Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Franz Adolph Taurinus

Ein Beitrag zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie

von

Paul Stäckel

Leipzig 1899

Quelle:

Zeitschrift für Mathematik und Physik / Supplement 14 (1899)
— zugleich
Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. – 9. Heft,
Seite 401–427

Franz Adolph Taurinus (1794-1874) studierte 1812 in Heidelberg Jura. Er war später als Privatgelehrter tätig und entwickelte bereits 1826 eine nichteuklidische Trigonometrie, über die er mit Gauss korrespondierte.

FRANZ ADOLPH TAURINUS.

EIN BEITRAG

ZUR VORGESCHICHTE DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE

VON

PAUL STÄCKEL

IN KIEL.

Im Jahre 1895 habe ich auf die bis dahin übersehene Thatsache hingewiesen, dafs FRANZ ADOLPH TAURINUS (1794—1874) zuerst angeregt durch seinen Onkel F. K. SCHWEIKART, alsdann beeinflufst durch GAUSS bemerkenswerte selbständige Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie angestellt und insbesondere schon 1826, demnach früher als LOBATSCHEFSKY und J. BOLYAI, eine nichteuklidische Trigonometrie mit Anwendungen auf geometrische Probleme durch den Druck veröffentlicht hat[1]). Auf Grund weiterer Nachforschungen beabsichtige ich hier meine damaligen Mitteilungen in verschiedenen Punkten zu vervollständigen. Vor allem darf ich mit Erlaubnis der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen drei in deren Besitz befindliche Briefe von TAURINUS an GAUSS aus den Jahren 1824, 1825 und 1829 der Öffentlichkeit zugänglich machen, Briefe, die zu dem bereits bekannten Schreiben von GAUSS an TAURINUS (aus dem Jahre 1824)[2]) eine wichtige Ergänzung bilden.

1.

Taurinus' Lebensgang.

FRANZ ADOLPH TAURINUS wurde am 15. November 1794 zu König im Odenwalde, dem damaligen Regierungssitze der Schönbergischen Linie der Grafen ERBACH, geboren. Seine Eltern waren JULIUS EPHRAIM TAURINUS, gräflich Erbach-schönbergischer Hofrat, und LUISE JULIANE SCHWEIKART. Bereits im Jahre 1800 starb der kränkliche Vater, und die Mutter siedelte nach Ingelfingen über, wo ihr Schwiegervater als Hofrat in Fürstlich HOHENLOHEschen Diensten stand; er starb jedoch schon 1802. Im Jahre

1) Siehe den VI. Abschnitt des von mir in Gemeinschaft mit FRIEDRICH ENGEL herausgegebenen Werkes: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gaufs, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895, das ich im Folgenden mit P. Th. anführen werde.

2) P. Th. S. 249—250. Am Schlusse des Bandes befindet sich ein Facsimile dieses Briefes.

1811 schloſs sie eine zweite Ehe mit dem Juristen Fürer in Stuttgart. Fürer war zuerst Rechtsanwalt und Notar gewesen und dann in den Württembergischen Staatsdienst übergetreten. Aus dieser Ehe stammte der 1898 zu Dürrenberg bei Corbetha verstorbene Pastor Fürer, dem ich die folgenden Mitteilungen über Taurinus' Leben verdanke.

Nachdem Taurinus zuerst in Ingelfingen von dem dortigen Hofprediger und dann in Reichelsheim, dem Geburtsorte seiner Mutter, von seinem Onkel, dem Pfarrer August Schweikart, unterrichtet worden war, absolvirte er die Prima des Gymnasiums zu Darmstadt und ging 1814 nach Heidelberg, um sich der Jurisprudenz zuzuwenden. Im Jahre 1815 hat er sich in Paris aufgehalten, wo sein Vater, der inzwischen in die preuſsische Rheinprovinz übergesiedelt war und während des Krieges eine Stellung bei der Armeepolizei bekleidet hatte, zeitweilig das IX. Arrondissement verwaltete. Nach seiner Rückkehr bezog er 1816 die Universität Gieſsen und ging bald darauf nach Göttingen, wo „er sich in einer einsamen Gartenwohnung in seine Speculationen vergrub"; unüberwindliche Scheu vor öffentlichem Auftreten soll ihm sein ganzes Leben hindurch eigen gewesen sein. Seit Ostern 1822 hat er ohne Amt und Beruf, sich mannigfachen wissenschaftlichen Beschäftigungen widmend, in dem Hause seines Schwagers, des Justizrates Alexander Hasenclever in Köln, gewohnt, der eine der glänzendsten Zierden der rheinischen Advocatenbank war, und nach dessen 1838 erfolgtem Tode ist er Hausgenosse seiner Schwester, der Witwe Hasenclever's, geblieben.

Taurinus' hinterlassene Papiere zeigen, daſs er sich nicht nur beträchtliche Kenntnisse in der höheren Analysis und in der mathematischen Physik angeeignet, sondern daneben auch philosophische und linguistische Studien getrieben hat. Veröffentlicht hat Taurinus nur zwei kleine Schriften, die sich auf die Grundlagen der Geometrie beziehen (1825 und 1826). Über ihre Entstehung und ihre Bedeutung für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie soll in den beiden folgenden Abschnitten ausführlich gehandelt werden. Hier sei nur bemerkt, daſs sie nicht die Anerkennung der Mathematiker von Fach fanden, auf die Taurinus gehofft hatte. Er hat zwar noch erlebt, daſs die Ideen, die er 1826 entwickelt hatte, sich siegreich Bahn brachen, denn zu der Zeit, wo er sein Leben beschloſs, — er ist am 13. Februar 1874 gestorben — begannen die Untersuchungen von Lobatschefskij und J. Bolyai, Riemann und Helmholtz bereits Verständnis zu finden, allein es ist anzunehmen, daſs diese erfreuliche Wandlung ihm verborgen geblieben ist.

2.

Die Theorie der Parallellinien vom Jahre 1825.

Aufser dem bereits erwähnten Pfarrer August Schweikart hatte Taurinus' Mutter noch einen 1780 in Erbach geborenen Bruder Ferdinand Karl Schweikart. Dieser ist von 1812 ab in Charkow, von 1816 ab in Marburg, von 1821 ab[3]) in Königsberg Professor der Rechte gewesen und dort 1859 gestorben[4]). Schweikart, der sich, wie das gerade bei Juristen früher nicht selten gewesen zu sein scheint, seit seiner Studienzeit für Mathematik interessirte, hatte 1807 eine von gründlichem Studium der betreffenden Literatur zeugende Schrift: Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie erscheinen lassen, in der er noch ganz auf dem Boden der Euklidischen Elemente stehend das elfte Axiom durch das „Postulat von Quadraten" ersetzt. Später hat er Untersuchungen angestellt, die mit denen von Saccheri und Lambert auf eine Stufe zu stellen sind, und hat sich schliefslich zu der Conception einer widerspruchsfreien Geometrie durchgearbeitet, in der das elfte Axiom nicht gilt und die Summe der Winkel des Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist. Im Jahre 1819 legte er seine bereits während seines Aufenthaltes in Charkow gewonnenen Ideen durch Vermittelung seines Kollegen Gerling, eines Schülers von Gauss, diesem vor. Gauss' Antwort begann mit den Worten:

„Die Notiz von Hr. Pr. Schw. hat mir ungemein viel Vergnügen gemacht und ich bitte ihm darüber von mir recht viel Schönes zu sagen. Es ist mir fast alles aus der Seele geschrieben"[5]).

---

3) P. Th. S. 243 heifst es 1820. Dass diese aus Justi's Hessischer Gelehrten-Geschichte (Marburg 1831, S. 622) entnommene und auch in Poggendorff's Handwörterbuch (Leipzig 1863, Bd. II, Spalte 875) übergegangene Angabe unrichtig ist, zeigt ein Brief von Olbers an Bessel vom 20. Mai 1821 (Briefwechsel zwischen Olbers und Bessel, herausgegeben von Ermann. Bd. II. S. 195), in dem dieser schreibt: „Ich kann den Herrn Professor Schweickhard nicht abreisen lassen, ohne ihm einige Zeilen mitzugeben. Ich hoffe, Sie werden in diesem neuen Kollegen einen angenehmen Gesellschafter und vielleicht Freund erhalten."

4) Winter (Artikel „Ferdinaed Karl Schweikart", Allgemeine Deutsche Biographie. Bd. 33, Leipzig 1891. S. 388) hat als Todesjahr 1857 bezeichnet. Diese P. Th. S. 243 übernommene Angabe ist irrtümlich, Schweikart ist vielmehr, wie die Akten der Universität Königsberg zeigen, am 17. August 1859 gestorben; dasselbe Datum findet sich auch in Poggendorff's Handwörterbuch, Bd. II. Spalte 875.

5) P. Th. S. 246. Es ist mir inzwischen gelungen, diese merkwürdige Notiz von Schweikart aufzufinden, die ebenso wie der vollständige Brief von Gauss an

Von seiner Entdeckung, „dafs unsere Geometrie nur eine relative Wahrheit habe, und dafs es eine höhere, welche ich die Astralgeometrie nenne, gebe", hat SCHWEIKART seinem Neffen TAURINUS, von dessen mathematischer Begabung er eine hohe Meinung gehabt zu haben scheint, in einem Briefe vom 1. October 1820 Mitteilung gemacht und ihn aufgefordert, er möge doch zu ihm kommen. Er wies ihn darauf hin, dafs GAUSS auf demselben Wege sei, und schlofs mit den Worten: „In kurzer Zeit würde ich Dich in diese Ansicht einführen können und Deinem Erfindungstriebe ein weites Feld eröffnen"[6]).

