

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER
NATURWISSENSCHAFTLICH-MATHEMATISCHEN
GESAMTFAKULTÄT
DER
RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT
HEIDELBERG

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Oliver Sterz
aus Berlin

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Dezember 2003

Modellierung und Numerik zeitharmonischer Wirbelstromprobleme in 3D

Whitney-Elemente, adaptive Mehrgitterverfahren,
Randelemente

1. Gutachter: Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Willi Jäger

2. Gutachter: Prof. Dr. Gabriel Wittum

Für Susanne, Leonie und Dominik

Danksagung. Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Interdisziplinären Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen der Universität Heidelberg in Zusammenarbeit mit dem deutschen ABB Forschungszentrum.

Danken möchte ich meinen Betreuern Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Willi Jäger und Prof. Dr. Gabriel Wittum, die diese Arbeit ermöglicht und mit Interesse begleitet haben. Ein besonderer Dank gilt auch Prof. Dr. Ralf Hiptmair von der ETH Zürich, der mir bei Fragen stets zur Seite stand und von dem ich bei zahlreichen Diskussionen viel lernen konnte. Weiter danke ich Prof. Dr. Christoph Schwab von der ETH Zürich für die vielen Gespräche und die Zusammenarbeit bei der Randlelementmethode.

Dem deutschen ABB Forschungszentrum danke ich für die finanzielle Unterstützung und die Möglichkeit, vorort bei der Entwicklung der hauseigenen Simulationssoftware mitzuwirken. Insbesondere erwähnen möchte ich Dr. Berthold Schaub, Prof. Zoran Andjelic und Dr. Andreas Blaszczyk. Weiteren Danke möchte ich meinem Zimmerkollegen am ABB Forschungszentrum Dr. Björn Matthias für die gute Arbeitsatmosphäre aussprechen. Der ABB Calor Emag Hochspannung GmbH danke ich für die Überlassung der CAD-Daten für die Testrechnungen.

Diese Arbeit wäre ohne die gute Zusammenarbeit innerhalb der Gruppe Technische Simulation am IWR nicht möglich gewesen. Besonderen Dank schulde ich Dr. Klaus Johannsen für zahlreiche Diskussionen über die Implementierung in \mathcal{UG} und die Durchsicht großer Teile der Arbeit. Dr. Nikolas Neuß danke ich für die geduldige Beantwortung vieler mathematischer Fragen und Achim Gordner für seine immense Hilfsbereitschaft bei der Lösung von Computerproblemen. Weiterhin hat die hervorragende Zusammenarbeit mit meinem Zimmerkollegen Andreas Hauser die Umsetzung des CAD-Interfaces für \mathcal{UG} möglich gemacht.

Sprachlich durchgesehen haben die Arbeit Elfriede Brederecke und meine Frau Susanne. Meiner Familie danke ich für das Verständnis, das sie mir beim Schreiben dieser Arbeit entgegengebracht hat.

Heidelberg, im November 2003

Oliver Sterz

Zusammenfassung der Ergebnisse. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der numerischen Lösung zeitharmonischer Wirbelstromprobleme in drei Raumdimensionen und Aspekten der mathematischen Modellierung von Wirbelströmen. Ziel ist sowohl die Entwicklung eines effizienten Finite-Element-Codes unter Verwendung adaptiver Mehrgitterverfahren als auch die Entwicklung einer Randelementmethode für Impedanzrandbedingungen.

Das zugrundeliegende Wirbelstrommodell ist eine Näherung der Maxwell'schen Gleichungen und beschreibt niederfrequente elektromagnetische Phänomene, bei denen die magnetische Energie dominiert. Innerhalb der Arbeit wird eine Schranke für den Modellierungsfehler des Wirbelstrommodells hergeleitet, wobei die auftretenden Konstanten allein von der Geometrie abhängen. Aus der Fehlerbetrachtung folgt, daß die in der Ingenieurliteratur anerkannten Bedingungen (charakteristische Größe \ll Wellenlänge, hohe Leitfähigkeit) hinreichend für die Anwendbarkeit des Wirbelstrommodells sind. Damit liegt — nach bestem Wissen des Autors — zum erstenmal eine mathematische Rechtfertigung des Wirbelstrommodells vor, die nicht auf einer asymptotischen Betrachtung für den Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ [ABN00, Alo99] basiert. Zusätzlich wird gezeigt, daß der Modellierungsfehler des elektrischen Feldes in der $L^2(\Omega)$ -Norm mit $\mathcal{O}(\omega^2)$ für $\omega \rightarrow 0$ konvergiert, falls keine galvanische Kopplung zwischen Stromquelle und Leiter existiert (induzierte Wirbelströme), ansonsten konvergiert der Fehler mit $\mathcal{O}(\omega)$. Die Ergebnisse werden in Zusammenhang mit den zitierten Arbeiten diskutiert.

Weiterhin wird eine systematische Studie durchgeführt, wie externe Strom- und Spannungsquellen im Wirbelstrommodell berücksichtigt werden können. Dabei wird zwischen lokalen Anregungen an Kontakten, vorgegebenen Generatorstromverteilungen und nicht-lokalen Varianten unterschieden. Es wird gezeigt, daß letztere das Faradaysche Gesetz entlang von sogenannten Seifert-Flächen verletzen und keine Lösung für das elektrische Feld in $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ zulassen. Eine physikalische Interpretation wird gegeben.

Der Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Entwicklung einer adaptiven Finite-Element-Software, die auf der Simulationsumgebung \mathcal{UG} [BBJ⁺97] aufbaut. Als Grundlage dient eine auf dem elektrischen Feld basierende, sogenannte „ungeeichte“ Variationsformulierung. Die Lösung ist bei Anwesenheit nichtleitender Gebietsteile nicht eindeutig und repräsentiert für diesen Fall eine Äquivalenzklasse von elektrischen Feldern, die alle auf dasselbe Magnetfeld führen, wobei letzteres die im Wirbelstrommodell relevante Größe darstellt. Zur Diskretisierung werden $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ -konforme Whitney-Elemente verwendet (auch Kantenelemente oder Nédélec-Elemente genannt). Für die adaptive Verfeinerung wird der in der Simulationsumgebung \mathcal{UG} verfügbare „Rot/Grün-Verfeinerungsalgorithmus“ verwendet. Nach einer Rechnung werden jeweils die zu verfeinernden Elemente mit Hilfe eines Fehlerschätzers [BHHW00] ausgewählt. Durch dieses adaptive Verfahren ist es möglich, auch stark lokale Phänomene wie den Skineffekt oder Singularitäten an Kanten aufzulösen. Zur Lösung der entstehenden Gleichungssysteme kommen Mehrgitterverfahren zum Einsatz, da sie eine optimale Komplexität besitzen und die derzeit schnellsten Lösungsverfahren darstellen. Zur Glättung wird dabei ein in [Hip99] entwickeltes Verfahren benutzt, weil Standardglättungsverfahren bei dem hier vorliegenden $\mathbf{rot\ rot}$ -Operator nicht anwendbar sind. Das zeitharmonische Wirbelstrommodell wird nicht von der Theorie des verwendeten Mehrgitterverfahrens abgedeckt. Jedoch belegen die in der Arbeit durchgeführten systematischen numerischen Experimente, daß die Konvergenzraten des Mehrgitterverfahrens unabhängig von der Gitterweite von Eins weg beschränkt sind. Aufgrund der Adaptivität wurde das Mehrgitterverfahren als *lokales* Mehrgitterverfahren implementiert, bei dem die Glättung sich auf verfeinerte Bereiche beschränkt. Dies ist notwendig, um die optimale Komplexität des Verfahrens zu gewährleisten. Implementiert wird das lokale Mehrgitterverfahren mit Hilfe von lokalen Gittern, die i.a. nicht das ganze Gebiet überdecken. Es wird gezeigt, daß das verwendete Glättungsverfahren gegenüber dem Standardfall erweiterte lokale Gitter erfordert. Die Lösbarkeit des singulären Gleichungssystems wird durch eine angemessene Berechnung der Stromquellen sichergestellt. Um die Kernanteile während des Lösungsprozesses zu kontrollieren, wird eine angenäherte Projektion auf die diskret

divergenzfreien Felder eingesetzt. Das Gesamtverfahren wird auf realistische Problemstellungen angewendet. Zur Validierung wird das TEAM 7 Benchmark Problem herangezogen. Das berechnete Magnetfeld zeigt eine hervorragende Übereinstimmung mit den Meßwerten. Weiterhin wird der Prototyp einer gasisolierten Schaltanlage der Firma ABB erfolgreich berechnet. Diese zeichnet sich durch eine sehr komplexe Geometrie aus, Details der CAD Geometrie werden vollständig mitberücksichtigt.

Für Wirbelstromprobleme, die auf sehr geringe Eindringtiefen führen, wird eine Randelementmethode realisiert. Hier wird der Einfluß des leitfähigen Gebietes durch Impedanzrandbedingungen repräsentiert. Daraus resultiert die Lösung einer Außenraumaufgabe statt eines Transmissionsproblems. Es wird eine auf dem Magnetfeld basierende Formulierung des Wirbelstrommodells verwendet und gezeigt, wie sich das Problem als eine skalare Integrodifferentialgleichung auf dem Rand des Leiters umformulieren läßt. Existenz und Eindeutigkeit werden bewiesen; ein Galerkin-Verfahren mit stetigen, stückweise linearen Randelementen wird zur Diskretisierung verwendet. Eine Fehlerabschätzung führt auf eine $\mathcal{O}(h^{\frac{5}{2}})$ -Konvergenz der Ohmschen Verluste. Das Ergebnis wird anhand eines numerischen Beispiels bestätigt. Anschließend werden die Grenzfälle unendlicher Leitfähigkeit und unendlicher Permeabilität betrachtet.

Die „einfachsten“ Dinge sind sehr kompliziert — man kann sich nicht genug darüber wundern.

*(F. Nietzsche über die
Implementierung lokaler
Mehrgitterverfahren)*

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung der Ergebnisse	viii
Einleitung	1
1 Mathematische Grundlagen	5
1.1 Räume und Spuren	5
1.2 De Rham-Komplex und Cohomologie	9
1.2.1 Bezug zur Elektro- und Magnetostatik	12
1.3 Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen	14
2 Das Wirbelstrommodell	17
2.1 Die Maxwell-Gleichungen	17
2.1.1 Anwesenheit von Materie	18
2.1.2 Zeitharmonische Maxwell-Gleichungen	20
2.2 Die Wirbelstromnäherung	22
2.3 Variationsformulierungen	25
2.4 Eine mathematische Rechtfertigung für das Wirbelstrommodell	29
2.4.1 Abschätzung des Modellierungsfehlers	29
2.4.2 Asymptotisches Verhalten des Fehlers für $\omega \rightarrow 0$	32
2.4.3 Diskussion	37
3 Strom- und Spannungsquellen im Wirbelstrommodell	41
3.1 Grundlagen der Anregungen im Wirbelstrommodell	41
3.2 Anregung durch Generatorstromverteilungen	44
3.2.1 H -basierte Formulierung	44
3.2.2 E -basierte Formulierung	46
3.3 Anregung durch Randbedingungen (Kontakte am Gebietsrand)	47
3.3.1 H -basierte Formulierung	47
3.3.2 E -basierte Formulierung	50
3.4 Nichtlokale Anregungen	53
3.4.1 H -basierte Formulierung	53
3.4.2 Widersprüche in Zusammenhang mit nichtlokalen Anregungen	54
3.4.3 E -basierte Formulierung	56
3.4.4 Physikalische Interpretation der nichtlokalen Anregungen	57

4	Finite Elemente und adaptive Mehrgitterverfahren	61
4.1	Finite-Element-Diskretisierung	61
4.1.1	Whitney-Elemente	62
4.1.2	Auswahl der Formulierung: E - vs. H -basiert	66
4.1.3	Diskretes Wirbelstromproblem	67
4.1.4	Assemblierung	69
4.1.5	Anregungen	70
4.1.6	Implementierung	70
4.2	Mehrgitterverfahren	71
4.2.1	Klassische Iterationsverfahren	71
4.2.2	Die Komponenten des Mehrgitterverfahrens	75
4.2.3	Der Mehrgitterzyklus	79
4.2.4	Mehrgitter für $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$	81
4.2.5	Der hybride Glätter	83
4.2.6	Projektion der Lösung bei Anwesenheit von Nichtleitern	85
4.2.7	Mehrgitter und Krylov-Raum-Verfahren	88
4.2.8	Numerische Experimente	90
4.3	Adaptivität	100
4.3.1	A posteriori-Fehlerschätzer	101
4.3.2	Gitteradaption	103
4.3.3	Numerische Experimente	105
4.4	Lokales Mehrgitterverfahren	108
4.4.1	Optimalität des Mehrgitterverfahrens und lokal adaptierte Gitter	108
4.4.2	Implementierung des lokalen Mehrgitterverfahrens	109
4.4.3	Modifikation für den hybriden Glätter	114
4.4.4	Numerische Experimente	116
4.5	Anwendungen	118
4.5.1	Das TEAM 7 Benchmark Problem	118
4.5.2	Gasisolierte Schaltanlage	123
5	Eine skalare Randelementmethode für Impedanzrandbedingungen	143
5.1	Impedanzrandbedingungen	144
5.2	Eliminierung des elektrischen Feldes	145
5.3	Skalarpotential-Formulierung	146
5.4	Reduktion auf den Rand	148
5.4.1	Regularität	151
5.5	Galerkin-Diskretisierung	151
5.6	Numerische Resultate	154
5.6.1	Kugelmodell bei endlicher Eindringtiefe	157
5.6.2	Grenzfälle	159
6	Ausblick	161
A	Beweis von Satz 2.3	163

B Schwierigkeiten bei sukzessiver Gebietsapproximation	167
Notation	169
Literaturverzeichnis	175

Einleitung

Für eine lange Zeit nach der Begründung der modernen Theorie des Elektromagnetismus durch James C. Maxwell (1831–1879) bestand der mathematische Zugang zu den elektromagnetischen Feldern in der Anwendung analytischer Methoden zur Lösung der Maxwell-Gleichungen. Dadurch wurde zwar ein sehr gutes Verständnis grundlegender Effekte erreicht, die Berechnung der Felder in realen Situationen war aber kaum möglich.

