Er schreibt $[p]^n \equiv p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)$ und entwickelt die Operationsregeln dafür. Er findet

$$[p+m+n]^n[p]^{-n} = [p+m+n]^m[p]^{-m} = 1 + [m]^1[o]^{-1}[n]^1[p]^{-1} + [m]^2[o]^{-2}[n]^2[p]^{-2} + \cdots,$$

[1]) C. F. Gauß, „Neuer Beweis des Satzes . . .“, § 12 in Ostwalds Klassiker, Nr. 14. [2]) L. Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, T. II, à Genève, 1778, p. 499. [3]) Histoire de l'académie royale des sciences, année 1772, Première Partie, Paris 1775, p. 489—498.

wo $[p]^{-m} = 1 : [p+m]^m$ ist, und nimmt ohne weiteres an, daß diese Ausdrücke sich für Bruchwerte von m und n bewähren. In der Formel $[q]^n[p]^{-n} = [q+r]^n[p+r]^{-n} . [p]^{-r}[q]^{-r} : [p+n]^{-r}[q-n]^{-r}$ läßt er r unendlich werden und erhält dadurch das unendliche Produkt

$$[q]^n[p]^{-n} = [p]^{-\infty}[q]^{-\infty} : [p+n]^{-\infty}[q-n]^{-\infty}$$
$$= (p+n+1)(q-n+1)(p+n+2)(q-n+2)\ldots$$
$$: (p+1)(q+1)(p+2)(q+2)\ldots$$

Die Anwendung seiner Resultate auf den Kreis ergibt die Ausdrücke $\frac{\pi}{2} = \left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots}$ und $\sqrt{\pi} = 2\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$. Die irrationalen Formen zweiter Ordnung $[q]^n[p]^{-n}$ lassen sich, wie gezeigt wird, öfters auf rationale Zahlen oder auf einfachere irrationale Größen reduzieren. Z. B. $\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{3}}\left[-\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, $\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{4}}\left[-\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$. Kriterien der verschiedenen Irrationalitätsarten werden aber nicht entwickelt.

In den Nova acta eruditorum gibt Fagnano eine Demonstratio theorematis Studeniani pro reductione aequationum, quae radices habent aequales[1]). Der Satz heißt: Wenn die Glieder einer Gleichung, deren m Wurzeln einander gleich sind, mit den Gliedern irgendwelcher arithmetischen Progresssion je multipliziert werden, behält die neue Gleichung $m-1$ der gleichen Wurzeln bei. Fagnano beweist zuerst den Satz für Gleichungen mit lauter gleichen Wurzeln. Werden die Glieder von $(x+a)^n = 0$ mit den entsprechenden Gliedern von $p, p+q, p+2q, \ldots$ multipliziert, erhält man $(p[x+a] + nqa)(x+a)^{n-1} = 0$. Dieses Resultat wird nun auf $(b + cx + dx^2 + \cdots)(x+a)^n = b(x+a)^n + cx(x+a)^n \cdots$ angewandt, wo die Glieder von $b(x+a)^n$, $cx(x+a)^n$, $\cdots$ mit den entsprechenden Gliedern von je $p, p+q, \ldots, p+q, p+2q, \ldots$, multipliziert werden.

Nun folgt die Abhandlung Vandermondes, Mémoire sur l'élimination[2]), worin er für n Gleichungen ersten Grades eine Eliminationsformel von sehr gedrängter Form entwickelt und seine Schreibart auf Elimination zwischen zwei Gleichungen höherer Grade anwendet; sie ist eine für die Determinantentheorie besonders wichtige Schrift. Vandermonde erfindet eine Bezeichnung, welche mit der später von Syl-

---

[1]) Nova acta eruditorum, 1776, p. 1—11. „Studeniani" sollte „Hudeniani" heißen. Man findet Huddes Satz in der Ausgabe der Descartesschen Schrift Geometria à Renato des Cartes, Amsterdam 1659 (welche auch Arbeiten von Hudde und anderen niederländischen Mathematikern enthält), S. 435.

[2]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1772, II. Partie, Paris 1776, p. 516 bis 532. Vgl. Thomas Muir, op. cit., S. 15—23.

vester aufgestellten umbral notation wesentlich übereinstimmt. Koeffizienten werden wie früher bei Leibniz durch zwei Buchstaben (oder Zahlen) ${}^{\alpha}_{a}$ dargestellt, deren einer die Gleichung, worin der Koeffizient vorkommt, und der andere den Ort desselben in der Gleichung bezeichnet. Was Leibniz durch 12 oder 1_2 bezeichnete, wird von Vandermonde ${}^{1}_{2}$ geschrieben. Ferner schreibt Vandermonde

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b} = {}^{\alpha}_{a}\cdot{}^{\beta}_{b} - {}^{\alpha}_{b}\cdot{}^{\beta}_{a},$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c} = {}^{\alpha}_{a}\cdot\frac{\beta|\gamma}{b|c} + {}^{\alpha}_{b}\cdot\frac{\beta|\gamma}{c|a} + {}^{\alpha}_{c}\cdot\frac{\beta|\gamma}{a|b},$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = {}^{\alpha}_{a}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{b|c|d} - {}^{\alpha}_{b}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{c|d|a} + {}^{\alpha}_{c}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|a|b} - {}^{\alpha}_{d}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|c} \text{ etc.}$$

Diese Ausdrücke enthalten die Definition einer Funktionenklasse und deren Rekursionsgesetz, die mit der von Bézout gebrauchten Definition identisch ist. Werden die Unbekannten x, y, z aus drei Gleichungen ${}^{r}_{1}x + {}^{r}_{2}y + {}^{r}_{3}z = 0$ $(r = 1, 2, 3)$ eliminiert, so stellt $\frac{1|2|3}{1|2|3}$ das Resultat dar. Vandermonde erklärt, daß, statt der unteren Buchstaben $a, b, c, \ldots$, man die oberen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ permutieren könne, ohne das Endresultat zu ändern, daß die Anzahl Glieder der Anzahl Permutationen von $a, b, c, \ldots$ gleich sei, wovon die Hälfte negative Zeichen haben. Wir illustrieren durch $\frac{\alpha|\beta}{a|b} = -\frac{\alpha|\beta}{b|a}$ den von ihm für spezielle Fälle verifizierten, aber allgemein auf zwei von ihm unbewiesenen Hilfssätzen gegründeten Lehrsatz, daß die Permutation von zwei Buchstaben im gleichen Alphabet einen Zeichenwechsel, sonst aber keine Änderung hervorbringt. Daraus zieht er den Schluß, daß $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\ldots}{a|b|c|\ldots} = 0$, wenn zwei Buchstaben im gleichen Alphabet einander gleich sind. Davon wird nun die Regel für die Auflösung simultaner Lineargleichungen abgeleitet. Wenn

$$\left.\begin{array}{l} {}^{1}_{1}\xi_1 + {}^{1}_{2}\xi_2 + {}^{1}_{3} = 0 \\ {}^{2}_{1}\xi_1 + {}^{2}_{2}\xi_2 + {}^{2}_{3} = 0 \end{array}\right\} \text{ wird } \xi_1 = \frac{\frac{1|2}{2|3}}{\frac{1|2}{1|2}}, \quad \xi_2 = \frac{\frac{1|2}{3|1}}{\frac{1|2}{1|2}}.$$

Die Schreibweise für den allgemeinen Fall von n Gleichungen wird angegeben. Bei der Elimination zwischen zwei Gleichungen m^{ten} Grades, ${}^{1}_{1}x^m + {}^{1}_{2}x^{m-1} + \text{etc.} = 0$, ${}^{2}_{1}x^m + {}^{2}_{2}x^{m-1}$ etc. $= 0$, führt er die weiteren Abkürzungen $\overline{a|b}$ für $\frac{1|2}{a|b} = {}^{1}_{a}\cdot{}^{2}_{\alpha} + {}^{1\,2}_{\alpha\,a}$, $\overline{ab|\alpha\beta}$ für ${}^{1}_{a}\cdot{}^{1}_{b}\cdot{}^{2}_{\alpha}\cdot{}^{2}_{\beta}$

$+\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{\alpha}\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{\beta}\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{a}\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{b}$, etc. ein, woraus sich Transformationsformeln dieser Art $\overline{a|\alpha}\cdot\overline{b|\beta} = \overline{ab|\alpha\beta} - \overline{a\beta|\alpha b}$ ergeben. Die Eliminanten für die Fälle $m = 2, 3, 4$ werden niedergeschrieben. Für $n = 3$ erhält er

$$\overline{1|4}\cdot\left\{\begin{matrix}\overline{1|4}\,.\,\overline{1|4}\\ -2\,\overline{1|2}\,.\,\overline{3|4}\end{matrix}\right\} - \overline{1|3}\cdot\left\{\begin{matrix}\overline{1|4}\,.\,\overline{2|4}\\ -\overline{1|3}\;\;\overline{3|4}\end{matrix}\right\} + \overline{1|2}\cdot\left\{\begin{matrix}\overline{2|4}\,.\,\overline{2|4}\\ -\overline{2|3}\,.\,\overline{3|4}\end{matrix}\right\} = 0.$$

Bei der Ableitung einer ähnlichen Form der Eliminante für den Fall $m = 5$ stößt er auf Schwierigkeiten, die sich in der Reduktion der Eliminante auf die kleinste Anzahl Glieder zeigen. Nachdem der Ausdruck so weit entwickelt ist, daß derselbe in Faktoren der Form $\overline{a|b}$ umgesetzt ist, sucht Vandermonde Vereinfachungen durch eine Formel des Fontaine, welche in Vandermondes Schreibweise

$$\overline{a|b}\cdot\overline{c|d} - \overline{a|c}\cdot\overline{b|d} + \overline{a|d}\cdot\overline{b|c} = 0$$

lautet, zu erzielen, ohne aber das Ziel völlig zu erreichen. Das Endresultat sollte auf 120 Glieder reduziert werden, bevor es in die Form, welche denen für die Fälle $m = 2, 3, 4$ analog ist, gesetzt werden kann. Vandermonde erhält 124 Glieder und bemerkt, daß, nach einer persönlichen Mitteilung, de Gua durch ein anderes Verfahren auf die gleiche Anzahl gestoßen sei.

Im gleichen Bande findet man eine Abhandlung von Laplace[1]), Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde, worin die Determinantentheorie berührt wird. Der Name résultant wird hier zum erstenmal für das Resultat der Elimination bei n linearen homogenen Gleichungen gebraucht. Er schreibt dafür das Symbol $({}^1a\,.\,{}^2b\,.\,{}^3c)$. Der Lehrsatz über den Zeichenwechsel, durch die Transposition zweier Buchstaben hervorgerufen, wird hier auf befriedigendere Weise als bei Vandermonde bewiesen. Simultane lineare Gleichungen werden nach dem jetzt gebräuchlichen Verfahren gelöst. Um die Berechnung der Resultante zu vereinfachen, führt er eine Methode ein, die wir in Spezialfällen schon bei Vandermonde vorfanden, und die nun als die Laplacesche Entwicklung von Determinanten bekannt ist. Die Regel für diese Entwicklung wird aber nicht in einer Form ausgesprochen, daß sie auf andere Fälle leicht angewendet werden könnte.

Beiläufige, isolierte Resultate über Determinanten hat Lagrange

---

[1]) Hist. de l'acad. roy. des sciences, année 1772, 2e pt., Paris 1776, p. (267 bis 376), 294—304. Vgl. T. Muir, op. cit., p. 23—33.

in zwei Abhandlungen des Jahres 1773 gegeben. In der ersten, Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation etc.[1]) sind fünf Identitäten, die wir jetzt als Beispiele der Multiplikation und Addition von Determinanten ansehen. Andere Identitäten finden sich in der zweiten Abhandlung, Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires[2]).

Von einer Mitteilung Condorcets angeregt, untersuchte Euler in einem Artikel De formulis exponentialibus replicatis[3]) die Grenzwerte der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, wo $\beta = r^{\alpha}$, $\gamma = r^{\beta}, \ldots$ Damit diese Größen nicht ins Unendliche wachsen, muß ein Glied, welches die Grenze berührt hat (attigerit), dem nächstfolgenden gleich sein, d. h. $r^{\omega} = \omega$, oder $r = \omega^{\frac{1}{\omega}}$. Wenn $\log \omega = 1$, erreicht r sein Maximum $e^{\frac{1}{e}} = 1{,}4447\ldots$ Ist $1 < r < e^{\frac{1}{e}}$, gibt es zwei Größen Φ und Ψ, welche die Bedingungen $r^{\Phi} = \Phi$, $r^{\Psi} = \Psi$ erfüllen. Setzt man $\Psi = p\Phi$, dann wird $\Phi = p^{\frac{1}{p-1}}$, $\Psi = p^{\frac{p}{p-1}}$. Man kann also p beliebig wählen und die zugehörigen Werte von Φ, Ψ, r finden. Wenn $r > e^{\frac{1}{e}}$, können nur imaginäre Zahlen die Bedingung $r^{\omega} = \omega$ erfüllen. Der Fall $r < 1$ wird auch untersucht.

In einem Artikel, Observations on the limits of algebraical equations; and a general demonstration of Des Cartes's Rule ..[4]) hebt Isaac Milner (1750—1820), „fellow" an Queen's College in Cambridge, hervor, daß der Satz in Maclaurins Algebra, demzufolge die Wurzeln der Gleichung (B)

$$(l + nm)x^n - (l + \{n-1\} m)px^{n-1} + (l + \{n-2\} m)qx^{n-2} - \cdots = 0$$

als Grenzen zwischen den Wurzeln der Gleichung (A) $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} - \cdots = 0$ liegen, nicht allgemein richtig sei. Z. B. die Wurzeln $2 \pm \sqrt{13}$ von $x^2 - 4x - 9 = 0$ liegen nicht zwischen den Wurzeln 3 und -1 der Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$. Der Satz gelte nur, wenn alle Wurzeln gleiche Zeichen haben, was Maclaurin nicht deutlich hervorgehoben habe[5]). Milner habe 1775 auch Waring mitgeteilt, daß der Maclaurinsche Satz, daß die Wurzeln von (C) $nx^{n-1} - (n-1)px^{n-2} + (n-2)qx^{n-3} - \cdots = 0$ Grenzen der Wurzeln von (A) seien, einer Einschränkung bedürfe, da es möglich sei, daß keine der Wurzeln von (C) zwischen der kleinsten positiven und der größten nega-

[1]) N. mém. de l'acad. roy. des sciences, année 1773, Berlin 1775, p. 85 bis 120 = Lagrange, Oeuvres, T. III, p. 579—616. [2]) Ebenda, p. 149—176 = Oeuvres T. III, p. 661—692. Vgl. T. Muir, op. cit. p. 33—41. [3]) Acta acad. scient. imp. Petropolitanae, pro anno 1777, Pars 1, Petropoli 1778, p. 38—60. [4]) Philos. Trans., Vol. 68, for the year 1778, London 1779, p. 380—388. [5]) Vide Maclaurin in Phil. Trans. (London) Vol. 36, auch seine Algebra, Art. 44, 45—50.

tiven Wurzel von (A) liegen. Denn setze man diese zwei Wurzeln in (C) ein, so möge das Polynom (C) Werte gleichen Zeichens erhalten, weshalb keine Wurzel von (C) zwischen den zwei Wurzeln von (A) liegen würde. Daß ein solcher Fall wirklich eintreten kann, ist natürlich nicht bewiesen.

Milner gibt folgenden Beweis der Descartesschen Zeichenregel. Sind alle Wurzeln von (D) $l + mx + nx^2 + \cdots + x^n = 0$ reell, dann sind diejenigen von (E) $m + 2nx + \cdots nx^{n-1} = 0$ Grenzen der Wurzeln von (D). Es sind deshalb nicht weniger $+$-Wurzeln in (D) als in (E), denn da jede Wurzel von (E) zwischen verschiedenen Wurzeln von (D) liegt, kann die Anzahl positiver Wurzeln nicht kleiner sein. Sind l und m beide positiv, muß die Anzahl $+$-Wurzeln in (D) und (E) gerade sein, und die Anzahl in (D) kann also die in (E) nicht durch die Einheit übersteigen. (D) hat aber eine Wurzel mehr als (E), welche gewiß $-$ sein muß. Ähnlich behandelt er den Fall, wo l und m beide negative, und den Fall, wo diese entgegengesetzte Zeichen haben.

In der Abhandlung Sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les équations litérales[1]) entwickelt Lagrange anfangs die bekannten Kriteria für die Bestimmung der Natur der Wurzeln von $x^3 - Bx + C = 0$; alle Wurzeln sind reell, wenn $4B^3 > 27C^2$; zwei sind einander gleich, wenn $4B^3 - 27C^2 = 0$; zwei Wurzeln sind imaginär, wenn $4B^3 < 27C^2$. Zu Gleichungen n^{ten} Grades übergehend, bemerkt Lagrange, daß Newton und andere Forscher Bedingungen für die Existenz lauter reeller Wurzeln aufgestellt haben, die nicht hinreichend seien. Der Grund dafür liege darin, daß diese Bedingungen nicht durch die direkte Betrachtung der reellen und imaginären Wurzeln abgeleitet wurden, sondern bloß aus gewissen Bedingungen, welche befriedigt sein müssen, wenn alle Wurzeln reell sind. Wenn die Wurzeln reell sind, muß z. B. die Summe der Quadrate aller Wurzeln, oder der Quadrate ihrer Differenzen, positiv sein; man darf aber nicht schließen, daß eine positive Summe das Vorhandensein lauter reeller Wurzeln nachweist. Lagrange hebt nun hervor, daß man die Frage, ob es imaginäre Wurzeln gibt oder nicht, sicherlich dadurch beantworten kann, daß man ermittelt, ob die linke Seite der Gleichung durch einen oder mehrere Faktoren $x^2 - ax + b$, wo $b > \frac{a^2}{4}$, teilbar ist oder nicht. In demjenigen Divisionsrest, welcher keine höheren Potenzen von x als die erste enthält, setze man den Koeffizienten von x, sowie auch den

[1]) Nouveaux mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1777, Berlin 1779, p. 111—139; Lagrange, Oeuvres, T. IV, p. 343—374.

von x freien Teil gleich Null. Man erhält auf diese Weise zwei Gleichungen, und eine dritte durch die Annahme $\frac{a^2}{4} - b = u$, aus welchen man die unbestimmten Größen a und b eliminieren soll. Die Größe u stellt sich hier als das Quadrat der Halbdifferenz irgend eines Wurzelpaares der vorgelegten Gleichung heraus. Ist letztere m^{ten} Grades, muß erstere $\frac{m(m-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades sein. Wenn nun in der Endgleichung u negative Werte hat, sind in der vorgelegten Gleichung imaginäre Wurzeln vorhanden, sonst nicht. Ob u negative Werte habe oder nicht, lasse sich durch Descartes' Zeichenregel entscheiden. Gibt es in der Reihe der Koeffizienten lauter Zeichenwechsel, so hat die vorgelegte Gleichung keine imaginären Wurzeln; sind Zeichenfolgen vorhanden, dann sind imaginäre Wurzeln gewiß vorhanden. Lagrange erklärt, daß die Anzahl von imaginären Wurzelpaaren nicht größer als die Anzahl Zeichenfolgen sei, weshalb man wisse, daß sich imaginäre Wurzelpaare vorfinden, nicht aber deren Anzahl. Um diese Anzahl näher zu untersuchen, berechne man eine zweite transformierte Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Halbdifferenzen zwischen der Summe zweier Wurzeln und zweier anderer Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Hat diese neue Gleichung keine negative Wurzel, dann hat die vorgelegte Gleichung nur zwei imaginäre Wurzeln. Daß eine negative Wurzel wenigstens vier imaginäre Wurzeln der vorgelegten Gleichung andeuten würde, ersieht man aus dem Ausdrucke $\left(\frac{a+c-b-d}{2}\right)^2$ für die Wurzeln der transformierten Gleichung. Sind a und b, c und d zwei konjugierte imaginäre Wurzelpaare, so muß obiger Ausdruck einen negativen Wert annehmen. Um herauszufinden, ob nicht mehr als vier imaginäre Wurzeln existieren, bilde man eine dritte Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen zwischen der Summe von drei Wurzeln und der Summe dreier anderer Wurzeln sind. Hat diese dritte Gleichung eine negative Wurzel, dann besitzt die vorgelegte Gleichung wenigstens sechs imaginäre Wurzeln. Wenn notwendig, könne man noch weitere Transformationen unternehmen. Lagrange bemerkt, daß ihm kein allgemeines Kriterium zur Bestimmung der Anzahl negativer Wurzeln einer Gleichung bekannt sei. Diese Methode für die Bestimmung der Anzahl imaginärer Wurzeln führt immer zum Ziele. Sie ist der Glanzpunkt der Resultate, welche man im 18. Jahrhundert über diesen Gegenstand erreicht hat.

Endlich leitet Lagrange noch die Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer Quartic, welche die Natur ihrer Wurzeln bestimmen, ab, und bemerkt, daß schon früher Waring in seinen Meditationes algebraicae diese Resultate mitgeteilt habe, ohne aber den Nachweis dafür zu veröffentlichen.

Das 1779 zu Paris erschienene Werk Théorie générale des équations algébriques von Bézout zeichnet sich aus durch das, was es enthält, sowie durch das, was es wegläßt. Von der algebraischen Auflösung von Gleichungen $f(x) = 0$ verschiedener Grade, oder der Auflösung durch Annäherung, oder der Transformation von $f(x) = 0$ in eine neue Gleichung, deren Wurzeln oder Koeffizienten bestimmte Beziehungen zu denen der vorgelegten Gleichung haben, davon wird nichts gesagt. Das ganze Werk ist dem Eliminationsproblem gewidmet. Die Elimination ohne Einführung fremder Faktoren hatten Euler und Bézout bisher nur für zwei Gleichungen höheren Grades mit zwei Unbekannten erzielt. Um für den allgemeinen Fall fremde Lösungen zu vermeiden, erkannte Bézout schon früher[1], „daß nicht eine allmähliche, sondern nur eine gleichzeitige Elimination von $(m-1)$ der m Variablen zum richtigen Grade der Endgleichung oder der Eliminante führen könne“. Diese Sache wird nun weiter entwickelt. Nach einer Einleitung über Differenzenrechnung folgt die allgemeine Theorie von Gleichungen irgendwelchen Grades und mit mehreren Unbekannten. Ein vollständiges Polynom des Grades T mit n Unbekannten wird durch $(u \ldots n)^T$ bezeichnet; dessen Gliederzahl, durch $N(u \ldots n)^T$ symbolisiert, ergibt sich gleich $\underline{|T+n} / \underline{|n}\underline{|T}$. Bézout leitet einen Ausdruck ab für die Berechung der Anzahl derjenigen Glieder in diesem Polynom, welche durch keine der Größen u^p, x^q, y^r, z^s teilbar sind, und wird durch denselben zum Lehrsatz geführt: Der Grad der Endgleichung, welche aus einer Anzahl n von vollständigen Gleichungen irgendwelcher Grade mit n Unbekannten hervorgeht, ist dem Produkte der Grade der vorgelegten Gleichungen gleich. Nur für den Spezialfall von zwei Gleichungen war dieser Satz früher bekannt. Im Falle unvollständiger Polynome mag der Grad des Endresultats niedriger sein. Bézout unterwirft dieselben einer eingehenden Untersuchung. Im zweiten Teile des Werkes wird die Elimination selbst durchgeführt. Ohne Nachweis gibt er zur Berechnung der Unbekannten von linearen Gleichungen eine scheinbar willkürliche Regel, welche gleichgültig auf literale und numerische, allgemeine und spezielle Gleichungen anwendbar ist. Wir erläutern sie an einem Beispiele aus § 200. Sind $a^i x + b^i y + c^i z + d^i = 0$ $(i = 0, 1, 2)$, nehme man stillschweigend t als Unbekannte der absoluten Glieder an. Man hat dann $a^i x + b^i y + c^i z + d^i t = 0$. Im Produkte $xyzt$ setze man nacheinander bezüglich a, b, c, d an die Stelle von x, y, z, t.

[1]) Cours de math. à l'usage des Gardes du Pavillon, 1764/69, p. 209. Vgl. Encyklopädie der math. Wiss., Bd. I, S. 261.

Man erhält, nach einem Zeichenwechsel für jede ungerade Vertauschung, die erste Linie, $ayzt - bxzt + cxyt - dxyz$. In dieser ersten Linie setze man ähnlicherweise, nacheinander, bezüglich a', b', c', d' statt x, y, z, t. Man erhält die zweite Linie. Darin setze man bezüglich a'', b'', c'', d'' statt x, y, z, t, und man erhält die dritte Linie. Der Wert von x ergibt sich dann durch Division des Koeffizienten von x mit dem des Koeffizienten von t; d. h.

$$x = -\{(bc' - b'c)d'' - (bd' - b'd)c'' + (cd' - c'd)b''\}$$
$$:\{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''\}.$$

Ähnliches für y und z. Warum mit $xyzt$ angefangen wird, und was dieses Produkt eigentlich bedeutet, wird nicht erklärt. Man sieht, daß hier Determinantenausdrücke vorkommen und daß die Methode auch zur Resultantenbestimmung dient. Die Regel wird an Beispielen angewendet, wo einige Koeffizienten Null sind, oder eine Linie verschwindet, oder eine der Unbekannten in der letzten Linie wegbleibt. Bézout gibt auch eine bessere Regel, die Laplacesche Entwicklung niederzuschreiben[1]).

Bézout geht dann zu Gleichungssystemen höherer Grade über und bewirkt die Elimination nach einer Methode von unbestimmten Koeffizienten. Jede der vorgelegten Gleichungen wird mit einem unbestimmten Polynom multipliziert, so daß in der Summe dieser Produkte alle Unbekannten mit Ausnahme einer einzigen verschwinden. Durch eine Konstantenabzählung und die Auflösung von linearen Gleichungen lehrt er Polynome dieser Art zu finden. Das Werk wurde von Lagrange[2]) und Laplace[3]) sehr hoch geschätzt. Lagrange sagte: „je le mets dans le petit nombre de ceux qui sont véritablement utiles aux progrès des sciences". Und doch scheinen Bézouts Resultate teilweise in Vergessenheit geraten zu sein, denn Jacobi und Minding leiteten solche über ein halbes Jahrhundert später von neuem ab, ohne Bézout als Vorgänger zu nennen[4]).

Bézouts Eliminationsregel für lineare Gleichungen wurde von C. F. Hindenburg in seiner Vorrede zu einem Werke von C. F. Rüdiger, Specimen analyticum de lineis curvis etc., Leipzig 1784, ins Lateinische übersetzt. Hindenburg selbst gab eine Regel, welche zugleich die Gliederbildung und die Zeichenordnung in Determinanten lieferte[5]).

---

1) Vgl. T. Muir, op. cit., p. 41—53. 2) Oeuvres, T. XIV, p. 276: Brief an Bézout, 12. Juli 1779. 3) Ebenda, p. 80: Brief an Lagrange. 4) A. Brill und M. Noether, Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver., 3. Bd., 1892—1893, S. 143 bis 147. 5) T. Muir, op. cit., p. 53—55.

Vor dem Abschlusse unserer Angaben über Determinanten bemerken wir noch, daß in den Schriften von Vandermonde und François Marie Riche de Prony[1]) (1755—1839) die ersten Spuren von Alternanten vorkommen[2]).

Der Mathematiker und Astronom John Hellins (?—1827), 1779—1783 Pfarrer zu Constantine in Cornwall, schlug eine Methode zur Berechnung von zwei gleichen Wurzeln vor, welche für die kubische Gleichung so lautet[3]): Wenn $x^3-px^2+qx-r=0$ zwei gleiche Wurzeln hat, finde man durch Division den gemeinschaftlichen Faktor zwischen dieser Gleichung und $3x^2-2px+q=0$. Man erhält dadurch $x=(pq-9r):(2p^2-6q)$. Hat nun $x^3+5x^2-32x+36=0$ zwei gleiche Wurzeln? Man findet $(pq-9r):(2p^2-6q)=2$. Dieser Wert, $x=2$, genügt der vorgelegten Gleichung und muß also die doppelte Wurzel sein. Diese Methode wird auf die Quartic und Quintic angewendet.

Ungefähr zu gleicher Zeit wurden Studien über Gleichungen auf den schwedischen Universitäten zu Upsala und Lund vorgenommen; in Upsala von Mallet, in Lund von Bring. Friedrich Mallet (1728—1797) stammte von einer Familie, die aus Frankreich nach Schweden auswanderte. Nachdem er einige Jahre in England, Frankreich und den Niederlanden zugebracht hatte, wurde er 1757 Assistent für Astronomie und später Professor der Mathematik an der Universität Upsala. Zwischen 1777 und 1784 hat er vier Schriften über Gleichungen der ersten vier Grade geschrieben. Drei sind von Matthiessen angeführt[4]); eine vierte, De Aequatione biquadratica (Resp. J. Norderling) erschien in Upsala 1782 und ist geschichtlichen Inhalts. Er eröffnete einen neuen Gesichtspunkt durch sein Verfahren, die Unbekannte zu variieren und die Koeffizienten der erhaltenen Gleichung gewissen Bedingungen zu unterwerfen. Bei $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ setzt er[5]) $x=y+E$ und erhält $y^4+aby^3+(6E^2+AE+B)y^2+ab^3y+b^4=0$, wo $b^4=E^4+AE^3+BE^2+CE+D$, $ab=4E+A$, $ab^3=4E^3+3AE^2+2BE+C$. Daraus folgt die kubische Gleichung

$$(A^3-4AB+8C)E^3+(A^2B+2AC-4B^2+16D)E^2$$
$$+(A^2C+8AD-4BC)E+A^2D-C^2=0$$

für die Bestimmung des E. Es sind dann a, b, $cb^2=6E^2+3AE+B$

[1]) Journ. de l'éc. polyt. I, p. 264, 265. [2]) T. Muir, „The Theory of Alternants in the Historical Order etc." in Proceed. roy. Soc. of Edinburgh, Vol. 23, 1899—1901, p. 93, 94. [3]) Phil. Trans. 1782 London, p. 417—425. [4]) Matthiessen, op. cit. S. 340, 438, 545, 621, 977. [5]) Nov. Act. Soc. Scient. et Litt. Ups., Vol. III, p. 253, auch De aequatione biquadratica, Upsala 1782, p. 16, 17.

bekannt. Die erhaltene Gleichung ist nach Saundersons Methode leicht zu lösen, denn

$$y^4 + aby^3 + cb^2y^2 + ab^3y + b^4 = 0 = (y^2 + eby + b^2)\cdot(y^2 + fby + a^2),$$

wo $e + f = a$, $e - f = \sqrt{a^2 - 4c + 8}$.

