Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Bemerkungen zum Prinzip des kleinsten Zwanges**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1919, 11

Bei den allgemeinen Untersuchungen, die bis jetzt über das Prinzip des kleinsten Zwanges angestellt worden sind, werden die Voraussetzungen, die man über das betrachtete mechanische System, macht oder machen muß, nirgends genau angegeben. Hieraus erklärt es sich, daß gewisse Sätze, die ohne Beschränkungen ausgesprochen werden, in besonderen Fällen versagen. Der Zweck der vorliegenden, zugleich kritischen und aufbauenden Abhandlung ist es, für die Anwendungen des Gaußschen Prinzips eine sichere Grundlage zu schaffen.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1919, S. XXXVIII - XXXIX)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1919. 11. Abhandlung

Bemerkungen zum Prinzip des kleinsten Zwanges

Von

PAUL STÄCKEL
in Heidelberg

Eingegangen am 2. Oktober 1919

Heidelberg 1919
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1535

ERSTER TEIL

Mechanische Systeme mit Gleichheitsbedingungen

§ 1

Allgemeines über Punktsysteme mit holonomen und nichtholonomen Bedingungsgleichungen

Es handle sich um ein System von n Massenpunkten. Um die Rechnungen zu vereinfachen, soll die Masse des ν-ten Punktes mit $m_{3\nu-2} = m_{3\nu-1} = m_{3\nu}$ bezeichnet werden. Seine rechtwinkligen kartesischen Koordinaten zur Zeit t seien $x_{3\nu-2}, x_{3\nu-1}, x_{3\nu}$. Durch die $3n$ Koordinaten (x_ϱ) wird die *Lage* des Systems zur Zeit t bestimmt. Differentiation nach t ergibt die Geschwindigkeitskomponenten $(\dot{x}_\varrho)$; die Größen $(x_\varrho, \dot{x}_\varrho)$ kennzeichnen den *Bewegungszustand* des Systems zur Zeit t. Durch abermalige Differentiation erhält man die Beschleunigungskomponenten $(\ddot{x}_\varrho)$. Endlich seien die Komponenten der auf den ν-ten Punkt wirkenden Kraft $X_{3\nu-2}, X_{3\nu-1}, X_{3\nu}$; sie werden als eindeutige Funktionen der Größen $(x_\varrho, \dot{x}_\varrho)$ und der Zeit t vorausgesetzt.

Das System möge k voneinander unabhängigen, miteinander verträglichen holonomen Gleichungen

$$(1) \qquad f_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}; t) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k),$$

kürzer geschrieben $f_\varkappa(x_\varrho; t) = 0$, unterliegen. Von den Funktionen $f_\varkappa(x_\varrho; t)$ wird, wie von allen im folgenden vorkommenden Funktionen, angenommen, daß sie die daran vorzunehmenden Differentiationen gestatten. Dann bestehen zwischen den $3n$ Geschwindigkeitskomponenten im allgemeinen die k voneinander unabhängigen, einander nicht widersprechenden Gleichungen

$$(2) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\varrho} \dot{x}_\varrho + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial t} = 0 .$$

Der Zusatz *im allgemeinen* soll besagen, daß für besondere Wertsysteme $(x_\varrho; t)$ an die Stelle mindestens einer der linearen Gleichungen (2) eine Gleichung höheren Grades tritt, nämlich für die Wertsysteme, bei denen die sämtlichen Determinanten k-ter Ordnung der Matrix $\left\| \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\varrho} \right\|$ verschwinden.

Auf der Geschwindigkeitsstufe können zu den Gleichungen (2) noch l nichtholonome Gleichungen

$$(3) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} \varphi_{\lambda\varrho}(x_\varrho; t)\, \dot{x}_\varrho + \varphi_{\lambda 0}(x_\varrho; t) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

hinzutreten. Es wird vorausgesetzt, daß die Gleichungen (2) und (3) zusammengenommen im allgemeinen voneinander unabhängig und miteinander verträglich sind.

Die Lage (x_ϱ) des Systems heiße *regulär*, wenn die Gleichungen (2) und (3) zusammengenommen ein System von $m = k + l$ linearen Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten ausmachen:

$$(4) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} F_{\mu\varrho}(x_\varrho; t)\, \dot{x}_\varrho + F_{\mu 0}(x_\varrho; t) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

bei dem mindestens eine Determinante m-ter Ordnung der Matrix $\| F_{\mu\varrho} \|$ nicht verschwindet; sonst *singulär*.

Nach diesen Vorbereitungen lautet bei den betrachteten Punktsystemen die Grundaufgabe der analytischen Mechanik:

Gegeben sei zu irgendeiner Zeit ein den Bedingungen genügender Bewegungszustand des Systems. Es sollen die vermöge der Bedingungen und der Kräfte zu dieser Zeit geltenden Beschleunigungen ermittelt werden.

Bei regulärer Lage folgen aus den Gleichungen (4) durch Differentiation die Gleichungen

$$(5) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} F_{\mu\varrho}(x_\varrho; t)\, \ddot{x}_\varrho + H_\mu(x_\varrho; \dot{x}_\varrho; t) = 0;$$

die Ausdrücke $H_\mu(x_\varrho; \dot{x}_\varrho; t)$ sind Funktionen zweiten Grades der

Größen $(\dot{x}_\varrho)$. Aus (5) ergeben sich m geeignet zu wählende Beschleunigungskomponenten als lineare Funktionen der übrigen $3n-m$.

Hiermit ist alles erschöpft, was sich aus den vorgeschriebenen Bedingungen für die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen entnehmen läßt. Um die Beschleunigungen vermöge der Bedingungen und der Kräfte vollständig zu bestimmen, muß man ein *Prinzip* der analytischen Mechanik heranziehen.

§ 2

Das D'ALEMBERTsche Prinzip bei Systemen mit holonomen und nichtholonomen Bedingungsgleichungen

Das D'ALEMBERTsche Prinzip fordert, daß *für die durch die Gleichungen*

$$\sum_{\varrho=1}^{3n} F_{\mu\varrho}(x_\varrho; t)\, \delta x_\varrho = 0 \tag{6}$$

erklärten virtuellen Verrückungen die Arbeit der Reaktionen des Systems verschwindet:

$$\sum_{\varrho=1}^{3n} (m_\varrho \ddot{x}_\varrho - X_\varrho)\, \delta x_\varrho = 0\,. \tag{7}$$

Es ist gleichwertig mit den Gleichungen

$$m_\varrho \ddot{x}_\varrho = X_\varrho + \sum_{\mu=1}^{m} F_{\mu\varrho} L_\mu\,, \tag{8}$$

in denen $L_1, L_2, \ldots, L_m$ noch zu bestimmende Multiplikatoren bedeuten. Werden aus (8) die Ausdrücke für die Größen $(\ddot{x}_\varrho)$ in (5) eingesetzt, so erhält man für die Multiplikatoren m lineare Gleichungen:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \left(\sum_{\varrho=1}^{3n} \frac{1}{m_\varrho} F_{\mu\varrho} F_{\nu\varrho} \right) L_\mu + J_\nu(x_\varrho; \dot{x}_\varrho; t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{9}$$

deren Determinante nach einem bekannten Satze[1] gleich der Summe der Quadrate der Determinanten m-ter Ordnung ist, die zur Matrix $\left\| \frac{1}{\sqrt{m_\varrho}} F_{\mu\varrho} \right\|$ gehören. Hieraus folgt, daß *für reguläre Lagen des Systems* die Beschleunigungen durch den Bewegungszustand eindeutig bestimmt werden[2].