Dies machte erst die rasante Entwicklung der Rechenleistung moderner Computer möglich. Die ersten Anwendungen in der Elektro- und Magnetostatik in 2D beschränkten sich auf das Lösen der Laplace-Gleichung (um genau zu sein, $\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{grad} \phi) = 0$ bzw. $\operatorname{div}(\mu \mathbf{grad} \phi) = 0$). In den 70er Jahren begann der Schritt von zwei auf drei Raumdimensionen. Dieser gestaltete sich in der Elektromagnetik etwas schwieriger als bei anderen physikalischen Anwendungen. Der Grund dafür war, daß nicht der vektorielle Laplace-Operator, sondern der **rot rot**-Operator der grundlegende Operator in der Elektromagnetik ist. Letzterer erfordert eine andere Diskretisierung als ein vektorieller Laplace-Operator, die mit den auch hier verwendeten Whitney-Elementen erst in den 80er Jahren verfügbar wurde [Néd80].¹

In dieser Arbeit wollen wir zeitharmonische Wirbelstromprobleme in 3D mit Hilfe numerischer Methoden lösen. Der Name „Wirbelströme“ resultiert aus der Tatsache, daß ein zeitveränderliches Magnetfeld in einem Leiter Ströme induziert, die auf in sich geschlossenen Bahnen fließen. Wirbelströme werden durch das *Wirbelstrommodell* beschrieben, einer Approximation der Maxwell-Gleichungen, bei der die Verschiebungsströme vernachlässigt werden. Die Problemstellungen, die damit behandelt werden können, sind sehr vielfältig; das Spektrum reicht von den klassischen Bereichen der Energietechnik (Motoren, Transformatoren, Schaltanlagen etc.) bis hin zu medizinischen Anwendungen wie der Hyperthermie. Grundsätzlich handelt es sich dabei um Anwendungen, bei denen die magnetische Energie dominant gegenüber der elektrischen ist. Das impliziert auch, daß die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen keine Rolle spielt. Die Beschränkung auf zeitharmonische Vorgänge bedeutet, daß sich keine Zeitabhängigkeit mehr in den betrachteten Gleichungen findet, und die Unbekannten die Amplituden harmonisch schwingender Felder sind. Es handelt sich also hier um stationäre Probleme im Sinne eingeschwungener Zustände.

Für die numerische Lösung werden in dieser Arbeit zwei Simulations-Programme entwickelt, die in mehreren Aspekten unterschiedlich sind.

¹ Die Aussage bezieht sich auf finite Elemente. Deutlich früher gab es Methoden, die nicht von der Statik herkommen, sondern von vornherein die Wellenausbreitung in 3D beschrieben haben wie das Yee-Schema [Yee66] oder die FIT-Methode [Wei77]. Erst in den letzten Jahren ist der enge Zusammenhang zu den Whitney-Element-Diskretisierungen klar geworden [BK00].

Zum einen handelt es sich um eine Randelementmethode (BEM, engl. *boundary element method*), die auf einer *magnetischen* Formulierung aufbaut, und für den *Spezialfall geringer Eindringtiefen* entwickelt worden ist. Stark lokale Effekte wie der bekannte Skinneffekt und der Proximityeffekt (die Begriffe werden in Kap. 2 kurz erklärt) müssen hier nicht aufgelöst werden, da die Leiter durch *Impedanzrandbedingungen* beschrieben werden; die kleine Eindringtiefe ist damit a priori im Modell enthalten und auch notwendig für die Gültigkeit des Modells.

Hingegen handelt es sich bei der anderen Methode um eine Finite-Element-Methode (FEM), die auf dem *elektrischen* Feld basiert und für *allgemeine* zeitharmonische Wirbelstromprobleme konzipiert ist. Lokale Phänomene werden durch Anwendung adaptiver Gitterverfeinerung *aufgelöst*. Die entstehenden Gleichungssysteme werden durch lokale Mehrgitterverfahren effizient gelöst. Dieses sehr umfangreiche Teilprojekt konnte nur durch den Aufbau auf bereits vorhandene Software erfolgreich umgesetzt werden, wobei hier die Simulationsumgebung *UG* gewählt wurde. Da *UG* von vielen Arbeitsgruppen bereits genutzt wird und abzusehen ist, daß sich der Nutzerkreis weiter vergrößern wird, sind an vielen Stellen auch kurze Kommentare in die Arbeit eingeflossen, wie Algorithmen implementiert wurden. Der Autor hofft, damit eine spätere Erweiterung und Weiterverwendung der in dieser Arbeit entstandenen Software etwas zu erleichtern.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 1 werden die zum Verständnis der nachfolgenden Kapitel notwendigen mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt. Neben der Einführung der für die Elektromagnetik bedeutenden Sobolev-Räume $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ und $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ wird insbesondere auf die Begriffe Homologie/Cohomologie und deren Bedeutung in der Elektromagnetik eingegangen. Weiterhin wird der de Rham-Komplex als die wesentliche Struktur in Verbindung mit den Differentialoperatoren **grad**, **rot** und **div** vorgestellt.

Kapitel 2 führt das Wirbelstrommodell als Näherung der Maxwellschen Gleichungen ein und stellt entsprechende Variationsformulierungen vor. Weiterhin wird eine — nach bestem Wissen des Autors — neue mathematische Rechtfertigung für das Wirbelstrommodell angegeben und bewiesen. Anders als bei den bisherigen Arbeiten zur Rechtfertigung des Wirbelstrommodells handelt es sich dabei nicht um eine asymptotische Betrachtung. Der Vollständigkeit halber wird jedoch auch die Asymptotik analysiert und in Beziehung zu den bisherigen Arbeiten gesetzt. Insbesondere wird die Bedingung diskutiert, unter denen das Wirbelstrommodell ein Modell höherer Ordnung in der Kreisfrequenz ω ist, wenn man es mit dem statischen Modell vergleicht. Dabei wird ebenfalls die physikalische Bedeutung dieser Bedingung klar.

Auch in Kapitel 3 geht es um mathematische Modellierung. Hier werden verschiedene Situationen der Spannungs- und Stromanregung für das Wirbelstrommodell diskutiert. Für jede Situation werden die entsprechenden Variationsformulierungen angegeben. Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf sogenannte „nichtlokale Anregungen“ gelegt, die eine komfortable Möglichkeit bieten, Ströme bzw. Spannungen für geschlossene Leiterschleifen vorzuschreiben, und häufig eingesetzt werden. Dabei wird sowohl auf Widersprüche hingewiesen, die sich in diesem Zusammenhang ergeben, als auch eine physikalische Interpretation dieser speziellen Anregungen gegeben.

Der zeitliche Hauptaufwand dieser Arbeit floß in das Kapitel 4. Dieses widmet sich

der Finite-Element-Methode, die mit Hilfe der Simulationsumgebung \mathcal{UG} realisiert wurde. Zunächst wird hier die verwendete Diskretisierung mit Whitney-Elementen beschrieben. Anschließend wird das adaptive Mehrgitterverfahren, das für die Lösung der entstehenden Gleichungssysteme verwendet wird, vorgestellt. Dabei wird auf die Komponenten des adaptiven Mehrgitterverfahrens wie Gittertransfer, Glätter, Fehlerschätzer und Gitterverfeinerung einzeln eingegangen. Außerdem beinhaltet das Kapitel zahlreiche Experimente, die die Anwendbarkeit des Mehrgitterverfahrens auf das zeitharmonische Wirbelstromproblem belegen sollen. Ein Unterkapitel widmet sich der detaillierten Beschreibung des lokalen Mehrgitterverfahrens. Der Gesamtalgorithmus wird schließlich auf zwei realistische Problemstellungen angewendet.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Randelementmethode zur Lösung zeitharmonischer Wirbelstromprobleme mit Impedanzrandbedingungen. In diesem Kapitel steht mehr die mathematische Analyse der Formulierung und der Diskretisierung als eine umfassende praktische Anwendung im Vordergrund, wenngleich auch die theoretischen Ergebnisse mit einem numerischen Beispiel untermauert werden.

Kapitel 6 enthält schließlich einen Überblick über sinnvolle Möglichkeiten der Weiterentwicklung der behandelten Themen.

1 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden übersichtsartig die mathematischen Werkzeuge und Begriffe bereitgestellt, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden. Insbesondere wird auf einige Eigenschaften der wichtigen Räume $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega)$ eingegangen, die die Grundlage für Variationsformulierungen in der Elektromagnetik bilden. Es folgt eine kurze Darstellung, in der einige Aspekte der algebraischen Topologie wie Homologie/Cohomologie und der de Rham-Komplex erläutert und in Beziehung zur Elektromagnetik gesetzt werden. Schließlich werden der Vollständigkeit halber die in dieser Arbeit verwendeten Sätze über Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen von Randwertproblemen zusammengefaßt.

1.1 Räume und Spuren

Sei Ω ein Gebiet (offene und zusammenhängende Teilmenge) im \mathbb{R}^3 mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und nach außen gerichtetem Einheitsnormalenvektorfeld \mathbf{n} .

Mit $L^2(\Omega)$ bezeichnen wir wie üblich die Menge der über Ω quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen und mit $H^k(\Omega)$, $k > 0$, die Standard-Sobolev-Räume, d.h. die Räume der Funktionen in $L^2(\Omega)$, deren schwache Ableitungen bis einschließlich der Ordnung k ebenfalls in $L^2(\Omega)$ liegen, $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$. Weiterhin bezeichnet $H_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^3)$ den Raum der Funktionen, die lokal in H^k liegen, also alle Funktionen f auf \mathbb{R}^3 mit $f \in H^k(K)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^3$. In den folgenden Kapiteln muß k nicht unbedingt ganzzahlig sein, d.h. wir verwenden auch Sobolev-Räume reeller Ordnung, siehe z.B. [LM72], und schreiben dann für den Index s statt k .

Wir nehmen hier und im folgenden stets an, daß alle auftretenden Funktionen bzw. Funktionale komplexwertig sind, wenn nicht explizit etwas anderes angegeben wird. Entsprechend sind auch alle auftretenden Skalarprodukte (\cdot, \cdot) stets als *hermitesche* Skalarprodukte anzusehen. Vektorwertige Räume und deren Elemente werden in dieser Arbeit durch Fettdruck gekennzeichnet, beispielsweise $\mathbf{L}^2(\Omega) := L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{H}^k(\Omega) := H^k(\Omega)^3$. Die entsprechenden Normen kennzeichnen wir durch Tieferstellen des Raumes, also $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)}$.

Es ist wohlbekannt, daß für einen hinreichend glatten Rand Γ der Sobolev-Raum $H^{k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ der *Spurraum* von $H^{k+1}(\Omega)$ ist. Insbesondere ist für $k = 1$ hinreichend, daß Γ eine $C^{1,1}$ -Fläche ist, für $k = 0$, daß Γ eine Lipschitz-Fläche ist. Der letzte Fall ist von besonderem Interesse, da wir im Kapitel 4 ausschließlich Lipschitz-Polyeder betrachten werden.

Der Raum $H^{-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist der Dualraum von $H^{k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Die duale Paarung, wie das Skalarprodukt als Sesquilinearform verstanden, wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k+\frac{1}{2}, \Gamma}$ bezeichnet. Die gleiche Bezeichnung wird auch für die vektorielle Variante, die duale Paarung von $\mathbf{H}^{k+\frac{1}{2}}(\Gamma)$

und $\mathbf{H}^{-k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ verwendet, da aufgrund der vektorwertigen Argumente Verwechslungen ausgeschlossen sind.

Von großer Wichtigkeit für die Formulierung von Variationsproblemen in der Elektromagnetik sind die Räume

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$$

und

$$\mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\},$$

wobei \mathbf{rot} und \mathbf{div} im Sinne der Distributionen zu verstehen sind. Die entsprechenden Normen sind

$$\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)}^2 := \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (\text{diam } \Omega)^2 \|\mathbf{rot} \cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2,$$

bzw.

$$\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega)}^2 := \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (\text{diam } \Omega)^2 \|\mathbf{div} \cdot\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Die Skalierung mit $(\text{diam } \Omega)^2$ des jeweils zweiten Terms wird zwecks korrekter physikalischer Einheiten eingeführt. Bei unbeschränktem Ω wird statt mit $(\text{diam } \Omega)^2$ mit einer beliebigen aber festen Konstante mit der Dimension einer Länge zum Quadrat skaliert.

Variationsformulierungen in der Elektromagnetik sind typischerweise über dem Raum $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ gestellt. Die Motivation dafür liegt in der Beschränkung bei der Suche nach einer Lösung auf Vektorfelder endlicher elektromagnetischer Energie, z.B. entspricht für ein elektrisches Feld $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ der Ausdruck $\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2$ der elektrischen und $\|\mathbf{rot} \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2$ der magnetischen Energie (jeweils abgesehen von einer Skalierung durch ein gleichmäßig von Null weg beschränktes, positives Koeffizientenfeld). Hingegen ermöglicht es die Zugehörigkeit eines elektrischen Feldes zu $\mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega)$, von Ladungen zu sprechen, da $\mathbf{div} \mathbf{E}$ (wieder bis auf ein positives Skalierungsfeld) der Ladungsdichte entspricht und Flüsse von \mathbf{E} durch orientierte Flächen dann einen Sinn haben.

