Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summe und Differenzen ungerader Primzahlen. II. Teil**
Mit Beiträgen von W[ilhelm] Weinreich in Frankfurt a. M.

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1918, 2

Während der erste Teil (Sitzungsbericht 1917, Abt. A, Abh. 15) Folgen von zwei Primzahlen mit gegebener Differenz betraf, werden im zweiten Teil die Grundlagen für die Untersuchung von Primzahlfolgen mit beliebig vielen, symmetrischen Differenzen gelegt. Unter den Ergebnissen sei hervorgehoben, daß merkwürdige Beziehungen bestehen zwischen den Anzahlen solcher Folgen unter den 2n ersten ganzen Zahlen und den Anzahlen der mehrfachen Darstellungen der geraden Zahl 2n, die bei gewissen anderen Primzahlfolgen mit symmetrischen Differenzen stattfinden.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1918, S. XIV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften

Jahrgang 1918. 2. Abhandlung

Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen

II. TEIL

Von

† PAUL STÄCKEL
in Heidelberg

Mit Beiträgen von W. WEINREICH
in Frankfurt a. M.

Eingegangen am 19. Januar 1918

Heidelberg 1918
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1409

§ 9

Die Doppeldarstellungen gerader Zahlen als Summen mittels Lücken- und Primzahlpaaren gegebener Differenz

Aus zwei Paaren von Lückenzahlen r-ter Stufe, die dieselbe Zahl 2δ zur Differenz haben, v_r, $v_r+2\delta$ und w_r, $w_r+2\delta$, entspringt die Doppeldarstellung r-ter Stufe

$$2n = v_r + (w_r+2\delta) = (v_r+2\delta) + w_r \ . \tag{71}$$

Die in § 6 untersuchten Zwillingsdarstellungen r-ter Stufe sind darin als besonderer Fall enthalten. In diesem Paragraphen soll die Anzahl solcher Doppeldarstellungen $G_r^{(2\delta)}(2n)$ ermittelt werden.

Zunächst ist festzustellen, wann eine gerade Zahl $2n$ die geforderte Darstellung gestattet. Dabei sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Ist erstens 2δ durch 3 teilbar, also etwa gleich $6\delta'$, so verteilen sich nach § 4 die zulässigen Lückenzahlen v_r gleichmäßig auf die beiden Klassen $6\nu+1$ und $6\nu+5$, und die Summen, die aus zwei Paaren von Lückenzahlen hervorgehen, können alle drei Formen $6n_1$, $6n_1+2$, $6n_1+4$ haben. Die darzustellende gerade Zahl unterliegt keiner Beschränkung in bezug auf die Teilbarkeit durch drei.

Ist zweitens 2δ nicht durch 3 teilbar, so gehören nach § 4 die zulässigen Lückenzahlen v_r zu einer der beiden Klassen $6\nu+1$ und $6\nu+5$, und die Lückenzahlen $v_r+2\delta$ sind Mitglieder der anderen Klasse. Mithin erhält man, wie schon in § 6 für $2\delta=2$ ausgeführt wurde, nur die durch 6 teilbaren Zahlen $6n_1$.

Für die weitere Untersuchung setzen wir, wie schon in § 2, $2n=2P_r x+2u_r$, wo $2u_r$ dem Hauptbereich angehöre. Falls 2δ nicht durch 3 teilbar ist, muß $2n=6n_1$, also auch $2u_r=6t_r$ sein; jedoch soll zunächst, um die Allgemeinheit zu wahren, auf den Unterschied der beiden Fälle nicht eingegangen werden. Um Ausnahmen zu vermeiden, die für den vorliegenden Zweck nicht von Belang sind, möge die ganze Zahl x mindestens gleich $2+\frac{2\delta}{2P_r}$ sein.

Die beiden Lückenzahlpaare der Differenz 2δ sollen in der Form $2P_r y+v_r$, $2P_r y+v_r+2\delta$ und $2P_r z+w_r$, $2P_r z+w_r+2\delta$ angenommen werden, wo v_r und w_r dem Hauptbereich angehören. Aus der Gleichung

$$(72)\qquad 2P_r x+2u_r = 2P_r(y+z)+v_r+w_r+2\delta$$

folgt zunächst, daß $v_r+w_r+2\delta$ bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $2u_r$ übereinstimmt, und zwar wird $v_r+w_r+2\delta$ höchstens gleich $4P_r+2\delta-2$ werden können. Wenn $v_r+w_r+2\delta-\varepsilon\cdot 2P_r$ dem Hauptbereich angehört, so sind weiter y und z so zu wählen, daß $y+z=x-\varepsilon$ wird; wegen der für die Zahl x getroffenen Annahme ist es stets möglich, Paare von Zahlen y, z, die nicht negativ sind, zu finden, sodaß der Gleichung $y+z=x-\varepsilon$ genügt wird.

Die Anzahl der Wertepaare v_r, w_r, die Paare v_r, w_r und w_r, v_r als verschieden angesehen, wenn v_r von w_r verschieden ist, für die $v_r+w_r+2\delta$ bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $2u_r$ übereinstimmt, soll das Gewicht der Stufe r und der Gattung 2δ für die Zahlenklasse $2P_r x+2u_r$ genannt und mit $g_r^{(2\delta)}(2u_r)$ bezeichnet werden.

Zur Ermittelung der Gewichte dient wieder der Schluß von r auf $r+1$. Es sei $2u_{r+1}$ eine Zahl des Hauptbereichs $(r+1)$-ter Stufe. Das Zeichen $g_{r+1}^{(2\delta)}(2u_{r+1})$ bedeute die Anzahl der Wertepaare v_{r+1}, w_{r+1} des Hauptbereichs $(r+1)$-ter Stufe, die zu Lückenzahlpaaren der Differenz 2δ gehören und für die $v_{r+1}+w_{r+1}+2\delta$ bis auf ein Vielfaches von $2P_{r+1}$ mit $2u_{r+1}$ übereinstimmt. Man setze $2u_{r+1}=2P_r\xi+2u_r$, $v_{r+1}=2P_r\eta+v_r$, $w_{r+1}=2P_r\zeta+w_r$, wo $2u_r, v_r, w_r$ dem Hauptbereich r-ter Stufe angehören und die Zahlen ξ, η, ζ der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$ zu entnehmen sind. Dann sind v_r, $v_r+2\delta$ und w_r, $w_r+2\delta$ Lückenzahlpaare r-ter Stufe der Differenz 2δ, und die Summe $v_r+w_r+2\delta$ unterscheidet sich von $2u_r$ nur um ein Vielfaches von $2P_r$. Mithin gibt es $g_r^{(2\delta)}(2u_r)$ Paare v_r, w_r, die man nehmen darf. Weiter muß $\eta+\zeta$ bis auf ein Vielfaches von p_{r+1} mit $\xi-\varepsilon$ übereinstimmen. Für η darf man die Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$ setzen, ausgenommen die Zahl η_0, für die $2P_r\eta_0+v_r$ durch p_{r+1} teilbar wird, und die Zahlen

η_0', η_1, η_1', für die dasselbe der Reihe nach bei $2P_r\eta_0'+v_r+2\delta$, $2P_r(\xi-\varepsilon-\eta_1)+w_r$, $2P_r(\xi-\varepsilon-\eta_1')+w_r+2\delta$ eintritt.

Bis hierher galten für den allgemeinen Fall einer Differenz 2δ ganz ähnliche Betrachtungen, wie sie in § 6 für die Zwillingspaare angestellt wurden. Die weiteren Schlüsse beruhten dort auf dem Umstand, daß η_0 von η_0' und ebenso η_1 von η_1' verschieden ist. Solange das auch bei einer Differenz 2δ zutrifft, solange bleiben die dort gewonnenen Ergebnisse in Kraft. Man erhält unter dieser Voraussetzung, wenn $2u_{r+1}$ durch p_{r+1} teilbar ist, die Formel

$$(73)\qquad g_{r+1}^{(2\delta)}(2u_{r+1}) = g_{r+1}^{(2\delta)}(2P_r\xi'+2u_r) = g_r^{(2\delta)}(2u_r)\cdot(p_{r+1}-2)\,.$$

Wenn aber eine der beiden Zahlen $2u_{r+1}\pm 2\delta$ durch p_{r+1} teilbar ist, so wird

$$(74)\qquad g_{r+1}^{(2\delta)}(2u_{r+1}) = g_{r+1}^{(2\delta)}(2P_r\xi''+2u_r) = g_r^{(2\delta)}(2u_r)\cdot(p_{r+1}-3)\,,$$

und wenn keine der drei Zahlen $2u_{r+1}$, $2u_{r+1}\pm 2\delta$ den Teiler p_{r+1} aufweist:

$$(75)\qquad g_{r+1}^{(2\delta)}(2u_{r+1}) = g_{r+1}^{(2\delta)}(2P_r\xi+2u_r) = g_r^{(2\delta)}(2u_r)\cdot(p_{r+1}-4)\,.$$

Damit die Formeln (73), (74) und (75) gelten, müssen die Fallunterscheidungen sich gegenseitig ausschließen; es dürfen also nicht zwei der drei Zahlen $2u_{r+1}$, $2u_{r+1}\pm 2\delta$ gleichzeitig durch p_{r+1} teilbar sein, und hierin liegt, daß 2δ nicht den Teiler p_{r+1} haben darf. Hat aber umgekehrt 2δ nicht den Teiler p_{r+1}, so sind η_0 und η_0', η_1 und η_1' voneinander verschieden. Für das gleichzeitige Bestehen der Formeln (73), (74) und (75) ist demnach notwendig und hinreichend, daß 2δ nicht durch p_{r+1} teilbar ist.

Wenn 2δ durch p_{r+1} teilbar ist, so sind die drei Zahlen $2u_{r+1}$, $2u_{r+1}\pm 2\delta$ entweder alle frei von dem Teiler p_{r+1} oder alle damit behaftet. Im ersten Fall ist $\eta_0=\eta_0'$, $\eta_1=\eta_1'$, aber η_0 verschieden von η_1, und man erhält mit Hilfe der Gleichung (57) die Formel

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} g_{r+1}^{(2\delta)}(2u_{r+1}) &= g_{r+1}^{(2\delta)}(2P_r\xi+2u_r) = g_r^{(2\delta)}(2u_r)\cdot(p_{r+1}-2)\\ &= g_r^{(2\delta)}(2u_r)\cdot(p_{r+1}-4)\cdot M_1(p_{r+1})\,.\end{aligned}\right.$$

Im zweiten Fall sind die vier Ausnahmewerte von η einander gleich, und man erhält mit Hilfe der Gleichung (13) die Formel

$$(77)\quad \begin{cases} g_{r+1}^{(2\delta)}(2u_{r+1}) = g_{r+1}^{(2\delta)}(2P_r\xi^* + 2u_r) = g_r^{(2\delta)}(2u_r)\cdot(p_{r+1}-1) \\ \qquad = g_r^{(2\delta)}(2u_r)\cdot(p_{r+1}-2)\cdot M(p_{r+1})\,. \end{cases}$$

Es bleibt übrig, die Gewichte der Gattung 2δ bei einer niederen Stufe durch Abzählen zu bestimmen. Das gelingt leicht für $r=1$; jedoch sind jetzt die beiden Fälle, ob 2δ durch 3 teilbar ist oder nicht, zu trennen.

Ist erstens $2\delta = 6\delta'$, so erhält man aus jeder der beiden Lückenzahlen erster Stufe 1 und 5 ein Lückenzahlpaar der Differenz $6\delta'$, denn $1+6\delta'$ und $5+6\delta'$ sind wieder Lückenzahlen erster Stufe. Die vier Summen, die aus der Verbindung der Paare $1, 1+6\delta'$ und $5, 5+6\delta'$ hervorgehen, liefern, bis auf Vielfache von $2P_1 = 6$, einmal die Zahl 2, einmal die Zahl 4 und zweimal die Zahl 6. Mithin wird

$$(78)\qquad g_1^{(6\delta')}(2) = 1, \quad g_1^{(6\delta')}(4) = 1, \quad g_1^{(6\delta')}(6) = 2\,.$$

Ist zweitens 2δ nicht durch 3 teilbar, so entspringt nur aus einer der beiden Zahlen 1 und 5 ein Lückenzahlpaar der Differenz 2δ, und man erkennt sofort, daß hier

$$(79)\qquad g_1^{(2\delta)}(2) = 0, \quad g_1^{(2\delta)}(4) = 0, \quad g_1^{(2\delta)}(6) = 1$$

wird.

Die vorhergehenden Betrachtungen rechtfertigen den Anspruch der folgenden

REGEL für die Gewichte der Stufe r und der Gattung 2δ. Um das Gewicht $g_r^{(2\delta)}(2u_r) = g_r^{(2\delta)}(6n_1+2u_1)$ zu ermitteln, stelle man fest, durch welche der Primzahlen $5, 7, \ldots, p_r$ die drei Zahlen $2u_r - 2\delta$, $2u_r$, $2u_r + 2\delta$ teilbar sind. Es sei

$2u_r$ teilbar durch $a, b, \ldots, f, \ldots, l$;
$2u_r - 2\delta$ teilbar durch $a_1, b_1, \ldots, f_1, \ldots, l_1$;
$2u_r + 2\delta$ teilbar durch $a_2, b_2, \ldots, f_2, \ldots, l_2$.

Es seien ferner $a', b', \ldots, f', \ldots, l'$ die Primzahlen der Reihe $5, 7, \ldots, p_r$, die in keiner der drei Zahlen $2u_r$, $2u_r - 2\delta$, $2u_r + 2\delta$ vorkommen. Endlich seien gleichzeitig in 2δ enthalten aus der Reihe $a, b, \ldots, l$ die Primzahlen $A, B, \ldots, F, \ldots, L$, aus der Reihe $a', b', \ldots, f', \ldots, l'$ die Primzahlen $A', B', \ldots, F', \ldots, L'$. Dann ist

$$(80)\begin{cases} g_r^{(2\delta)}(2u_r) = g_r^{(2\delta)}(6n_1+2u_1) \\ = \Pi(f-2)\cdot\Pi(f_1-3)\cdot\Pi(f_2-3)\cdot\Pi(f'-4)\cdot\Pi M(F)\cdot\Pi M_1(F')\cdot g_1^{(2\delta)}(2u_1). \end{cases}$$

Nach der Bestimmung der Gewichte der Stufe r und der Gattung 2δ kehren wir zu der Aufgabe zurück, die Anzahl $G_r^{(2\delta)}(2n)$ zu bestimmen. Wenn v_r und w_r so gewählt worden sind, daß $v_r+w_r+2\delta$ sich von $2u_r$ nur um ein Vielfaches von $2P_r$ unterscheidet, was auf $g_r^{(2\delta)}(2u_r)$ Arten möglich ist, hat man zu bewirken, daß $y+z=x-\varepsilon$ wird. Das geht auf $x+1-\varepsilon$ Arten. Hieraus folgt für große Werte von $2n$ die asymptotische Darstellung

$$(81)\qquad G_r^{(2\delta)}(2n) = G_r^{(2\delta)}(2P_r x+2u_r) \sim \frac{2n}{2P_r}\cdot g_r^{(2\delta)}(2u_r)$$

oder nach einer ähnlichen Umgestaltung, wie sie bei $G_r^{(2)}(2n)$ in § 6 vorgenommen wurde:

$$(82)\qquad G_r^{(2\delta)}(2n) \sim W_r^{(2\delta)}(2n)\cdot S_r^{(2\delta)}(2n),$$

und zwar ist, entsprechend der Gleichung (55) für $W_r^{(2)}(2n)$, die Wachstumsfunktion

$$(83)\qquad W_r^{(2\delta)}(2n) = g_1^{(2\delta)}(2u_1)\cdot\frac{P_r^{(4)}}{2P_r}\cdot 2n$$

und, entsprechend der Gleichung (56) für $S_r^{(2)}(2n)$, die Schwankungsfunktion

$$(84)\quad S_r^{(2\delta)}(2n) = \Pi M_1(f)\cdot\Pi M'(f_1)\cdot\Pi M'(f_2)\cdot\Pi M(F)\cdot\Pi M_1(F');$$

die Multiplikatoren $M(p)$, $M_1(p)$, $M'(p)$ sind durch die Gleichungen (13), (57) und (58) erklärt, und zwar war

$$M(p) = \frac{p-1}{p-2},\quad M_1(p) = \frac{p-2}{p-4},\quad M'(p) = \frac{p-3}{p-4}.$$

