Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Äquivalenzprobleme aus der Dynamik gebundener Punktbewegungen**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1912, 17

Im Anschluß an frühere Untersuchungen über die analytische Äquivalenz dynamischer Probleme und die Transformationen von Bewegungen behandelt der Verfasser die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer festen Kurve unter dem Einfluß einer Zentralkraft, und es gelingt ihm, bemerkenswerte Beziehungen zwischen gewissen Klassen solcher Probleme herzustellen. Im besonderen wird gezeigt, daß es bei einem beliebig im Raume gelegenen Zentrum stets eine äquivalente ebene Kurve gibt, in deren Ebene das Zentrum liegt, und bei Bewegungen auf einem festen Kreise und Anziehung oder Abstoßung proportional einer beliebigen Potenz der Entfernung das Zentrum durch ein äquivalentes Zentrum in der Ebene des Kreises ersetzt werden kann.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1912, S. XXXVI)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1912. 17. Abhandlung.

Äquivalenzprobleme aus der Dynamik gebundener Punktbewegungen

von

Paul Stäckel

in Karlsruhe

Eingegangen am 21. Oktober 1912

Heidelberg 1912
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 817.

§ 1. Bei der freien Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einfluß einer Zentralkraft hat bereits NEWTON[1]) bemerkenswerte Beziehungen zwischen den Bewegungen erkannt, die zu verschiedenen Kraftgesetzen gehören, und dieser Gegenstand ist später von BOLTZMANN[2]) wieder aufgenommen worden; bald darauf habe ich entsprechende Sätze für die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Drehungsfläche hergeleitet[3]) und gezeigt, auf welche Art sich diese dynamischen Verwandtschaften in die allgemeine Lehre von der Transformation der Bewegungen einordnen lassen[4]). Dagegen scheinen Äquivalenzprobleme für die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer festen Kurve noch nicht betrachtet worden zu sein. Im folgenden soll dies unter der Voraussetzung geschehen, daß wiederum eine Zentralkraft wirkt, und zwar wird zuerst das Zentrum mit seinem Kraftgesetz beibehalten, jedoch die Kurve abgeändert, dann aber bei ein und derselben Kurve das Zentrum abgeändert werden.

§ 2. Die Masse des bewegten Punktes werde zur Einheit der Masse gemacht. Seine Lage P auf der gegebenen, festen Raumkurve zur Zeit t sei durch die von einem gewissen Anfangspunkte A gezählte Bogenlänge s der Kurve bestimmt. Die Entfernung des Punktes P vom Kraftzentrum C heiße r. Dann ist r eine Funktion von s, und im allgemeinen auch s eine Funktion von r:

$$(1) \qquad s = \varphi(r).$$

Ausgenommen ist nur der Fall, daß die Raumkurve auf einer Kugel vom Mittelpunkt C liegt, so daß r immer denselben Wert behält.

---

[1]) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica,* London 1687, Lib. I, Sectio 9, Prop. 44; vgl. L. EULER, *Mechanica sive motus scientia,* St. Petersburg 1736, T. I, § 734, 742, Opera omnia, series II, vol. 2, S. 249 und 252

[2]) L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik,* I. Teil, Leipzig 1897, S. 73.

[3]) *Über Transformationen von Bewegungen,* Göttinger Nachrichten, 1898, S. 161.

[4]) Ebenda, S. 164; vgl. A. MALIPIERO, *Sulla transformazione delle equazioni della dinamica,* Atti del R. Instituto Veneto (8) 3 (1901), S. 469.

Da die Bewegung auf einer solchen Kurve hier mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt, so darf dieser Ausnahmefall als erledigt gelten und ausgeschlossen werden. Ferner sei $\Pi(r)$ die zum Zentrum C gehörige Kräftefunktion. Die additive Konstante der Kräftefunktion werde so gewählt, daß $\Pi(r)$ in dem Punkte P_0 verschwindet, in dem sich der bewegte Punkt zur Anfangszeit $t = 0$ befindet. Endlich bedeute v die Geschwindigkeit des Punktes, und es werde noch festgesetzt, daß die zur Anfangszeit $t = 0$ stattfindenden Werte der betrachteten Größen den Index Null erhalten sollen.

Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich aus der Energiegleichung die Relation

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2\Pi(r), \tag{2}$$

aus der sofort für r die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{v_0^2 + 2\Pi(r)}{\varphi'^2(r)} \tag{3}$$

hervorgeht; dabei bezeichnet der Strich die Differentiation nach r. Die Differentialgleichung (3) ist unter der Anfangsbedingung zu integrieren, daß dem Werte $t = 0$ der Wert $r = r_0$ entspricht.

Auf die Integration der Differentialgleichung (3), die von der Form

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = F(r) \tag{4}$$

ist, soll hier nicht eingegangen werden; es sei nur bemerkt, daß dafür wirksame Methoden zur Verfügung stehen[1]). Was hier in Frage kommt, ist vielmehr die Tatsache, daß alle Punktbewegungen, die auf dieselbe Differentialgleichung (3) führen, in dem Sinne als äquivalent anzusehen sind, daß bei ihnen die Bogenlänge s oder, was auf dasselbe herauskommt, der Fahrstrahl r, unter denselben Anfangsbedingungen dieselbe Funktion der Zeit wird[2]). Damit man aber für zwei Kurven dieselbe Differentialgleichung (3) erhält, ist notwendig und hinreichend, daß bei Einführung rechtwinkliger kartesischer Koordinaten x, y, z, deren Anfangspunkt das Zentrum C ist, für beide Kurven die Gleichungen

---

[1]) Vgl. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. IV, Teilbd. 1, S. 467—469.

[2]) Vgl. meine Abhandlung: *Über die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Äquivalenz dynamischer Probleme*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 107 (1891), S. 319.

$$(5)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \\ \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \varphi'^2(r) \end{cases} = \left(\frac{ds}{dr}\right)^2$$

identisch erfüllt sind. Da in den Gleichungen (5) die Kräftefunktion $\Pi(r)$ nicht vorkommt, so gilt die Äquivalenz bei beliebiger Annahme der wirkenden Zentralkraft.