Daß die Voraussetzung der regulären Lage wesentlich ist, zeigt folgendes Beispiel.

Ein Punkt von der Masse Eins sei gezwungen, sich auf der Kegelfläche

$$(1') \qquad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

zu bewegen. Aus der Bedingung folgen die Gleichungen

$$(2') \qquad x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 - x_3 \dot{x}_3 = 0\,,$$

$$(5') \qquad x_1 \ddot{x}_1 + x_2 \ddot{x}_2 - x_3 \ddot{x}_3 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2 = 0\,,$$

und die virtuellen Verrückungen werden durch die Gleichungen

$$(6') \qquad x_1 \delta x_1 + x_2 \delta x_2 - x_3 \delta x_3 = 0$$

erklärt.

Zur Zeit t befinde sich der Massenpunkt in der Kegelspitze, und zwar in Ruhe. Bei dieser singulären Lage versagt die ursprüngliche Erklärung der virtuellen Verrückungen. Man wird diese aber als solche Verrückungen aufzufassen haben, die den Massenpunkt aus der gegebenen Lage in eine mit den Bedingungen verträgliche Lage überführen, und hat dann die Gleichungen (6′) zu ersetzen durch die Gleichungen

$$(6'') \qquad \delta x_1^2 + \delta x_2^2 - \delta x_3^2 = 0\,.$$

---

[1] C. G. J. JACOBI, *De formatione et proprietatibus determinantium*, Journ. f. r. u. a. Math., Bd. XXII, 1841, S. 312; Werke Bd. III, Berlin 1884, S. 386; Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Heft 77, Leipzig 1896, S. 40.

[2] C. G. J. JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, gehalten 1842/43, 2. Ausgabe, Berlin 1884, 17. Vorlesung, besonders S. 140. Daß JACOBI holonome Bedingungen voraussetzt, tut der Allgemeinheit seines Verfahrens keinen Abbruch, weil es nur auf das Verhalten der Matrix $\|F_{\mu\varrho}\|$ ankommt.

Für die Beschleunigungskomponenten erhält man, am einfachsten durch geometrische Überlegungen, die Gleichung

$$(5'') \qquad \ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 - \ddot{x}_3^2 = 0\,.$$

Dazu kommen vermöge des D'ALEMBERTschen Prinzips die Gleichungen

$$(8') \qquad \ddot{x}_1 = X_1,\ \ \ddot{x}_2 = X_2,\ \ \ddot{x}_3 = X_3\,.$$

Allein im allgemeinen widersprechen sie der Gleichung (5'').

Man könnte versuchen, das Ergebnis daraus zu erklären, daß die Kegelspitze keine Reaktion zu leisten vermag. Es wird sich jedoch herausstellen, daß bei Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwanges Reaktionen auftreten.

§ 3

Das Prinzip des kleinsten Zwanges bei Systemen mit holonomen und nichtholonomen Bedingungsgleichungen

Nach GAUSS *ist der Zwang*

$$(10) \qquad Z(\ddot{x}_\varrho) = \sum_{\varrho=1}^{3n} \frac{1}{m_\varrho}\,(m_\varrho \ddot{x}_\varrho - X_\varrho)^2$$

bei gegebenem Bewegungszustande für alle mit den Bedingungen verträglichen Größen $(\ddot{x}_\varrho)$ *ein Minimum.*

Bei regulären Lagen werden die zulässigen Größen $(\ddot{x}_\varrho)$ durch die linearen Gleichungen (5) erklärt; bei singulären Lagen tritt an Stelle mindestens einer dieser Gleichungen eine Gleichung zweiten oder höheren Grades. In beiden Fällen hat der Zwang mindestens ein Minimum. Er ist nämlich zunächst eine stetige Funktion der unabhängigen Veränderlichen $(\ddot{x}_\varrho)$ und behält diese Eigenschaft, wenn deren Veränderlichkeit durch algebraische Gleichungen eingeschränkt wird. Mithin gibt es mindestens ein Wertsystem (ξ_ϱ), das den Zwang zu einem Minimum macht.

Jetzt soll bewiesen werden, daß der Zwang *bei regulären Lagen* nur *ein* Minimum besitzt.

Es sei $(\ddot{\xi}_\varrho)$ eine Stelle des Minimums, also $Z(\ddot{\xi}_\varrho + u_\varrho)$ größer als $Z(\ddot{\xi}_\varrho)$ für alle hinreichend kleinen, zulässigen Wertsysteme (u_ϱ), und zwar ist ein Wertsystem (u_ϱ) zulässig, wenn die Gleichungen (5) für die Größen $(\ddot{\xi}_\varrho + u_\varrho)$ erfüllt sind, wenn also die m Gleichungen

$$(11) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} F_{\mu\varrho}\, u_\varrho = 0$$

bestehen. Hieraus folgt, daß mit einem Wertsystem (u_ϱ) auch immer die Wertsysteme $(g\,u_\varrho)$ für beliebiges positives oder negatives g zulässig sind. Nun hat man

$$(12) \qquad Z(\ddot{\xi}_\varrho + u_\varrho) = Z(\ddot{\xi}_\varrho) + \sum_{\varrho=1}^{3n} m_\varrho u_\varrho^2 + 2\sum_{\varrho=1}^{3n} (m_\varrho \ddot{\xi}_\varrho - X_\varrho)\, u_\varrho\,,$$

folglich muß beim Minimum erst für hinreichend kleine, dann aber für alle zulässigen Wertsysteme (u_ϱ) der Ausdruck

$$(13) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} (m_\varrho \ddot{\xi}_\varrho - X_\varrho)\, u_\varrho = 0$$

sein. Gäbe es jetzt eine zweite Stelle des Minimums $(\ddot{\eta}_\varrho)$, so könnte man in der Gleichung (12) $\ddot{\eta}_\varrho$ an die Stelle von $\ddot{\xi}_\varrho + u_\varrho$ setzen, mithin wäre $Z(\ddot{\eta}_\varrho)$ größer als $Z(\ddot{\xi}_\varrho)$, mit Ausschluß der Gleichheit. Auf die gleiche Art ließe sich zeigen, daß $Z(\ddot{\xi}_\varrho)$ größer ist als $Z(\ddot{\eta}_\varrho)$, mit Ausschluß der Gleichheit. Folglich ist die Annahme, es gäbe eine zweite Stelle des Minimums, zu verwerfen.

Man hat wiederholt behauptet, das Prinzip des kleinsten Zwanges liefere ein absolutes Minimum, und hat daraus schließen wollen, daß der Zwang nur *eine* Stelle des Minimums besitze. Jedoch kann ein absolutes Minimum gleichzeitig an mehreren Stellen auftreten; man nehme etwa die Funktion $y = \sin x$. Außerdem gilt aber die Gleichung (11) nur unter der Voraussetzung einer regulären Lage des Systems; wie sich die Verhältnisse bei singulären Lagen gestalten, wird am Schlusse dieses Paragraphen durch ein Beispiel erläutert werden.