Der Übergang zu den Primzahlen vollzieht sich ohne Schwierigkeit. Indem man wie in § 7 verfährt, entsteht aus der Schwankungsfunktion $S_r^{(2\delta)}(2n)$ die Schwankungsfunktion $S^{(2\delta)}(2n)$, bei der sämtliche Primteiler der drei Zahlen $2u_r$, $2u_r\pm 2\delta$ größer oder gleich 5 wirksam sind; als Primzahlen $A', B', \ldots, L'$ sind sämtliche in diesen drei Zahlen nicht vorkommende Primteiler von 2δ zu nehmen, die größer oder gleich 5 sind. Die Wachstumsfunktion $W^{(2\delta)}(2n)$ unterscheidet sich von der Wachstumsfunktion $W^{(2)}(2n)$ nur um den Faktor $g_1^{(2\delta)}(2u_1)$, der einen der Werte $0, 1, 2$ hat. Somit gilt die Formel

$$(A^{(2\delta)}) \quad G^{(2\delta)}(2n) = G^{(2\delta)}(6n_1 + 2u_1) \sim \varkappa^{(2)} \cdot \frac{\pi^4(2n)}{(2n)^3} \cdot g_1^{(2\delta)}(2u_1) \cdot S^{(2\delta)}(2n) .$$

In der Abhandlung vom Jahre 1916 hatte ich die Vermutung geäußert (*Darstellung*, S. 32), von einer gewissen Grenze ab gestatte jede Zahl $6n_1$ mindestens eine Zwillingsdarstellung und die Anzahl solcher Darstellungen wachse sogar mit zunehmenden Werten von $6n_1$ über alle Grenzen. Meine Vermutung ist durch die numerische Prüfung bestätigt worden (§ 8). Es darf als höchst wahrscheinlich bezeichnet werden, daß für die Doppeldarstellungen der geraden Zahlen mittels der Primzahlpaare der Differenz 2δ ein entsprechender Satz gilt, und zwar wird man, je nachdem 2δ durch 3 teilbar ist oder nicht, von einer gewissen Grenze ab alle geraden Zahlen oder nur die durch 6 teilbaren Zahlen erhalten. Es bietet sich hier ein weites Feld für numerische Rechnungen, wobei das von WEINREICH benutzte, in § 8 dargelegte Verfahren als Vorbild dienen kann.

§ 10

Lückenzahlfolgen mit gegebenen Differenzen

Die in § 4 angestellten Untersuchungen über Lückenzahlpaare gegebener Differenz 2δ lassen sich auf Lückenzahlfolgen mit gegebenen Differenzen $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_\mu$ ausdehnen. Auf der r-ten Stufe besteht eine solche Folge aus den $\mu+1$ Zahlen $v_r, v_r + 2\delta_1$, $v_r + 2\delta_1 + 2\delta_2, \ldots, v_r + 2\delta_1 + 2\delta_2 + \cdots + 2\delta_\mu$. Zur Abkürzung werde eingeführt

$$(85) \qquad 2\delta_1 + 2\delta_2 + \cdots + 2\delta_\nu = 2\sigma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu) ,$$

sodaß die $(\nu+1)$-te Zahl der Folge gleich $v_r + 2\sigma_\nu$ ist. Die Zahl $2\sigma_\mu$ soll als das Gewicht der Folge bezeichnet werden.

Während die Einzeldifferenz 2δ beliebig gewählt werden durfte, sind nicht alle Folgen gerader Zahlen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$ als Differenzenfolgen zulässig. Man erkennt zum Beispiel sofort, daß auf keiner Stufe dreigliedrige Lückenzahlfolgen mit den Differenzen $(2,2)$ vorkommen. Mit der Differenzenfolge $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_{\mu-1}, 2\delta_\mu$ ist offenbar auch die in umgekehrter Ordnung geschriebene Folge $2\delta_\mu, 2\delta_{\mu-1}, \ldots, 2\delta_2, 2\delta_1$ zulässig. Die umgekehrte Folge kann mit der ursprünglichen zusammenfallen. Solche Folgen, die bei den weiteren Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen werden, sollen symmetrisch heißen.

Wenn eine Differenzenfolge bei den Lückenzahlen r-ter Stufe auftritt, so findet sie sich auch auf allen vorhergehenden Stufen, denn die Lückenzahlen r-ter Stufe gehören zu allen vorhergehenden Stufen. Mithin enthält die erste Stufe bereits alle möglichen Differenzenfolgen. Indessen kann eine auf der ersten Stufe zulässige Folge beim Fortgang zu höheren Stufen unzulässig werden. Zum Beispiel ist die Differenzenfolge $(2,4,2,4,2)$ auf der ersten Stufe verwirklicht; sie fehlt aber auf der zweiten, denn von den 6 erzeugenden Zahlen müßte eine durch 5 teilbar sein. Allgemein gesprochen verliert man beim Übergang zu einer höheren Stufe immer gewisse Differenzenfolgen, weil eine der erzeugenden Zahlen durch die hinzutretende Primzahl teilbar sein würde. Es gibt jedoch Folgen, die auf jeder Stufe zulässig sind. Solche Folgen sollen beständig genannt werden.

Nur beständige Folgen kommen in Betracht, wenn man für die Anzahl der aus dem Hauptabschnitt r-ter Stufe entspringenden Lückenzahlfolgen mit gegebenen Differenzen asymptotische Gesetze herleiten will.

Die Differenzenfolgen, die sich ergeben, wenn man aus der Reihe der ungeraden Primzahlen irgendeine steigende Folge herausgreift und die Differenzen der benachbarten Zahlen bildet, sind teils beständig, teils unbeständig. Unbeständig ist zum Beispiel die Folge $2, 4, 2, 4, 2$, die zu den Primzahlen $5, 7, 11, 13, 17, 19$ gehört. Es ist sehr wahrscheinlich, daß folgender Satz gilt: Unbeständige Folgen von Differenzen kommen unter den Primzahlen, wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von Malen vor, dagegen sind *alle* beständigen Differenzenfolgen bei den Primzahlen unendlich oft verwirklicht. Es werden im folgenden sogar asymptotische Ausdrücke für die Anzahlen des Auftretens beständiger Differenzenfolgen aufgestellt werden; diese haben sich bei den numerischen Prüfungen als brauchbar erwiesen.

Damit eine Folge $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$ auf der ersten Stufe als Differenzenfolge erscheint, ist notwendig und hinreichend, daß sie entweder höchstens eine nicht durch 3 teilbare Zahl enthält oder daß beim Durchlaufen der Folge Zahlen der beiden Formen $6n_1+2$ und $6n_1+4$ miteinander abwechseln. Die nicht durch 3 teilbaren Differenzen dürfen durch beliebig lange Folgen durch 3 teilbarer Differenzen getrennt sein.

Zum Beweis beachte man, daß erstens die Differenzen der benachbarten Lückenzahlen erster Stufe die periodische Folge $2, 4, 2, 4, \ldots$ bilden und zweitens jede Zahl der Form $6n_1+2$ als eine Summe $(2+4)+(2+4)+\cdots+(2+4)+2$ dargestellt werden kann, jede Zahl der Form $6n_1+4$ als eine Summe $(4+2)+(4+2)+\cdots+(4+2)+4$, jede Zahl der Form $6n_1$ aber in der doppelten Gestalt $(2+4)+(2+4)+\cdots+(2+4)$ oder $(4+2)+(4+2)+\cdots+(4+2)$. Wenn man die Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$ in Summen der angegebenen Art auflöst, so muß die periodische Folge $2, 4, 2, 4, \ldots$ herauskommen, und das ist nur möglich, falls die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Man kann auch folgendermaßen vorgehen. Damit eine Differenzenfolge $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$ auf der r-ten Stufe zulässig ist, muß es mindestens eine Lückenzahl v_r des Hauptabschnittes r-ter Stufe geben, sodaß auch die μ Zahlen $v_r+2\sigma_1, v_r+2\sigma_2, \ldots, v_r+2\sigma_\mu$ Lückenzahlen r-ter Stufe sind. Es darf daher keine dieser Zahlen durch 3 teilbar sein, und die Lückenzahlen v_r sind zu verwerfen, bei denen Teilbarkeit durch 3 eintritt. Betrachten wir zuerst $v_r+2\sigma_1 = v_r+2\delta_1$. Ist $2\delta_1$ durch 3 teilbar, so braucht keine der Zahlen v_r verworfen zu werden. Ist $2\delta_1$ durch 3 teilbar, so entfallen die Zahlen v_r der Form $6n_1+1$ oder der Form $6n_1+5$, je nachdem $1+2\delta_1$ oder $5+2\delta_1$ durch 3 teilbar ist, sodaß immer die eine Hälfte der Lückenzahlen ausscheidet. Beim Übergang zu $v_r+2\sigma_2 = v_r+2\delta_1+2\delta_2$ wiederholen sich diese Schlüsse. Ist $2\delta_2$ durch 3 teilbar, so verbleiben die noch vorhandenen Zahlen v_r, und je nachdem $1+2\delta_2$ oder $5+2\delta_2$ durch 3 teilbar ist, sind die Zahlen $v_r+2\delta_1$ der Form $6n_1+1$ oder der Form $6n_1+5$ zu verwerfen. Damit Zahlen v_r übrigbleiben, muß demnach entweder mindestens eine der Differenzen $2\delta_1, 2\delta_2$ durch 3 teilbar sein oder die eine die Form $6n_1+2$, die andere die Form $6n_1+4$ haben.

Indem man so weiter schließt, erhellt, daß das vorher ausgesprochene Kennzeichen für alle Stufen notwendig, für die erste

Stufe aber, bei der es nur auf die Teilbarkeit durch 3 ankommt, auch hinreichend ist.

Für die Anwendung des Kennzeichens erster Stufe sind alle μ-gliedrigen Folgen gleichwertig, bei denen sich die Differenzen gleichen Zeigers um Vielfache von 6 unterscheiden. Mithin ergeben sich sämtliche μ-gliedrige Folgen erster Stufe, wenn man zunächst die μ-gliedrigen Grundfolgen bildet, bei denen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$ nur einen der drei Werte $2, 4, 6$ haben. Es gibt nur eine endliche Anzahl solcher Grundfolgen. Aus ihnen erhält man alle übrigen zulässigen Folgen, indem zu den Zahlen der Folgen beliebige Vielfache von 6 hinzugefügt werden.

In der umstehenden Tafel 10 sind die zulässigen Grundfolgen für $\mu = 1, 2, 3, 4$ zusammengestellt worden. Sie sind innerhalb der gleichgliedrigen Gruppen nach dem Gewicht geordnet. Wenn die umgekehrte Folge von der ursprünglichen verschieden ausfällt, so findet man in der Tafel immer nur die eine der beiden Folgen angegeben.

Wird nunmehr zur Primzahl 3 die Primzahl 5 hinzugenommen, so gelangt man zu einem Kennzeichen zweiter Stufe, das für alle Stufen, von der zweiten ab, notwendig, für diese aber auch hinreichend ist. Es läßt sich so aussprechen. Zu den 8 Lückenzahlen zweiter Stufe

$$1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29$$

addiere man zuerst die Differenz $2\delta_1$ und verwerfe alle Zahlen v_2, bei denen $v_2 + 2\delta_1$ durch 3 oder 5 teilbar ist. Zu den übrigbleibenden Zahlen $v_2 + 2\delta_1$ addiere man $2\delta_2$ und verwerfe alle Zahlen v_2, bei denen $v_2 + 2\delta_1 + 2\delta_2$ durch 3 oder 5 teilbar ist. Ebenso verfahre man mit $2\delta_3, \ldots, 2\delta_\mu$. Schließlich verbleiben nur die Zahlen v_2, die zulässig sind, oder das Verfahren führt zu der Einsicht, daß die Folge unzulässig ist.

Weil es für das Kennzeichen zweiter Stufe nur auf die Teilbarkeit durch 3 und 5 ankommt, darf man die Zahlen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$ durch ihre Reste bei der Division durch 30 ersetzen, sodaß nur Zahlen der Reihe $2, 4, \ldots, 28, 30$ auftreten. Auf der zweiten Stufe ergibt sich dann wieder für $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ je eine endliche Anzahl zulässiger Grundformen. Man findet ferner, daß die ein-, zwei- und dreigliedrigen Grundformen erster Stufe zulässig bleiben. Dagegen werden von den viergliedrigen Grundfolgen unzulässig:

TAFEL 10

Die zulässigen Grundfolgen erster Stufe für $\mu = 1, 2, 3, 4$

Eingliedrige Grundfolgen

Gewicht	2:	(2)		
Gewicht	4:	(4)		
Gewicht	6:	(6)		

Zweigliedrige Grundfolgen

Gewicht	6:	(2, 4)		
Gewicht	8:	(2, 6)		
Gewicht	10:	(4, 6)		
Gewicht	12:	(6, 6)		

Dreigliedrige Grundfolgen

Gewicht	8:	(2, 4, 2)		
Gewicht	10:	(4, 2, 4)		
Gewicht	12:	(2, 4, 6),	(2, 6, 4),	(4, 2, 6)
Gewicht	14:	(2, 6, 6),	(6, 2, 6)	
Gewicht	16:	(4, 6, 6),	(6, 4, 6)	
Gewicht	18:	(6, 6, 6)		

Viergliedrige Grundfolgen

Gewicht	12:	(2, 4, 2, 4),	(4, 2, 4, 2)	
Gewicht	14:	(2, 4, 2, 6),	(2, 4, 6, 2)	
Gewicht	16:	(4, 2, 4, 6),	(4, 2, 6, 4)	
Gewicht	18:	(2, 4, 6, 6),	(2, 6, 4, 6),	(2, 6, 6, 4)
		(4, 2, 6, 6),	(4, 6, 2, 6),	(6, 2, 4, 6)
Gewicht	20:	(2, 6, 6, 6),	(6, 2, 6, 6)	
Gewicht	22:	(4, 6, 6, 6),	(6, 4, 6, 6)	
Gewicht	24:	(6, 6, 6, 6)		

beim Gewicht 14: (2, 4, 2, 6);
beim Gewicht 18: (2, 4, 6, 6), (4, 2, 6, 6);
beim Gewicht 24: (6, 6, 6, 6).

Es findet sich nämlich unter den 5 erzeugenden Zahlen notwendig eine durch 5 teilbare.

Auf der dritten Stufe hat man in entsprechender Weise mit den $P_3^{(1)}=48$ Lückenzahlen v_3 zu verfahren. Bei den Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$ darf man sich auf die Reste gegen $2P_3=210$ beschränken. Wiederum entsteht für jeden Wert von μ eine endliche Anzahl von zulässigen Grundformen dritter Stufe, wiederum geht eine Anzahl der auf der zweiten Stufe zulässigen Grundformen verloren.

So geht es weiter. Man erhält jedoch auf diesem Wege keine Aufklärung darüber, ob eine Folge b e s t ä n d i g ist. Dazu müssen wir untersuchen, wann eine auf der r-ten Stufe zulässige Folge $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$ auf der $(r+1)$-ten Stufe unzulässig wird.