Wir orientieren uns an der Notation in [GR86] für die Definition der Kerne von \mathbf{rot} und \mathbf{div} , der abgeschlossenen Unterräume

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^0(\mathbf{div}; \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega), \mathbf{div} \mathbf{u} = 0\}, \\ \mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0\}. \end{aligned}$$

Auch verwenden die mit einem in Ω gleichmäßig positivem Koeffizienten ϵ skalierten Räume

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{div}_\epsilon; \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{div}(\epsilon \mathbf{u}) \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathbf{H}^0(\mathbf{div}_\epsilon; \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}_\epsilon; \Omega), \mathbf{div}(\epsilon \mathbf{u}) = 0\}. \end{aligned}$$

In diesem Kapitel nehmen wir der Einfachheit halber an, daß Γ eine $C^{1,1}$ -Fläche ist. Alle nachfolgend definierten Begriffe oder gemachten Aussagen lassen sich aber auch auf den allgemeineren Fall, daß Ω ein Lipschitz-Polyeder (siehe [BC01a, BC01b]) bzw. ein

allgemeines Lipschitz-Gebiet ist (siehe [BCS02]), übertragen. In den folgenden Kapiteln gehen wir daher immer davon aus, daß Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, wenn nicht explizit etwas anderes angegeben wird, auch wenn wir uns bis zum Ende dieses Kapitels auf $\Gamma \in C^{1,1}$ beschränken.

Die Restriktion auf den Rand einer auf $\overline{\Omega}$ definierten Funktion oder eines Vektorfeldes ist im folgenden immer als Spur zu interpretieren. Durch ein tiefgestelltes τ bezeichnen wir die orthogonale Projektion von Vektorfeldern auf $\overline{\Omega}$ in die Tangentialebene von Γ ,

$$\mathbf{u}_\tau := (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n})|_\Gamma = (\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n}))|_\Gamma.$$

Definition 1.1 (Differentialoperatoren auf Γ) Für hinreichend reguläre Funktionen ϕ auf $\overline{\Omega}$ ist der *Oberflächengradient* \mathbf{grad}_Γ bzw. die *vektorielle Oberflächenrotation* \mathbf{rot}_Γ definiert durch

$$\mathbf{grad}_\Gamma \phi|_\Gamma := (\mathbf{grad} \phi)_\tau, \quad \mathbf{rot}_\Gamma \phi|_\Gamma := \mathbf{grad}_\Gamma \phi|_\Gamma \times \mathbf{n},$$

und die *Oberflächendivergenz* div_Γ und die *skalare Oberflächenrotation* rot_Γ sind die adjungierten Operatoren, definiert durch

$$\begin{aligned} \langle \text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}, \xi \rangle &:= - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{grad}_\Gamma \xi \rangle \quad \forall \text{ regulären Funktionen } \xi \text{ auf } \Gamma, \\ \langle \text{rot}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}, \xi \rangle &:= - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{rot}_\Gamma \xi \rangle \quad \forall \text{ regulären Funktionen } \xi \text{ auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Der *Laplace-Beltrami-Operator* ist definiert durch

$$\Delta_\Gamma \phi := \text{div}_\Gamma \mathbf{grad}_\Gamma \phi = - \text{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \phi.$$

Der folgende Spursatz sagt aus, daß der Raum $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ der geeignete Raum für Randdaten $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma$ für Vektorfelder $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ ist.

Satz 1.1 (Spursatz für $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$) Der Spuroperator $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma$ ist eine lineare, stetige und surjektive Abbildung von $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ nach $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Beweis: Siehe z.B. [BF91, Lemma 1.1 und Lemma 1.2]. □

Wenn wie hier angenommen $\Gamma \in C^{1,1}$, lassen sich für $\boldsymbol{\lambda} \in \{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n} = 0\}$ $\text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}$ und $\text{rot}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}$ als Distributionen in $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ auffassen,

$$\begin{aligned} \langle \text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}, \xi \rangle_{\frac{3}{2}, \Gamma} &:= - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{grad}_\Gamma \xi \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma} \quad \forall \xi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \\ \langle \text{rot}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}, \xi \rangle_{\frac{3}{2}, \Gamma} &:= - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{rot}_\Gamma \xi \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma} \quad \forall \xi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \end{aligned}$$

d.h.

$$\text{div}_\Gamma, \text{rot}_\Gamma : \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n} = 0\} \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma),$$

und man kann die Räume

$$\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma; \Omega) := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{rot}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)\} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma; \Omega) := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n} = 0, \text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)\} \quad (1.2)$$

definieren. Die Räume $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma; \Omega)$ und $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma; \Omega)$ sind die angemessenen Räume für die tangentielle Spur \mathbf{u}_τ und die gedrehte tangentielle Spur $(\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_\Gamma$ von Vektorfeldern in $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$.

Satz 1.2 (Spursatz für $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$) Die Spurooperatoren $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}_\tau)|_\Gamma$ bzw. $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_\Gamma$ sind lineare, stetige und surjektive Abbildung von $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ nach $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma; \Omega) = \{\mathbf{u}_\tau : \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)\}$ bzw. $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma; \Omega) = \{(\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_\Gamma : \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)\}$.

Beweis: Siehe [Ces96, BC01a, BC01b, BCS02]. \square

Räume mit verschwindenden Spuren kennzeichnen wir wie üblich durch eine tiefgestellte Null, z.B.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega), (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma = 0\}, \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), (\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_\Gamma = 0\}. \end{aligned}$$

Mit Verweis auf die Referenzen [Ces96, BC01a, BC01b, BCS02] sei weiterhin erwähnt, daß $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma; \Omega)$ und $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma; \Omega)$ dual zueinander sind, das Dualitätsprodukt bezeichnen wir mit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tau, \Gamma} : \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma; \Omega) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_\Gamma; \Omega) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ferner gelten die folgenden partiellen Integrationsformeln (Greensche Formeln):

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \Phi - \Phi \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_\Gamma, \Phi|_\Gamma \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \Phi \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (1.3)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_\Gamma, \mathbf{v}_\tau \rangle_{\tau, \Gamma} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega). \quad (1.4)$$

Analog zu der bekannten Greenschen Formel

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \phi + \phi \mathbf{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \langle (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma, \phi|_\Gamma \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega), \phi \in H^1(\Omega), \quad (1.5)$$

gilt auf dem Rand

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{grad}_\Gamma \phi \rangle_{\tau, \Gamma} + \langle \mathbf{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}, \phi \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma; \Gamma), \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (1.6)$$

Schließlich sei noch die Identität

$$\mathbf{div}_\Gamma((\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_\Gamma) = (\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \quad (1.7)$$

in Erinnerung gerufen, von der wir ebenfalls in den folgenden Kapiteln Gebrauch machen werden.

Bemerkung 1.1 Die Dualprodukte werden wir in Teilen der Arbeit formal als Randintegrale

$$\begin{aligned} \langle \phi|_\Gamma, \eta|_\Gamma \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma} &= \int_{\Gamma} \phi \eta \, dS, \quad \phi, \eta \in H^1(\Omega) \\ \langle (\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_\Gamma, \mathbf{u}_\tau \rangle_{\tau, \Gamma} &= \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \end{aligned}$$

schreiben, diese sollen jedoch stets als Dualprodukte interpretiert werden.

1.2 De Rham-Komplex und Cohomologie

Für die Zerlegung von Vektorfeldern über einem, hier als beschränkt angenommenen, Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ spielen Charakterisierungen der Bilder und Kerne der Operatoren div , \mathbf{grad} und \mathbf{rot} eine bedeutende Rolle. Bekanntlich verschwindet die Rotation eines Gradienten und Rotationen sind divergenzfrei. Dies kann durch die Sequenz

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{\mathbf{grad}} \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \xrightarrow{\mathbf{rot}} \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) \xrightarrow{\text{div}} \mathbf{L}^2(\Omega) \quad (1.8)$$

dargestellt werden. In dieser Sequenz liegen die Bilder der durch die Differentialoperatoren definierten Abbildungen jeweils im Kern der darauffolgenden Abbildung — solch eine Eigenschaft nennt man *Komplexeigenschaft*¹, (1.8) heißt *de Rham-Komplex*. Eine interessante Frage ist, inwieweit die Bilder der Operatoren den *gesamten* Kern des nachfolgenden Operators ausfüllen (man spricht dann von einer *exakten* Sequenz bzw. Teilsequenz) und sich auch umgekehrte Aussagen treffen lassen wie: „Ein Vektorfeld, dessen Rotation überall in Ω verschwindet, ist ein Gradient.“ bzw. „Ein Vektorfeld, dessen Divergenz überall in Ω verschwindet, ist eine Rotation.“ Die Antwort darauf gibt das bekannte *Poincaré-Lemma*, nach dem die Aussagen lokal richtig sind, und, falls Ω *zusammenziehbar* ist, auch global richtig sind (siehe z.B. [Fla89, Jän93, Fra97]). Zusammenziehbar bedeutet, daß Ω durch eine stetige Deformation auf einen inneren Punkt übergehen kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn Ω *einfach zusammenhängend* (jeder geschlossene Pfad in Ω ist zusammenziehbar) und der Rand $\Gamma := \partial\Omega$ *zusammenhängend* (also „in einem Stück“) ist (siehe z.B. [Bos98a]). Beispielsweise ist der Rand eines Torus zwar zusammenhängend, aber der Torus ist nicht einfach zusammenhängend, hingegen ist das Gebiet zwischen zwei ineinandergeschachtelten Kugeln zwar einfach zusammenhängend, jedoch ist der Rand nicht zusammenhängend, siehe Abb. 1.1.

Für die konstruktive Charakterisierung der Kerne von \mathbf{rot} und div für den allgemeinen Fall, daß Ω nicht zusammenziehbar ist, sind einige topologische Konzepte erforderlich, die wir in einer groben Übersicht in den folgenden Absätzen vorstellen. Genauer findet sich z.B. in [Ket01, Bos98b, Kot87, GK01a, GK01b] und in Lehrbüchern wie den bereits zitierten [Fla89, Jän93, Fra97].

Zuerst wollen wir an den Begriff der *orientierbaren, l -dimensionalen, stückweise glatten Mannigfaltigkeiten* in einer generischen offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ erinnern. Für $l = 1$ sind dies gerichtete Pfade, für $l = 2$ orientierte Flächen. Der Rand $\partial\Sigma$ einer l -dimensionalen, stückweise glatten, orientierten Mannigfaltigkeit $\Sigma \subset \Omega$ erhält eine induzierte Orientierung und ist selbst eine $(l - 1)$ -dimensionale, stückweise glatte Mannigfaltigkeit.

Eine l -dimensionale, stückweise glatte, orientierte Mannigfaltigkeit $\subset \Omega$ nennen wir einen *l -Zykel*, $l = 1, 2$, wenn sie einen verschwindenden Rand hat. Zwei l -Zykeln werden *homolog* genannt, wenn ihre Vereinigung (nach einer eventuellen Umorientierung) der

¹ Eine einheitlichere Darstellung und bessere Einsicht in die Struktur und die inneren Zusammenhänge des Elektromagnetismus bietet die Verwendung des Differentialformenkalküls, siehe z.B. [Sch80, Fla89, Wei97]. In diesem tritt an die Stelle der Operatoren \mathbf{grad} , \mathbf{rot} , div die Cartansche Ableitung \mathbf{d} , die p -Formen auf $p + 1$ -Formen abbildet. Die Komplexeigenschaft wird dann einfach zu $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$. Wir verwenden in dieser Arbeit dennoch die Darstellung mit den Mitteln der klassischen Vektoranalysis als Zugeständnis an die größere Verbreitung.

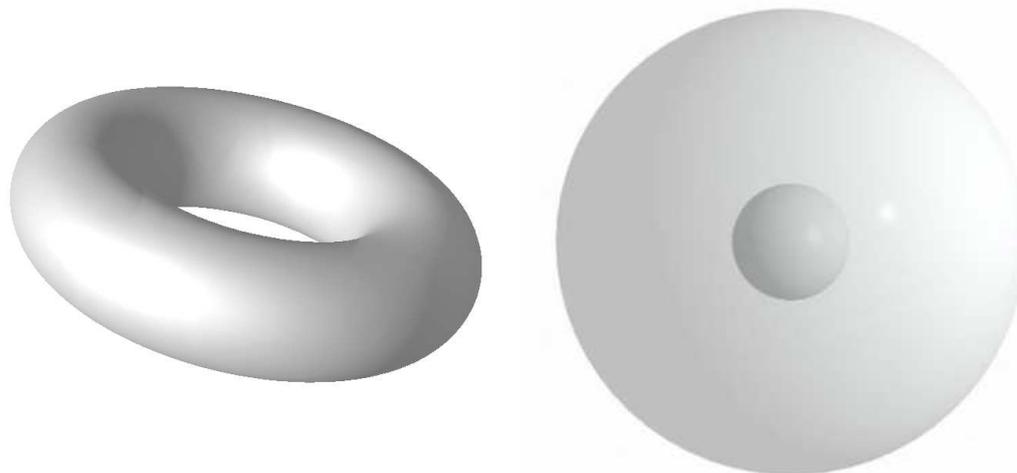


Abb. 1.1: 2 Beispiele nicht zusammenziehbarer Gebiete: Torus (links) und Volumen zwischen 2 Kugeln (rechts).

Rand einer $(l + 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist, die eine geeignete Teilmenge von Ω ist. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge $Z_l(\Omega)$ der l -Zykeln.

Eine l -dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit $\Sigma \subset \Omega$ wird *relativer l -Zykel* genannt, wenn $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$. Zwei relative l -Zykeln sind homolog, wenn deren Vereinigung, ergänzt durch einen Teil von $\partial\Omega$, der Rand einer $(l + 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $\subset \bar{\Omega}$ ist. Dies führt eine Äquivalenzrelation auf der Menge $Z_l(\Omega, \partial\Omega)$ ein, der Menge der relativen l -Zykeln.

Von besonderer Bedeutung sind Zykeln, die keine Ränder sind (*nichtberandende Zykeln*), denn diese charakterisieren topologische Eigenschaften von Ω :

Die Äquivalenzklassen der homologen, nichtberandenden 1-Zykeln in Ω werden *Schleifen* genannt (z.B. [Bos98a]), wobei wir hier immer linear unabhängige, einfach durchlaufene Schleifen meinen. Zusammen erzeugen sie die *erste Homologiegruppe* $\mathcal{H}_1(\Omega)$ von Ω . Es gibt $\beta_1(\Omega)$ solcher Schleifen, d.h. $\dim \mathcal{H}_1(\Omega) = \beta_1(\Omega)$, wobei $\beta_1(\Omega)$ die *erste Betti-Zahl* von Ω genannt wird, die eine fundamentale topologische Invariante ist. Grob gesagt, entspricht $\beta_1(\Omega)$ der Anzahl der Ω durchstechenden Löcher.