TAURINUS hat dieser Einladung nicht Folge geleistet. Er sagt in seiner Theorie der Parallellinien (S. 91), dafs er sich mit der Astralgeometrie seines Onkels nicht habe befreunden können[7]). Erst 1824, also zu einer Zeit, wo er bereits in Köln bei seinem Schwager lebte, hat er sich wieder geometrischen Studien zugewendet, veranlafst durch den Umstand, dafs ihm „die 1807 in Jena erschienene Schrift desselben SCHWEIKART in die Hände fiel". Er erkannte den Grundfehler von dessen Demonstrationen in dem Postulate von Quadraten und versuchte auf anderem Wege das elfte Axiom zu beweisen. Seinen Beweisversuch teilte er SCHWEIKART mit, der ihm in einem Briefe vom 12. November 1824 dessen Unzulänglichkeit darlegte und abermals auf seine Astralgeometrie hinwies, die GAUSS' Zustimmung gefunden habe[8]).

Noch ehe diese Antwort eintraf, hatte TAURINUS, der inzwischen in seinen Untersuchungen weiter gerückt war und denselben Weg eingeschlagen hatte, auf dem SACCHERI und LAMBERT ihm vorangegangen waren, sich an GAUSS selbst gewendet. Sein Brief lautete folgendermafsen:

„Euer Hochwohlgeboren

haben Sich durch die ausgezeichnetsten Verdienste um die Mathematik einen so hohen Ruhm begründet, dass ich keinen Augenblick zweifelhaft sein konnte, an wen ich mich mit einem Anliegen von höchstem Interesse mit dem grössten Vertrauen zu wenden hätte.

Was so vieljährigen Bemühungen der besten Mathematiker nicht gelungen ist, eine befriedigende Theorie der Parallellinien aufzustellen, und so einem Mangel der Elementargeometrie abzuhelfen, den jeder Freund der-

---

GERLING vom 16. März 1819 in dem demnächst erscheinenden VIII. Bande von GAUSS' Werken abgedruckt werden wird.

6) P. Th. S. 249.

7) Vergleiche auch die Einleitung zu den *Geometriae prima elementa*, S. V, P. Th. S. 247.

8) P. Th. S. 245—246 sowie GAUSS' Werke Bd. VIII.

selben unangenehm empfinden musste — das schwebt mir, wenn mich nicht alles täuscht, als ein erreichbares, ja halb erreichtes Ziel vor.

Der innliegende Versuch wird Euer Hochwohlgeboren die Überzeugung verschaffen, ob meine Hoffnung begründet ist, und ich darf wohl um die Gewogenheit bitten, sobald mein Versuch Ihren Beifall hat, mir Ihre Ansicht hierüber baldmöglichst mitzutheilen.

Mit der grössten Hochachtung

Euer Hochwohlgeboren
ergebenster Diener
A. Taurinus
bei R. Anwalt Hasenclever.

Cöln am Rhein
den 30. October 1824.

Wenn *ab*, *cd* zwei gerade Linien sind, die von einer dritten *ef* unter rechten Winkeln geschnitten werden, und es wird von der *ab* auf die *cd* ein Loth *ik* gefällt, so bleibt es zweifelhaft, was sich bei *i* für ein Winkel *gik* bilde, ob ein stumpfer, ein rechter oder ein spitzer Winkel?

Es werde vorerst angenommen, Winkel *gik* sey $> 2R$, so lässt sich folgendes beweisen:

1.) alle von *ab* auf *cd* gefällten Lothe werden desto kleiner, je weiter sie von *ef* abstehen.
2.) Dabei werden die Winkel *gik*, *glm* ... immer stumpfer.
3.) Zuletzt müssen sich *ab* und *cd* gehörig verlängert, schneiden.

Beweis.

1.) Es sey $hk = gh = km = mo$, und Winkel *gik* stumpf, so ist $ik < gh$.

Denn es sey eben so gross, so wären bei *i* rechte Winkel, wider die Voraussetzung.

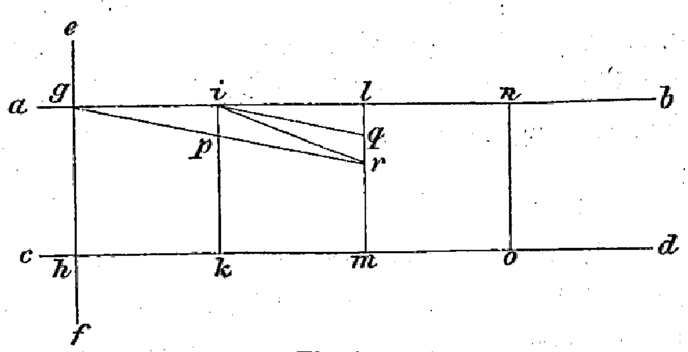

Fig. 1.

Oder es sey *ik* grösser, dass also z. B. $pk = gh$. Ziehe *gp*, so ist Winkel $gpk = pgh$: aber $pgh < R$, um so mehr $gip < R$, wider die Annahme.

Ferner ist $lm < ik$. Denn es sey eben so gross, so ist Winkel $lik =$ Winkel *ilm*. Fälle das Loth *iq*, welches, da $ilm = lik$ ein spitzer Winkel ist, zwischen *l* und *m* fallen muss: alsdann wäre $qm = gh > ik > lm$, was unmöglich ist.

Oder es sey $lm > ik$, z. B. $rm = ik$. Ziehe ir, gr. Es lässt sich beweisen, dass $grm > grh$, weil $gh > rm$. Es ist $rik = irm > grm > rgh$: ferner $ril > rgl$, folglich $kil > hgl > R$, wider die Voraussetzung, dass $gik > R$.

Ein ähnlicher Beweis lässt sich für alle Lothe führen, nicht nur wenn $hk = gh = km \ldots$, sondern ganz allgemein für alle Lothe: sie werden desto kleiner, je mehr sie sich von cf entfernen.

2.) Nun sey also $lm < ik$. Fälle die Lothe $l\alpha$, $i\beta$, so ist $i\beta < l\alpha$: denn wenn dieses Verhältniss bei den Linien ab, cd, die von der ef

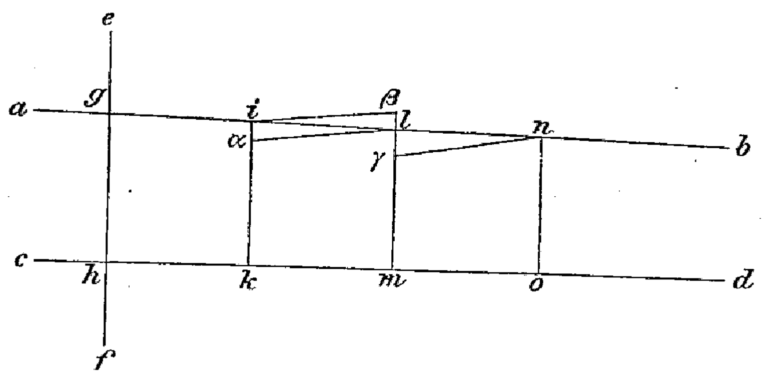

Fig. 2.

rechtwinklicht geschnitten werden, stattfindet, so muss das nemliche auch von den Linien ki, ml gelten, die bei k und m auf der cd rechtwinklicht stehen, zumal wenn $km = gh$: denn ausserdem wäre keine Geometrie möglich. Ist aber $i\beta < l\alpha$, so ist auch $il\beta < li\alpha$, und da $il\beta = mln$, so folgt daraus, dafs die Winkel lik, nlm u. s. w. desto kleiner werden, je weiter die Lothe von ef sich entfernen.

3.) Sehr leicht folgt daraus, dafs, wenn die Lothe $l\alpha$, $n\gamma$ u. s. w. gefällt werden, $l\gamma > i\alpha$ u. s. w., dagegen $k\alpha > lm$, $\gamma m > no$ (da $n\gamma > l\alpha$ u. s. w.) — woraus sich denn auch mit Nothwendigkeit auf ein Schneiden der Linien ab, cd schliefsen lässt, sobald sie nur gehörig verlängert werden, es mag auch $i\alpha$ anfangs noch so unendlich klein sein.

Es lässt sich dagegen auf mehr als eine Art der Beweis führen, dass zwei Linien, die auf einer dritten senkrecht stehen, sich unmöglich schneiden können. Daher ist es denn auch eine unrichtige Voraussetzung, dass wenn zwei Linien von einer dritten unter rechten Winkeln geschnitten werden, und von der einen auf die andre ein Loth gefällt wird, dieses nach der schneidenden Linie zu einen stumpfen Winkel bilde.

Hieraus ergiebt sich der Satz, dafs die Winkel eines Dreiecks zusammen nie mehr als 2 Rechte ausmachen können. Denn diefs sey der Fall in ABC: fälle AD. Es seyen auch in ADC mehr als 2 R: construire das ähnliche Dreieck ACE, dafs $AE = DC$: es ist also $EAD = DCE, > R$. Errichte das Loth AF und CF, so wäre $AFC > R$, welches nach dem obigen unmöglich.

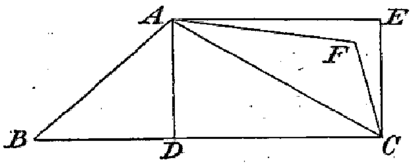

Fig. 3.

Nun lässt sich, wie ich glaube, auch der Beweis führen, dass die Winkel eines Dreiecks nicht kleiner sein können, als 2 R, sondern = 2 R: daraus ergiebt sich dann weiter, dafs wenn 2 Linien mit einer dritten sie schneidenden nach einer Seite hin weniger als 2 R machen, sie sich nothwendig schneiden müssen."

Um auf diese Auseinandersetzungen genauer einzugehen, scheint es zweckmäfsig, zunächst GAUSS' Antwort mitzuteilen, die ich bereits 1895 (P. Th. S. 249—250) veröffentlicht habe. GAUSS schreibt am 8. November 1824:

Ewr. Wohlgeboren

gefälliges Schreiben vom 30 Oct. nebst dem beigefügten kleinen Aufsatz habe ich nicht ohne Vergnügen gelesen, um so mehr, da ich sonst gewohnt bin, bei der Mehrzahl der Personen, die neue Versuche über die sogenannte Theorie der Parallellinien [machen,] gar keine Spur von wahrem geometrischen Geiste anzutreffen.