De aequatione, cujus radices sunt binarum datae aequationis radicum summae[1]) ist eine Untersuchung von Sebastiano Canterzani (1734—1819), Professor der Mathematik in Bologna und Verfasser mehrerer Lehrbücher und Abhandlungen. Er war auch Sekretär des Instituts von Bologna. Er hebt hervor, daß Waring in seinen Meditationes algebraicae die Herleitung einer Gleichung besprochen habe, deren Wurzeln irgend eine algebraische Funktion der Wurzeln einer gegebenen Gleichung seien, daß aber die Bestimmung der Glieder einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades nicht leicht sei. Lagrange habe 1767 die Gleichung, deren Wurzeln die Differenz je zweier der vorgelegten Gleichung sind, hergeleitet. Nun soll die Summe je zweier Wurzeln in Betracht kommen. Die Methode ist hier nur sehr kurz erklärt. Sind $a', a'', a''', \ldots$ die Koeffizienten der vorgelegten Gleichung m^{ten} Grades und $A', A'', A''', \ldots$ diejenigen der gesuchten $\frac{m(m-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades, dann sei

$$A^\varrho = \sum(a'A^{\varrho-1} + a''A^{\varrho-2} + \cdots a^{\varrho-1}A') + (m - 2^{r-1})a^\varrho,$$

wo in der durch $\sum$ angedeuteten Summe m die Variable ist. Obschon im nächsten Bande die Sache weiter auseinandergesetzt wird, ist sie doch nicht mit genügender Klarheit dargestellt.

Ein sorgfältig verfaßtes Werk, betitelt Analysis aequationum, Dublin 1784, erschien aus der Feder von William Hales (1747 bis 1831), Tutor zu Trinity College, Dublin, und Professor der orientalischen Sprachen an der dortigen Universität. Es ist reich an Literaturangaben. Lagrange soll an den Autor aus Berlin ein Lobschreiben gerichtet haben[2]).

Unter den wichtigen Ergebnissen, welche während der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts in der Gleichungstheorie hervorgebracht wurden, muß man auch eine kleine Schrift des oben angeführten schwedischen Mathematikers Bring nennen. Während 75 Jahre blieb dieselbe den Mathematikern unbekannt; die Resultate derselben wurden von dem englischen Mathematiker Jerrard 1834 neu ent-

---

[1]) De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii, T. VI, Bononiae 1783, Comm. p. 107. [2]) Dictionary of National Biography (Stephen und Lee).

deckt. Sie betrifft die Transformation der allgemeinen Gleichung 5. Grades in die Form $y^5 + Gy + H = 0$ und erschien unter dem Titel B. cum D. Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum, quae ... in Regia Academia Carolina praeside D. Erland Sam. Bring, Hist. Profess. Reg. & Ord. publico eruditorum examini modeste subjicit Sven Gustaf Sommelius ... 1786, Lundae. Man könnte diesem Titel zufolge veranlaßt sein, Sommelius für den Verfasser zu halten, besonders da auch die Dedikation seine Namensunterschrift trägt, und er darin von diesen seinen Erstlingsfrüchten („primitias") redet. Auf eine Anfrage des Hrn. Felix Klein teilt aber Hr. Bäcklund in Lund mit, „daß dies jedenfalls unzutreffend sein würde, indem die Promotionsschriften damals durchgängig von den Vorsitzenden des Examens verfaßt wurden und den Examinanden nur als Substrat der Disputation dienten".[1])

Schon früher hatten C. Hill (1861) aus Lund und Ebbe Sam. Bring, ein Neffe unseres Bring (ungefähr 1824), diese Dissertation ihm zugeschrieben. Ja schon 1798 enthält der Titel einer Tegmanschen Dissertation den Ausdruck „methodus Bringiana". Auch muß bemerkt werden, daß Bring sich viel mit Gleichungen beschäftigte, während der siebzehnjährige Sommelius sich später nicht wieder mit mathematischen Studien abgab und 1790 eine Promotionsschrift historischen Inhalts verteidigte. Die Verdienste von Erland Samuel Bring wurden 1861 von Hrn. C. Hill in Lund ausführlich gewürdigt, der die Arbeit mit eigenen Bemerkungen begleitete[2]). Es ist merkwürdig, daß die Bringsche Arbeit nicht früher allgemein bekannt wurde, denn, wie schon bemerkt, erschien 1798 eine Dissertation mit Brings Namen im Titel. Ferner hob Brings Neffe ungefähr 1824, bei der Inauguration des Physikers J. C. Hill in Lund, den großen Wert seiner Gleichungsuntersuchungen scharf hervor und 1837 wurden Auszüge dieser Mitteilungen in einem wohlbekannten schwedischen biographischen Lexikon gedruckt[3]). Erland Samuel Bring (1736—1798) studierte in Lund Rechtswissenschaft, wurde 1762 Dozent, später Professor Historiarum und 1790 Rektor der Akademie. Mathematik war für ihn ein Lieblingsstudium, aber nur wenige seiner Arbeiten wurden veröffentlicht. In der Bibliothek der

---

[1]) F. Klein, Vorles. ü. d. Ikosaeder, Leipzig 1884, S. 143. [2]) Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1861, Stockholm 1862, p. 317 bis 355. Ein Auszug von Brings Schrift mit Bemerkungen erschien in Grunerts Archiv, Bd. 41, 1864, S. 105—117; Bd. 40, 1863, S. 55; auch in Quarterly Journ. of Mathematics, Vol. VI, 1864, p. 38—47. [3]) Biographisk Lexikon öfver Namnkundige Svenska män Tredje Bandet, Upsala 1837, p. 83—84.

Universität in Lund sind acht handschriftliche Bände seiner mathematischen Abhandlungen und Kommentarien zu Euler, Wolf, Palmquist, Hospital und anderen. Er schrieb über Algebra, Geometrie, Differentialrechnung, Gleichungen, Theorie der homogenen Funktionen, Chronologie und Astronomie[1]).

In seiner Dissertation wendet Bring die Tschirnhausensche Transformation an. Er fängt mit der quadratischen Gleichung $z^2 + mz + n = 0$ an, setzt $z = y - a$, dann $-2a + m = 0$ zur Bestimmung des a und erhält $y^2 = \frac{m^2}{4} - n$. Durch ein ähnliches Verfahren wird die kubische in eine binomische Gleichung transformiert. Dann folgt eine interessante Diskussion der Quartic, $z^4 + nz^2 + pz + q = 0$. Durch Hilfsgleichungen zweiten Grades $z^2 + bz + a + y = 0$ wird diese auf die Form $y^4 + Ay^2 + B = 0$ gebracht. Um, wenn möglich, alle dazwischenliegenden Glieder der vorgelegten Quartic zu beseitigen, nimmt er $z^3 + cz^2 + bz + a + y = 0$ an, eliminiert z und setzt die Koeffizienten y^3, y^2, y gleich Null. Die Elimination von b führt ihn zu einer Gleichung sechsten Grades in c. Ohne diese Sache weiter aufzuklären schreitet er zur Quintic.

Um die Quintic $z^5 + pz^2 + qz + r = 0$ von dem Gliede z^2 zu befreien, nimmt Bring $z^4 + dz^3 + cz^2 + bz + a + y = 0$ an und eliminiert z. In der neuen Quintic $y^5 + Dy^4 + Ey^3 + Fy^2 + \cdots = 0$ setzt er $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$. Von $D = 0$ erhält er $a = (3pd + 4q):5$, dessen Wert er in $E = 0$ und $F = 0$ setzt. Versucht man nun b, c oder d zu eliminieren, so bekommt man eine Gleichung sechsten Grades. Dieses vermeidet Bring aber durch die Annahmen $b = \alpha d + \zeta$ und $c = d + \gamma$. Die Gleichung $E = 0$ nimmt nun die Form einer Quadratic in d an, deren drei Koeffizienten er gleich Null setzt. Das Verschwinden des ersten Koeffizienten liefert ihm durch Auflösung einer Gleichung ersten Grades den Wert von α, dasjenige des zweiten Koeffizienten gibt ihm ζ als eine lineare Funktion von γ, dasjenige des dritten Gliedes bringt ihm γ durch Auflösung einer Quadratic, als eine Funktion von p, q, r. Setzt man nun in $F = 0$ für a, b, c die Werte $(3pd + 4q):5$, $\alpha d + \zeta$, $d + \gamma$ ein, so erhält man eine Gleichung in d, die nicht höheren als dritten Grades sein kann. Auf diese Weise transformiert Bring die allgemeine Quintic in die Form $y^5 + Gy + H = 0$, ohne aber in seiner Dissertation zu zeigen, ob eine weitere Änderung zur Binomialform $y^5 + I = 0$ unmöglich wäre[2]). Diesen bedeutenden Leistungen sind in Schweden keine weiteren Untersuchungen gefolgt, außer zwei Dissertationen der Jahre

[1]) Biographisk Lexicon etc., S. 84. [2]) Eine Kritik der Bedeutung von Brings Transformation findet man in F. Klein, op. cit. S. 143, 144, 207—209, 244.

1798 und 1799 von Tegman, Regula Cardani et methodus Bringiana radices inveniendi cubicas inter se collatae, und De aequatione biquadratica, worin die Gleichungen dritten und vierten Grades etwas eingehender behandelt werden, als bei Bring der Fall war[1]. Pehr Tegman (1757—1810) war Professor der Mathematik an der Universität zu Lund[2].

J. H. Lambert sagt in einem Aufsatze Über die Verwandlung und Auflösung der Gleichungen[3], daß Waring einen dem seinigen ganz ähnlichen Versuch gemacht habe, die Sache aber so sehr abstrakt vornehme, daß er die Vorteile, welche besondere Fälle darbieten, gar nicht sehen konnte. Lambert bestimmt die Grenzen, in welchen alle Wurzeln einer Quartic entweder unmöglich oder reell sind. Die Auflösung einer solchen Quartic hängt von einer kubischen Gleichung mit lauter reellen Wurzeln ab, die sich auf die Dreiteilung eines Kreisbogens reduzieren läßt. Eine bequeme Auflösungsform wird angegeben. Auch behandelt er die Aufgabe, aus zwei Gleichungen $0 = x^m - ax^{m-1} + \cdots$, $0 = y^n - ax^{n-1} + \cdots$, ohne diese vorerst aufzulösen, eine dritte Gleichung $0 = z^\lambda - Az^{\lambda-1} + \cdots$ herzuleiten, so daß $z = x + y$ ist.

Sebastiano Canterzani sucht in einer Schrift Della riducibilità di ogni quantità immaginaria algebrica alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$[4] einen für elementare Lehrbücher geeigneten Beweis darzulegen. Es ist dem Verfasser aber nicht gelungen, den Beweis dieses schweren Satzes von Übelständen verschiedener Arten zu befreien.

In einer Schrift, Von der cubischen und biquadratischen Gleichungen bejahten, verneinten und unmöglichen Wurzeln[5], gibt Gustaf Adolph Leijonmark (1734—1815), Bergrat beim schwedischen Bergkollegium, eine weitläufige Erklärung von Konstruktionen, um die Natur von kubischen und quartischen Gleichungen geometrisch zu bestimmen. In späteren Artikeln untersucht er quartische Gleichungen, die sich in zwei quadratische Faktoren zerlegen lassen und quintische Gleichungen, die sich in quadratische und kubische Faktoren zerlegen lassen[6].

In einem Artikel On finding the values of algebraical quan-

[1] C. Hill, loc. cit. S. 319. [2] J. C. Poggendorff, Handwörterb. z. Gesch. d. exact. Wiss., Bd. II, Leipzig 1863, S. 1074. [3] Beyträge z. Gebrauche d. Math. u. deren Anwend. Zweyter Theil, Berlin 1770, S. 184—249. [4] Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, Tomo II, Pt. II, p. 720 bis 731. [5] Neue Abhandl. d. K. Schw. Akad. d. Wiss. für das Jahr 1785, aus dem Schwedischen übers. von A. G. Kästner, Leipzig 1786, S. 3—15, nebst fünf Fortsetzungen. [6] Ebenda, Bd. 9, 1788; Bd. 16, 1795.

tities by converging serieses, and demonstrating and extending propositions given by Pappus and others[1]) betrachtet Edward Waring den Ausdruck

$$\sqrt[r]{}\left(\pm \sqrt[n]{\pm A} \pm \sqrt[m]{\pm B} \pm \sqrt[p]{\pm C} \pm \text{etc.}\right).$$

Sind $\alpha + i\lambda$, $\alpha' + i\lambda'$, $\dots\ \Gamma + \varDelta i$ respektive Wurzeln von $x^n \mp 1 = 0$, $x^m \mp 1 = 0, \dots x^r \mp 1 = 0$ (Waring schreibt $\sqrt{-1}$ statt i), und $\pm P = \pm A^{\frac{1}{n}}\alpha \pm B^{\frac{1}{m}}\alpha' \pm \cdots$, $\pm Q = \pm A^{\frac{1}{n}}\lambda \pm B^{\frac{1}{m}}\lambda' \pm \cdots$, dann wird obiger Ausdruck, wo P statt $\pm P$ und $P > Q$,

$$(P \pm iQ)^{\frac{1}{r}} = \left(P^{\frac{1}{r}} - \frac{1}{r}\,\frac{1-r}{2r}\cdot\frac{Q^2}{P^{\frac{2r-1}{r}}} + \cdots = \pm L\right)$$

$$\pm\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{Q}{P^{\frac{r-1}{r}}} - \frac{1}{r}\cdot\frac{1-r}{2r}\cdot\frac{1-2r}{3r}\cdot\frac{Q^3}{P^{\frac{3r-1}{r}}} + \cdots = \pm M\right)i = \pm L \pm iM,$$

in welchem Falle L und M konvergieren. Sodann ist $(\Gamma + i\varDelta) \cdot (\pm L \pm iM)$ eine Wurzel der vorgelegten Größe. Er nimmt ferner $-P$ statt $\pm P$, hernach $P < Q$, $P = \pm Q$. Die Wurzeln von $x^b \pm 1 = 0$ könne man algebraisch finden, wenn $b < 11$ (Vandermondes Auflösung von $x^{11} - 1 = 0$ von 1774 war ihm also nicht bekannt), oder wenn $b = 2^l \cdot 3^{l'} \dots 10^{l^9}$, wo $l, l' \dots l^9$ ganze Zahlen sind.

Auflösbare Gleichungen höheren Grades werden von Euler in der 1776 eingereichten Schrift Innumerae aequationum formae, ex omnibus ordinibus, quarum resolutio exhiberi potest[2]) behandelt. Der Bruch $x = \left(b\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - a\right) : \left(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)$, wo $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ n verschiedene Werte annimmt, ist Wurzel der Gleichung $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^n = \frac{a}{b}$, welche in entwickelter Form

$$x^n = n''ab\left(\frac{a-b}{a-b}\right)x^{n-2} + n'''ab\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)x^{n-3} + \cdots$$

wird, wenn $n'', n''', \dots$ den zweiten, dritten etc. Koeffizienten eines zur n^{ten} Potenz erhobenen Binoms andeutet. Es ist auffallend, daß in dieser Abhandlung gar kein Hinweis auf die Arbeiten von Bézout, Lagrange und Malfatti vorkommt. Seine jetzigen Ansichten über die allgemeine Lösbarkeit von Gleichungen stimmen mit denen, die er 1732 und 1762 geäußert hatte, ganz überein. Obiges Resultat

---

1) Phil. Trans. Vol. 77, for the year 1787, Pt. I, London 1787, p. 71—83.

2) Nova acta acad. scient. imp. Petropolitanae, T. VI, ad annum 1788. Petropoli 1790, p. 25—35.

wird von ihm als eine Bestätigung seiner früheren Mutmaßung, daß eine Gleichung $x^n = px^{n-2} + qx^{n-3} + \cdots$ die Wurzelform $x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \cdots$ besitze, wo $\alpha, \beta, \ldots$ Wurzeln einer Resolvente $n-1^{\text{ten}}$ Grades darstellen, angesehen.

In der Abhandlung De radicibus aequationis infinitae $0 = 1 - \frac{x \cdot x}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n \ldots (n+5)} + \text{etc.}$[1]) zeigt Euler, daß für $n = 1$, $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$; für $n = 2$, $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; für $n = 3$, $x = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ Während in diesen Fällen eine unendliche Anzahl reeller Wurzeln existiert, sind für $n = 4$ alle Wurzeln imaginär, weil die Summe $\frac{6(x - \sin x)}{x^3}$ der unendlichen Reihe für keine reellen Werte von x verschwinden kann. Euler schließt nun ohne Beweis, daß höhere ganzzahlige Werte von n ebenfalls nur imaginäre Wurzeln besitzen. Ist $n < 3$ und ein Bruch, so gibt Daniel Bernoullis Methode der rekurrierenden Reihen Näherungswerte. Setzt man $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, dann wird der kleinste Wert von x bezw. 0.909, 0.687, 0.572. Die verschiedenen Wurzeln, welche sich für Bruchwerte von n oder für ganzzahlige Werte von $n > 3$ ergeben, lassen sich nicht auf einfache Weise durch π ausdrücken.

Wir erwähnen hier ein uns nicht zugängliches Werk, Opuscules mathématiques contenant de nouvelles théories pour la résolution des équations de deux, trois et quatre degrés (Leyde et Paris 1794) von Louis Bourguet (1678—1742), welcher in den letzten Jahren seines Lebens Professor der Philosophie und Mathematik in Neuenburg war[2]).

In einem Büchlein über Analytische Entdeckungen in der Verwandlungs- und Auflösungskunst der höheren Gleichungen von Hulbe, Berlin und Stralsund 1794, werden, wie der Autor sich ausdrückt, „weitere Gesichtslinien gezogen“. Adam Ehregott Leberecht Hulbe (1768—?) wurde zu Berlin geboren und bekleidete dort gegen Ende des Jahrhunderts die Stelle eines königlichen Lotteriesekretärs. Sein wertvolles Werkchen wurde von Kästner, dem es zugeeignet ist, erwähnt; sonst blieb es lange unbekannt[3]). Er zeigt wie man eine Gleichung nach x in eine andere nach y durch die Annahme $y = x^r$ transformieren kann. Wenn man

---

[1]) Nova acta acad. scient. imp. Petropolitanae, T. IX, ad annum 1791. Petropoli 1795, p. 19—40. [2]) Michaud, Biogr. univ. [3]) Allgemeine Biographie, Art. von S. Günther.

also die allgemeine kubische Gleichung $y^3 + xy^2 + Ry - \frac{r}{8} = 0$ in die Gleichung $z^3 + (2R - x^2)z^2 + \left(R^2 + \frac{rx}{4}\right)z - \frac{r^2}{64} = 0$ verwandelt, worin $z = y^2$, und man setzt $2R - x^2 = \frac{q}{2}$, $R^2 + \frac{rx}{4} = \frac{(q^2 - 4s)}{16}$ und eliminiert R mittels der zwei letzten Gleichungen, so erhält man die allgemeine quartische Gleichung $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$. Folglich erhält man auch umgekehrt durch Auflösung der kubischen Gleichung von z die Wurzeln dieser quartischen Gleichung[1]). Hulbe lehrt auch Gleichungen mit ganzen und gebrochenen Exponenten, wenn diese Exponenten auch nicht alle positiv sind, in Gleichungen mit ganzen positiven Exponenten zu verwandeln, sowie aus der Summe der Potenzen mit ganzen positiven Exponenten der Wurzeln, die Summen der Potenzen mit ganzen positiven und negativen Exponenten der Produkte von gleich vielen ihrer Wurzeln zu finden, wodurch jede Gleichung in eine andere verwandelt werden kann, worin die Wurzeln den Produkten von gleich vielen Wurzeln dieser Gleichung, zu Potenzen mit ganzen positiven oder negativen Exponenten erhoben, gleich sind.

Um die Wegschaffung der Wurzelgrößen aus den Gleichungen zu erzielen, gibt C. G. Fischer, Professor am Kölnischen Gymnasium, drei Methoden[2]). Soll nach der ersten eine Gleichung in eine andere, deren Exponenten sämtlich z. B. dreimal so groß sind, verwandelt werden, so bringe man die Gleichung auf die Form $-a = bx + cx^2$, wo a, b, c entweder gar keine, oder bloß solche Potenzen von x enthalten, deren Exponenten durch 3 teilbar sind. Man erhält dann $-a^3 = b^3x^3 + 3b^2cx^4 + 3bc^2x^5 + c^3x^6$, $-\alpha a x^3 = \alpha b x^4 + \alpha c x^5$. Das willkürlich angenommene α läßt sich nun so bestimmen, daß in der Summe der Seiten dieser Gleichungen die Glieder, welche x^4 und x^5 enthalten, Null werden; also $\alpha = -3bc$, und man hat das Resultat $0 = a^3 + b^3x^3 + c^3x^6 - 3abc$. In der zweiten Methode, wenn die gegebene Gleichung $x^r + ax^{r-1} + \cdots = 0$ und die gesuchte

$$x^{rn} + Ax^{(r-1)n} + \cdots = 0$$

ist, dividiere man letztere durch erstere bis im Quotienten ein Glied vorkommt, das kein x mehr hat, dann muß der $r$gliedrige Rest, Glied für Glied, Null sein. Man hat also r Gleichungen für die Bestimmung der r Größen $A, B, \ldots$ Die dritte Methode ist trigonometrisch.

In einem Aufsatze, De inventione divisorum[3]) werden von

---

[1]) Hulbe, S. 135. Vgl. Matthiessen, Grundz. d. Ant. & Mod. Alg. d. Litt. Gleich., S. 331, 433, 568. [2]) Archiv d. r. u. a. Mathem. (Hindenburg), 2. Bd., 1798, S. 180—195, 426—440. [3]) Nova acta scient. imp. Petropolitanae, T. XI, ad annum 1793. Petropoli 1798, p. 172—182.

dem Astronomen Friedrich Theodor v. Schubert (1758—1825) aus Helmstedt die Regeln in Newtons Arithmetica universalis für die Auffindung linearer und quadratischer Faktoren eines Polynoms $F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots$ angegeben und auch eine allgemeine Regel, um rationale Faktoren $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$ höheren Grades aufzufinden, abgeleitet. Diese Arbeit scheint von Mathematikern übersehen worden zu sein, denn noch 1882 äußerte Kronecker das Bedürfnis einer allgemeinen Zerlegungsmethode[1]). Schubert gründet sein Verfahren auf folgendes durch mathematische Induktion bewiesene Lemma: Gibt man dem x in $X = x^n$ nacheinander die Inkremente 1, 2, 3, . . ., so ist die n^{te} Differenz $\Delta^n X = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$. Für jeden ganzzahligen Wert x_1 von x ist der Wert von $F(x_1)$ ein ganzes Vielfaches des Wertes von $f(x_1)$. Man trage nun für x nacheinander die Werte $\ldots 2, 1, 0, -1, -2 \ldots$ ein. Für jeden derselben zerlege man den Zahlenwert von $F(x)$ in seine ganzzahligen Teiler. Wenn man jeden dieser Teiler für irgendeinen Wert von x, von ax^n abzieht, muß, wenn ein Faktor $f(x)$ überhaupt vorhanden ist, unter den verschiedenen Resten der Wert von $ax^n - f(x)$ sich vorfinden. Wenn man jetzt in der Berechnung von

$$\Delta(ax^n - f(x)), \ldots \Delta^{n-2}(ax^n - f(x))$$

für die oben angedeuteten Werte von x alle möglichen Kombinationen von Minuenden und Subtrahenden macht, wird es möglich sein, für $\Delta^{n-2}(ax^n - f(x))$ Werte zu erhalten, die eine arithmetische Reihe bilden. Ist dieses nicht möglich, so kann $F(x)$ nicht in Faktoren zerlegt werden. Im Verfahren Kroneckers werden statt der Differenzenmethode Interpolationsformeln gebraucht. Sonst sind die zwei Methoden ganz ähnlich.

Einen interessanten Versuch nachzuweisen, daß Gleichungen von geradem Grade in lauter reelle trinomische Faktoren zerlegt werden können, machte Laplace 1795 in seinen Vorlesungen auf der Normalschule[2]). Die Wurzelexistenz wird stillschweigend vorausgesetzt. Ist der Grad der vorgelegten Gleichung $2^i S$, und S eine ungerade Zahl, und sind $a, b, c, \ldots$ die Wurzeln, so soll man eine neue Gleichung vom Grade $2^{i-1}S(2^iS - 1)$ bilden, deren Wurzeln $a + b + mab$ sind, wo m verschiedene bestimmte Werte annehmen

---

[1]) Journal f. r. u. a. Mathematik, Bd. 92, S. 10. [2]) Séances des écoles normales, an III (1794—1795) = Journal de l'école polytechnique 7. et 8. cahiers, T. II, 1812, p. 56, 57. Vgl. G. Loria, Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche, Rivista di matematica, 1891, p. 185—248; G. Loria, Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche, Bibliotheca mathematica 1891, p. 99—112.

darf. Wenn $i = 1$, so ist ihr Grad ungerade und sie hat wenigstens eine reelle Wurzel, welchen Wert m auch haben möge. Es kann aber m beliebig viele Werte annehmen, weshalb es beliebig viele Gleichungen letztgenannten Grades gibt, welche je wenigstens eine reelle Wurzel von dem Typus $a + b + mab$ haben. Unter diesen Gleichungen sind gewiß zwei, welche dasselbe Wurzelpaar enthalten und reelle Werte für $a + b + mab$ liefern. Sind diese reellen Werte $a + b + mab$ und $a + b + m'ab$, dann sind $a + b$ und ab auch reell, sowie der Trinom $x^2 - (a + b)x + ab$, welcher ein Faktor der vorgelegten Gleichung ist. Wenn $i = 2$, so hat eine Gleichung des Grades $2^{i-1}S'$, wie eben gezeigt worden, einen quadratischen Faktor. Es gibt beliebig viele Faktoren des Typus $a + b + mab$, welche Werte von der Form $e + g\sqrt{-1}$ annehmen, woraus geschlossen wird, daß $a + b$ und ab gleichfalls diese Form haben, und daß die vorgelegte Gleichung einen reellen quartischen Faktor enthält. Für $i > 2$ ist das Verfahren ähnlich.

In einer Schrift, On the roots of equations[1]) gibt James Wood (1760—1839), damals Fellow in St. John's College, ein einflußreicher Mann auf der Cambridge Universität, einen Beweis, daß eine Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln von der Form $a \pm \sqrt{\pm b}$ besitze. Der Eulersche Beweis dieses Satzes sei nicht allgemein, während Warings Auseinandersetzungen zu kurz und schwer verständlich seien. Wood demonstriert den Satz, daß zwei Wurzeln einer Gleichung $2m^{\text{ten}}$ Grades durch die Lösung einer Gleichung $m(2m-1)^{\text{ten}}$ Grades gefunden werden können. Wenn möglich, seien $z + v$ und $z - v$ zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Man erhält durch Substitution dieser Werte und Addition und Subtraktion der erlangten Ausdrücke zwei Gleichungen, die sich durch $y = v^2$ in $y^m + by^{m-1} + \cdots = 0$ und $Ay^{m-1} + By^{m-2} + \cdots = 0$ reduzieren. Letztere haben einen gemeinschaftlichen Faktor $y \pm Z$, wo Z eine Funktion von z und bekannten Größen ist. Diesen Faktor findet er nach der bekannten Divisionsmethode, indem er den von y freien Rest gleich Null setzt. Dieser Rest ist $m(2m-1)^{\text{ten}}$ Grades in z. Existiert nun ein Wert von z, dann existieren auch Z und der gemeinschaftliche Faktor $y \pm Z$, sowie zwei Wurzeln $z \pm \sqrt{\pm Z}$ der vorgelegten Gleichung. Nach dieser Vorbereitung nimmt Wood an, daß jede Gleichung ungeraden Grades wenigstens eine reelle Wurzel habe, und deshalb auf eine $2m^{\text{ten}}$ Grades erniedrigt werden könne. Ist m eine ungerade Zahl, so ist es auch $m(2m-1)$, weshalb z

[1]) Phil. Trans. Vol. 88, for the year 1798, London 1798, p. 369—377.

und v^2 reell sein können. Die vorgelegte Gleichung $2m^{\text{ten}}$ Grades hat demnach den reellen quadratischen Faktor $x^2 - 2zx + z^2 - v^2 = 0$. Wenn m gerade und $\frac{m}{2}$ ungerade sind, dann hat die Hilfsgleichung in z, wie eben bewiesen, zwei reelle Wurzeln oder zwei von der Form $a \pm \sqrt{-1}\,b$; v^2 hat die Form $c \pm d\sqrt{-1}$. Daraus zieht er die Folgerung, daß die vorgelegte Gleichung einen quartischen Faktor $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ mit reellen Koeffizienten besitzt, welcher in zwei reelle quadratische Faktoren zerteilbar ist und deshalb Wurzeln von der Form $a \pm \sqrt{-1}\,b$ besitzt. Man fahre so fort für die Fälle, wo $\frac{m}{4}$ oder $\frac{m}{8}, \ldots$ ungerade ganze Zahlen sind. Wood macht von den verwandten Arbeiten von Foncenex und Lagrange keine Erwähnung. Gegen den Beweis von Wood und auch gegen diejenigen von Euler, Foncenex, Lagrange und Laplace gilt der Einwurf, daß dieselben nicht zum Ziele führen ohne die Wurzeln, deren Existenz zu beweisen ist, vorher auf irgendwelche Weise vorzuführen. Was die Mathematiker des 18. Jahrhunderts hauptsächlich im Auge hatten, war der Nachweis, daß alle Wurzeln von Gleichungen mit rationalen Koeffizienten entweder reelle Größen oder Größen vom Typus $a + b\sqrt{-1}$ seien.

Zakarias Nordmark (1751—1828), Professor der Physik zu Upsala, veröffentlichte eine Schrift Expressio uniuscujusque radicis aequationis cubicae in casu irreductibili, ope trium radicum e casu reductibili simul adhibitarum[1]), worin er $x = (\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r})^3$ setzt und die Koeffizienten der kubischen Gleichung, welche diese Wurzel hat, den Koeffizienten der vorgelegtn Kubik $x^3 - 3gx - 2h = 0$ bezw. gleich setzt. Danach erhält er eine Gleichung, deren Wurzeln p, q, r sind und die für den irreduktiblen Fall ($g^3 > h^2$) der vorgelegten Gleichung nur eine reelle Wurzel hat und deshalb durch Del Ferros Formel numerisch lösbar ist. Es kann also jede Wurzel von $x^3 - 3gx - 2h = 0$, für den Fall $g^3 > h^2$, durch drei Wurzelgrößen einer reduktiblen Kubik ausgedrückt werden. Diese Untersuchung muß denen von besonderem Interesse gewesen sein, die mit D'Alembert glaubten, der irreduktible Fall entspringe aus den unschicklichen Annahmen in der Del Ferroschen Auflösung. Nordmarks neuer Angriff des Problems mußte aber doch den Glauben an die Unmöglichkeit, imaginäre Ausdrücke zu vermeiden, bedeutend stärken.