Eine Schleife kann durch einen Repräsentanten in der Form eines geschlossenen, nichtberandenden orientierten Pfades beschrieben werden. In engem Zusammenhang mit den Schleifen von Ω stehen die sog. *Schnittflächen*, auch bekannt als *Seifert-Flächen*², von Ω , die Homologie-Äquivalenzklassen in $Z_2(\Omega, \partial\Omega)$, die durch $\beta_1(\Omega)$ disjunkte, stückweise glatte, orientierte Flächen repräsentiert werden und zusammen die *zweite, relative Homologiegruppe* $\mathcal{H}_2(\Omega, \partial\Omega)$ erzeugen. Seifert-Flächen und Schleifen sind *dual* zueinan-

² Benannt nach Karl Johannes Herbert Seifert (27.5.1907 - 1.10.1996); Seifert war bis auf eine Unterbrechung durch den 2. Weltkrieg von 1935–1975 an der Universität Heidelberg tätig, siehe auch [Pup99].

der (Poincaré-Dualität): Wir können Repräsentanten für Seifert-Flächen und Schleifen angeben, so daß diese jeweils Paare bilden, die einander durchdringen, d.h. $\mathcal{H}_1(\Omega)$ und $\mathcal{H}_2(\Omega, \partial\Omega)$ sind isomorph.

Wenn $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$, $N := \beta_1(\Omega)$ eine vollständige Menge von Seifert-Flächen bildet, dann sind alle 1-Zykeln in $\Omega \setminus (\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_N)$ Ränder. Insbesondere läßt sich jedes wirbelfreie Vektorfeld in $\Omega \setminus (\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_N)$ als Gradient einer skalaren Funktion darstellen. Ein in ganz Ω wirbelfreies Vektorfeld hingegen muß kein Gradientenfeld sein. Jedoch gibt es einen endlich-dimensionalen *Cohomologie-Raum* $\mathcal{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ mit $\dim \mathcal{H}^1(\Omega) = \beta_1(\Omega)$, so daß

$$\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0\} = \mathbf{grad} H^1(\Omega) \oplus \mathcal{H}^1(\Omega) .$$

In analoger Weise erzeugen die Äquivalenzklassen nichtberandender 2-Zykeln die Homologiegruppe $\mathcal{H}_2(\Omega)$, $\dim \mathcal{H}_2(\Omega) = \beta_2(\Omega)$. Dabei ist $\beta_2(\Omega)$ die *zweite Betti-Zahl* von Ω , die grob gesagt der Anzahl der in Ω eingeschlossenen Löcher entspricht. Ein in ganz Ω quellenfreies Vektorfeld läßt sich nicht unbedingt als die Rotation eines anderen Vektorfeldes in Ω darstellen. Aber es gibt einen *zweiten Cohomologie-Raum* $\mathcal{H}^2(\Omega)$ mit $\dim \mathcal{H}^2(\Omega) = \beta_2(\Omega)$, so daß

$$\mathbf{H}^0(\mathbf{div}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega), \mathbf{div} \mathbf{u} = 0\} = \mathbf{rot} \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \oplus \mathcal{H}^2(\Omega) .$$

Wirbelfreie (bzw. divergenzfreie) Vektorfelder mit verschwindenden tangentialen (bzw. normalen) Komponenten am Rand, die keine Gradienten einer am Rand verschwindenden skalaren Funktion (bzw. keine Rotation eines tangential am Rand verschwindenden Vektorfeldes) sind, führen auf die *relativen Cohomologie-Räume* $\mathcal{H}^1(\Omega, \partial\Omega)$ (bzw. $\mathcal{H}^2(\Omega, \partial\Omega)$) mit $\dim \mathcal{H}^1(\Omega, \partial\Omega) = \beta_2(\Omega)$, $\dim \mathcal{H}^2(\Omega, \partial\Omega) = \beta_1(\Omega)$ (siehe z.B. [Tay96, Kapitel 5.9]).

Spezielle Repräsentanten von $\mathcal{H}^1(\Omega)$ und $\mathcal{H}^2(\Omega, \partial\Omega)$ sind die *harmonischen Neumann-Vektorfelder*, die Elemente von

$$\mathcal{N}_\Omega := \mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}_0^0(\mathbf{div}; \Omega) ,$$

und spezielle Repräsentanten von $\mathcal{H}^2(\Omega)$ und $\mathcal{H}^1(\Omega, \partial\Omega)$ die *harmonischen Dirichlet-Vektorfelder*, die Elemente von

$$\mathcal{D}_\Omega := \mathbf{H}_0^0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}^0(\mathbf{div}; \Omega) ,$$

siehe Abb. 1.2 für Beispiele. Räume harmonischer Dirichlet-Vektorfelder bzw. Neumann-Vektorfelder mit gleichmäßig positiver Gewichtung α schreiben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Omega^\alpha &:= \mathbf{H}_0^0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}^0(\mathbf{div}_\alpha; \Omega) , \\ \mathcal{N}_\Omega^\alpha &:= \mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}_0^0(\mathbf{div}_\alpha; \Omega) . \end{aligned}$$

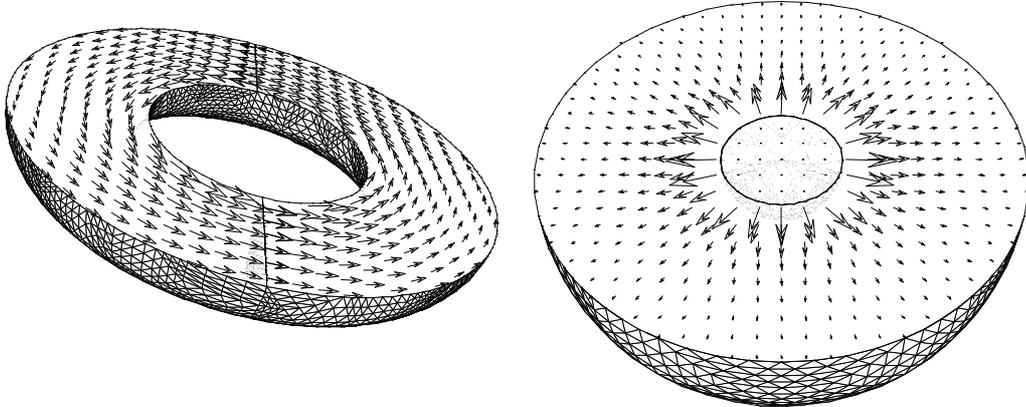


Abb. 1.2: Beispiele für ein (approximiertes) harmonisches Neumann-Vektorfeld (links) und Dirichlet-Vektorfeld (rechts).

1.2.1 Bezug zur Elektro- und Magnetostatik

Wir wollen an dieser Stelle auf den engen Zusammenhang von Cohomologie/Homologie zu den in der Elektro- bzw. Magnetostatik auftauchenden integralen Größen Spannung, Ladung und Kapazitätsmatrix bzw. Strom, Verkettungsfluß und Induktivitätsmatrix (siehe z.B. [Mar68, GK01a]) eingehen.

In der Elektrostatik fragt man typischerweise nach der Verteilung von Flächenladungsdichten auf dem Rand eines Gebietes Ω , so daß dessen Komplement $\Omega^c := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ feldfrei ist. Das Gebiet Ω^c kann man sich dann als elektrisch leitendes Medium vorstellen. Die sich in Ω einstellende Feldverteilung ist dann eine Überlagerung von $\beta_2(\Omega)$ harmonischen Dirichlet-Vektorfeldern \mathbf{E}_i , die jeweils durch eine Ladung auf der i -ten von $\beta_2(\Omega)$ Zusammenhangskomponenten von Ω^c erzeugt werden. Die Felder $\mathbf{D}_i = \epsilon \mathbf{E}_i$, die sog. dielektrischen Verschiebungsdichten, sind Elemente von $\mathcal{D}_\Omega^\epsilon$ (ϵ ist die Permittivität, siehe Kap. 2). Die Felder \mathbf{E}_i werden als Repräsentanten von Klassen in $\mathcal{H}^1(\Omega, \partial\Omega)$ interpretiert, Pfadintegrale von \mathbf{E}_i über Repräsentanten c_j von $\mathcal{H}_1(\Omega, \partial\Omega)$ sind die *Spannungen* U_j . Die \mathbf{D}_i hingegen werden als Repräsentanten von Klassen in $\mathcal{H}^2(\Omega, \partial\Omega)$ gesehen und deren Flüsse durch Repräsentanten S_i von $\mathcal{H}_2(\Omega)$ sind gerade die *Ladungen* Q_i . Wählt man aus den c_j die Pfade zum äußeren Rand von Ω , sind die Spannungen gerade die Leiterpotentiale. Die Quotienten $p_{ij} := \frac{U_j}{Q_i}$ sind dann die sog. *Maxwellschen Potentialkoeffizienten*, die Matrix $(c_{ij}) := (p_{ij})^{-1}$ heißt *Kapazitätsmatrix*.

Die Abb. 1.2 (rechts) zeigt somit das elektrostatische Feld einer geladenen Kugel in deren Umgebung. Die Spannung ist das Integral entlang irgendeines Pfades in Ω vom Rand der inneren Kugel zum Rand der äußeren, und die Ladung ist der Fluß des (mit ϵ skalierten) Feldes durch irgendeine orientierte Fläche, die die innere Kugel umschließt, also z.B. auch der Rand einer der Kugeln.

Analog verhält es sich in der Magnetostatik: Magnetische Felder aufgrund von flächen-

haften Stromverteilungen auf $\partial\Omega$, die in Ω^c kein magnetisches Feld hervorrufen, sind harmonische Neumann-Vektorfelder. Deren Anteile \mathbf{H}_j sind durch Festlegung von $\beta_1(\Omega)$ Zirkulationen (so werden die Pfandintegrale entlang von Repräsentanten c_j von $\mathcal{H}_1(\Omega)$ genannt) eindeutig bestimmt. Die Zirkulationen sind die *Ströme* I_j . Die Felder $\mathbf{B}_j = \mu \mathbf{H}_j$ (μ ist die Permeabilität) sind Elemente der skalierten Neumann-Vektorfelder \mathcal{N}_Ω^μ und deren Flüsse durch Repräsentanten S_i von Klassen aus $\mathcal{H}_2(\Omega, \partial\Omega)$ sind die (magnetischen) *Verkettungsflüsse* Φ_{ij} . Die Quotienten $L_{ij} := \frac{\Phi_{ij}}{I_j}$ heißen *Induktivitäten*. Hier unterscheidet man weiter zwischen den *Selbstinduktivitäten* L_{ii} und den *Gegeninduktivitäten* L_{ij} , $i \neq j$.

Man kann Abb. 1.2 (links) daher als das magnetische Feld aufgrund eines stationären Stromes auf dem Torusrand ansehen, der entlang von kleinen Kreisen um den Torus herumfließt. Die Stärke des Stromes ergibt sich als Integral des Feldes entlang irgendeines geschlossenen Pfades im Torus, der nicht zusammenziehbar ist (also einmal herum geht). Der Verkettungsfluß ist einfach das Flußintegral des dargestellten Feldes durch irgendeine Seifert-Fläche, also z.B. durch eine Kreisfläche, die den Torus an einer Stelle durchtrennt. In Abb. 1.2 links sind zwei äquivalente Seifert-Flächen zu sehen. Das Feldbild entspricht dem einer Toroidspule, bei der aufgrund hoher Wicklungsdichte die Ganghöhe der Bewicklung vernachlässigbar ist. Spulen, die in einem Gebietsteil kein Feld hervorrufen, werden in Kap. 3 eine Rolle spielen.

Die hier erläuterten Zusammenhänge sind in Tab. 1.1 dargestellt.

	Elektrostatik	Magnetostatik
Dimension	$\beta_2(\Omega)$	$\beta_1(\Omega)$
Begriff	Spannungen U_j	(Verkettungs)flüsse Φ_i
∈ rel. Cohomologiegruppe	$\mathcal{H}^1(\Omega, \partial\Omega)$	$\mathcal{H}^2(\Omega, \partial\Omega)$
Begriff	Ladungen Q_i	Ströme I_j
∈ Cohomologiegruppe	$\mathcal{H}^2(\Omega)$	$\mathcal{H}^1(\Omega)$
Quotienten	Maxwellsche Potentialkoeffizienten (Komp. d. inversen Kapazitätsmatrix)	Induktivitäten
	$p_{ij} := \frac{U_j}{Q_i} = \frac{\int_{c_j} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s}}{\int_{S_i} \mathbf{D}_i \cdot d\mathbf{S}}$	$L_{ij} := \frac{\Phi_i}{I_j} = \frac{\int_{S_i} \mathbf{B}_j \cdot d\mathbf{S}}{\int_{c_j} \mathbf{H}_j \cdot d\mathbf{s}}$
Flächen $S_i \in$	$\mathcal{H}_2(\Omega)$	$\mathcal{H}_2(\Omega, \partial\Omega)$
Pfade $c_j \in$	$\mathcal{H}_1(\Omega, \partial\Omega)$	$\mathcal{H}_1(\Omega)$

Tab. 1.1: Zusammenhänge von (Co)homologie und Elektro- und Magnetostatik

1.3 Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Die in dieser Arbeit verwendeten numerischen Verfahren beruhen alle auf Galerkin-Methoden für schwache Formulierungen (Variationsformulierungen) des Wirbelstrommodells. In diesem Abschnitt fassen wir kurz einige Standardbegriffe und Sätze zusammen, die für Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen abstrakter Variationsformulierungen benötigt werden. Für weitere Details und die Beweise der genannten Sätze sei z.B. auf [Hac86, DL88, McL00] verwiesen.