Hiernach sind einer gegebenen Kurve in bezug auf ein gegebenes Zentrum unzählig viele äquivalente Kurven zugeordnet. Man darf nämlich für z eine beliebige Funktion f(r) nehmen und hat darauf x und y aus den Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 - f^2(r) = g^2(r), \\ \left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 = \varphi'^2(r) - f'^2(r) = h^2(r) \end{cases}$$

zu bestimmen. Diese Aufgabe führt bei dem Ansatz

$$(7)\qquad x = g(r)\cos\vartheta, \qquad y = g(r)\sin\vartheta$$

auf die Differentialgleichung

$$(8)\qquad \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2 = \frac{h^2(r) - g'^2(r)}{g^2(r)},$$

aus der sich die Hilfsgröße ϑ mittels einer Quadratur ergibt.

Im besonderen sind unter den äquivalenten Kurven auch solche ebenen Kurven enthalten, in deren Ebene das Kraftzentrum liegt. Wie man leicht erkennt, sind alle diese Kurven kongruent, sodaß es im Grunde nur eine Lösung gibt. Um diese ebenen Kurven zu erhalten, genügt es daher, etwa $z = 0$ zu setzen, was auf die Formeln führt:

$$(9)\qquad x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta,$$

$$(10)\qquad \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2 = \frac{\varphi'^2(r) - 1}{r^2};$$

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$

in ihnen bedeuten r und ϑ Polarkoordinaten der Kurve in bezug auf das Zentrum C. Aus der Gleichung (10) folgt, daß die Rektifikation der gefundenen Kurve durch die Gleichung

$$(1')\qquad s = \varphi(r) + \text{const.}$$

geleistet wird.

Die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchung lassen sich zusammenfassen in den

Lehrsatz 1. Wenn sich ein materieller Punkt unter dem Einfluß einer beliebigen Zentralkraft auf einer festen Kurve bewegt, so lassen sich mittels Quadraturen unzählig viele andere Kurven angeben, bei denen unter denselben Anfangsbedingungen der Fahrstrahl vom Zentrum nach dem bewegten Punkt stets dieselbe Funktion der Zeit ist wie bei der ursprünglichen Kurve. Im besonderen ist unter diesen äquivalenten Kurven immer eine ebene Kurve enthalten, in deren Ebene das Kraftzentrum liegt.

§ 3. Die Untersuchung der äquivalenten Kurven möge für einen besonderen Fall durchgeführt werden, der wegen einer bei ihm auftretenden Äquivalenz bei Abänderung des Kraftzentrums Beachtung verdient.

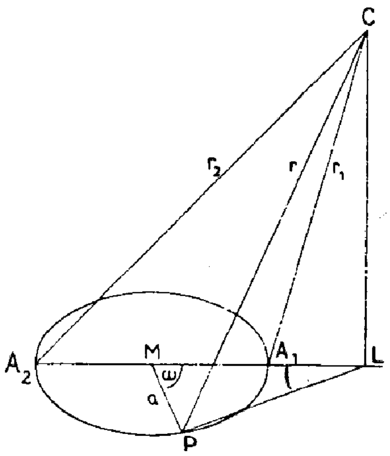

Fig. 1.

Die feste Kurve, auf der sich der materielle Punkt P bewegt, sei ein Kreis vom Halbmesser a, das Kraftzentrum C befinde sich irgendwo im Raume. Legt man durch C (Fig. 1) und den Mittelpunkt M des Kreises die Ebene, die auf der Ebene des Kreises senkrecht steht, so schneidet diese den Kreis in zwei Punkten A_1 und A_2, und es wird im allgemeinen etwa $A_1C = r_1$ das Minimum, $A_2C = r_2$ das Maximum der Entfernungen eines Punktes P des Kreises vom Zentrum C werden. Ausgenommen ist nur der Fall, daß alle Entfernungen PC einander gleich sind; dann ist aber r konstant, und man käme auf die von vornherein ausgeschlossene sphärische Kurve.

Für die folgenden Schlüsse ist es wesentlich, daß r_1 eine von Null verschiedene positive Größe ist. Der Fall, daß das Zentrum C auf dem Umfange des Kreises liegt, also mit dem Punkte A_1 zusammenfällt, bedarf einer besonderen Untersuchung; es bietet jedoch keine Schwierigkeit, die Ergebnisse, die für positives r_1 gewonnen werden, auf den Grenzfall $r_1 = 0$ zu übertragen, und dieser soll daher hier unberücksichtigt bleiben.

Da die Größen a, r_1, r_2 die bestimmenden Stücke der betrachteten geometrischen Konfiguration: Kreis nebst Zentrum sind, so wird es sich empfehlen, die Bogenlänge s des Kreises durch die Größen r, a, r_1, r_2 auszudrücken. Dies geschieht wohl am einfachsten auf folgende Art. Man fälle von C auf den Durchmesser $A_1 A_2$ oder dessen Verlängerung das Lot $CL = c$ und ziehe LP und MP. Dann ist bei Einführung des Hilfswinkels $PLM = \omega$: PMcL

$$(11) \qquad ds = a d\omega.$$

Ferner ergibt sich, wenn noch $ML = b$ gesetzt wird, aus den Dreiecken PLM und PCL die Gleichung

$$(12) \qquad r^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\omega + c^2,$$

und es ist daher

$$(13) \qquad r dr = ab \sin\omega\, d\omega,$$

so daß

$$(14) \qquad \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = \frac{r^2}{b^2 \sin^2\omega}$$

wird. Nun ist aber

$$(15) \qquad r_1^2 = (b-a)^2 + c^2,\quad r_2^2 = (b+a)^2 + c^2,$$

mithin nach (12):

$$(16) \qquad r^2 - r_1^2 = 2ab\,(1-\cos\omega),\quad r_2^2 - r^2 = 2ab\,(1+\cos\omega)$$

und daher endlich

$$(17) \qquad \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = \frac{4a^2r^2}{(r^2-r_1^2)\;(r_2^2-r^2)}.$$