Die 1799 veröffentlichte Teoria generale delle equazioni von Paolo Ruffini ist die erste von mehreren wichtigen Schriften

[1]) Nova Acta Reg. Soc. Scien. Upsaliensis, Vol. VI, 1799, p. 203—210.

Ruffinis über die Unlösbarkeit der Quintic und gehört deshalb einer späteren Zeitperiode an. Nach Poggendorff und Matthiessen wurde das eben zitierte Werk 1798 gedruckt. Alle Exemplare, die wir gesehen haben, tragen aber die Jahreszahl 1799[1]).

Zu Berechnungsmethoden der Wurzeln durch Annäherung übergehend, fangen wir mit einer Schrift, Observationes variae in mathesin puram[2]), von J. H. Lambert an, welche die Gleichungstheorie berührt. Formeln für die Berechnung von Summen der Wurzelpotenzen und der Wurzeln selbst werden hergeleitet. In $0 = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \cdots - Ix + K$ setze man für x nacheinander die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, dann wird durch Addition dieser Ausdrücke $\int r^m = A\int r^{m-1} - B\int r^{m-2} + \cdots + I\int r - mK$, wo $\int r^m$ die Summe der m^{ten} Potenzen der Wurzeln bezeichnet und m nacheinander die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ vorstellen kann. Um Lamberts Näherungsmethode zu kennzeichnen, setze man in $0 = a - bx + cx^2 - \cdots + px^m$, $x = k + y$ und verwerfe alle Glieder, die $y^2, y^3, \ldots$ enthalten, wodurch man $x = k + y = \dfrac{a - ck^2 + 2dk^3 - \cdots - (m-1)pk^m}{b - 2ck + 3dk^2 - \cdots - mpk^{m-1}}$ erhält. Wenn k irgend eine Zahl ist, gebe diese Formel eine Zahl, welche ein Näherungswert für die dem k nächstliegende Wurzel sei. Sind alle Wurzeln positiv, dann setze man $-k$ gleich dem Koeffizienten von x^{m-1}, und man erhalte einen Näherungswert für die größte Wurzel, während $k = 0$ einen für die kleinste liefert.

Lambert erwähnt noch eine zweite Näherungsmethode als eine sehr natürliche und einfache. Es sei $x^2 + px = q$, dann ist $q > px$, $x < q : p$, $x^2 < q^2 : p^2$, $x^2 + px < q^2 : p^2 + px > q$, $x > q : p - q^2 : p^3$, $x^2 > q^2 : p^2 - 2q^3 : p^4 + q^4 : p^6$, $x^2 + px > q^2 : p^2 - 2q^3 : p^4 + q^4 : p^6 + px < q$, $x < q : p - q^2 : p^3 + 2q^3 : p^5 - p^4 : p^7$, etc. Auf diese Weise erhält er obere und untere Grenzen für x in der quadratischen und auch in der allgemeineren Gleichung $ax^n + bx^\lambda = d$, welche sich auf die Form $x^m + px = q$ reduzieren läßt. Für $x^m + px = q$ schließt er dann, daß

$$x = q : p - q^m : p^{m+1} + mq^{2m-1} : p^{2m+1} - \frac{m(3m-2)}{2} q^{3m-2} : p^{3m+1} \text{ etc.},$$

eine Reihe, die konvergiere, wenn $(m-1)^{m-1}p^m > m^m q^m - 1$. Also konvergiere diese Reihe für den irreduktiblen Fall von $x^3 + px = q$. Nun läßt Lambert die Bemerkung folgen: „Qui casus praecise illum complecitur, qui hactenus nullo modo perfecte solvi potuit. V. Cel. Clairaut, Elem. Algebr. P. V. § 8", woraus zu ersehen ist, daß

[1]) Man sehe auch E. Bortolotti, „Paolo Ruffini", Annuario della R. università di Modena 1902—1903, p. 12; Carteggio in Mem. d. Soc. ital. d. Scienze, S. 3ª, T. XIV, 1906. [2]) Acta Helvetica, Basileae, Vol. III, 1758, p. 128—168.

Lambert 1758 zwischen einer algebraischen Auflösung und solcher durch Näherungsmethoden noch keine scharfe Grenze zog. Obige Reihe für die Wurzeln trinomischer Gleichungen führt den Namen Lamberts.

Im Jahre 1759 veröffentlichte Johann Andreas v. Segner einen Methodus simplex et universalis, omnes omnium aequationum radices detegendi[1]), welcher die Kurve der Gleichung graphisch zu erhalten lehrt. Soll z. B. die Kurve der kubischen Gleichung $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = y$ gefunden werden, dann ziehe man PO, TS, RQ auf MN senkrecht, wo $OQ = 1$ und $OS = z$. Die Koeffizienten D, C, B, A der Gleichung sind durch die Strecken OD, DC, CB, BA dargestellt. Man ziehe $Aa \parallel MN$, dann ziehe man Ba, und durch den neuen Punkt b $pc \parallel MN$. Durch Cc erhält man den Punkt d und $qe \parallel MN$. Auf ähnliche Weise erhält man die Linie De und den Punkt f. Es ist nun $fS = y$ und f ein Punkt der Kurve; denn durch die Betrachtung ähnlicher Dreiecke findet man leicht $pC = Az + B$, $qD = Az^2 + Bz + C$, $fS = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$. Für jeden neuen Wert von z oder OS erhält man einen neuen Punkt der Kurve. Wo diese Kurve die Linie MN schneidet, hat man eine reelle Wurzel der Gleichung $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$; wo sie eine Minimum-Ordinate zeigt, ohne an dieser Stelle die Linie MN zu erreichen, wird eine imaginäre Wurzel angezeigt, ohne jedoch deren Wert anzudeuten. Es wäre wünschenswert, sagt Segner, solche Kurven mechanisch beschreiben zu können. Die Erfindung eines solchen Verfahrens scheine ihm aber so schwer, daß er es nicht versucht habe.

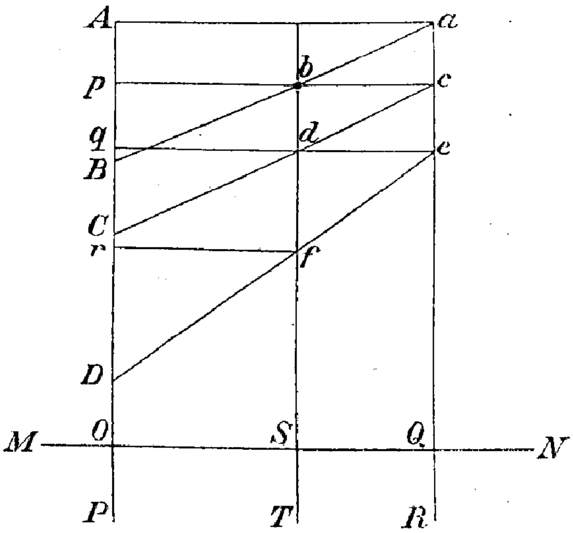

Fig. 1.

Die numerische Auflösung der Gleichungen ist ein Gebiet, wofür Lagrange sich sein Leben lang interessierte. Seine erste Arbeit darüber führt den Titel Sur la résolution des équations numériques[2]). Den Satz für die Bestimmung des ganzzahligen Näherungswertes einer Wurzel, daß zwischen p und q wenigstens eine reelle Wurzel einer Gleichung $f(x) = 0$ liegt, wenn $f(p)$ und $f(q)$ entgegengesetzte Zeichen haben, beweist er ohne den damals üblichen Hinweis

[1]) Novi Comm. Acad. Scient. Imp. Petropolitanae, T. VII, pro annis 1758 et 1759, p. 211—226. [2]) Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1767, Berlin 1769, p. 311—352 = Lagrange, Oeuvres, T. 2, p. 539—578.

auf die Kurventheorie, indem er in dem Ausdruck $(x-\alpha)(x-\beta)\cdots = 0$ (α, β, ... Wurzeln), $x=p$, dann $x=q$ setzt und die zwei Ergebnisse vergleicht. Substituiert man für α die Glieder der Progression $0, D, 2D, \ldots$, wo D kleiner als die kleinste Wurzeldifferenz sein muß, so ist man imstande die Lage aller reellen Wurzeln zu bestimmen. Das Schwierigste ist, den Wert von D zu berechnen. Lagrange hat dafür drei Methoden angegeben; eine 1767, eine andere 1795, die dritte 1798. Die erste stützt sich auf die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeldifferenzen von $f(x)=0$ sind. Von dieser Hilfsgleichung leitet er die Anzahl von imaginären Wurzeln ab. Man wird sich erinnern, daß schon früher Waring diese wichtige Hilfsgleichung abgeleitet hatte; Lagranges Exposition ist aber viel eleganter. Warings Schriften waren Lagrange 1767 noch nicht bekannt.

Gleiche Wurzeln werden durch die Divisionsoperation zur Entdeckung des größten gemeinschaftlichen Teilers von $f(x)$ und $f'(x)$ bestimmt. Allgemeine charakteristische Beziehungen zwischen den Koeffizienten von $f(x)=0$ für den Fall, daß $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinschaftlichen Teiler haben, oder $f(x)$ eine vorgeschriebene Anzahl mehrfacher Wurzeln besitzt, werden von Lagrange weder hier noch in späteren Schriften entwickelt. Hätte er sein beliebtes Werkzeug, die symmetrischen Funktionen, auf die Vervollkommnung der Theorie der mehrfachen Wurzeln angewandt, so wäre er nach der Ansicht Sylvesters[1]) auf einem Rückwege sehr wahrscheinlich auf die Entdeckung des Sturmschen Satzes gekommen. Die Berechnung der negativen Wurzeln in der Gleichung für die Quadrate der Wurzeldifferenzen liefert Lagrange die Werte β, welche in den imaginären Wurzeln $\alpha + i\beta$ der vorgelegten Gleichung erscheinen. Um α zu finden, setzt er in die vorgelegte Gleichung $x=\alpha+i\beta$, und erhält durch Trennung der reellen und imaginären Glieder zwei Gleichungen, die für denselben Wert von β einen gemeinschaftlichen Teiler haben. Setzt man denselben gleich Null, so kann man α berechnen.

Es ist bemerkenswert, daß Lagrange die Kettenbrüche mit Vorliebe als ein Mittel zur Wurzelberechnung von bestimmten, sowie unbestimmten Gleichungen angewandt hat. Für erstere beschreibt er eine ganz neue Näherungsmethode. Ist p der erste Näherungswert einer Wurzel α von $f(x)=0$, setze man $x=p+\frac{1}{y}$, dann in der resultierenden Gleichung $f(y)=0$, $y=q+\frac{1}{z}$, ferner in $f(z)=0$, $z=r+\frac{1}{u}$ usw. Es ergibt sich daraus ein Kettenbruch für den

[1]) Philosophical Magazine, Vol. 18, 1841, p. 249.

Wert von x, welcher alternierend zwei Arten von Näherungsbrüchen des x liefert. Die Werte der einen Art sind alle $> \alpha$, die der anderen Art sind alle $< \alpha$. Die Eigenschaften dieser Ausdrücke werden mit Meisterhand entwickelt. Bei einer rationalen Wurzel wird der Kettenbruch endlich und liefert den genauen Wert derselben. Bei einer irrationalen Wurzel kennt man bei jeder einzelnen Annäherung die Größe des Fehlers, was bei der Newtonschen Methode bekanntlich nicht der Fall ist.

Um diese Schrift zu ergänzen und seine Methode zu vereinfachen, schrieb Lagrange Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques[1]). Die Gleichung der quadrierten Wurzeldifferenzen wird vollständiger besprochen. In derselben kann die Anzahl imaginärer Wurzelpaare die Anzahl Zeichenfolgen nicht übersteigen. Durch bloße Besichtigung der Zeichen kann man entscheiden, ob die Anzahl reeller Wurzeln eine der Zahlen 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, ..., oder ob sie eine von 2, 3, 6, 7, 10, 11, ... ist. Dieses genügt, die ganze Anzahl von reellen und von imaginären Wurzeln in allen Fällen zu entscheiden, wo der Gleichungsgrad nicht höher als 5 ist, und wo für höhere Grade man im voraus weiß, daß nicht mehr als 4 imaginäre Wurzeln vorkommen.

Es folgen Anwendungen auf die vier ersten Grade. Bei der Kettenbruchentwicklung der numerischen Wurzeln wird hervorgehoben, daß auch ein unendlicher Kettenbruch den genauen Wurzelwert liefert, wenn nur dieser Bruch periodisch ist. Daß jeder periodische Kettenbruch auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt werden kann, war längst bekannt; der inverse Satz wird aber hier zum erstenmal demonstriert. Den Spezialfall, $x^2 = c$, hatte Euler früher[2]) ohne Nachweis angeführt, wo $\sqrt{c}$ zu einem periodischen Kettenbruch entwickelt wurde.

Obschon die Näherungsmethode von Lagrange theoretisch vortrefflich ist und vor älteren Methoden den Vorteil besitzt, immer mit Sicherheit zum Ziele zu führen, so daß Lagrange mit Recht behaupten konnte, „cette méthode ne laisse, ce me semble, rien à désirer", besaß sie für praktische Zwecke geringen Vorteil, denn die Wurzel wird in der Form eines Kettenbruchs ausgedrückt und die Berechnung derselben ist mühsam.

Ein Werk, Traité de la résolution des équations en général, von J. Raym. Mourraille in Marseille 1768 herausgegeben, behandelt hauptsächlich die Auflösung von Gleichungen durch Annäherung. Während vierzehn Jahren, bis 1782, war Mourraille

[1]) Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1768, T. 24, Berlin 1770, p. 111—180 = Oeuvres, T. 2, p. 581—652. [2]) N. Comm. Petr. XI, 1765.

Sekretär de la classe des sciences der Akademie von Marseille. Zur Zeit der Revolution wurde er zum Bürgermeister der Stadt ernannt und später verschiedener Verbrechen angeklagt[1]). Sein Werk über Gleichungen ist eigentümlich. Von zu großem Umfange und für den Anfänger zu abstrakt in der Behandlungsweise scheucht es den Fachmann durch die Unbündigkeit vieler seiner Beweise zurück. Dennoch ist es nicht ganz ohne Verdienst. Außer einer Rezension im Journal des Sçavans in Amsterdam, März 1769, haben wir gar keine Äußerungen darüber finden können. Unter Mathematikern blieben das Werk und der Name des Autors ganz unbekannt. Der Verfasser gesteht, daß er sich keine Mühe gegeben habe, sich über die Literatur seines Faches zu orientieren. Nur englische Schriftsteller vor Waring und der Franzose Reynau werden von ihm genannt. Newtons Annäherungsmethode ist der Hauptgegenstand seines Werkes und wird von ihm nicht analytisch, sondern aus den allgemeinen Eigenschaften der Kurven entwickelt. Auf diese Weise sei es ihm möglich geworden, die Mängel der Newtonschen Methode zu heben. Er verhütet das Mißlingen der Operation dadurch, daß er erst die Kurve beschreibt und dann den ersten Annäherungswert A der Wurzel α so wählt, daß die Kurve für die Strecke $x = \alpha$ bis $x = A$ gegen die X-Achse konvex ist. Man wird beachten, daß auch andere Mathematiker dieser Zeit zur Geometrie und dem Kurvenzeichnen Zuflucht nehmen, um die analytischen Mängel ihrer Näherungsmethoden zu ersetzen.

Angeregt durch Segners Aufsatz aus dem Jahre 1759 veröffentlichte John Rowning[2]), ein „fellow" von Magdalenen College in Cambridge und später Pfarrer an diesem College[3]), einen Artikel, Directions for making a Machine for finding the Roots of Equations universally; with the Manner of using it.[4]) Wenn die verschiedenen Linien in Segners Figur (S. 141) durch Lineale mit Rinnen dargestellt werden, und PO, RQ, Aa, Ba, sowie die Punkte A, B, C, D unbeweglich gemacht werden, während pc und qe sich nur MN parallel bewegen können, und Cc, De beweglich sind, dann kann man die Linie ST parallel nach rechts oder links stoßen, ohne die Konstruktion der Figur zu vernichten. Wenn nun TS eine Lage annimmt, wo $fs = 0$, dann ist OS eine reelle Wurzel, die negativ ist, wenn OS nach links weist. Rowning gibt eine Abbildung seiner interessanten Maschine.

---

1) A. Fabre, Histoire de Marseille T. II, Marseille et Paris 1829, p. 409, 482, 496, 499. 2) 1701?—1771. 3) Dictionary of National Biography. 4) Philos. Trans. Vol. 60, for the year 1770, p. 240—256.

In einer Untersuchung, Observationes circa radices aequationum[1]), leitet L. Euler eine Reihe ab, welche die größte Wurzel einer Gleichung $1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$ ausdrückt, und erhält dann durch Induktion die entsprechende Reihe für $1 = \frac{A}{x^\lambda} + \frac{B}{x^\mu}$. Er schreitet nun zu quadrinomischen und endlich zu allgemeinen Gleichungen und zeigt, daß nicht nur irgend ein Wurzelwert, sondern auch irgend eine Potenz eines solchen durch Reihen dargestellt werden kann.

In der Abhandlung, Observations analytiques[2]), erzählt Lambert, daß er seine 1758 in den Acta Helvetica gedruckte Behandlung von trinomischen Gleichungen bei seiner Ankunft in Berlin, 1764, Euler und später auch Lagrange mitteilte, worauf Euler diese Resultate auf quadrinomische Gleichungen $0 = x^m + ax^{m'} + bx^p + c$ übertrug und Lagrange auch die allgemeinere Gleichung $\alpha - x + \varphi(x) = 0$ (wo $\varphi(x)$ irgend eine Funktion ist) untersuchte[3]). Dieses Thema führt nun Lambert weiter fort. In einer Gleichung $\varphi(y) = \psi(x, y)$ soll x oder irgend eine Funktion von x oder von x und y mittels der Differentialrechnung in Reihenentwicklung durch y bestimmt werden.

In der ersten von den zwei 1776 eingereichten Abhandlungen[4]) spricht Euler anerkennend von der Lambertschen Reihenentwicklung der Wurzelwerte einer trinomischen Gleichung. Die zwei Abhandlungen stehen in enger Verbindung mit der letzten von uns angeführten Eulerschen Schrift Observationes circa radices aequationum. Hier wie dort sollen nicht nur die Wurzeln selbst, sondern auch irgendwelche Potenzen derselben durch Reihen dargestellt werden; die Reihenentwicklung sucht er nun zu vereinfachen und zu präzisieren und von allem Mysterium zu befreien. Die Schriften von Lagrange über Auflösung der Gleichungen durch Reihen erwähnt Euler nicht.

In dem Aufsatze Eulers, Nova ratio quantitates irrationales proxime exprimendi,[5]) werden rasch konvergierende Reihen entwickelt, um Irrationalgrößen $N^{\frac{\mu}{\nu}} = (a^\nu + b)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{b}{a^\nu}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$ zu

---

[1]) N. Comm. Petr. T. XV pro anno 1770. Petropoli 1771, p. 51—74.
[2]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1770. Berlin 1772, p. 225—244.
[3]) Man sehe „Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries". Mémoires de Berlin t. 24, 1770 = Lagrange, Oeuvres t. III, p. 5—73 und „Sur le problème de Képler" ebenda, t. 25, 1771 = Oeuvres t. III, p. 113—138.
[4]) N. Acta Petr. IV, 1786, p. 55—73, p. 74—95.
[5]) N. Comm. Petr. T. XVIII pro anno 1773. Petropoli 1774, p. 136—170.

berechnen. Wenn die Binomialentwicklung von $(1+x)^n$ durch $1-\alpha x$ multipliziert wird, erhält man

$$(1+x)^n = (1 + Ax + Bx^2 + \cdots) : (1-\alpha x).$$

Setzt man nun $A=0$, wird $\alpha = n$ und der Näherungswert $= \frac{1}{1-nx}$. Setzt man statt dessen $B=0$, wird $\alpha = \frac{n-1}{2}$ und der Näherungswert $= \frac{2+(n+1)x}{2-(n-1)x}$ usw. Euler verfährt auf ähnliche Weise, indem er statt $1-\alpha x$ den Nenner $1-\alpha x+\beta x^2$ und später noch irgend ein Polynom nimmt. Die Brauchbarkeit der errungenen Formeln wird durch Aufgaben in der Wurzel-, Logarithmen- und Exponentialberechnung erläutert.

In einer Abhandlung, Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem[1]), die Euler schon 1776 einreichte, soll eine Wurzel z der Gleichung $Z=0$ berechnet werden. Setzt man für z den Näherungswert v ein, so erhält man einen Ausdruck $Z=V$, wo V eine bekannte Funktion von v ist, welche für $v=z$ verschwindet. Umgekehrt ist v eine Funktion von V, also etwa $v=\Gamma:V$. Nun ist $\Gamma:(V+a) = v + ap + \frac{1}{2}a^2q + \cdots$, wo $p = \frac{dv}{dV}$, $q = \frac{d^2v}{dV^2}$, ... Wenn $a=-V$, so erhält man die Reihe $z = v - pV + \frac{1}{2}qV^2 - \cdots$, welche in der Berechnung von Wurzeln anwendbar ist. Die Konvergenz der Reihe wird nicht untersucht. Ein Nachteil der Methode besteht darin, daß man nicht weiß, welchen Grad der Genauigkeit man erreicht hat.

In den Riflessioni sul Metodo di risolver l'equazioni numeriche proposto dal Sig. De-la-Grange[2]) hebt der Padre Stanislao Canovai (1740—1811) hervor, daß die Hauptteile der Lagrangeschen Theorie schon früher von Waring und anderen entwickelt worden und versucht dann eine einfachere Entwicklung dieser Theorie zu geben.

Lagrange schrieb 1777 an Lorgna,[3]) daß seine Untersuchung über die numerische Auflösung der Gleichungen aus den Jahren 1767 und 1768 von Mathematikern größere Aufmerksamkeit verdiene als sie wirklich erhalten habe. Nach der Veröffentlichung seiner Schrift De la résolution des équations numériques de tous les degrés, Paris, an VI (1798), schickte Lagrange ein Exemplar an

[1]) N. Acta Petr. T. VI, ad ann. 1788. Petropoli 1790, p. 16—24. [2]) Atti dell' accademia delle scienze di Siena detta de' Fisio-Critici, Tomo VII, 1794, p. 29—45. [3]) Lagrange, Oeuvres T. XIV, p. 253.

Pietro Paoli mit der Bemerkung: „Es enthält meine alten Memoiren über die Auflösung numerischer Gleichungen, ... mit mehreren Noten über diese Memoiren, sowie auch über andere Punkte der Gleichungstheorie. Ich fügte jene Noten bei, um die Aufmerksamkeit von Mathematikern auf diesen wichtigen Gegenstand der Analyse zu richten, welchen sie beinahe verlassen zu haben scheinen."[1]) Die zwei ersten Noten enthalten Verbesserungen in den Beweisen der Fundamentalsätze, 1) daß zwischen a und b, wo $f(a) = +$ und $f(b) = -$, wenigstens eine reelle Wurzel liegt, (2) daß, wenn eine reelle Wurzel zwischen a und b liegt, $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Zeichen haben. Einen ähnlichen Zweck hat Note III, worin er die Gleichung der Wurzeldifferenzen behandelt. Hier werden die Arbeiten von Waring erwähnt und daraus die Gleichung, deren Wurzeln die quadrierten Wurzeldifferenzen der Quintik sind, entnommen. Lagrange selber hatte die Koeffizienten dieser Gleichung nie berechnet. Es wird dann in Note IV das Problem weiter untersucht, eine Zahl D zu finden, die kleiner als die kleinste Wurzeldifferenz ist. Die erste Berechnungsweise von D wurde von ihm 1767 erklärt; die zweite wurde 1795 in Vorlesungen auf der Normalschule vorgetragen.[2]) Die dritte ist eine Modifikation der zweiten und nicht ganz so schwerfällig. Die Annäherungsmethoden von Newton und Raphson werden in Note V kritisch untersucht. Es stellt sich heraus, daß Newtons Methode mit Sicherheit nur zur Berechnung der größten oder kleinsten reellen Wurzeln derjenigen Gleichungen dient, in welchen der reelle Teil α jeder imaginären Wurzel $\alpha + i\beta$ zwischen der größten und der kleinsten reellen Wurzel liegt. Zunächst werden die Annäherung durch rekurrente Reihen und die Fontainesche Auflösungsmethode untersucht. Er zeigt, daß Fontaines Verfahren selbst für Gleichungen niedrigen (z. B. dritten) Grades nicht immer zum Ziele führt. Es folgen dann Noten mit historischen Angaben über Wurzelgrenzen, die Reellität der Wurzeln und die Möglichkeit, alle imaginären Wurzeln einer Gleichung in der Form $a + \sqrt{-1}\, b$ auszudrücken. Note X betrifft die Zerlegung eines Polynoms in reelle Faktoren, Note XI weitere Approximationsformeln zur Berechnung der Wurzelwerte. Die letzte Note behandelt Transformationen, welche Gleichungen liefern, in denen alle x enthaltende Glieder einerlei Zeichen haben und das absolute Glied das entgegengesetzte Zeichen besitzt.

[1]) Memorie della regia accad. di scienze in Modena, Serie III, T. I, 1898, p. 109. [2]) Séances des écoles normales, T. 3, p. 466 = H. Niedermüller, op. cit., p. 90—97.

Eine geometrische Methode, die Wurzeln von Gleichungen zu bestimmen, wird von Teodoro Bonati (1724—1820), einem in Ferrara gebürtigen italienischen Arzte, beschrieben[1]). Die Natur und Lage der Wurzeln soll durch die Gleichungskurve bestimmt werden. Um diese zu zeichnen, wird die Gleichung anfangs durch Transformation von dem vorletzten Gliede befreit. Hat man z. B. $x^5 - 5ax^4 + 5cx^3 - 5hx^2 + i = 0$ und setzt man $\frac{dy}{dx} = 0$, so hat man auch $x = 0$ und man hat auf der Y-Achse einen Maximum- oder Minimumpunkt der Kurve, welcher zur bequemeren Zeichnung der Kurve dient. Die übrigen solcher Punkte werden durch Verschiebung der Y-Achse nach rechts oder links gefunden.[2])

Unter den Spezialuntersuchungen über Gleichungstheorie bringen wir in erster Linie die Diskussion über den irreduktiblen Fall in der Lösung von Kubikgleichungen. Zahlreiche Schriften über diesen Gegenstand wurden verfaßt, besonders in Italien. Obschon keine neuen Resultate gewonnen wurden, war die Diskussion doch nicht ohne Erfolg, denn viele Mathematiker überzeugten sich allmählich von den Vorteilen, welche imaginäre Größen in der Gleichungstheorie gewähren. Lagrange schrieb an Lorgna 1777 aus Berlin:[3]) „Als einen der wichtigsten Schritte, welche die Analyse in letzter Zeit genommen hat, erachte ich, daß sie durch imaginäre Größen nicht länger in Verlegenheit gesetzt wird, und daß dieselben der Rechnung unterzogen werden, eben wie reelle Größen."

Allgemeine Gesichtspunkte werden nicht ohne Mühe erreicht. Als Beispiel dient die Äußerung, die in dieser Zeit gelegentlich gemacht wurde, daß die Algebra keine allgemeine Auflösung kubischer Gleichungen kenne[4]).

Ein bloßer formaler Ausdruck, wie die Del Ferrosche Formel für den irreduktiblen Fall, welcher numerische Wurzelwerte zu berechnen nicht gestattete, wurde nicht selten von algebraischen Lösungen ausgeschlossen. Blassière ist der Ansicht, daß, obschon eine allgemeine Lösung von $x^3 + qx + r = 0$ nicht möglich sei, er die Möglichkeit einer allgemeinen Lösung von $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ doch nicht leugnen möchte.

---

[1]) Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, Tomo VIII, Pt. I, Modena 1799, p. 231—272. [2]) Abhandlungen von P. Franchini und T. V. de Caluso in Mémoires de l'acad. de Turin, année 1792 à 1800, T. VI, werden hier ausgelassen, weil erst 1800 gedruckt. [3]) Lagrange, Oeuvres, T. XIV, p. 261. [4]) Z. B. Paoli Frisii operum tomus primus algebram et geometriam analyticam continens, Mediolani 1782, p. 269, und J. J. Blassière in Verhandel. uitgegeeven door de Hollandsche Maatschappye der Weetensch. te Haarlem, VIII. Deels I. Stuk, 1765, S. 197—220.

Ein schon früher erwähntes Werk von Francis Maseres, betitelt A dissertation on the use of the negative sign in algebra ... showing how quadratic and cubic equations may be explained, without the consideration of negative roots, erschien 1758 in London. Negative Wurzeln verwerfend, behauptet Maseres, die Gleichung $x^2 - xp = r$ habe nur eine Wurzel. Bei der Gleichung $x^3 + px^2 + qx = r$ bespricht er die sieben Fälle, die man erhält, wenn nicht mehr als zwei Glieder auf der linken Seite das $-$Zeichen erhalten und zählt die Anzahl Wurzeln jeden Falles auf. Er teilt die kubischen Gleichungen in solche erster, zweiter und dritter Art, je nachdem kein Glied, das dritte oder das zweite Glied fehlt. Er zeigt, wie die übrigen auf solche dritter Art transformiert werden können und erklärt die Auflösung jeden Falles. Alles ist mit langweiliger Weitläufigkeit auseinandergesetzt. Die große Anzahl spezieller Fälle, welche seine Auffassung der Algebra erfordert, bezeugt, wie sehr bequem und zeitersparend negative Größen wirklich sind, indem sie alle Fälle in einen einzigen einschließen. Maseres ist aber gewissenhaft. Die Möglichkeit einer solchen Algebra sieht er nicht ein und er zieht die Logik der Einfachheit vor, so lange er nicht beide gleichzeitig haben kann. Der irreduktible Fall für $y^3 - cy = d$, wo $d < \frac{2c\sqrt{c}}{3\sqrt{3}}$, hänge in seiner Auflösung von $cy - y^3 = d$ ab. Letztere Gleichung habe zwei Wurzeln, die man durch Dreiteilung eines Kreisbogens erhalten könne. Wenn $x^3 - px^2 + qx = r$ Wurzeln hat, setze man $x = \frac{p}{3} - y$ und finde die kleinste durch Auflösung von $y^3 - cy = d$, wo $d > \frac{2c\sqrt{c}}{3\sqrt{3}}$, $c = \frac{p^2}{3} - q$, $d = \frac{pq}{3} - \frac{2p^3}{27} - r$. Die zwei übrigen erhalte man durch die Berechnung der zwei Wurzeln von $cy - y^3 = d$ und $x = \frac{p}{3} + y$.