Gehen wir davon aus, daß die rechten Seiten in den Variationsformulierungen *stetige* Semilinearformen sind, also Funktionale $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \quad f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda^* f(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

(* bedeutet konjugiert komplex), so hängt die Lösbarkeit nur noch von den Eigenschaften der Sesquilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ der schwachen Formulierungen ab. Die wichtigsten Eigenschaften sind dabei die Stetigkeit und die Koerzivität:

Definition 1.2 (Stetige Sesquilinearform) Sei V ein komplexer Hilbert-Raum mit Norm $\|\cdot\|_V$. Dann heißt eine Sesquilinearform $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ *stetig* oder *beschränkt*, falls eine Konstante C_S existiert, so daß

$$|a(u, v)| \leq C_S \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

Definition 1.3 (V -koerzive Sesquilinearform) Sei V ein komplexer Hilbert-Raum mit Norm $\|\cdot\|_V$. Dann heißt eine Sesquilinearform $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ *V -koerziv* oder *V -elliptisch*, falls eine Konstante $C_E > 0$ existiert, so daß

$$|a(v, v)| \geq C_E \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Definition 1.4 (Gårding-Ungleichung) Seien U und V komplexe Hilbert-Räume mit stetiger Einbettung $V \hookrightarrow U$ und Normen $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_U$. Eine Sesquilinearform $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ genügt einer *Gårding-Ungleichung* bzgl. (U, V) , wenn für zwei Konstanten $C_E, C_K > 0$ die Abschätzung

$$|a(v, v)| \geq C_E \|v\|_V^2 - C_K \|v\|_U^2 \quad \forall v \in V \quad (1.9)$$

gilt.

Bemerkung 1.2 Manchmal wird eine Sesquilinearform auch koerziv genannt, wenn sie nur der Gårding-Ungleichung genügt und der Fall, der hier als V -koerziv bezeichnet wird, heißt dann meistens ausschließlich V -elliptisch oder strikt koerziv. Der Sprachgebrauch ist diesbezüglich nicht ganz eindeutig.

Die Frage nach der Darstellbarkeit stetiger Semilinearformen auf einem Hilbert-Raum V durch V -koerzive Sesquilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ wird in dem folgenden Satz, dem bekannten Lemma von Lax-Milgram, beantwortet:

Satz 1.3 (Lax-Milgram-Lemma) Sei V ein komplexer Hilbert-Raum mit Norm $\|\cdot\|_V$ und $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine V -koerzive, stetige Sesquilinearform. Dann existiert für jede stetige Semilinearform $f \in V'$ eine eindeutige Lösung des Problems:

$$\text{Finde } u \in V, \text{ so daß } \quad a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V. \quad (1.10)$$

Weiterhin gilt die a priori-Abschätzung $\|u\|_V \leq \frac{1}{C_E} \|f\|_{V'}$.

Kann man für eine Sesquilinearform zwar nicht V -Koerzivität aber die Erfüllung einer Gårding-Ungleichung bzgl. zweier Hilbert-Räume U und V mit kompakter Einbettung $V \hookrightarrow U$ zeigen, so gilt immerhin noch die folgende Alternative:

Satz 1.4 (Fredholmsche Alternative) Seien U und V komplexe Hilbert-Räume mit kompakter Einbettung $V \hookrightarrow U$ und Normen $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_U$. Weiter sei $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Sesquilinearform, die der Gårding-Ungleichung (1.9) bzgl. (U, V) genügt. Dann gilt genau eine der folgenden Alternativen:

(i) Es existiert eine nichttriviale Lösung des homogenen Problems:

$$\text{Finde } u \in V, \text{ so daß } \quad a(u, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

(ii) Das Problem (1.10) besitzt für jede stetige Semilinearform $f \in V'$ eine eindeutige Lösung.

Im Fall (ii) gilt die a priori-Abschätzung $\|u\|_V \leq C \|f\|_{V'}$, mit einer von f unabhängigen Konstante C .

2 Das Wirbelstrommodell

Befinden sich in einem sich zeitlich ändernden Magnetfeld leitende Stoffe, so entstehen in diesen nach dem Induktionsgesetz Ströme. Diese fließen auf in sich geschlossenen Bahnen, was ihnen den Namen *Wirbelströme* verleiht.

In stromführenden Leitern (die also direkt an eine Quelle angeschlossen sind) überlagern sich die Wirbelströme dem Leiterstrom, den man aus Gleichstrombetrachtungen erhält. Da ein zeitveränderlicher Leiterstrom selbst ein zeitveränderliches Magnetfeld erzeugt, ruft dieser ebenfalls Wirbelströme hervor. Dadurch ergibt sich eine ungleichmäßige Verteilung des Gesamtstromes über den Leiterquerschnitt; diesen Effekt nennt man *Stromverdrängung*. Daraus resultiert i.a. eine Erhöhung des effektiven Leiterwiderstandes und ein Ansteigen der Wärmeverluste, was in technischen Anwendungen von Bedeutung ist. Der Effekt wird aber auch gezielt ausgenutzt, z.B. zur Begrenzung von Anlaufmomenten bei Elektromotoren. Neben der Verlustvorhersage ist die Kenntnis von Strom- und Magnetfeldverteilungen für eine Bestimmung der auftretenden Kräfte notwendig.

Bei der Stromverdrängung unterscheidet man häufig zwischen dem sog. *Skineffekt* (Hauteffekt) und *Proximityeffekt* (Näheeffekt). Bei einem einzelnen Leiter (mit kleiner Krümmung) konzentriert sich der Stromfluß aufgrund der selbstinduzierten Wirbelströme mit zunehmender Frequenz auf dessen Oberfläche (Skineffekt). Bei mehreren Leitern beeinflussen diese sich gegenseitig und der Stromfluß konzentriert sich an den Stellen größter tangentialer magnetischer Feldstärke (Proximityeffekt). Diese Phänomene werden von dem *Wirbelstrommodell*, einer Vereinfachung der vollen Maxwell-Gleichungen, wiedergegeben.

In diesem Kapitel werden wir zunächst die Maxwell-Gleichungen für den zeitabhängigen und zeitharmonischen Fall beschreiben (Abschnitt 2.1). Das Wirbelstrommodell und entsprechende schwache Formulierungen werden in Abschnitt 2.2 und 2.3 vorgestellt. Daran schließt sich in Abschnitt 2.4 eine neue mathematische Rechtfertigung für das Wirbelstrommodell an.

2.1 Die Maxwell-Gleichungen

Im folgenden betrachten wir eine offene und zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit einem nach außen gerichteten Einheitsnormalenvektorfeld \mathbf{n} auf dem Rand $\partial\Omega$. Das Gebiet Ω muß nicht notwendigerweise beschränkt sein.

Elektromagnetische Phänomene in Ω werden durch die *Maxwell-Gleichungen*

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathcal{J}_{tot} + \epsilon_0 \partial_t \mathcal{E}, \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (2.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}, \quad (2.1c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.1d)$$

beschrieben. \mathcal{E} bezeichnet das elektrische Feld, \mathbf{B} die magnetische Induktion, \mathcal{J}_{tot} die Stromdichte, ρ_{tot} die Ladungsdichte. Der Index *tot* soll darauf hinweisen, daß es sich hier nicht nur um die sog. freien Quellen handelt, sondern um die *totalen* Stromdichten und Ladungen. Die Begriffe werden später genauer erläutert.

Vervollständigt werden die Gleichungen durch Randbedingungen, wobei auf einem Teil des Randes $\Gamma_e \subset \Gamma := \partial\Omega$ elektrische

$$\mathbf{n} \times \mathcal{E} = \mathcal{F} \quad (2.2a)$$

und auf einem anderen Teil $\Gamma_h \subset \Gamma$ magnetische Randbedingungen

$$\mathbf{n} \times \mathcal{H} = \mathcal{G} \quad (2.2b)$$

vorgegeben seien, $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_h$, $\Gamma_e \cap \Gamma_h = \emptyset$. Dabei seien \mathcal{F} und \mathcal{G} geeignete tangentielle Spuren der Felder.

Die Konstanten μ_0 und ϵ_0 sind die Permeabilität und Permittivität des freien Raums. In SI-Einheiten ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ und $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Die Quellen \mathcal{J}_{tot} und ρ_{tot} sind nicht unabhängig voneinander: Aus der Divergenz der Gleichung (2.1a) folgt nach Einsetzen von (2.1c) die *Ladungserhaltung*

$$\operatorname{div} \mathcal{J}_{tot} + \partial_t \rho_{tot} = 0. \quad (2.3)$$

Bemerkung 2.1 Bei der Bestimmung der Felder \mathcal{E} und \mathbf{B} sind Gleichung (2.1c) und (2.1d) nur für die eindeutige Festlegung eines Anfangswertes notwendig, da deren zeitliche Ableitung von (2.1a) bzw. (2.1b) impliziert wird.

2.1.1 Anwesenheit von Materie

Die räumliche und zeitliche Verteilung von \mathcal{J}_{tot} und ρ_{tot} ist in üblichen Problemstellungen nicht a priori bekannt. Vielmehr hängen \mathcal{J}_{tot} und ρ_{tot} i.a. von nicht-elektromagnetischen physikalischen Größen ab, die wiederum von \mathcal{E} und \mathbf{B} abhängen können. D.h. für den allgemeinen Fall müssen gekoppelte Probleme betrachtet werden. Dies trifft insbesondere für die Anwesenheit von Materie zu. Dort kommt als Schwierigkeit hinzu, daß die Quellen und Felder auf einer Mikroskala leben. Aus diesen Gründen geht man zu einer Beschreibung der *makroskopischen*, d.h. räumlich gemittelten, Felder über (siehe z.B. [Jac83]).

Die Anwesenheit von Materie wird dann durch deren *Polarisation* \mathcal{P} und *Magnetisierung* \mathcal{M} beschrieben, die die makroskopische Wirkung lokaler, mikroskopischer Ströme

und Ladungen wiedergeben. Die (jetzt jeweils mittlere) Ladungs- und Stromdichte wird aufgespalten in sogenannte *freie* (\mathcal{J} , ρ) und *gebundene* Anteile,

$$\rho_{tot} = \rho + \rho_p, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{J}_{tot} = \mathcal{J} + \mathcal{J}_p + \mathcal{J}_m, \quad (2.5)$$

mit

$$\mathbf{rot} \mathcal{M} = \mathcal{J}_m, \quad (2.6)$$

$$\partial_t \mathcal{P} = \mathcal{J}_p, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{div} \mathcal{P} = -\rho_p. \quad (2.8)$$

\mathcal{J}_p und ρ_p werden Polarisationsströme und -ladungen genannt, \mathcal{J}_m Magnetisierungsströme oder Ampèresche Ströme.

Häufig werden zusätzlich die Vektorfelder \mathcal{D} (dielektrische Verschiebung) und \mathcal{H} (magnetische Feldstärke) eingeführt:

$$\mathcal{D} := \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{H} := \frac{1}{\mu_0} (\mathcal{B} - \mathcal{M}). \quad (2.10)$$

Mit deren Hilfe lassen sich die Maxwell-Gleichungen so schreiben, daß nur noch *freie* Quellen auftreten. Die Motivation dafür ist einerseits, daß in der Regel \mathcal{P} und \mathcal{M} zusammen mit den gebundenen Strömen und Ladungen nicht explizit interessieren. Andererseits lassen sich für die freien Ströme und Ladungen oft zusätzliche Modellannahmen treffen, so daß gerade im Bereich des wissenschaftlichen Rechnens von der folgenden Form der Maxwell-Gleichungen ausgegangen wird:

$$\mathbf{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J} + \partial_t \mathcal{D}, \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{rot} \mathcal{E} = -\partial_t \mathcal{B}, \quad (2.11b)$$

$$\mathbf{div} \mathcal{D} = \rho, \quad (2.11c)$$

$$\mathbf{div} \mathcal{B} = 0. \quad (2.11d)$$

Im Vakuum gilt $\mathcal{P} = \mathcal{M} = 0$ und folglich $\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E}$, $\mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{H}$.

Bemerkung 2.2 Das elektromagnetische Feld wird kinematisch eindeutig durch das Paar $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ charakterisiert. Die zusätzlich eingeführten Vektorfelder \mathcal{D} und \mathcal{H} spielen die Rolle von Hilfsgrößen. Dies kommt darin zum Ausdruck, daß in der Wahl von \mathcal{P} und \mathcal{M} und damit auch \mathcal{D} und \mathcal{H} eine gewisse Freiheit liegt, die mit der Wahl einer Buchführung über die Ladungen und Ströme identisch ist. So lassen sich z.B. die Magnetisierungsströme als Polarisationsströme schreiben, wenn man von \mathcal{M} zu \mathcal{M}' mit $\mathbf{rot} \mathcal{M}' = 0$ und \mathcal{P} zu \mathcal{P}' mit $\mathcal{P}' := \mathcal{P} + \int_0^t \mathbf{rot} \mathcal{M}$ übergeht. Relevant für \mathcal{E} und \mathcal{B} sind nur die in beiden Fällen identischen ρ_{tot} und \mathcal{J}_{tot} .

Materialgesetze

Der Zusammenhang zwischen \mathcal{D} , \mathcal{H} und \mathcal{J} mit \mathcal{E} und \mathcal{B} wird üblicherweise durch Materialgesetze beschrieben. Diese sind nichts anderes als sehr einfache (und deshalb i.a. sehr eingeschränkt gültige) makroskopische Modelle, mit deren Hilfe man auf eine genaue Beschreibung der Interaktion zwischen elektromagnetischem Feld und Materie verzichten kann.

Es gibt natürlich Situationen (z.B. wenn Materie nicht im thermodynamischen Gleichgewicht ist), in denen eine so grobe Beschreibung unzureichend ist und man in der Tat gekoppelte Probleme betrachten muß (z.B. bei Berücksichtigung von Quanteneffekten Kopplungen mit der Schrödinger-Gleichung).