Gegen Ihren Versuch habe ich nichts (oder nicht viel) anderes zu erinnern als dass er unvollständig ist. Zwar lässt Ihre Darstellung des Beweises, dass die Summe der drei Winkel eines ebnen Dreiecks nicht gröfser als 180° seyn kann in Rücksicht auf geometrische Schärfe noch zu desideriren übrig. Allein dies würde sich ergänzen lassen, und es leidet keinen Zweifel dafs jene Unmöglichkeit sich auf das allerstrengste beweisen läfst. Ganz anders verhält es sich aber mit dem 2ⁿ. Theil, dafs die Summe der Winkel nicht kleiner als 180° seyn kann; dies ist der eigentliche Knoten, die Klippe woran alles scheitert. Ich vermuthe, dass Sie sich noch nicht lange mit dem Gegenstande beschäftigt haben. Bei mir ist es über 30 Jahr, und ich glaube nicht, dafs jemand sich eben mit diesem 2ⁿ. Theil mehr beschäftigt haben könne als ich, obgleich ich niemals etwas darüber bekannt gemacht habe. Die Annahme, dafs die Summe der 3 Winkel kleiner sei als 180°, führt auf eine eigne von der unsrigen (Euclidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus consequent ist, und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so dass ich jede

Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln lässt. Je grösser man diese Constante annimmt, desto mehr nähert man sich der Euclidischen Geometrie und ein unendlich grosser Werth macht beide zusammenfallen. Die Sätze jener Geometrie scheinen zum Theil paradox, und dem Ungeübten ungereimt; bei genauerer ruhiger Überlegung findet man aber, daſs sie an sich durchaus nichts unmögliches enthalten. So z. B. können die drei Winkel eines Dreiecks so klein werden als man nur will, wenn man nur die Seiten groſs genug nehmen darf, dennoch kann der Flächeninhalt eines Dreiecks, wie groſs auch die Seiten genommen werden, nie eine bestimmte Grenze überschreiten, ja sie nicht einmahl erreichen. Alle meine Bemühungen einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser Nicht-Euclidischen Geometrie zu finden sind fruchtlos gewesen, und das Einzige was unserm Verstande darin widersteht, ist daſs es, wäre sie wahr, im Raume eine an sich bestimmte (wiewohl uns unbekannte) Lineargrösse geben müsste. Aber mir deucht, wir wissen, trotz der Nichts Sagenden Wort-Weisheit der Metaphysiker eigentlich zu wenig oder gar nichts über das wahre Wesen des Raumes, als daſs wir etwas uns unnatürlich vorkommendes mit Absolut Unmöglich verwechseln dürfen. Wäre die Nicht-Euclidische Geometrie die wahre, und jene Constante in einigem Verhältnisse zu solchen Grössen die im Bereich unsrer Messungen auf der Erde oder am Himmel liegen, so liesse sie sich a posteriori ausmitteln. Ich habe daher wohl zuweilen im Scherz den Wunsch geäuſsert, daſs die Euclidische Geometrie nicht die Wahre wäre, weil wir dann ein absolutes Maass a priori haben würden.

Von einem Manne, der sich mir als einen denkenden Mathematischen Kopf gezeigt hat, fürchte ich nicht, daſs er das Vorstehende misverstehen werde: auf jeden Fall aber haben Sie es nur als eine Privat-Mittheilung anzusehen, von der auf keine Weise ein öffentlicher oder zur Öffentlichkeit führenkönnender Gebrauch zu machen ist. Vielleicht werde ich, wenn ich einmahl mehr Musse gewinne, als in meinen gegenwärtigen Verhältnissen, selbst in Zukunft meine Untersuchungen bekannt machen.

Mit Hochachtung verharre ich

Ewr. Wohlgeboren
ergebenster Diener
C. F. Gauss.

Göttingen den 8 November
1824.

Aus diesen Briefen ergiebt sich zunächst, daſs Taurinus im October 1824 noch durchaus der Überzeugung war, das elfte Axiom könne und müsse bewiesen, d. h. aus den übrigen Voraussetzungen der Euklidischen

Elemente hergeleitet werden, daſs er die wesentliche Identität des elften Axioms mit dem Satze, daſs die Summe der Dreieckswinkel 2 Rechte betrage, erkannt und den Beweis für diesen Satz auf apagogischem Wege durchzuführen versucht hatte, daſs er von den beiden Möglichkeiten, die alsdann zu betrachten sind, nur die eine, bei der die Winkelsumme gröſser als 2 Rechte vorausgesetzt wird, genauer untersucht hatte und daſs es ihm gelungen war ihre Unvereinbarkeit mit den Voraussetzungen des Euklidischen Systems zu zeigen, daſs er jedoch auf diesem Wege bei weitem nicht so tief wie Saccheri und Lambert vorgedrungen war, welche schon 1733 und 1766 die „Hypothese des stumpfen Winkels" eingehend untersucht hatten, von deren Untersuchungen jedoch Taurinus damals noch keine Kenntnis besaſs.

Demgegenüber hatte sich Gauss zu derselben Zeit nicht nur nach langen Kämpfen, bei denen die Frage, ob man die Existenz einer an sich bestimmten Lineargröſse annehmen dürfe, eine wesentliche Rolle gespielt hat[9]) zu der Überzeugung von der logischen Unanfechtbarkeit einer „nichteuklidischen" Geometrie durchgerungen, in der die Summe der Winkel des Dreiecks kleiner als 2 Rechte ist, sondern auch diese neue Geometrie „für sich selbst ganz befriedigend ausgebildet"[10]). Die Worte: „Ich habe daher wohl zuweilen im Scherz den Wunsch geäuſsert, daſs die Euklidische Geometrie nicht die Wahre wäre, weil wir dann ein absolutes Maſs a priori hätten", die sich übrigens dem Sinne nach genau mit einer Äuſserung Lambert's decken[11]), stehen damit nicht in Widerspruch; der „Scherz" bezieht sich augenscheinlich nicht auf die nichteuklidische Geometrie, sondern allein auf die praktischen Folgen, die die Existenz eines absoluten Maſses haben würde.

Endlich wird durch die beiden Briefe die für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie bedeutungsvolle Thatsache festgestellt, daſs Gauss und Taurinus erst im Jahre 1824 in Beziehungen zu einander getreten sind, und da Gauss keine weiteren Briefe an Taurinus geschrieben hat, wird zugleich der Einfluſs, den jener auf diesen gehabt haben kann, genau festgelegt. Damit ist, worauf noch zurückzukommen sein wird, für Taurinus die selbständige Entdeckung der nichteuklidischen Trigonometrie gesichert, die freilich Gauss spätestens seit 1819 besessen haben muſs.

9) Weitere Aufschlüsse hierüber wird Bd. VIII der Gauss'schen Werke geben.

10) Eine ähnliche Äuſserung findet sich auch in dem Briefe an Gerling vom 16. März 1819. P. Th. S. 246. Siehe auch die Abhandlung von Friedrich Engel und mir: Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie, Mathematische Annalen, Bd. 49. S. 150—151, 1897.

11) Lambert's Parallelentheorie § 80, P. Th. S. 200.

Nimmt man die weitere Thatsache hinzu, dafs SCHWEIKART unabhängig von GAUSS die Idee der „Astralgeometrie“ concipirt hat — nach einer Äufserung GERLINGS bereits während seines Aufenthaltes in Charkow 1812—1816[12]) —, so ergiebt sich, dafs die Ansicht, alle Untersuchungen über nichteuklidische Geometrie gingen auf Anregungen von GAUSS zurück, nicht mehr haltbar ist. Damit aber verliert die Frage, ob die Untersuchungen von LOBATSCHEFSKIJ und JOHANN BOLYAI direkt oder indirekt durch GAUSS veranlafst sind[13]), ihre principielle Wichtigkeit; womit nicht geleugnet werden soll, dafs es sich hierbei um ein vom Standpunkte des Mathematikers wie des Historikers und Psychologen recht interessantes Problem handelt.

Doch kehren wir zu TAURINUS zurück, für den die freundliche Antwort, die ihm ein Mann wie GAUSS zukommen liefs, gewifs ein Ansporn gewesen ist, seine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie mit erneutem Eifer fortzuführen. So entstand seine erste Schrift, die Theorie der Parallellinien, deren Druck im März 1825 vollendet wurde. Ehe TAURINUS sein Erstlingswerk dem Buchhandel übergab, sandte er es an GAUSS und schrieb ihm bei dieser Gelegenheit folgenden Brief:

Euer Hochwohlgeboren

weifs ich meinen Dank für die höchst gütige und interessante Beantwortung der Anfrage, die ich vor ungefähr vier Monaten an Hochdieselbe zu richten so frei war, nicht besser erkennen zu geben, als durch Übersendung beifolgender kleiner Schrift, bevor sie noch ins Publicum kommt. Ich würde mich zur Herausgabe derselben schwerlich entschlossen haben, wenn mir gleich anfangs bekannt gewesen wäre, dafs LEGENDRE den Beweis, dem ich als einer ganz neuen Entdeckung einen bedeutenden Wert beizulegen geneigt war — dafs nemlich die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks zwei Rechte nicht übersteigen könne — bereits vollkommen befriedigend geführt hat, worauf mich erst Hr. Prof. v. MÜNCHOW in Bonn aufmerksam gemacht hat. Hierdurch verschwindet also das vorzüglichste Interesse, das die Schrift aufserdem für den Mathematiker hätte haben können: indessen enthält sie dennoch vielleicht eine oder die andere neue Ansicht.

Die neue Geometrie, auf welche Ew. Hochwohlgeboren wegen des, zu einer gründlichen Theorie der Parallelen noch fehlenden Beweises mich verweisen, ist mir seit vier Jahren nichts unbekanntes und mir zuerst von meinem Oncle, Professor SCHWEIKART, damals in Marburg, mitgetheilt worden:

---

12) Vergl. meine Bemerkung in ENGEL's Buch: NIKOLAIJ IWANOWITSCH LOBATSCHEFSKIJ, zwei geometrische Abhandlungen. Teil II. Leipzig 1899, S. 428.