In den Artikeln in Diderots Encyclopédie über den irreduktiblen Fall[1]) erklärt D'Alembert, daß die Cardansche Formel nicht bloß eine Wurzel, wie gewisse Mathematiker (z. B. Clairaut) behaupten, sondern gleichzeitig alle drei darstellen. Der Übelstand beim irreduktiblen Fall bestehe darin, daß man $x = y + z$ setze, wo y und z unbestimmt sind, und dann zugleich $-3yz = q$ annehme, wodurch y und z imaginär werden. Diese Annahme sei nicht nötig und werde gemacht, nur um die Werte von y und z leichter abzuleiten. Es sei aber sehr schwierig, wenn nicht unmöglich, diese An-

[1]) Man sehe auch die Encyclopédie méthodique (mathématiques), Paris 1784, Art. „Cas irréductible".

nahme durch eine bessere zu ersetzen. Daß das Del Ferrosche Verfahren schon von Anfang falsch sei, behaupten auch Frisius[1]) und Francesco Domenico Michelotti[2]). Der Aufsatz Sur l'expression de certaines quantités imaginaires[3]) von D'Alembert dient als Ergänzung seiner Artikel in Diderots Encyclopédie. Er hebt unter anderem hervor, daß aus $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ man nicht schließen dürfe $1+h\sqrt{-1} = 1-h\sqrt{-1}$, wo h nicht Null sei. In dieser paradoxen Gleichung nimmt er $h = \tan A = \tan(\Theta \pm 2n)\pi$ an und, um die Gleichung $\cos mA + \sin mA \cdot \sqrt{-1} = \cos mA - \sin mA \cdot \sqrt{-1}$ oder $\sin mA = -\sin mA$ zu befriedigen, soll $mA = \pm\mu\pi$, wo μ eine ganze Zahl ist, weshalb $m(\Theta \pm 2n) = \pm\mu$ ist und die Werte von m festgesetzt sind.

Ein vielsagender Kommentar über den Scharfblick gewisser Verfasser von Schriften, sowie der Herausgeber der Nova acta eruditorum sind zwei anonyme Artikel[4]), worin gezeigt werden soll, daß kubische Gleichungen, die drei reelle Wurzeln haben

$$(\text{wie } x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0),$$

zugleich noch drei imaginäre Wurzeln besitzen mögen.

Jean-François-Mauro-Melchior Salvemini de Castillon (1709—1791), aus Toskana gebürtig, tut einen reaktionären Schritt in der Erklärung[5]), daß die Del Ferrosche Formel nur auf arithmetische Gleichungen Bezug habe; Gleichungen, die sich auf geometrische Aufgaben beziehen, lassen sich durch geometrische Konstruktion leicht erledigen. Viele Algebristen trauen der Algebra blindlings. Für das Problem, zwei Zahlen zu finden, deren jede das Quadrat der anderen sei und deren Summe dem Kubus einer von ihnen gleich sei, liefere die Algebra Ausdrücke, obschon der gesunde Menschenverstand die Unmöglichkeit derselben leicht erblicke. Diese Bemerkung wurde durch die Äußerung Lagranges hervorgerufen, daß $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ das Quadrat von $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ sei; Lagranges Autorität hatte bei Castillon weniger Gewicht als bei anderen Mathematikern, weil letzterer ein Mitbewerber für die Stelle als Nachfolger von Euler an der Berliner Akademie gewesen war und zu Lagrange in gespannten Beziehungen stand[6]).

[1]) Atti dell' accademia delle scienze di Siena detta de' Fisio-Critici, T. IV, 1771, p. 20—24. [2]) Antologia Romana T. IV, 1778, p. 300—302. [3]) Opuscules mathématiques T. V, Pt. I, p. 183—215. [4]) Anni 1775, p. 60—84, 104—116. [5]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1783, Berlin 1785, p. 244—265. [6]) Lagrange, Oeuvres, T. XIII, p. 79, 89, 202, 205.

Die Entwicklung des Cardanschen Ausdruckes, wie man allgemein zu sagen pflegte, in Reihen, von Nicole schon 1738 vorgeschlagen, wurde später von mehreren angeraten. Maseres veröffentlichte A method of extending Cardan's rule for solving one case of a cubick equation of this form $x^3* - qx = r$, to the other case of the same equation, which it is not naturally fitted to solve, and which is therefore often called the irreducible case[1]), worin die Entwicklung der Wurzelwerte durch die Binomialformel in Reihen gegeben wird.

Kästner äußerte sich 1794 so: „Sonderbar ist, daß man in Italien noch in neueren Zeiten sich mit dieser Untersuchung viel zu tun gemacht hat.“ Er selber habe seine Betrachtungen in dem 1757 herausgegebenen Programm Formulam Cardani aequationum cubicarum radices omnes tenere cet. vorgetragen.

Schriften von den Italienern Frisi und Michelotti haben wir schon angeführt. Francesco Maria Zanotti (1692—1777) zeigt[2]), daß, wenn $r + i = \sqrt[3]{A + \sqrt{-B}}$, dann sei auch $r - i = \sqrt[3]{A - \sqrt{-B}}$, wodurch leicht zu ersehen sei, wie der Cardansche Ausdruck für die Wurzeln im irreduktiblen Fall reell sein kann. Ähnliche Nachweise findet man bei mehreren Mathematikern.

In einem Aufsatze, De casu irreductibili tertii gradus et seriebus infinitis, Verona 1776 (?)[3]), gibt Antonio Maria Lorgna[4]) (1735—1796) von der Militärschule zu Verona eine Auseinandersetzung der Reihenentwicklung von den Cardanschen Wurzelausdrücken und der Zurückführung von der Summation dieser Reihen auf die Integralrechnung. In einem Briefe an ihn gibt Lagrange[5]) eine Berichtigung betreffs einer Elimination. Malfatti kritisierte die Reihenbehandlung.

In einem Aufsatze des Jahres 1782, Dell' Irreducibilità della Formula Cardanica a forma finita, algebraica, e libera da aspetto immaginario[6]), sucht Lorgna einen kürzeren Beweis als den des Jahres 1776 vorzuführen. Er zeigt, daß die Cardansche Formel für den irreduktiblen Fall der Gleichung $x^3 - px - q = 0$ nicht gleich $x + \sqrt{v}$ oder $\sqrt{v}$ oder $x\sqrt[3]{v}$ oder einer

[1]) Phil. Trans. Vol. 68 for the year 1778, Pt. II, London 1779, p. 902—949. [2]) De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii Tomi Quinti Pars Prima, 1767, p. 145—151. [3]) Über das Datum sehe man Bullettino Boncompagni, T. VI, Roma 1873, p. 101 ff. [4]) Man sehe Bullettino Boncompagni, T. X, p. 1—74. [5]) Lagrange, Oeuvres, T. XIV, p. 261. [6]) Memorie di Matematica e Fisica della società Italiana. Tomo I, Verona 1782, p. 707—746.

größeren endlichen Anzahl solcher reellen Glieder sein kann, wo x und v rational angenommen werden und Gleichungen mit rationalen Wurzeln ausgeschlossen sind. In der Anwendung dieser Ergebnisse kommt aber ein unheilbarer Fehlschluß vor. Diese Abhandlung wurde der Akademie zu Padua, die 1781 eine Preisfrage über den irreduktiblen Fall gestellt hatte, eingereicht. Durch den Einfluß eines der Schiedsrichter, Nicolai, wurde der Preis vorenthalten[1]).

In Paulli Frisii operum tomus primus, 1782, wird im 10. Kapitel der irreduktible Fall eingehend besprochen. Im folgenden Jahre erschien in Padua eine Abhandlung Della possibilità della reale soluzione analitica del caso irreducibile von Lorgnas Gegner Giambatista Nicolai (1726—1795), Lehrer der Mathematik an der Universität zu Padua. Durch Operationen, die nicht alle mit $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$ im Einklang sind, leitet Nicolai die Paradoxie ab $(1+\sqrt{1-q}):(1-\sqrt{1-q}=(1-\sqrt{1-q}):(1+\sqrt{1-q})$. Durch ähnliche Fehlschlüsse ergibt sich ihm das Resultat, daß der irreduktible Fall von imaginären Größen befreit werden kann[2]).

Dieser Aufsatz entflammte einen langen Streit. Sebastiano Canterzani schrieb drei Aufsätze, um heterodoxe Ideen dieser Art zu widerlegen[3]).

Petronio Maria Caldani (1735—1808), Professor zu Bologna, schrieb einen Brief an Padre Jacquier, worin er Nicolais Fehlschluß im Beweise, daß

$$(1+\sqrt{1-q}):(1-\sqrt{1-q})=(1-\sqrt{1-q}):(1+\sqrt{1-q})$$

sei, hervorhebt. Nicolai schreibe $-\sqrt{-1}\sqrt{-1+q}=-\sqrt{1-q}$, anstatt $+\sqrt{1-q}$[4]). Es erschienen noch mehrere Streitschriften über diesen Gegenstand in italienischen Journalen, welche die Frage, ob das Produkt von $-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ positiv oder negativ sein soll, diskutieren[5]).

Es erschienen auch Abhandlungen von den Brüdern Vincenzo und Giordano Riccati[6]).

Eine klare Diskussion des irreduktiblen Falles gab Lagrange[7]) in seinen Vorlesungen des Jahres 1795. Er hebt hervor, daß das

---

[1]) Bullettino Boncompagni, T. VI, 1873, p. 122, 123. [2]) Näheres auch in De studiis philosophicis et mathematicis, Matriti 1789, von Juan Andrès, p. 153—181. [3]) Man sehe Antologia Romana, Tomo XIV, 1788, p. 114. [4]) Antologia Romana, Tomo X, 1784, p. 33—37. [5]) Antologia Romana, Tomo X, p. 61—62, 313—317, 401—405; Tomo XI, p. 33—46, 49—54, 57—62. Giornale de' confini d'Italia 1783, num. 43; 1784, num. 13. [6]) Nuovo Giornale, Modena, T. 24, p. 170—205; T. 28, p. 256. [7]) Séances des écoles normales, an III, 3. Vorlesung = H. Niedermüller, op. cit., p. 48—69.

Imaginäre in der Cardanschen Wurzelform von der Annahme $x = y + z$ unabhängig sei.

Als Einzeluntersuchung über Gleichungen ist noch anzuführen eine Schrift, De aequationibus indefinitis, deque methodo indeterminatarum[1]), von Gregorio Fontana, über die Aufgabe in Eulers Anleitung zur Algebra[2]), eine reelle Wurzel der Gleichung mit unendlichen Exponenten $x^\infty - x^{\infty-1} - x^{\infty-2} - \cdots - 1 = 0$ zu finden. Man schreibe die Gleichung $x^\infty + (1 - x^\infty) : (x - 1) = 0$ oder $x^{\infty+1} - 2x^\infty + 1 = 0$, oder $x - 2 + \frac{1}{x^\infty} = 0$ und es sei dann klar, daß $x = 2$ sei. Die Lösung der Gleichung $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n + 1)x^n = 0$ hänge von der Lösung der Trinomialgleichung $(n + 1)x^{n+2} - (n + 2)x^{n+1} + 1 = 0$ ab, wie aus der Division $1 : (1 - x)^2$ zu ersehen sei.

Zahlentheorie.

Am Anfange unserer Zeitperiode ist L. Euler noch immer der einzige hervorragende Mathematiker, welcher sich mit der Zahlentheorie beschäftigte. Die erste seiner hierher gehörigen Schriften gibt die Auflösung der simultanen Gleichungen $x + y + z = u^2$, $xy + xz + yz = v^2$, $xyz = w^2$.[3]) Euler bemerkt, daß er an der Auflösung dieses Problems beinahe verzweifelte, so viel Mühe habe ihm dieselbe gekostet. Wie wir bald sehen werden, hat er später diese Aufgabe auf vier Zahlen x, y, z, s ausgedehnt und noch andere bedeutend schwierigere unbestimmte Gleichungen dieser Art gelöst. Die kleinsten von Null verschiedenen ganzen Zahlenwerte für x, y, z im gegenwärtigen Problem sind

$$x = 1633780814400, \quad y = 252782198228, \quad z = 3474741058973.$$

Wenn diese durch 2315449^2 dividiert werden, erhält man Bruchwerte von x, y, z.

Im gleichen Bande kehrt Euler in der Schrift Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata[4]) zum Studium der Potenzreste zurück, die er schon ein Vierteljahrhundert früher bei Betrachtungen über den Fermatschen Satz untersucht hatte. Er erforscht die durch Division der sukzessiven Glieder arithmetischer

[1]) Atti dell' accademia delle scienze di Siena, T. VI, p. 184—191.
[2]) 2. Tl., 1. Absch., Kap. 16, § 239.
[3]) N. Comm. Petr. VIII, 1760—61, p. 64—73 = Comm. Arith. I, p. 239.
[4]) N. Comm. Petr. VIII, 1760—61, p. 74—104 = Comm. Arith. I, p. 274.

und geometrischer Reihen erhaltenen Reste, und erhält den wohlbekannten Ausdruck für die Anzahl der Zahlen, die prim zu einer gegebenen Zahl und nicht größer als dieselbe sind. Ist die gegebene Zahl das Produkt dreier ungleichen Primzahlen p, q, r, dann ist diese Anzahl $= (p-1)(q-1)(r-1)$. Dieser Ausdruck, dessen Verallgemeinerung Euler andeutet, wird öfters die „Eulersche Funktion" genannt. Am Ende der Schrift findet er folgende Erweiterung des von ihm in früheren Jahren schon zweimal bewiesenen Fermatschen Lehrsatzes: Wenn N prim zu x ist und n die Anzahl der Zahlen bezeichnet, die prim zu N und nicht größer als N sind, so ist $x^n - 1$ immer durch N teilbar.

In einer dritten Arbeit über Zahlentheorie in diesem Bande, nämlich Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur[1]) sind die Eigenschaften ganzer Zahlen von der Form $a^2 + 3b^2$ entwickelt und auf das Problem angewandt, drei Kubikzahlen zu finden, deren Summe eine Kubikzahl ist, sowie auf die Vervollständigung seines Beweises des berühmten Fermatschen Unmöglichkeitssatzes über $x^n + y^n = z^n$, für den Fall $n = 3$. Man wird sich erinnern, daß schon zweiundzwanzig Jahre früher Euler, für den Fall $n = 4$, den Unmöglichkeitsbeweis geliefert hatte. (Bd. III^2, S. 613.)

Im Aufsatze De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros[2]) wird die Auffindung rationaler oder ganzzahliger Werte von x und y der Gleichung $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y^2$ betrachtet, ohne daß allgemeine Gesichtspunkte erreicht würden. Großes Gewicht legt Euler auf folgenden Satz: Wenn die Gleichung $\alpha x^2 + p = y^2$ für $x = a$ und $y = b$, und die Gleichung $\alpha x^2 + q = y^2$ für $x = c$, $y = d$ erfüllt sind, dann sind $x = bc \pm ad$ und $y = bd \pm \alpha ac$ Lösungen von $\alpha x^2 + pq = y^2$. Wäre Euler die Zahlentheorie der Inder zugänglich gewesen, würde er diesen schönen Satz schon in den Arbeiten von Bhaskara gefunden haben[3]).

In seiner Schrift De numeris primis valde magnis[4]) vergleicht er die Auffindung des Gesetzes der Verteilung der Primzahlen mit dem Problem der Quadratur des Kreises: beide gehen über unsere Fassungskraft. Daß die Fermatsche Formel $2^{2^n} + 1$ immer Primzahlen darstelle, hatte Euler in seinem allerersten 1732—33 er-

---

[1]) N. Comm. Petr. VIII, 1760 et 1761, p. 105—128 = Comm. Arith. I, p. 287.

[2]) N. Comm. Petr. IX, 1762—63, p. 3—39 = Comm. Arith. I, p. 297.

[3]) H. Hankel, Gesch. d. Math. in Alterth. u. Mittelalt., Leipzig 1874, S. 200.

[4]) N. Comm. Petr. IX, 1762—63, p. 99—153 = Comm. Arith. I, p. 356.

schienenen Aufsatze über Zahlentheorie[1]) widerlegt. Nun zeigt er, daß es keine algebraische Funktion $X \equiv \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$ gebe, welche nur Primzahlen darstelle; denn, wenn $x = a$ und $A \equiv \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \cdots$, erhält man im Falle $x = nA + a$ für X einen Wert, der durch A teilbar ist. Die Schrift endet mit mehreren Tabellen. Die erste enthält alle Primzahlen nicht größer als 1997 und von der Form $4n + 1$, jede als die Summe zweier Quadrate ausgedrückt, sowie die Werte von a, welche das Binom $a^2 + 1$ durch diese Zahl teilbar macht. Drei andere Tabellen folgen. Diese zeigen, welches fleißige empirische Studium Euler der Zahlentheorie widmete und wie es Euler möglich wurde, viele Lehrsätze durch bloße Anschauung zu entdecken.

Um die Lehre von den Kettenbrüchen leichter darzustellen und, im besonderen, um Gesetze zu entdecken, welche die Auffindung irgend eines Näherungswertes ohne die Berechnung aller vorangehenden gestatten, schuf Euler in einer Schrift, Specimen algorithmi singularis[2]), einen eigenen Algorithmus und dazu passende Rechnungsregeln, welcher er sich in einer drei Jahre später gedruckten wichtigen zahlentheoretischen Schrift, De usu novi algorithmi, bediente[3]) Ein Kettenbruch $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$ wird durch das Symbol $\frac{(a, b, c)}{(b, c)}$ dargestellt; ein unendlicher Kettenbruch durch $\frac{(a, b, c, d, e \text{ etc.})}{(b, c, d, e \text{ etc.})}$. Man hat hier $(a, b, c, d, e) = e\,(a, b, c, d) + (a, b, c)$, auch $(a,b,c,d,e) = (e,d,c,b,a)$. Da nun $(a,b,c,d)\,(b,c,d,e) - (b,c,d)\,(a,b,c,d,c)$ $= (a,b,c,d)e(b,c,d) + (a,b,c,d,e)(b,c) - (b,c,d)e(a,b,c,d) - (b,c,d)(a,b,c)$ $= -\{(a,b,c)(b,c,d) - (b,c)(a,b,c,d)\} = \pm 1$, weil $(a)(b) - 1(a,b) = -1$ ist, läßt sich der Nachweis führen, daß die sukzessiven Näherungsbrüche sich dem wahren Werte des Kettenbruchs mehr und mehr nähern. Denn man hat $\frac{(a)}{1} - \frac{(a,b)}{(b)} = -\frac{1}{1\,(b)}$, $\frac{(a,b)}{(b)} - \frac{(a,b,c)}{(b,c)} = +\frac{1}{(b)(b,c)}$ usw. Zieht man letztere Gleichungen zusammen, so hat man die Entwicklung des Kettenbruchs in einer Reihe. Euler erhält durch Induktion Formeln dieser Art $(a, b, c, d)\,(e, f, g, h) - (a, b, c, d, e, f, g, h)\,1 = -(a,b,c)\,(f,g,h)$, $(a,b,c,d,e)\,(c,d,e,f,g,h) - (a,b,c,d,e,f,g,h)\,(c,d,e) = +(a)\,(g,h)$ und lehrt derartige Formeln in beliebiger Anzahl hinzu-

---

[1]) Comm. Petr., VI., 1732—33, p. 103 = Comm. Arith. I, p. 1; Cantor, Bd. III², S. 611. [2]) N. Comm. Petr. IX, pro annis 1762 et 1763. Petropoli 1764, p. 53—69. Vergl. S. Günther, Näherungswerthe von Kettenbrüchen, Erlangen 1872, S. 1—10. [3]) Ebenda, T. XI, pro anno 1765, Petropoli 1767, p. 28.

schreiben. Er wendet seinen neuen Algorithmus auf die Bestimmung der Differenz zweier beliebiger Näherungswerte an. Wie Günther hervorgehoben hat[1]), bedient sich Euler „zur Zerlegung seiner Symbole eines Verfahrens, welches ganz dem Zerfällen einer Determinante in ihre Unterdeterminanten entspricht".

Wichtiger ist Eulers nächste Arbeit, De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo[2]), welche eine neue Auflösung der Fermatschen Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ (irrtümlich die Pellsche Gleichung genannt) gibt. Diese berühmte Gleichung, zuerst von den Griechen betrachtet, dann von den Indern aufgelöst und wieder von neuem durch Fermat, Brouncker, Wallis entwickelt, wird in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts von Euler und Lagrange weiteren Untersuchungen unterworfen[3]). Nachdem in dem gegenwärtigen Artikel Euler gezeigt hat, daß die Auflösung nicht nur der Gleichung $lx^2 + mx + n = y^2$, sondern auch der allgemeineren Gleichung zweiten Grades $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, wo $B^2 > AC$ angenommen wird, von der Auflösung der Gleichung der Form $p^2 = lq^2 + 1$ (l positive ganze Zahl) abhänge und dadurch die Wichtigkeit der letzten Gleichung betont hat, erklärt er, wie die Auflösung von $p^2 = lq^2 + 1$ durch die Entwicklung von $\sqrt{l}$ in einen Kettenbruch bedeutend erleichtert werden könne. Ohne Beweis nimmt er an, daß, wenn $\frac{p}{q} > \sqrt{l}$, der Bruch $\frac{p}{q}$ eine Annäherung zum irrationalen Werte $\sqrt{l}$ liefere, die nicht überstiegen werden kann, ohne größere ganze Zahlen für p und q in Anwendung zu bringen. Er erklärt die Kettenbruchentwicklung zuerst an numerischen Beispielen, dann im allgemeinen wie folgt:

$$\sqrt{z} = v + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}$$

wo die Indizes a, b, c, d etc. [so nennt Euler die Teilnenner] durch sukzessive Operationen gefunden werden. Wenn $\sqrt{z} = v + \frac{1}{x}$ und $v = A$, dann wird $x = \frac{\sqrt{z} + A}{z - A^2} = \frac{\sqrt{z} + A}{\alpha}$, wo $\alpha = z - A^2$. Da nun

---

[1]) S. Günther, op. cit., S. 59. [2]) N. Comm. Petr. XI, 1765, p. 28—66 = Comm. Arith. I, p. 316. [3]) Man lese H. Konen, Gesch. d. Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$, Leipzig 1901.

a die größte ganze Zahl in $\frac{\sqrt{z}+A}{\alpha}$ oder $\frac{v+A}{\alpha}$ ist, hat man $a \leqq \frac{v+A}{\alpha}$. Setzt man zweitens $x = a + \frac{1}{y}$, dann wird, da $z = \alpha + A^2$,

$$y = \frac{\sqrt{z} - A + a\alpha}{1 + 2aA - a^2\alpha} = \frac{\sqrt{z}+B}{\beta},$$

wo $B = a\alpha - A$ und $\beta = 1 + a(A - B)$. Weil b die größte ganze in y enthaltene Zahl ist, hat man $b \lesseqgtr \frac{v+B}{\alpha}$. Setzt man drittens $y = b + \frac{1}{z}$ und fährt in ähnlicher Weise fort, so erhält man die folgende Tabelle von Euler:

Capiatur	tum vero	eritque
I. $A = v$	$\alpha = z - A^2 = z - v^2$	$a < \frac{v+A}{\alpha}$
II. $B = \alpha a - A$	$\beta = \frac{z-B^2}{\alpha} = 1 + a(A-B)$	$b < \frac{v+B}{\beta}$
III. $C = \beta b - B$	$\gamma = \frac{z-C^2}{\beta} = \alpha + b(B-C)$	$c < \frac{v+C}{\gamma}$
IV. $D = \gamma c - C$	$\delta = \frac{z-D^2}{\gamma} = \beta + c(C-D)$	$d < \frac{v+D}{\delta}$
V. $E = \delta d - D$	$\varepsilon = \frac{z-E^2}{\delta} = \gamma + d(D-E)$	$e < \frac{v+E}{\varepsilon}$

etc.

Wenn in der letzten Kolumne die Brüche in Wirklichkeit ganze Zahlen vorstellen, dann soll das Zeichen $<$ durch $=$ ersetzt werden. Da $A = v$ und $a \lesseqgtr \frac{v+A}{\alpha}$, so hat man $B = a\alpha - A \lesseqgtr v$, $\beta \gtreqless 1$, $b \lesseqgtr 2v$. Folglich ist auch $C = b\beta - B \lesseqgtr v$ etc. Durch die Indizes a, b, c, d etc. erhält man also die ganzen Zahlen A, B, C, D etc., welche alle $\lesseqgtr v$ sind, sowie die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., welche alle $\gtreqless 1$ sind. Aus der letzten Kolumne ersieht man nun, daß jeder Index a, b, c, d etc. $\lesseqgtr 2v$ sein muß. Euler erklärt, daß, nachdem der Index $2v$ erreicht wird, die Werte a, b, c, d etc. sich wiederholen und die Entwicklung von neuem beginnt. Er gibt aber keinen Beweis, daß der Index $2v$ notwendig existiert. Er zeigt an Beispielen, daß die Indizes a, b, c, d etc. und die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. sich periodisch wiederholen. Nur für die Form $z = n^2 + 1$ und sieben andere ähnliche Formen werden allgemeine Werte für die Indizes und für die griechischen Buchstaben angegeben.

Um nun $p = \sqrt{lq^2 + 1}$ in ganzen Zahlen aufzulösen, werden aus den Indizes Näherungsbrüche $\frac{x}{y}$ nach dem in folgenden zwei Reihen ersichtlichen Gesetze entwickelt:

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{Indizes} & v, & a, & b, & c, & \ldots & m, & n, & \\ \frac{x}{y} & \frac{1}{0}, & \frac{v}{1}, & \frac{av+1}{a}, & \frac{(ab+1)v+b}{ab+1}, & \ldots & \frac{M}{P}, & \frac{N}{Q}, & \frac{nN+M}{nQ+P}. \end{array}$$

Dann wird ein abgekürzter Algorithmus für $\frac{x}{y}$ eingeführt wie folgt:

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{(v)}{1}, \quad \frac{(v,a)}{a}, \quad \frac{(v,a,b)}{(a,b)}, \quad \frac{(v,a,b,c)}{(a,b,c)}, \quad \frac{(v,a,b,c,d)}{(a,b,c,d)} \text{ etc.,}$$

wo $(v,a) = a(v) + 1$; $(v,a,b) = b(v,a) + (v)$; $(v,a,b,c) = c(v,a,b) + (v,a)$

$$(a) = a1 + 0; \quad (a,b) = b(a) + 1; \quad (a,b,c) = c(a,b) + (a).$$

Euler teilt ferner mit, daß er folgende Transformationen bewiesen habe:

$$\begin{aligned} (v,a,b,c,d,e) &= v(a,b,c,d,e) + (b,c,d,e) \\ (v,a,b,c,d,e) &= (v,a)(b,c,d,e) + v(c,d,e) \\ (v,a,b,c,d,e) &= (v,a,b)(c,d,e) + (v,a)(d,e) \\ (v,a,b,c,d,e) &= (v,a,b,c)(d,e) + (v,a,b)(e). \end{aligned}$$

Durch diese Formeln kann man sich die Berechnung beinahe der Hälfte der Näherungsbrüche ersparen. Sind nämlich $v, a, b, c, c, b, a, 2v$ die Indizes einer Periode und nimmt man mit Euler als bewiesen an, daß $(a,b,c) = (c,b,a)$ und bezeichnet die Näherungsbrüche durch x_1/y_1, x_2/y_2, $\ldots$, x_8/y_8, wo $x_1/y_1 = \frac{1}{0}$ ist, so erhält man $x_8 = x_5 y_5 + x_4 y_4$, $y_8 = y_5^2 + y_4^2$, wo $x_5 = (v,a,b,c)$, $x_4 = (v,a,b)$, $y_5 = (a,b,c) = (c,a,b)$, $y_4 = (a,b) = (b,a)$. Man braucht x_6, x_7 und y_6, y_7 gar nicht zu berechnen[1]).

Es wird nun gezeigt, daß

$$\begin{array}{lll} \text{wenn} \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} & \text{dann} & x^2 = zy^2 + 1, \\ \quad ,, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = (v) \\ y = (1) \end{array} \right\} & ,, & x^2 = zy^2 - \alpha, \\ \quad ,, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = (v,a) \\ y = (a) \end{array} \right\} & ,, & x^2 = zy^2 + \beta, \end{array}$$

---

1) H. Konen, a. a. O., S. 56, hebt hervor, daß diese abgekürzte Methode von G. W. Tenner (Programm Merseburg 1841) unabhängig ausgearbeitet und von einigen Schriftstellern ihm zugeschrieben worden ist.

$$\text{wenn} \begin{cases} x = (v, a, b) \\ y = (a, b) \end{cases} \text{dann } x^2 = zy^2 - \gamma,$$

$$\text{,,} \quad \begin{cases} x = (v, a, b, c) \\ y = (a, b, c) \end{cases} \text{,,} \quad x^2 = zy^2 + \delta,$$

$$\text{,,} \quad \begin{cases} x = (v, a, b, c, d) \\ y = (a, b, c, d) \end{cases} \text{,,} \quad x^2 = zy^2 - \varepsilon$$

etc.

Wird nun einer der Buchstaben β, δ etc. $= 1$, so hat man eine Auflösung der Gleichung $x^2 - zy^2 = 1$. Aber keiner dieser Buchstaben kann ± 1 werden, wenn nicht zugleich der entsprechende Index $2v$ wird. Wenn deshalb irgend eine Periode, die wir in der Anordnung der Indizes finden, den Wert $2v$ enthält und wir x und y den Näherungswerten, welche der ersten Periode entsprechen, gleichstellen, erhalten wir $x^2 = zy^2 + 1$ unter der Bedingung, daß die Anzahl der Indizes in einer Periode gerade ist, und $x^2 = zy^2 - 1$, wenn diese Anzahl ungerade ist. Im ersteren Falle haben wir direkt die gesuchte Lösung; im letzteren Falle soll man entweder zwei Perioden weiter gehen, wo der Index $2v$ gerade ist und für x und y die Näherungswerte in der dritten Periode wählen, oder man soll $p = 2x^2 + 1$ und $q = 2xy$ setzen. Dieses Verfahren liefert auf bequeme Weise die kleinsten Lösungen von $x^2 - zy^2 = 1$. Da aber nirgends bewiesen ist, daß der Index $2v$ notwendig vorkommt, ist man nicht sicher, daß die Gleichung außer $x = 1$ und $y = 0$ wirklich Lösungen hat. Der englische Zahlentheoretiker H. J. S. Smith drückt sich über diese Abhandlung so aus: „Euler beobachtete, daß $\frac{p}{q}$ notwendigerweise ein Näherungswert von $\sqrt{z}$ ist, weshalb es genügt, um die Zahlen p und q zu erhalten, $\sqrt{z}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln. Es ist aber sonderbar, daß ihm die Notwendigkeit nie eingefallen ist, zur Vervollständigung der Theorie zu beweisen, daß die Gleichung auch immer auflösbar sei und daß durch die Entwicklung von $\sqrt{z}$ alle Lösungen gegeben seien. Sein Memoir enthält alle für den Beweis nötigen Elemente; hier aber, wie in anderen Stellen, ist Euler mit einer Induktion ohne strengen Beweis zufrieden"[1]).