In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns auf lineare, isotrope, lokale Medien, die in Ruhe sind. Für diesen Fall gelten die Materialgesetze

$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}, \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}, \quad (2.12b)$$

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}_G \quad (\text{Ohmsches Gesetz}), \quad (2.12c)$$

wobei $\mu \in L^\infty(\Omega)$, $\mu > \mu_0 > 0$, (magnetische) Permeabilität, $\epsilon \in L^\infty(\Omega)$, $\epsilon > \epsilon_0 > 0$, Permittivität und $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ elektrische Leitfähigkeit genannt wird. \mathcal{J}_G ist eine eingeprengte Stromdichte, „ G “ steht für *Generator* oder *gegeben*. Die Einheiten der wichtigsten Größen sind in Tab. 2.1 dargestellt.

elektrische Feldstärke	$\mathcal{E} \left(\frac{\text{V}}{\text{m}} \right)$	Ladungsdichte	$\rho \left(\frac{\text{As}}{\text{m}^3} \right)$
magnetische Induktion	$\mathcal{B} \left(\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right)$	Permeabilität	$\mu \left(\frac{\text{Vs}}{\text{Am}^2} \right)$
dielektrische Verschiebung	$\mathcal{D} \left(\frac{\text{As}}{\text{m}^2} \right)$	Permittivität	$\epsilon \left(\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \right)$
magnetische Feldstärke	$\mathcal{H} \left(\frac{\text{A}}{\text{m}} \right)$	elektr. Leitfähigkeit	$\sigma \left(\frac{\text{A}}{\text{Vm}} \right)$
Stromdichte	$\mathcal{J} \left(\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right)$		

Tab. 2.1: Die wichtigsten Größen und ihre SI-Einheiten

2.1.2 Zeitharmonische Maxwell-Gleichungen

Für den Spezialfall linearer Materialgesetze sind bei zeitharmonischer Anregung mit der Kreisfrequenz ω , $\mathbb{R} \ni \omega \geq 0$, (Einheit *Hertz*, $1 \text{ Hz} = 1 \frac{1}{\text{s}}$) alle Größen zeitharmonisch. D.h. es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}(e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{x})), & \mathcal{B}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}(e^{i\omega t} \mathbf{B}(\mathbf{x})), \\ \mathcal{D}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}(e^{i\omega t} \mathbf{D}(\mathbf{x})), & \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}(e^{i\omega t} \mathbf{H}(\mathbf{x})), \\ \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}(e^{i\omega t} \mathbf{J}(\mathbf{x})), & \rho(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}(e^{i\omega t} q(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{J} und q werden *komplexe Amplituden* genannt. Eingesetzt in (2.11) ergeben sich die *zeitharmonischen* Maxwell-Gleichungen in Ω

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + i\omega \mathbf{D}, \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}, \quad (2.13b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q, \quad (2.13c)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.13d)$$

mit Randbedingungen analog (2.2)

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{f} \quad \text{auf } \Gamma_e \subset \Gamma, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma_h \subset \Gamma$$

und Materialgesetzen entsprechend (2.12)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_G \quad (\text{Ohmsches Gesetz}). \quad (2.14)$$

Falls Ω unbeschränkt ist, wird angenommen, daß die Quellen \mathbf{J} und q kompakte Träger haben.

Für die Eindeutigkeit der Lösung müssen zusätzlich Abstrahlbedingungen im Unendlichen erfüllt werden:

(Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung)

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} (\sqrt{\mu} \mathbf{x} \times \mathbf{H} + \sqrt{\epsilon} |\mathbf{x}| \mathbf{E}) = 0 \quad (2.15a)$$

oder

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} (\sqrt{\epsilon} \mathbf{x} \times \mathbf{E} - \sqrt{\mu} |\mathbf{x}| \mathbf{H}) = 0, \quad (2.15b)$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.

Die Abstrahlungsbedingungen¹ sagen aus, daß sich die Lösungen im Unendlichen lokal wie ebene Wellen verhalten und Leistung von den Quellen in das Unendliche transportiert wird.

Man beachte, daß (2.13d) für $\omega > 0$ redundant ist, denn (2.13d) folgt aus (2.13a). Weiterhin ist dann unter Berücksichtigung der Materialgesetze (2.14) Gleichung (2.13c) eine *Definition* der Ladungsdichte q .

Bemerkung 2.3 (Sprungbedingungen der Felder an Grenzflächen) Aus den Maxwell-Gleichungen ergeben sich bei Annahme endlicher Energien folgende Sprungbedingungen der Felder an orientierten Flächen Γ mit Normalenvektorfeld \mathbf{n} (siehe z.B.

¹ Anzumerken ist, daß die Abstrahlungsbedingung (2.15) durch die für die Eindeutigkeit hinreichende, schwächere Bedingung

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |\sqrt{\mu} \mathbf{e}_R \times \mathbf{H} - \sqrt{\epsilon} \mathbf{E}|^2 dS = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |\sqrt{\epsilon} \mathbf{e}_R \times \mathbf{E} - \sqrt{\mu} \mathbf{H}|^2 dS = 0,$$

wobei S_R eine Kugel mit Radius R um den Ursprung und \mathbf{e}_R der radiale Einheitsvektor ist, ersetzt werden kann, siehe [Wil56].

[Jac83]), wobei wir den (bei vektoriiellen Größen komponentenweise) in Normalenrichtung abwärtsgezählten Sprung² mit $[\cdot]_\Gamma$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_\Gamma &= 0, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_\Gamma &= \begin{cases} 0 & \text{falls } \sigma < \infty, \\ \mathbf{j}_\Gamma & \text{falls } \sigma \rightarrow \infty, \end{cases} \\ [\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}]_\Gamma &= q_\Gamma, \\ [\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}]_\Gamma &= 0. \end{aligned}$$

Die *Flächenströme* \mathbf{j}_Γ sind eine Idealisierung bei unendlicher Leitfähigkeit, die der Tatsache Rechnung tragen, daß sich bei großer Leitfähigkeit Ströme wegen des Skineffektes an Leiteroberflächen konzentrieren können. Die q_Γ sind *Flächenladungen*.

2.2 Die Wirbelstromnäherung

Unter bestimmten, in den nachfolgenden Abschnitten genannten Bedingungen, lassen sich die Maxwell-Gleichungen durch das einfachere Wirbelstrommodell ersetzen, dessen Diskretisierungen im Gegensatz zu denen der vollen Maxwell-Gleichungen nicht auf indefinite Systeme führen. Im zeitabhängigen Fall bedeutet dies ein Wechsel von dem hyperbolischen System der Maxwell-Gleichungen zu einem parabolischen System.

Sei Ω wieder eine offene und zusammenhängende Menge. Dabei zerfalle $\bar{\Omega}$ im folgenden in zwei disjunkte Teilmengen, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_C \cup \bar{\Omega}_I$, wobei Ω_C von leitendem Material, $\sigma > 0$ in Ω_C , und Ω_I von einem ideal isolierenden Material bedeckt werde, $\sigma = 0$ in Ω_I . Ω_C wird stets als beschränkt angenommen. Die Grenze zwischen leitendem und nichtleitendem Gebietsteil sei mit $\Gamma_C = \partial\Omega_C \cap \partial\Omega_I$ bezeichnet, und $\Omega_{C,j}$ seien die zusammenhängenden Teile von Ω_C .

Das zeitharmonische Wirbelstrommodell entsteht aus den Maxwell-Gleichungen (2.13) durch Vernachlässigung des Verschiebungsstromes $i\omega\mathbf{D}$ in (2.13a). Zusammen mit den Materialgleichungen (2.14) ergibt sich:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{in } \Omega \quad (\text{Ampèresches Gesetz}), \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} \quad \text{in } \Omega \quad (\text{Faradaysches Gesetz}), \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.16c)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_G + \sigma\mathbf{E} \quad \text{in } \Omega \quad (\text{Ohmsches Gesetz}), \quad (2.16d)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{f} \quad \text{auf } \Gamma_e \subset \Gamma, \quad (2.16e)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma_h \subset \Gamma. \quad (2.16f)$$

Die zusammenhängenden Teile des Randes mit magnetischer Randbedingung Γ_h setzen wir als einfach zusammenhängend voraus. Falls Ω unbeschränkt ist, werden außerdem

² Man beachte, daß $[\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_\Gamma$ und $[\mathbf{n} \times \mathbf{u}]_\Gamma$ unabhängig von der Orientierung von Γ sind: Bezeichnen \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 die Normalen und \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 die Werte von \mathbf{u} auf den beiden Seiten von Γ , so ist unabhängig davon, ob $\mathbf{n} := \mathbf{n}_1$ oder $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$, $[\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_\Gamma = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{u}_2$ und $[\mathbf{n} \times \mathbf{u}]_\Gamma = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{u}_1 + \mathbf{n}_2 \times \mathbf{u}_2$.

die dann den Maxwell-Gleichungen hinzuzufügenden Abstrahlbedingungen (2.15) durch die Abklingbedingungen

$$\mathbf{E} = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \mathbf{H} = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}) \quad (2.17)$$

ersetzt. Eine typische Anordnung für ein beschränktes Ω mit einem Quellgebiet $\Omega_G = \text{supp } \mathbf{J}_G \subset \Omega_I$ und 3 Leitern ist in Abb. 2.1 (links) dargestellt.

Das Wirbelstrommodell ist eine magnetoquasistatische Näherung der Maxwell-Gleichungen, d.h. es beschreibt *langsam veränderliche* Vorgänge, in denen Änderungen der Energie des elektrischen Feldes gegenüber der des magnetischen Feldes vernachlässigbar sind. Langsam veränderlich bedeutet dabei einerseits, daß

$$d \ll \lambda \quad (\text{quasistationärer oder quasistatistischer Grenzfall}) \quad (2.18)$$

gelten muß, wobei d eine charakteristische Länge der betrachteten Anordnung und λ die (kleinste) Wellenlänge ist, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Die charakteristische Länge wird dabei nicht nur durch die Größe der Leiteranordnung sondern auch durch die Größe der Umgebung, in der man an der Lösung des Problems interessiert ist, bestimmt (siehe [Dir96]).

Andererseits müssen die Vorgänge langsam sein, verglichen mit den Relaxationszeiten, in denen sich Ladungsanhäufungen in den Leitern abbauen, d.h. die betrachteten Leitfähigkeiten σ müssen so groß sein, daß

$$\omega\epsilon \ll \sigma \quad (\text{guter Leiter}) \quad (2.19)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung für die Anwendbarkeit des Wirbelstrommodells ist unmittelbar einsichtig, wenn man in die Maxwell-Gleichung (2.13a) die Materialgleichungen (2.14) einsetzt,

$$\mathbf{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + i\omega\epsilon \mathbf{E},$$

da dann die Vernachlässigung des Verschiebungsstromes $i\omega\epsilon\mathbf{E}$ zumindest innerhalb des Leiters Ω_G gerechtfertigt scheint. Daß der Verschiebungsstrom auch im Nichtleiter Ω_I vernachlässigt werden kann, ist jedoch nicht so leicht einsichtig.

Bemerkung 2.4 Im Unterschied zu den vollen Maxwell-Gleichungen gibt es im Wirbelstrommodell keine Symmetrie zwischen \mathbf{E} und \mathbf{H} als Folge der Vernachlässigung des Verschiebungsstromes $i\omega\mathbf{D}$.

Für die Lösbarkeit des Wirbelstromproblems müssen die Daten \mathbf{J}_G und \mathbf{g} Verträglichkeitsbedingungen genügen: Nach (2.16a), (2.16d) ist

$$\mathbf{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_G \quad \text{in } \Omega_I. \quad (2.20)$$

Unter Verwendung von (1.7) folgt dann aus (2.16e) wegen $\text{div}_\Gamma(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = \mathbf{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{n}$

$$\text{div}_\Gamma \mathbf{g} = \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \Gamma_h. \quad (2.21)$$

Man beachte, daß sich für einen allgemeineren Fall als den hier betrachteten auch nichtlokale Verträglichkeitsbedingungen zwischen \mathbf{J}_G und \mathbf{g} ergeben³. Mit (1.6) folgt aus (2.20) außerdem, daß für jede geschlossene Fläche $\Sigma \subset \Omega_I$

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_G dS = 0 \quad (2.22)$$

erfüllt sein muß. Insbesondere muß

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_G = 0 \quad \text{in } \Omega_I \quad (2.23)$$

gelten.

Die Gleichungen (2.16) bestimmen das elektrische Feld \mathbf{E} in Ω_I nur eindeutig bis auf einen „elektrostatischen Anteil“. Das magnetische Feld \mathbf{H} hingegen ist eindeutig bestimmt. Für ein eindeutiges \mathbf{E} in ganz Ω kann zusätzlich

$$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = 0 \quad \text{in } \Omega_I, \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_h \cap \partial\Omega_I \quad (2.24b)$$

und das Verschwinden aller Leiter- und Randladungen gefordert werden,

$$\int_{\Sigma} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad \forall \Sigma \in \mathcal{Q}_{\Gamma}, \quad (2.24c)$$

wobei die Menge \mathcal{Q}_{Γ} Teilränder von Ω_I enthält und wie folgt konstruiert wird: Seien $\Omega_{I,i}$ die zusammenhängenden Teile von Ω_I , $i = 1, \dots, N_{\Omega_I}$, und $\Gamma_{i,j}$ die zusammenhängenden Teile von $\partial(\Omega_{I,i}) \setminus \Gamma_h$, $j = 1, \dots, N_{\Gamma,i}$. Definiere

$$\mathcal{Q}_{\Gamma} := \{\Gamma_{i,j}, i = 1, \dots, N_{\Omega_I}, j = 1, \dots, N_{\Gamma,i} - 1\}.$$

Die Anzahl der Elemente in \mathcal{Q}_{Γ} ist $|\mathcal{Q}_{\Gamma}| = N_{\Gamma} - N_{\Omega_I}$ mit $N_{\Gamma} := \sum_{i=1}^{N_{\Omega_I}} N_{\Gamma,i}$. Zur Verdeutlichung ist in Abb. 2.1 eine Situation mit 3 Leitern dargestellt.⁴

Oft wird auch das um (2.24) erweiterte Problem (2.16) als das Wirbelstrommodell bezeichnet, vgl. [AFV01]. In vielen Wirbelstromanwendungen ist das elektrische Feld im

³ Die Vorgabe der tangentialen magnetischen Feldstärke fixiert den Stromfluß durch Flächen, deren Ränder in Γ_h liegen. Wir haben vorausgesetzt, daß die Zusammenhangskomponenten von Γ_h einfach zusammenhängend sind. Ohne diese Voraussetzung werden durch eine magnetische Randbedingung i.a. auch Ströme durch Teile von Γ_e fixiert und (2.21) ist zu ersetzen: Für jede Fläche $\tilde{\Sigma}$ in $\overline{\Omega_I}$, deren Rand Teilmenge von $\Gamma_h \cap \overline{\Omega_I}$ ist, muß dann

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_G dS = \int_{\partial\tilde{\Sigma}} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{g} ds$$

erfüllt sein, wobei $\boldsymbol{\nu}$ der Normalenvektor der Kurve $\partial\tilde{\Sigma}$ in der Fläche Γ ist.