Aus den Gleichungen (10) und (17) erhält man für die ebene äquivalente Kurve K die Gleichung:

$$(18) \qquad \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2 = \frac{4a^2r^2 - (r^2-r_1^2)\;(r_2^2-r^2)}{r^2\;(r^2-r_1^2)\;(r_2^2-r^2)}.$$

Es kommt jetzt darauf an, aus ihr Schlüsse in betreff der Gestalt zu ziehen, die der Kurve K je nach den Werten der Größen a, r_1 und r_2 eignet. Wie sich herausstellen wird, ist es leicht, die Veränderungen zu übersehen, die die Kurve K erfährt, wenn bei festem a die Größen r_1 und r_2 abgeändert werden. Man wird daher gut tun, zunächst r_1 und r_2 als fest, a als veränderlich anzusehen und die so entstehende Kurvenschar mit dem Parameter a zu untersuchen. Dabei ist zu beachten, daß $2a$ als Seite des Dreiecks $A_1 C A_2$ zwischen den Grenzen $r_2 + r_1$ und $r_2 - r_1$ liegen muß. Für die Grenzwerte $a_1 = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ und $a_2 = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ rückt der Kreis in eine durch das Zentrum C gehende Ebene, und die Kurve K geht in den Kreis selbst über. Die beiden auf diese Art entstehenden Kreise K_1 und K_2 mögen als Grenzkurven der Schar bezeichnet werden; sie spielen im folgenden eine wichtige Rolle.

Es ist zweckmäßig, zunächst die Abhängigkeit des Fahrstrahls r von der Bogenlänge s ins Auge zu fassen, zwischen denen die Gleichung

$$(17') \qquad \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{(r^2 - r_1^2)(r_2^2 - r^2)}{4a^2r^2}$$

besteht. Sie zeigt zunächst, daß r das Minimum r_1 und das Maximum r_2 besitzt; in den Kurvenpunkten, denen diese äußersten Werte von r zugehören, steht die Kurventangente auf dem Fahrstrahl senkrecht. Weil $\frac{dr}{ds}$ der Kosinus des Winkels ist, den Kurve und Fahrstrahl bilden, so kann das Quadrat davon höchstens gleich 1 sein; in den betreffenden Kurvenpunkten wird die Kurve vom Fahrstrahl berührt. Damit dies eintritt, muß der Ausdruck

$$(19) \qquad \Delta(r) = 4a^2r^2 - (r^2 - r_1^2)(r_2^2 - r^2)$$

verschwinden. Wird aber

$$(20) \qquad a = \tfrac{1}{2}(r_2 - r_1) + \tfrac{1}{2}u$$

gesetzt, wo $u \geqq 0$ ist, so findet man

$$(19') \qquad \Delta(r) = (r^2 - r_1 r_2)^2 + 2(r_2 - r_1)r^2 u + r^2 u^2,$$

mithin kann $\Delta(r)$ dann und nur dann verschwinden, wenn gleichzeitig

$$(21) \qquad r^2 - r_1 r_2 = 0, \quad u = 0$$

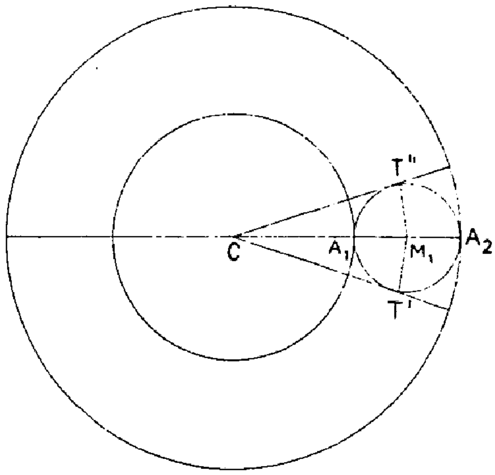

Fig. 2.

ist. Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $a = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$; unter den Kurven K hat also nur der Grenzkreis K_1 die Eigenschaft, daß er von dem Fahrstrahl aus dem Zentrum C berührt werden kann. Daß dies auch wirklich eintritt, zeigt die Figur 2. Wie aus ihr hervorgeht, hat in den beiden Berührungspunkten T′ und T″ der Fahrstrahl r genau den Wert $\sqrt{r_1 r_2}$, der sich aus der ersten der Gleichungen (21) ergibt. Daß der Kreis K_1 in der Schar der Kurven K eine ganz eigenartige Stellung einnimmt, wird sich bei den weiteren Betrachtungen immer deutlicher herausstellen.

Die Differentialgleichung (17′) läßt sich sofort integrieren. Bei der Anfangsbedingung $s = 0$, $r = r_1$ wird

$$r^2 = \tfrac{1}{2}(r_2^2 + r_1^2) - \tfrac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) \cdot \cos\frac{s}{a}. \tag{22}$$

Mithin ist der Fahrstrahl eine periodische Funktion der Bogenlänge, und zwar mit der Periode $2\pi a$; dies ist gerade der Umfang des betrachteten Kreises vom Halbmesser a. Wenn s von 0 bis πa zunimmt, so geht r beständig wachsend von r_1 bis r_2; wenn s weiter von πa bis $2\pi a$ zunimmt, so geht r beständig abnehmend von r_2 nach r_1 usw. Die Kurve liegt daher in dem Ringe zwischen den beiden Kreisen, die um C mit den Halbmessern r_1 und r_2 beschrieben sind, und weil $\frac{dr}{ds}$ für $r = r_1$ und $r = r_2$ verschwindet, so werden diese beiden Kreise abwechselnd von der Kurve berührt.