Alle etwa vorhandenen Lückenzahlfolgen $(r+1)$-ter Stufe mit den Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$, bei denen die Anfangszahl v_{r+1} dem Hauptabschnitt $(r+1)$-ter Stufe angehört, sind unter den Lückenzahlen r-ter Stufe mit denselben Differenzen enthalten, bei denen die Anfangszahl einem der p_{r+1} ersten Abschnitte angehört. Damit umgekehrt eine Lückenzahlfolge r-ter Stufe auch der folgenden Stufe zuzurechnen ist, darf keine Zahl der Folge durch p_{r+1} teilbar sein.

Die $\mu+1$ Zahlen einer der betrachteten p_{r+1} Folgen r-ter Stufe lassen sich nach einem wiederholt angewandten Verfahren in die Form setzen

$$2P_r\eta+v_r,\ 2P_r\eta+v_r+2\sigma_1,\ 2P_r\eta+v_r+2\sigma_2,\ \ldots,\ 2P_r\eta+v_r+2\sigma_\mu\,;$$

v_r liegt im Hauptabschnittt r-ter Stufe, η ist eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$. Für jede der $\mu+1$ Zahlen der hingeschriebenen Folge gibt es einen und nur einen Wert von η, den Ausnahmewert, für den sie durch p_{r+1} teilbar wird, und die Folgen r-ter Stufe, bei denen η einen Ausnahmewert annimmt, sind auf der $(r+1)$-ten Stufe unzulässig. Damit alle p_{r+1} Folgen unzulässig sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Ausnahmewerte alle p_{r+1} Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$ liefern; dabei ist nicht ausgeschlossen, daß eine solche Zahl mehrmals als Ausnahmewert auftritt. Wenn aber η alle Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$ durchläuft, so durchläuft nach einem bekannten Satze $2P_r\eta$, weil $2P_r$ zu p_{r+1} teilerfremd ist, eine Reihe von Zahlen, deren Reste gegen p_{r+1} zusammengenommen wieder die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$ ausmachen. Dasselbe gilt dann von $2P_r\eta+v_r$, und hieraus folgt, daß auch die Reste der $\mu+1$ Zahlen

$$0,\ 2\sigma_1,\ 2\sigma_2,\ \ldots,\ 2\sigma_\mu$$

ein volles Restsystem $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$ ausmachen müssen. Damit es auf der $(r+1)$-ten Stufe Lückenzahlfolgen mit den Differenzen $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_\mu$ gibt, wenn deren auf der r-ten Stufe vorhanden sind, ist mithin notwendig und hinreichend, daß die genannten $\mu+1$ Zahlen kein volles Restsystem gegen p_{r+1} ergeben.

Die soeben abgeleitete Bedingung ist erfüllt, wenn $\mu+1$ kleiner als p_{r+1} ausfällt. Demnach sind alle auf der r-ten Stufe vorhandenen Differenzenfolgen, die aus weniger als $p_{r+1}-1$ Differenzen bestehen, beständige Folgen. Im besonderen sind alle zwei- und dreigliedrigen Folgen erster Stufe beständig; es kommen hinzu alle vier- und fünfgliedrigen Folgen der zweiten Stufe, alle sechs- bis neungliedrigen Folgen der dritten Stufe usw. Folglich gilt der Lehrsatz:

Damit eine μ-gliedrige Folge $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_\mu$ *beständig* ist, muß sie erstens auf der ersten Stufe vorkommen, also das Kennzeichen erster Stufe erfüllen, und zweitens müssen die Reste der $\mu+1$ Zahlen $0, 2\sigma_1, 2\sigma_2, \ldots, 2\sigma_\mu$ gegen die Primzahlen $5, 7, \ldots, p_r$ niemals ein volles Restsystem bilden, wenn p_r so gewählt wird, daß p_r-1 noch kleiner, $p_{r+1}-1$ aber schon größer als μ ausfällt. Diese Bedingung ist hinreichend, aber auch notwendig.

Als Beispiele beständiger Folgen hat man zunächst die zwei- und dreigliedrigen Grundfolgen erster Stufe (siehe Tafel 10). Von den dort aufgezählten viergliedrigen Grundformen gingen auf der zweiten Stufe verloren die folgenden vier:

$$(2,\ 4,\ 2,\ 6),\quad (2,\ 4,\ 6,\ 6),\quad (4,\ 2,\ 6,\ 6),\quad (6,\ 6,\ 6,\ 6).$$

Die übrigen 13 Folgen sind beständig.

Weitere Beispiele ergeben sich nach einer Bemerkung von Weinreich, wenn man irgendeine steigende Folge von Primzahlen nimmt, bei der die Anzahl der Glieder kleiner ist als das erste Glied; denn wird das erste Glied mit p_{r+1} bezeichnet, so ist es eine Lückenzahl r-ter Stufe; dasselbe gilt von allen folgenden Gliedern und nach Voraussetzung ist die Anzahl aller Glieder, $\mu+1$, kleiner als p_{r+1}; die zugehörigen Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$ bilden also eine beständige Folge. Wenn $\mu+1$ gleich oder größer als p_{r+1} ist, kann die Folge ebenfalls beständig sein; es kann aber auch das Gegenteil eintreten. Ein Beispiel für den ersten Fall sind die Differenzen der Folge der 16 Primzahlen von 13 bis 73, für den zweiten Fall die Differenzen der Folge der 16 Primzahlen von 11 bis 71.

Weinreich hat auch erkannt, daß die symmetrischen Folgen der $2\nu-1$ Differenzen

$$2\nu, \ldots, 10, 8, 6, 4, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2\nu$$

für jeden Wert von ν beständig sind. Wenn man nämlich von den Zahlen $0, 2\sigma_1, 2\sigma_2, \ldots, 2\sigma_{2\nu-1}$ immer $\nu(\nu+1)-1$ abzieht, ergeben sich die 2ν Zahlen $\pm[\varrho(\varrho+1)-1]$; beim Pluszeichen ist $\varrho=2,3,\ldots,\nu$, beim Minuszeichen $\varrho=0,1,\ldots,\nu$ zu setzen. Nun wird das Restsystem in bezug auf eine ungerade Primzahl p nicht geändert, wenn man mit 4 multipliziert; mithin sind die Reste gegen p, die bei den 2ν Zahlen auftreten können, enthalten unter den Resten gegen p der Zahlen $\pm(x^2-5)$ bei ungeraden Werten von x. Das sind aber bekanntlich höchstens $p-1$ Reste. Folglich erhält man niemals alle p Reste $0, 1, \ldots, p-1$, und die Folge bleibt beim Übergang zu einer höheren Stufe stets erhalten.

§ 11

Die H-Funktionen

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich ausschließlich auf beständige μ-gliedrige Folgen von Differenzen $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_\mu$. Die Anzahl der Lückenzahlfolgen r-ter Stufe mit den gegebenen Differenzen, die Lückenzahlen des Hauptabschnittes zu Anfangszahlen haben, soll mit $H_r(2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_\mu)$ bezeichnet werden. Der im vorhergehenden Paragraphen angebahnte Schluß von r auf $r+1$ führt zu der Gleichung

$$(86)\qquad H_{r+1}(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu) = H_r(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)\cdot(p_{r+1}-\mu_r-1)\,,$$

wenn die Anzahl der verschiedenen Reste $0,1,2,\ldots,p_{r+1}-1$, die zu den $\mu+1$ Zahlen $0,2\sigma_1,2\sigma_2,\ldots,2\sigma_\mu$ gehören, mit μ_r bezeichnet wird; μ_r ist kleiner oder gleich μ, μ_r+1 nach Voraussetzung kleiner als p_{r+1}.

Bei genügend hoher Stufenzahl wird μ_r gleich μ. Wenn es nämlich kleiner als μ sein soll, so müssen mindestens zwei Ausnahmewerte von η zusammenfallen. Damit aber etwa $2P_r\eta_0+2\sigma_\nu$ und $2P_r\eta_0+2\sigma_\varrho$ gleichzeitig durch p_{r+1} teilbar sind, muß $2(\sigma_\varrho-\sigma_\nu) = 2\delta_{\nu+1}+2\delta_{\nu+2}+\cdots+2\delta_\varrho$ durch p_{r+1} teilbar sein. Bildet man sämtliche Summen der Form

$$2\delta_{\nu+1}+2\delta_{\nu+2}+\cdots+2\delta_\varrho \qquad (\nu=0,1,\ldots,\mu-1,\nu<\varrho\leq\mu)\,,$$

so ist darin nur eine endliche Anzahl von Primteilern enthalten, und wenn p_R der größte ist, so hat man für $r>R$ stets $\mu_r=\mu$; selbstverständlich kann diese Gleichheit auch schon für kleinere Werte von r stattfinden.

Es sei a die kleinste Zahl von der Beschaffenheit, daß für $r\geq a$ die Gleichung gilt

$$(87)\qquad H_{r+1}(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu) = H_r(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)\cdot(p_{r+1}-\mu-1)\,.$$

Dann wird

$$(88)\left\{\begin{aligned} &H_r(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)\\ &= H_a(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)\cdot(p_{a+1}-\mu-1)(p_{a+2}-\mu-1)\ldots(p_{r-1}-\mu-1)\,.\end{aligned}\right.$$

Die Zahl a ist daher mindestens so groß wie die Zahl k, für die $p_{k-1}-\mu-1$ negativ, dagegen $p_k-\mu-1$ positiv ausfällt.

Entsprechend den früheren Festsetzungen (Gleichungen (1), (2), (9), (51)) werde das Zeichen eingeführt

$$(89)\qquad P_r^{(\mu+1)} = (p_k-\mu-1)(p_{k+1}-\mu-1)\cdots(p_r-\mu-1)\,;$$

dabei muß r mindestens gleich k sein. Die numerischen Werte der Zeichen $P_r, P_r^{(1)},\ldots,P_r^{(6)}$, die oft gebraucht werden, kann man für die ersten 7 Stufen der Tafel 11 entnehmen.

TAFEL II

Werte der Zeichen $P_r, P_r^{(1)}, \ldots, P_r^{(6)}$

r	p_r	P_r	$P_r^{(1)}$	$P_r^{(2)}$	$P_r^{(3)}$	$P_r^{(4)}$	$P_r^{(5)}$	$P_r^{(6)}$
1	3	3	2	1	—	—	—	—
2	5	15	8	3	2	1	—	—
3	7	105	48	15	8	3	2	1
4	11	1 155	480	135	64	21	12	5
5	13	15 015	5 760	1 485	640	189	96	35
6	17	255 255	92 160	22 275	8 960	2 457	1 152	385
7	19	4 849 845	1 658 880	378 675	143 360	36 855	16 128	5 005

Unter Benutzung des Zeichens $P_r^{(\mu+1)}$ möge für alle Stufen $r \geq k$ gesetzt werden:

$$H_r(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) = P_r^{(\mu+1)} \cdot S_r(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) \,. \tag{90}$$

Das Zeichen $S_r(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu)$ ist gewählt worden, weil für $\mu=1$ der Faktor von $P_r^{(2)}$ gleich der Schwankungsfunktion $S_r(2\delta)$ war (Gleichung (30)) und der Faktor von $P_r^{(\mu+1)}$ wie $S_r(2\delta)$ mit Hilfe von Multiplikatoren aufgebaut werden kann. Es gilt nämlich nach Gleichung (86) für alle Stufen die Formel

$$H_r(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) = H_1(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) \cdot \prod_{\varrho=1}^{r} (p_\varrho - \mu_\varrho - 1) \,, \tag{91}$$

und daher ist für $r \geq k$:

$$H_r(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) = P_r^{(\mu+1)} \cdot H_1(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) \cdot \prod_{\varrho=1}^{r} \frac{p_\varrho - \mu_\varrho - 1}{p_\varrho - \mu - 1} \,. \tag{92}$$

Die Zahlen μ_ϱ sind bedingt durch die arithmetische Beschaffenheit der Folge $0, 2\sigma_1, \ldots, 2\sigma_\mu$ gegenüber den Primzahlen $3, 5, \ldots, p_r$. Hierüber werden noch genauere Untersuchungen anzustellen sein.

Wie bei $S_r(2\delta)$ hat man bei $S_r(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu)$ den Satz, daß der Wert der Schwankungsfunktion von einer gewissen Stufe ab sich nicht mehr ändert. Der bleibende Wert möge mit $S(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu)$

bezeichnet werden. Zum Beweis braucht man nur auf die Gleichung (87) zurückzugehen, in der $a > k$ ist. Hiernach ist

$$(93) \qquad S(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) = \frac{H_a(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu)}{(p_k - \mu - 1) \cdots (p_a - \mu - 1)};$$

man erkennt, daß der Wert der rechten Seite von r unabhängig ist.

Für kleinere Gewichte läßt sich a leicht ermitteln, und man findet dann mit Hilfe der Tafel 1 die aus dem Hauptabschnitt entspringenden Lückenzahlfolgen mit den gegebenen Differenzen.

Auf Grund der vorhergehenden Überlegungen ist die nebenstehende Tafel 12 aufgestellt worden, in der man die H-Funktionen für die Gewichte von 2 bis 12 findet. Wie bei der Tafel 10 ist von zwei unsymmetrischen Folgen immer nur die eine angeführt worden; denn es ist

$$(94) \qquad H_r(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) = H_r(2\delta_\mu, \ldots, 2\delta_1).$$

§ 12
Primzahlfolgen mit gegebenen Differenzen

Das Verfahren, das in § 5 angewandt wurde, um Sätze über Lückenzahlpaare gegebener Differenz auf Primzahlpaare gegebener Differenz auszudehnen, läßt sich auf Sätze für Lückenzahlfolgen mit gegebenen Differenzen übertragen und ergibt entsprechende Sätze für Primzahlfolgen mit gegebenen Differenzen $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_\mu$, vorausgesetzt, daß die Folge der Differenzen beständig ist. Hiernach ist bei großen Werten der Stufenzahl r die Anzahl der $(\mu+1)$-gliedrigen Primzahlfolgen mit den Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$, die dem Hauptabschnitt r-ter Stufe angehören, näherungsweise

$$P_r^{(\mu+1)} \cdot S(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) \cdot \left(\frac{\pi(2P_r)}{P_r^{(1)}}\right)^{\mu+1},$$

und wenn die Anzahl der zwischen 1 und $2n$ liegenden Primzahlfolgen der betrachteten Art mit

$$H^{(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu)}(2n)$$

bezeichnet wird, so hat man

$$(95) \quad H^{(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu)}(2P_r) \sim \frac{(2P_r)^\mu P_r^{(\mu+1)}}{(P_r^{(1)})^{\mu+1}} \cdot \frac{(\pi(2P_r))^{\mu+1}}{(2P_r)^\mu} \cdot S(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu).$$