⁴ Grundsätzlich gilt: Falls es nur Ränder mit elektrischen Randbedingungen gibt, ist $|\mathcal{Q}_{\Gamma}| = \beta_2(\Omega_I)$. Falls weiterhin Ω_I zusammenhängend und Ω_C strikt in Ω enthalten ist, entspricht dies der Anzahl der zusammenhängenden Komponenten von Ω_C , d.h. der Anzahl der Leiter $\Omega_{C,i}$.

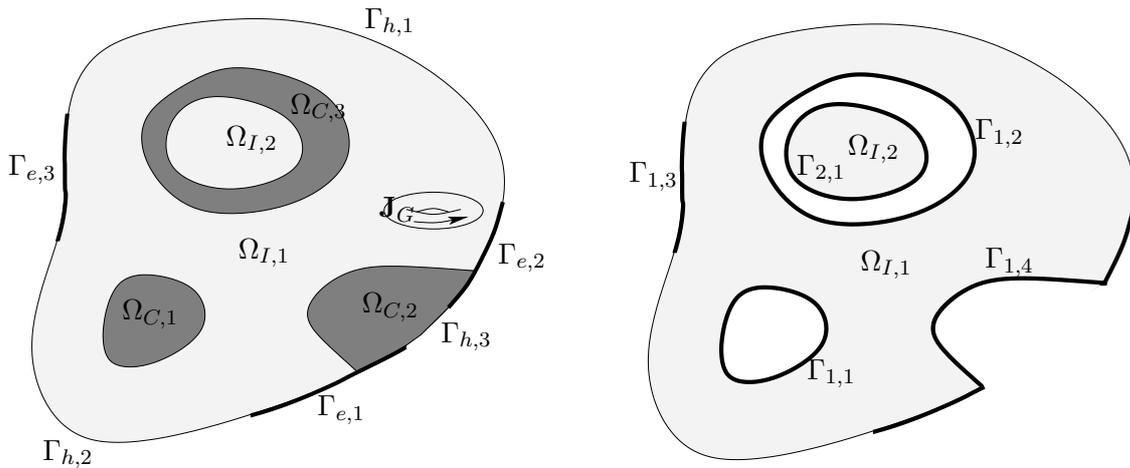


Abb. 2.1: Links: Eine typische Situation mit 3 Leitern und je 3 zusammenhängenden Teilen des Randes mit elektrischer bzw. magnetischer Randbedingung. Der Nichtleiter Ω_I besteht aus 2 zusammenhängenden Teilen. Rechts: Für die Eindeutigkeit des elektrischen Feldes in Ω_I müssen 3 Flüsse zusätzlich vorgegeben werden, d.h. \mathcal{Q}_Γ enthält 3 Flächenstücke, z.B. $\Gamma_{1,1}$, $\Gamma_{1,2}$ und $\Gamma_{1,3}$. $\Gamma_{2,1}$ kann jedoch nicht Element von \mathcal{Q}_Γ sein.

Nichtleiter jedoch nicht von Interesse oder entbehrt seiner physikalischen Bedeutung (beispielsweise in der Nähe von Spulen, die durch Vorgabe einer bekannten Stromverteilung modelliert werden). Für diese Fälle kann aus Modellierungssicht auf die Nebenbedingung (2.24) verzichtet werden, die dann die Rolle einer *Eichung* hat, da sie aus der Äquivalenzklasse aller elektrischen Felder \mathbf{E} , die alle zu demselben magnetischen Feld \mathbf{H} gehören, eines als Repräsentanten auswählt.

2.3 Variationsformulierungen

Für das Wirbelstrommodell (2.16) existieren eine Vielzahl von Variationsformulierungen (siehe z.B. [Bir88, NTF88, BPR⁺90, AR90, Kos94]). Grundsätzlich lassen sich jedoch zwei Klassen von zueinander dualen Variationsformulierungen angeben [Bos85]: auf dem Magnetfeld \mathbf{H} basierende Variationsformulierungen, die (2.16a) im starken Sinn, (2.16b) im schwachen Sinne berücksichtigen, und auf dem elektrischen Feld \mathbf{E} basierende, deren Lösungen (2.16a) im schwachen und (2.16b) im starken Sinne erfüllen.

Die Vielzahl der in der Literatur auftretenden Formulierungen kommt durch verschiedenartige Potentialansätze für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} und Kombinationen der Ansätze auf unterschiedlichen Gebietsteilen zustande. Wir betrachten im folgenden stellvertretend eine rein \mathbf{H} -basierte und eine rein \mathbf{E} -basierte Variationsformulierung mit den Feldstärken als Unbekannte, d.h. ohne Potentialansätze. Zunächst betrachten wir nur den Fall, daß Ω beschränkt ist.

H-basierte Formulierung

Für eine Variationsformulierung mit der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} als primärer Unbekannten definieren wir die Sobolev-Räume

$$\mathcal{V}(\mathbf{J}_G, \mathbf{g}) := \{\mathbf{H}' \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \mathbf{rot} \mathbf{H}' = \mathbf{J}_G \text{ in } \Omega_I, \mathbf{n} \times \mathbf{H}' = \mathbf{g} \text{ auf } \Gamma_h\} \quad (2.25)$$

und

$$\mathcal{V}_0 := \mathcal{V}(0, 0). \quad (2.26)$$

Ausgehend vom Faradayschen Gesetz (2.16b) erhalten wir durch Multiplikation mit $\mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0$ unter Anwendung der partiellen Integrationsformel (1.4)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (i\omega\mu \mathbf{H} + \mathbf{rot} \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}' \, dx \\ &= i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}' \, dx - \int_{\Gamma_e} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}' \, dS \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0. \end{aligned}$$

Da in Ω_I $\mathbf{rot} \mathbf{H}' = 0$ und auf Γ_h $\mathbf{n} \times \mathbf{H}' = 0$, kann man \mathbf{E} eliminieren: Aus (2.16a) und (2.16d) folgt, daß $\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}(\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}_G)$ in Ω_C . Unter der Berücksichtigung der Randdaten $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{f}$ auf Γ_e lautet dann eine \mathbf{H} -basierte Variationsformulierung:

Finde $\mathbf{H} \in \mathcal{V}(\mathbf{J}_G, \mathbf{g})$, so daß $\forall \mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0$

$$\int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}' \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' \, dx = \int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}' \, dx + \int_{\Gamma_e} \mathbf{f} \cdot \mathbf{H}' \, dS. \quad (2.27)$$

Satz 2.1 *Existiert ein $\mathbf{H}_G \in \mathcal{V}(\mathbf{J}_G, \mathbf{g})$ und ist $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}; \Omega)$ hat das Problem (2.27) eine eindeutige Lösung \mathbf{H} .*

Beweis: Wir definieren die Sesquilinearform

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}^* \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* \, dx,$$

die stetig auf $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ ist, und suchen eine Lösung in der Form $\mathbf{H} = \mathbf{H}_G + \mathbf{H}_0$ mit $\mathbf{H}_G \in \mathcal{V}(\mathbf{J}_G, \mathbf{g})$, $\mathbf{H}_0 \in \mathcal{V}_0$. Problem (2.27) hat dann die Form $a(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}') = l(\mathbf{H}')$ mit auf \mathcal{V}_0 stetiger rechten Seite

$$l(\mathbf{H}') = -a(\mathbf{H}_G, \mathbf{H}') + \int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}' \, dx + \int_{\Gamma_e} \mathbf{f} \cdot \mathbf{H}' \, dS.$$

Außerdem gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß $\forall \mathbf{H}_0 \in \mathcal{V}_0$

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_0)| &= \sqrt{\left(\int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}_0^* \, dx \right)^2 + \left(\int_{\Omega} \omega\mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^* \, dx \right)^2} \\ &\geq C \|\mathbf{H}_0\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)}^2, \end{aligned}$$

d.h. $a(\cdot, \cdot)$ ist \mathcal{V}_0 -koerziv. Die Behauptung folgt dann aus dem Lemma von Lax-Milgram (Satz 1.3). \square

E-basierte Formulierung

Wir definieren den Raum $\mathcal{W}(\mathbf{f})$ durch

$$\mathcal{W}(\mathbf{f}) := \{\mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \mathbf{n} \times \mathbf{E}' = \mathbf{f} \text{ auf } \Gamma_e\}. \quad (2.28)$$

Einsetzen des Ohmschen Gesetzes (2.16d) in das Ampèresche Gesetz (2.16a) und Testen mit $\mathbf{E}' \in \mathcal{W}(0)$ ergibt

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_C} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_G) \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{E}' \in \mathcal{W}(0).$$

Partielle Integration (1.4) liefert unter Berücksichtigung von $\mathbf{n} \times \mathbf{E}' = 0$ auf Γ_e

$$\int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_h} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}' \, dS - \int_{\Omega_C} (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_G) \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{E}' \in \mathcal{W}(0). \quad (2.29)$$

Aus dem Faradayschen Gesetz (2.16b) und der Materialbeziehung (2.16c) folgt $\mathbf{H} = -\frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}$. Einsetzen in (2.29) und Berücksichtigen der Randdaten $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{g}$ auf Γ_h führt dann auf eine **E**-basierte Variationsformulierung:

Finde $\mathbf{E} \in \mathcal{W}(\mathbf{f})$, so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathcal{W}(0)$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Gamma_h} \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}' \, dS. \quad (2.30)$$

Satz 2.2 *Die Variationsformulierung (2.30) besitzt eine eindeutige Lösung für $\mathbf{H} = -\frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}$. Stellt man das Variationsproblem über dem Raum*

$$\widetilde{\mathcal{W}}(f) := \mathcal{W}(f) \cap \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^0(\text{div}_\epsilon; \Omega_I), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_h, \int_{\Sigma} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \forall \Sigma \in \mathcal{Q}_\Gamma\},$$

ist auch \mathbf{E} eindeutig.

Beweis: Siehe [ABN00, Satz 3.2] für der Fall $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ auf Γ_e , $\Gamma_h = \emptyset$. Der Beweis für den allgemeineren, vorliegenden Fall ist analog:

Setze

$$a(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

$$|\mathbf{E}_0|_{\mathfrak{E}; \Omega} := \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}_0, \mathbf{rot} \mathbf{E}_0 \right)_{L^2(\Omega)} + \omega (\sigma \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0)_{L^2(\Omega)}}.$$

Das Variationsproblem (2.30) kann man als Problem mit homogenen Randbedingungen schreiben: Zerlege $\mathbf{E} = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_0$ mit $\mathbf{E}_f \in \widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{f})$, $\mathbf{E}_0 \in \widetilde{\mathcal{W}}(0)$,

$$a(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}') = l(\mathbf{E}') := -a(\mathbf{E}_f, \mathbf{E}') - i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Gamma_h} \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}' \, dS \quad \forall \mathbf{E}' \in \mathcal{W}(0).$$

Da σ auf Ω_C und μ auf Ω gleichmäßig positiv sind, gilt $|\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'|_{\mathfrak{E};\Omega} \leq |\mathbf{E}_0|_{\mathfrak{E};\Omega} + |\mathbf{E}'|_{\mathfrak{E};\Omega} \forall \mathbf{E}_0, \mathbf{E}' \in \widetilde{\mathcal{W}}(0)$ und $|\alpha \mathbf{E}_0|_{\mathfrak{E};\Omega} = |\alpha| |\mathbf{E}_0|_{\mathfrak{E};\Omega} \forall \mathbf{E}_0 \in \widetilde{\mathcal{W}}(0)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, d.h. $|\cdot|_{\mathfrak{E};\Omega}$ ist eine Seminorm auf $\widetilde{\mathcal{W}}(0)$. Wenn $|\mathbf{E}_0|_{\mathfrak{E};\Omega} = 0$, ist \mathbf{E}_0 Lösung von

$$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}_0) = 0 \quad \text{in } \Omega_I, \quad (2.31a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{in } \Omega_I, \quad (2.31b)$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0)|_{\Gamma_D} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D := \Gamma_C \cap \Gamma_e, \quad (2.31c)$$

ein harmonisches Vektorfeld, das durch Festlegen von $(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_N}$ auf $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ und den $|\mathcal{Q}_\Gamma|$ Flüssen $\int_{\Sigma} \epsilon \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} \, dS$, eindeutig bestimmt wird, siehe z.B. [Mar68, Pic82, Bos00].