Dieser Aufsatz Eulers enthält zwei Tafeln. Die erste gibt die Entwicklung aller Zahlen unter 121, mit Ausnahme der Quadratzahlen, in Kettenbrüchen an; die zweite enthält für jeden nicht

---

[1]) H. J. S. Smith, British Assn. Report 1861, p. 315 = Collected works, Vol. I, Oxford 1894, p. 192.

quadratischen Wert von z zwischen 1 und 100 den kleinsten Wert von x und y, welcher eine Lösung der Gleichung $x^2 - zy^2 = 1$ ist.

In dem Aufsatze Quomodo numeri praemagni sint explorandi, utrum sint primi, nec ne[1]) fährt Euler mit der Betrachtung der Primzahlen fort und entwickelt Methoden zur Entscheidung, ob eine Zahl von der Form $4n + 1$ prim ist oder nicht.

Wie früher (Bd. III[2], S. 617, 618, 719—721) klar gemacht wurde, verdankt man Euler die ersten Arbeiten über analytische Zahlentheorie. Dieser Gegenstand wird nun in der Abhandlung De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas[2]) fortgesetzt. Aus seinen Ergebnissen heben wir nur hervor, daß er mit Hilfe der erzeugenden Funktion $1/(1 - x^a y^\alpha)(1 - x^b y^\beta)(1 - x^c y^\gamma)(1 - x^d y^\delta)$ etc. und der erzeugten Reihe $1 + Ax^{\cdot}y^{\cdot} + Bx^{\cdot}y^{\cdot} + Cx^{\cdot}y^{\cdot} +$ etc. die Folgerung zieht, daß, wenn darin ein Glied $Nx^n y^\nu$ vorkommt, es N Lösungen der simultanen Gleichungen $ap + bq + cr$ etc. $= n$, $\alpha p + \beta q + \gamma r$ etc. $= \nu$ gibt, wenn aber dieses Glied fehlt, keine positiven ganzzahligen Werte für p, q, r etc. existieren. Die Entscheidung über die Anzahl Lösungen solcher Gleichungen ist somit auf das Studium der Koeffizienten N von $x^n y^\nu$ zurückgeführt. Euler bemerkt, daß vormals Lösungen durch die regula virginum[3]) erhalten wurden.

In einer Abhandlung, Observationes variae in mathesin puram[4]), teilt J. H. Lambert unter anderem Sätze über rekurrierende Dezimalbrüche mit. Er beweist, daß bei teilerfremden Zahlen eine Division mit einer Primzahl, außer 2 oder 5, stets einen periodischen Dezimalbruch liefert, und daß alle periodischen Dezimalbrüche aus rationalen Brüchen entspringen, weshalb keine irrationale Größe durch einen periodischen Bruch dargestellt werden kann. In seinen Adnotata quaedam de numeris eorumque anatomia[5]) setzt er diese Studien fort, gibt einen Beweis des schon früher von Leibniz und Euler bewiesenen Fermatschen Satzes und zieht daraus weitere Resultate. Ist a eine Primzahl, aber nicht $= 2$ oder 5, dann stellt $(10^{a-1} - 1) : a$ eine ganze Zahl dar; ist $(10^m - 1) : a$ eine ganze Zahl, dann ist entweder m durch $a - 1$ oder $a - 1$ durch m teilbar; weshalb g nicht prim sein kann, im Falle daß $\frac{1}{g}$ einen Bruch mit

[1]) N. Comm. Petr. XIII, 1768, p. 67—88 = Comm. Arith. I, p. 379.
[2]) N. Comm. Petr. XIV, I, 1769, p. 168—187 = Comm. Arith. I, p. 391.
[3]) Regula virginum = regula coecis = regula potatorum. Man sehe Chr. Peschecks Deutliche Erklärung derer Kaufmann- und öconomischen Rechnungen etc., Budissin 1759, S. 440. [4]) Acta Helvetica, Vol. III, Basileae 1758, p. 128—168. [5]) Nova Acta Eruditorum, Lipsiae 1769, p. 107—128.

$m$zahliger Periode liefert und $g-1$ durch m nicht teilbar ist. Lambert zieht auch die Folgerung, daß, wenn $g-1$ Periodenzahlen vorliegen und g ungerade ist, g prim sein muß. Setzt man $a=2m+1$, so ist $(10^m+1):a$ eine ganze Zahl q und $(10^{2m}-1):a=10^m q-q$. Ist m nicht prim, so kann man es durch einen gewissen seiner Faktoren ersetzen. Nimmt man $a=13$ und $m=3$, so wird $(10^3+1):13 = 77$, $77000-77=76923$, weshalb $\frac{1}{13}=0,076923,076923$ etc. Wenn a nicht prim ist und $\frac{1}{a}$ die Periodenzahl $2m$ gibt, dann haben a und 10^m+1 einen gemeinsamen Faktor. Es folgen dann einige ähnliche aber längere Sätze, die zur Entscheidung, ob eine Zahl prim sei oder nicht, Anwendung finden können. Mehrere derselben sind nicht nur auf Dezimalbrüche, sondern gleichzeitig auf Brüche anderer Systeme anwendbar. Die Auffindung der Teiler einer Zahl wird von Lambert auch in einem Briefe an Oberreit besprochen[1]).

Soweit ist Euler der einzige große Mathematiker des 18. Jahrhunderts, der sich eingehend mit der Zahlentheorie beschäftigt hat. Nun erscheint die erste Arbeit von Lagrange auf diesem Gebiete.

Am 20. September 1768 vollendete er in Berlin seine Abhandlung Solution d'un problème d'arithmétique[2]). Darin wird zum erstenmal ein strenger Beweis von der Lösbarkeit der Gleichung $x^2-ay^2=1$ gegeben. Er kannte zu dieser Zeit die Arbeiten von Wallis über dieses Problem, aber nicht diejenigen Eulers. Um zu zeigen, daß die Gleichung immer ganzzahlig lösbar ist, entwickelt er $\sqrt{a}$ in einen unendlichen Kettenbruch

$$\sqrt{a}=q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cdots}},$$

wo $q, q', q''\cdots$ ganzzahlig und positiv sind und erhält die Näherungsbrüche $\frac{1}{0}, \frac{m}{n}, \frac{M}{N}, \frac{m'}{n'}, \frac{M'}{N'}, \frac{m''}{n''}, \frac{M''}{N''}, \cdots$, worin $m=q$, $M=q'm+1$, $m'=q''M+m, \cdots$, $n=1$, $N=q'n$, $n'=q''N+n, \cdots$ und $\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}}>\sqrt{a}>\frac{m^{(r)}}{n^{(r)}}$, $r=0,1,2,\ldots$ Er zeigt, daß $M^{(r)2}-aN^{(r)2}=Z^{(r)}>0$ und $<\frac{2M^{(r)}}{N^{(r)}}$ ist, weshalb die unendliche Anzahl positiver, ganzzahliger Werte $Z, Z', Z'', \ldots$ nur eine endliche Anzahl untereinander verschiedener Zahlen darstellen. Auch hat man $m^{(r)2}-an^{(r)2}=z^{(r)}$,

[1]) J. H. Lamberts Deutscher gelehrter Briefwechsel Bd. II, Berlin 1782, S. 378—382; Bd. V, 1785, S. 323—325. [2]) Miscellanea Taurinensia, tome IV, 1766—1769 = Oeuvres de Lagrange, tome I, Paris 1867, p. 671—731.

wo $z^{(r)} < 0$ und $-z^{(r)} < \frac{2m^{(r)}}{n^{(r)}} + 1$, so daß $z, z^1, z^2, \ldots$ eine unendliche Anzahl ganzzahliger, negativer Zahlen sind, wovon wie oben die Anzahl verschiedener Werte endlich ist. Es gibt also unendlich viele Zahlen $x, x', \ldots$ und $y, y', \ldots$, welche die Gleichung $x^2 - ay^2 = R$ befriedigen, wo R irgend ein Wert $Z^{(r)}$ oder z^r ist. An dieser Stelle untersuchte nun Euler die Werte $Z^{(r)}, z^{(r)}$; Lagrange schlägt aber einen anderen Weg ein und benutzt das schon den Indern bekannte Lemma: Das Produkt von $x^2 - ay^2$ und $x'^2 - ay'^2$ ist $(xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2$. Man hat also

$$(A), \; R^2 = (xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2,$$

auch

$$(B), \; R(y'^2 - y^2) = (xy' + yx')(xy' - yx').$$

Ist nun R prim, so muß nach (B) entweder $xy' + yx'$ oder $xy' - yx'$ durch R teilbar sein; es sei $xy' \pm yx' = qR$, dann gibt (A),

$$R^2 = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2R^2,$$

und $xx' \pm ayy'$ ist durch R teilbar. Wenn $xx' \pm ayy' = pR$, so erfolgt sogleich $1 = p^2 - aq^2$. Für den Spezialfall, R prim, ist also die Lösbarkeit erwiesen. Dieses ist aber nur ein kleiner Teil der Untersuchung für den Fall, daß R und a teilerfremd sind. Gemeinteilige Werte von R und a sind einer besonderen Diskussion unterworfen. Die zwei Fälle bieten bedeutende Schwierigkeiten dar; der Beweis, daß $x^2 - ay^2 = 1$ (wo a keine Quadratzahl ist) lösbar ist, wird aber allgemein erzwungen. Zu gleicher Zeit ist das Verfahren, eine Lösung zu finden, angedeutet.

Der zweite Schritt besteht darin, aus der kleinsten Lösung von $x^2 - ay^2 = 1$ alle anderen abzuleiten. Ist p, q ein Wertpaar, so wird

$$1 = (p^2 - aq^2)^m = (p + \sqrt{a}q)^m (p - \sqrt{a}q)^m = (x + \sqrt{a}y)(x - \sqrt{a}y),$$

und

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2}$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}}.$$

Setzt man nun $m = 1, 2, 3, \ldots$, so hat man eine unendliche Anzahl Lösungen. Es folgt der Beweis, daß, wenn p und q die kleinsten Lösungen sind, $m = 2$ die nächst größeren liefert usw., so daß in obigen Ausdrücken für x und y alle Lösungen eingeschlossen sind.

Der dritte Schritt ist der Beweis, daß alle Werte von x und y, welche der Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$ genügen, unter den Zahlen

$M, M', \ldots$ und $N, N', \ldots$ zu finden sind, daß also $\frac{x}{y}$ immer einer der Näherungsbrüche ist. Es wird nämlich gezeigt, daß die Annahme $M^{(r)} < p < M^{(r+1)}$, $N^{(r)} < q < N^{(r+1)}$ auf einen Widerspruch führt. Daraus stammt eine zweite Lösungsmethode, der zufolge man die Näherungsbrüche für $\sqrt{a}$ berechnet und nacheinander die Zähler für x und die Nenner für y setzt. Eine unendliche Anzahl dieser Zähler und Nenner werden der Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$ genügen.

Lagrange ließ seiner am 20. September 1768 vollendeten Lösung der Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$ bald eine noch wichtigere Schrift folgen. Schon am 24. November gleichen Jahres legte er der Berliner Akademie die neue Abhandlung Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré[1]) vor. Es wird hier die unbestimmte Gleichung $A = u^2 - Bt^2$, die obige als Spezialfall einschließt, gelöst. Aus der Einleitung geht hervor, daß nun Lagrange die zwei Abhandlungen Eulers über diese Sache in den Petersburger Kommentarien der Jahre 1738 und 1764 gelesen hatte, aber Eulers De usu novi algorithmi des Jahres 1765 noch immer nicht kannte. Lagrange betont die Wichtigkeit der Gleichung $A = u^2 - Bt^2$, indem er zeigt, daß jede Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten auf diese Form reduziert werden kann. Er liefert zuerst die Auflösung dieser Gleichung, wenn u und t ganze oder gebrochene Zahlen sein können, dann die wichtigere Auflösung, wenn u und t ganze Zahlen sein sollen. In der letzteren Auflösung wird zuerst bemerkt, daß, wenn A einen quadratischen Faktor ϱ^2 hat, man $u = \varrho p$, $t = \varrho q$, $A = \varrho^2 a$ setzen kann, wodurch die vorgelegte Gleichung in die Form $a = p^2 - Bq^2$ übergeht, wo p und q teilerfremd sind. Wenn man alle möglichen teilerfremden Werte von p und q in $a = p^2 - Bq^2$ findet, so kann man daraus mittels $u = \varrho p$, $t = \varrho q$ alle überhaupt vorhandenen Lösungen von $A = u^2 - Bt^2$ herleiten. Es sei also die Gleichung $A = p^2 - Bq^2$ vorgelegt, in der p und q ganze teilerfremde Zahlen sein sollen. Man hat zwei Fälle, B positiv und B negativ. Für den Fall B positiv und zugleich $A > \sqrt{B}$, multipliziere man $A = p^2 - Bq^2$ mit $A_1 = p_1{}^2 - Bq_1{}^2$, wo $pq_1 - p_1 q = \pm 1$ und $\alpha \equiv pp_1 - Bqq_1$ angenommen wird. Man erhält $AA_1 = \alpha^2 - B$. Nun sei $\frac{m}{n}$ der in der Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$ dem $\frac{p}{q}$ unmittelbar vorausgehende Näherungsbruch, dann wird

[1]) Mém. de l'académie roy. des sciences, année 1767, Berlin 1769, p. 165 bis 310 = Lagrange, Oeuvres, Tome II, Paris 1868, p. 377—535. Vgl. Nettos Ausgabe, Ostwalds Klassiker Nr. 146, Leipzig 1904.

$p_1 = \mu p \pm m$, $q_1 = \mu q \pm n$, wo μ irgend welche ganze Zahl sein kann. Es folgt $\alpha = \mu(p^2 - Bq^2) \pm (pm - Bqn) = \mu A \pm a$, wenn $a \equiv mp - Bqn$ ist. Man kann $\alpha < \frac{A}{2}$ machen, und es wird $A_1 < \frac{A}{4}$. Es muß dann $\alpha^2 - B$ durch A teilbar sein und einen Quotienten von der Form $p_1{}^2 - Bq_1{}^2$ liefern, sonst ist die vorgelegte Gleichung unlösbar. Gibt es dagegen eine solche Zahl, so hat man eine neue Gleichung $A_1 = p_1{}^2 - Bq_1{}^2$ aufzulösen, wo $A_1 < A$ ist. Ist letztere Gleichung lösbar, so kann man aus den bekannten Werten von p_1 und q_1 die Werte von p und q durch die Gleichungen $\alpha = pp_1 - Bqq_1$ und $pq_1 - p_1q = \pm 1$ bestimmen. Sind p und q ganze Zahlen, dann ist die vorgelegte Gleichung lösbar; sonst nicht. Um alle Lösungen zu erhalten, muß man alle Zahlen α aufsuchen, die $< \frac{A}{2}$ sind, und $\alpha^2 - B$ durch A teilbar machen. Auch muß jede der entstehenden Gleichungen $A_1 = p_1{}^2 - Bq_1{}^2$ einzeln untersucht werden. Es wird dann erklärt, wie man aus einem den Bedingungen genügenden Werte von α alle anderen bestimmen kann. Es stellt sich heraus, wenn die Anzahl teilerfremder Faktoren von A, die Primzahlen oder Primzahlpotenzen sind, gleich n ist, daß die Anzahl der Werte von α gleich 0 oder gleich 2^{n-1} ist. Unter Faktoren mit gemeinsamen Teilern braucht man nur solche zu nehmen, deren größter gemeinschaftlicher Teiler 2 ist. Es wird ferner die Gleichung $A_1 = p_1{}^2 - Bq_1{}^2$ genau so behandelt, wie es bei $A = p^2 - Bq^2$ der Fall war. Ihre Lösung wird auf $A_2 = p_2{}^2 - Bq_2{}^2$ zurückgeführt, letztere auf $A_3 = p_3{}^2 - Bq_3{}^2$ etc. Kann man nun irgend eine dieser Gleichungen lösen, etwa $A_n = p_n{}^2 - Bq_n{}^2$, so kann man zu Werten p und q aufsteigen, welche die vorgelegte Gleichung lösen. Es wird dann die Gleichung $A_n = p_n{}^2 - Bq_n{}^2$ einer eingehenden Untersuchung unterworfen, worin die Kettenbrüche wieder eine hervorragende Rolle spielen, und alles darauf zuspitzt, ein Glied einer Reihe $E, E_1, \ldots$ zu finden, das gleich eins wird. Es ergibt sich endlich, daß $A = p^2 - Bq^2$ bei positivem B, wenn sie überhaupt lösbar ist, eine unendliche Anzahl von Lösungen hat. Der Fall, wo B negativ ist, wird leichter gefunden. Die ganze Abhandlung ist die erste vollständige und strenge Auflösung von unbestimmten Gleichuugen zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch ganze Zahlen. Wie schon bemerkt, tritt die von Lagrange in seiner ersten zahlentheoretischen Abhandlung gelöste Gleichung $\pm 1 = r^2 - Bs^2$, hier als ein Spezialfall auf. Lagrange sagt nun darüber: „Die eben gegebene Methode ist direkter und einfacher; zudem hat sie noch den Vorzug, zu zeigen, daß die gegebene Gleichung für jedes B lösbar ist. Dies konnte ich damals nur auf einem ziemlich großen Umwege dartun.“ Am Schlusse der Abhandlung wird auch die

Fermatsche Unmöglichkeit $r^n + s^n = q^n$, $n > 2$ berührt, ohne jedoch zu den Eulerschen Ergebnissen etwas beizutragen.

Lagrange verfaßte 1770 eine dritte Schrift über die Auflösung von unbestimmten Gleichungen, betitelt Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers[1]) worin er Methoden entwickelt, welche auf Gleichungen höherer Grade anwendbar sind und die Behandlung der Gleichung zweiten Grades, die er in zwei früheren Abhandlungen auseinandersetzte, bedeutend vereinfachen. Die Theorie der Kettenbrüche, wie er sie in dem Mémoire sur la résolution des équations numériques und in den Additions dazu entwickelt hatte, findet hier Anwendung. Die Transformation von $A = Bt^n + Ct^{n-1}u + Dt^{n-2}u^2 + \cdots + Ku^n$, wo alle Koeffizienten ganze Zahlen und A und u teilerfremd sind, in die Gleichung $1 = Pu^n + Qu^{n-1}y + \cdots Vy^n$ wird durch die Annahme $t = u\theta - Ay$ (θ und y ganzzahlig) erzielt. Die Berechnung von θ, erfolgt durch die von ihm schon früher angewandte Differenzmethode[2]). Sind u und y in der transformierten Gleichung ganze Zahlen, so müssen $P, Q, \ldots V$, sowie u und y selbst, teilerfremd sein. Man setze $x = \frac{u}{y}$ und es wird $Px^n + Qx^{n-1} + \cdots + V = y^{-n} = z$. Wenn $z = 0$, so drücke man eine positive Wurzel a mit Hilfe zweier Reihen von Konvergenzwerten aus, welche die Kettenbruchentwicklung liefert. In der ersten Reihe sind alle Bruchwerte größer, in der zweiten Reihe alle kleiner als die entsprechende Wurzel a. Es folgt dann der Nachweis, daß unter den Brüchen der einen oder der anderen Reihe sich der Bruch $\frac{u}{y}$ vorfindet, und daß man auf diese Weise alle ganzzahligen Werte von u und y aufsuchen kann. Die Operation, welche den Kettenbruch für die Berechnung von a hervorbringt, liefert also zu gleicher Zeit die Zahlen u und y. Die Auflösungen bestimmter und unbestimmter Gleichungen können demnach durch das gleiche Werkzeug, die Kettenbrüche, erledigt werden. Nachdem die Einzelheiten ausgearbeitet sind, schreitet Lagrange zur Anwendung seiner Ergebnisse auf unbestimmte Gleichungen des ersten und zweiten Grades. Seine jetzige Methode der Auflösung von $A = t^2 - \Delta u^2$ nennt er „très-simple et très-élégante", seine frühere „à la vérité un peu longue et compliquée".

Lagrange gesteht, daß seine arithmetischen Abhandlungen ihm viel Mühe gekostet hätten. Am 15. August 1768 schreibt er an

---

[1]) Mém. de l'acad. roy. des sciences, tome XXIV, année 1768, Berlin 1770, p. 181—250 = Lagrange, Oeuvres, tome II, p. 655—726. [2]) Mémoire sur la résolution des équat. num., scolie du no. 13.

D'Alembert[1]): „Ich versichere Ihnen, daß ich viel mehr Schwierigkeiten gefunden habe, als ich vermutet hätte. Hier ist z. B. eine, welche ich nicht ohne große Anstrengung habe überwinden können: Es sei irgend eine ganze, positive, nicht-quadratische Zahl n gegeben, eine ganze Quadratzahl x^2 zu finden, so daß nx^2+1 ein Quadrat wird. Dieses Problem ist von großer Wichtigkeit in der Theorie von Quadratzahlen, die der Hauptgegenstand der diophantischen Analysis ist.“ In späteren Briefen drückt er sich ähnlich aus[2]).

Es ist ein merkwürdiger Umstand, daß L. Euler und Lagrange in der Theorie der unbestimmten Gleichungen einander wenig beeinflußten. Wie schon bemerkt, kannte Lagrange die wichtigste Arbeit Eulers nicht. Als Lagrange seine Schriften veröffentlichte, war Euler blind. Am 9./20. März 1770 schrieb er an Lagrange[3]): „Ich ließ mir alle Operationen vorlesen, die Sie über die Formel $1=p^2-13q^2$ vorgenommen, und ich bin von ihrer Richtigkeit völlig überzeugt; da ich aber nicht selber lesen und schreiben kann, muß ich Ihnen gestehen, daß meine Einbildungskraft nicht die Grundlage aller Ihrer Ableitungen hat fassen und die Bedeutung aller Buchstaben, die Sie eingeführt haben, nicht im Gedächtnis hat halten können.“ So fuhr Euler mit seinen eigenen Untersuchungen fort, ohne die Arbeiten Lagranges genau zu kennen. Am 30. September 1771 schrieb Lagrange an Condorcet[4]): „Sie sind, glaube ich, der Einzige, der mir diese Ehre erwiesen hat“ (seine Arbeiten zu lesen).

Die unbestimmte Analytik wird im zweiten Teile von L. Eulers Anleitung zur Algebra, 1770, behandelt. Die Popularität dieses Werkes unter Fachmännern ist hauptsächlich diesem zweiten Teile zuzuschreiben[5]). Eulers Interesse scheint sich in der Zahlentheorie konzentriert zu haben, denn er widmet derselben 322 Seiten, während alle anderen Zweige der Algebra nur 560 Seiten erhalten. Euler fängt mit sehr einfachen, beinahe kindlichen Beispielen von unbestimmten Aufgaben an. Im 2. Kapitel werden Fragen angeführt, die in gemeinen Rechenbüchern damaliger Zeit nach der „Regel-Coeci“ aufgelöst wurden. Z. B., „30 Personen, Männer, Weiber und Kinder, verzehren in einem Wirths-Hauss 50 Rthl. Daran zahlt ein Mann 3 Rthl., ein Weib 2 Rthl. und ein Kind 1 Rthl., wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?“ Im 4. und 5. Kapitel löst Euler die Gleichung $a+bx+cx^2=y^2$. In der Behandlung von $ax^2+b=y^2$,

[1]) Lagrange, Oeuvres, T. 13, p. 118. [2]) Ebenda, T. 13, p. 121, 301. [3]) Ebenda, Tome 14, p. 219. [4]) Ebenda, T. 14, p. 4. [5]) Lagrange schrieb am 26. August 1770 an D'Alembert: „Elle ne contient rien d'intéressant qu'un Traité sur les questions de Diophante, qui est, à la vérité, excellent“ (Lagrange, Oeuvres, T. 13, p. 181, 191).

im 6. Kapitel, ist er von Lagranges Untersuchungen nicht beeinflußt worden und die Auflösung ist unvollständig. Es „ist unumgänglich nötig", sagt Euler, „daß man schon einen Fall in ganzen Zahlen wisse oder errathen habe". Merkwürdig ist es, daß er im nächsten Kapitel für die Fermatsche Gleichung $an^2 + 1 = m^2$ nicht seine eigene, in seiner Schrift De usu novi algorithmi 1765 entwickelte Methode, sondern die Auflösungsmethode von Wallis darstellt. Die drei folgenden Kapitel enthalten Lösungen von

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = y^2, \quad a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = y^2,$$
$$a + bx + cx^2 + dx^3 = y^3.$$

Im 13. Kapitel wird bewiesen, daß weder die Summe, noch die Differenz zweier Biquadraten jemals eine Quadratzahl werden könne. Die Unmöglichkeit dieser Fermatschen Sätze und mehrerer ähnlicher diophantischer Ausdrücke wird dadurch nachgewiesen, „daß wann auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinern usf., da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind ... so kann mann sicher schließen, daß auch in größern ... keine solche Werthe von x und y vorhanden seyn können". Im 15. Kapitel wird die Fermatsche Unmöglichkeit $x^3 + y^3 = z^3$ nachgewiesen.

Der gegenwärtige Zeitpunkt (um 1770) ist in der unbestimmten sowohl als in der bestimmten Gleichungstheorie durch große schöpferische Tätigkeit gekennzeichnet. Während Euler und Lagrange die schon besprochenen Arbeiten hervorbrachten, war auch Waring in England tätig. In seinen Meditationes algebraicae, 1770, werden einige neue zahlentheoretische Sätze angegeben. Ohne Beweis gibt er folgende Theoreme an[1]): „Jede ganze Zahl ist entweder eine Kubikzahl oder die Summe von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 Kubikzahlen[2]); entweder eine Biquadrate, oder die Summe von 2, 3 etc. oder 19 Biquadraten." Der Beweis hiervon läßt noch immer auf sich warten. An anderer Stelle schreibt Waring ohne Nachweis hin[3]): „Jede gerade Zahl ist die Summe zweier Primzahlen, und jede ungerade Zahl ist eine Primzahl oder die Summe von drei Primzahlen." Der Satz über gerade Zahlen ist allgemein als der „Goldbachsche Erfahrungssatz" bekannt, wurde aber zuerst von Waring gedruckt. Goldbach[4]) teilte

---

[1]) Medit. algebraicae, 3. Ed. 1782, p. 349. [2]) Vgl. C. G. J. Jacobi, Ges. Werke, Bd. VI, S. 322—354. [3]) Medit. algebraicae, 3. Ed. 1782, p. 379. [4]) Corresp. math. (Fuß) I, p. 127, 135. Vgl. Nouvelles Annales, T. 18, 1859; Bull. de Bibl., D'Hist. p. 2.

ihn 1742 Euler brieflich mit (Bd. III, 2. Aufl., S. 610), die Korrespondenz wurde aber erst 1843 veröffentlicht. An gleicher Stelle[1]) führt Waring ohne Beweis noch andere Lehrsätze über Primzahlen an: Bilden drei Primzahlen eine arithmetische Progression, dann ist ihre Differenz durch 6 teilbar, wenn nicht 3 eine der drei Primzahlen ist. Ein ähnlicher Satz lautet: Sind fünf Primzahlen in arithmetischer Progression, dann ist die Differenz durch 30 teilbar, wenn nicht 5 ein Glied der Progression ist. Und im allgemeinen: Es haben 3, 5, 7, 11, 13 oder 17 etc. Primzahlen in arithmetischer Progression Differenzen, die bezüglich durch $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, oder $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$, etc. teilbar sind, wenn nicht bezüglich 3, 5, 7, 11, 13 oder 17 etc. ein Glied der Progression ist.

Der berühmteste der neuen Sätze, die Waring anführt, ist folgender[2]): „Ist n eine Primzahl, dann wird

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots (n-2) \times (n-1) + 1}{n}$$

eine ganze Zahl“. Er fügt dann hinzu: „Diese sehr elegante Eigenschaft von Primzahlen hat der ausgezeichnete, in mathematischen Sachen weit bewanderte Joannes Wilson Armiger entdeckt .... Der Nachweis von Sätzen dieser Art wird deshalb sehr schwer sein, weil keine Notation erfunden ist, welche Primzahlen ausdrückt.“ Im Werke von Waring erscheint also der berühmte Wilsonsche Satz ohne Demonstration[3]). Sir John Wilson[4]) (1741—1793) wurde in Westmoreland geboren, besuchte Peterhouse College in Cambridge und hatte schon als Student den Ruf, auf der Universität nächst Waring der beste Algebraist zu sein. Im Jahre 1761 war er „senior wrangler“. Eine Zeitlang war er Tutor der Mathematik, dann widmete er sich der Rechtswissenschaft. Er wurde 1786 zum Ritter ernannt. Waring führt ihn in seinen Werken öfters an. In seinen Meditationes analyticae nennt er ihn seinen einstmaligen Beschützer, und als den Mann, von dem er in seinen mathematischen Untersuchungen den größten Beistand erhalten habe.

Der Artikel Démonstration d'un théorème d'arithmétique[5])

---

[1]) Medit. algebr., 3. Ed., p. 379. [2]) Ebenda, 1770, p. 218, 3. Ed., p. 380. [3]) Eine Angabe von W. W. R. Ball (Mathematics at Cambridge, 1889, p. 102), derzufolge Waring den Satz vor 1770 in einer Antwort auf eine Kritik der Miscellanea analytica gedruckt haben soll, beruht auf einem Irrtum, wie mir Herr Ball brieflich mitteilt. [4]) Dictionary of National Biography; De Morgan, A Budget of Paradoxes, London 1872, p. 132; Nouvelle correspondance mathématique 2, 1876, p. 110—114, 32—34; Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. 3, p. 412, und Bd. 4, 1903, p. 91. [5]) N. Mémoires de l'acad. roy. des

enthält den Lagrangeschen Beweis des von Diophant an einigen Stellen stillschweigend vorausgesetzten und von Bachet zuerst ausgesprochenen Satzes, daß jede Zahl als Summe von vier oder weniger Quadraten dargestellt werden kann. Sich auf einige Resultate Eulers stützend, zeigt Lagrange, daß, wenn die Summe von vier Quadraten durch eine Primzahl größer als die Quadratwurzel dieser Summe teilbar ist, diese Primzahl selbst die Summe von vier Quadraten ist. Eine oder zwei der Quadrate im Dividend dürfen auch Null sein. Dann wird bewiesen, daß p und q so gewählt werden können, daß $p^2 + q^2 + 1$ durch irgend eine vorgelegte Primzahl teilbar wird. Dadurch ist der Bachetsche Satz für Primzahlen sicher gestellt. Aus dem Eulerschen Theorem, daß das Produkt von zwei oder mehreren Zahlen, deren jede die Summe von vier Quadraten ist, selbst die Summe von vier Quadraten ist, kann dieses Ergebnis leicht auf jede zusammengesetzte Zahl ausgedehnt werden.