Mit Hilfe der Gleichung (18) für $\frac{d\vartheta}{dr}$ läßt sich jetzt erschließen, daß Kurvenbogen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Berührungspunkten mit demselben Kreise kongruent sind und daß sie durch den dazwischen liegenden Berührungspunkt mit dem anderen Kreise in symmetrische Hälften geteilt werden. Aus den Gleichungen (17′), (18) und (19) erhält man nämlich

$$\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 = \frac{\Delta(r)}{4a^2 r^4}. \tag{23}$$

Wenn daher die Veränderlichkeit von a auf das Intervall

$$\tfrac{1}{2}(r_2 - r_1) < a \leqq \tfrac{1}{2}(r_2 + r_1) \tag{24}$$

beschränkt wird, so ist $\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2$ stets von Null verschieden, und es darf daher unbeschadet der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß $\frac{d\vartheta}{ds}$ selbst stets positiv ist. Folglich wird das Azimut ϑ mit wachsendem s beständig zunehmen, sodaß beim Durchlaufen der Kurve der Fahrstrahl sich beständig in demselben Sinne herumdreht, und zwar ist nach (22) und (23) dieses Azimut das Integral einer periodischen, geraden Funktion von s mit der Periode $2\pi a$; hieraus folgt sofort die Richtigkeit der Behauptung.

Von Wichtigkeit ist auch der Winkel Θ, um den ϑ zunimmt, wenn s von 0 bis πa wächst. Nach der Gleichung (18) ist

$$(25) \qquad \Theta = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{\Delta(r)}{(r^2 - r_1^2)\,(r_2^2 - r^2)}} \cdot \frac{dr}{r};$$

hierin ist wieder

$$(19) \qquad \Delta(r) = 4a^2 r^2 - (r^2 - r_1^2)\,(r_2^2 - r^2).$$

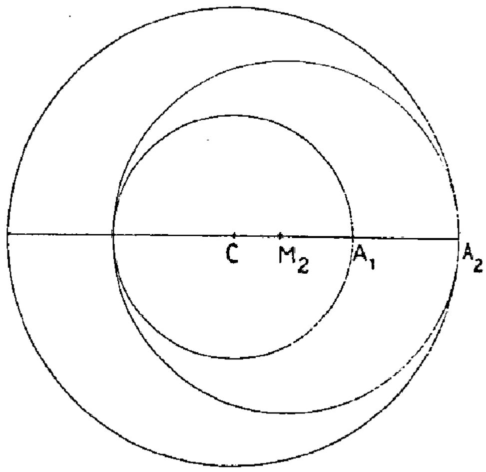

Fig. 3.

Die Form des Integrals zeigt, daß Θ mit wachsendem a zunimmt. Mithin hat Θ seinen größten Wert für $a = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$, also für den Grenzkreis K_2. Wie die Figur 3 erkennen läßt, ist dieses Maximum von Θ gleich π. Läßt man a von dem größten Werte, $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$, asymptotisch gegen den kleinsten Wert, $\frac{1}{2}(r_2 - r_1)$, abnehmen, so nimmt Θ von π aus beständig ab und nähert sich asymptotisch dem Grenzwerte.

$$(26) \qquad \Theta_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\pm (r^2 - r_1 r_2)\,dr}{r\sqrt{(r^2 - r_1^2)\,(r_2^2 - r^2)}};$$

hierin ist das Vorzeichen des Zählers so zu wählen, daß er stets positiv ausfällt. Bei dieser Festsetzung wird

$$(26') \qquad \Theta_1 = 2 \arcsin \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

Dagegen ist, wie die Figur 2 zeigt, für den Grenzkreis K_1 der Wert von Θ gleich Null; dieser Wert kommt heraus, wenn man in dem Integral (26) als Zähler $(r^2 - r_1 r_2)\,dr$ nimmt, also das Vorzeichen $\pm$ wegläßt.

Die Untersuchung der Kurven K bliebe unvollständig, wenn nicht auch die Krümmungseigenschaften in Betracht gezogen würden. Eine leichte Rechnung ergibt für den Krümmungshalbmesser ρ den Ausdruck

$$(27) \qquad \rho = 2a \cdot \frac{\sqrt{\Delta(r)}}{N(r)},$$

wo zur Abkürzung

$$(28) \qquad 4a^2 + 2r^2 - r_1^2 - r_2^2 = N(r)$$

gesetzt ist. Wenn der Wert $a = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ ausgeschlossen wird, so hat $\Delta(\mathrm{r})$ nur positive Werte, und man darf der Quadratwurzel $\sqrt{\Delta(\mathrm{r})}$ unbedenklich das positive Vorzeichen beilegen. Dann ist ρ positiv oder negativ, je nachdem $\mathrm{N}(\mathrm{r})$ positiv oder negativ ist, und es sind daher folgende vier Fälle zu unterscheiden.

I. Es ist

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{r}_2^2 - \mathrm{r}_1^2} < \mathrm{a} \leqq \tfrac{1}{2}(\mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_1). \tag{29}$$

Dann ist $\mathrm{N}(\mathrm{r})$ stets größer als Null; die Kurve ist, von C aus gesehen, stets konkav und besitzt keine Wendepunkte.

II. Es ist

$$\mathrm{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{r}_2^2 - \mathrm{r}_1^2}. \tag{30}$$

Dann ist $\mathrm{N}(\mathrm{r}) \geqq 0$. Es verschwindet für $\mathrm{r} = \mathrm{r}_1$. In den entsprechenden Kurvenpunkten wird die Kurve von der Tangente in vier zusammenfallenden Punkten berührt; diese Punkte sind also keine Wendepunkte.

