Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Krazer, Adolf** (1858 – 1926)

Titel: **Über die Unendlichkeits- und Nullpunkte einer algebraischen Funktion**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1913, 24

Faßt man den allgemeinen Integranden I. Gattung als eine Linearform von p unabhängigen Veränderlichen auf, so nehmen die Gleichungen zwischen den Unendlichkeitspunkten einer algebraischen Funktion und deren Gewichten eine besonders übersichtliche Gestalt an und erschließen einen tieferen Einblick in die Natur solcher Punktsysteme.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1914, S. IV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1913. 24. Abhandlung

Über die Unendlichkeits- und Nullpunkte einer algebraischen Funktion

von
ADOLF KRAZER
in Karlsruhe

Eingegangen am 11. Dezember 1913

Heidelberg 1913
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-No. 1028.

Die Sätze, welche von den Herren PRYM und ROST in ihrem großen Werke über die PRYMschen Funktionen erster Ordnung bezüglich der Unendlichkeits- und Nullpunkte einer algebraischen Funktion aufgestellt wurden, haben mich veranlaßt, Untersuchungen wieder aufzunehmen, die ich über diesen Gegenstand bei der Abfassung meines Lehrbuches der Thetafunktionen angestellt, damals aber, weil sie darin keinen Platz fanden, unvollendet gelassen habe.

Diese Untersuchungen schließen sich in Form und Inhalt an CHRISTOFFEL an, dem auch der leitende Gedanke, aus welchem alles übrige sich fast von selbst ergibt, angehört, nämlich den allgemeinen Integranden I. Gattung als Linearform von p Veränderlichen aufzufassen. Wie es CHRISTOFFEL zu tun pflegte, schließe auch ich das gruppenweise Zusammenfallen der Unendlichkeits- und Nullpunkte aus; es gelten also die Sätze in der hier mitgeteilten Form nur unter dieser Beschränkung. Am Schlusse aber zeige ich, indem ich den PRYM-ROSTschen Beweis des WEIERSTRASS'schen Lückensatzes wiedergebe, daß die von mir angewandte Methode auch im Falle mehrfacher Unendlichkeits- und Nullpunkte brauchbar ist.

1.

Die Normalintegrale I. und II. Gattung.

Mit der unabhängigen komplexen Variable z sei eine zweite s durch eine irreduzible algebraische Gleichung

$$F\left(\overset{m}{z}/\overset{n}{s}\right) = 0 \tag{1}$$

vom Geschlecht p verknüpft. Die wie s verzweigte n-blättrige RIEMANNsche Fläche T sei durch p Querschnittpaare a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, .., p)$ und p von einem Punkte ω ausgehende Hilfslinien c_ν in die einfach zusammenhängende T' verwandelt. Es seien $u_1, u_2, .., u_p$ die p Normalintegrale I. Gattung, welche dadurch charakterisiert sind, daß

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu: && u_\mu^+ = u_\mu^- + \delta_{\mu\nu}\pi i,\ \delta_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix} \\ (2)\quad &\text{längs } b_\nu: && u_\mu^+ = u_\mu^- + a_{\mu\nu}, \qquad (\mu,\nu = 1, 2, .., p) \\ &\text{längs } c_\nu: && u_\mu^+ = u_\mu^- \end{aligned}$$

ist; ihre Integranden mögen $u_1', u_2', .., u_p'$ heißen, sodaß

$$(3)\qquad u_\mu' = \frac{du_\mu}{dz} \qquad (\mu = 1, 2, .., p)$$

ist. Mit $t(\varepsilon)$ sei weiter das im Punkte ε der Riemannschen Fläche mit dem Gewichte $+1\ \infty^1$ werdende Normalintegral II. Gattung bezeichnet, für welches

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu: && \overset{+}{t(\varepsilon)} = \overset{-}{t(\varepsilon)}, \\ (4)\quad &\text{längs } b_\nu: && \overset{+}{t(\varepsilon)} = \overset{-}{t(\varepsilon)} - 2u_\nu'(\varepsilon), \qquad (\nu = 1, 2, .., p) \\ &\text{längs } c_\nu: && \overset{+}{t(\varepsilon)} = \overset{-}{t(\varepsilon)} \end{aligned}$$

ist.