Eine interessante Leistung ist die Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers[1]), worin Lagrange zwei Beweise des von Waring veröffentlichten und von seinem Freunde John Wilson entdeckten Lehrsatzes über Primzahlen gibt. Der erste Nachweis beruht auf Eigenschaften der Koeffizienten der gleichen Potenzen von x in

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)\cdots(x+n) &= (x+1)^n + A'(x+1)^{n-1} + \cdots A^{(n-1)}(x+1)\\ &= x^n + (n+A')x^{n-1} + (nA' + A'')x^{n-2} + \cdots + nA^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Daraus zieht Lagrange auch einen Beweis des Fermatschen Satzes. In dem zweiten Beweise wird umgekehrt der Fermatsche Satz vorausgesetzt und davon der Wilsonsche abgeleitet. Es folgen dann die Beweise der zwei ersten von uns angeführten Sätze von Waring über Primzahlen in arithmetischer Progression.

Ohne von den Untersuchungen Lamberts Kenntnis zu haben, veröffentlichte Johann Bernoulli III. (1744—1807) einen Aufsatz Sur les fractions décimales périodiques[2]), worin er nach einer summarischen Übersicht der Arbeiten von Wallis, Euler und John Robertson Bemerkungen über die am Ende seines Aufsatzes gedruckte Tafel macht. Diese Tafel enthält die Perioden aller aus $\frac{1}{D}$ entspringenden Dezimalbrüche, wo D nacheinander alle Primzahlen außer 2 und 5 bis 199 vorstellt. Die Ziffern in einer Periode

---

sciences de Berlin, année 1770, Berlin 1772, p. 123—133 = Lagrange, Oeuvres, Tome III, 1869, p. 189—201.

[1]) N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences Berlin, année 1771, Berlin 1773, p. 125—137 = Lagrange, Oeuvres, Tome III, p. 425—438. [2]) Ebenda, année 1771, Berlin 1773, p. 273—304.

liefert $\frac{10^s - 1}{D}$, wo s die kleinste ganze Zahl ist, welche $10^s - 1$ durch D teilbar macht. Es sei ihm nicht gelungen, das Gesetz für die Bestimmung des s aufzufinden, weshalb seine Tabelle wertvoll sein dürfte. In der Fortsetzung derselben könnte man sich vielleicht durch Anwendung der von Rallier des Ourmes[1]) vorgeschlagenen Divisionsmethode Zeit ersparen, welche, wenn man zum voraus weiß, daß die Division ohne Rest herauskommt, den Quotienten durch eine von rechts nach links fortschreitende Operation liefert. Bernoulli beobachtete, daß, wenn bei der Division von 1 mit D einer der Reste $D - 1$ ist, dieser der $\frac{s}{2}^{\text{te}}$ Rest ist. Dann folgen einige Beobachtungen über Brüche, worin D das Produkt zweier Primzahlen ist. Lambert machte den Bernoulli auf seine eigenen Arbeiten der Jahre 1758 und 1769 über diese Sache aufmerksam, worauf Bernoulli in Additions au mémoire précédent[2]) eine Übersicht derselben gab und sie mit einigen Bemerkungen über die Fortsetzung seiner Tafeln begleitete.

Mit den eben besprochenen Abhandlungen eng verbunden ist die folgende von Johann Bernoulli III.: Recherches sur les diviseurs de quelques nombres très grands compris dans la somme de la progression géométrique $1 + 10' + 10^2 + 10^3 + \cdots 10^T = S$.[3]) Er zeigt, daß diese Frage sich auf die Bestimmung der primen Teiler von $10^t \pm 1$ reduziert. Er stützt sich auf Theoreme Eulers[4]) und berechnet eine Tabelle, welche die primen Teiler von S, für die Werte $1, 2, \ldots, 30$ von t angibt. Auch tabelliert er Primzahlen von der Form $16n + 1$, bis auf die Primzahl 21601, sowie Primfaktoren von Zahlen der Form $a^2 + 10b^2$. Diese Abhandlung wurde von Euler gelesen und er teilte Bernoulli brieflich Kriteria mit[5]), die zur Entscheidung dienen, welche der Zahlen, $10^p - 1$ oder $10^p + 1$, durch eine Primzahl $2p + 1$ teilbar sei. Ist $2p + 1 = 4n \pm 1$, so braucht man nur die Teiler der drei Zahlen n, $n \mp 2$, $n \mp 6$ zu betrachten. Wenn man bei diesen die zwei Faktoren 2 oder 5 oder keine derselben findet, ist $10^p - 1$ teilbar; findet man aber nur den Faktor 2 oder den Faktor 5, ist $10^p + 1$ teilbar. Ist z. B. $n = 13$, $2p + 1 = 53$, dann sind keine der Faktoren bei 13, 11, 7

1) Mémoires de math. et phys., présentés à l'acad. roy. des sciences, par divers savans, T. V, 1768, p. 550—574. 2) N. Mémoires de l'acad. roy. des scien. et b. l., année 1771, Berlin 1773, p. 305—317. 3) Ebenda, année 1771, Berlin 1773, p. 318—337. 4) Comm. Petr. T. XIV, Theo. 31; N. Comm. Petr. T. I, § 38, T. VII, Theo. 13, § 57, T. VIII, T. IX, § 5 u. 6; Lagrange in einer damals noch ungedruckten Arbeit. 5) N. mémoires de l'acad roy. des sciences, année 1772, Berlin 1774, p. 35, 36 = Comm. Arith. I, p. 584.

vorhanden, und $10^{26}-1$ ist durch 53 teilbar. Euler bemerkt, daß diese Regeln auf Prinzipien beruhen, deren Nachweis noch mangelt. Die größte Zahl, von der man sicher weiß, daß sie Primzahl ist, sei die Fermatsche Zahl $2^{31}-1=2147483647$. Bemerkenswert sei der Ausdruck $41-x+x^2$, weil seine ersten 40 Zahlen alle prim seien.

L. Eulers Anleitung zur Algebra sollte in den späteren Auflagen drei große Namen mit sich tragen — Euler, Bernoulli, Lagrange. Im Jahre 1774 erschien nämlich zu Lyon eine von Johann Bernoulli III. besorgte französische Übersetzung mit Zusätzen von Lagrange. Diese Zusätze[1]) beziehen sich auf die unbestimmte oder diophantische Analysis. Die methodische Behandlung dieser Sache in Eulers Algebra suchte er durch neue Zusätze zu vervollständigen. Lagrange fängt mit Kettenbrüchen an und sucht seine 1767 und 1768 in den Berliner Abhandlungen entwickelte Theorie der periodischen Kettenbrüche den Mathematikern bekannt zu machen. Dann geht er zu neuen und wichtigen Methoden zur Bestimmung der ganzen Zahlen über, die Minima der unbestimmten Formen mit zwei Unbekannten ergeben. Die Auflösung unbestimmter Gleichungen zweiten Grades wird vereinfacht, aber in nicht ganz so vollständiger Form wie in seinen früheren Abhandlungen dargestellt. Betreffs der Fermatschen Gleichung $p^2=Aq^2+1$ sagt er in § VIII: „Ich glaube mithin der erste zu sein, der eine vollständig strenge Lösung gegeben hat; man findet sie in Band IV der Miscellanea societatis taurinensis; aber sie ist sehr umständlich und sehr indirekt; die vorstehend in Nr. 37 gegebene ist den wahren Grundsätzen der Frage gemäß und läßt, wie mir scheint, nichts zu wünschen übrig.“ Am Ende beschreibt Lagrange die Art, algebraische Funktionen aller Grade zu finden, die, miteinander multipliziert, stets ähnliche Funktionen erzeugen. Diese Zusätze trugen viel dazu bei, Lagranges Untersuchungen über unbestimmte Analysis dem mathematischen Publikum genauer bekannt zu machen.

Lagranges Zusätze übten auf Euler geringen Einfluß. In einem Briefe vom 24. September (5. Oktober) 1773 an Lagrange[2]) drückt er sich über dieselben anerkennend aus, schreitet aber sogleich zur eingehenden Besprechung seiner eigenen diophantischen Probleme. Daß der blinde und greise Mathematiker sich eine Lagrangesche Strenge der Beweise aneignen würde, dürfte wohl niemand erwarten. Euler arbeitete noch immer in seiner alten naiven Weise. Sein Arbeitsverfahren in der Zahlentheorie hat öfters mit der induktiven

[1]) Lagrange, Oeuvres, T. VII, Paris 1877, p. 158. Deutsche Übersetz. von H. Weber in Ostwalds Klassiker, Nr. 103, Leipzig 1898. [2]) Lagrange, Oeuvres, T. 14, p. 235.

Methode eines **Charles Darwin** größere Ähnlichkeit als mit der strengen Deduktion eines **Lagrange**. Und noch in seinen letzten Jahren sollte er durch einfache Induktion zur Entdeckung eines der größten Gesetze, nämlich des Reziprozitätsgesetzes, geführt werden.

Wir erwähnen nun sechs Abhandlungen L. **Eulers** über diophantische Probleme, die mit großer Geschicklichkeit und Unermüdlichkeit behandelt werden, aber wegen der Abwesenheit allgemeiner Methoden dennoch geringen Einfluß auf den Fortschritt der Zahlentheorie gehabt haben. Die erste derselben[1]) gibt die Auflösung, in rationalen Werten von A und B, der simultanen Gleichungen

$$AB + A + B = \square, \quad AB + A - B = \square, \quad AB - A + B = \square,$$
$$AB - A - B = \square.$$

Die zweite[2]) löst drei Aufgaben, deren eine die Auffindung von neun rationalen Zahlen verlangt, welche zwölf Gleichungen genügen. Die zwei anderen Aufgaben sind gleicher Natur. Die Auflösungen derselben beruhen auf eleganten Kunstgriffen in Koordinatentransformationen. Die dritte Abhandlung[3]) gibt die Auflösung (1) der simultanen Gleichungen

$$(x^2 + y^2)(t^2x^2 + u^2y^2) = \square, \quad (x^2 + y^2)(u^2x^2 + t^2y^2) = \square,$$

(2) der Gleichung

$$(t^2x^2 + u^2y^2)(u^2x^2 + t^2y^2) = \square,$$

(3) der simultanen Gleichungen

$$t^2x^2 + u^2y^2 = \square, \quad t^2y^2 + u^2x^2 = \square.$$

Die vierte Abhandlung[4]) löst unter anderem die simultanen Gleichungen

$$x + y + z + s = \square, \quad xy + xz + xs + yz + ys + zs = \square,$$
$$xyz + xys + xzs + yzs = \square, \quad xyzs = \square,$$

während die fünfte[5]) die Gleichung $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$ in rationalen sowie auch in ganzzahligen Werten erzielt. Die sechste Schrift ist geometrisch: Dreiecke zu finden, deren Seiten und Mittellinien rational sind[6]). Sind $2a$, $2b$, $2c$ die drei Seiten und f, g, h deren Mittellinien, dann fordert dieses Problem die Lösung der Gleichungen

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = f^2, \quad 2c^2 + 2a^2 - b^2 = g^2, \quad 2a^2 + 2b^2 - c^2 = h^2.$$

---

1) N. Comm. Petr. XV, 1770, p. 29—50 = Comm. Arith. I, p. 414. 2) N. Comm. Petr. XV, 1770, p. 75—106 = Comm. Arith. I, p. 427. 3) N. Comm. Petr. XX, 1775, p. 48 = Comm. Arith. I, p. 444. 4) N. Comm. Petr. XVII, 1772, p. 24—63 = Comm. Arith. I, p. 450. 5) N. Comm. Petr. XVII, 1772, p. 64—69 = Comm. Arith. I, p. 473. 6) N. Comm. Petr. XVIII, 1773, p. 171 = Comm. Arith. I, p. 507.

In dem Aufsatze Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia[1]) entwickelt L. Euler Lehrsätze über die bei Division einer Progression 1, a, a^2, a^3, ... durch eine Primzahl P erhaltenen Reste, und wird zur wichtigen Frage geführt, ob es geometrische Progressionen gibt, welche eine vollständige Reihe von Resten 1, 2, 3, ..., $P-1$ liefern. Die Zahlen a, welche dieses tun, werden primitive Wurzeln (radices primitivas) von P genannt. Euler hat keinen strengen Beweis von der Existenz solcher Zahlen gegeben. Ihr Vorhandensein voraussetzend, gelingt es ihm aber, ihre Anzahl genau zu bestimmen. In Gauß' Disquisitiones arithmeticae, Art. 56, wird Eulers Existenzbeweis angegriffen.

Der Eulersche Aufsatz Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata[2]) wurde durch den Lagrangeschen Beweis (1770) des Bachetschen Satzes hervorgerufen. Euler war weder mit seinem eigenen früheren Beweise, noch mit dem Lagranges zufrieden. Letzterer war zu „abstrusus et prolixus". Deshalb wird dieser Gegenstand aufs neue bearbeitet. Die Darstellung von Zahlen durch die Formen x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2+3y^2, $x^2+y^2+z^2+u^2$ wird auf die Eigenschaften von Divisoren dieser Ausdrücke gegründet, und Euler zeigt, daß das Produkt zweier solcher ähnlichen Funktionen eine ihnen ähnliche Funktion ist.

Eine durch die Irrationalentheorie erzielte Lösung der Gleichung[3]) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ darf ohne weitere Erklärungen übergangen werden, da Euler noch immer die Existenz einer Lösung voraussetzt. Die gleiche Voraussetzung wird von ihm auch noch in einer durch Kettenbrüche erlangten Auflösung dieser Gleichung gemacht[4]).

In der Schrift Problema diophanteum singulare[5]) löst L. Euler die simultanen Gleichungen $xy \pm xz = \square$, $xy \pm yz = \square$. Bald nachher beschäftigte sich Euler wieder mit Primzahlen und berechnete sich eine Tafel von Primzahlen bis zur Primzahl 1001989, sowie von zusammengesetzten Zahlen mit ihren kleinsten Divisoren[6]).

Über die Zerlegung von Zahlen in Summanden haben auch

[1]) N. Comm. Petr. XVIII, 1773, p. 85—135 = Comm. Arith. I, p. 516—537. [2]) Acta Erud. Lips. 1773, p. 193 = Acta Petrop. I, II, 1775, p. 48 = Comm. Arith. I, p. 538—548. [3]) N. Comm. Petr. XVIII, 1773, p. 185—197 = Comm. Arith. I, p. 549—555. [4]) N. Comm. Petr. XVIII, 1773, p. 218—244 = Comm. Arith. I, p. 570—583. [5]) N. Comm. Petr. XIX, 1774, p. 112—131 = Comm. Arith. II, p. 53—63. [6]) N. Comm. Petr. XIX, 1774, p. 132—183 = Comm. Arith. II, p. 64—91.

italienische Mathematiker geschrieben. Deren Schriften sind uns aber nicht zugänglich. Major P. A. MacMahon[1]) berichtet, daß Paoli (vor 1800?) und andere daran arbeiteten ohne große Fortschritte zu machen. Gianfrancesco Malfatti verfaßte einen Aufsatz[2]) Lotto, worin die „Soluzion d'un problema sulla partizione de' numeri" gegeben ist, welcher von Italienern hoch gepriesen wird[3]).

Nicolas de Beguelin (1714—1789), Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften, veröffentlichte Recherches sur les nombres triangulaires relativement au théorème général de Mr. Fermat concernant les nombres polygonaux[4]), worin er nachweist, daß $\frac{1}{2}(x^2+y)$ auf wenigstens zwei Weisen alle ganzen Zahlen N vorstellen kann, während $\frac{1}{2}(x^2+y)+\frac{1}{2}(y^2+z)$ dieses auf wenigstens vier Weisen und $\frac{1}{2}(x^2+y)+\frac{1}{2}(y^2+z)+\frac{1}{2}(z^2+u)$ wenigstens auf sechs Weisen erzielen kann. Der nächste Teil des Beweises, daß auch die drei Dreieckszahlen

$$\frac{1}{2}(x^2+x)+\frac{1}{2}(y^2+y)+\frac{1}{2}(z^2+z)$$

alle Zahlen vorstellen mögen, ist aber nicht klar genug auseinandergesetzt. Der Autor muß dieses selber gefühlt haben, denn er bemerkt, daß die Demonstration alle Gewißheit besitze, die eine „metaphysische" Schlußfolgerung zulasse[5]).

Gleiche Urteile müssen wir über Beguelins Ableitung des Bachetschen Satzes von obigem Fermatschen Satze, und umgekehrt des obigen Fermatschen Satzes vom Bachetschen, fällen[6]).

Beguelin schlägt für die binäre Arithmetik von Leibniz einen abgekürzten Algorithmus[7]) — einen exponential algoritmus — vor, dessen Idee aus ein paar Beispielen klar wird. Die Zahlen 48 und 60, die im gewöhnlichen binären Algorithmus 110000 und 111100 geschrieben werden, werden im exponentialen Algorithmus durch $4 \cdot 5$

---

[1]) London Math. Soc., Vol. 28, 1896/97, p. 17. [2]) Prodomo della nuova enciclopedia italiana, Siena 1779, p. 69—95. Vgl. Bullettino Boncompagni IX, p. 374. [3]) Bullettino Boncompagni VI, 1873, p. 128. [4]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1773, Berlin 1775, p. 203—216. [5]) Einen früheren Versuch, den allgemeinen Fermatschen Satz zu beweisen, daß jede Zahl die Summe von $1, 2, \ldots n$ n-Eckszahlen ist, machte Beguelin in dem Aufsatze „Application du principe de la raison suffisante à la démonstration d'un théorème de M. Fermat sur les nombres polygonaux, qui n'a point encore été démontré" in den N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1772, Berlin 1774, p. 387—413.
[6]) Ebenda année 1774, Berlin 1776, p. 312—369. [7]) Ebenda, année 1772, Berlin 1774, p. 296—352.

und $2 \cdot 3 \cdot 4 . 5$ ausgedrückt. Es sind nämlich $100000 = 2^5$ und $10000 = 2^4$. Beguelin leitet die Operationsregeln für die neue Schreibart ab. In zwei späteren Abhandlungen[1]) wendet er seinen Algorithmus auf die Bestimmung der Faktoren von Zahlen $2^n + 1$ und $4p + 3$ an, ohne aber dadurch bedeutende Resultate zu erzielen.

In einer Solution particulière du problème sur les nombres premiers[2]) entwickelt Beguelin eine Methode, Primzahlen von der Form $4x^2 + 1$ zu finden. Das Resultat dieser Arbeit ist dem Eulerschen in den Petersburger Memoiren der Jahre 1762/63, Bd. IX, p. 99—153 ähnlich; die Methode ist aber ganz verschieden. Beguelin wählt als Grundlage den Eulerschen Satz, daß alle Zahlen, welche nur ein einziges Mal in der Formel $x^2 + y^2$ enthalten sind, wo x und y teilerfremd sind, entweder Primzahlen oder das Doppelte von Primzahlen sind. In einem an Beguelin gerichteten Briefe, datiert: Mai 1778 macht ihn Euler[3]) auf die Tatsache aufmerksam, daß die allgemeinere Formel $nx^2 + y^2$ die nämliche Eigenschaft besitze, und bei geeigneter Wahl des n nur Primzahlen liefere. Zur Wahl von n diene folgende Regel: Wenn eine Zahl in der Form $n + y^2$ enthalten ist, kleiner als $4n$ ist (wo y und n teilerfremd sind) und entweder eine Primzahl p oder $2p$ oder p^2 oder eine Potenz von 2 ist, dann ist die Zahl n, welche diesen Bedingungen genügt, eine geeignete Zahl. Z. B. 60 ist eine solche Zahl, denn $60 + 1^2$, $60 + 7^2$, $60 + 11^2$, $60 + 13^2$ sind alle Primzahlen. Euler entdeckte 65 verschiedene Zahlen n, konnte aber keine finden, welche 1848 überstieg. Die Form $1848\,x^2 + y^2$ ermöglichte es ihm mehrere große Primzahlen (z. B. 18518809) zu entdecken. Eine vollkommenere Mitteilung dieser Arbeit wurde nach dem Wunsche Eulers von N. Fuß in einem Briefe vom 19./30. Juni 1778 an Beguelin gemacht[4]).

In einer Abhandlung Recherches d'arithmétique[5]) untersucht Lagrange die verschiedenen Formen, welche die Teiler einer ganzen Zahl von der Form $Bt^2 + Ctu + Du^2$ annehmen können. Es stellen alle Buchstaben dieses Ausdrucks ganze Zahlen dar, die auch negativ sein dürfen; B, C, D sind zum voraus bestimmte, t und u unbestimmte, teilerfremde Zahlen. Es wird zuerst bewiesen, daß jeder Teiler A die Form $A = Ls^2 + Msx + Nx^2$ hat, wo s und x gleichfalls teilerfremd sind, und wo $4LN - M^2 = 4BD - C^2$. Um dieses

[1]) N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1777, Berlin 1779, p. 239 bis 264, 265—310. [2]) Ebenda, année 1775, Berlin 1777, p. 300—322.
[3]) Ebenda, année 1776, Berlin 1779, p. 337—339. [4]) Ebenda, p. 340—346.
[5]) Ebenda, année 1773, Berlin 1775, p. 265—312 = Lagrange, Oeuvres, T. III, p. 696—795.

zu beweisen, lasse man $Aa = Bt^2 + Ctu + Du^2$. Ferner setze man $a = bc$, $u = bs$, wo c und s teilerfremd sind, und es folgt aus $Abc = Bt^2 + Cbts + Db^2s^2$, daß $B = Eb$ und $Ac = Et^2 + Cts + Dbs^2$. Da $\theta s + cx$ irgend eine ganze Zahl sein kann, schreibe man $t = \theta s + cx$ und eliminiere t. Man ersieht dann, daß $E\theta^2 + C\theta + Db$ durch c teilbar, also $= Lc$ ist. Wenn $2E\theta + C = M$, $Ec = N$ genommen wird, erhält man $A = Ls^2 + Msx + Nx^2$, sowie $4LM - M^2 = 4BD - C^2$, und der grundlegende Satz der Abhandlung ist bewiesen. Ist nun M numerisch größer als L, wird durch die Annahme $s = mx + s'$ eine neue Form $A = L's'^2 + M's'x' + N'x'^2$ abgeleitet, wo numerisch $M' < M$ und $4L'N' - M'^2 = 4LN - M^2$ ist.

Durch eine endliche Anzahl von Wiederholungen dieser Operation erhält man $A = Py^2 + Qyz + Rz^2$, worin numerisch $Q \overline{\gtrless} P$, $Q < R$, $4PR - Q^2 = 4BD - C^2$ und y und z teilerfremd sind. Wenn $4BD - C^2$ positiv ist, dann muß also $Q < \sqrt{\frac{4BD - C^2}{3}}$ sein; wenn $4BD - C^2$ negativ ist, so muß $Q \overline{\gtrless} \sqrt{\frac{C^2 - 4BD}{5}}$ sein. Durch diese Relationen sind die möglichen Werte von Q bedeutend eingeschränkt. Überdies ist Q gerade oder ungerade, je nachdem C gerade oder ungerade ist. Sobald nun Q festgesetzt ist, erhält man PR durch die Relation $4PR - Q^2 = 4BD - C^2$, und man kann irgend zwei Faktoren von PR, welche nicht kleiner als Q sind, als Werte von P und R wählen. Aus obigem sieht man, daß die Bestimmung von P, Q, R nur von dem Werte $4BD - C^2 = \pm K$ (K positiv) abhängt. Bemerkt man überdies, daß $(Bt^2 + Ctu + Du^2)\,4B = (2Bt + Cu)^2 + (4BD - C^2)u^2$, so wird es klar, daß Teiler von $Bt^2 + Ctu + Du^2$ auch Teiler der einfacheren Formel $x^2 \pm Ku^2$ sind. Betrachtet man $t^2 + au^2$ (a irgend eine ganze positive Zahl) als einen Spezialfall von $Bt^2 + Ctu + Du^2$, worin $B = 1$, $C = 0$, $D = a$, wo also $K = 4a$, $Q = \pm 2q$ (q positiv), dann werden $q \overline{\gtrless} \sqrt{\frac{a}{3}}$ und $PR = a + q^2$. Ist nun $PR = pr$, wo $p \overline{>} 2q$, $r \overline{>} 2q$, dann ergibt sich $py^2 \pm 2qyz + rz^2$ als der allgemeine Ausdruck für die Teiler von $t^2 + au^2$. Für $a = 1$ wird der Teiler $y^2 + z^2$, für $a = 2$ wird er $y^2 + 2z^2$, für $a = 3$ wird jeder ungerade Teiler $y^2 + 3z^2$. Die Resultate für diese drei Werte von a hatte früher Euler durch eine ganz verschiedene, auf höhere Werte von a nicht verwendbare Methode ausgearbeitet[1]). Die Methode von Lagrange ist allgemein und wird von ihm bis auf $a = 12$ angewandt. Bei der Ausbeutung der Resultate für $t^2 - au^2$ ist das Ver-

[1]) N. Comm. Petr., T. IV, VI, VIII.

fahren von Lagrange ganz ähnlich. Er stößt aber auf die Unbequemlichkeit, daß dann und wann sich scheinbar mehr Teilungsformeln herausstellen, als wirklich existieren, daß also gewisse unter denselben einander äquivalent sind. Z. B., wenn $a = 12$, so findet man die Teiler $12z^2 - y^2$ und $3y^2 - 4z^2$. Letzterer reduziert sich auf den ersteren durch die Substitution $y = 4y' + z'$, $z = 3y' + z'$. Diese Erscheinung veranlaßt ihn zu einer Untersuchung, und diese führt zur Entdeckung einer Regel, wodurch man einander identische Formeln leicht erkennen kann. Auch konstruiert er zwei Tafeln, welche die Werte von p, q, r der ungeraden Divisoren der Zahlen $t^2 + au^2$ und $t^2 - au^2$ für die sukzessiven Werte $1, 2, 3, \ldots, 31$ der Konstanten a angeben.

Diese große Untersuchung Lagranges wird in den Berliner Memoiren des Jahres 1775 fortgesetzt¹).

Für Zahlen von der Form $t \pm au^2$ wurde im eben besprochenen Teil der Abhandlung die allgemeine Divisorsformel

$$X = py^2 \pm 2qyz + rz^2$$

abgeleitet. Im zweiten Teil wird dieser Divisor in die einfachere Form $4na + b$ transformiert, wo n irgendwelche ganze Zahl ist, $a = pr \mp q^2$, und b durch die Zahlen p, q, r bestimmt wird. Wenn X ein ungerader Teiler ist, muß entweder p oder r ungerade sein. Es sei p ungerade. Man kann schreiben

$$pX = (py + qz)^2 \pm az^2 = y'^2 \pm az^2,$$

wo $y' = py + qz$. Ist $p = Pp'c^2$, $a = r'p'c^2$, wo P und r' teilerfremd sein sollen, dann muß $r' = Pr \mp q'^2p'$, wo $q = q'p'c$, und wo P und p' teilerfremd sind, sowie auch P und $p'r'$. Es muß also $y' = p'cx$ sein, und man erhält $PX = p'x^2 \pm r'z^2$. Setzt man weiter $p'r' = a'$, dann läßt sich PX durch eine lineare Transformation von x und z auf die Form $4a'n + b'$ reduzieren, wo b' positiv oder negativ und numerisch $\overline{\gtrless} 2a'$ ist. Nun können in der Gleichung ersten Grades $PX = 4a'n + b'$ die unbestimmten ganzen Zahlen X und n immer berechnet werden, und man erhält $X = 4a'n' + \alpha b'$, wo n' irgend eine ganze Zahl, und α der Zähler des vorletzten Näherungsbruches für den Wert von $\frac{4a'}{P}$ ist. Wenn nun $a' = a'c^2 = a$, dann ist $\pm \alpha b' = b$ und X hat die erwünschte Form; wenn dies nicht der Fall ist, muß man noch $n' = nc^2 + \gamma$ setzen $(\gamma < c^2)$, und es wird

¹) N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1775, Berlin 1777, p. 323 bis 356 = Lagrange, Oeuvres III, p. 759—795.

$$X = 4an \pm \alpha b' + 4a'y,$$

wo also $b = \pm \alpha b' + 4a'y$. Lagrange berechnet nun zwei Tafeln, die für jeden Wert von a (< 31) und von p die passenden Werte von b für Teiler von $t^2 \pm au^2$ angeben, und zwei andere Tafeln, welche die Werte von b für Nichtteiler liefern. Um z. B. Teiler von 10001 zu finden, beachte man, daß $10001 = (100)^2 + 1$, daß also $a = 1$, wofür die Tafeln $b = 1$ angeben, weshalb jeder Teiler die Form $4n + 1$ hat. Es ist aber auch $10001 = (101)^2 - 2\,(10)^2$. Für $a = 2$ liefern die Tafeln $b = 1, -1$, weshalb die Teiler eine der zwei Formen $8n + 1$ und $8n - 1$ haben müssen. Von den Primzahlen unter 100 genügen nur 17, 41, 73, 89, 97 diesen zwei Bedingungen. Durch Division ermittelt man, daß 73 ein Teiler ist. Die Abhandlung endet mit einer Untersuchung über Primzahlen von der Form $4na + b$, welche zu gleicher Zeit die Form $u^2 + at^2$ annehmen. Zu diesem Zwecke braucht er sieben Lemma, welche, in Verbindung mit seinen Tafeln, ihm 36 Lehrsätze über Primzahlen von der Form $4n - 1$ und 13 Lehrsätze über Primzahlen von der Form $4n + 1$ einbringen. Man findet hier den Nachweis von sechs Fermatschen Sätzen. Der erste von diesen sagt, daß alle Primzahlen von der Form $4n + 1$ auch die Form $y^2 + z^2$ annehmen. Vier andere Fermatsche Sätze betreffen bzw. die Formenpaare

$$6n + 1,\ y^2 + 3z^2;\ 8n + 1,\ y^2 + 2z^2;\ 8n + 3,\ y^2 + 2z^2;$$
$$8n \pm 1,\ y^2 - 2t^2.$$

Für die zwei ersten Fermatschen Sätze hatte Euler schon früher Beweise veröffentlicht. Vier andere Sätze hatte Euler früher durch Induktion entdeckt[1]). Sie betreffen bzw. die Formen $20n + 1$, $20n + 9$ und $y^2 + 5z^2$; $24n + 1$, $24n + 7$ und $y^2 + 6z^2$; $24n + 5$, $24n + 11$ und $2y^2 + 3z^2$; $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 11$, $28n + 15$, $28n + 23$, $28n + 25$ und $y^2 + 7z^2$. Lagrange bemerkt, daß es ihm nicht gelungen sei, den Fermatschen Satz, daß das Doppelte einer Primzahl $8n - 1$ die Summe eines Quadrates und das Doppelte eines Quadrates sei, nachzuweisen. Auch kündigt er den von ihm durch Induktion entdeckten, aber noch unbewiesenen Satz an, daß alle Primzahlen von der Form $4n - 1$ die Summe einer Primzahl von der Form $4n + 1$ und das Doppelte einer Primzahl dieser Form sind.