III. Es ist

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1) < \mathrm{a} < \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{r}_2^2 - \mathrm{r}_1^2}. \tag{31}$$

Dann verschwindet $\mathrm{N}(\mathrm{r})$ für einen Wert r_w zwischen r_1 und r_2, und wenn a das Intervall (31) abnehmend durchläuft, nimmt r_w von r_1 bis zu dem Werte $\sqrt{\mathrm{r}_1 \mathrm{r}_2}$ zu, dem es sich asymptotisch nähert. In jedem der kongruenten Stücke, aus denen sich die Kurve K zusammensetzt und in dem r von r_2 über r_1 nach r_2 geht, hat diese je zwei Wendepunkte, die zu demselben Werte r_w des Fahrstrahls gehören und daher symmetrisch zu einander liegen. Wenn a dem Werte $\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{r}_2^2 - \mathrm{r}_1^2}$ nahe liegt, liegt r_w nahe an r_1, und die beiden Wendepunkte sind dem Punkte des Kurvenstücks, in dem $\mathrm{r} = \mathrm{r}_1$ ist, benachbart. Wenn a abnimmt, rücken die Wendepunkte auseinander und streben asymptotisch einer äußersten Lage zu, bei der $\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{r}_1 \mathrm{r}_2}$ ist. Wie der Ausdruck (17′) für $\left(\frac{d\mathrm{r}}{ds}\right)^2$ zeigt, bildet die Wendetangente mit dem Fahrstrahl zuerst einen Winkel, der nahe an 90^0 liegt. Dieser Winkel wird mit abnehmendem a immer kleiner und nähert sich asymptotisch der Grenze Null.

IV. Es ist

$$\mathrm{a} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1). \tag{32}$$

Dann geht die Kurve K in den Grenzkreis K_1 über; siehe Figur 2. Für $\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{r}_1 \mathrm{r}_2}$ erhält man jetzt die Punkte T′ und T″, in denen die von C aus an den Kreis K_1 gezogenen Tangenten diesen berühren. Die Punkte T' und T'' sind keine Wendepunkte im üblichen Sinne des Wortes; sie haben aber die Eigenschaft, daß die Kurve, von C aus gesehen, in ihnen ihren Charakter ändert und von der Konvexität zur Konkavität übergeht. Dies kommt auch in der Formel (24) für ρ dadurch zum Ausdruck, daß man bei positiver Wahl der Quadratwurzel in dem Intervall

$$r_2 \leqq r < \sqrt{r_1 r_2} \tag{33}$$

einen positiven Wert von ρ, in dem Intervall

$$\sqrt{r_1 r_2} < r \leqq r_1 \tag{34}$$

einen negativen Wert von ρ erhält, und zwar ergibt sich zuerst der Wert $+a$, darauf der Wert $-a$. Für $r = \sqrt{r_1 r_2}$ erscheint ρ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$.

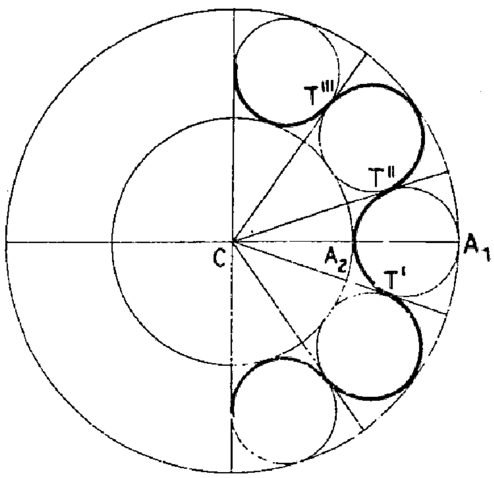

Fig. 4.

Wenn a beständig abnehmend sich asymptotisch dem Grenzwerte $\frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ nähert, so nähern sich die zugehörigen Kurven K asymptotisch einer Grenzkurve K', die von dem Grenzkreise K_1 wesentlich verschieden ist. Nach dem Vorhergehenden erhält man diese Grenzkurve K' folgendermaßen: Man nehme zuerst (Fig. 4) den Kreisbogen $T'A_2T''$ und lasse auf ihn in T'' den um den Winkel $T'A_2T'' = \Theta_1$ gedrehten Kreisbogen $T'A_1T''$ folgen. Hieran schließe sich in T''' der um den Winkel 2Θ gedrehte Kreisbogen $T'A_2T''$, daran der um den Winkel 3Θ gedrehte Kreisbogen $T'A_1T''$ usw. Auf diese Art entsteht eine stetig gekrümmte Kurve, welche die Punkte $T', T'', T''' \ldots$ zu Wendepunkten hat.

Hiermit ist die Untersuchung der Kurvenschar K beendet und folgender Lehrsatz gewonnen:

Lehrsatz 2. Ein materieller Punkt sei gezwungen, sich auf dem Umfange eines Kreises vom Halbmesser a zu bewegen, und es wirke auf ihn eine Kraft, die von einem beliebig im Raume gelegenen Zentrum herrührt. Wird die Entfernung des Punktes vom Zentrum mit r bezeichnet und sind r_1 und r_2 die kleinsten und größten

Werte, die r auf dem Umfang annimmt, so wird der Fahrstrahl r dieselbe Funktion der Zeit t, wie wenn sich ein materieller Punkt unter denselben Anfangsbedingungen auf einer Kurve K bewegt, die in einer durch das Zentrum gehenden Ebene liegt und in Polarkoordinaten r, ϑ mit dem Zentrum als Pol durch die Gleichung

$$\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2 = \frac{4a^2r^2 - (r^2 - r_1^2)\,(r_2^2 - r^2)}{r^2(r^2 - r_1^2)\,(r_2^2 - r^2)}$$

erklärt wird. Bei festen Werten von r_1 und r_2 und veränderlichem Halbmesser a bilden die Kurven K eine Schar von folgenden Eigenschaften: Die Kurven liegen in dem Ringe, der von den um das Zentrum mit den Halbmessern r_1 und r_2 beschriebenen Kreisen begrenzt wird, und berühren abwechselnd diese Kreise. Kurvenbogen zwischen je zwei aufeinander folgenden Berührungspunkten mit demselben Kreise sind kongruent und werden durch den dazwischen liegenden Berührungspunkt mit dem anderen Kreise in symmetrische Hälften geteilt. Wenn a von dem größten zulässigen Werte $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ abnimmt, erhält man zunächst Kurven ohne Wendepunkte. Mit dem Werte $a = \frac{1}{2}\sqrt{r_2^2 - r_1^2}$ bekommt die Kurve in jedem der kongruenten Stücke je zwei symmetrisch gelegene Wendepunkte, und so bleibt es, wenn a sich asymptotisch dem kleinsten zulässigen Werte $\frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ nähert; die Kurve nähert sich dabei asymptotisch einer aus Kreisbogen zusammengesetzten Kurve mit denselben Eigenschaften. Für den kleinsten Wert von a selbst tritt jedoch eine Unstetigkeit ein; die Kurve K geht in den Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}(r_2 - r_1)$ über, dem jene Kreisbogen entnommen waren.