Unter der Voraussetzung einer regulären Lage gibt es immer ein und nur ein System von Beschleunigungen, das bei gegebenem

Bewegungszustande dem Prinzipe des kleinsten Zwanges genügt. Es ist leicht, zu erkennen, daß man dieselben Beschleunigungen erhält, die sich aus dem D'ALEMBERTschen Prinzip ergaben. Denn die Gleichungen (11) verwandeln sich in die Gleichungen (6), wenn man

$$(14) \qquad \delta x_\varrho = u_\varrho \delta t$$

setzt, und dadurch werden gleichzeitig die Gleichungen (13) in die Gleichungen (7) übergeführt.

Die Tatsache, daß die zulässigen Änderungen der Beschleunigungen mit den virtuellen Verrückungen durch die Gleichungen (14) verknüpft sind, hat, wie es scheint, zuerst GIBBS[3] hervorgehoben; allerdings ohne die wesentliche Voraussetzung, die Lage des Systems sei regulär, ausdrücklich auszusprechen.

Hiermit ist der Lehrsatz gewonnen, daß *das* D'ALEMBERT*sche Prinzip und das Prinzip des kleinsten Zwanges bei Punktsystemen, die holonomen und nichtholonomen Bedingungsgleichungen unterworfen sind, reguläre Lage vorausgesetzt, gleichwertig sind;* die Forderung (7), die virtuelle Arbeit der Reaktionen solle verschwinden, ist wegen der Gleichungen (14) identisch mit der notwendigen und hinreichenden Bedingung (13) für das Minimum des Zwanges. Man könnte daher, um zu beweisen, daß die Beschleunigungen bei regulärer Lage durch das D'ALEMBERTsche Prinzip eindeutig bestimmt sind, den Weg JACOBIS verlassend, das Prinzip des kleinsten Zwanges zu Hilfe nehmen und würde dann, ohne Determinantentheorie zu gebrauchen, durch einfache begriffliche Überlegungen zum Ziele kommen.

Zum Schlusse soll das im vorhergehenden Paragraphen behandelte Beispiel der Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kegelfläche wieder aufgenommen werden. Das Prinzip des kleinsten Zwanges verlangt, daß der Ausdruck

$$(10') \qquad Z(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) = (\ddot{x}_1 - X_1)^2 + (\ddot{x}_2 - X_2)^2 + (\ddot{x}_3 - X_3)^2$$

unter der Bedingung (5″) ein Minimum wird. Geometrisch gedeutet soll also der kürzeste Abstand des Punktes X_1, X_2, X_3 von der Kegelfläche ermittelt werden.

[3] J. W. GIBBS, *On the fundamental formulae of dynamics*, American Journal of Math., vol. 2, 1879, S. 49.

Man erkennt sofort, daß unter Umständen zwei Punkte der Kegelfläche ein Minimum liefern; die Strecken von der Kegelspitze nach den beiden Punkten geben Richtung und Größe der gesuchten Beschleunigung, während die beiden kürzesten Abstände die zugehörige Reaktion darstellen. Wenn es auch ein Mittel gäbe, eine der gefundenen Beschleunigungen zu bevorzugen, so müßte es doch versagen, falls die Richtung der Kraft in der Kegelachse liegt.

In den Lehrbüchern der Mechanik und der Physik wird nicht selten der Standpunkt vertreten, die Bewegung eines mechanischen Systems sei durch den anfänglichen Bewegungszustand vollständig festgelegt (Determinismus). Es sei daher „selbstverständlich", daß die Beschleunigungen durch die Prinzipien der Mechanik *eindeutig* bestimmt werden. Hiergegen ist erstens einzuwenden, daß es an und für sich ebensogut denkbar wäre, daß man auch die anfänglichen Beschleunigungen kennen muß. Zweitens aber wird die Bedeutung der Prinzipien verkannt. Diese sind Ansätze zu Rechnungen, deren Durchführung in den Bereich der Mathematik gehört. Sache des Physikers ist es, die physikalische Zulässigkeit der Rechnungsergebnisse zu prüfen. Es wäre jedoch verkehrt, ein Prinzip der Mechanik deshalb zu verwerfen, weil dadurch unter Umständen die Beschleunigungen nicht eindeutig bestimmt werden. Der Mangel kann nämlich auch in der Stellung der Aufgabe liegen. So wird die in dem Beispiel geforderte Bewegung in der Nähe der Kegelspitze sich nicht durch einen Mechanismus verwirklichen lassen; hier ist eine unzulässige Idealisierung vorgenommen worden.

In dem vorliegenden Zusammenhang zeigt das Beispiel, daß *bei singulären Lagen das* D'ALEMBERT*sche Prinzip und das Prinzip des kleinsten Zwanges nicht gleichwertig zu sein brauchen*, und zwar hat sich herausgestellt, daß das GAUSSsche Prinzip mehr leistet als das D'ALEMBERTsche. Hieraus folgt, daß *es nicht möglich ist, für singuläre Lagen das Prinzip des kleinsten Zwanges aus dem* D'ALEMBERTschen *Prinzip abzuleiten*. Man wird vielmehr das GAUSSsche Prinzip für singuläre Lagen *axiomatisch* aufzustellen haben.

§ 4

Geometrische Deutung

Es ist häufig von Nutzen, die in der Mechanik der Punktsysteme auftretenden Größensysteme als Koordinaten eines Punktes in einem Euklidischen Raume von mehreren Ausdehnungen aufzufassen; das gilt im besonderen von den $3n$ Beschleunigungskomponenten $(\ddot{x}_\varrho)$.

Noch durchsichtiger wird die geometrische Deutung, wenn man eine affine Transformation vornimmt und die $3n$ neuen Koordinaten

$$(15) \qquad y_\varrho = \frac{1}{\sqrt{m_\varrho}} \left(m_\varrho \ddot{x}_\varrho - X_\varrho \right)$$

einführt. Aus dem Ausdrucke des Zwanges erhält man auf diese Art das Quadrat des Abstandes, den der Punkt (y_ϱ) eines $3n$-fach ausgedehnten Euklidischen Raumes R_{3n} vom Anfangspunkte O der Koordinaten hat. Die Bedingungsgleichungen (5) lauten jetzt

$$(16) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} \frac{1}{\sqrt{m_\varrho}} F_{\mu\varrho}\, y_\varrho + \overline{H}_\mu = 0\,,$$

und das Prinzip des kleinsten Zwanges besagt bei regulärer Lage des Systems, daß der kürzeste Abstand des Punktes O von dem $(3n-m)$-fach ausgedehnten Euklidischen Raume R_{3n-m} ermittelt werden soll, der durch die Gleichungen (16) aus dem R_{3n} herausgehoben wird. Aus der Lehre von den mehrfach ausgedehnten Euklidischen Räumen ist bekannt, daß der gesuchte kürzeste Abstand das von O auf den R_{3n-m} gefällte Lot ist, und daß es stets ein und nur ein solches Lot gibt[4].