TAFEL 12

Die ersten H-Funktionen

Gewicht	Funktion	a	H_a	H_r	Lückenzahlfolgen a-ter Stufe
			I. Zweigliedrige Folgen		
2	$H_r(2)$	1	$H_1(2)=1$	$P_r^{(2)}$	5, 7
4	$H_r(4)$	1	$H_1(4)=1$	$P_r^{(2)}$	1, 5
6	$H_r(6)$	1	$H_1(6)=2$	$2P_r^{(2)}$	1, 7; 5, 11
8	$H_r(8)$	1	$H_1(8)=1$	$P_r^{(2)}$	5, 13
10	$H_r(10)$	2	$H_2(10)=4$	$\frac{4}{3}P_r^{(2)}$	1, 11; 7, 17; 13, 23; 19, 29
12	$H_r(12)$	1	$H_1(12)=2$	$2P_r^{(2)}$	1, 13; 5, 17
			II. Dreigliedrige Folgen		
6	$H_r(2,4)$	2	$H_2(2,4)=2$	$P_r^{(3)}$	11, 13, 17; 17, 19, 23
8	$H_r(2,6)$	2	$H_2(2,6)=2$	$P_r^{(3)}$	11, 13, 19; 29, 31, 37
10	$H_r(4,6)$	2	$H_2(4,6)=3$	$\frac{3}{2}P_r^{(3)}$	7, 11, 17; 13, 17, 23 19, 23, 29
12	$H_r(2,10)$	2	$H_2(2,10)=3$	$\frac{3}{2}P_r^{(3)}$	11, 13, 23; 17, 19, 29 29, 31, 41
	$H_r(4,8)$	2	$H_2(4,8)=2$	$P_r^{(3)}$	7, 11, 19; 19, 23, 31
	$H_r(6,6)$	2	$H_2(6,6)=4$	$2P_r^{(3)}$	1, 7, 13; 7, 13, 19 11, 17, 23; 17, 23, 29
			III. Viergliedrige Folgen		
8	$H_r(2,4,2)$	2	$H_2(2,4,2)=1$	$P_r^{(4)}$	11, 13, 17, 19
10	$H_r(4,2,4)$	2	$H_2(4,2,4)=2$	$2P_r^{(4)}$	7, 11, 13, 17 13, 17, 19, 23
12	$H_r(2,4,6)$	2	$H_2(2,4,6)=2$	$2P_r^{(4)}$	11, 13, 17, 23 17, 19, 23, 29
	$H_r(2,6,4)$	2	$H_2(2,6,4)=1$	$P_r^{(4)}$	29, 31, 37, 41
	$H_r(4,2,6)$	2	$H_2(4,2,6)=1$	$P_r^{(4)}$	7, 11, 13, 19
			IV. Fünfgliedrige Folgen		
12	$H_r(2,4,2,4)$	3	$H_3(2,4,2,4)=2$	$P_r^{(5)}$	11, 13, 17, 19, 23 101, 103, 107, 109, 113

Der erste Faktor nähert sich mit wachsenden Werten von r einer bestimmten endlichen Grenze: denn das allgemeine Glied des Produktes, als das er erscheint, läßt sich in die Gestalt bringen

$$(96)\qquad \frac{p_r^{\mu}(p_r-\mu-1)}{(p_r-\mu-1)^{\mu+1}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\mu(\mu-1)p_r^{\mu-1}}{p_r^{\mu+1}-(\mu-1)p_r^{\mu}+\cdots}\,.$$

und weil der Grad des Nenners den Grad des Zählers um zwei Einheiten übertrifft, so ist die Konvergenz des unendlichen Produktes

$$(97)\qquad \lim_{r=\infty} \frac{(2P_r)^{\mu}\,P_r^{(\mu+1)}}{(P_r^{(1)})^{\mu+1}} = K_{\mu}$$

gesichert. Wenn also die beständig wachsende Funktion $H^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n)$ einer asymptotischen Darstellung fähig sein soll, so kann diese nur die Form haben

$$(98)\qquad H^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n) \sim K_{\mu}\cdot\frac{(\pi(2n))^{\mu+1}}{(2n)^{\mu}}\cdot S(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)\,.$$

Ehe wir zur Betrachtung besonderer Fälle übergehen, soll aus der Gleichung (97) eine Folgerung gezogen werden, die später nützlich sein wird. Die Formel von MERTENS, die in § 3 (Gl. 16)) herangezogen wurde, läßt sich in der Form schreiben

$$(99)\qquad \frac{2P_r}{P_r^{(1)}} \sim e^{C}\cdot\log p_r\,.$$

Erhebt man beide Seiten in die $(\mu+1)$-te Potenz, so ergibt die Verbindung mit Gleichung (97) als Verallgemeinerung der Formel von MERTENS:

$$(100)\qquad \frac{2P_r}{P_r^{(\mu+1)}} \sim \frac{e^{(\mu+1)C}}{K_{\mu}}\cdot(\log p_r)^{\mu+1}\,,$$

oder es ist

$$(101)\qquad \prod_{q=k}^{r}\frac{p_q}{p_q-\mu-1} \sim c_{\mu+1}\cdot(\log p_r)^{\mu+1}\,;$$

$c_{\mu+1}$ bedeutet eine numerische Konstante; die ganze Zahl k ist so zu wählen, daß $p_{k-1}-\mu-1$ negativ, dagegen $p_k-\mu-1$ positiv ausfällt.

Die Ermittelung der Grenzwerte K_μ wird besonders einfach, wenn $\mu+1$ eine Potenz von 2 ist; sie kommt nämlich zurück auf die Auswertung des unendlichen Produktes

$$(102) \qquad \prod_{\psi=l}^{\infty}\left(1-\left(\frac{\frac{1}{2}(\mu+1)}{p_\psi-\frac{1}{2}(\mu+1)}\right)^2\right)=\omega_{\frac{1}{2}(\mu+1)} .$$

Die ganze Zahl l ist so zu wählen, daß $p_{l-1}-\frac{1}{2}(\mu+1)$ negativ, dagegen $p_l-\frac{1}{2}(\mu+1)$ positiv ausfällt.

Es sei zuerst $\mu=1$. Dann wird nach Gleichung (26)

$$(103) \qquad K_1=\lim_{r=\infty}\frac{2P_r P_r^{(2)}}{(P_r^{(1)})^2}=2\cdot\prod_{\varrho=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{1}{p_\varrho-1}\right)^2\right)=2\omega_1=\varkappa .$$

Für $\mu=3$ erhält man ebenfalls eine bekannte Gleichung. Nach der Formel (65) wird

$$(104) \qquad \left\{\begin{aligned} K_3&=\lim_{r=\infty}\frac{(2P_r)^3 P_r^{(4)}}{(P_r^{(1)})^4}\\ &=2\cdot3\cdot\varkappa^2\cdot\prod_{\sigma=2}^{\infty}\left(1-\left(\frac{2}{p_\sigma-2}\right)^2\right)=2^3\cdot3\cdot\omega_1^2\cdot\omega_2=\varkappa^{(2)} .\end{aligned}\right.$$

In ähnlicher Weise folgt aus der Identität

$$(105) \qquad \frac{(2P_r)^7 P_r^{(8)}}{(P_r^{(1)})^8}=\left(\frac{(2P_r)^3 P_r^{(4)}}{(P_r^{(1)})^4}\right)^2\cdot\frac{2P_r P_r^{(8)}}{(P_r^{(4)})^2}$$

die Formel

$$(106) \qquad K_7=2^7\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\omega_1^4\cdot\omega_2^2\cdot\omega_4 ,$$

und man hat allgemein, wenn $\mu+1=2^m$ ist, für K_μ die Darstellung

$$(107) \qquad K_\mu=c_\mu\cdot K^2_{\frac{1}{2}(\mu-1)}\cdot\omega_{\frac{1}{2}(\mu+1)} ;$$

c_μ ist eine rationale Zahl.

Die Produkte $\omega_{\frac{1}{2}(n+1)}$ konvergieren allerdings nur schwach; immerhin ist auf drei Dezimalstellen genau

$$(108) \qquad \omega_1 = 0{,}660\ldots, \qquad \omega_2 = 0{,}397\ldots;$$

vgl. *Darstellung*, S. 18–20 und § 6, Gleichung (61).

Aus der Übereinstimmung von K_1 mit $\varkappa$ folgt, daß die Wachstumsfunktion von $G(2n)$:

$$(15) \qquad W(2n) = \varkappa \cdot \frac{\pi^2(2n)}{2n}$$

der Funktion $H^{(2)}(2n)$ asymptotisch gleich ist. Die Beziehung

$$(109) \qquad W(2n) \sim H^{(2)}(2n)$$

war schon 1915 von BRUN vermutet worden (*Darstellung*, S. 24). Allein man hat, wie schon in § 5 bemerkt wurde, die allgemeinere Gleichung

$$(38) \qquad H^{(2\delta)}(2n) \sim W(2n) \cdot S(2\delta),$$

das heißt, die Wachstumsfunktion $W(2n)$ ist beliebig vieler Deutungen fähig.

Aus der Übereinstimmung von K_3 und $\varkappa^{(2)}$ folgt, daß die Wachstumsfunktion von $G^{(2)}(6n_1)$:

$$(66) \qquad W^{(2)}(6n_1) = \varkappa^{(2)} \cdot \frac{\pi^2(2n)}{(2n)^3}$$

mit den Anzahlen $H^{(2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3)}(2n)$ in Zusammenhang gebracht werden kann; denn es ist nach Gleichung (89)

$$(110) \qquad H_r(2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3) = P_r^{(4)} \cdot S(2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3),$$

und vermöge der Formel (98) wird jetzt

$$(111) \qquad H^{(2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3)}(2n) \sim K_3 \cdot \frac{\pi^4(2n)}{(2n)^3} \cdot S(2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3),$$

also

$$(112) \qquad H^{(2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3)}(6n_1) \sim W^{(2)}(6n_1) \cdot S(2\delta_1, 2\delta_2, 2\delta_3).$$

Die einfachste beständige dreigliedrige Differenzenfolge ist die Folge $(2, 4, 2)$ vom Gewicht 8. Die zugehörigen Primzahlfolgen lassen sich erklären als die Paare von zwei Primzahlzwillingen, die möglichst eng zusammen stehen; auf einen Primzahlzwilling $p, p+2$ kann nämlich nicht sogleich der Zwilling $p+4, p+6$ folgen (abgesehen von der Anfangserscheinung 1, 3, 5, 7), weil $p+4$ durch 3 teilbar ist. Dagegen sind Primzahlvierlinge $p, p+2, p+6, p+8$ mit den Differenzen 2, 4, 2 nicht nur möglich, sondern sie kommen auch wirklich vor. Freilich sind sie selten; denn während es von 1 bis 43051 an Primzahlen 4500, an Primzahlzwillingen 625 gibt, sind in diesem Bereich nur 24 Primzahlvierlinge vorhanden.

TAFEL 13

Primzahlvierlinge des Bereichs von 1 bis 43051

1.	5,	7,	11,	13	13.	13 001,	13 003,	13 007,	13 009
2.	11,	13,	17,	19	14.	15 641,	15 643,	15 647,	15 649
3.	101,	103,	107,	109	15.	15 731,	15 733,	15 737,	15 739
4.	191,	193,	197,	199	16.	16 061,	16 063,	16 067,	16 069
5.	821,	823,	827,	829	17.	18 041,	18 043,	18 047,	18 049
6.	1 481,	1 483,	1 487,	1 489	18.	18 911,	18 913,	18 917,	18 919
7.	1 871,	1 873,	1 877,	1 879	19.	19 421,	19 423,	19 427,	19 429
8.	2 081,	2 083,	2 087,	2 089	20.	21 011,	21 013,	21 017,	21 019
9.	3 251,	3 253,	3 257,	3 259	21.	22 271,	22 273,	22 277,	22 279
10.	3 461,	3 463,	3 467,	3 469	22.	25 301,	25 303,	25 307,	25 309
11.	5 651,	5 653,	5 657,	5 659	23.	31 721,	31 723,	31 727,	31 729
12.	9 431,	9 433,	9 437,	9 439	24.	34 841,	34 843,	34 847,	34 849

Wie bei den Primzahlzwillingen die Nebenzwillinge 1, 3 und 3, 5 auftraten und die folgenden Primzahlpaare die Form $6n_1-1, 6n_1+1$ hatten, so hat man hier den Nebenvierling 5, 7, 11, 13 und die folgenden Vierlinge haben die Form $30n_2+11, 13, 17, 19$; daß von der zweiten Stufe an die Anfangszahl einer Lückenzahlfolge mit den Differenzen 2, 4, 2 die Form $30n_2+11$ haben muß, erkennt man leicht mittels des Kennzeichens zweiter Stufe; wir werden hierauf in § 17 noch zurückkommen.

Nach Tafel 12 ist $H_r(2,4,2) = P_r^{(4)}$, also $S(2,4,2) = 1$. Mithin wird

$$(112^a) \qquad W^{(2)}(6n_1) \sim H^{(2,4,2)}(6n_1),$$

das heißt, die Wachstumsfunktion für die Anzahl der Zwillingsdarstellungen der durch 6 teilbaren Zahlen ist asymptotisch gleich der Anzahl der viergliedrigen Primzahlfolgen mit den Differenzen 2, 4, 2. In der Tafel 8 war als Wert der Wachstumsfunktion $W^{(2)}(6n_1)$ für den Bereich von 15600 bis 15900 zwölf verzeichnet worden. Das stimmt gut mit der Tatsache, daß nach Tafel 14 $H^{(2,4,2)}(15600) = 13$ ist; allerdings steigt der Wert der H-Funktion in dem angegebenen Bereich bis 15, weil zufällig die Vierlinge Nr. 14 und 15 rasch aufeinanderfolgen.

§ 13

Die Folge der Urdifferenzen r-ter Stufe und ihre Abschnitte

Man denke sich die Lückenzahlen r-ter Stufe, mit der Eins beginnend, der Größe nach geordnet und bilde die Differenz von je zwei benachbarten Gliedern der Folge. Die so entstehenden Zahlen $2\Delta_1, 2\Delta_2, \ldots$ sollen die Urdifferenzen r-ter Stufe genannt werden; denn die Differenz von zwei Lückenzahlen r-ter Stufe, die nicht benachbart sind, läßt sich stets als Summe von Differenzen benachbarter Lückenzahlen darstellen.

Die ersten $P_r^{(1)}$ Urdifferenzen wiederholen sich beständig. Man hat in ihnen den Hauptabschnitt der Urdifferenzen. Er beginnt mit der Zahl $p_{r+1}-1$, er endet mit der Zahl 2 als Differenz von $2P_r-1$ und $2P_r+1$. Auch die in der Mitte stehenden Urdifferenzen lassen sich nach den Bemerkungen in § 1 leicht angeben; sie sind (von der zweiten Stufe ab): 4, 2, 4, 2, 4. Für die folgenden Betrachtungen empfiehlt es sich, die Urdifferenzen des Hauptabschnittes kreisförmig anzuordnen, sodaß auf die letzte Zahl 2 wieder $p_{r+1}-1$ folgt. Diese 2 und die in der Mitte befindliche 4 sind dann Symmetriezentra für die Urdifferenzen. Hieraus folgt, daß, von 2 und 4 abgesehen, die Zahl $U_r(2\Delta_\varrho)$, die angibt, wie oft die Urdifferenz $2\Delta_\varrho$ im Hauptabschnitt r-ter Stufe vorkommt, gerade ist. $U_r(2)$ und $U_r(4)$ sind dagegen ungerade; man erkennt das auch leicht aus den Gleichungen

$$(113) \qquad U_r(2) = H_r(2) = P_r^{(2)},$$

$$(114) \qquad U_r(4) = H_r(4) = P_r^{(2)}.$$

Eine Reihe aufeinanderfolgender Urdifferenzen möge als ein Abschnitt bezeichnet werden; die Summe der Zahlen des Abschnittes heiße dessen Gewicht. Die Formel

$$H_r(2\delta) = P_r^{(2)} \cdot S_r(2\delta) \tag{30}$$

zeigt, daß es Abschnitte jeden Gewichtes 2δ gibt. Durch Addition aufeinanderfolgender Urdifferenzen läßt sich demnach jede gegebene gerade Zahl erzeugen. Dies veranlaßt — nebenbei bemerkt — zu der Frage, bei welchen periodischen Folgen gerader Zahlen überhaupt durch Addition aufeinanderfolgender Glieder jede gerade Zahl erzeugt werden kann.

Die Urdifferenzen r-ter Stufe steigen von 2 bis zu einer größten Zahl $2\gamma_r$. Wenn ein Satz von Legendre[1] richtig wäre, so könnte man für $2\gamma_r$ eine obere Grenze angeben. Danach soll nämlich in einer arithmetischen Reihe $Ax+B$, bei der A und B teilerfremd sind, wenn die ungeraden Primzahlen $p', p'', \ldots, p^{(r)}$ nicht in A aufgehen, unter p_{r-1} unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern der Reihe mindestens eines durch keine der Primzahlen $p', p'', \ldots, p^{(r)}$ teilbar sein. Nimmt man als arithmetische Reihe $2x+1$, als die r Primzahlen $3, 5, 7, \ldots, p_r$, so würde danach unter p_{r-1} unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen mindestens eine Lückenzahl r-ter Stufe vorhanden sein, das heißt, es wäre $2\gamma_r \leq 2p_{r-1}$. Dupré hat im Jahre 1859 nachgewiesen[2], daß diese Ungleichheit zwar für die niederen Stufen zutrifft und auch für gewisse höhere Stufen richtig bleibt, aber für $r = 8, 11, 13, 14, \ldots, 24$ versagt. Seine Ergebnisse sind die folgenden.