2.
Der Riemann-Rochsche Satz.

Durch die Gleichung (1) wird eine Klasse algebraischer, nämlich der wie s verzweigten, also in T einwertigen Funktionen τ bestimmt. Wird $\tau\ \infty^1$ in den q Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_q$ und zwar mit den Gewichten $c_1, c_2, .., c_q$, so ist die Funktion

$$\tau - \sum_{k=1}^{q} c_k\, t(\varepsilon_k)$$

in T' nirgends mehr unendlich und ist, da zudem ihre Periodizitätsmodulen an allen Querschnitten a_ν Null sind, eine Konstante; es ist also:

$$(5)\qquad \tau = c + \sum_{k=1}^{q} c_k\, t(\varepsilon_k)\,.$$

Da nun aber τ auch an allen Querschnitten b_ν den Periodizitätsmodul Null hat, so müssen zwischen den Gewichten c_k und den Unendlichkeitspunkten ε_k die p Gleichungen

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{q} c_k\, u_\mu'(\varepsilon_k) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, .., p)$$

bestehen.

Um zu erkennen, was diese p Gleichungen für die Punkte ε_k bedeuten, definiere man q lineare Formen von p Veränderlichen $x_1, x_2, .., x_p$ durch die Gleichungen

$$(7) \qquad f_k = u_1'(\varepsilon_k)x_1 + u_2'(\varepsilon_k)x_2 + \cdot\cdot + u_p'(\varepsilon_k)x_p . \qquad (k=1,2,..,p)$$

Aus (6) folgt dann

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{q} c_k f_k = 0 \;;$$

die Gleichungen (6) sagen also aus, daß die q linearen Formen $f_1, f_2, .., f_q$ linearabhängig sind, und man hat den Satz:

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_q$ die q ∞^1-Punkte einer Funktion der Klasse, so sind die q zugehörigen linearen Formen (7) stets linearabhängig.

3.

Umkehrung des Riemann-Rochschen Satzes.

Es seien umgekehrt irgend q Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_q$ der Riemannschen Fläche gegeben und man stelle die Frage, ob es eine Funktion τ der Klasse gibt, welche in diesen Punkten und sonst nirgends ∞^1 wird.

Aus dem Vorigen ergibt sich sofort als eine notwendige Bedingung für die Existenz einer solchen Funktion τ, daß die q Formen f_k linearabhängig sind. Weil also unter den q Formen $f_1, f_2, .., f_q$ sich notwendig linearabhängige befinden müssen, nennt Christoffel diese notwendige Formen und die ihnen zugehörigen Punkte ε_k notwendige Punkte, und man hat den Satz:

Eine Funktion der Klasse, unter deren Unendlichkeitspunkten sich kein notwendiger befindet, gibt es nicht.

Setzt man daher voraus, daß die q Formen f_k linearabhängig sind und bezeichnet den Rang des Formensystems $f_1, f_2, .., f_q$ mit r, so ist $r<q$ und es können auf mehrfache Weise aus den q Formen f_k r, $f_1, f_2, .., f_r$, ausgewählt werden, die selbst linearunabhängig sind und durch welche sich die $s=q-r$ übrigen $f_{r+1}, f_{r+2}, .., f_q$ linear darstellen lassen in der Form

$$(9) \qquad f_{r+\sigma} = \sum_{\rho=1}^{r} \gamma_{\sigma\rho} f_\rho . \qquad (\sigma=1,2,..,s)$$

Die Anzahl $s=r-q$ der linearabhängigen Formen f heißt nach Christoffel der Überschuß des Formen- oder Punktsystems, die s Formen und Punkte selbst überzählig.