13) P. Th. S. 242—243 und ENGEL, a. a. O., S. 378—382.

ich vermochte aber aus bloſsen Andeutungen nicht, die Idee davon aufzufassen, bis ich vor vier Monaten eben jenen Beweis, den ich Euer Hochwohlgeboren mitzutheilen die Ehre hatte, auffand und so von selbst auf den Versuch geleitet wurde, ein geometrisches System, in welchem die Summe der Dreieckswinkel kleiner, als zwei Rechte wäre, zu entwickeln. Da ich hierbei auf unerwartete Schwierigkeiten stieſs, so gab ich den Versuch bald auf und habe mich seitdem nicht mehr damit beschäftigt. Ich konnte um so eher darauf verzichten, als mein genannter Oncle mir bemerkt hatte, daſs Euer Hochwohlgeboren dieselbe Idee lange schon und weit verfolgt hätten. Indessen hat sich bei mir gleich anfangs die Ansicht gebildet, die ich in der beiliegenden Schrift auszusprechen gewagt habe.

Höchst schätzbar und schmeichelhaft wäre es mir, wenn Euer Hochwohlgeboren die kleine Schrift einer Durchsicht und Critik würdig fänden und die Gewogenheit haben wollten, mir Ihre Einwendungen dagegen oder das ganze Resultat Ihrer Beurtheilung mitzutheilen. Die Schrift wird auf keinen Fall vor vierzehn Tagen irgend jemanden bekannt werden und ich bin bereit sie sogleich ganz zu unterdrücken, wenn es Euer Hochwohlgeboren im mindesten unangenehm wäre, daſs der gedachte Gegenstand zur Sprache käme.

Mit der Versicherung der ausgezeichnetsten Hochachtung und Verehrung verharre ich

Euer Hochwohlgeboren
ergebenster Diener
F. A. Taurinus.

Cöln a. Rh., den 20. März 1825.

Aus dem später mitzuteilenden Briefe Taurinus' an Gauss vom 29. Dezember 1829 geht hervor, daſs Gauss das Schreiben vom 20. März 1825 nicht beantwortet hat. Wenig ermutigend war auch die Antwort, die W. A. Diesterweg (1782—1835), damals Professor der Mathematik an der Universität Bonn, ihm auf die Zusendung der Theorie der Parallelen am 15. September 1825 zugehen lieſs. Es heiſst darin:

„Ich halte es für eine äuſserst bedenkliche Sache, einen Theil seines Lebens der Aufstellung einer neuen Parallelentheorie zu widmen. Was Euklides nicht konnte, und alle groſsen Mathematiker nach ihm nicht konnten, ist gewiſs eine sehr schwer zu leistende Sache. Und ohne einen neuen Grundsatz an die Stelle des elften Euklidischen zu setzen, dürfte es wohl unausführbar sein“[14]).

14) Mitteilung von Pastor Fürer, vergl. S. 402 dieser Abhandlung.

Da die Theorie der Parallellinien eine ziemlich seltene Schrift ist[15]), sei es gestattet, eine kurze Übersicht ihres Inhaltes zu geben; die für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie wichtigen Stellen haben Engel und Stäckel wieder abgedruckt[16]). In der Vorrede (S. 3—14) beginnt Taurinus damit, „die hauptsächlichsten Ansichten, Vorschläge und Versuche über das elfte Euklidische Axiom anzuführen und die Gründe ihrer Unhaltbarkeit, ihres nothwendigen Mifslingens darzulegen“ und erklärt aldann, „dafs man von der Summe der Winkel im Dreiecke ausgehen und sich bestreben müsse, den Widerspruch aufzudecken, der sich aus einer willkürlichen Annahme derselben ergeben werde“. Er fährt fort:

„Der gegenwärtige Versuch mafst sich nicht an, zur Wahrheit, die zu erreichen so vielfache Bemühungen und Forschungen fruchtlos waren, endlich durchgedrungen zu sein und dem Urtheil der Mathematiker vorzugreifen. Es darf aber nicht unbemerkt bleiben, dafs über den 51ten Lehrsatz[17]) — und wir wüfsten nicht, was mehr zu seiner Empfehlung gereichen könnte — Herr Hofrath Gauss sich bereits beifällig ausgesprochen hat. Das bei dem Beweise desselben beobachtete Verfahren ist so eigenthümlich, dafs der Satz in dieser Gestalt gewifs zum erstenmal erscheint.“

Es folgen (S. 15—72) „Die ersten Elemente der Geometrie“. Nach Euklids Muster beginnen sie mit 52 Erklärungen und 2 Forderungen (Existenz einer Geraden durch zwei gegebene Punkte, eines Kreises mit gegebenem Mittelpunkt und Halbmesser). Dazu kommen, den *Κοιναὶ ἔννοιαι* Euklids entsprechend, 10 „allgemeine mathematische Grundsätze“, und endlich formuliert Taurinus, worauf er grofses Gewicht legt, den „Besonderen Grundsatz der Geometrie“, nach dem zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist.

Nunmehr wird in 70 Lehrsätzen und Aufgaben ein System der Elemente der Geometrie entwickelt, das manchen originellen Gedanken aufweist. Hier möge nur bemerkt werden, dafs in Lehrsatz 51 die Hypothese des stumpfen Winkels wesentlich in der Art, wie das in dem Briefe an Gauss vom 30. October 1824 geschehen war, abgewiesen wird. Während der Beweis

15) Wir haben sie 1895 nur auf den Königlichen Bibliotheken zu Berlin und Dresden, sowie auf den Universitätsbibliotheken zu Bonn und Jena (P. Th. S. 251), später auch auf der Bibliothek der technischen Hochschule zu Berlin vorgefunden.

16) P. Th. S. 255—266.

17) Theorie der Parallellinien S. 55: „Wenn zwei Linien von einer dritten unter rechten Winkeln geschnitten werden und ein Loth von der ersten auf die zweite gefällt, macht mit der ersten nach der Seite der dritten hin einen stumpfen Winkel, so können alle diese Linien keine geraden Linien sein.“

für Lehrsatz 51, bei dem mit Nachdruck die Voraussetzung hervorgehoben wird, dafs „es verstattet ist die gerade Linie ins unendliche verlängert vorzustellen", als gelungen bezeichnet werden kann, ist der Beweis für den folgenden Lehrsatz 52: „Unter den beiden übrigen geometrischen Systemen ist das Parallelsystem, in welchem ein Viereck vier Rechte enthalten kann, allein geradlinig" durchaus unzulänglich. Taurinus scheint das selbst gefühlt zu haben, da er in den den „Elementen" angehängten Erläuterungen (S. 73—88) gegen die Hypothese des spitzen Winkels acht weitere Gründe anführt (S. 86—87, P. Th. S. 258—259). Bemerkenswert ist, dafs er dabei, wohl durch Gauss' Brief beeinflufst, die „innere Consequenz des dritten Systems" ausdrücklich anerkennt, und zum Schlufs (S. 88) als seine Überzeugung ausspricht, „dafs es ein solches System allerdings gebe; dafs wir aber zweifeln, ob es eine geradlinige oder eine ebene Geometrie sein werde".

Den Schlufs des Werkchens bildet eine Nachschrift (S. 88—93, vergl. auch P. Th. S. 259—261), in der sich Taurinus über Legendre's Untersuchungen äufsert, die ihm erst während des Druckes durch die Vermittelung von Professor v. Münchow in Bonn (1778—1836) bekannt geworden waren.

Später, jedenfalls erst nach dem 20. März 1825, hat Taurinus seiner Schrift einen Nachtrag hinzugefügt (S. 95—102, P. Th. S. 261—266), der für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie von besonderer Wichtigkeit ist. Augenscheinlich hatten ihn die Gründe, die er gegen das dritte System ins Feld geführt hatte und die in Wahrheit, um mit Lambert zu reden, nur „argumenta ab amore et invidia ducta" waren[18]), auf die Dauer nicht befriedigt, und so war er dazu geführt worden, dieses System weiter zu entwickeln, in der Hoffnung, dadurch einen strengen Beweis für seinen Lehrsatz 52 zu gewinnen. Auf diese Weise ist er, wie vor ihm Saccheri, zu dem Begriffe der Grenzgeraden und zu dem Beweise der Existenz eines gemeinsamen Lotes sich nicht schneidender Geraden gelangt[19]) und hat, wie vor ihm Lambert, nachgewiesen, dafs dem dritten System eine „Bestimmungsgröfse" („Parameter, Axe, Potenz") eigen ist, die man willkürlich annehmen kann[20]). Indem er auf diese unvermeidliche Folge der Annahme einer von zwei Rechten verschiedenen Winkelsumme des Dreiecks hinwies, glaubte Taurinus dem Euklidischen Systeme die Alleinherrschaft gesichert zu haben, denn „es läfst sich" meinte er, „gar kein Grund ein-

18) Theorie der Parallellinien § 81, P. Th. S. 201.

19) *Euclides ab omni naevo vindicatus.* S. 43—45 und 68—70, P. Th. S. 87—89 und 107—109.

20) Theorie der Parallellinien § 79 und 80, P. Th. S. 199—201.

sehen, dem einen System vor allen andern eine ausschliefsliche Gültigkeit beizulegen, man mufs vielmehr die gleichzeitige Möglichkeit aller Systeme annehmen und es wären also, wenn man sie als geradlinig betrachten wollte, zwischen zwei Punkten unendlich viele gerade Linien denkbar".

3.

Die Geometriae prima elementa vom Jahre 1826.

Dafs der Theorie der Parallellinien die Anerkennung der Mathematiker von Fach nicht zu Teil wurde, hat Taurinus nicht entmutigt, war er doch selbst mit seiner Erstlingsschrift nicht zufrieden, „an der ihm vieles nicht gefiel"[21]. Dazu kam, dafs er gerade zu dieser Zeit Camerer's vortreffliche Ausgabe der Euklidischen Elemente (Bd. I. Berlin 1824) kennen lernte und aus dem *Excursus ad El.* I. 29 (S. 402—442), einer noch heute wertvollen Geschichte der Versuche das elfte Axiom zu beweisen, ersah, dafs die Beweismethode, auf die er in seiner Theorie der Parallelen hingewiesen hatte, bereits von Saccheri und Lambert, die wir im Vorhergehenden wiederholt erwähnt haben, angewandt worden war[22]. Der ursprüngliche Zweck der *Elementa* war daher eine neue, verbesserte Darstellung des Systems der Geometrie zu geben, das Taurinus in der *Theorie der Parallellinien* entwickelt hatte. Wie bei diesen die Nachschrift und der Nachtrag, so ist bei jenen, die nach dem Datum der Vorrede zu urteilen, bereits Ende 1825 druckfertig gemacht worden waren, nach Vollendung des Druckes ein Additamentum hinzugekommen, in dem Taurinus die Ergebnisse seiner inzwischen angestellten Untersuchungen niedergelegt hat, Untersuchungen, die ihn zur Entdeckung der nichteuklidischen Trigonometrie geführt hatten.