TAFEL 14

Die größten Werte der Urdifferenzen

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$2p_{r-1}$	6	10	14	22	26	34	38	46	58	62	74	82	86	94	106
$2\gamma_r$	6	10	14	22	26	34	*42*	46	58	*66*	74	*90*	*100*	*106*	*118*

[1] A. M. Legendre, Théorie des nombres, t. II, Paris 1830, S. 76.

[2] A. Dupré, Examen d'une proposition de Legendre relative à la théorie des nombres, Paris 1859.

DUPRÉ ist es nicht gelungen, eine obere Grenze für $2\gamma_r$ zu finden. Als Ersatz gibt er das Theorem, daß der mittlere Wert der Urdifferenzen mit r über alle Grenzen wächst. Mittels der Formeln von MERTENS läßt sich sogar ein einfacher asymptotischer Wert dafür herleiten. Die Summe der $P_r^{(1)}$ Urdifferenzen des Hauptabschnittes ist nämlich offenbar $2P_r$, demnach ist der mittlere Wert

$$\frac{2P_r}{P_r^{(1)}} \sim e^{\gamma} \cdot \log p_r \,. \tag{115}$$

Im Durchschnitt gibt es also unter $\frac{1}{2} e^{\gamma} \cdot \log p_r$ aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen eine Lückenzahl r-ter Stufe.

§ 14

Die U-Funktionen

Die Schwierigkeiten, die bei der Ermittelung einer oberen Grenze für die Urdifferenzen auftreten, haben ihren Grund darin, daß es nicht möglich ist, eine einfache Formel für die Zahl $U_r(2\Delta_\varrho)$ aufzustellen, die angibt, wie oft eine gegebene Urdifferenz $2\Delta_\varrho$ im Hauptabschnitt vorkommt. Wenn man nämlich von der r-ten Stufe zur $(r+1)$-ten übergeht, so entsteht die Urdifferenz $2\Delta_\varrho$ auf zwei Arten. Erstens können, wie früher bei der Differenz 2δ, zwei Lückenzahlen r-ter Stufe mit der Differenz $2\Delta_\varrho$ auf der folgenden Stufe Lückenzahlen bleiben; zweitens aber können Urdifferenzen r-ter Stufe beim Übergang auf die folgende Stufe miteinander verschmelzen und so die Urdifferenz $2\Delta_\varrho$ erzeugen. Die Formel für $U_{r+1}(2\Delta_\varrho)$ setzt sich daher aus zwei wesentlich verschiedenen Teilen zusammen, die für sich ermittelt werden müssen.

Um den ersten Teil zu bestimmen, verfährt man auf die gewohnte Art. Aus einem Paar von Lückenzahlen r-ter Stufe v_r und $v_r+2\Delta_\varrho$ mit der Urdifferenz $2\Delta_\varrho$ entspringen p_{r+1} Zahlenpaare $2P_r\eta+v_r$ und $2P_r\eta+v_r+2\Delta_\varrho$, unter denen die unmittelbar übertragenen Lückenzahlpaare des Hauptabschnittes $(r+1)$-ter Stufe enthalten sind. Diese Paare ergeben sich, wenn man η aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$ so wählt, daß keine der beiden Zahlen des Paares durch p_{r+1} teilbar ist. Bei genügend hoher Stufenzahl ist der Beitrag zu $U_{r+1}(2\Delta_\varrho)$ gleich $U_r(2\Delta_\varrho)\cdot(p_{r+1}-2)$.

Die Urdifferenz $2\Delta_\varrho$ kann **zweitens** auf der $(r+1)$-ten Stufe dadurch erzeugt werden, daß die Urdifferenzen $2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}, \ldots, 2\Delta_\tau$ eines Abschnittes der Urdifferenzen vom Gewicht $2\Delta_\varrho$ **miteinander verschmelzen**. Ist w_r die Anfangszahl eines Abschnittes der Lückenzahlen r-ter Stufe, zu dem dieser Abschnitt der Urdifferenzen gehört, so müssen beim Übergang auf die $(r+1)$-te Stufe die beiden äußersten Zahlen $2P_r\zeta+w_r$ und $2P_r\zeta+w_r+2\Delta_\varrho$ Lückenzahlen $(r+1)$-ter Stufe werden, dagegen alle inneren Zahlen $2P_r\zeta+w_r+2\Delta_\sigma, \ldots, 2P_r\zeta+w_r+2\Delta_\varrho-2\Delta_\tau$ durch p_{r+1} teilbar sein. Hieraus folgt, wenn $\tau-\sigma$ größer als 1 ist, daß die Urdifferenzen $2\Delta_{\sigma+1}, \ldots, 2\Delta_{\tau-1}$ selbst durch p_{r+1} teilbar sein müssen, und das hört auf, wenn die Stufenzahl r hinreichend groß genommen wird. Von einer gewissen Stufenzahl ab können also nur **zwei benachbarte** Urdifferenzen $2\Delta_\sigma$ und $2\Delta_{\sigma+1}$ zur Urdifferenz $2\Delta_\varrho$ verschmelzen; es ist klar, daß dann $2\Delta_\sigma+2\Delta_{\sigma+1}=2\Delta_\varrho$ sein muß. Wenn noch die Anzahl aller im kreisförmig angeordneten Hauptabschnitt r-ter Stufe vorkommenden Abschnitte von Urdifferenzen $2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}, \ldots, 2\Delta_\tau$ mit $U_r(2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}, \ldots, 2\Delta_\tau)$ bezeichnet wird, so erzeugt jeder der $U_r(2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1})$ zweigliedrigen Abschnitte des Gewichtes $2\Delta_\varrho$ einmal durch Verschmelzung die Urdifferenz $2\Delta_\varrho$, wenn nämlich ζ so gewählt wird, daß $2P_r\zeta+w_r+2\Delta_\sigma$ durch p_{r+1} teilbar ist.

Hiermit ist die Formel bewiesen

$$(116)\qquad U_{r+1}(2\Delta_\varrho) = U_r(2\Delta_\varrho)\cdot(p_{r+1}-2) + \Sigma\, U_r(2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1})\ ;$$

die Summe ist über alle Urdifferenzen r-ter Stufe $2\Delta_\sigma$ zu erstrecken, für die $2\Delta_\sigma+2\Delta_{\sigma+1}=2\Delta_\varrho$ wird, oder mit anderen Worten über alle Zerlegungen der Urdifferenz $2\Delta_\varrho$ in die Summe von zwei benachbarten Urdifferenzen.

Wegen der Symmetrieeigenschaften gilt die Gleichung

$$(117)\qquad U_r(2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}) = U_r(2\Delta_{\sigma+1}, 2\Delta_\sigma)\,.$$

Das ist ohne weiteres einleuchtend, falls $2\Delta_\sigma$ und $2\Delta_{\sigma+1}$ von 2 und 4 verschieden sind, gilt aber auch, wie man sich leicht überzeugt, wenn eine der Zahlen $2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}$ oder beide gleich 2 oder 4 sind. Demnach wird

$$(116^a)\qquad U_{r+1}(2\Delta_\varrho) = U_r(2\Delta_\varrho)\cdot(p_{r+1}-2) + 2\Sigma\, U_r(2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1})$$

mit der Maßgabe, daß $2\Delta_\sigma \leq 2\Delta_{\sigma+1}$ und $2\Delta_\sigma+2\Delta_{\sigma+1}=2\Delta_\varrho$ ist.

Ein Beispiel möge zur Erläuterung dienen. Auf der zweiten Stufe geben die beiden Lückenzahlpaare 1, 7 und 23, 29 die Urdifferenz 6; also ist $U_2(6)=2$. Aus ihnen entspringen je 7–2 Paare dritter Stufe, nämlich

aus 1, 7 die Paare: 31, 37; 61, 67; 121, 127; 161, 167; 181, 187;
aus 23, 29 die Paare: 23, 29; 53, 59; 83, 89; 143, 149; 173, 179.

Diese 10 Paare liefern auf der dritten Stufe ebenfalls die Urdifferenz 6. Zu ihnen treten aber hinzu die vier Paare

47, 53; 73, 79; 131, 137; 157, 163

mit der Urdifferenz 6. Sie sind hervorgegangen aus den dreigliedrigen Folgen zweiter Stufe

11, 13, 17; 17, 19, 23; 7, 11, 13; 13, 17, 19.

Die beiden ersten Folgen haben die Differenzen 2, 4, die beiden letzten 4, 2. Auf diese Art wird schließlich

$$U_3(6) = U_2(6) \cdot (7-2) + 2U_2(2,4) = 10 + 4 = 14 .$$

Verfolgen wir das Beispiel noch weiter. Den Gleichungen (113) und (114) läßt sich an die Seite stellen die Gleichung

$$U_r(2,4) = H_r(2,4) = P_r^{(3)} ; \tag{118}$$

denn alle zulässigen Differenzenfolgen des Gewichtes 6 sind die beiden 2, 4 und 4, 2. Demnach wird von einer genügend hohen Stufe ab

$$U_{r+1}(6) = U_r(6) \cdot (p_{r+1}-2) + 2P_r^{(3)} .$$

Es ist aber identisch

$$P_{r+1}^{(3)} = P_r^{(3)}(p_{r+1}-2) - P_r^{(3)} ,$$

mithin wird

$$U_{r+1}(6) + 2P_{r+1}^{(3)} = [U_r(6) + 2P_r^{(3)}] \cdot (p_{r+1}-2) ,$$

und weil diese Gleichung von der zweiten Stufe ab richtig ist, so wird allgemein

$$U_r(6) = 2P_r^{(2)} - 2P_r^{(3)}\,. \tag{119}$$

Zur Prüfung berechnen wir $U_3(6) = 2\cdot 15 - 2\cdot 8 = 14$, was stimmt.

In der Formel (116) erscheinen die Anzahlen $U_r(2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1})$. Um sie zu bestimmen, hat man eine ähnliche Überlegung anzustellen wie bei $U_r(2\varDelta_\varrho)$. Beim Übergang von der r-ten zur $(r+1)$-ten Stufe entsteht der Abschnitt $2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1}$ auf zwei wesentlich verschiedene Arten, durch unmittelbare Übertragung und durch Verschmelzung.

Die unmittelbare Übertragung ergibt für $U_{r+1}(2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1})$ den Beitrag $U_r(2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1})\cdot(p_{r+1}-3)$, falls die Stufenzahl hinreichend hoch ist.

Unter derselben Voraussetzung können nur zwei benachbarte Urdifferenzen miteinander verschmelzen. Demnach gibt es drei Möglichkeiten.

I. Man hat den Abschnitt $2\varDelta_\tau, 2\varDelta_{\tau+1}, 2\varDelta_{\tau+2}$, und es ist $2\varDelta_\tau + 2\varDelta_{\tau+1} = 2\varDelta_\sigma$, $2\varDelta_{\tau+2} = 2\varDelta_{\sigma+1}$. Jeder solche Abschnitt liefert die Urdifferenzen $2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1}$ einmal.

II. Man hat den Abschnitt $2\varDelta_\tau, 2\varDelta_{\tau+1}, 2\varDelta_{\tau+2}$, und es ist $2\varDelta_\tau = 2\varDelta_\sigma$, $2\varDelta_{\tau+1} + 2\varDelta_{\tau+2} = 2\varDelta_{\sigma+1}$. Jeder solche Abschnitt liefert die Urdifferenzen $2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1}$ einmal.

III. Man hat den Abschnitt $2\varDelta_\tau, 2\varDelta_{\tau+1}, 2\varDelta_{\tau+2}, 2\varDelta_{\tau+3}$, und es ist $2\varDelta_\tau + 2\varDelta_{\tau+1} = 2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\tau+2} + 2\varDelta_{\tau+3} = 2\varDelta_{\sigma+1}$. Damit hieraus die Urdifferenzen $2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1}$ hervorgehen, müssen gleichzeitig $2P_r\zeta + w_r + 2\varDelta_\tau$ und $2P_r\zeta + w_r + 2\varDelta_\tau + 2\varDelta_{\tau+1} + 2\varDelta_{\tau+2}$ durch p_{r+1} teilbar sein; also wäre auch $2\varDelta_{\tau+1} + 2\varDelta_{\tau+2}$ dadurch teilbar. Von einer gewissen Stufenzahl ab hört das auf; die dritte Möglichkeit darf also ausgeschieden werden.

Alles in allem gilt bei hinreichend hoher Stufenzahl die Formel

$$\left.\begin{aligned} U_{r+1}(2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1}) &= U_r(2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1})\cdot(p_{r+1}-3) \\ &\quad + \Sigma\, U_r(2\varDelta_\tau, 2\varDelta_{\tau+1}, 2\varDelta_{\tau+2})\,; \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

die Summe ist über alle dreigliedrigen Abschnitte zu erstrecken, bei denen entweder $2\varDelta_\tau + 2\varDelta_{\tau+1} = 2\varDelta_\sigma$, $2\varDelta_{\tau+2} = 2\varDelta_{\sigma+1}$ oder

$2\varDelta_\tau = 2\varDelta_\sigma,\ 2\varDelta_{\tau+1}+2\varDelta_{\tau+2} = 2\varDelta_{\sigma+1}$ ist. Zur Vereinfachung kann man die Gleichung benutzen

$$(121)\qquad U_r(2\varDelta_\tau,\, 2\varDelta_{\tau+1},\, 2\varDelta_{\tau+2}) = U_r(2\varDelta_{\tau+2},\, 2\varDelta_{\tau+1},\, 2\varDelta_\tau)\,.$$

Als Beispiel möge $U_r(8)$ genommen werden. Zunächst ist nach Gleichung (118):

$$U_{r+1}(8) = U_r(8)\cdot(p_{r+1}-2) + 2U_r(2,6)\,.$$

Ferner ist nach Gleichung (121):

$$U_{r+1}(2,6) = U_r(2,6)\cdot(p_{r+1}-3) + U_r(2,4,2)\,.$$

Die Folge 2,4,2 kann nicht aus einer Folge von mehr Gliedern durch Verschmelzung hervorgehen; sie ist, wie wir sagen wollen, unzerlegbar. Man hat daher

$$(122)\qquad U_r(2,4,2) = H_r(2,4,2) = P_r^{(4)}\,.$$

Nun ist identisch

$$P_{r+1}^{(4)} = P_r^{(4)}(p_{r+1}-3) - P_r^{(4)}\,,$$

folglich wird

$$U_{r+1}(2,6) + P_{r+1}^{(4)} = [U_r(2,6) + P_r^{(4)}]\cdot(p_{r+1}-3)\,,$$

und weil $U_2(2,6) + P_2^{(4)} = 2$ ist:

$$(123)\qquad U_r(2,6) = P_r^{(3)} - P_r^{(4)}\,.$$

Weiter hat man die Identität

$$2P_{r+1}^{(3)} - P_{r+1}^{(4)} = (2P_r^{(3)} - P_r^{(4)})\cdot(p_{r+1}-2) - 2P_r^{(3)} - 2P_r^{(4)}\,,$$

also ist

$$U_{r+1}(8) + 2P_{r+1}^{(3)} - P_{r+1}^{(4)} = [U_r(8) + 2P_r^{(3)} - P_r^{(4)}]\cdot(p_{r+1}-2)\,.$$

Wenn man noch beachtet, daß $U_2(8)+2P_2^{(3)}-P_2^{(4)}=3$ ist, so wird schließlich für $r\geq 2$

$$(124)\qquad U_r(8) = P_r^{(2)} - 2P_r^{(3)} + P_r^{(4)}\,.$$

Auf ähnliche Art beweist man die Gleichungen

$$U_r(4,2,4) = H_r(4,2,4) = 2P_r^{(4)}\,, \tag{125}$$

$$U_r(4,6) \quad = \tfrac{3}{2}P_r^{(3)} - 2P_r^{(4)}\,, \tag{126}$$

$$U_r(10) \quad = \tfrac{4}{3}P_r^{(2)} - 3P_r^{(3)} + 2P_r^{(4)}\,; \tag{127}$$

sie gelten von der zweiten Stufe ab.