Auch das D'ALEMBERTsche Prinzip bekommt einen einfachen geometrischen Sinn. Der Fußpunkt F des Lotes habe die Koordinaten (η_ϱ). Dann gehört der Punkt $(\eta_\varrho + v_\varrho)$ dem Raume R_{3n-m} an, wenn die Größen (v_ϱ) den Gleichungen

[4] Siehe etwa P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, Erster Teil: Lineare Räume, Sammlung Schubert, Band XXV, Leipzig 1902.

(17) $$\sum_{\varrho=1}^{3n} \frac{1}{\sqrt{m_\varrho}} F_{\mu\varrho} v_\varrho = 0$$

genügen; diese aber verwandeln sich, wenn

(18) $$v_\varrho = \sqrt{m_\varrho} \cdot u_\varrho$$

gesetzt wird, in die Gleichungen (11). Die Forderung (7) des D'ALEMBERTschen Prinzips ist demnach identisch mit der Orthogonalitätsbedingung

(19) $$\sum_{\varrho=1}^{3n} \eta_\varrho v_\varrho = 0;$$

in der Tat steht der kürzeste Abstand OF des Punktes O vom Raume R_{3n-m} auf allen diesem Raume angehörenden Richtungen des R_{3n} senkrecht. Daß die beiden Prinzipien im regulären Falle gleichwertig sind, wird hierdurch augenfällig.

ZWEITER TEIL

Mechanische Systeme mit Ungleichheitsbedingungen[5]

§ 5

Allgemeines über Punktsysteme mit holonomen und nichtholonomen Bedingungsungleichheiten

Den holonomen und nichtholonomen Bedingungsgleichungen sollen k' Ungleichheiten

(20) $$g_{\varkappa'}(x_\varrho; t) > 0 \qquad (\varkappa' = 1, 2, \ldots, k')$$

---

[5] Für Geschichte und Literatur vgl. die Artikel in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. IV 1 von A. VOSS, *Die Prinzipien der rationellen Mechanik*, besonders S. 73 und 85, und von P. STÄCKEL, *Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper*, besonders S. 460. Die dort gemachten Angaben werden hier nach verschiedenen Richtungen ergänzt.

hinzugefügt werden; dabei wird nur vorausgesetzt, daß es zur Zeit t Lagen des Systems gebe, die mit allen Bedingungen verträglich sind.

Wenn für ein zur Zeit t zulässiges Wertsystem (x_ϱ) eine der Funktionen $g_{\varkappa'}(x_\varrho; t)$ positiv ist, so heiße die Bedingung $g_{\varkappa'} \geq 0$ *unwirksam für die Änderung der Lage des Systems;* denn mit dem Wertsystem $(x_\varrho; t)$ sind auch *alle* Wertsysteme einer hinreichend kleinen Umgebung zulässig. Wenn jedoch eine der Funktionen $g_{\varkappa'}(x_\varrho; t)$ zur Zeit t verschwindet und in der Umgebung der Stelle $(x_\varrho; t)$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt, so müssen die Geschwindigkeitskomponenten $(\dot{x}_\varrho)$ der Bedingung

$$(21) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} \frac{\partial g_{\varkappa'}}{\partial x_\varrho} \dot{x}_\varrho + \frac{\partial g_{\varkappa'}}{\partial t} \geq 0$$

genügen. Ist der Wert der linken Seite für ein Wertsystem $(x_\varrho; t)$ positiv, so sind mit dem Bewegungszustande $(x_\varrho; \dot{x}_\varrho; t)$ auch alle Bewegungszustände einer hinreichend kleinen Umgebung zulässig. Eine solche Ungleichheit heiße daher *unwirksam für die Änderung des Bewegungszustandes.*

Zu den k' holonomen Ungleichheiten (20) können auf der Geschwindigkeitsstufe noch l' nichtholonome Ungleichheiten

$$(22) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} \psi_{\lambda'\varrho}(x_\varrho; t)\, \dot{x}_\varrho + \psi_{\lambda' 0}(x_\varrho; t) \geq 0 \qquad (\lambda' = 1, 2, \ldots, l')$$

hinzukommen. Je nachdem Gleichheit oder Ungleichheit stattfindet, sind sie wirksam oder unwirksam für die Änderung des Bewegungszustandes.

Auf die beschriebene Art mögen für den gegebenen Bewegungszustand im ganzen s Gleichungen erhalten werden, denen die Geschwindigkeitskomponenten genügen:

$$(23) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} G_{\sigma\varrho}(x_\varrho; t)\, \dot{x}_\varrho + G_{\sigma 0}(x_\varrho; t) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s).$$

Die Lage (x_ϱ) des Systems zur Zeit t werde *regulär* genannt, wenn sich mittels der $m+s$ Gleichungen (4) und (23) ebenso viele geeignet zu wählende Geschwindigkeitskomponenten als lineare Funktionen der übrigen $3n-m-s$ darstellen lassen.

Aus jeder der Gleichungen (23) folgt eine Ungleichheit für die Beschleunigungskomponenten:

$$\sum_{\varrho=1}^{3n} G_{\sigma\varrho}(x_\varrho;t)\,\ddot{x}_\varrho + K_\sigma(x_\varrho;\dot{x}_\varrho;t) > 0\,. \tag{24}$$

Während jedoch die Kenntnis des Bewegungszustandes ermöglichte, zu entscheiden, ob bei einer der Bedingungen (21) und (22) das Gleichheitszeichen gilt oder nicht, hört das auf bei den Bedingungen (24). Wie sich herausstellen wird, sind für reguläre Lagen des Systems die wirklich stattfindenden Beschleunigungskomponenten $(\ddot{\xi}_\varrho)$ durch das Prinzip des kleinsten Zwanges eindeutig bestimmt, und zwar gilt, wenn die $(\ddot{\xi}_\varrho)$ für die $(\ddot{x}_\varrho)$ eingesetzt werden, für einen Teil der Bedingungen (24) das Gleichheitszeichen, für den Rest *das Zeichen des Größerseins.* Diese Ungleichheiten hätten von vornherein weggelassen werden können; sie sollen deshalb *unwirksam für die Beschleunigungen* heißen.

§ 6

Das D'ALEMBERT-FOURIERsche Prinzip bei Systemen mit holonomen und nichtholonomen Ungleichheitsbedingungen

Auf Grund von Überlegungen, die auf FOURIER[6] zurückgehen, hat man das D'ALEMBERTsche Prinzip bei Systemen mit Ungleichheitsbedingungen durch die Forderung ersetzt, *die virtuelle Arbeit der Reaktionen dürfe keinen negativen Wert haben.* In der angeführten Abhandlung hat GIBBS ein Beispiel gegeben, bei dem dieses D'ALEMBERT-FOURIERsche Prinzip zur vollständigen Bestimmung der Beschleunigungskomponenten nicht ausreicht. Dasselbe leistet auch das folgende einfachere Beispiel.