Die Kurven K gehören einer Klasse von Kurven an, die wohl eine planmäßige Untersuchung verdienten, weil sie nicht nur schöne geometrische Eigenschaften besitzen, sondern auch in der Mechanik vielfach auftreten, der Kurvenklasse nämlich, für die in Polarkoordinaten r, ϑ eine Differentialgleichung

$$\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2 = F(r) \tag{4'}$$

besteht, wo F eine eindeutige Funktion von r bezeichnet. Hierzu gehören zum Beispiel die Projektionen der Bahnen eines der Schwere unterworfenen Punktes, der sich auf einer Kugelfläche bewegt, auf eine horizontale Ebene, ferner die Herpolhodie beim kräftefreien Kreisel.

§ 4. Wenn sich ein materieller Punkt auf einem Kreise bewegt und auf ihn eine Zentralkraft wirkt, die einer beliebigen Potenz der Entfernung des bewegten Punktes von einem irgendwo im Raume liegenden Kraftzentrum proportional ist, so besteht eine bemerkenswerte Äquivalenz, bei der der Kreis festgehalten, dagegen das Zentrum abgeändert wird. Im besonderen ermöglicht es diese Äquivalenz, das Problem durch ein anderes zu ersetzen, bei dem das Kraftzentrum in der Ebene des Kreises liegt.

Die Bezeichnungen seien dieselben wie im § 3, nur möge jetzt dem Zentrum C eine Masse μ zugeschrieben und demgemäß die Kräftefunktion proportional μ angenommen werden. Außerdem sollen die Anfangsbedingungen ersichtlich gemacht werden. Man gelangt so zu dem Ausdruck

$$\Pi(r) = \mu U(r) - \mu U(r_0) \tag{35}$$

und erhält für den Fahrstrahl r die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{(r^2 - r_1^2)(r_2^2 - r^2)[v_0^2 + 2\mu U(r) - 2\mu U(r_0)]}{4a^2r^2}. \tag{36}$$

An Stelle von r möge als neue Veränderliche der reduzierte Fahrstrahl q durch die Gleichung

$$q = \frac{r}{r_1} \tag{37}$$

eingeführt werden. Die Werte von q liegen zwischen 1 und

$$\alpha = \frac{r_2}{r_1}, \tag{38}$$

und q genügt der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \frac{(q^2 - 1)(\alpha^2 - q^2)[v_0^2 + 2\mu U(r_1 q) - 2\mu U(r_0)]}{4a^2q^2}. \tag{39}$$

Neben dem Zentrum C werde ein zweites Zentrum C′ betrachtet, zu dem für den gegebenen Kreis der Fahrstrahl r′, die bestimmenden Stücke r'_1, r'_2 und die Kräftefunktion $\mu' U(r')$ gehören, so daß das Kraftgesetz beibehalten, aber die Masse μ durch die Masse μ' ersetzt wird. Dann ist der zugehörige reduzierte Fahrstrahl

$$q' = \frac{r'}{r'_1}; \tag{37'}$$

seine Werte liegen zwischen 1 und

(38′) $$\alpha' = \frac{r'_2}{r'_1},$$

und q' genügt der Differentialgleichung

(39′) $$\left(\frac{dq'}{dt}\right)^2 = \frac{(q'^2 - 1)(\alpha'^2 - q'^2)[v_0^2 + 2\mu' U(r'_1 q') - 2\mu' U(r'_0)]}{4a^2 q'^2}.$$

Durch die Forderung, daß für die beiden durch die Differentialgleichungen (39) und (39′) erklärten Bewegungen der reduzierte Fahrstrahl dieselbe Funktion der Zeit t sein soll, werden die Bewegungen ineinander transformiert. Damit diese Forderung erfüllt ist, muß zunächst

(40) $$\alpha = \alpha'$$

sein, das heißt, es muß die Proportion gelten

(41) $$r_2 : r_1 = r'_2 : r'_1.$$

Man findet daher den geometrischen Ort der Zentra C′, bei denen Äquivalenz stattfinden kann, indem man die Strecke $A_1 A_2$ (Fig. 5)

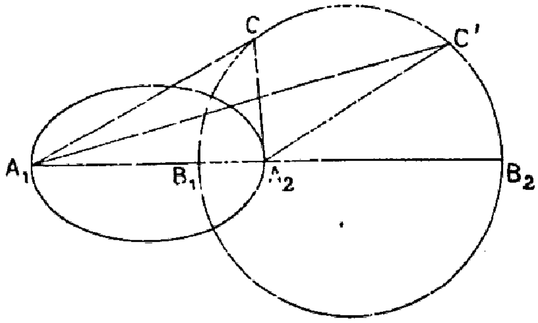

Fig. 5.

innerlich und äußerlich in dem Verhältnis $A_1 C : A_2 C$ teilt und in der Ebene durch A_1, A_2, C um die Strecke zwischen den Teilpunkten B_1 und B_2 als Durchmesser den Kreis beschreibt.