---

21) *Geometriae prima elementa* S. VI. P. Th. S. 248.

22) *Geometriae prima elementa* S. V. P. Th. S. 248. Dafs Camerer's Excursus in dem von Engel und mir herausgegebenen Werke: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss nur gelegentlich erwähnt (S. 248 und 319), aber nicht gebührend gewürdigt worden ist, liegt daran, dafs ich ihn erst während des Druckes kennen lernte. Vor allem hätte daselbst in der Einleitung S. III—IV hervorgehoben werden müssen, dafs schon Camerer mit grofsem Nachdruck und tiefem Verständnis auf die Untersuchungen von Saccheri und Lambert hingewiesen hat und dafs daher Beltrami für jenen, Stäckel für diesen nur als Nachentdecker gelten können.

Camerer's *Excursus* enthält auch noch eine Reihe weiterer für die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie wichtiger Literaturangaben, auf die ich bei andrer Gelegenheit eingehen zu können hoffe.

Auf die Einleitung (S. III—VI) folgen entsprechend den ersten Elementen der Geometrie die Geometriae prima elementa; sie enthalten nach einander 32 Definitiones, 2 Postulata, 6 Axiomata und 26 Propositiones; die 26$^{\text{te}}$ ist Euklids elftes Axiom. Den Schwerpunkt bildet die Propositio XXIV: „Omnis trianguli rectilinei tres anguli duobus rectis aequales sunt." Der Beweis wird apagogisch geführt. Bei dem Fall, daſs die Summe der Dreieckswinkel gröſser als 2 Rechte vorausgesetzt wird, benutzt TAURINUS LEGENDRE's Methode der Aneinanderreihung congruenter Dreiecke[23]). Bei dem Fall, daſs diese Summe kleiner als 2 Rechte vorausgesetzt wird, zeigt er zuerst, daſs diese Voraussetzung, falls sie bei einem einzigen Dreieck wirklich erfüllt ist, für jedes Dreieck gilt, beweist darauf die Existenz der LOBATSCHEFSKIJ'schen Grenzgeraden und leitet endlich die Existenz des absoluten Maſses her, dessen Willkürlichkeit bedingt, daſs es unendlich viele geometrische Systeme giebt, in denen die Summe der Winkel des Dreiecks kleiner als zwei Rechte ist. Aus dieser „Vielheit der möglichen Systeme" folgert er endlich, wie in dem Nachtrage zu der Theorie der Parallellinien, die Unzulässigkeit der Annahme eines solchen geometrischen Systemes.

Es folgen (S. 43—64) Observationes, von denen diejenigen zur Propositio XXIV (S. 53—64) am wichtigsten sind[24]). TAURINUS betont hier abermals, daſs die „neue Geometrie" in sich widerspruchslos sei, giebt die bei ihr geltende Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks und macht schlieſslich den Versuch eine die „gesamte Geometrie", also alle drei Hypothesen über die Winkelsumme, umfassende Trigonometrie herzuleiten. Sind nämlich α, β, γ die durch eine constante Linie $2\pi R$ dividirten Seiten a, b, c eines Dreiecks, und ist A der der Seite a gegenüberliegende Winkel, so setzt er die Formel an:

$$A = \frac{\operatorname{arc}\cos\left(\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}\right)}{\dfrac{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{C(2S+C)} + 1},$$

in der S die halbe Summe der Seiten und C eine willkürliche Constante bedeutet, und leitet daraus (S. 58—64) eine Reihe von Sätzen ab, die in der „neuen Geometrie" gelten sollen. Wenn auch ein groſser Teil dieser Sätze richtig ist, so muſs doch dieser Versuch einer nichteuklidischen Trigonometrie als durchaus miſsglückt bezeichnet werden.

23) LEGENDRE, *Élémens de Géométrie,* zweite Ausgabe, Paris 1799, Proposition XIX.

24) Vergl. P. Th. S. 269—270.

TAURINUS fährt jetzt fort: „Dies war bereits gedruckt, und es blieb mir nur noch übrig, meine Ansicht über das wahre Wesen dieser Geometrie vorzubringen, da gelangte ich endlich zu der Gewifsheit, dafs sich diese meine Ansicht wirklich beweisen läfst. Von Anfang an hatte ich nämlich die Vermutung gehegt, dafs eine solche Geometrie gewissermafsen die Umkehrung der sphärischen sei, dafs sie Logarithmen mit sich bringe und sich aus der allgemeinen Formel der sphärischen Geometrie herleiten lasse, und ich würde mich darüber wundern, dafs ich eine Sache, die so klar ist und die für jedermann auf der Hand liegt, nicht früher durchschaut habe und so grofse Weitläufigkeiten nötig hatte, wenn ich mich nicht erinnerte, dafs gerade Dinge, die ganz selbstverständlich erscheinen, oft sogar bedeutenden Männern lange verborgen geblieben sind. Die Formel

$$A = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\cos\alpha i - \cos\beta i \cdot \cos\gamma i}{\sin\beta i \cdot \sin\gamma i}\right) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

wird eine Geometrie bestimmen, bei der alle Dreiecke weniger als zwei Rechte enthalten, wenn nämlich für den imaginären Cosinus oder besser für den Cosinus des imaginären Bogens irgend eine Zahl gesetzt wird, die gröfser als die Einheit ist. Dabei müssen jedoch von den Zahlen α, β, γ je zwei zusammen gröfser als die dritte sein: ich denke mir nämlich, dafs diese Zahlen die durch eine gewisse constante Linie R geteilten Seiten eines Dreiecks sind [während A den der Seite a gegenüberliegenden Winkel bedeutet]."

Diese Zeilen zeigen, dafs TAURINUS am Anfange des Jahres 1826 durch eine geniale Intuition zu der fundamentalen Entdeckung gelangt war, dafs die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie aus denen der sphärischen Trigonometrie hervorgehen, wenn man den Radius der Kugel imaginär setzt. Ich habe bei einer andern Gelegenheit darauf hingewiesen[25]), dafs LAMBERT diesem Gedanken schon sehr nahe gewesen war, indem er folgende Bemerkung machte[26]):

„Hierbey scheint mir merkwürdig zu seyn, dafs die zwote Hypothese statt hat, wenn man statt ebener Triangel sphärische nimmt, weil bei diesen sowohl die Summe der Winkel gröfser als 180 Gr. als auch der Überschufs dem Flächenraume des Triangels proportional ist. Noch merkwürdiger scheint es, dafs, was ich hier von den sphärischen Triangeln sage, sich ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien erweisen lasse, und keinen andern Grundsatz voraussetzt, als dafs jede durch den Mittelpunkt der

25) P. Th. S. 252.

26) Theorie der Parallellinien § 82, P. Th. S. 145 und 202—203.

Kugel gehende ebene Fläche die Kugel in zween gleiche Theile theile. Ich sollte daraus fast den Schluss machen, die dritte Hypothese komme bei einer imaginären Kugelfläche vor. Wenigstens mufs immer etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstofsen läfst, als es sich bey der zwoten thun liefs."

Selbstverständlich soll durch die Anführung dieser Äufserung Lambert's Taurinus' Verdienst nicht im mindesten geschmälert werden. Er war so fast mühelos zu einer Einsicht gelangt, die sich Lobatschefskij[27]) und Johann Bolyai[28]) erst durch lange und harte Arbeit erkämpft haben, indem sie die nichteuklidische Geometrie systematisch entwickelten und schliefslich zu den Formeln der zugehörigen Trigonometrie gelangten[29]). Auch für Gauss scheint dasselbe zu gelten, da er in einem Briefe an Wolfgang Bolyai vom 6. März 1832 sich dahin äufsert, dafs der Weg, den dessen Sohn Johann eingeschlagen habe, fast durchgehends mit seinen eigenen Meditationen übereinstimme[30]).

Taurinus hat sich aber nicht damit begnügt, die Formeln der Trigonometrie in der, wie er sich ausdrückt, logarithmisch-sphärischen Geometrie entdeckt zu haben, er hat vielmehr in einem Additamentum seiner Elementa (S. 69—74) diese Formeln zur Lösung verschiedener geometrischer Aufgaben angewandt und ist bis zu der Berechnung des Umfanges und Inhaltes des Kreises, der Oberfläche und des Volumens der Kugel vorgedrungen. Wenn man also auch seine Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie einem glücklichen Zufall zuschreiben will, so hat er doch durch sein Additamentum gezeigt, dafs er diesen Zufall zu würdigen und zu benutzen verstand, und das wird man ihm hoch anrechnen, ohne ihm freilich in der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie den-

27) Vergl. Engel, a. a. O. S. 371—373 und S. 392—393 und P. Th. S. 240.

28) P. Th. S. 241—242.

29) Dafs diese Formeln in diejenigen der sphärischen Trigonometrie übergehen, wenn man den Radius der Kugel imaginär setzt, scheinen Lobatschefskij und J. Bolyai erst nachträglich erkannt zu haben. Jener bemerkt es am Schlusse seiner Abhandlung: О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ (Über die Anfangsgründe der Geometrie) vom Jahre 1829 (siehe Engel, a. a. O. S. 65), dieser sagt darüber in seiner Appendix kein Wort, aber in dem zweiten Bande des Tentamen (Maros-Vásárhely 1833) giebt sein Vater Wolfgang eine ausführliche Darstellung dieser Entdeckung Johann's (S. 380—385); in seinem Kurzen Grundriss vom Jahre 1851 S. 85—86 ist er darauf zurückgekommen; hiernach ist die bezügliche Stelle P. Th. S. 146 zu berichtigen.