Ein Punkt von der Masse Eins bewege sich im Raum und sei der Ungleichheit $x_3 \geq 0$ unterworfen. Zur Zeit t befinde er sich, damit die Bedingung für die Änderung der Lage wirksam wird, in der

[6] J. FOURIER, *Mémoire sur la statique*, Journ. de l'éc. polyt., cah. 5, 1798, S. 30; Œuvres t. II, 1890, S. 488.

$x_1 x_2$-Ebene. Dann müssen die Geschwindigkeitskomponenten der Bedingung $\dot{x}_3 \geq 0$ genügen, und diese Bedingung wird wirksam für die Änderung des Bewegungszustandes, falls $\dot{x}_3 = 0$ ist. Hieraus folgt für die Beschleunigungskomponenten, daß $\ddot{x}_3 \geq 0$ sein muß.

Die virtuellen Verrückungen müssen, wenn zur Zeit t $x_3 = 0$ ist, die Ungleichheit $\delta x_3 \geq 0$ erfüllen. Nunmehr fordert das D'ALEMBERT-FOURIERsche Prinzip, daß

$$(7') \qquad (\ddot{x}_1 - X_1)\,\delta x_1 + (\ddot{x}_2 - X_2)\,\delta x_2 + (\ddot{x}_3 - X_3)\,\delta x_3 \geq 0$$

ist. Wegen der Willkürlichkeit von δx_1 und δx_2 muß $\ddot{x}_1 = X_1$, $\ddot{x}_2 = X_2$ sein, so daß $(7')$ übergeht in die Bedingung $\ddot{x}_3 \geq X_3$.

Das Ergebnis ist, daß $\ddot{x}_3$ nicht kleiner sein darf als der größere der beiden Werte 0 und X_3. *Mithin wird $\ddot{x}_3$ durch das* D'ALEMBERT-FOURIER*sche Prinzip nicht vollständig bestimmt.*

Ähnlich wie GIBBS es für sein Beispiel bemerkt hat, ist es auch hier möglich, den Wert von $\ddot{x}_3$ durch einfache Überlegungen über den Fortgang der Bewegung zu ermitteln. Ist nämlich die Komponente X_3 negativ, so wird sie durch die Reaktion der Grenzfläche $x_3 = 0$ vernichtet, und man hat $\ddot{x}_3 = 0$. Ist aber X_3 null oder positiv, so bewegt sich der Massenpunkt, als ob er frei wäre, und man hat $\ddot{x}_3 = X_3$. Das ist richtig. Allein die rechnerische Durchführung des Ansatzes, den das D'ALEMBERT-FOURIERsche Prinzip vorschreibt, ergibt für $\ddot{x}_3$ nur die vorher aufgestellte Ungleichheitsbedingung, und somit zeigt das Beispiel, daß *dieses Prinzip im allgemeinen nicht zur Bestimmung der Beschleunigungen führt.*

§ 7

Das Prinzip des kleinsten Zwanges bei Systemen mit holonomen und nichtholonomen Ungleichheitsbedingungen

Wie es scheint, hat zuerst JACOBI in seinen Vorlesungen über Dynamik während des Wintersemesters 1848/49 die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwanges auf Systeme mit Ungleichheitsbedingungen genauer untersucht[7]. Ihm sind RITTER (1853)

[7] Nach A. VOSS, a. a. O., S. 87; eine Abschrift der dort angeführten Ausarbeitung SCHEIBNERS befindet sich in der Bibliothek der Berliner Akademie der Wissenschaften.

in einer von GAUSS geleiteten Dissertation[8], GIBBS in der angeführten Abhandlung vom Jahre 1879 und BOLTZMANN[9] gefolgt.

Ohne die soeben genannten Veröffentlichungen zu kennen, hat sich MAYER[10], angeregt durch ältere Arbeiten OSTROGRADSKYS (1834 und 1838), mit Ungleichheitsbedingungen beschäftigt und auf Grund von Bemerkungen STUDYS im Jahre 1899 gezeigt, wie man mittels des Prinzips des kleinsten Zwanges die Beschleunigungen bestimmen kann; dabei wird stillschweigend reguläre Lage vorausgesetzt. Zweifelhaft bleibt nur, ob unter Umständen mehrere Systeme von Beschleunigungen erhalten werden. Allerdings meint MAYER, „man darf es wohl deshalb als selbstverständlich ansehen, daß nicht zwei verschiedene Systeme Beschleunigungen von der angegebenen Beschaffenheit existieren können, weil, wenn sie existierten, gar kein Mittel mehr vorhanden wäre, unter den beiden Systemen das richtige herauszufinden." Jedoch können, wie in § 3 nachgewiesen worden ist, bei singulären Lagen sehr wohl zwei Systeme von Beschleunigungen den Zwang zu einem Minimum machen. Daß unter den Voraussetzungen MAYERS Eindeutigkeit herrscht, bedarf also eines Beweises.

Reguläre Lage stillschweigend vorausgesetzt, hatte schon JACOBI in der angeführten Vorlesung bemerkt, daß „die Natur des vorliegenden Minimums mehrere Minima ausschließe", und BOLTZMANN hatte behauptet, daß „der Zwang für die wirkliche Bewegung ein absolutes Minimum sein muß und nicht mehrerer Minima fähig ist" (a. a. O., S. 240). Bald darauf hat ZERMELO[11] für reguläre Lagen des Systems, allerdings unter gewissen beschränkenden Annahmen, in aller Strenge bewiesen, daß der Zwang nur *ein* Minimum besitzt, und damit die Eindeutigkeit der Beschleunigungen dargetan.

---

[8] A. RITTER, *Über das Princip des kleinsten Zwanges*, Dissertation, Göttingen 1853.

[9] L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über die Principe der Mechanik*, I. Teil, Abschnitt VI, Leipzig 1897.

[10] A. MAYER, *Über die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung für reibungslose Punktsysteme, die Bedingungsungleichungen unterworfen sind*, Leipziger Berichte, math.-phys. Klasse, Bd. LI, 1899, S. 224.

[11] E. ZERMELO, *Über die Bewegung eines Punktsystems bei Bedingungsungleichungen*, Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse, Jahrgang 1899, S. 306; die Note ist am 3. Februar 1900 vorgelegt worden.

Das in § 3 benutzte Verfahren läßt sich auf den Fall übertragen, daß zu den Bedingungsgleichungen irgendwelche holonome oder nichtholonome Ungleichheiten hinzutreten, und gestattet es, den Satz von der Eindeutigkeit der Beschleunigungen in seiner allgemeinsten Fassung herzuleiten.

Im R_{3n} der Komponenten $(\ddot{x}_\varrho)$ ist der Zwang für das Raumstück, das sämtliche mit den Bedingungen verträgliche Punkte $(\ddot{x}_\varrho)$ enthält, eine stetige Funktion des Ortes und erreicht daher mindestens an einer Stelle einen kleinsten Wert; reguläre Lage braucht für diesen Schluß nicht vorausgesetzt zu werden.