Die Bedingung, daß C′ auf diesem Kreise liegt, ist zwar notwendig, aber noch nicht hinreichend. Damit die rechten Seiten der Differentialgleichungen (39) und (39′) übereinstimmen, muß außerdem

(42) $$\mu U(r_1 q) = \mu' U(r'_1 q),$$
(43) $$\mu U(r_0) = \mu' U(r'_0)$$

sein. Aus (42) folgt, daß U(r) eine homogene Funktion von r ist, mithin ist es eine Potenz von r, etwa

(44) $$U(r) = r^n.$$

Ferner muß die Masse μ' aus der Gleichung

$$\mu r_1^n = \mu' r_1'^n \tag{45}$$

und der Anfangswert r'_0 aus der Gleichung

$$r_0 : r_1 = r'_0 : r'_1 \tag{46}$$

bestimmt werden, die besagt, daß die reduzierten Fahrstrahlen q und q' zur Zeit $t = 0$ denselben Wert haben.

Wenn auch auf diese Art jeder Bewegung, bei der das Zentrum C mit der Masse μ wirkt, eine Bewegung, bei der das Zentrum C' mit der Masse μ' wirkt, zugeordnet ist, die durch dieselbe Funktion der Zeit beschrieben wird, so leidet die so gewonnene Transformation doch an einem erheblichen Mangel. Die einander entsprechenden Bewegungen beginnen nämlich zur Zeit $t = 0$ im allgemeinen an verschiedenen Punkten, weil zu gleichen Werten von q und q' im allgemeinen verschiedene Punkte des Kreises vom Halbmesser a gehören. Damit auch die Anfangspunkte der Bewegung übereinstimmen, müßte man den bewegten Punkt seinen Lauf an einer der Stellen A_1 oder A_2 beginnen lassen. Dann fragt sich aber, ob man auch die Gesamtheit der möglichen Bewegungen des Punktes erhält? Wäre das nicht der Fall, gäbe es also Bewegungen, bei denen der Punkt niemals nach einer der Stellen A_1 oder A_2 gelangt, so würde die besondere Wahl des Anfangspunktes zur Folge haben, daß nur ein Teil der möglichen Bewegungen transformiert wird. Die genauere Untersuchung wird zeigen, daß jene Frage zu bejahen ist; allerdings mit einer gewissen Einschränkung, insofern, je nachdem die Bewegung in A_1 oder A_2 beginnen soll, die Ruhe in A_2 oder A_1 ausgeschlossen wird. Wenn man sich jedoch auf die wirklichen Bewegungen beschränkt, so muß der Punkt, je nachdem der Exponent n positiv oder negativ ist, stets nach A_2 oder A_1 gelangen. Der Beweis beruht auf einem allgemeineren Satze, der hier mitgeteilt werden soll, weil er auch an und für sich von Wichtigkeit ist. Es gilt nämlich der

Lehrsatz 3. Eine geschlossene Kurve K habe die Eigenschaft, daß die Entfernung r ihrer Punkte P von einem festen Punkte C im Raume nur einen kleinsten Wert r_1 und einen größten Wert r_2 besitzt. Auf der Kurve bewege sich ein materieller Punkt unter dem Einfluß einer von dem Zentrum C herrührenden Zentralkraft, deren Kräftefunktion $\Pi(r)$ auf K ebenfalls nur einen kleinsten und einen größten Wert besitze; diese äußersten Werte sind notwendig $\Pi(r_1)$ und $\Pi(r_2)$. Unter den angegebenen Voraussetzungen erhält man alle möglichen Bewegungen des Punktes, wenn man die Stelle des Maximums der Kräftefunktion zum Anfangspunkt der Bewegung macht; ausgeschlossen bleibt dann nur die Ruhe des Punktes an der Stelle des Minimums der Kräftefunktion.

Bei denselben Bezeichnungen wie in § 2 erfolgt die Bewegung des Punktes gemäß der Differentialgleichung

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2v_0^2 + 2\Pi(r); \tag{2'}$$

die additive Konstante der Kräftefunktion ist dabei so bestimmt worden, daß $\Pi(r)$ in dem zunächst beliebig zu wählenden Anfangspunkt der Bewegung verschwindet, was auf die Lage der Maxima und Minima keinen Einfluß hat.

Jetzt sind drei Fälle zu unterscheiden:

I. Der Ausdruck $2v_0^2 + 2\Pi(r)$ ist auf der ganzen Kurve größer als Null. Dann behält $\frac{ds}{dt}$ stets das Vorzeichen von v_0, und der Punkt bewegt sich immer in demselben Sinne durch die Kurve, sodaß die Stelle des Maximums der Kräftefunktion unzählig oft überschritten wird. Damit ist die Behauptung für den Fall I bewiesen.

II. Es gibt einen Wert von r zwischen r_1 und r_2, diese Werte selbst ausgeschlossen, für den der Ausdruck $v_0^2 + 2\Pi(r)$ verschwindet. Weil dieser Ausdruck, wenn r von r_1 bis r_2 wächst, nach den Voraussetzungen beständig zunimmt oder beständig abnimmt, so kann es nur diesen einen Wert von r geben, der bewirkt, daß $\frac{ds}{dt}$ verschwindet, und zwar geschieht das in den beiden Punkten U' und U'' der Kurve, die diesem Werte von r eindeutig zugeordnet sind. Durch die Punkte U' und U'' wird die Kurve in zwei Teile zerlegt. In dem einen, dem die Stelle des Minimums von $\Pi(r)$ angehört, ist der Ausdruck $v_0^2 + 2\Pi(r)$ negativ, in dem andern, der die Stelle des Maximums von $\Pi(r)$ aufweist, positiv. Eine Bewegung des Punktes ist daher nur in diesem zweiten Teile der Kurve möglich. Die Art der Bewegung hängt davon ab, wie sich das vom Anfangspunkt der Bewegung aus zu erstreckende Integral

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{(v_0^2 + 2\Pi(r)}} \tag{47}$$

verhält, wenn man sich einem der Punkte U′ oder U″ nähert. Bleibt das Integral endlich, so erhält man einen Umkehrpunkt; wächst es über alle Grenzen, so findet asymptotische Annäherung statt. Bei jeder der vier Möglichkeiten, zu denen man auf diese Weise gelangt, gehört die Stelle des Maximums der Kräftefunktion zum Bewegungsgebiet des Punktes, und damit ist die Behauptung für den Fall II bewiesen.