Eine Methode, die vollkommenen Theiler einer gegebenen Zahl zu finden[2]) von Johann Tessanek (1728—1788), Lehrer

---

[1]) N. mémoires Petr. VI, p. 221, VIII, p. 127.

[2]) Abh. einer Privatgesellsch. in Böhmen, 1. Bd., Prag 1775, S. 1—64.

der höheren Mathematik an der Prager Hochschule, enthält drei Regeln, je eine für Zahlen, deren rechtsstehende Ziffer 1, 3 oder 7 ist. Eine Zahl ersterer Art kann so ausgedrückt werden: $100a + 10b + 1$, wo b die Zahl der Zehner andeutet. Ist sie keine Primzahl, so ist sie entweder

$$= (100x + 10f + 1)(100z + 10g + 1) \quad \text{oder} \quad (100x + 10f + 3) \cdot (100x + 10g + 7) \quad \text{oder} \quad (100x + 10f + 9)(100z + 10g + 9).$$

Daher ist erstens

$$(100a + 10b + 1) : (100x + 10f + 1) = 100z + 10g + 1;$$

woraus man erhält

$$(10a + b - 10x - f) : (100x + 10f + 1) = 10z + g$$

und

$$(10a + b - 10x - f - 100gx - 10fg - g) : (100x + 10f + 1) = 10z,$$

weshalb $b - f - g$ mit 10 teilbar sein muß, d. h. $b = f + g$ oder aber $b + 10 = f + g$. Man erhält

$$(a - x - 10bx + 10fx - bf + f^2) : (100x + 10f + 1) = z$$

oder $z + 1$. Wenn man von der Quadratwurzel von $100a + 10b + 1$ die zwei rechtsstehenden Zahlen abschneidet, und die übrige Zahl m nennt, und man $100x + 10f + 1$ kleiner als die Quadratwurzel nimmt, kann x nicht größer und z nicht kleiner sein als m. Es folgt, daß $z + 1 - m$ und $z - m$ positive Zahlen sein müssen und daß

$$\begin{aligned}(a - m - x[100\,m + 10b + 1] - f[10m + b - 10x - f])\\ : (100x + 10f + 1) = z - m \quad \text{oder} \quad z + 1 - m.\end{aligned}$$

Aus dieser Hauptformel erhält man zehn besondere Formeln, eine für jeden Fall des Wertes von b. Auf ähnliche Weise werden die zwei anderen Faktorenformen behandelt, von denen

$$(100x + 10f + 3)(100x + 10g + 7)$$

zwei Hauptformeln liefert. Im ganzen hat man 40 besondere Formeln für Zahlen, deren rechtsstehende Ziffer 1 ist. Solche, deren Endziffer 3 oder 7 ist, werden nach der gleichen Methode behandelt.

Die 1775 gedruckte Abhandlung[1]) über diophantische Probleme

[1]) N. Comm. Petr. XX, 1775, p. 48—58 = Comm. Arith. I, p. 444—449.

wurden von L. Euler schon 1771 eingereicht. Es werden erstens die simultanen Gleichungen

$$(x^2 + y^2)(t^2x^2 + u^2y^2) = U^2, \quad (x^2 + y^2)\cdot(u^2x^2 + t^2y^2) = V^2,$$

zweitens $(t^2x^2 + u^2y^2)(u^2x^2 + t^2y^2) = V^2$, drittens die Gleichungen $t^2x^2 + u^2y^2 = U^2$, $t^2y^2 + u^2x^2 = V^2$ aufgelöst. Ein ähnliches Kunststück ist die Resolution jeder der zwei folgenden Gleichungen[1]):

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2$$
$$+ 2x^2v^2 + 2y^2v^2 + 2z^2v^2 = 0,$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2x^2v^2$$
$$- 2y^2z^2 - 2y^2v^2 - 2z^2v^2 = 0,$$

sowie die Lösung der simultanen Gleichungen[2]):

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2, \quad x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = v^2.$$

Sein ältester Sohn Johann Albrecht Euler (1734—1800), schrieb einen Kommentar über die Lösung des letzten Problems[3]).

In der Abhandlung Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante[4]) geht Lagrange von dem Fermatschen Problem aus, ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Hypotenuse, sowie die Summe der Katheten, Quadratzahlen sind. Wenn also p und q die Katheten sind, sollen $p + q = y^2$, $p^2 + q^2 = x^4$. Setzt man $p - q = z$, so erhält man $p^2 - 2pq + q^2 = z^2 = 2x^4 - y^4$. Kennt man also Lösungen von $2x^4 - y^4 = z^2$, dann sind die Katheten durch die Relationen $2p = y^2 + z$, $2q = y^2 - z$ bestimmt. Es können $x = 13$, $y = 1$, $z = 239$ sein, woraus sich $p = 120$, $q = -119$ ergeben. Sollen aber p und q beide positive ganze Zahlen sein, dann versichere Fermat, daß keine kleineren Wertsysteme existieren als

$$x = 2165017,\ y = 2372159,\ z = 1560590745759,$$
$$p = 1061652293520,\ q = 4565486027761.$$

Um diese Äußerung zu beweisen und um überhaupt eine allgemeine Auflösung der Gleichung $2x^4 - y^4 = z^2$ zu finden, erfindet Lagrange eine Methode, welche der berühmten Fermatschen Methode, die Unmöglichkeit von $x^4 - y^4 = z^2$ zu beweisen, ähnlich ist. Fermat

1) Acta Petrop. 1778, II, p. 85—110, eingereicht 1780 = Comm. Arith. II, p. 366—379. 2) Ebenda, 1779, I, p. 30—39, einger. 1780 = Comm. Arith. II, p. 457—461. 3) Ebenda, 1779, Pt. I, p. 40—48. 4) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1777, Berlin 1779, p. 140—154 = Lagrange, Oeuvres IV, p. 377—398.

zeigte, daß man aus der Voraussetzung, daß ganzzahlige Werte von x, y, z existieren, immer nachweisen kann, daß es noch kleinere ganzzahlige Werte von x, y, z gibt, die der Bedingung $x^4 - y^4 - z^2$ genügen. Durch Wiederholung dieser Operation kommt man auf kleine Werte von x, y, z herab, die der Gleichung genügen sollten. Da in Wirklichkeit es keine solche kleinen Werte gibt, ist die Annahme der Lösbarkeit falsch. Lagranges Modifikation dieses Kunstgriffes ist wie folgt: Aus der Voraussetzung, daß es ganzzahlige Werte von x und y gibt ($x > 1$, $y > 1$), die der Bedingung $2x^4 - y^4 = \square$ genügen, soll gezeigt werden, daß es noch kleinere Werte von x und y gibt, die dieser Bedingung genügen. Es soll zu gleicher Zeit eine allgemeine Methode entwickelt werden, um letztere Werte aus den ersteren abzuleiten. Wenn man nun für x und y ihre Minimum-Werte angibt, nämlich $x = 1$, $y = 1$, kann man durch Wiederaufsteigen alle höheren Werte in der Reihenfolge ihrer Größe berechnen. Dieses Programm wird mit großer Geschicklichkeit erfolgreich durchgeführt. Erstens wird bewiesen, daß die Auflösung von $2x^4 - y^4 = z^2$ sich auf die Auflösung von $s^4 + 8t^4 = u^2$ durch kleinere Zahlen reduziert, und daß eine Lösung letzterer Gleichung stets durch die Relationen

$$m : n = (u^2 - 3st) : (s^2 - 8t^2),$$

m und n teilerfremd, $x = ms + nt$, $y = ms - nt$ eine Lösung der ersteren einbringt. Zweitens wird die Auflösung von $s^4 + 8t^4 = u^2$ auf die Lösung von der Gleichung $2q^4 - r^4 = s^2$ oder der Gleichung $q^4 - 2r^4 = s^2$ reduziert, so daß von den Werten q, r, s, welche der einen oder der anderen dieser Gleichungen genügen, durch die Hilfsgleichung $t = qr$ Lösungen von $s^4 + 8t^4 = u^2$ abgeleitet werden können. Drittens wird die Auflösung von $q^4 - 2r^4 = s^2$ von der Lösung der Gleichung $q^2 = n^4 + 8p^4$ abhängig gemacht, wo $r = 2pn$, $s = n^4 - 8p^4$, und die ganzen Zahlen n, p kleiner sind als q, r. Die Gleichung $n^4 + 8p^4 = q^2$ hat aber die gleiche Form wie $s^4 + 8t^4 = u^2$; folglich ist das Problem gelöst. Diese Untersuchung ergibt also nicht nur die Lösung von $2x^4 - y^4 = \square$, sondern auch von $x^4 - 2y^4 = \square$ und $x^4 + 8y^4 = \square$.

Es wird nun gezeigt, wie die Auflösung aller Gleichungen von der Form $x^4 + ay^4 = z^2$, wo a irgend eine gegebene Zahl ist, durch die Lösung einer gleichförmigen Gleichung mit kleineren Zahlenwerten erzielt werden kann; es wird aber betont, daß die hier erklärte Methode nicht notwendig alle möglichen Lösungen liefert.

In der Eulerschen Abhandlung De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium[1]) werden aus dem Ausdrucke

[1]) Acta Petr. 1780, I, p. 56—75 = Comm. Arith. II, p. 105—115.

$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ etc. $= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} +$ etc.,

wo die Exponenten von x in der Reihe Pentagonalzahlen von der Form $\frac{3n^2 \mp n}{2}$, d. h. die Zahlen 0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22 etc. sind, und wo $x^n = 1$ ($n = 1, 2, 3, 4$ oder 5) ist, schwankende und divergente Reihen abgeleitet. Die Summe solcher Reihen wird nach der damals noch üblichen formalen Behandlungsweise ermittelt. Euler schreibt $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. $= \frac{1}{2}$ und $-1^2 - 2^2 + 5^2 + 7^2 - 12^2 -$ etc. $= 0$. Vom Standpunkte der analytischen Zahlentheorie betrachtet, enthält diese Schrift Ergebnisse, die Euler schon früher veröffentlicht hatte[1]).

Die Anzahl Zahlen, welche kleiner als N und zugleich mit N teilerfremd sind, wird von L. Euler in einer Schrift des Jahres[2]) 1780 durch die Formel $\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$ ausgedrückt, wo $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma$. Dies ist eine verallgemeinerte Form der Formeln, welche Euler 1760/61 in der Abhandlung Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata bekannt machte.

In dem Aufsatze De inductione ad plenam certitudinem evehenda[3]) zeigt L. Euler, daß jede Zahl sich als in vier Quadratzahlen und in drei Dreieckszahlen zerlegbar erweist, sobald man annimmt, daß jede Zahl $4n + 2$ in zwei Primzahlen der Form $4n + 1$ zerlegbar sei. Letzterer Satz wird durch Induktion untersucht und als Erfahrungssatz aufgestellt.

Im Jahre 1781 wurden Auszüge aus Briefen Eulers an Condorcet veröffentlicht[4]), worin unter anderem bewiesen wird, daß die Summe der Quadrate der Koeffizienten in der Binomialentwicklung von $(1 + x)^n$ dem Ausdrucke gleich ist

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{4} \cdots \frac{4n-2}{n}.$$

Die vollständige Abhandlung Eulers erschien in St. Petersburg unter dem Titel De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt[5]). Diese Werte werden vom Integral $\frac{2}{\pi} \cdot 2^{2n} \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1 - x \cdot x}}$ ab-

[1]) Intr. in analys. Pt. IV, Chap. 16; N. Comm. Petr. 1750/51, p. 155; ebenda, 1754/55, V, p. 59—94; Corresp. math. (Fuß) II, p. 467. [2]) Acta Petr. IV, II, 1780, p. 18—30 = Comm. Arith. II, p. 127—133. [3]) Ebenda, p. 38—48 = Comm. Arith. II, p. 134—139. [4]) Histoire de l'académie royale des sciences, année 1778, Paris 1781, p. 606. [5]) Acta Petrop. pro anno 1781 pars prior. Petropoli 1784, p. 74—111.

geleitet. Euler betrachtet auch Bruchwerte von n mit dem Nenner 2 und erhält für $n = \frac{1}{2}$ als Summe der unendlichen Reihe $\frac{4}{\pi}$, für $n = -\frac{1}{2}$, eine unendliche Zahl. Euler schreibt

$$\alpha' = \frac{n'}{2'}, \quad \beta' = \frac{n'(n'-1)}{1 \cdot 2}, \ldots$$

und erhält mit Hilfe der Integralrechnung die Werte der Reihe $1 + \alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots$ für ganze und gebrochene Werte von n und n'. Diese interessante Untersuchung wird in der Schrift De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum extensis[1]) auf Koeffizienten von Polynomen übergeführt, und die Resultate werden durch Induktion abgeleitet.

Ein vom Grafen Franz Schaffgotsch von Prag (1743—1809) entdecktes Gesetz, welches zur Fortsetzung der bekannten Pellischen Tafeln dienet[2]), wird am gleichen Orte von Beguelin und von Tessanek bewiesen. Schaffgotsch stand mit dem Astronomen Bernoulli in Berlin in Korrespondenz und wurde durch ihn und die Schriften von Beguelin und Lambert angeregt, die Faktorentafeln zu erweitern. Sobald er aber vernahm, daß Hindenburg in Leipzig sich mit dergleichen beschäftigte, unterbrach er die vorgenommene Arbeit. Er veröffentlichte aber sein Gesetz, wodurch er Faktorentafeln, die alle durch 2, 3, 5 teilbare Zahlen ausschließen, ohne Berechnung fortsetzen konnte. Eine solche Zahlenreihe ist von der Form

$$30r + 1,\ 30r + 7,\ 30r + 11,\ 30r + 13,\ 30r + 17,\ 30r + 19,$$
$$30r + 23,\ 30r + 29,$$

wo $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ In einer Tabelle gibt Schaffgotsch alle Primzahlen von 7—449 und für jede derselben gibt er acht Zahlen zur Anwendung seiner Methode. Z. B. für die Primzahl 7 hat er 7, 4, 7, 4, 7, 12, 3, 12. Um nun in obgenannter Zahlenreihe alle durch 7 teilbare Zahlen, die größer als 7^2 sind, zu finden, nehme man nach 49 die siebente $(30r + 17 = 77)$, die nächstfolgende vierte (91), dann die siebente (119), die vierte (133), die siebente (161), die zwölfte (203), die dritte (217), die zwölfte (259). Dann fange man von neuem an und nehme die siebente etc. Noch zu beachten ist, daß die Summe der zu einer Primzahl p gehörigen Zahlen immer $8p$ ist.

Die Abhandlung[3]) Novae demonstrationes circa divisores

---

[1]) Acta Petrop. pro anno 1781 pars posterior, Petropoli 1785, p. 76—89.
[2]) Abh. einer Privatgesellsch. in Böhmen, 5. Bd., Prag 1782, S. 354—382. Man sehe einen zweiten Aufsatz von ihm für das Jahr 1786, S. 123—159. [3]) N. Acta Petrop. I, 1783, p. 47—74 = Comm. Arith. II, p. 159—173.

numerorum formae $x^2 + ny^2$ ist eine von drei Schriften[1] L. Eulers, welche im 18. Jahrhundert gedruckt wurden und eine bedeutende Anzahl Lehrsätze über Teilbarkeit von $x^2 \pm ny^2$ enthalten.

Den naturgemäßen Weg, Kettenbrüche abzuleiten, sie nämlich aus trinomischen Gleichungen abzuleiten, hatte Euler schon 1739 angedeutet[2]. Er wird nun in der Schrift De formatione fractionum continuarum[3] weiter geführt. Die rekurrierenden Gleichungen $fA = gB + hC$, $f'B = g'C + h'D, \ldots$ ergeben

$$\frac{fA}{B} = g + \frac{hC}{B} = g + \frac{f'h}{f'B:C}, \quad \frac{f'B}{C} = g' + \frac{h'D}{C} = g' + \frac{f''h'}{f''C:D}, \ldots$$

woraus sich der Kettenbruch $\frac{fA}{B} = g + \cfrac{f'h}{g' + \cfrac{f''h'}{g'' + \text{etc.}}}$ leicht herleiten läßt. Ist z. B. $s = x^n(\alpha - \beta x - \gamma x^2)$, so wird $s = 0$, wenn $\alpha = \beta x + \gamma x^2$ oder $\alpha x^n = \beta x^{n+1} + \gamma x^{n+2}$, wo $n = 1, 2, 3, \ldots$ Für die Reihe $A, B, C, \ldots$ kann man hier $1, x, x^2, \ldots$ und statt $f, g, h, \ldots$ die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ setzen. Daraus wird $\frac{\alpha}{x} = \beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \text{etc.}}}$, wo

$$\frac{2\alpha}{x} = \beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}.$$

Im Jahre 1783, dem Todesjahre L. Eulers, erschien in St. Petersburg der erste Band seiner Opuscula analytica, wovon der zweite Band 1785 herausgegeben wurde. Diese zwei Bände enthalten mehrere Abhandlungen über Zahlentheorie, die Euler ungefähr zehn Jahre früher verfaßte. In einer derselben[4] werden die Kriteria für die ganzzahlige Auflösung von $fx^2 + gy^2 = hz^2$ hergeleitet. Für vorgelegte Werte von f und g werden Zahlen h gefunden, wofür Lösungen der Gleichung möglich oder unmöglich sind. In einer anderen Schrift[5] Nova subsidia pro resolutione formulae $ax^2 + 1 = y^2$ wird ein wiederholter Angriff auf die Fermatsche Gleichung, die er selber und auch Lagrange früher eingehend behandelt hatten, gemacht. Er stellt Regeln auf, welche in der Konstruktion von Tabellen zur Erleichterung der Rechnungen dienen.

In der Abhandlung Miscellanea analytica[6], welche 1773 verfaßt wurde, gibt Euler unter anderem einen Beweis des früher von

---

[1]) Comm. Petr. XIV, 1744/46, p. 151; Opuscula analytica II, 1785, p. 275 = Comm. Arith. I, p. 35. II, p. 140. [2]) Ebenda, T. XI, ad annum 1739, Petropoli 1750, p. 32—81. [3]) Acta acad. scient. imp. Petr. pro anno 1779, pars prior, Petropoli 1782, p. 3—29. [4]) Opuscula analytica I, p. 211—241 = Comm. Arith. I, p. 556—569. [5]) Ebenda, I, p. 310—328 = Comm. Arith. II, p. 35—43. [6]) Ebenda, I, p. 329—344 = Comm. Arith. II, p. 44—52.

Lagrange demonstrierten Satzes von John Wilson[1]). Euler erzielt dieses durch die von ihm entdeckten primitiven Wurzeln. Ist g eine primitive Wurzel der Primzahl p, so enthält die Periode von g alle Zahlen $1, 2, 3, \ldots (p-1)$. Es gehört nun g zu der geraden Zahl $p-1$, weshalb

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) + 1$$

durch p teilbar ist.

Ein anderer Aufsatz[2]) L. Eulers enthält Beobachtungen über den Fermatschen Polygonalzahlsatz, welche auf der Entwicklung der Potenzen der Reihe $1 + x^{\alpha} + x^{\beta} + \cdots$, wo $\alpha, \beta, \ldots$ Polygonalzahlen sind, beruhen. Eine zu gleicher Zeit veröffentlichte kleine Schrift[3]) Eulers lehrt die kleinsten Werte von α, β, γ zu finden, die annähernd der unbestimmten Gleichung ersten Grades $\alpha A = \pm \beta B \mp \gamma C$ genügen, wo A, B, C gegebene Zahlen sind, die im allgemeinen auch irrational sein dürfen.

In der Abhandlung Speculationes super formula integrali $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}}$ ubi simul egregiae observationes circa fractiones continuas occurrunt[4]) leitet Euler durch Integralrechnung die Werte verschiedener Kettenbrüche ab. Er erhält z. B.

$$\frac{a}{\Delta} = b + \cfrac{aac}{3b - \cfrac{4aac}{5b - \cfrac{9aac}{7b - \cdots}}},$$

wo, für $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2c}}{c}$, $\Delta = \int \frac{dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}}$, „ein Ausdruck welcher", wie er sagt, „deshalb denkwürdiger ist, weil bisher kein Weg offen stand, den Wert dieses Kettenbruchs a priori zu finden". Es werden $\log i$, $\log \frac{p}{q}$, $\log \frac{n+m}{n-m}$ in Kettenbrüche entwickelt, sowie $\operatorname{arctan} \frac{ag}{b}$.

Wir verdanken Euler die Entdeckung eines fundamentalen Lehrsatzes der Zahlentheorie, des sogenannten Reziprozitätsgesetzes. Ungefähr 140 Jahre früher hatten die binomischen Kongruenzen zweiten Grades die Aufmerksamkeit des großen Mathematikers Fermat erregt. Ohne Beweise anzugeben, hatte er die Bedingungen, unter welchen

---

1) Vgl. Eulers Brief an Lagrange vom 24. Sept. (5. Okt.) 1773 in Lagrange, Oeuvres XIV, p. 235, und Opera posthuma (Euler) I, p. 583.
2) Opuscula analytica II, p. 3 = Comm. Arith. II, p. 92—98. 3) Ebenda, II, p. 91 = Comm. Arith. II, p. 99—104. 4) Acta acad. scient. imp. Petr. pro anno 1782, pars posterior, Petropoli 1786, p. 62—84.

$\pm 1, +2, \pm 3, 5$ quadratische Reste oder Nichtreste von ungeraden Primzahlen sind, aufgestellt[1]).

Euler untersuchte in zwei Abhandlungen, die wahrscheinlich beide 1772 verfaßt wurden[2]), die Reste, welche entstehen, wenn Quadrate und höhere Potenzen mit Primzahlen dividiert werden. In der ersten dieser zwei Schriften drückt er das Gesetz in vollendeter Form, aber ohne Beweis aus. Diese berühmte Abhandlung führt den Titel Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos.

Kronecker macht die interessante Mitteilung[3]), daß Euler beinahe 40 Jahre früher, in einer Abhandlung aus den Jahren 1744 bis 1746, als Resultat von Beobachtungen eine Reihe von Lehrsätzen und Beobachtungen gibt, welche im wesentlichen das Reziprozitätsgesetz enthalten[4]). Natürlich dürfen diese Aussprüche nicht als eine Entdeckung des Gesetzes angesehen werden.

Die entwickelte und allgemeine Auffassung des Reziprozitätsgesetzes wird von Euler in der Schrift des Jahres 1783 zuerst in vier Theoremen aufgestellt, dann in der neuen Form eines einzigen Lehrsatzes ausgesprochen. Die vier Theoreme beziehen sich auf die Division der Quadratzahlen durch Primzahlen und lauten wie folgt[5]):

Si divisor primus fuerit formae $4ns + (2x+1)^2$, existente s numero primo, tum in residuis occurrent numeri $+s$ et $-s$.

Si divisor primus fuerit formae $4ns - (2x+1)^2$, existente s numero primo, tum in residuis occurret numerus $+s$; at $-s$ erit in non-residuis.

Si divisor primus fuerit formae $4ns - 4z - 1$, excludendo omnes valores in forma $4ns - (2x+1)^2$ contentos, existente s numero primo, tum in residuis occurret $-s$, at $+s$ erit non-residuum.

Si divisor primus fuerit forma $4ns + 4z + 1$, excludendo omnes valores in forma $4ns + (2x+1)^2$ contentos, existente s numero primo, tum tam $+s$ quam $-s$ in non-residuis occurret.

Euler läßt nun die Bemerkung folgen, daß er diese Lehrsätze

---

[1]) Oswald Baumgart, Ueber das Quadratische Reciprocitätsgesetz, Leipzig 1885, S. 3. [2]) Opuscula analytica I, p. 64—84 = Comm. Arith. I, p. 477—486; ebenda. p. 122—156 = Comm. Arith. I, p. 487—506. [3]) Monatsb. d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1875, S. 268. [4]) Comm. Petr. XIV, 1744, p. 151 = Comm. Arith. I, p. 35—49. Das Reziprozitätsgesetz hätte nach Kronecker namentlich aus Theorema 27 und den Annotationes 3, 4, 7, 13, 14 und 16 geschlossen werden können. [5]) Comm. Arith. I, p. 484, 485.

hinzufüge, damit jedermann, der an Spekulationen dieser Art Vergnügen findet, ihren Beweisen nachspüren möge, denn dadurch werde die Zahlentheorie gewiß wichtige Erweiterungen erhalten. Zum Schluß sagt er dann, daß die vier Sätze in folgender Weise recht übersichtlich dargestellt werden können:

Existente s numero quocunque primo, dividantur tantum quadrata imparia 1, 9, 25, 49, etc. per divisorem $4s$, notenturque residua, quae omnia erunt formae $4q+1$, quorum quodvis littera α indicetur, reliquorum autem numerorum, formae $4q+1$, qui inter residua non occurrunt, quilibet littera A indicetur, quo facto si fuerit

divisor numerus primus formae	tum est
$4ns+\alpha$	$+s$ residuum et $-s$ residuum,
$4ns-\alpha$	$+s$ residuum et $-s$ non-residuum,
$4ns+A$	$+s$ non-residuum et $-s$ non-residuum,
$4ns-A$	$+s$ non-residuum et $-s$ residuum.

Wenn wir hier den quadratischen Charakter von $-s$ außer Betracht lassen und die Primzahlen $4ns\pm\alpha$ und $4ns\pm A$ durch p bezeichnen, so ist es nicht schwer, die Eulersche Formulierung des Reziprozitätsgesetzes mit der folgenden jetzt üblichen Form zu identifizieren: Sind p und s zwei positive Primzahlen, von denen mindestens eine die Form $4n+1$ hat, so ist s quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p quadratischer Rest oder Nichtrest von s ist; haben aber beide Primzahlen p und s die Form $4n+3$, so ist s quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p quadratischer Nichtrest oder Rest von s ist.

An die Arbeit von Johann Bernoulli III. des Jahres 1771 anknüpfend, untersucht Anton Felkel (1750—?) die Verwandlung der Bruchperioden nach den Gesetzen verschiedener Zahlensysteme[1]). Der im Dezimalsysteme $0{,}076923\cdots=\frac{1}{13}$ geschriebene Bruch heißt im Systeme von der Grundzahl 6 nach Felkel: $0{,}024340531215\cdots=\frac{2}{6^2}+\frac{4}{6^3}+\frac{3}{6^4}+\frac{4}{6^5}+\cdots$ Er nennt eine Bruchperiode eines Primteilers p eine vollständige, wenn sie $p-1$ Stellen hat (wie bei $p=7$), eine unvollständige, wenn sie

[1]) Abh. d. Böhmischen Gesellsch. d. Wiss. auf das Jahr 1785, Prag, S. 135 bis 174, 1. Abteil.

weniger Stellen hat (wie bei $p = 3$), und zeigt unter anderem durch Beispiele, daß unvollständige Perioden nach verschiedenen Zahlensystemen verschiedentlich in vollständige und in unvollständige Perioden übergehen können. Felkel war Lehrer an der k. k. Normalschule in Wien, 1785 Direktor von Schul- und Armenanstalten in Böhmen, später Vorsteher einer deutschen Schule in Lissabon. Er erfand eine gemeine Rechenmaschine, und schrieb ein großes Tabellenwerk, wovon die ersten Teile gedruckt wurden. Beinahe die ganze Auflage wurde aber vor Ausbruch des Türkenkrieges 1788 zu Infanteriepatronenpapier verwendet[1]).

In den Adversaria analytica miscellanea de fractionibus continuis[2]) setzt Daniel Bernoulli den zu bestimmenden Wert eines unendlichen Kettenbruches $\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cdots}}$ gleich S, schreibt dann

$S = \frac{1}{m+S}$ und

$$S = \frac{-m+\sqrt{4+m^2}}{2},$$

wenn m positiv ist,

$$S = \frac{-m-\sqrt{4+m^2}}{2},$$

wenn m negativ ist. Merkwürdig erscheint ihm der Fall $m = 0$, welcher $S = 1$ und auch $S = -1$ liefert. Man müsse hier zwischen der absoluten Null und dem unendlich Kleinen unterscheiden. Erstere Anschauung liefere $\frac{1}{\infty \cdot 0}$, letztere ± 1. Für den unendlichen Bruch $\cfrac{n}{m+\cfrac{n}{m+\cdots}}$ ergibt sich die Summe $+\frac{1}{2}(-m+\sqrt{m^2+4n})$, wo man nur für negative Werte von m $-\frac{1}{2}$ nimmt, und nur für negative Werte von n $-4n$ schreibt. Daraus ersieht man, daß die Multiplikation der einzelnen Zähler und Nenner eines Kettenbruches durch eine Zahl m dessen Wert ändert. Ist n negativ und numerisch größer als $\frac{m^2}{4}$, so liefert die Formel eine imaginäre Zahl. Für $m = 1$, $n = -1$ sind die Näherungswerte $-1, -\infty, 0, -1, -\infty, 0$, etc., die gegen keinen bestimmten Wert konvergieren, weshalb es nicht sonderbar sei, daß die Formel imaginäre Resultate ergebe. Das Bestreben, eine Darstellung des Wertes des Kettenbruches $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cdots}}}$

---

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie VI, 612 (Cantor). [2]) N. Comm. Petr., Tom. XX, pro anno 1775, Petropoli 1786, p. 3—23.

zu finden, hatte seinen Ausgang in einer zweiten Abhandlung, Disquisitiones ulteriores de indole fractionum continuarum[1]) worin Bernoulli die Auffindung eines independenten Gesetzes für die Bildung eines beliebigen Näherungswertes im Auge hat, aber im Falle willkürlicher „Indices“ $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, $\cdots$ in dem allgemeinen Kettenbruch $\cfrac{a}{\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cdots}}$ nicht weiter kommt, als aus zwei nacheinander folgenden Näherungsbrüchen $\frac{M}{N}$, $\frac{P}{Q}$ und dem nächsten Index $\frac{f}{\Phi}$ den hierauf folgenden Näherungswert $\frac{P\Phi + Mf}{Q\Phi + Nf}$ zu ziehen, ein Verfahren, welches er als ein vorzügliches Kompendium charakterisiert. Ohne sich des Eulerschen Algorithmus zu bedienen, vervollkommnet und vereinfacht Bernoulli die bisher angewandten Darstellungsmethoden der Näherungswerte. Er geht von einem allgemeineren Kettenbruch aus, als es bei Euler der Fall war.