Der Punkt $(\ddot{\xi}_\varrho)$ sei eine Stelle des Minimums, so daß für alle mit den Bedingungen verträglichen, hinreichend kleinen Änderungen (u_ϱ) seiner Koordinaten $Z(\ddot{\xi}_\varrho + u_\varrho)$ größer als $Z(\ddot{\xi}_\varrho)$ ist. Zufolge der Gleichung (12) ist hierfür die Bedingung

$$(25) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} (m_\varrho \ddot{\xi}_\varrho - X_\varrho)\, u_\varrho > 0$$

notwendig und hinreichend. *Bei regulärer Lage* läßt sich wiederum zeigen, daß aus dem Bestehen der Bedingung (25) für alle hinreichend kleinen zulässigen Wertsysteme (u_ϱ) ihr Bestehen für alle überhaupt vorhandenen Wertsysteme (u_ϱ) erschlossen werden kann.

Damit ein Wertsystem (u_ϱ) zulässig ist, muß es erstens die Gleichungen (11) befriedigen. Zweitens müssen die Bedingungen (24), die für $\ddot{x}_\varrho = \ddot{\xi}_\varrho$ erfüllt waren, erfüllt bleiben, wenn statt $\ddot{x}_\varrho$ der Wert $\ddot{\xi}_\varrho + u_\varrho$ eingesetzt wird.

Jetzt sei ϑ eine Größe, die zwischen 0 und 1 liegt. Dann ist mit dem Wertsystem (U_ϱ) immer auch das Wertsystem (ϑU_ϱ) zulässig. Daß nämlich für dieses Wertsystem die Gleichungen (11) bestehen, liegt auf der Hand. Gelten aber für einen Wert des Zeigers σ die beiden Ungleichheiten

$$(26) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} G_{\sigma\varrho}(x_\varrho; t)\, \ddot{\xi}_\varrho + K_\sigma(x_\varrho; \dot{x}_\varrho; t) \geq 0$$

und

$$(27) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} G_{\sigma\varrho}(x_\varrho; t)\, \ddot{\xi}_\varrho + \sum_{\varrho=1}^{3n} G_{\sigma\varrho}(x_\varrho; t)\, U_\varrho + K_\sigma(x_\varrho; \dot{x}_\varrho; t) \geq 0\,,$$

so gilt auch, wie man sich leicht überzeugt, die Ungleichheit

$$(28)\qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} G_{\sigma\varrho}(x_\varrho;t)\,\ddot{\xi}_\varrho + \vartheta \sum_{\varrho=1}^{3n} G_{\sigma\varrho}(x_\varrho;t)\,U_\varrho + K_\sigma(x_\varrho;\dot{x}_\varrho;t) \geq 0\,.$$

Das Ergebnis läßt sich geometrisch dahin deuten, daß bei regulärer Lage des Systems das Raumstück, das sämtliche mit den Bedingungen verträgliche Punkte $(\ddot{x}_\varrho)$ enthält, einfach zusammenhängend und überall konvex ist.

Wählt man nunmehr die Größe ϑ hinreichend klein, so ist die Forderung (25) für $u_\varrho = \vartheta U_\varrho$ erfüllt, also auch für $u_\varrho = U_\varrho$. Den Schluß des Beweises möge man wörtlich aus § 3 entnehmen.

§ 8

Bestimmung der Beschleunigungen mittels des Prinzips des kleinsten Zwanges

Die Bestimmung der Beschleunigungen mittels des Prinzips des kleinsten Zwanges wird erleichtert, wenn man sogleich die in § 4 entwickelte geometrische Deutung benutzt. Unter Voraussetzung einer regulären Lage des Systems ergeben sich dann entsprechend den Gleichungen (5) zwischen den Koordinaten (y_ϱ) m lineare Gleichungen

$$(29)\qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} A_{\mu\varrho}\, y_\varrho + A_{\mu 0} = 0\,,$$

die voneinander unabhängig sind und einander nicht widersprechen, und entsprechend den Bedingungen (24) s miteinander und mit (29) verträgliche Ungleichheiten

$$(30)\qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} B_{\sigma\varrho}\, y_\varrho + B_{\sigma 0} \geq 0\,.$$

Durch die Gleichungen (29) wird aus dem R_{3n} ein Euklidischer R_{3n-m} ausgeschieden, und die Ungleichheiten (30) bewirken, daß von diesem nur die Punkte eines gewissen N-fach ausgedehnten, einfach zusammenhängenden, überall konvexen Raumstückes S_N in Betracht kommen, das von Euklidischen Räumen mit $N-1$, $N-2, \ldots, 2, 1$ Ausdehnungen begrenzt wird; dabei ist $N \leqq 3n-m$. Das Prinzip des kleinsten Zwanges läuft also darauf hinaus, daß die Aufgabe gelöst werden soll:

Aus einem Euklidischen Raume wird durch lineare Gleichungen und Ungleichheiten ein Raumstück ausgesondert. Es ist dessen kürzester Abstand von einem gegebenen Punkte des Raumes zu ermitteln.

Daß es nur einen solchen kürzesten Abstand gibt, ist im vorhergehenden Paragraphen bewiesen worden. Bei seiner Ermittlung sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens kann der gegebene Punkt O dem Raumstück S_N einschließlich der Begrenzung angehören. Dann wird der kürzeste Abstand im Punkte O selbst erreicht. Zweitens kann O außerhalb des Raumstückes S_N liegen. Wird dann von O das Lot OF auf den N-fach ausgedehnten Euklidischen Raum R_N gefällt, dem S_N entnommen ist, so ist OF das Minimum der Abstände sämtlicher Punkte des R_N von O. Gehört also der Punkt F zum Raumstück S_N, so ist OF der gesuchte kürzeste Abstand; es ist leicht zu sehen, daß in diesem Falle der Punkt F auf der Begrenzung des Raumstücks S_N gegen den Raum R_{3n} liegt. Gehört endlich der Punkt F nicht zum Raumstück S_N, so wird das Minimum des Abstandes in einem von F verschiedenen Punkte A erreicht, der notwendig auf der Begrenzung des Raumstücks S_N gegen den R_N liegt. Weil nämlich das Lot OF auf allen im R_N liegenden Richtungen des R_{3n} senkrecht steht, hat man die Gleichung

$$OA^2 = OF^2 + AF^2, \tag{31}$$

folglich ist AF das Minimum der Abstände des Punktes F von den Punkten des Raumstücks S_N.

Durch die soeben angestellte Überlegung wird die ursprüngliche Aufgabe mit den Nebenbedingungen (29) auf dieselbe Aufgabe ohne Nebenbedingungen zurückgeführt. Mit genau derselben Aufgabe, *das Minimum des Ausdrucks*

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_N^2 \tag{32}$$

zu ermitteln, wenn für die Größen $z_1, z_2, \ldots, z_N$ *s lineare Ungleichheiten*

$$C_{\sigma 1} z_1 + C_{\sigma 2} z_2 + \cdots + C_{\sigma N} z_N \geq 0 \tag{33}$$

vorgeschrieben sind, hat sich GAUSS in einer während des Wintersemesters 1850/51 gehaltenen Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate beschäftigt[12]. Das von ihm angedeutete Verfahren, die Stelle des Minimums zu ermitteln, habe ich im Jahre 1917 ausführlich dargestellt und gleichzeitig eine andere, ebenfalls auf geometrischen Betrachtungen beruhende Behandlungsweise vorgeschlagen[13]. Endlich kann man zur Lösung auch die Methode des Multiplikators benutzen. Für die Einzelheiten möge auf die Abhandlung vom Jahre 1917 verwiesen werden[14].