Nun erkennt man aber sofort, daß es s Funktionen $\tau_1, \tau_2, .., \tau_s$, definiert durch die Gleichungen

$$\tau_\sigma = t(\varepsilon_{r+\sigma}) - \sum_{\rho=1}^{r} \gamma_{\sigma\rho}\, t(\varepsilon_\rho) \qquad (\sigma = 1, 2, .., s) \tag{10}$$

gibt, von denen τ_σ in den Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_r$ und im Punkte $\varepsilon_{r+\sigma}$ ∞^1 wird, und in der Funktion

$$\tau = c + \sum_{\sigma=1}^{s} c_{r+\sigma}\, \tau_\sigma \tag{11}$$

erhält man eine Funktion, welche in allen Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_q$ ∞^1 wird und zwar in den Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_r$ mit den Gewichten $c_1 = -\sum_\sigma c_{r+\sigma}\gamma_{\sigma 1}$, $c_2 = -\sum_\sigma c_{r+\sigma}\gamma_{\sigma 2}$, $\dots$, $c_r = -\sum_\sigma c_{r+\sigma}\gamma_{\sigma r}$ und in den Punkten $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, .., \varepsilon_q$ mit den Gewichten $c_{r+1}, c_{r+2}, .., c_q$, und τ ist dann, wenn die letzten s Größen c willkürlich gewählt werden, auch die allgemeinste, nur in $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_q$ ∞^1 werdende Funktion der Klasse; denn aus (8) und (9) folgt:

$$\sum_{\rho=1}^{r} c_\rho f_\rho + \sum_{\sigma=1}^{s} c_{r+\sigma} f_{r+\sigma} = \sum_{\rho=1}^{r} \Big(c_\rho + \sum_{\sigma=1}^{s} c_{r+\sigma}\gamma_{\sigma\rho}\Big) f_\rho = 0$$

also wegen der Linearunabhängigkeit der Formen $f_1, f_2, .., f_r$

$$c_\rho = -\sum_{\sigma=1}^{s} c_{r+\sigma}\gamma_{\sigma\rho} \qquad (\rho = 1, 2, .., r)$$

und nun aus (5)

$$\tau = c + \sum_{\rho=1}^{r} c_\rho\, t(\varepsilon_\rho) + \sum_{\sigma=1}^{s} c_{r+\sigma}\, t(\varepsilon_{r+\sigma}) = c + \sum_{\sigma=1}^{s} c_{r+\sigma}\Big(t(\varepsilon_{r+\sigma}) - \sum_{\rho=1}^{r} \gamma_{\sigma\rho}\, t(\varepsilon_\rho)\Big)$$

also (11).

Schon das Vorhandensein auch nur eines notwendigen Punktes reicht also, wie die speziellen Funktionen τ_σ zeigen, zur Existenz einer Funktion τ hin; sind s notwendige Punkte vorhanden, so enthält τ s wesentliche Konstanten; es können ihr also s Nullpunkte willkürlich vorgeschrieben werden. Da die s Funktionen τ_σ linearunabhängig sind, so wird durch die Angabe dieser s Nullpunkte die Funktion im allgemeinen, d. h. wenn diese Nullpunkte nicht besondere Lagen haben, eindeutig bestimmt. Man kann daher den Überschuß des Punktsystems $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ auch als die Anzahl der willkürlich wählbaren Nullpunkte von τ definieren.

4.
Fremde Punkte.

Es kann vorkommen, daß in den sämtlichen s Darstellungen (9) der überzähligen Formen $f_{r+\sigma}$ gewisse der linearunabhängigen Formen f_ρ gar nicht auftreten. Kommt aber f_ρ in keiner der Gleichungen (9) vor, ist also $\gamma_{1\rho} = \gamma_{2\rho} = \cdots = \gamma_{s\rho} = 0$, so ist auch $c_\rho = 0$ und es wird folglich die Funktion τ im Punkte ε_ρ nicht unendlich. Solche Punkte ε_ρ scheiden also aus den Unendlichkeitspunkten von τ aus, indem keine der Funktionen τ in ihnen unendlich werden kann. Christoffel nennt diese Punkte fremde, und man hat den Satz:

Eine Funktion der Klasse, die in einem fremden Punkte unendlich wird, gibt es nicht.

Damit also eine Funktion τ der Klasse existiere, welche in q gegebenen Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ und sonst irgendwo ∞^1 werde, genügt es nicht, daß unter den Punkten ε notwendige vorkommen, sondern es dürfen weiter unter ihnen keine fremden sein.