30) Vergl. P. Stäckel, Mitteilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Jahrgang 1897. S. 6—7.

selben Rang wie GAUSS, LOBATSCHEFSKIJ und J. BOLYAI zuerkennen zu wollen, denn bei TAURINUS vermifst man vor allem diejenige Freiheit der Auffassung der „neuen Geometrie", zu der aufser den eben genannten Forschern auch sein Onkel SCHWEIKART gelangt war.

Anders lautete das Urteil der Zeitgenossen. „In der Periode von 1780—1830 waren alle Beweisversuche [für das elfte Axiom] gescheitert, und man war schliefslich dahin gelangt, die Beschäftigung mit der 'berüchtigten' fünften Forderung als Vorrecht unklarer Köpfe anzusehen und mit den Bemühungen um die Quadratur des Kreises auf eine Stufe zu stellen. Dieses Vorurteil war so stark, dafs, um mit HOÜEL zu reden, selbst ein Mann von so imposanter Autorität wie GAUSS mit seinen Untersuchungen nicht hervortrat, 'weil er das Geschrei der Boeoter scheute'."[31]) Die Anerkennung, auf die TAURINUS bei den Mathematikern von Fach gehofft hatte, blieb aus. Augenscheinlich hatte TAURINUS die klare Erkenntnis, welch' wesentlichen Fortschritt in der Parallellentheorie seine Elementa bedeuteten. Um so gröfser war seine Enttäuschung, und in Unmut und Bitterkeit hat er den Rest der auf seine eigenen Kosten gedruckten Auflage der Elementa den Flammen überliefert[32]).

Von seiner Stimmung in der folgenden Zeit giebt ein Brief Zeugnis, den er am 29. Dezember 1829 an GAUSS richtete:

Euer Hochwohlgeboren

werden es einem lebhaften wissenschaftlichen Eifer, sowie dem unbegränzten Vertrauen, mit welchem mich Ihre unsterblichen Verdienste stets erfüllt haben, zu gute halten, wenn ich mich aufs neue mit einer dringenden Bitte an Sie wende: denn Sie erinnern Sich ohne Zweifel, dafs ich schon einmal vor längerer Zeit Ihr Urtheil zu erfahren wünschte über einen Gegenstand, der mich damals lebhaft beschäftigte, nemlich die Theorie der Parallellinien. Sie hatten damals die Güte mich mit einer baldigen Antwort zu erfreuen und mir sehr interessante und belehrende Mittheilungen zu machen, deren Werth ich sehr wohl erkenne: dabei behielten Sie Sich aber vor, von denselben „keinen öffentlichen oder zur Öffentlichkeit führenkönnenden" Gebrauch zu machen. Da ich nun seitdem doch zwei Versuche über diesen

31) P. Th. S. 239.

32) So kommt es, dafs „die Elementa zu den seltensten Schriften gehören, welche die Bücherkunde aufzuweisen hat", P. Th. S. 251. Die dort gemachten Angaben bedürfen jedoch insofern der Berichtigung, als auch die Königliche Bibliothek in Berlin die Elementa besitzt und als sie in ROGG's Handbuch der mathematischen Literatur, Erste Abtheilung. Tübingen 1830, S. 361 erwähnt werden.

Gegenstand bekannt gemacht habe, es hat mich seitdem oft der Gedanke beunruhigt, Ihr Misfallen dadurch erregt, oder mich in Ihren Augen nicht hinlänglich gerechtfertigt zu haben[33]). Ich habe Ihnen bemerkt, daſs die Idee einer möglichen Entwicklung eines bisher unbekannten geometrischen Systems mir keineswegs ganz unbekannt war, da ich sie, aber freilich auch nicht mehr, schon einige Jahre früher von Pr. Schweikart mitgetheilt erhalten hatte; die mir auch so lange eine Hieroglyphe blieb, bis ich zufällig selbst veranlasst wurde, mich mit der Th. d. P. zu beschäftigen. Ich darf nun hinzufügen, daſs ich das ganze Problem eigentlich schon von Anfang gewissermaassen durchschaut hatte: denn sobald ich bemerkt hatte, daſs die Annahme einer Winkelsumme $> 180^0$, consequent verfolgt, auf eine sphärische Geometrie führt, war es mein erster Gedanke, daſs dem entgegengesetzten Falle auch eine Bedeutung gegeben werden könne, und ich vermuthete sogleich, daſs diese Hypothese mit der wechselseitigen Beziehung zwischen Kreisbogen und Logarithmen zusammenhängen müſste. Sie werden mir verzeihen, wenn ich dem Drange, mir so wichtig und interessant scheinende Wahrheiten, soweit ich sie mit Recht für mein Eigenthum halten zu dürfen glaubte, der Welt nicht vorzuenthalten, nicht widerstand. Der Erfolg bewies mir, daſs Ihre Autorität dazu gehört, ihnen Anerkennung zu verschaffen, und dieser erste schriftstellerische Versuch ist aus Übereilung, anstatt wie ich gehofft hatte, mich zu empfehlen, für mich eine reiche Quelle von Unzufriedenheit geworden. Zwar daſs man meine Theorie so gut wie gar nicht beachtet, ihr nicht einmal das Verdienst zuerkannt hat, eine Widerlegung aller andern zu enthalten und seitdem mehrere, selbst Crelle, mit neuen unhaltbaren Theorieen aufgetreten sind, würde mich mehr freuen als betrüben: allein ich sehe mich in die Nothwendigkeit versetzt, mir durch ein gründliches, an Inhalt und Form gleich gediegenes Werk die Achtung erst zu erwerben, die mir meine ersten Versuche unmöglich verschafft haben können: und so nöthigt mich der erste Schritt auf einer Bahn fortzuschreiten, welche ich vielleicht nicht hätte betreten sollen.

---

33) Wie schon S. 412 erwähnt wurde, hatte sich Taurinus in der Vorrede zu der Theorie der Parallellinien (S. XIII) auf Gauss berufen, und ebenso hatte er in der Vorrede der Elementa (S. V—VI) Gauss erwähnt und ihn inständigst gebeten, seine Ansichten über die Parallelentheorie zu veröffentlichen, ein Verfahren, das gegenüber dem ausdrücklichen Wunsch von Gauss nicht unbedenklich erscheint, wenn auch Taurinus zu seiner Rechtfertigung sich darauf hätte berufen können, daſs er nur Gauss' Urteil über seine, Taurinus', Arbeiten, dagegen nicht Gauss's Äuſserungen in Betreff der „Nichteuklidischen Geometrie" veröffentlicht habe.

Vielleicht irre ich mich nicht, wenn ich glaube in der Hydrodynamik einen dankbaren Stoff gefunden zu haben. — — —

Den Rest des Briefes, in dem TAURINUS seine Ansichten über den „hydrodynamischen Stofs" entwickelt, unterdrücken wir und bemerken nur noch, dafs er sich später eifrig mit Hydrodynamik beschäftigt und auf eine Reihe von Erfindungen in diesem Gebiete Patente genommen hat, die aber alle nutzlos blieben, da ihm die Mittel fehlten, sie praktisch ins Werk zu setzen[34]).

GAUSS hat weder auf diesen Brief noch auf einen vierten vom 1. October 1832 geantwortet, der für unsere Zwecke belanglos ist.

Ganz hat es übrigens TAURINUS an Anerkennung nicht gefehlt. Der bekannte Physiker GEORG SIMON OHM (1788—1854), der von 1817 bis 1826 Oberlehrer am Gymnasium zu Köln war, und der sich, wie seine Arbeit: Grundlinien zu einer zweckmässigen Behandlung der Geometrie, Erlangen 1817 zeigt, eingehend mit den Grundlagen der Geometrie beschäftigt hatte, antwortete auf die Zusendung der Elementa mit einem freundlichen Briefe vom 14. April 1826. „Die Analogien", schreibt OHM, „die Sie mit dem Namen logarithmisch-sphärische Geometrie bezeichnen, sind überraschend und, wenn ich nicht irre, von mehr als einer Seite her merkwürdig." Interessant ist auch, dafs OHM ausdrücklich erklärt, der Beweis der Propositio XXIV sei ihm dunkel, er finde keinen Widerspruch in der Vielheit der Systeme[34]).

Aufzeichnungen, die sich in TAURINUS' Nachlafs gefunden haben und die aus dem Jahre 1835 stammen, zeigen, dafs er später zu seinen geometrischen Untersuchungen zurückgekehrt ist[34]). Wir entnehmen aus ihnen folgende Stelle:

„Die Geometrie behauptet von jeher das Ansehen einer Wissenschaft von höchster Gründlichkeit, von möglichster Kraft der Überzeugung. Ihr Ursprung scheint so tief in dem Geistesvermögen zu liegen, ihr Gang, wie sie Schritt vor Schritt festen Boden gewinnt, so sicher und zuverlässig, dafs sie stets als das Muster wissenschaftlicher Form erschien, und es war den Mathematikern nicht zu verdenken, wenn sie im Gegensatze anderer, auf schwankender Erfahrung oder wechselnder Ansicht beruhender Wissenschaften von der ihrigen eine besonders hohe Meinung hegten.

Indessen scheint dem grossen Ansehen der Geometrie ein mehrfacher Irrthum zu Grunde zu liegen. Es giebt nemlich für die Geometrie eine

34) Mitteilung von Pastor FÜRER.

innere und eine äufsere Wahrheit. Jene beschränkt sich darauf, dafs die Geometrie ein in sich selbst beschlossenes, durchaus consequentes System ohne logischen Widerspruch bildet, ohne Frage noch von ihrer Anwendbarkeit auf die Erscheinungen der Aufsenwelt. Diess ist der Standpunkt, von welchem der Mathematiker seine Wissenschaft zu betrachten pflegt: er nennt sie eine reine, von aller Erfahrung unabhängige, auch nicht nothwendig auf sie hinweisende Wissenschaft und diese Eigenthümlichkeit wird häufig als ein besonderer Vorzug hervorgehoben. Soll aber die Geometrie nicht blofs ein müfsiges Erzeugnifs der productiven Einbildungskraft, sondern auch von praktischer Bedeutung sein, so fragt es sich, ob der Geometrie auch äussere Wahrheit zukomme, eine Untersuchung, die nicht mehr rein mathematisch ist. Dieser Übergang von dem reinen Erkennen zur Objectivität, von der Construction der productiven Einbildungskraft zur Bestimmung äufserer Verhältnisse hat von jeher grofse Schwierigkeiten und Zweifel verursacht.