§ 9

Zusammenhang der GAUSSschen Aufgabe des Minimums mit dem Prinzip des kleinsten Zwanges

Nach RITTERS Bericht zu urteilen, hat GAUSS in der Vorlesung vom Wintersemester 1850/51 nicht gesagt, was ihn dazu veranlaßt hatte, seine Aufgabe des Minimums mit Ungleichheits-

[12] C. F. GAUSS, Werke Bd. X1, Göttingen 1917, S. 473; Abdruck eines Stückes der Ausarbeitung von RITTER.

[13] P. STÄCKEL, *Eine von* GAUSS *gestellte Aufgabe des Minimums,* diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1917, 11. Abhandlung. Die Note ZERMELOS, die scheinbar einen ganz anderen Gegenstand betrifft, war mir damals nicht gegenwärtig gewesen. Nachdem ich nachträglich den Zusammenhang erkannt habe, versäume ich nicht, darauf hinzuweisen, daß ein Teil der Ausführungen der Abhandlung vom Jahre 1917 schon von ZERMELO gegeben worden war.

[14] Mein Kollege PERRON war so freundlich, mir mitzuteilen, daß in § 7 zwei Stellen zu verbessern sind. Wenn einer der durch mein Verfahren ermittelten möglichen Punkte des Minimums der Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für ein Raumstück S_n im Innern einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Grenzmannigfaltigkeit liegt, braucht er nicht das Minimum zu liefern, vielmehr ist für ihn dieselbe Prüfung vorzunehmen, die bei weniger als $n-1$ Ausdehnungen erforderlich ist. Man betrachte zum Beispiel den Fall, daß in der Ebene $(n=2)$ der kürzeste Abstand eines Punktes von der Fläche eines Quadrats bestimmt werden soll. Hiermit hängt es zusammen, daß die Vorzeichenbedingung für die Multiplikatoren nicht ausdrücklich angegeben worden ist. Sie findet sich übrigens schon bei OSTROGRADSKY, und MAYER ist ausführlich darauf eingegangen; vgl. auch L. HENNEBERG, *Über den Fall der Statik, in dem das virtuelle Moment einen negativen Wert besitzt,* Journ. f. r. u. a. Math., Bd. CXIII (1894), S. 179.

bedingungen zu stellen, und es entspringt daher die Frage, ob er deren Zusammenhang mit dem Prinzip des kleinsten Zwanges gekannt hat. Nun bleibt es zwar rätselhaft, wie er sonst zu der Aufgabe gekommen sein sollte; es lassen sich aber auch andere Erwägungen für eine bejahende Antwort geltend machen.

Andeutungen in Briefen und Veröffentlichungen zeigen, daß GAUSS sich wiederholt mit mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten beschäftigt hat. Hier genüge es, eine Äußerung zu erwähnen, die er ungefähr zur Zeit jener Vorlesung zu SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN getan hat: ,,Wir können uns, sagte er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewußt sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken, und er habe, fuhr er scherzend fort, gewisse Probleme hier zur Seite gelegt, die er in einem höheren Zustande geometrisch zu behandeln gedächte."[15]

In seiner Note: *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik* vom Jahre 1829 erklärt GAUSS die Beschränkung auf Bedingungsgleichungen für ,,unnötig und der Natur nicht immer angemessen" und fordert, man solle das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten gleich anfangs so ausdrücken, daß es alle Fälle umfasse. Am Schlusse sagt er, die Analogie mit der Methode der kleinsten Quadrate lasse sich noch weiter verfolgen, was jedoch gegenwärtig nicht zu seiner Absicht gehöre[16]. Auf die Wichtigkeit der Bedingungsungleichheiten hat er auch in der am 28. September 1829 vorgelegten Abhandlung: *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* hingewiesen[17] und ist auf diesen Gegenstand in dem Brief an MÖBIUS vom 29. September 1837 zurückgekommen[18].

In der auf GAUSS zurückgehenden Dissertation RITTERS vom Jahre 1853 wird das Prinzip des kleinsten Zwanges auf Systeme mit holonomen Ungleichheitsbedingungen angewandt, und zwar bedient sich RITTER dabei der Sprache der mehrdimensionalen

[15] Vgl. meinen Aufsatz: GAUSS *als Geometer*, Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von GAUSS, Heft V, Leipzig 1918, S. 136.

[16] C. F. GAUSS, Werke Bd. V, S. 25.

[17] C. F. GAUSS, Werke Bd. V, S. 35.

[18] Zuerst abgedruckt von C. NEUMANN, *Über das Princip der virtuellen oder fakultativen Verrückungen*, Leipziger Berichte, math.-phys. Klasse, Bd. XXXI, 1879, S. 61; wiederabgedruckt in C. F. GAUSS, Werke Bd. XI 1, S. 17.

Geometrie. Er befaßt sich eingehend mit der allgemeinen Aufgabe, bei einem mehrfach ausgedehnten Euklidischen Raume das Minimum einer Funktion des Orts für ein durch Ungleichheiten erklärtes Raumstück zu ermitteln. Bei diesen Allgemeinheiten ist RITTER stehengeblieben; er hat den Ansatz des GAUSSschen Prinzips nicht rechnerisch durchgeführt und die linearen Ungleichheiten nicht aufgestellt[19]. Daß GAUSS diesen letzten Schritt getan hat, wird man als sicher ansehen dürfen.

§ 10

Virtuelle Verrückungen und zulässige Änderungen der Beschleunigungen

Daß bei Gleichheitsbedingungen, reguläre Lage des Systems vorausgesetzt, das D'ALEMBERTsche Prinzip und das Prinzip des kleinsten Zwanges einander ersetzen können, beruht auf den Gleichungen

$$\delta x_\varrho = u_\varrho \, \delta t, \tag{14}$$

die eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den virtuellen Verrückungen und den zulässigen Änderungen der Beschleunigungskomponenten herstellen. Daß dagegen das D'ALEMBERT-FOURIERsche und das GAUSSsche Prinzip bei Ungleichheitsbedingungen, auch wenn reguläre Lage vorausgesetzt wird, nicht gleichwertig sind, zeigte das in § 6 behandelte Beispiel.