Man hat sohin folgendes Endresultat:

Liegt die Aufgabe vor, eine Funktion τ der Klasse zu bilden, welche in q gegebenen Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ und sonst nirgendwo ∞^1 wird, so bilde man die q linearen Formen (7), bestimme den Rang $r = q - s$ dieses Formensystems, wähle r linearunabhängige Formen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ unter ihnen aus und stelle die s übrigen, $f_{r+1}, f_{r+2}, \ldots, f_q$, mittels der Gleichungen (9) durch sie dar. Kommen in den s Gleichungen (9) r' der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ gar nicht vor, so sind die diesen Formen entsprechenden „fremden" Punkte ε auszuscheiden. Statt einer Funktion q^{ter} Ordnung erhält man nur eine solche von der Ordnung $q' = q - r'$, die in den q' übrigbleibenden Punkten ε ∞^1 wird; für die s „notwendigen" Punkte $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \ldots, \varepsilon_q$ kann man die Gewichte $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_q$ willkürlich wählen, für die von den r Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ nach Ausscheidung der fremden Punkte übrigbleibenden $r - r'$ „wesentlichen" Punkte sind sie dann durch die Gleichungen

$$c_\rho = -\sum_{\sigma=1}^{s} c_{r+\sigma}\gamma_{\sigma\rho} \qquad (\rho = r'+1, r'+2, \ldots, r) \tag{12}$$

bestimmt.

5.
Das Abelsche Theorem.

Bezeichnet man die q ∞^1-Punkte einer Funktion τ der Klasse wie bisher mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_q$, ihre q 0^1-Punkte mit $\eta_1, \eta_2, .., \eta_q$, so sind diese 2q Punkte durch die p Gleichungen

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{q}\Big[u_\mu(\varepsilon_k) - u_\mu(\eta_k)\Big] = g_\mu \pi i + \sum_{\nu=1}^{p} h_\nu a_{\mu\nu} \qquad (\mu = 1, 2, .., p)$$

miteinander verknüpft, wo die g, h ganze Zahlen bezeichnen, welche durch geschlossene Integrale des Differentials $d\ln\tau$ sich ausdrücken lassen. Sind umgekehrt 2q Punkte ε und η durch p Gleichungen (13) miteinander verknüpft, so existiert eine Funktion der Klasse, welche in den q Punkten ε ∞^1 und in den q Punkten η 0^1 wird; sie kann mit Hilfe der Integrale III. Gattung in bekannter Weise dargestellt werden.

Nun fasse man die Gleichungen (13) so auf, daß in ihnen die q Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_q$ gegeben und die q Punkte $\eta_1, \eta_2, .., \eta_q$ gesucht seien. Die Lösung dieser Aufgabe fällt verschieden aus je nach der Natur der q Punkte ε. Finden sich unter diesen r' fremde, $r - r' = r''$ wesentliche und $s = q - r$ notwendige, so fallen von den q Punkten η r' mit den r' fremden Punkten ε zusammen, von den $q' = q - r'$ übrigen Punkten η können s willkürlich gewählt werden, die anderen r'' sind dann durch diese und die Punkte ε im allgemeinen eindeutig bestimmt.

6.
Der Weierstraß'sche Lückensatz.

Es sei eine Funktion τ der Klasse gegeben, welche nur in einem Punkte $\varepsilon(z', s')$ der Riemannschen Fläche ∞^q werde wie

$$\frac{c_1}{z - z'} + \frac{c_2}{(z - z')^2} + \cdots + \frac{c_q}{(z - z')^q}\,.$$

Bezeichnet man dann das in ε mit dem Gewichte $+1$ ∞^m werdende Normalintegral II. Gattung mit $t_m(\varepsilon)$, für welches

$$(14) \qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu: \ t_m^+(\varepsilon) = t_m^-(\varepsilon), \\ &\text{längs } b_\nu: \ t_m^+(\varepsilon) = t_m^-(\varepsilon) - \frac{2}{(m-1)!}\,u_\nu^{(m)}(\varepsilon), \qquad (\nu = 1, 2, .., p) \\ &\text{längs } c_\nu: \ t_m^+(\varepsilon) = t_m^-(\varepsilon), \end{aligned}$$