Aber auch abgesehen von dieser eigenthümlichen Schwierigkeit ist die Geometrie noch nicht in der reinen Entwicklung dargestellt, deren sie fähig ist.

Die Geometrie gründet sich überhaupt auf das Gesetz der Coincidenz, welches aber selbst kein Axiom genannt werden kann, und überhaupt hat die Geometrie gar keine Axiome nöthig, diese müssen gänzlich aus ihr verbannt werden. Dieser Grundsatz der Coincidenz besteht darin, dafs die Geometrie die einfachsten Elemente des Raumes, nemlich die Linien, als gleichartig voraussetzt, so, dafs in den Linien eines und desselben Systemes nichts zu unterscheiden ist, als ihre Gröfse. Die Coincidenz ist nicht zu verwechseln mit der Congruenz, welche nicht nur ein Zusammenfallen, sondern auch gleiche Gränzen oder Gleichheit fordert.

Bogen eines und desselben Kreises sind also gleichartig, Kreisbogen und gerade Linien sind ungleichartig, Kreisbogen mit verschiedenen Halbmessern beschrieben, sind nur ähnlicher Art.

Die Analysis, die eine reine Entwicklung der Geometrie möglich macht, leitet aus dieser Bedingung der Coincidenz, ohne welche gar keine allgemeinen Sätze erhalten werden könnten, ein dreifaches System der Geometrie her und erweist die Winkelsumme eines Dreiecks als nothwendige Folge von der dreifachen Art der Linien.

Dagegen klebt der Elementar-Geometrie nach der Methode des Euklid die Unvollkommenheit an, dafs sie nur die geradlinige Geometrie betrachten will, es aber nicht vermeiden kann, da sie an der Anschauung haftet und nicht den rein analytischen Begriff der Linien festhält, alle drei Systeme zugleich bis zu dem Punkte zu betrachten, wo ihr wesentlicher Unterschied erst recht hervortritt und wo sie völlig auseinander gehen — nemlich da, wo von der Summe der Winkel die Rede ist. Dieſs ist die berüchtigte Lücke in der Geometrie, die soviel Versuche über die Theorie der Parallellinien veranlasst hat. Das Problem besteht hier mathematisch betrachtet in nichts weiter, als in der scharfen Trennung jener drei geometrischen Systeme und hat insofern nicht die mindeste Schwierigkeit. Der Verf. glaubt, dieses Problem mathematisch vollkommen gelöst zu haben, obgleich ihm diese Anerkennung noch nicht zu Theil geworden ist.

Die Mathematiker, welche an seiner Darstellung keine Befriedigung finden möchten, scheinen theils etwas Unmögliches, theils aber mehr zu fordern, als die Mathematik leisten kann.

Sie fordern etwas Unmögliches einmal, weil sie verlangen, man solle ihnen nach dem Begriffe der geraden Linie, den sie von Euklid haben, oder den sie sich auch selbst bestimmen, die Theorie der Parallellinien beweisen. Daher sind sie sehr zufrieden mit dem Beweise, daſs die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks nicht gröſser als zwei Rechte sein könne, wodurch die sphärische Geometrie ausgeschlossen wird, da diese Hypothese immer auf ein Schneiden zweier Linien in zwei Punkten führt, was dem Euklidischen Begriff der geraden Linie widerspricht. Sie verlangen daher für die entgegengesetzte Hypothese einen gleich bündigen Beweis, welcher aber nach der gewöhnlichen Definition der geraden Linien, die ein solches System nicht unbedingt ausschlieſst, eine Unmöglichkeit ist. Stellt man daher eine andere Definition auf, die ohne den allgemein angenommenen Eigenschaften der geraden Linie zu widersprechen, doch eine strenge Scheidung aller drei Systeme möglich macht, so halten sie wohl diese für etwas willkührliches, vorausbedachtes, dem Resultat der Beweisführung vorgreifendes und fühlen sich nicht befriedigt.

Sie verlangen aber auch zweitens etwas Unmögliches, indem sie fordern, daſs man ihnen jenes räthselhafte geometrische System, das weniger als zwei rechte Winkel in jedem Dreiecke enthält, als etwas Absurdes darstelle. Allein dieses System läſst sich nicht vertilgen, es ist schon darum möglich, weil es gedacht werden kann und übrigens von völliger innerer Consequenz. Schon um auch hier die ewige Dreizahl zu ergänzen, muſs es als möglich gedacht werden.

Aber genau betrachtet ist es etwas anderes, was diese Mathematiker, ohne mit sich selbst im Klaren zu sein, fordern. So sehr sie nemlich auf der einen Seite ihre Wissenschaft als eine reine, von aller Erfahrung unabhängige geltend machen möchten, so sehr hängen sie auf der andern Seite an der Objectivität und behalten stets den Parallellismus zwischen der reinen Anschauung und der Empirie im Auge. Ihre gerade Linie soll die des gemeinen Lebens sein. Daher werden sie sich auch nicht eher befriedigen, bis man ihnen die objective Bedeutung jenes räthselhaften Systems enthüllt, bis man ihnen beweist, was es mit der Anwendung desselben auf äufsere Verhältnisse für eine Bewandtniss habe.

Diefs ist allerdings die interessanteste Seite des tiefsinnigen Problemes, aber sie gehört nicht mehr der reinen Mathematik an, sondern ist eine Frage der Physik."

Auf diese recht klaren Auseinandersetzungen, die noch heute lesenswert sind, folgen weitschweifige Deduktionen im Stile der Naturphilosophie, die darthun sollen, dafs das rätselhafte dritte System für die Akustik eine entsprechende Bedeutung besitze wie die euklidische Geometrie für die Optik.

4.

J. W. H. Lehmann's Kritik der Theorie der Parallellinien (1829).

Als ich im Jahre 1895 in Gemeinschaft mit F. Engel die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss herausgab, äufserte ich mich dahin (S. 252), „dafs Schweikart und Taurinus ein bis jetzt nicht beachtetes, jedoch sehr beachtenswertes Mittelglied bilden zwischen Saccheri und Lambert einerseits und Gauss, Lobatschefskij und Bolyai andrerseits". Um so gröfser war meine Überraschung, als ich vor kurzem entdeckte, dafs diese Behauptung einer Einschränkung bedarf, da Taurinus' Theorie der Parallellinien im Jahre 1829 von Jacob Wilhelm Heinrich Lehmann (1800—1863) ausführlich besprochen worden ist; die Geometriae prima elementa sind freilich auch Lehmann unbekannt geblieben. Lehmann's Schrift führt den langen Titel:

Mathematische Abhandlungen, betreffend die Begründung und Bearbeitung verschiedener mathematischer Theorieen, nebst Idee eines Systems der Wissenschaft, und einem Anhange, welcher es versucht, die Keplerschen Gesetze und andere Gegenstände der höheren Mechanik nach der antiken, reingeometrischen Methode zu entwickeln. Zerbst, 1829, 8^0, XII + 539 S., 4 Tfln.

Es scheint selten zu sein, denn es fehlt sowohl in Poggendorff's Handwörterbuch (Bd. I, Spalte 1411), als in dem von mir aufgestellten Verzeichnisse von Schriften über die Parallelentheorie[35]).

35) P. Th. S. 311 sind Lehmann's Anfangsgründe der höheren Mechanik aufgeführt. Als Gewährsmann ist Hill angegeben und hinzugefügt, dafs sich bei bei diesem die Jahreszahl 1839 finde. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dafs Hill, der die Titel nur abgekürzt angiebt, das Werk vom Jahre 1829 gemeint hat, wonach die Angaben in dem Verzeichnis abzuändern sind.

Taurinus wird zuerst auf S. 269—270 erwähnt. Die betreffende Stelle lautet im Zusammenhange:

„So sehen wir, dafs die Sätze, welche dazu vorbereiten, die Summe aller Winkel eines Vielecks aus der Seitenzahl bestimmen zu können, ohne die Theorie der Parallelen bewiesen werden können. Aber nun, diese Bestimmung der Summe der Winkel selbst vermögen wir nicht ohne die genannte Theorie zu geben; denn sie hängt von der Begründung des Satzes ab, dafs die 3 Winkel eines Dreieckes zusammen 2 R betragen.

Bei der Gelegenheit kann ich nicht umhin, auf eine merkwürdige Entdeckung aufmerksam zu machen, womit Saccherius und Lambert im vorigen Jahrhundert, wie es scheint, unabhängig von einander, die Geometrie als Kunst[36]) bereichert haben (siehe Hieron. Saccherii Euclides ab omni naevo vindicatus, Mediol. 1733; Lamberts Untersuchungen über die Theorie der Parallelen, nach seinem Tode herausgegeben von Bernoulli im Leipziger Magazin für Mathem. 2 St. 1786. p. 137 ff. und 3. St. p. 325 ff.). Beide versuchten, unabhängig vom 11. Grundsatze des Euclides, den Satz zu beweisen, dafs die Summe der Winkel eines Dreiecks = 2 R sei[37]).

Neuerlich hat indessen Hr. Taurinus in seiner Theorie der Parallellinien (Kölln, 1825), der die ganze Sache mit vielem Fleifse durchdacht und auseinandergesetzt hat, sehr richtig nachgewiesen, dafs dadurch, in völliger Strenge, nach euclidischer Form, nur der Satz bewiesen wird, dafs die Winkel eines Dreiecks zusammen nicht gröfser als 2 R sein können. Aber wenn auch nur dieses aus den 28 ersten Sätzen des Euclides ohne weitere Hilfe bewiesen werden kann, so bleibt es immer eine interessante Entdeckung, welche wir in unser System der Geometrie mit Freuden recipiren, und, unserm gefassten Plane gemäfs, in den vor der Theorie der Parallelen vorhergehenden Abschnitt verweisen. Ich theile den Gang des Beweises so kurz als möglich zusammengedrängt mit."