III. Der Ausdruck $v_0^2 + 2\Pi(r)$ verschwindet für einen der Werte r_1 oder r_2. Geschieht es für die Stelle des Maximums der Kräftefunktion, so ist dieser Ausdruck sonst überall negativ, mithin muß der materielle Punkt an dieser Stelle ruhen, und zwar befindet er sich in stabilem Gleichgewicht. Geschieht es für die Stelle des Minimums, so kann der Punkt dort ebenfalls ruhen, und zwar in labilem Gleichgewicht. Der Punkt kann sich aber auch bewegen, weil der Ausdruck $v_0^2 + 2\Pi(r)$, abgesehen von der Stelle des Minimums, überall größer als Null ist. Dann gehört die Stelle des Maximums zu seinem Bewegungsgebiet. Damit ist der Fall III erledigt und der Beweis vollendet.

Der Lehrsatz 3 läßt sich in Beziehung bringen zu einem bekannten Theorem, das J. Hadamard für die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer krummen Fläche gefunden hat[1]). Es wird vorausgesetzt, daß eine Kräftefunktion existiert und daß diese auf den Bahnen des bewegten Punktes im allgemeinen unendlich oft maximale und minimale Werte erhält. Während man über die Verteilung der Minima nichts aussagen kann, ist es möglich, lediglich auf Grund der Kenntnis des Linienelements der Fläche und der Kräftefunktion eine Region der Fläche anzugeben, die sämtliche Stellen der Maxima in sich schließt; diese Region kann übrigens aus getrennten Stücken bestehen. Weil der bewegte Punkt im Laufe der Zeit immer wieder in das Gebiet der Maxima zurückkehrt, wird dieses von Hadamard anziehende Region genannt. Hadamard selbst hat darauf hingewiesen, daß der anziehenden Region bei der Bewegung eines materiellen Punktes auf einer festen Kurve die Gesamtheit der Punkte entspricht, in denen die Kräftefunktion ein Maximum besitzt. Im allgemeinen besteht die Bewegung

[1]) J. Hadamard, *Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique*, Journ. de math. (5) 3 (1897), S. 331; siehe besonders S. 338—339.

des Punktes in Schwingungen um eine dieser Stellen stabilen Gleichgewichts, und dabei muß der Punkt unzählig oft zu der betreffenden Stelle des Maximums zurückkehren. Im allgemeinen wird es daher nicht möglich sein, eine Anfangslage anzugeben, die, bis auf singuläre Fälle, alle möglichen Bewegungen des Punktes liefert; damit dies eintritt, werden vielmehr über Kurve und Kräftefunktion besondere Voraussetzungen gemacht werden müssen, wie das im Lehrsatz 3 geschehen ist.

Es bleibt übrig, den Lehrsatz 3 auf den Fall anzuwenden, daß die Kurve ein Kreis vom Halbmesser a ist und die Kräftefunktion die Form μr^n hat. Da die triviale Annahme $n = 0$ ausscheidet, sind nur zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

I. Der Exponent n ist negativ. Dann ist die Stelle A_1, an der r den kleinsten Wert hat, die Stelle des Maximums der Kräftefunktion, und man erhält die Gesamtheit der Bewegungen des Punktes, wenn $r_0 = r_1$ gesetzt wird. Hieraus folgt $r'_0 = r'_1$, so daß die zugeordnete Bewegung ebenfalls im Punkte A_1 beginnt.

II. Der Exponent n ist positiv. Dann ist die Stelle A_2 die Stelle des Maximums der Kräftefunktion. Man hat daher in den vorher angestellten Betrachtungen überall r_1 und r_2 zu vertauschen; im besonderen beginnen jetzt die Bewegungen im Punkte A_2.

Hiermit ist als Ergebnis folgender Lehrsatz gewonnen:

Lehrsatz 4. Ein materieller Punkt bewege sich auf einem Kreise und werde von einem irgendwo im Raume befindlichen Zentrum der Masse μ mit einer Kraft angezogen, deren Kräftefunktion der n-ten Potenz der Entfernung des Punktes vom Zentrum proportional ist. Wird der Durchmesser des Kreises, in dessen Endpunkten die Entfernung ihren größten und kleinsten Wert annimmt, innerlich und äußerlich im Verhältnis dieser beiden Werte geteilt und in der Ebene, die senkrecht zur Ebene des Kreises steht und durch die Teilpunkte geht, mit der Strecke zwischen den Teilpunkten als Durchmesser der Kreis beschrieben, so läßt sich jeder Punkt C′ dieses Kreises mit einer solchen Masse μ' versehen, daß bei demselben Anziehungsgesetz die Bewegungen in bezug auf C den Bewegungen in bezug auf C′ äquivalent sind, und zwar sind dabei die Bewegungen einander zugeordnet,

2*

die, je nachdem der Exponent der Potenz der Entfernung positiv oder negativ ist, aus dem Punkte der größten oder der kleinsten Entfernung mit derselben Anfangsgeschwindigkeit begonnen werden. Als dieselben Funktionen der Zeit ergeben sich nämlich die durch die größte oder kleinste Entfernung geteilten Fahrstrahlen vom Zentrum nach dem bewegten Punkte. Wird im besonderen als neues Zentrum C' einer jener beiden Teilpunkte gewählt, so ergibt sich die Zurückführung des Problems auf ein äquivalentes, bei dem das Zentrum in der Ebene des Kreises vom Halbmesser a liegt.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen erkennen, daß man dem scheinbar erschöpften Kapitel der Bewegung eines materiellen Punktes auf einer festen Kurve neue Seiten abgewinnen kann, indem der Begriff der *analytischen Äquivalenz dynamischer Probleme* zu Hilfe genommen wird. Es ist zu erwarten, daß sich nach dieser Richtung noch weitere Sätze ableiten lassen werden.