Bei der Bestimmung von $U_r(12)$ stößt man bereits auf U-Funktionen $U_r(2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}, 2\Delta_{\sigma+2}, 2\Delta_{\sigma+3})$, die nicht gleich den entsprechenden H-Funktionen sind, und bedarf daher allgemeinerer Formeln. Es ist jedoch leicht, die Gleichungen (116) und (120) auf die Anzahlen auszudehnen, mit denen beliebige μ-gliedrige Abschnitte $2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}, \ldots, 2\Delta_{\sigma+\mu-1}$ im Hauptabschnitt vorkommen. Bei hinreichend hoher Stufenzahl stammen aus der unmittelbaren Übertragung von der r-ten auf die $(r+1)$-te Stufe $(p_{r+1}-\mu-1)$-mal soviel Folgen mit den gegebenen Urdifferenzen als vorher auftraten. Bei der Verschmelzung aber können, wenn die Stufenzahl wieder hinreichend hoch ist, nur $(\mu+1)$-gliedrige Abschnitte in Betracht kommen, bei denen zwei Urdifferenzen sich vereinigen, und man erschließt so die Richtigkeit der allgemeinen Formel

$$\left\{\begin{aligned} &U_{r+1}(2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}, \ldots, 2\Delta_{\sigma+\mu-1}) \\ &\qquad = U_r(2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}, \ldots, 2\Delta_{\sigma+\mu-1}) \cdot (p_{r+1}-\mu-1) \\ &\qquad + \Sigma\, U_r(2\Delta_\tau, 2\Delta_{\tau+1}, \ldots, 2\Delta_{\tau+\mu})\,; \end{aligned}\right. \tag{128}$$

die Summe ist über alle $(\mu+1)$-gliedrigen Abschnitte zu erstrecken, die entstehen, wenn eine der gegebenen μ Urdifferenzen in eine Summe von zwei geraden Zahlen zerlegt wird. Falls keine dieser Zerlegungen zu einem zulässigen $(\mu+1)$-gliedrigen Abschnitt führt, ist die betreffende U-Funktion gleich der H-Funktion für dieselbe Differenzenfolge. Eine solche Differenzenfolge soll *unzerlegbar* heißen.

Um eine Funktion $U_r(2\Delta_\varrho)$ mittels der Formel (128) zu berechnen, hat man im Hauptabschnitt r-ter Stufe sämtliche Abschnitte von Urdifferenzen herzustellen, die aus $2\Delta_\varrho$ durch fortgesetzte Zerlegung entspringen. Man beginnt mit den zweigliedrigen Abschnitten, gewinnt daraus die dreigliedrigen, schreitet fort zu den viergliedrigen und so weiter. Das Verfahren endet, wenn man zu unzerlegbaren Abschnitten gelangt. Bei der Durchführung hat man nur die zulässigen Abschnitte beizubehalten; für kleinere Gewichte genügen zur Entscheidung die Kennzeichen erster und zweiter Stufe, die bei Urdifferenzen jedenfalls notwendig sind.

Handelt es sich zum Beispiel um die Funktion $U_r(14)$, so ergeben sich bei der Zerlegung als zulässige Abschnitte:

14	
2, 12 und 12, 2	6, 8 und 8, 6
2, 6, 6 und 6, 6, 2; *6, 2, 6*	2, 6, 6 und 6, 6, 2; *6, 2, 6*
2, 4, 6, 2	*2, 4, 6, 2*

Die Abschnitte 4, 10; 2, 4, 8; 2, 4, 2, 6; 2, 6, 2, 4 und die daraus durch Umkehrung hervorgehenden sind unzulässig. Die Abschnitte 6, 2, 6 und 2, 4, 6, 2 sind unzerlegbar.

Für die Gewichte von 2 bis 12 sind, entsprechend der Tafel 12, in der Tafel 15 die Ergebnisse der Rechnungen für die U-Funktionen zusammengestellt; wie dort ist von zwei Folgen, die durch Umkehrung der Ordnung ineinander übergehen, immer nur die eine angegeben.

§ 15

Zusammenhang zwischen den H- und U-Funktionen

Für alle unzerlegbaren Folgen $2\Delta_\sigma, \ldots, 2\Delta_{\sigma+\mu-1}$ gilt die Gleichung

$$(129) \qquad H_r(2\Delta_\sigma, \ldots, 2\Delta_{\sigma+\mu-1}) = U_r(2\Delta_\sigma, \ldots, 2\Delta_{\sigma+\mu-1}).$$

Sie ist ein besonderer Fall des Zusammenhangs, der zwischen den H- und U-Funktionen besteht; jede H-Funktion läßt sich nämlich als Summe gewisser U-Funktionen darstellen.

Betrachten wir eine $(\nu+1)$-gliedrige Folge von Lückenzahlen r-ter Stufe, deren Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\nu$ sind, so brauchen wir nur den $\nu+1$ Lückenzahlen alle zwischen der Anfangs- und der

TAFEL 15. Die ersten U-Funktionen

Gewicht	Funktion	α	U_α	U_r	Lückenzahlfolgen α-ter Stufe
2	$U_r(2)$	1	$U_1(2)=1$	$P_r^{(2)}$	5, 7
4	$U_r(4)$	1	$U_1(4)=1$	$P_r^{(2)}$	1, 5
6	$U_r(2,4)$	2	$U_2(2,4)=2$	$P_r^{(3)}$	11, 13, 17; 17, 19, 23
	$U_r(6)$	2	$U(6)=2$	$2P_r^{(2)}-2P_r^{(3)}$	1, 7; 23, 29
8	$U_r(2,4,2)$	2	$U_2(2,4,2)=1$	$P_r^{(4)}$	11, 13, 17, 19
	$U_r(2,6)$	2	$U_2(2,6)=1$	$P_r^{(3)}-P_r^{(4)}$	29, 31, 37
	$U_r(8)$	3	$U_3(8)=2$	$P_r^{(2)}-2P_r^{(3)}+P_r^{(4)}$	89, 97; 113, 121
10	$U_r(4,2,4)$	2	$U_2(4,2,4)=2$	$2P_r^{(4)}$	7, 11, 13, 17; 13, 17, 19, 23
	$U_r(4,6)$	2	$U_2(4,6)=1$	$\frac{3}{2}P_r^{(3)}-2P_r^{(4)}$	19, 23, 29
	$U_r(10)$	3	$U_2(10)=2$	$\frac{4}{3}P_r^{(2)}-3P_r^{(3)}+2P_r^{(4)}$	1, 11; 199, 209
12	$U_r(2,4,2,4)$	3	$U_3(2,4,2,4)=2$	$P_r^{(5)}$	11, 13, 17, 19, 23; 101, 103, 107, 109, 113
	$U_r(2,4,6)$	3	$U_3(2,4,6)=4$	$2P_r^{(4)}-P_r^{(5)}$	29, 31, 37, 41; 59, 61, 67, 71
	$U_r(2,6,4)$	3	$U_3(2,6,4)=4$	$2P_r^{(4)}-P_r^{(5)}$	71, 73, 79, 83; 179, 181, 187, 191
	$U_r(4,2,6)$	3	$U_3(4,2,6)=1$	$P_r^{(4)}-P_r^{(5)}$	67, 71, 73, 79
	$U_r(2,10)$	3	$U_3(2,10)=2$	$\frac{3}{2}P_r^{(3)}-4P_r^{(4)}+P_r^{(5)}$	197, 199, 209; 209, 211, 221
	$U_r(4,8)$	3	$U_3(4,8)=1$	$2P_r^{(3)}-3P_r^{(4)}+2P_r^{(5)}$	109, 113, 121
	$U_r(6,6)$	3	$U_3(6,6)=2$	$2P_r^{(3)}-6P_r^{(4)}+2P_r^{(5)}$	47, 53, 59; 151, 157, 163
	$U_r(12)$	4	$U_4(12)=8$	$2P_r^{(2)}-7P_r^{(3)}+10P_r^{(4)}-2P_r^{(5)}$	1, 13; 199, 211; 467, 479; 509, 521; 1789, 1801; 1831, 1843; 2087, 2099; 2297, 2309

Endzahl liegende Lückenzahlen r-ter Stufe hinzuzufügen, um eine Folge von lauter benachbarten Lückenzahlen und damit eine Folge von Urdifferenzen $2\varDelta_\sigma, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1}$ zu erhalten, die aus ν Abschnitten mit den Gewichten $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\nu$ zusammengesetzt ist. Nimmt man aber umgekehrt irgend einen Abschnitt von Lückenzahlen mit den Urdifferenzen $2\varDelta_\sigma, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1}$, so ist darin eine Lückenzahlfolge mit den Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\nu$ enthalten. Mithin wird

$$(130) \qquad H_r(2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_\nu) = \Sigma U_r(2\varDelta_\sigma, 2\varDelta_{\sigma+1}, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1})\ ;$$

die Summe ist über alle Folgen von Urdifferenzen zu erstrecken, die aus ν Abschnitten mit den Gewichten $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_\nu$ zusammengesetzt sind.

Zur Erläuterung mögen die H-Funktionen der Gewichte 6 bis 12 untersucht werden.

Beim Gewicht 6 sind die zulässigen Zerlegungen 2, 4 und 4, 2, und daher wird

$$(131) \qquad H_r(6) = U_r(6) + 2U_r(2, 4)\ .$$

In Verbindung mit Gleichung (118) folgt hieraus sofort die Gleichung

$$(119) \qquad U_r(6) = 2P_r^{(2)} - 2P_r^{(3)}\ .$$

Beim Gewicht 8 sind die zulässigen Zerlegungen 2, 6; 6, 2; 2, 4, 2. Daher wird

$$(132) \qquad H_r(8) = U_r(8) + 2U_r(2, 6) + U_r(2, 4, 2)\ .$$

Bei der Folge 2, 6 hat man nur die eine zulässige Zerlegung 2, 4, 2 und es wird

$$(133) \qquad H_r(2, 6) = U_r(2, 6) + U_r(2, 4, 2)\ .$$

In Verbindung mit Gleichung (122) gibt das sogleich die alte Gleichung

$$(124) \qquad U_r(8) = P_r^{(2)} - 2P_r^{(3)} + P_r^{(4)}\ .$$

Beim Gewicht 10 sind die zulässigen Zerlegungen 4, 6; 6, 4; 4, 2, 4. Daher wird

$$(134) \qquad H_r(10) = U_r(10) + 2U_r(4,6) + U_r(4,2,4)\,.$$

Bei der Folge 4, 6 hat man nur die eine zulässige Zerlegung 4, 2, 4, und es wird

$$(135) \qquad H_r(4,6) = U_r(4,6) + U_r(4,2,4)\,.$$

Indem man damit die Gleichung (125) verbindet, erhält man sofort die frühere Gleichung

$$(127) \qquad U_r(10) = \tfrac{4}{3} P_r^{(2)} - 3 P_r^{(3)} + 2 P_r^{(4)}\,.$$

Beim Gewicht 12 sind die zulässigen Zerlegungen 2, 10; 10, 2; 4, 8; 8, 4; 6, 6; 2, 4, 6; 2, 6, 4; 4, 2, 6; 4, 6, 2; 6, 2, 4; 6, 4, 2; 2, 4, 2, 4. Demnach wird

$$(136) \quad \left\{ \begin{aligned} H_r(12) &= U_r(12) + 2U_r(2,10) + 2U_r(4,8) + U_r(6,6) \\ &\quad + 2U_r(2,4,6) + 2U_r(2,6,4) + 2U_r(4,2,6) + U_r(2,4,2,4)\,, \end{aligned} \right.$$

und die Gleichungen für die H-Funktionen, die zu den aufgeführten Zerlegungen gehören, führen jetzt ohne Mühe zu der Formel der Tafel 15:

$$(137) \qquad U_r(12) = 2 P_r^{(2)} - 7 P_r^{(3)} + 10 P_r^{(4)} - 2 P_r^{(5)}\,.$$

Man übersieht, wie das Verfahren bei einem beliebigen Gewicht 2δ durchzuführen ist. Jeder Zerlegung von 2δ, die auf der r-ten Stufe zulässig ist, entspricht eine Gleichung

$$(138) \quad \left\{ \begin{aligned} & H_r(2\Delta_\sigma, 2\Delta_{\sigma+1}, \ldots, 2\Delta_{\sigma+\mu-1}) \\ &= U_r(2\Delta_\sigma, \ldots, 2\Delta_{\sigma+\mu-1}) + \Sigma\, U_r(2\Delta_\tau, 2\Delta_{\tau+1}, \ldots, 2\Delta_{\tau+\mu+\nu-1})\,, \end{aligned} \right.$$

bei der die Summe über alle auf der r-ten Stufe zulässigen Zerlegungen von $2\Delta_\sigma, \ldots, 2\Delta_{\sigma+\mu-1}$ zu erstrecken ist; diese Zerlegungen sind unter den schon bestimmten Zerlegungen von 2δ enthalten. Es entsteht so ein System von Gleichungen, bei denen auf der linken Seite der Reihe nach die H-Funktionen für 2δ, die zweigliedrigen Zerlegungen, die dreigliedrigen Zerlegungen usw. stehen, bis man bei den höchstgliedrigen Zerlegungen Halt macht; bei diesen stehen auf der rechten Seite die entsprechenden U-Funktionen selbst. Wenn man jetzt die Reihe der Gleichungen rückwärts durchläuft, so lassen sich die Funktionen $U_r(2\varDelta_\sigma, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1})$ linear durch H-Funktionen mit Folgen von $\mu+1$ und mehr Gliedern ausdrücken, und schließlich wird $U_r(2\delta)$ selbst eine lineare, homogene, ganzzahlige Funktion aller H-Funktionen, die zu den Zerlegungen von 2δ gehören; dabei hat $H_r(2\delta)$ den Koeffizienten Eins.

Bei genügend hoher Stufenzahl werden die Zerlegungen von r unabhängig, denn ihre Gliedrigkeit liegt unter einer von r unabhängigen Schranke, und es müssen daher schließlich allein die beständigen Zerlegungen übrigbleiben. Von einer gewissen Stufenzahl a ab werden also die Koeffizienten in den linearen homogenen Ausdrücken für die $U_r(2\varDelta_\sigma, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1})$ und im besonderen auch für $U_r(2\delta)$ für jede Stufe $r > a$ dieselben ganzen Zahlen.