Nachdem dies gesehen ist, bespricht Lehmann (S. 275—277) Taurinus' Vergleichung der drei geometrischen Systeme:

„Herr Taurinus knüpft in der gedachten Schrift an dieses Resultat eine interessante Vergleichung. Er macht darauf aufmerksam, dafs in einem sphärischen Dreieck die Summe der Winkel allemal $> 2R$ ist, und dafs dieser Satz sich gleichfalls ohne die Parallelentheorie darthun lasse. Er setzt

36) Lehmann versteht unter „Geometrie als Kunst": „das Bestreben einer logischen Herleitung aus möglichst wenig Axiomen".

37) Wie aus einer Äufserung Lehmann's (S. 3) hervorgeht, verdankt er — ebenso wie Taurinus — die Kenntnis der Schriften von Saccheri und Lambert dem *Excursus* ad El. I. 29 von Camerer.

den Grund des Unterschiedes beider Resultate darein, dafs gerade Linien sich nur in einem [Punkte,] Bogen gröfster Kreise, auf einer Kugelfläche [,] aber einander in zwei Punkten schneiden können. Er fügt zugleich hinzu, dafs sich alle diejenigen planimetrischen Sätze, welche die Theorie der Parallelen nicht voraussetzen, ungeändert auf die Kugelfläche übertragen lassen, wenn man nur statt der geraden Linien Bogen gröfster Kreise, statt der Kreise kleinere Kreise der Kugelfläche setzt, und dafs sich auf diese Art eine sphärische Geometrie erdenken lasse, welche mit der Planimetrie gleichen Schritt halte. Und das ist auch ganz gegründet, und wir sehen einen sehr gelungenen, schon ziemlich weit ausgeführten Versuch dieser Art in den Sphaericis des Theodosius. Der Grund der Ähnlichkeit der ebenen und der sphärischen Geometrie liegt augenscheinlich in der Eigenschaft, welche die ebene mit der Kugelfläche, aber mit keiner andern Fläche gemein hat, dafs alle Theile derselben genau aufeinander passen; dafs aber von der Parallelentheorie an eine Verschiedenheit stattfindet, hängt damit zusammen, dafs ein Stück der Kugelfläche, wenn man es umwendet, nicht mehr auf die alte Fläche pafst, was doch bei der Ebene stattfindet; siehe, was ich darüber schon gesagt habe[38]).

Wenn nun aber Herr Taurinus, auf ähnliche Art, wie schon früher Saccherius (siehe die vorhin angeführte Schrift), weiter fragt, was für eine Geometrie denn das geben würde, wo man setzt, dafs die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner als $2R$ sei, und wenn er anfängt, den Gedanken auszuspinnen, so können wir darüber kein anderes Urtheil fällen, als über die Rechnungen mit imaginären Gröfsen; man kann ein sehr strenges System entwerfen, was erfolgen würde, wenn etwas, was nicht wahr ist, wahr wäre; man wird aber, wenn man auf diesem Wege kein Resultat für reelle Gröfsen erlangt, bald von selbst umkehren, wohl fühlend, dafs man sich mit blofsen Chimären beschäftigt. Wir haben vermittelst der Quadratwurzeln aus negativen Gröfsen manche bedeutende Entdeckungen gemacht, die sich auf reelle Gröfsen beziehen, und die uns sonst vielleicht ewig verborgen geblieben wären; ob man solche Entdeckungen auch durch die Fiction einer Geometrie, worin die Winkel eines Dreiecks $< 2R$, machen könne, darüber wage ich nicht zu entscheiden.

Eine andere Frage aber ist es, ob wir nicht den ohne die Parallelen-

38) Der von Lehmann angeführte Grund ist nicht stichhaltig, der wahre Unterschied der parabolischen und der elliptischen Geometrie liegt vielmehr in der Forderung der unendlichen Länge der geraden Linie. Dass es sich so verhält, hatte schon Taurinus richtig erkannt (vergl. seine Theorie der Parallellinien S. 57, sowie die Bemerkung oben S. 413) und sich dadurch, wie schon vor ihm Lambert, als Vorgänger Riemann's erwiesen; vergl. auch P. Th. S. 252.

theorie geführten Beweis, dafs die Winkel eines Dreiecks nicht $> 2R$ sein können, die Winkel eines sphärischen Dreiecks aber $> 2R$ sein müssen, dankbar annehmen und zu einer vollständigen Begründung der Parallelentheorie für die Ebene benutzen sollen. Die Frage kann nur die sein, ob man etwa die Ebene als den Zielpunkt ansehen dürfe, dem sich eine Kugelfläche, wenn ihr Halbmesser wächst, nähert, so dafs die Abweichung kleiner werden kann, als jede gegebene Abweichung, und ob man, dafs eine solche unendliche Annäherung stattfindet, ohne Hülfe des 11ten Grundsatzes des Euclides oder eines aequivalenten Satzes beweisen könnne[39]).

Dafs eine solche unendliche Annäherung wirklich statt findet, wird wol niemand im Ernst bezweifeln; schon die gemeine Betrachtung, wonach man ein Stück der Erdoberfläche, das man mit einemmale übersehen kann, für eben zu halten geneigt ist, leitet darauf. Aber ich leugne, dafs sich ein strenger, kunstmäfsiger Beweis ohne schon begründete Parallelentheorie geben lasse. Denn solcher Beweis müfste etwa auf folgende Punkte hinauslaufen.

Es sei aus dem Puncte C der unbegrenzten Linie AB Fig. 40 ein nach D unbegrenztes Perpendikel CD errichtet. Man schneide nun von CD ein beliebiges Stück CE ab, beschreibe aus E durch C einen Kreis, und lasse nun die ganze Zeichnung sich um die feststehende Linie CD drehen, so ist klar, dafs die Kreisperipherie eine Kugelfläche, die Linie AB aber eine die Kugelfläche berührende Ebene beschreiben werde. Schneidet man von CD ein gröfseres Stück ab, so erhält man eine Kugelfläche, welche der berührenden Ebene näher kommt. Wollten wir nun beweisen, dafs die Kugelfläche sich der Ebene so sehr nähern kann, dafs die Abweichung kleiner wird, als jede gegebene Abweichung, so müfsten wir auch beweisen können, dafs der Kreis sich auf dieselbe Art der geraden Linie AB nähern könne, oder, mit andern Worten, dafs die Entfernung eines Punctes der Peripherie von der geraden Linie AB, in jeder gegebenen Höhe über CD, kleiner werden könne als jede gegebene Gröfse. Aber so lange die Parallelentheorie nicht begründet ist, bleibt es zweifelhaft, ob nicht eine Curve FCG statt finde, welche auf derselben Seite der Linie AB liegt, als der Kreis, und welche AB in C berührt, und welcher sich der Kreis, wenn sein Halb-

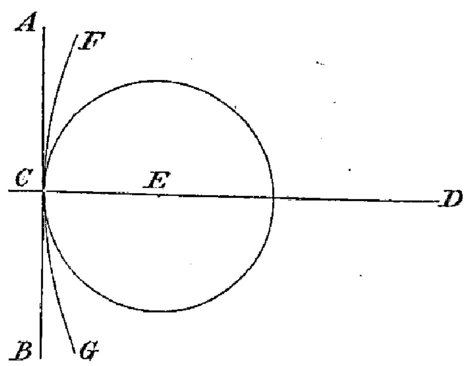

Fig. 40.

39) Mit genau denselben Gedanken hatte sich schon Lagrange beschäftigt und ebenfalls dessen Undurchführbarkeit erkannt; siehe P. Th. S. 211—212.

messer wächst, nähert, ohne sie jemals zu erreichen[40]). Ist aber erst die Parallelentheorie gegründet, dann ist es ein leichtes, aus der gegebenen Entfernung eines Punctes der Peripherie von der Linie CA und von der Linie CD den Halbmesser des Kreises zu finden; das nämlich, was der gegebenen Entfernung des Punctes der Peripherie von der Linie CA noch am Durchmesser fehlt, ist (nach Eucl. 6, 8, Zus.) die 3te Proportionallinie zu den beiden gegebenen Entfernungen.

Wir gewinnen also auf diesem Wege nichts zur Begründung der Parallelentheorie für die Ebene."

Ob diese Äufserungen zur Kenntnis von Taurinus gekommen sind, hat sich nicht ermitteln lassen. Dagegen finden sich Lehmann's Mathematische Abhandlungen in der Gaufsbibliothek zu Göttingen, und Randbemerkungen von Gauss zeigen, dafs von diesem das Werk gelesen oder wenigstens durchblättert worden ist. Es ist das auch insofern von Interesse, als man daraus schliessen darf, dafs Gauss, wenn nicht schon früher, im Jahre 1829 von den Untersuchungen Sacchrri's und Lambert's erfahren hat.

---

40) Die Begriffe des Grenzkreises und der Grenzkugel, die uns hier entgegentreten, fehlen bei Taurinus. Sie werden wohl zum ersten Male in Wachter's *Demonstratio Axiomatis in Euclideis undecimi* (Danzig 1817) eingeführt. Die Angabe P. Th. S. 38, dafs bereits Saccheri zu den Oricyklen Lobatschefskij's gelangt sei, ist irrtümlich; dieser Irrtum ist bereits ebendaselbst in den „Nachträgen und Berichtigungen" S. 318 richtig gestellt worden.

Kiel, im April 1899.

Supplement zum vierundvierzigsten Jahrgang der
Zeitschrift für Mathematik und Physik
herausgegeben unter der verantwortlichen Redaktion von
Dr. R. Mehmke und **Dr. M. Cantor.**

Festschrift

zum siebzigsten Geburtstage

Moritz Cantors.

Zugleich neuntes Heft der

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik.

Im Auftrage herausgegeben von

M. Curtze und **S. Günther.**

Mit einem Porträt Moritz Cantors in Heliogravüre, zwei Tafeln und 55 Figuren im Text.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1899.