wo $u_\nu^{(m)}$ die m^{te} Derivierte von u_ν, also

$$(15) \qquad u_\mu^{(m)} = \frac{d^m u_\mu}{d z^m} \qquad (\mu = 1, 2, .., p)$$

ist, so ist die Funktion

$$\tau - \sum_{k=1}^{q} c_k t_k(\varepsilon)$$

in T' nirgends mehr unendlich und ist, da zudem ihre Periodizitätsmodulen an allen Querschnitten a_ν Null sind, eine Konstante; es ist also:

$$(16) \qquad \tau = c + \sum_{k=1}^{q} c_k t_k(\varepsilon) \; .$$

Da nun aber τ auch an allen Querschnitten b_ν den Periodizitätsmodul Null hat, so müssen zwischen den Gewichten c_k und dem Unendlichkeitspunkt ε die p Gleichungen

$$(17) \qquad \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(k-1)!} c_k u_\mu^{(k)}(\varepsilon) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, .., p)$$

bestehen.

Definiert man jetzt q lineare Formen von p Veränderlichen $x_1, x_2, .., x_p$ durch die Gleichungen

$$(18) \quad f^{(k)} = \frac{1}{(k-1)!}\left(u_1^{(k)}(\varepsilon) x_1 + u_2^{(k)}(\varepsilon) x_2 + \cdots + u_p^{(k)}(\varepsilon) x_p\right), \qquad (k = 1, 2, .., q)$$

so folgt aus (17)

$$(19) \qquad \sum_{k=1}^{q} c_k f^{(k)} = 0 \; .$$

Die Gleichungen (17) sagen also aus, daß die q Formen $f^{(1)}, f^{(2)}, .., f^{(q)}$ linearabhängig sind. Bezeichnet man also den Rang des Formensystems $f^{(1)}, f^{(2)}, .., f^{q}$ mit r, so ist $r < q$ und es können auf mehrfache Weise aus den q Formen $f^{(k)}$ r, $f^{(m_1)}, f^{(m_2)}, .., f^{(m_r)}$ ausgewählt werden, die selbst linearunabhängig sind und durch welche sich die $s = q - r$ übrigen, $f^{(n_1)}, f^{(n_2)}, .., f^{(n_s)}$ linear darstellen lassen in der Form:

$$(20) \qquad f^{(n_\sigma)} = \sum_{\rho=1}^{r} \gamma_{\sigma\rho} f^{(m_\rho)} , \qquad (\sigma = 1, 2, .., s)$$

und man kann es dabei stets so einrichten, daß für $\sigma = 1, 2, .., s$ n_σ größer ist als die in der Gleichung für $f^{(n_\sigma)}$ auf der rechten Seite wirklich vorkommenden Indices m_ρ. Die Funktion

$$(21) \qquad \tau^{(\sigma)} = t_{n_\sigma}(\varepsilon) - \sum_{\rho=1}^{r} \gamma_{\sigma\rho}\, t_{m_\rho}(\varepsilon) \qquad (\sigma = 1, 2, .., s)$$

wird dann in Punkte ε ∞^{n_σ}.

Man erhält so s Funktionen $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, .., \tau^{(s)}$, die in ε unendlich werden von den Ordnungen $n_1, n_2, .., n_s$ und Funktionen anderer Ordnungen bis zur q^{ten} gibt es nicht; es fehlen also, da $s = q - r$ ist, r Ordnungen.

Nimmt man q hinreichend groß (es genügt jedenfalls $q = 2p - 1$, da keine Funktion u'_μ in ε von höherer Ordnung als der $2p - 2^{\text{ten}}$ Null werden kann), so wird $r = p$, und man erhält den Weierstrass'schen Lückensatz; man erkennt dabei zugleich, daß für alle Punkte ε der Riemannschen Fläche, für welche die Formen $f^{(1)}, f^{(2)}, .., f^{(p)}$ linearunabhängig sind, also die Determinante $\Sigma \pm u'_1 u''_2 .. u^{(p)}_p$ von Null verschieden ist, die Zahlen $1, 2, .., p$ die Lückenzahlen sind.