Ferner war bei genügend hoher Stufenzahl

$$H_r(2\varDelta_\sigma, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1}) = S(2\varDelta_\sigma, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1}) \cdot P_r^{(\mu+1)}, \tag{89}$$

und da die Werte der Schwankungsfunktionen nach Gleichung (90) rationale Zahlen sind, so kommt

$$\left\{\begin{aligned} U_r(2\varDelta_\sigma, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1}) &= S(2\varDelta_\sigma, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1}) \cdot P_r^{(\mu+1)} \\ &\quad + \Sigma A_\nu(2\varDelta_\sigma, \ldots, 2\varDelta_{\sigma+\mu-1}) \cdot P_r^{(\mu+\nu+1)}\,; \end{aligned}\right. \tag{139}$$

die Koeffizienten A_ν sind von r unabhängige rationale Zahlen, die Summe ist über die Werte $\nu = 1, 2, \ldots$ bis zu einem solchen Wert zu erstrecken, daß $\mu+\nu$ den höchsten der zulässigen Werte erhält. Im besonderen ist

$$U_r(2\delta) = S(2\delta) \cdot P_r^{(2)} + \Sigma A_\nu(2\delta) \cdot P_r^{(\nu+2)}. \tag{140}$$

Für große Werte von r ist nach Gleichung (99)

$$\frac{2P_r}{P_r^{(\mu+1)}} \sim \frac{e^{(\mu+1)\gamma}}{K_\mu} \cdot (\log p_r)^{\mu+1}, \tag{141}$$

folglich wird

$$(142)\qquad p_r^{(\mu+\nu+1)} \sim \frac{K_{\mu+\nu}}{K_\mu e^{\gamma\nu}} \cdot \frac{p_r^{(\mu+1)}}{(\log p_r)^\nu},$$

und es ist in erster Näherung

$$(143)\qquad U_r(2\varDelta_\sigma,\ldots,2\varDelta_{\sigma+\mu-1}) \sim H_r(2\varDelta_\sigma,\ldots,2\varDelta_{\sigma+\mu-1}).$$

Wie es in § 5 und § 11 geschehen war, kann man nunmehr von den Lückenzahlen zu den Primzahlen übergehen. Unter $U^{(2\varDelta)}(2n)$ möge die Anzahl der Paare unmittelbar benachbarter Primzahlen der Differenz $2\varDelta$ verstanden werden. Dann ist nach dem Muster der Gleichung (42):

$$(144)\qquad \frac{U^{(2\varDelta)}(2n)}{U^{(2)}(2n)} \sim S(2\varDelta).$$

Es kann nicht überraschen, daß die Näherung hier nicht so gut ist wie bei den H-Funktionen. Für $2n = 43052$ hat man nach Weinreich

$$H^{(6)}(43052) = 1277, \qquad U^{(6)}(43052) = 986,$$

und weil $U^{(2)}(43052) = H^{(2)}(43052) = 625$ war, so kommt

$$\frac{U^{(6)}(43052)}{U^{(2)}(43052)} = 1{,}58,$$

während $S(6) = 2$ ist; der entsprechende Quotient im Gebiet der H-Funktionen war 2,04.

Endlich lassen sich auch asymptotische Formeln aufstellen für die Anzahlen der $(\mu+1)$-gliedrigen Primzahlfolgen zwischen 1 und $2n$, bei denen die benachbarten Primzahlen gegebene Differenzen $2\varDelta_1,\ldots,2\varDelta_\mu$ haben. Man hat zu diesem Zweck die Formel (139) durch Multiplikation mit $D_r^{\mu+1}$ umzugestalten. In erster Näherung gilt, entsprechend der Formel (98), die Gleichung

$$(145)\qquad U^{(2\varDelta_1,\ldots,2\varDelta_\mu)}(2n) \sim K_\mu \cdot \frac{(\pi(2n))^{\mu+1}}{(2n)^\mu} \cdot S(2\varDelta_1,\ldots,2\varDelta_\mu).$$

Will man die Näherung weiter treiben, so ist das asymptotische Verhalten des Ausdrucks

$$(146)\qquad \frac{P_r^{(\mu+\nu+1)}\left(\pi(2P_r)\right)^{\mu+1}}{\left(P_r^{(1)}\right)^{\mu+1}} = \frac{(2P_r)^\mu\, P_r^{(\mu+\nu+1)}}{\left(P_r^{(1)}\right)^{\mu+1}} \cdot \frac{\left(\pi(2P_r)\right)^{\mu+1}}{(2P_r)^\mu}$$

zu untersuchen. Mit Hilfe der Gleichungen (142) und (97) erkennt man, daß der erste Faktor asymptotisch gleich ist dem Ausdruck

$$\frac{K_{\mu+\nu}}{e^{\gamma\nu}\cdot(\log p_r)^\nu}.$$

Nach Gleichung (21) war aber $\log(2P_r) \sim p_r$ und daher wird schließlich nach einer wiederholt angewandten Überlegung

$$(147)\quad \left\{\begin{aligned} & U^{(2\Delta_1,\ldots,2\Delta_\mu)}(2n) \\ & \sim \frac{\left(\pi(2n)\right)^{\mu+1}}{(2n)^\mu}\left[K_\mu S(2\Delta_1,\ldots,2\Delta_\mu) + \Sigma K_{\mu+\nu}\frac{A_\nu(2\Delta_1,\ldots,2\Delta_\mu)}{(\log\log 2n)^\nu}\right].\end{aligned}\right.$$

Da im Nenner nur die Potenzen von $\log\log 2n$ auftreten, so haben die Glieder der Summe einen erheblichen Einfluß.

Die Formeln (145) und (147) gelten nur für beständige Folgen von Differenzen $2\Delta_1, \ldots, 2\Delta_\mu$.

§ 16

Mehrfache Darstellungen gerader Zahlen als Summen mittels Lücken- und Primzahlfolgen gegebener symmetrischer Differenzen

In fortschreitender Verallgemeinerung waren wir von den Darstellungen der geraden Zahlen als Summen von zwei Lücken- oder Primzahlen (§ 3) zu den Zwillingsdarstellungen der durch 6 teilbaren Zahlen (§ 6 und § 7) und von dort zu den Doppeldarstellungen gerader Zahlen als Summen mittels Lücken- und Primzahlpaaren gegebener Differenz (§ 9) gelangt. Wir tun jetzt den letzten Schritt und betrachten Lücken- oder Primzahlfolgen mit gegebenen symmetrischen Differenzen $2\delta_1, 2\delta_2, \ldots, 2\delta_\mu$, sodaß also $2\delta_\nu = 2\delta_{\mu-\nu+1}$ ist. Hat man zwei solche Folgen r-ter Stufe

$$v_r,\ v_r+2\sigma_1,\ v_r+2\sigma_2, \ldots,\ v_r+2\sigma_\mu$$

und

$$w_r,\ w_r+2\sigma_1,\ w_r+2\sigma_2, \ldots,\ w_r+2\sigma_\mu\ ,$$

und schreibt die zweite Folge in umgekehrter Ordnung unter die erste, so hat die Summe von je zwei untereinander stehenden Gliedern immer denselben Wert, denn es ist wegen der Symmetrie

$$(148)\qquad (v_r+2\sigma_{\nu-1}) + (w_r+2\sigma_{\mu-\nu}) = v_r+w_r+2\sigma_\mu\ .$$

Man erhält demnach mittels der $(\mu+1)$-gliedrigen Lückenzahlfolgen r-ter Stufe, denen symmetrische Differenzen zukommen, $(\mu+1)$-fache Darstellungen der geraden Zahlen $v_r+w_r+2\sigma_\mu$. Ihre Anzahl werde mit $G_r^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n)$ bezeichnet.

Man wird vermuten, daß nach dem Vorbild der Gleichung (82) eine asymptotische Darstellung möglich ist

$$(149)\qquad G_r^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n) \sim W_r^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n)\cdot S_r^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n)\ ,$$

bei der sich die rechte Seite zusammensetzt aus einer Wachstumsfunktion und einer Schwankungsfunktion.

Weil es sich jetzt um $2\mu+2$ darstellende Zahlen handelt, wird in Verallgemeinerung der Gleichung (83) zu setzen sein

$$(150)\qquad W_r^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n) = C(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)\cdot\frac{P_r^{(2\mu+2)}}{2P_r}\cdot 2n\ ;$$

$C(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)$ ist eine von r unabhängige numerische Konstante.

Man wird weiter annehmen dürfen, daß die Schwankungsfunktion bei genügend hoher Stufenzahl von r unabhängig wird; der so entstehende Ausdruck möge mit $S^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n)$ bezeichnet werden. In der Gleichung (89) für $H_r(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)$ war der zweite Faktor die Schwankungsfunktion $S_r(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)$. Der Zusammenhang zwischen den beiden Arten von Schwankungsfunktionen, die bei den H- und den G-Funktionen eigen sind, wird im dritten Teil erörtert werden.

Nach § 10 müssen von einer genügend hohen Stufe ab die Anfangszahlen einer Folge von Lückenzahlen mit den Differenzen $2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu$ gewissen arithmetischen Reihen der Form $2P_r y+v_r$

angehören; dasselbe gilt auch von Primzahlfolgen mit gegebenen Differenzen. Mithin haben die geraden Zahlen, die eine $(\mu+1)$-fache Darstellung der verlangten Art gestatten, die Formen $2P_r x + v_r' + v_r'' + 2\sigma_\mu$; für v_r' und v_r'' sind alle Paare zulässiger Werte zu setzen. Es kann sich ereignen, daß die Gesamtheit der so erklärten geraden Zahlen alle geraden Zahlen umfaßt; es können aber auch nur gewisse arithmetische Reihen der Form $2P_r x + 2u_r$ herauskommen, denen die darzustellenden Zahlen angehören müssen.

Im Gebiet der Primzahlen sei $G^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n)$ die Anzahl der $(\mu+1)$-fachen Darstellungen der Zahl $2n$ mittels Primzahlfolgen mit den symmetrischen Differenzen $2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu$. Der Ansatz wird, entsprechend den früheren besonderen Fällen, lauten

$$(151) \qquad G^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n) \sim W^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n) \cdot S^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n) \ ;$$

die Schwankungsfunktion ist gleich Null zu setzen, wenn $2n$ nicht einer der arithmetischen Reihen angehört, denen die darzustellende Zahl zu entnehmen ist, sonst ist sie gleich der vorher erklärten Funktion S. Die Wachstumsfunktion für die Primzahlen entsteht aus der Wachstumsfunktion für die Lückenzahlen r-ter Stufe durch Multiplikation mit $D_r^{2\mu+2}$ und Grenzübergang. Mit Hilfe der Gleichung (97) ergibt sich

$$(152) \qquad W^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n) = C(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu) \cdot K_{2\mu+1} \cdot \frac{(\pi(2n))^{2\mu+2}}{(2n)^{2\mu+1}} .$$

Die Wachstumsfunktion läßt sich daher wiederum mit gewissen Anzahlen von $(2\mu+2)$-gliedrigen Primzahlfolgen in Verbindung bringen. Es ist nach Gleichung (98)

$$(153) \qquad H^{(2\varepsilon_1,\ldots,2\varepsilon_{2\mu+1})}(2n) \sim K_{2\mu+1} \cdot \frac{(\pi(2n))^{2\mu+2}}{(2n)^{2\mu+1}} \cdot S(2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_{2\mu+1}) ,$$

mithin

$$(154) \qquad W^{(2\delta_1,\ldots,2\delta_\mu)}(2n) \sim H^{(2\varepsilon_1,\ldots,2\varepsilon_{2\mu+1})}(2n) \cdot \frac{C(2\delta_1, \ldots, 2\delta_\mu)}{S(2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_{2\mu+1})} \ ;$$

der zweite Faktor ist als eine numerische Konstante aufzufassen.

Es schien erwünscht, bei einer höheren G-Funktion die Untersuchung vollständig durchzuführen. WEINREICH hat das für die symmetrische Folge 2, 4, 2 getan. Seine Ergebnisse sollen in dem folgenden Paragraphen durch ein Verfahren hergeleitet werden, das dem in § 9 für die Doppeldarstellungen benutzten entspricht; WEINREICH selbst hatte einen abweichenden Weg eingeschlagen, der aber auch zum Ziele führte.

§ 17

Die Vierlingsdarstellungen der durch 30 teilbaren Zahlen im Gebiet der Lückenzahlen und der Primzahlen

Wie in § 12 bewiesen wurde, ist im Gebiet der Primzahlen die Wachstumsfunktion für die Anzahl der Zwillingsdarstellungen der durch 6 teilbaren Zahlen asymptotisch gleich der Anzahl der viergliedrigen Primzahlfolgen mit den Differenzen 2, 4, 2. Diese Folgen ließen sich ihrerseits erklären als die Paare von Primzahlzwillingen, die möglichst eng zusammenstehen; sie sind als Primzahlvierlinge bezeichnet worden. Aus der beständigen, symmetrischen Differenzenfolge 2, 4, 2 entspringen im Gebiet der Lückenzahlen und der Primzahlen vierfache Darstellungen gewisser gerader Zahlen, die jetzt genauer untersucht werden sollen.

Die Zahlen eines L ü c k e n z a h l v i e r l i n g s r-t e r S t u f e gruppieren sich symmetrisch um die Mitte des Vierlings, die ungerade Zahl m_r, und erscheinen in der Form $m_r-4, m_r-2, m_r+2, m_r+4$. Nimmt man die Zahl m_r hinzu, so hat man 5 aufeinanderfolgende ungerade Zahlen; demnach muß, von der zweiten Stufe ab, m_r durch 15 teilbar sein und hat als ungerade Zahl die Form $30n_2+15$. Hieraus ergibt sich von neuem, daß die Anfangszahl eines Vierlings die Form $30n_2+11$ hat. Die Endzahl hat also die Form $30n_2+19$, und bei der Summation entstehen Zahlen der Form

$$(30n_2+11)+(30n_2'+19)=30n_2''. \tag{155}$$

Mithin gestatten im Gebiet der Lückenzahlen nur die durch 30 teilbaren Zahlen V i e r l i n g s d a r s t e l l u n g e n. Im Gebiet der Primzahlen gilt dasselbe, wenn man, wie das schon bei den Zwillingsdarstellungen geschehen ist, von Nebendarstellungen absieht; hier scheiden die Darstellungen aus, bei denen der Nebenvierling 5, 7, 11, 13 benutzt wird.

Nach § 16 ist zu erwarten, daß für die gesuchte Anzahl $G_r^{(2,4,2)}(30n_2)$ eine asymptotische Darstellung besteht von der Gestalt

$$(156)\qquad G_r^{(2,4,2)}(30n_2) \sim C(2,4,2)\cdot\frac{P_r^{(8)}}{2P_r}\cdot 30n_2\cdot S_r^{(2,4,2)}(30n_2)\,;$$

$C(2,4,2)$ ist eine numerische Konstante. Es wird sich zeigen, daß die Vermutung zutrifft, und es wird auch gelingen, die Schwankungsfunktion $S_r^{(2,4,2)}(30n_2)$ zu bestimmen.

Um $G_r^{(2,4,2)}(30n_2)$ zu ermitteln, setze man, wie in § 6 bei den Zwillingsdarstellungen vorgehend, für $r \geqq 2$: $30n_2 = 2P_r x + 30s_r$, wo $30s_r$ dem Hauptbereich r-ter Stufe angehört; um Ausnahmefälle zu vermeiden, sei x mindestens gleich 2. Die beiden Vierlinge mögen zu Anfangszahlen haben $2P_r y + v_r$ und $2P_r z + w_r$, wo v_r und w_r wieder dem Hauptbereich angehören. Aus der Gleichung

$$(157)\qquad 2P_r x + 30s_r = 2P_r(y+z) + v_r + w_r + 8$$

folgt, daß $v_r + w_r + 8$ bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $30s_r$ übereinstimmen muß. Nachdem diese Bedingung erfüllt ist, hat man $y+z$ so zu wählen, daß $y+z = x-\varepsilon$ wird, wo ε die Werte $0, 1, 2$ haben kann.

Die Anzahl der Wertepaare v_r, w_r, die Paare v_r, w_r und w_r, v_r als verschieden angesehen, bei denen v_r von w_r verschieden ist, für die $v_r + w_r + 8$ bis auf ein Vielfaches von $2P_r$ mit $30s_r$ übereinstimmt, soll das Vierlingsgewicht r-ter Stufe der Zahlenklasse $2P_r x + 30s_r$ heißen und mit $g_r^{(2,4,2)}(30s_r)$ bezeichnet werden. Zur Bestimmung der Vierlingsgewichte dient wiederum der Schluß von r auf $r+1$.