In einer Schrift, Arithmetische Betrachtung[2]), behandelt Johann Tessanek die Gleichung $dn^2 + 1 = e^2$, ohne aber die Arbeiten Lagranges anzuführen.

Tessanek bestimmt den Wert von n bei gewissen Zahlen d verschiedener Formen, und zeigt, wie unendlich viele Formen gefunden und bei diesen die Werte für n allgemein bestimmt werden können. Er schreibt $d = a^2 + b$ und findet $e > an$, also $e = an + p_1$; auch findet er $n \gtreqless p_1$, also $n = p_1 + p_2$. Dann betrachtet er den Fall $b > a$, $p_1 > p_2$, $p_1 < 2p_2$, und setzt $p_1 = p_2 + p_3$, $p_2 = p_3 + p_4$, $p_2 < 2p_3$, etc. Für p_i findet er einen allgemeinen Ausdruck

$$\left(p_{i+1}h_i + \sqrt{(a^2 + b)p_{i+1}^2 + g_i}\right) : g_i,$$

wo $h_1 = b - a$, $g_0 = b$, $g_1 = 2a - b + 1$, und

$$h_{i+1} = g_i - h_i,\ g_{i+1} = 2h_i - g_i + g_{i-1}.$$

Nimmt man nun $g_i = 1$ und $p_{i+1} = 0$, dann wird $p_i = 1$ und man kann $p_{i-1}, p_{i-2}, \ldots, n$ ausrechnen. Z. B. nimmt man $i = 3$, dann hat man

$$p_3 = 1,\ p_4 = 0,\ p_2 = 1,\ p_1 = 2,\ n = 3,\ g_3 = 12a - 9b + 4 = 1,$$

$a = 3c - 1$, $b = 4c - 1$, wo c irgend eine positive ganze Zahl ist. Endlich folgt $\{(3c-1)^2 + 4c - 1\}\,3^2 + 1 = (9c-1)^2$. Die Auf-

---

[1]) N. Comm. Petr., Tom. XX, pro anno 1775, Petropoli 1786, p. 24—47; vgl. S. Günther, op. cit., p. 8—10. [2]) Abh. d. Böhmischen Gesellsch. der Wiss. auf das Jahr 1786, p. 160—171.

fassung des sogenannten Pellschen Problems ist hier der von Lagrange und Euler ganz fremd. Statt d als eine gegebene Konstante zu betrachten und die dazu gehörigen Werte von n und e zu untersuchen, werden hier verschiedene Formen der Zahl d genommen und dazu passende Zahlen n gefunden.

Die Zerfällung zusammengesetzter Zahlen wird auch von G. S. Klügel zu Helmstädt besprochen. Er nimmt das Produkt

$$(30r+m)(30r+n)$$

und untersucht die Werte, die mn annehmen kann[1]). An gleicher Stelle erschien über diesen Gegenstand eine Schrift von Johann Andreas von Segner, die er schon 1777 als eine Briefbeilage an Hindenburg versandt hatte[2]). Jede Zahl, die sich nicht durch 2 oder 3 teilen läßt, besitzt die Form $6n-1$ oder $6n+1$. Von diesem Lehrsatze ausgehend, stellt Segner Regeln für die aufzusuchenden Faktoren der Zahlen. Wie C. F. Hindenburg in seinen Anmerkungen über diese Abhandlung[3]) sagt, werden diese Regeln immer zusammengesetzter, je mehr Teiler man von Anfang an ausschließen will.

Das 18. Jahrhundert brachte drei große Forscher im Gebiete der Zahlentheorie hervor, nämlich Euler, Lagrange und Legendre. Die erste Arbeit Legendres ist Recherches d'analyse indéterminée[4]). Diese hervorragende Leistung betrifft vier Probleme zahlentheoretischen Inhalts, wovon das erste die ganzzahlige Auflösung der linearen Gleichung $Ay = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots$ behandelt. Vom Lagrangeschen Satze[5]), daß x nicht mehr als n Werte annehmen kann, und vom Fermatschen Satze ausgehend, zeigt Legendre erst, wie man $Ay = x^n - B$ lösen kann, und wendet dann die so erhaltenen Resultate auf die allgemeine Gleichung an. Im zweiten Problem wird die unbestimmte Analysis zur Zerlegung eines Polynoms in Faktoren benutzt. Es werden aber keine Kriterien entwickelt, welche die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Zerlegung dartun. Der dritte Abschnitt entwickelt den Satz, daß $ax^2 + by^2 = cz^2$, wo a, b, c positiv, teilerfremd und von quadratischen Faktoren frei sind, lösbar ist, wenn drei ganze Zahlen λ, μ, ν von der Art existieren, daß $\frac{a\lambda^2+b}{c}, \frac{c\mu^2-b}{a}, \frac{c\nu^2-a}{b}$ ganze Zahlen sind. Der vierte Abschnitt behandelt Primzahlen und ist bei weitem der bedeutendste dieser Abhandlung. Er enthält nichts weniger als das große Reziprozitäts-

[1]) Leipziger Magazin d. r. u. a. Mathem., 1. Stück, 1787, S. 199—216.
[2]) Ebenda, S. 217—225. [3]) Ebenda, S. 226—244. [4]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1785, Paris 1788, p. 465—559. [5]) Berliner Memorien 1768 und 1775.

gesetz, welches zwei Jahre früher in Eulers Schriften schon gedruckt war. Legendre ist der zweite Entdecker dieses Satzes. Obschon er damals Schriften Eulers über Zahlentheorie durchmustert und einige Teile von Eulers Opuscula analytica (Bd. I) gelesen hatte, war ihm die Arbeit des Schweizers über das Reziprozitätsgesetz nicht bekannt. Später machte Gauß eine ähnliche Erfahrung. Von ihm wurde der Satz zum drittenmal entdeckt, bevor er von Legendres Untersuchungen Kenntnis hatte. Eulers Aufstellung des Satzes haben Gauß und Legendre nie gekannt. Erst Kronecker hat die Mathematiker auf diese Leistung aufmerksam gemacht[1]).

In Legendres Untersuchung ist das Reziprozitätsgesetz auch bewiesen, aber der Beweis ist unvollständig. In dem Ausdrucke $d^{\frac{c-1}{2}}$ soll nach Legendre angenommen werden, daß alle Vielfachen der Primzahl c verworfen sind; dann hat man entweder $d^{\frac{c-1}{2}} = 1$ oder $d^{\frac{c-1}{2}} = -1$, wo d irgend eine ganze Zahl, nur kein Vielfaches von c, sein darf. Nach Legendre seien A, a Primzahlen von der Form $4n+1$, und B, b Primzahlen von der Form $4n+3$; dann stellt er[2]) acht Theoreme auf, die zusammen das große Gesetz ausmachen. Die Ausdrucksweise derselben ist aus den zwei ersten ersichtlich, nämlich

$$\text{I. Wenn } b^{\frac{a-1}{2}} = 1, \text{ dann folgt } a^{\frac{b-1}{2}} = 1.$$

$$\text{II. Wenn } a^{\frac{b-1}{2}} = -1, \text{ dann folgt } b^{\frac{a-1}{2}} = -1.$$

Legendre faßt nun alle acht Fälle in folgendem Ausspruch zusammen: „c et d étant deux nombres premiers, les expressions $c^{\frac{d-1}{2}}$, $d^{\frac{c-1}{2}}$ ne seront de différens signes que lorsque c et d seront tous deux de la forme $4n-1$; dans tous les autres cas, ces expressions auront toujours le même signe.“

In seinem sinnreichen Beweise geht Legendre von der Gleichung $Ax^2 + ay^2 = bz^2$ aus. Dieselbe kann nicht durch ganze Zahlen gelöst werden, da die linke Seite von der Form $4n+1$ oder $4n+2$ und die rechte Seite von der Form $4n$ oder $4n-1$ ist. Nach einer Methode von Lagrange sollte diese Gleichung aber stets lösbar sein, wenn gleichzeitig die drei Bedingungen $a^{\frac{A-1}{2}} b^{\frac{A-1}{2}} = 1$, $A^{\frac{a-1}{2}} b^{\frac{a-1}{2}} = 1$, $A^{\frac{b-1}{2}} a^{\frac{b-1}{2}} = -1$ erfüllt wären. Wenn $A = 1$ ist, so sollte $b^{\frac{a-1}{2}} = 1$,

[1]) Monatsb. d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1875, S. 267—275. [2]) Loc. cit., S. 516, 517.

$a^{\frac{b-1}{2}} = -1$ sein. Da dies aber unmöglich ist, zieht Legendre aus der Annahme $b^{\frac{a-1}{2}} = 1$ die Folgerung $a^{\frac{b-1}{2}} = 1$, und aus der Annahme $a^{\frac{b-1}{2}} = -1$ die Folgerung $b^{\frac{a-1}{2}} = -1$. Soweit ist der Beweis vollständig; auch zieht Legendre den strengen Schluß, daß $b^{\frac{B-1}{2}} = 1$, $B^{\frac{b-1}{2}} = 1$ nicht gleichzeitig bestehen können. Was den übrigen Teil des Beweises anbelangt, sagt Legendre selbst: „Dans cette démonstration, nous avons supposé seulement qu'il y avoit un nombre premier b de la forme $4n-1$, qui pouvoit diviser la formule $x^2 + Ay^2$." Gauß hat den Legendreschen Beweis einer eingehenden Kritik unterworfen[1]) und hat hervorgehoben[2]), daß zur Vervollständigung desselben es erwiesen werden sollte, daß zu einer jeden Primzahl von der Form $4n+1$ eine Primzahl von der Form $4n+3$ gefunden werden kann, in Beziehung auf welche jene quadratischer Nichtrest ist. Dieses Postulat mag von dem Satze abhängig gemacht werden, daß jede arithmetische Reihe, in welcher nicht alle Glieder einen gemeinschaftlichen Faktor haben, notwendig Primzahlen enthalten muß. Dirichlet hat später diesen Satz bewiesen[3]).

Legendre hat die Wichtigkeit des Reziprozitätsgesetzes völlig erkannt und mehrere Sätze über Primzahlen daraus abgeleitet. Mit demselben könne man alle Sätze, die Euler durch Induktion auf S. 176, 281, 295 usw. des ersten Bandes der Opuscula analytica aufgestellt habe, beweisen; man könne zeigen, daß, wenn $fx^2 \pm gy^2 = hz^2$ lösbar ist, $fx^2 \pm gy^2 = (h + fgn)z^2$ es auch ist, solange $(h + fgn)$ prim bleibt. Letzterer Satz enthält als Spezialsatz einen ähnlichen, von Euler durch Induktion entdeckten Satz. Legendre berechnet vier Tafeln, welche die verschiedenen Formen, die Teiler von $t^2 + au^2$ annehmen können, enthalten, worin die Primzahl a, beziehungsweise die Form $8n-3$, $8n+1$, $8n+3$, $8n-1$ hat. Diese Tafeln dienten nicht nur um viele schon bewiesene Sätze deutlicher hervortreten zu lassen, sondern auch um neue Sätze zu enthüllen. Legendre nennt z. B. den von ihm durch Induktion erhaltenen Satz, daß, wenn $a = 8n-3$, es ebenso viele Teiler von der Form $4n-1$ als von der $4n+1$ gibt, und daß diese Anzahl der Anzahl verschiedener Zerlegungen von a in die Summe dreier Quadrate gleich ist. Z. B., wenn $a = 109$, so hat $t^2 + au^2$ zwei Teiler von der Form $4n+1$, nämlich $y^2 + 109z^2$, $5y^2 + 2yz + 22z^2$, und zwei ähnliche

---

[1]) Disq. Arith., Artikel 151, 296, 297 und Additamenta. [2]) Additamenta.
[3]) Kummer in Math. Abh. d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1859, S. 19, 20.

von der Form $4n-1$; es kann nun 109 genau auf zwei Arten, $10^2+3^2+0^2$, $8^2+6^2+3^2$, in die Summe dreier Quadrate zerlegt werden. Einige Sätze über Primzahlen, welche Lagrange in den Berliner Memorien der Jahre 1773 und 1775 bewiesen hatte, werden von Legendre auf neue Art abgeleitet.

L. Euler behandelt in einem Memoir[1]) den früher von ihm und Lagrange untersuchten Gegenstand über ähnliche Funktionen und Minimalwerte. Wenn $N=a^2+nb^2$, soll erstens $N^2, N^3, \ldots$ durch die gleiche Form x^2+ny^2 dargestellt werden, und zweitens sollen die Minimalwerte von x oder von y gefunden werden.

Eine andere Abhandlung[2]) L. Eulers gibt die Fälle an, in welchen die Formel $x^4+kx^2y^2+y^4$ ein Quadrat ist, und tabuliert die ganzzahligen Werte von k zwischen -100 und $+100$, und die dazu gehörigen Verhältniswerte von $\frac{x}{y}$, welche Quadrate liefern. Man hat z. B. $k=16$, $\frac{x}{y}=\frac{2}{1}$ und $\frac{5}{12}$. Es ergibt sich, daß k nicht $1, 3, 4, 5, 6, 9, \ldots$ sein kann.

Die Zahl 1000009, welche L. Euler in seiner De tabula numerorum primorum des Jahres 1774 unter die Primzahlen setzte, wird von ihm 1778 in einem separaten Aufsatz[3]) untersucht und als eine zusammengesetzte Zahl mit dem kleinsten Divisor 293 erkannt. Euler findet $1000009-x^2=235^2$, wo $x=-972$ ist, sowie $1000009=1000^2+3^2=972^2+235^2$. Daraus wird $1000^2-235^2=972^2-3^2$, $1235\cdot765=969\cdot975$ und $\frac{1235}{975}=\frac{969}{765}=\frac{19}{15}$. Es ist also $19^2+15^2=293$ ein Divisor von 1000009.

In der 1777 verfaßten Schrift De novo genere quaestionum arithmeticarum, pro quibus solvendis certa methodus adhuc desideratur[4]) untersucht L. Euler das Problem, alle ganzen Zahlen N zu finden, so daß A^2+B^2 und A^2+NB^2 zu gleicher Zeit Quadratzahlen vorstellen. Er setzt

$$A=x^2-y^2,\quad B=2xy,\quad A^2+NB^2=z^2$$

und erhält $N=\{z^2-(x^2-y^2)^2\}:4x^2y^2$, wo also z so zu wählen ist, daß N ganzzahlig wird. Man nehme $z=x^2+2\alpha x^2y^2+y^2$ oder $z=x^2+2\alpha x^2y^2-y^2$, woraus

$$N=(\alpha x^2+1)(\alpha y^2+1)\quad \text{oder}\quad =(\alpha x^2-1)(\alpha y^2+1)+1$$

---

1) N. Acta Petr. IX, 1791, p. 3—18 = Comm. Arith. II, p. 174—182.
2) Ebenda, X, 1792, p. 27—40 = Comm. Arith. II, p. 183—189.
3) Ebenda, p. 63—73 = Comm. Arith. II, p. 243—248.
4) Ebenda, XI, ad annum 1793, p. 78—93 = Comm. Arith. II, p. 190—197.

wird. Erhält hier α verschiedene ganzzahlige und Bruchwerte, so ergeben sich 41 ganze Zahlen N, die kleiner als 100 sind. Euler gibt nun an, daß es ihm nicht gelungen sei, das Gesetz zu entdecken, welches die Zahlen N von anderen ganzen Zahlen unterscheidet, auch sei das Problem noch nicht allgemein gelöst, alle Zahlen N zu finden, welche in den Formen $N = (x^2 + 1)(y^2 + 1)$ und $N = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$, wo x und y Integral- oder Bruchzahlen sein mögen, enthalten sind.

Dies ist die letzte Abhandlung von L. Euler über Zahlentheorie, welche vor 1800 gedruckt wurde. In den von uns öfters zitierten Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae (P. H. Fuß et Nicolaus Fuß, 1849) werden im ganzen 96 Abhandlungen angegeben, von denen 33 nach 1799 erschienen und deshalb hier nicht besprochen werden können. Weder der Verlust seines Gesichts noch sein hohes Alter vermochten Eulers Arbeitsliebe zu erschöpfen. Sein Versprechen, der Petersburger Akademie so viele Abhandlungen zu liefern, daß sie auf zwanzig Jahre nach seinem Tode hinreichen sollten, hat er gehalten. Er starb 1783 und 1830 erschien in den Petersburger Memorien ein Aufsatz von ihm über die unbestimmte Analysis.

In einem Aufsatze De décomposer les nombres entiers non-carrés en deux, trois ou quatre carrés[1]) werden von Christian Friedrich Kausler (1760—1825) aus Tübingen Rechnungsregeln abgeleitet, um eine ganze Zahl, die keine Quadratzahl ist, in die Summe von zwei, drei oder vier ganzen Quadratzahlen zu zerlegen. Dabei spielen die pronischen Zahlen, d. h. Zahlen von der Form $m(m + 1)$, eine hervorragende Rolle. In einer Tabelle werden alle pronischen Zahlen bis 50850 aufgezählt.

Im Jahre 1798 (an VI) veröffentlichte Legendre in Paris sein berühmtes Werk Essai sur la théorie des nombres. Eine zweite Auflage erschien 1808, eine dritte, mit dem Titel Théorie des nombres, 1830. Während der zweite Teil von Eulers Algebra, mit den Lagrangeschen Zusätzen, viele der höheren Resultate der Zahlentheorie unberührt läßt, bringt Legendre alles, was er finden konnte, in seinem Werke zusammen. Seine eigenen Untersuchungen von 1785 sind hier in vollendeter Form wiedergegeben. Ein geregeltes Werk darf man es aber nicht nennen. Es fehlt der leitende Faden allgemeiner Methoden. Dessenungeachtet war es hoch geschätzt und während mehrerer Dezennien waren dieses und Gauß' Disquisitiones arithmeticae die einzigen Bücher über die höheren Teile der Zahlentheorie. Auf S. 186 führt er die jetzt als das

[1]) N. Acta Petr., ad annum 1793, Petropoli 1798, hist. p. 125—156.

„Legendresche Symbol" bekannte Bezeichnung $\left(\frac{N}{c}\right)$ ein, die den Rest $+1$ oder -1 ausdrückt, den man bei der Division von $N^{\frac{c-1}{2}}$ durch die Primzahl c erhält. In diesem Werke wird zum erstenmal der Name „Reziprozitätsgesetz" gebraucht. Er drückt nun „la loi de réciprocité" in eleganter Form so aus (S. 214): „Quels que soient les nombres premiers m et n, s'ils ne sont pas tous deux de la forme $4x-1$, on aura toujours $\left(\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)$, et s'ils sont tous deux de la forme $4x-1$, on aura $\left(\frac{n}{m}\right)=-\left(\frac{m}{n}\right)$. Ces deux cas généraux sont compris dans la formule $\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)$". Es ist Legendre hier nicht gelungen, die Mängel im Beweise dieses Satzes, den er 1785 gab, zu heben, obwohl er es möglich fand, die früheren unbewiesenen Voraussetzungen über die Existenz gewisser Primzahlen einigermaßen einzuschränken.

Im Rückblick sieht man, daß durch die Untersuchungen von Euler, Lagrange und Legendre die Zahlentheorie energisch gefördert wurde. Diese Forscher richteten ihre Kräfte auf folgende Themata: Die Teilbarkeit der Zahlen, die Sonderung der Primzahlen, das Studium der quadratischen Reste (welches in der Entdeckung des Reziprozitätsgesetzes gipfelte), die Betrachtung der höheren Potenzreste, die öfters auf Grund von Identitäten erlangte Lösung oder Auflösbarkeit verschiedener unbestimmter Gleichungen oder Gleichungssysteme, die Zerfällung von Zahlen in ihre Summanden, die Betrachtung von binären, ternären und anderen quadratischen, kubischen oder quartischen Formen, die Darstellbarkeit bestimmter Zahlen in Formen dieser Art und die Auffindung der möglichen Teiler derselben.

Unter den Einzeluntersuchungen über Zahlentheorie während des Zeitraumes 1759—1799 ist erstlich eine interessante Schrift von Élie de Joncourt, betitelt De la nature et des principaux usages de la plus simple espèce de nombres trigonaux, à la Haye, 1762, zu nennen. Er war Professor der Philosophie und Prediger zu Bois-le-Duc. Er gibt eine Tafel der Trigonal- und der entsprechenden natürlichen Zahlen, zeigt wie diese zur Auffindung des Produktes zweier Zahlen der Quadrat- und Kubikwurzel einer Zahl verwendet werden kann, und bemerkt an einer Stelle, daß Logarithmen keine einfachere Rechnungsmethode liefern.

Albrecht Euler, der älteste Sohn Leonhard Eulers, veröffentlichte eine Schrift, Beantwortung einiger arithmetischen Fragen[1]), worin das Problem gelöst wird, durch eine Formel die

[1]) Abhandl. d. Churbayerisch. Akad., Bd. II, 2. Teil, S. 5—36, 1764.

Anzahl Ziffern auszudrücken, welche erforderlich sind, eine Zahl b von einer größeren Zahl a nach der gewöhnlichen Art so oft abzuziehen, bis ein Rest übrig bleibt, welcher kleiner als b ist. Dann werden Modifikationen dieses Problems betrachtet, wie z. B., a und b so zu bestimmen, daß die Anzahl der erforderlichen Ziffern gleich a ist.

In einem Aufsatze, De proprietate numerorum divisibilium per 11, 111, 1111 etc.[1]) setzt Giannantonio Andrea Castelvetri (? —1766) von Bologna frühere Untersuchungen fort[2]) und findet für 11, 111, 1111, ... Eigenschaften, welche denen von 9 und 3 analog sind. Um zu sehen, ob 83976426643 durch 111 teilbar sei, nehme man die Summe der dreizifferigen Perioden, so $643 + 426 + 976 + 83 = 2128$, dann die Summe $128 + 2 = 130$. Da nun $130 : 111$ den Rest 19 gibt, ist die vorgelegte Zahl durch 111 nicht teilbar und 19 bleibt bei der Division übrig. Die Zahl 93297809286 ist durch 1111 teilbar, denn $9286 + 9780 + 932 = 19998$, $9998 + 1 = 9999$, und letztere Summe ist durch 1111 teilbar. Eine zweite Eigenschaft erklärt sich durch zwei Beispiele. Ob die Zahl $73\dot{4}86\dot{5}29\dot{4}66$ durch 111 teilbar sei, kann man so ausfinden: $66 + 29 + 86 + 73 = 254$, $(4 + 5 + 4)\,11 = 143$, $254 - 143 = 111$, deshalb ist die gegebene Zahl durch 111 teilbar. Die Zahl $\dot{3}214\dot{9}0128\dot{2}11$ ist durch 1111 nicht teilbar, denn $211 + 012 + 214 = 437$, $(3 + 9 + 8)\,111 = 2220$, $437 - 2220 = -1783$, $-1783 + 1111 \times 2 = 439$, und 439 ist der bei der Division erhaltene Rest. Castelvetri bemerkt, daß für die Zahl 11, der „doctissimus Pater G. H." diese Eigenschaft hergeleitet habe.

In einem Aufsatze Méthode pour résoudre plusieurs problèmes indéterminés[3]) löst De la Bottière vier Aufgaben, deren

---

[1]) De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii, T. V, Pars altera, Bononiae 1767, p. 108—119. [2]) In einer vor Anfang unserer Zeitperiode veröffentlichten Abhandlung De quadam generali numerorum proprietate (De Bononiensi Scientiarum et Artium Inst. atque Acad. Comm., T. IV, Bononiae, 1757, Opuscula, p. 242—259; Commentarii, p. 113—144) zeigt er, daß die Eigenschaften der einfachen Zahlen (d. h. der Ziffern), die Fontenelle in der Histoire de l'Académie Roy. des Sciences, Paris 1728, gefunden, und Frédéric Sanvitali, S. J., in der Storia Letteraria d'Italia, T. VI, p. 761, bewiesen habe, sich auf alle ganzen Zahlen verallgemeinern lassen. Diese Arbeiten veranlaßten Francisco Maria Zanotti, die Zahlen 9 und 3 näher zu betrachten (De Bononiensi Scientiarum etc., T. IV, Commentarii, p. 113—144), den Satz zu erweitern: Si numerus quispiam multiplex sit numeri 9, ac figurae ejus omnem in unam summam conferantur, erit haec quoque summa multiplex numeri 9, und seine Resultate, in Bezug auf 9, auf die Ziffer 3 anzuwenden. [3]) Mémoires de math. et de phys. présentés ... par divers savans, Tome IV, Paris 1763, p. 33 bis 65.

drei aus Saundersons Algebra entnommen sind und auf der Auflösung unbestimmter Gleichungen ersten Grades beruhen. In der ersten sollen Vielfache von zwei ungleichen ganzen Zahlen a, b, deren Differenz eine Minimalzahl m sei, gefunden werden. Die Minimalzahl wird durch den Algorithmus des größten gemeinschaftlichen Divisors gefunden; dann wird $ax - by = \pm m$ aufgelöst. Die zweite Aufgabe, zwei positive ganze Zahlen zu finden, die durch zwei Divisoren d' und d'' dividiert die Reste r' und r'' lassen, wird auf Kalenderfragen, betreffend Sonnen- und Mondzykeln, angewandt.

Jean Joseph Rallier des Ourmes (1701—1771) von Rennes, welcher arithmetische Artikel für die große französische Enzyklopädie schrieb und Regeln zum Aufsuchen von Primzahlen vorschlug[1]), schrieb auch einen Aufsatz[2]), worin er eine schnelle Methode, n ganze Zahlen zu finden, angibt, wenn man das Produkt einer jeden mit der Summe der übrigen kennt. Hat man z. B.

$$x(y+z) = 49, \quad y(x+z) = 45, \quad z(x+y) = 24,$$

wo $n = 3$ ist, soll man die $n-1$ kleineren Zahlen in Faktorenpaare zerlegen, so: für 24, $\frac{1}{24} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6}$; für 45, $\frac{1}{45} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{5}{9}$. Nun suche man diejenigen Faktorenpaare aus, deren Faktoren eine gleiche Summe haben. Diese sind $\frac{2}{12}, \frac{5}{9}$. Die kleineren Faktoren 2 und 5 sind zwei der gesuchten Zahlen, und die dritte ist $14 - 2 - 5 = 7$. Man hat also $x = 7$, $y = 5$, $z = 2$.

Der Astronom Joseph Stepling (1716—1778) führt Beweise einiger Eigenschaften des Neuners[3]) an. Er zeigt z. B., daß wenn n irgend eine Ziffer ist, die Ziffern des Produktes $9n$ die Summe 9 haben.

Im Jahre 1788 veröffentlichte A. G. Kästner die Lösung der folgenden unbestimmten Aufgabe[4]): Drei Bäuerinnen (A, B, C) haben je eine gegebene, von der andern unterschiedene Anzahl Eier (a, b, c). Jede verkauft ihre Eier auf zweimal, das erstemal eine so teuer als die andere (m), und so auch das zweitemal (n). Am Ende hat eine soviel gelöst wie die andere. Wieviel von ihren Eiern hat jede das erstemal verkauft (x y, z)? Und wie verhalten sich die Preise des ersten und des zweiten Verkaufs $\left(\frac{m}{n}\right)$? Man erhält die Gleichungen $mx + n(a-x) = my + n(b-y) = mz + n(c-z)$, wo a, b, c, x, y, z,

---

1) Mémoires de math. et de phys. ... Tome V, 1768, p. 485—499.

2) Ebenda, Tome V, Paris 1768, p. 479—484.

3) Abh. einer Privatgesellsch. in Böhmen, 1. Bd., Prag 1775, S. 141—144.

4) Leipziger Magazin f. d. r. u. angew. Mathematik, Leipzig 1788, S. 215—227.

$(a-x)$, $(b-y)$, $(c-z)$ positiv und ganzzahlig sind. Kästner leitet Gleichungen ab, so daß für irgend eine Voraussetzung für x die zugehörigen Werte von y, z, m, n durchgezählt werden können. In einer zweiten Lösungsmethode braucht er die Symbole da und dx für „Änderungen von endlicher Größe“, wo $\frac{dx}{da}$ positiv oder negativ ist, je nachdem der Preis wächst oder abnimmt. Diese Rechnungsaufgabe ist eine Verallgemeinerung einer Aufgabe, die Johann Prätorius in seinem Abentheuerlichen Glückstopf (1669) löste.

Ein andermal nimmt Kästner ein Exempel aus Lilles Amusemens mathématiques, 1749, wo ein Blinder augenblicklich das Produkt von $999\ldots(n-1$ Ziffern) mit $666\ldots(n-1$ Ziffern) zu finden weiß, und leitet die Regel ab[1]), die das Produkt liefert. Von der rechten Hand gegen die linke hat man folgende Ziffern: $4, 33\ldots$ ($n-1$ Ziffern), $5, 66\ldots$ ($n-1$ Ziffern). Dann folgt die Regel für irgend eine Ziffer statt 6 und die Auflösung eines Problems in der arithmetica divinatoria.

In einer Jugendarbeit On the resolution of indeterminate problems[2]) sucht John Leslie (1766—1832) größere Uniformität in die Auflösung unbestimmter Probleme einzuführen. Ist $A \,.\, B = C \,.\, D$, m eine rationale Zahl, und nimmt man in $A \,.\, mB = C \,.\, mD$, $A = mD$ an, dann folgt $mB = C$. Dieses Prinzip wird auf 14 Probleme angewandt. Das 13. heißt: Eine Kubikzahl zu finden, die dem Produkte eines Quadrats und einer gegebenen Zahl gleich sei. Man hat $x^3 = ay^2$ oder $x \,.\, x^2 = a \,.\, y^2$. Nun setze man $x = ma$ und $y^2 = mx^2$. Dann $y^2 = m^3a^2$, und $y \,.\, y = ma \,.\, m^2a$. Durch eine zweite Annahme hat man $y = pma$ und $m^2a = py$. Da aber $x = ma$, so wird $y = px = \frac{x^2}{ap}$, $x = ap^2$, $y = ap^3$. Wenn nun $a = 3$, $p = 2$, dann ist

$$x = 3\,(2)^2 = 12 \quad \text{und} \quad y = 3\,(2)^3 = 24.$$

1) Archiv d. r. u. angew. Mathematik, 1799, S. 204—208. 2) Trans. Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. II, Pt. II, 1790, p. 193—212.

Verbesserungen.

S. 39 Z. 6 v. u. statt Lons le Saulnier lies Lons le Saunier.
S. 48 Z. 5 statt Ruggero lies Ruggiero.
S. 49 Z. 10 statt D'Abren lies D'Abreu.
S. 53 Z. 14 statt Rekahn lies Reckahn.
S. 57 Z. 9 statt Arithmetik lies Arithmetick.
S. 61 Z. 30 statt Chauncy lies Chauncey.
S. 62 Z. 10 statt G. Trenchant lies J. Trenchant.