Welche Beziehungen, wird man fragen, bestehen, zunächst bei dem Beispiel, zwischen den Größen (δx_ϱ) und den Größen (u_ϱ)? Es kommt nur der Fall in Betracht, daß die Bedingung $x_3 \geqq 0$ für die Änderung des Bewegungszustandes wirksam wird, daß also x_3 und $\dot{x}_3$ zur Zeit t verschwinden. Dann dürfen die virtuellen Verrückungen δx_1 und δx_2 willkürlich gewählt werden, und es muß $\delta x_3 \geqq 0$ sein. Für die Beschleunigungskomponenten gilt die Bedingung $\ddot{x}_3 \geqq 0$. Mithin sind u_1 und u_2 willkürlich wählbare kleine Größen, und man darf $\delta x_1 = u_1 \delta t$, $\delta x_2 = u_2 \delta t$ setzen. Bei u_3

[19] Der betreffende Abschnitt der Dissertation RITTERS ist abgedruckt in C. F. GAUSS, Werke Bd. X 1, S. 469.

sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Ist die Bedingung für $\ddot{x}_3$ wirksam, also $\ddot{\xi}_3 = 0$, so muß $u_3 \geq 0$ sein, und man darf $\delta x_3 = u_3 \delta t$ setzen. Ist diese Bedingung jedoch unwirksam, also $\ddot{\xi}_3 > 0$, so ist u_3 eine willkürlich wählbare kleine Größe. Mithin erfordert die Bedingung des Minimums, daß jetzt $\ddot{\xi}_3 = X_3$ wird. Bei negativen Werten von u_3 verliert die Gleichung $\delta x_3 = u_3 \delta t$ ihre Gültigkeit, das heißt, *der Bereich der zulässigen Änderungen* (u_ϱ) *ist ausgedehnter als der Bereich der virtuellen Verrückungen* (δx_ϱ). Daß die Bedingung des Minimums für diejenigen Änderungen der Beschleunigung erfüllt ist, die sich aus den virtuellen Verrückungen mittels der Gleichung $\delta x_\varrho = u_\varrho \delta t$ ergeben, ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Denn der Zwang muß, als Funktion der Beschleunigungskomponenten aufgefaßt, ein Minimum werden; aber die Forderung, daß die virtuelle Arbeit der Reaktionen nicht negativ sein darf: $(\ddot{\xi}_3 - X_3)\,\delta x_3 \geq 0$, besagt weniger als die Forderung: $(\ddot{\xi}_3 - X_3)\,u_3 \geq 0$, die für das Minimum des Zwanges notwendig und hinreichend ist. So erklärt es sich, daß die erste Forderung für $\ddot{\xi}_3$ nur eine Ungleichheit liefert, während die zweite die eindeutige Bestimmung der Beschleunigung nach sich zieht.

Weiter erkennt man, daß das Gaussssche Prinzip keine Folge des d'Alembert-Fourierschen Prinzips sein kann; denn ließe es sich daraus ableiten, so müßte die Beschleunigung durch das d'Alembert-Fouriersche Prinzip eindeutig bestimmt werden. Wohl aber folgt dieses Prinzip aus dem Gaussschen, wenn nämlich u_3 der Beschränkung unterworfen wird, nicht negativ zu sein.

Was bei dem Beispiel gilt, bewährt sich allgemein als richtig. Wenn man sich, wie es bei dem Nachweis des Minimums erlaubt ist, auf hinreichend kleine Wertsysteme (u_ϱ) beschränkt, so müssen die Größen (u_ϱ) zunächst die Gleichungen (11) befriedigen. Dazu kommen, wie die Bedingungen (27) zeigen, für diejenigen Werte σ' des Zeigers σ, bei denen in den Bedingungen (26) das Gleichheitszeichen gilt, die Ungleichheiten

$$(34) \qquad \sum_{\varrho=1}^{3n} G_{\sigma'\varrho}\, u_\varrho \geq 0 \,.$$

Wenn dagegen in den Bedingungen (26) das Zeichen des Größerseins gilt, so sind sie für die Änderungen der Beschleunigungen unwirksam.

Für die virtuellen Verrückungen hat man zunächst die den Gleichungen (11) entsprechenden Gleichungen (6). Dazu treten aber, falls die Ungleichheiten (20) für die Änderung der Lage wirksam werden, die Bedingungen

$$\sum_{\varrho=1}^{3n} G_{\sigma\varrho}\, \delta x_\varrho > 0\,, \tag{35}$$

und zwar für alle Werte $\sigma = 1, 2, 3, \ldots, s$.

Ein Blick auf die Formeln zeigt, daß jedes System virtueller Verrückungen (δx_ϱ) vermöge der Gleichungen (14) ein System zulässiger Änderungen (u_ϱ) der Beschleunigungskomponenten liefert. Im allgemeinen gilt aber nicht das Umgekehrte, denn die Verrückungen (δx_ϱ) müssen sämtliche s Ungleichheiten (35) befriedigen, während die Bedingungen (34) für die Änderungen (u_ϱ) im allgemeinen nur für einen Teil der Werte von σ zu erfüllen sind. Im allgemeinen ist demnach der Bereich der zulässigen Änderungen (u_ϱ) ausgedehnter als der Bereich der virtuellen Verrückungen (δx_ϱ), und die Forderung

$$\sum_{\varrho=1}^{3n} (m_\varrho\, \ddot{\xi}_\varrho - X_\varrho)\, \delta x_\varrho > 0 \tag{36}$$

des D'ALEMBERT-FOURIERschen Prinzips besagt weniger als die Forderung

$$\sum_{\varrho=1}^{3n} (m_\varrho\, \ddot{\xi}_\varrho - X_\varrho)\, u_\varrho > 0 \tag{24}$$

des GAUSSschen Prinzips.

Der BOLTZMANNsche geometrische Beweis des Prinzips des kleinsten Zwanges[20] könnte die Vermutung aufkommen lassen, daß dieses Prinzip auch bei Ungleichheitsbedingungen eine Folge des D'ALEMBERT-FOURIERschen Prinzips sei. Daß dem nicht so ist, zeigt schon das von BOLTZMANN ausführlich mitgeteilte Beispiel von GIBBS. Es ist allerdings richtig, daß aus jedem System virtueller Verrückungen (δx_ϱ) ein System zulässiger Änderungen (u_ϱ) der Beschleunigungskomponenten $\ddot{x}_\varrho$ hervorgeht, und es läßt

[20] L. BOLTZMANN, a. a. O., S. 216–220.

sich nicht bestreiten, daß für diese Änderungen $Z(\ddot{\xi}_\varrho + u_\varrho)$ größer als $Z(\ddot{\xi}_\varrho)$ ist. Damit ist jedoch bloß eine notwendige Bedingung für das Minimum erfüllt, und es fehlt der Nachweis, daß für *alle* zulässigen, hinreichend kleinen Änderungen der Beschleunigungskomponenten der Wert des Zwanges größer ausfällt als an der Stelle $(\ddot{\xi}_\varrho)$.

Gauss hat die Tragweite seines „neuen Grundgesetzes“ unterschätzt, als er erklärte, daß dieses der Materie nach schon in der Verbindung des d'Alembertschen Prinzips mit dem erweiterten Prinzip der virtuellen Verrückungen enthalten sei. Daß der Zwang eines mechanischen Systems, das beliebigen Gleichheits- und Ungleichheitsbedingungen unterliegt, bei den wirklichen Beschleunigungen ein Minimum ist, läßt sich nicht beweisen; es ist vielmehr ein *Axiom*, das erst den Fall der Ungleichheitsbedingungen der mathematischen Untersuchung zugänglich macht. *Eine solche Auffassung steigert nur die Bedeutung des* Gauss*schen Prinzips; dieses gewinnt dadurch den Rang des Grundgesetzes der analytischen Mechanik.*