Es sei $30s_{r+1} = 2P_r\xi + 30s_r$, $v_{r+1} = 2P_r\eta + v_r$, $w_{r+1} = 2P_r\zeta + w_r$; die Zahlen ξ, η, ζ können nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$ haben. Die Ausnahmewerte für die 8 Reihen von je p_{r+1} Lückenzahlen r-ter Stufe

$$(158)\qquad \left|\begin{array}{ll} 2P_r\eta + v_r\,, & 2P_r\eta + v_r + 2\,, \\ 2P_r(\xi-\varepsilon-\eta) + w_r\,, & 2P_r(\xi-\varepsilon-\eta) + w_r + 2\,, \\ & \\ 2P_r\eta + v_r + 6\,, & 2P_r\eta + v_r + 8\,, \\ 2P_r(\xi-\varepsilon-\eta) + 6\,, & 2P_r(\xi-\varepsilon-\eta) + w_r + 8\,, \end{array}\right.$$

das heißt die Werte von η, bei denen Teilbarkeit durch p_{r+1} stattfindet, mögen der Reihe nach heißen

$$\eta_0, \ \eta_0', \ \eta_0'', \ \eta_0''';$$
$$\eta_1, \ \eta_1', \ \eta_1'', \ \eta_1'''.$$

Wenn, wie vorausgesetzt wurde, r mindestens gleich 2 und daher p_{r+1} mindestens gleich 7 ist, so sind die Zahlen $\eta_0, \eta_0', \eta_0'', \eta_0'''$ voneinander verschieden, und dasselbe gilt auch von den Zahlen $\eta_1, \eta_1', \eta_1'', \eta_1'''$. Dagegen können Zahlen mit dem Zeiger Null gleich Zahlen mit dem Zeiger Eins sein. Hierbei sind verschiedene Möglichkeiten zu unterscheiden, die der Reihe nach durchgenommen werden sollen.

I. Alle 8 Ausnahmewerte sind voneinander verschieden. Dann gibt es 8 unzulässige Wertepaare η, ζ, und es gilt die Formel

$$g_{r+1}^{(2,4,2)}(30s_{r+1}) = g_r^{(2,4,2)}(30s_r) \cdot (p_{r+1}-8). \tag{159}$$

In diesem Fall ist keine der 9 Zahlen $2P_r(\xi-\varepsilon)+v_r+w_r+0,2,4,\ldots,16$ durch p_{r+1} teilbar, also auch keine der 9 Zahlen $30s_{r+1}+0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$. Und ist keine der 9 Zahlen $30s_{r+1}+0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$ durch p_{r+1} teilbar, so sind alle 8 Ausnahmezahlen voneinander verschieden.

Der Fall I kann nicht eintreten, wenn $p_{r+1}=7$ ist; denn unter 8 Zahlen, die der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 6$ entnommen sind, befinden sich mindestens zwei gleiche. Hiermit steht in Einklang, daß unter den 9 geraden Zahlen $30s_{r+1}+0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$ mindestens eine durch 7 teilbar ist. Es können aber auch zwei dieser Zahlen den Teiler 7 haben, und da sie sich dann um 14 unterscheiden, so erkennt man leicht, daß nur die beiden Paare $30s_{r+1}-6, 30s_{r+1}+8$ und $30s_{r+1}-8, 30s_{r+1}+6$ gleichzeitig durch 7 teilbar sind oder nicht.

II. $30s_{r+1}$ ist durch p_{r+1} teilbar. Dann ist, wie die Betrachtung der 8 Zahlen (158) lehrt:

$$\eta_0 = \eta_1''', \quad \eta_0' = \eta_1'', \quad \eta_0'' = \eta_1', \quad \eta_0''' = \eta_1.$$

Mehr Ausnahmewerte können nicht einander gleich sein, weil sonst noch eine der 8 Zahlen $30s_{r+1} \pm 2, \ldots, \pm 8$ durch p_{r+1} teilbar wäre. Mithin gibt es vier unzulässige Wertepaare η, ζ, und es gilt die Formel

$$g_{r+1}^{(2,4,2)}(30 s_{r+1}) = g_r^{(2,4,2)}(30 s_r) \cdot (p_{r+1} - 4)\,. \tag{160}$$

Sie ist auch für die Primzahl 7 richtig.

III. $30 s_{r+1} \pm 2$ ist durch p_{r+1} teilbar. Dann ist

$$\text{bei } +2\colon\ \eta_0' = \eta_1'',\ \eta_0'' = \eta_1'; \qquad \text{bei } -2\colon\ \eta_0 = \eta_1',\ \eta_0' = \eta_1\,.$$

Mithin gibt es sechs unzulässige Wertepaare η, ζ, und es gilt die Formel

$$g_{r+1}^{(2,4,2)}(30 s_{r+1}) = g_r^{(2,4,2)}(30 s_r) \cdot (p_{r+1} - 6)\,. \tag{161}$$

Sie ist auch für die Primzahl 7 richtig.

IV. $30 s_{r+1} \pm 4$ ist durch p_{r+1} teilbar. Dann ist

$$\text{bei } +4\colon\ \eta_0'' = \eta_1''; \qquad \text{bei } -4\colon\ \eta_0' = \eta_1'\,.$$

Mithin gibt es sieben unzulässige Wertepaare η, ζ, und es gilt die Formel

$$g_{r+1}^{(2,4,2)}(30 s_{r+1}) = g_r^{(2,4,2)}(30 s_r) \cdot (p_{r+1} - 7)\,. \tag{162}$$

Sie ist auch für die Primzahl 7 richtig und zeigt, daß die Zahlen $30 n_2$, bei denen $30 n_2 \pm 4$ durch 7 teilbar ist, keine Vierlingsdarstellungen gestatten.

Es ist leicht, dies unmittelbar zu beweisen. Die erste Zahl eines Vierlings muß nämlich eine der sechs Formen haben $210 n_3 + 11, 41, 71, 101, 131, 191$. Damit die zweite Zahl Lückenzahl, also von der dritten Stufe ab nicht durch 7 teilbar ist, fällt 131 weg, wegen der dritten Zahl 71, wegen der vierten 41. Die Anfangszahlen der Vierlinge haben demnach von der dritten Stufe ab die Formen $210 n_3 + 11, 101, 191$, die Endzahlen die Formen $210 n_3 + 19, 109, 199$. Bei der Summation einer Anfangs- und einer Endzahl sind daher nur die 9 in dem Täfelchen zusammengestellten Fälle möglich:

	11	101	191
19	30	120	210
109	120	210	90
199	210	90	180

Man erhält also bei der Summation nur Zahlen der Formen $210\nu_3+30, 90, 120, 180, 210$, und es fehlen die Zahlen der Formen $210\nu_3+60, 150$. Bei der Form $210\nu_3+60$ ist $210\nu_3+60-4$ durch 7 teilbar, bei der Form $210\nu_3+150$ hat $210\nu_3+150+4$ den Teiler 7.

V. $30s_{r+1}\pm 6$ ist durch p_{r+1} teilbar. Dann ist

$$\text{bei } +6\colon\ \eta_0''=\eta_1''',\ \eta_0'''=\eta_1'';\qquad \text{bei } -6\colon\ \eta_0=\eta_0',\ \eta_0'=\eta_1\,.$$

Mithin gibt es sechs unzulässige Wertepaare η, ζ, und es gilt die Formel

$$(163)\qquad g_{r+1}^{(2,4,2)}(30s_{r+1}) = g_r^{(2,4,2)}(30s_r)\cdot(p_{r+1}-6)\,.$$

Die Formel versagt, wenn $p_{r+1}=7$ ist; denn mit $30s_{r+1}\pm 6$ wird gleichzeitig $30s_{r+1}\mp 8$ durch 7 teilbar, und es sind noch andere Ausnahmewerte einander gleich. Wir kommen auf diesen Fall zurück, nachdem wir die letzte der sechs Möglichkeiten behandelt haben.

VI. $30s_{r+1}\pm 8$ ist durch p_{r+1} teilbar. Dann ist

$$\text{bei } +8\colon\ \eta_0'''=\eta_1''';\qquad \text{bei } -8\colon\ \eta_0=\eta_1\,.$$

Mithin gibt es sieben unzulässige Wertepaare, und es gilt die Formel

$$(164)\qquad g_{r+1}^{(2,4,2)}(30s_{r+1}) = g_r^{(2,4,2)}(30s_r)\cdot(p_{r+1}-7)\,.$$

Die Formel versagt, wenn $p_{r+1}=7$ ist; denn mit $30s_{r+1}\pm 8$ wird gleichzeitig $30s_{r+1}\mp 6$ durch 7 teilbar, und es sind noch andere Ausnahmewerte einander gleich. Man findet

$$\text{bei } +6, -8: \quad \eta_0 = \eta_1, \quad \eta_0'' = \eta_1''', \quad \eta_0''' = \eta_1'' ;$$
$$\text{bei } -6, +8: \quad \eta_0 = \eta_1', \quad \eta_0' = \eta_1, \quad \eta_0''' = \eta_1''' .$$

Mithin gibt es fünf unzulässige Wertepaare η, ζ, und es gilt die Formel

(165) $$g_{r+1}^{(2,4,2)}(30 s_{r+1}) = g_r^{(2,4,4)}(30 s_r) \cdot (7-5) .$$

Welcher Multiplikator bei der Primzahl 7 zu nehmen ist, das ersieht man sofort aus dem vorher aufgestellten Täfelchen. Hat die vorgelegte Zahl $30 n_2$ eine der beiden Formen $210 \nu_1 + 60, 150$, so fehlen die Zahlen 60, 150 in den 9 Fächern der Summen, und es gibt keine Darstellung, der Multiplikator ist Null (Fall IV). Bei den Formen $210 \nu_3 + 30, 180$ ist der Multiplikator Eins; die Zahlen 30, 180 kommen je einmal in den 9 Fächern vor. Die Zahlen $30-2$ und $180+2$ sind dann durch 7 teilbar (Fall III). Bei den Formen $210 \nu_3 + 90, 120$ ist der Multiplikator Zwei; die Zahlen 90, 120 kommen je zweimal in den 9 Fächern vor. Die Zahlen $90-6, 90+8$ und $120+6, 120-8$ sind dann durch 7 teilbar (Fälle V und VI). Bei der Form $210 \nu_3$ ist der Multiplikator Drei; die Zahl 210 kommt dreimal in den 9 Fächern vor. Sie ist dann selbst durch 7 teilbar (Fall II). In allen Fällen gibt der Multiplikator an, wie oft bei $210 \nu_3 + 30 \lambda$ die Zahl 30λ in den 9 Fächern des Täfelchens zu finden ist.

Die vorhergehenden Betrachtungen rechtfertigen die von WEINREICH gefundene

REGEL zur Bestimmung der Vierlingsgewichte. Um die Vierlingsgewichte $g_r^{(2,4,2)}(30 s_r)$ zu ermitteln, stelle man fest, durch welche der Primzahlen $11, 13, \ldots, p_r$ die 9 Zahlen $30 s_r + 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$ teilbar sind. Es sei

$30 s_r$ teilbar durch $a, b, \ldots, f, \ldots, l$;
$30 s_r \pm 2$ teilbar durch $a_2, b_2, \ldots, f_2, \ldots, l_2$;
$30 s_r \pm 4$ teilbar durch $a_4, b_4, \ldots, f_4, \ldots, l_4$;
$30 s_2 \pm 6$ teilbar durch $a_6, b_6, \ldots, f_6, \ldots, l_6$;
$30 s_r \pm 8$ teilbar durch $a_8, b_8, \ldots, f_8, \ldots, l_8$.

Die in der Reihe $11, 13, \ldots, p_r$ übrigbleibenden Primzahlen seien $a', b', \ldots, f', \ldots, l'$. Endlich setze man,

wenn $30s_r$ durch 7 teilbar ist, $\varphi(7)=3$,
wenn $30s_r \pm 2$ durch 7 teilbar ist, $\varphi(7)=1$,
wenn $30s_r \pm 4$ durch 7 teilbar ist, $\varphi(7)=0$,
wenn gleichzeitig $30s_r \pm 6$ und $30s_r \mp 8$ durch 7 teilbar sind, $\varphi(7)=2$.

Dann ist

$$(166)\quad \left\{ \begin{aligned} & g_r^{(2,4,2)}(30s_r) \\ & = \varphi(7)\cdot\Pi(f-4)\cdot\Pi(f_2-6)\cdot\Pi(f_4-7)\cdot\Pi(f_6-6)\cdot\Pi(f_8-7)\cdot\Pi(f-8). \end{aligned} \right.$$

Um vom Vierlingsgewicht $g_r^{(2,4,2)}(30s_r)$ zur Schwankungsfunktion $S_r^{(2,4,2)}(30n_2)=S_r^{(2,4,2)}(2P_r x+30s_r)$ überzugehen, hat man das Gewicht durch $P_r^{(8)}$ zu dividieren. Die Primteiler $11, 13, \ldots, p_r$ der 9 Zahlen $30n_2+0$, ± 2, ± 4, ± 6, ± 8 liefern dann die Multiplikatoren

$$(167)\quad M_0(p)=\frac{p-4}{p-8},\ M_2(p)=M_6(p)=\frac{p-6}{p-8},\ M_4(p)=M_8(p)=\frac{p-7}{p-8}.$$

Für die Primzahl 7 ist $\varphi(7)$ der Multiplikator.

Von einer gewissen Stufenzahl ab werden sämtliche Primteiler der 9 Zahlen $30n_2+0, \pm 2, \ldots, \pm 8$ wirksam. Die so erhaltene Schwankungsfunktion möge mit $S^{(2,4,2)}(30n_2)$ bezeichnet werden.

Für große Werte von $30n_2$ gilt die asymptotische Darstellung

$$(168)\quad G_r^{(2,4,2)}(30n_2) \sim \frac{P_r^{(8)}}{2P_r}\cdot 30n_2\cdot S_r^{(2,4,2)}(30n_2),$$

und im Gebiet der Primzahlen entspringt daraus die Formel

$$(169)\quad G^{(2,4,2)}(30n_2) \sim K_7\cdot\frac{(\pi(30n_2))^8}{(30n_2)^7}\cdot S^{(2,4,2)}(30n_2).$$

Nach der Gleichung (106) ist

$$K_7 = 2^7\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\omega_1^4\cdot\omega_2^2\cdot\omega_4.$$

Um die Wachstumsfunktion $W^{(2,4,2)}(30n_2)$ zu deuten, hat man sie nach Gleichung (154) mit den achtgliedrigen Primzahlfolgen zu verbinden, die gegebene Differenzen aufweisen. Eine solche Folge ergibt sich, wenn man — die Frage, die von den Primzahlzwillingen zu den Primzahlvierlingen führte, verallgemeinernd — die Gruppen von 8 Primzahlen betrachtet, bei denen auf einen Vierling so rasch wie möglich wieder ein Vierling folgt. Man überzeugt sich leicht, daß sie die Differenzen 2, 4, 2, 22, 2, 4, 2 aufweisen, und findet so die Gleichung

$$W^{(2,4,2)}(30 n_2) \sim \frac{H^{(2,4,2,22,2,4,2)}(30 n_2)}{S(2,4,2,22,2,4,2)} . \tag{170}$$

Hieraus entsteht die Aufgabe, die achtfachen Darstellungen der durch 210 teilbaren Zahlen zu untersuchen, die mittels der achtgliedrigen Lücken- und Primzahlfolgen der Differenzen 2, 4, 2, 22, 2, 4, 2 erhalten werden, und damit eröffnet sich der Blick auf das Problem der 2^n-fachen Darstellungen der durch $2 P_n$ teilbaren Zahlen mittels 2^n-gliedriger Lücken- und Primzahlfolgen, die möglichst viel Zwillingspaare in sich enthalten. Diese 2^n-fachen Darstellungen ordnen sich ihrerseits ein in die allgemeine Lehre von den m-fachen Darstellungen der geraden Zahlen mittels m-gliedriger Lücken- und Primzahlfolgen, denen gegebene symmetrische Differenzen zukommen.