Da $\mathbf{E}_0 \in \widetilde{\mathcal{W}}(0)$, gilt $(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma_N} = 0$ und

$$\int_{\Sigma} \epsilon \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \forall \Sigma \in \mathcal{Q}_\Gamma,$$

somit ist $\mathbf{E}_0 \equiv 0$. Da demnach $|\mathbf{E}_0|_{\mathfrak{E};\Omega} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_0 \equiv 0$, ist $|\cdot|_{\mathfrak{E};\Omega}$ auch eine Norm auf $\widetilde{\mathcal{W}}(0)$, $\widetilde{\mathcal{W}}(0)$ ist vollständig bzgl. dieser Norm. Trivialerweise ist

$$|a(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{E}_0|_{\mathfrak{E};\Omega}^2,$$

d.h. $a(\cdot, \cdot)$ ist $\widetilde{\mathcal{W}}(0)$ -koerziv und Existenz und Eindeutigkeit des Variationsproblems über $\widetilde{\mathcal{W}}(0)$ folgt aus dem Lax-Milgram-Lemma (Satz 1.3).

Sucht man in dem größeren Raum $\mathcal{W}(0)$, folgt aus $|\mathbf{E}_0|_{\mathfrak{E};\Omega} = 0$ nur $\mathbf{E}_0 \equiv 0$ in Ω_C , in Ω_I gilt $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0$, $(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0)|_{\Gamma_D} = 0$ auf Γ_D , wodurch \mathbf{E}_0 nicht eindeutig bestimmt wird. Daher ist $a(\cdot, \cdot)$ dann nur über einem entsprechenden Quotientenraum über den Lösungen von (2.31) koerziv. Da letztere wirbelfrei sind, gilt für das Magnetfeld $\mathbf{H}_0 := -\frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 \equiv 0$, so daß \mathbf{H} eindeutig ist. \square

Bemerkung 2.5 (Energie- und Leistungsnorm) Da $|\cdot|_{\mathfrak{E};\Omega}$ auf $\mathcal{W}(0)$ eine Norm ist, schreiben wir im folgenden $\|\cdot\|_{\mathfrak{E};\Omega}$ statt $|\cdot|_{\mathfrak{E};\Omega}$. Wir passen uns dem Sprachgebrauch an und nennen $\|\cdot\|_{\mathfrak{E};\Omega}$ die Energienorm (zur \mathbf{E} -Formulierung), da sie die von der Sesquilinearform implizierte Norm ist. Man beachte jedoch, daß die Energienorm hier nicht die Bedeutung einer Energie hat (und auch nicht deren physikalische Einheit besitzt). Der Energiebegriff ist im zeitharmonischen Fall sinnlos, da man zeitlich periodische Vorgänge betrachtet. Der Begriff Leistung (also Energie pro Zeit) ist jedoch sinnvoll. Wir definieren daher auch die skalierte Energienorm („Leistungsnorm“), deren Quadrat (abgesehen von einem Faktor $\frac{1}{2}$)

die Summe aus maximaler magnetischer Leistung und mittlerer ohmscher Verlustleistung ist (siehe auch Kap. 3.1):

$$\|\mathbf{E}\|_{\mathfrak{P};\Omega}^2 := \frac{1}{\omega} \|\mathbf{E}\|_{\mathfrak{E};\Omega}^2 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}, \mathbf{rot} \mathbf{E} \right)_{L^2(\Omega)} + (\sigma \mathbf{E}, \mathbf{E})_{L^2(\Omega_C)}. \quad (2.32)$$

Bemerkung 2.6 (Räume bei unbeschränktem Ω) Für unbeschränktes Ω , muß \mathbf{E} nicht in $L^2(\Omega)$ liegen. Das ist nicht unnatürlich, da nicht $\|\mathbf{E}\|_{L^2(\Omega)}^2$, sondern $\|\mathbf{H}\|_{L^2(\Omega)}^2$ die Rolle einer Energie bzw. Leistung in ganz Ω spielt. Da $\mathbf{H} = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2})$, liegt \mathbf{H} in $L^2(\Omega)$. Bei der \mathbf{E} -basierten Variationsformulierung (2.30) über dem eingeschränkten Raum $\widetilde{\mathcal{W}}(0)$ ist auch $\mathbf{E} = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2})$ (siehe [ABN00]), so daß \mathbf{E} ebenfalls in $L^2(\Omega)$ liegt. Die Variationsformulierungen gelten daher auch für unbeschränktes Ω (wobei dann natürlich die Randbedingungen am äußeren Rand wegfallen), nur bei der ungeeichten \mathbf{E} -basierten Formulierung (über dem Raum $\mathcal{W}(0)$) ist der Beppo-Levi-Raum $BL(\mathbf{rot}; \Omega)$,

$$BL(\mathbf{rot}; \Omega) := \left\{ \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x})}{\sqrt{1 + \left| \frac{\mathbf{x}}{D} \right|^2}} \in L^2(\Omega), \mathbf{rot} \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (2.33)$$

statt $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ zu verwenden, vgl. [DL88, DL90a, Ces96, Hip02b]. Dabei ist D eine beliebige Konstante mit der Dimension einer Länge.

2.4 Eine mathematische Rechtfertigung für das Wirbelstrommodell

Um eine bessere Einschätzung für den Bereich der Gültigkeit des Wirbelstrommodells (2.16) zu bekommen, entwickeln wir im folgenden eine Abschätzung für den Modellierungsfehler zur Lösung der vollen Maxwell-Gleichungen (2.13). Die dargestellten Ergebnisse stellen eine Verbesserung der bisherigen Rechtfertigung für das Wirbelstrommodell dar. Weiterhin werden wir das asymptotische Verhalten des Fehlers für $\omega \rightarrow 0$ untersuchen und das Ergebnis kommentieren.

2.4.1 Abschätzung des Modellierungsfehlers

Wir betrachten hier die \mathbf{E} -basierte Variationsformulierung (2.30) (und entsprechend eine \mathbf{E} -basierte Variationsformulierung für die Maxwell-Gleichungen) mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ auf $\partial\Omega$, Ω sei beschränkt und zusammenhängend. Um die Lösbarkeit des Wirbelstromproblems zu garantieren, nehmen wir für die anregende Stromdichteverteilung \mathbf{J}_G

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_G = 0 \quad \text{in } \Omega_I \quad \text{und} \quad \mathbf{J}_G \perp \mathcal{D}_{\Omega_I} \quad (2.34)$$

an. Es sei darauf hingewiesen, daß für die Lösbarkeit der vollen Maxwell-Gleichungen Bedingung (2.34) nicht notwendig ist. Demzufolge beschränken wir uns bei der Fehlerbetrachtung hier auf eine Unterklasse von Maxwell-Problemen, bei denen wegen (2.13a) keine Volumenladungen in Ω_I und keine Nettoladungen auf den Leitern $\Omega_{C,i}$ existieren.

Vereinfachend nehmen wir weiterhin an, daß Ω_C strikt in Ω enthalten ist, d.h. $\overline{\Omega_C} \cap \partial\Omega = \emptyset$. Somit ist der zugrundeliegende Raum \mathcal{X} , in dem die Lösung zu suchen ist, durch

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}^0(\operatorname{div}_\epsilon; \Omega_I) =: \mathcal{X} \oplus \mathcal{D}_{\Omega_I}^\epsilon \quad (2.35)$$

gegeben.

Bemerkung 2.7 Man beachte den Unterschied zwischen den beiden Modellen: Bei den Maxwell-Gleichungen ist die Einschränkung im Lösungsraum in (2.35) eine Folge der Bedingungen an die rechte Seite, während beim Wirbelstrommodell die Divergenzbedingung in Ω_I zusammen mit der Orthogonalität der Lösung zu den harmonischen Dirichlet-Vektorfeldern eine zusätzliche Modellannahme (oder Eichung, je nach Standpunkt) ist.

Das Wirbelstromproblem (siehe Abschnitt 2.3) führt auf folgendes Variationsproblem:

Finde \mathbf{E} in \mathcal{X} , so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathcal{X}$

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{E}') := \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}, \mathbf{rot} \mathbf{E}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + i\omega (\sigma \mathbf{E}, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} = -i\omega (\mathbf{J}_G, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.36)$$

Das volle Maxwell-Problem lautet (Herleitung der Variationsformulierung aus (2.13) analog zum Wirbelstromproblem in Abschnitt 2.3):

Finde \mathbf{E}^m in \mathcal{X} , so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} a^m(\mathbf{E}^m, \mathbf{E}') &:= \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}^m, \mathbf{rot} \mathbf{E}' \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + i\omega (\sigma \mathbf{E}^m, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} - \omega^2 (\epsilon \mathbf{E}^m, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &= -i\omega (\mathbf{J}_G, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Folglich ist der Modellierungsfehler $\boldsymbol{\delta} := \mathbf{E}^m - \mathbf{E}$ Lösung der folgenden beiden Variationsprobleme:

Finde $\boldsymbol{\delta}$ in \mathcal{X} , so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathcal{X}$

$$a^m(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{E}') = -\omega^2 (\epsilon \mathbf{E}, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad (2.38)$$

und

$$a(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{E}') = \omega^2 (\epsilon \mathbf{E}^m, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.39)$$

Satz 2.3 Sei $\Omega_I \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge von $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Omega_C := \Omega \setminus \overline{\Omega_I}$ deren Komplement, so daß $\partial\Omega_I$ und $\partial\Omega_C$ Lipschitz sind. Sei \mathcal{X} wie in (2.35) definiert. Dann existieren nur von der Form von Ω_I und Ω_C abhängige Konstanten C_1 und C_2 , so daß

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)}^2 \leq \left(C_1 D^2 \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}^2 \right) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{X}, \quad (2.40)$$

mit $D = \operatorname{diam}(\Omega)$.

Beweis: Siehe [Alo99, Satz 2.1], wobei dort vorausgesetzt wird, daß die Einbettung $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_I) \cap \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega_I) \hookrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_I)$ stetig ist. Die Voraussetzung ist erfüllt, falls Ω_I konvex ist oder $\partial\Omega_I$ glatt ($C^{1,1}$), siehe [GR86, Satz 3.8]. Ein Beweis ohne diese Voraussetzung ist für den Fall Ω_C zusammenziehbar im Anhang A gegeben. \square

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mu_{max}, \epsilon_{max}$ die kleinsten oberen Schranken in Ω für die Materialkoeffizienten μ und ϵ und mit σ_{min} die größte untere Schranke für σ in Ω_C . Mittels Satz 2.3 läßt sich die $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -Norm durch die Energienorm $\|\cdot\|_{\mathfrak{E};\Omega}$ bzw. die „Leistungsnorm“ $\|\cdot\|_{\mathfrak{P};\Omega}$ abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &= \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}^2 \leq C_1 D^2 \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1 + C_2) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}^2 \\ &= \mu_{max} C_1 D^2 \frac{1}{\mu_{max}} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{(1 + C_2)}{\omega \sigma_{min}} \omega \sigma_{min} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}^2 \\ &\leq \left(C_1 \mu_{max} D^2 + \frac{1 + C_2}{\omega \sigma_{min}} \right) \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{E};\Omega}^2 = \left(C_1 \omega \mu_{max} D^2 + \frac{1 + C_2}{\sigma_{min}} \right) \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{P};\Omega}^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Die Wirbelstrom-Sesquilinearform ist trivialer Weise koerziv und es gilt mit (2.41)

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{E};\Omega}^2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_1 \mu_{max} D^2 + \frac{1 + C_2}{\omega \sigma_{min}} \right)^{-1} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{X}. \quad (2.42)$$

Aus der Fehlergleichung (2.39) folgt andererseits

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\delta}\|_{\mathfrak{E};\Omega}^2 &\leq |a(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta})| = |\omega^2 (\epsilon \mathbf{E}^m, \boldsymbol{\delta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}| \leq \omega^2 \epsilon_{max} \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\delta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \omega^2 \epsilon_{max} \left(C_1 \mu_{max} D^2 + \frac{1 + C_2}{\omega \sigma_{min}} \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\delta}\|_{\mathfrak{E};\Omega} \\ &\leq \omega^2 \epsilon_{max} \left(C_1 \mu_{max} D^2 + \frac{1 + C_2}{\omega \sigma_{min}} \right) \|\mathbf{E}^m\|_{\mathfrak{E};\Omega} \|\boldsymbol{\delta}\|_{\mathfrak{E};\Omega}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Aus (2.42) und (2.43) erhalten wir so Abschätzungen für den Modellierungsfehler $\mathbf{E}^m - \mathbf{E}$:

$$\frac{\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}} \leq \sqrt{2} \left(C_1 \epsilon_{max} \mu_{max} \omega^2 D^2 + (1 + C_2) \frac{\omega \epsilon_{max}}{\sigma_{min}} \right). \quad (2.44)$$

Dieselbe obere Schranke gilt auch für die Energie- bzw. „Leistungsnorm“:

$$\frac{\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathfrak{E};\Omega}}{\|\mathbf{E}^m\|_{\mathfrak{E};\Omega}} = \frac{\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathfrak{P};\Omega}}{\|\mathbf{E}^m\|_{\mathfrak{P};\Omega}} \leq \sqrt{2} \left(C_1 \epsilon_{max} \mu_{max} \omega^2 D^2 + (1 + C_2) \frac{\omega \epsilon_{max}}{\sigma_{min}} \right). \quad (2.45)$$

D.h. hinreichend für die Anwendbarkeit des Wirbelstrommodells sind die Bedingungen

$$C_1 \epsilon_{max} \mu_{max} \omega^2 D^2 \ll 1 \quad (2.46)$$

und

$$(1 + C_2) \frac{\omega \epsilon_{max}}{\sigma_{min}} \ll 1, \quad (2.47)$$

die abgesehen von den Konstante C_1 und C_2 wegen

$$\omega \sqrt{\mu_{max} \epsilon_{max}} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}}$$

genau den bereits genannten, allgemein anerkannten Bedingungen (2.18) (quasistationärer o. quasistatischer Grenzfall) und (2.19) (guter Leiter) entsprechen. Da C_1, C_2 die Konstanten aus Satz 2.3 sind, spiegeln sie den Einfluß der geometrischen Form von Ω_I und Ω_C auf den Modellierungsfehler wieder.

2.4.2 Asymptotisches Verhalten des Fehlers für $\omega \rightarrow 0$

In bisherigen Arbeiten zur Rechtfertigung des Wirbelstrommodells lag das Augenmerk auf dem asymptotischen Verhalten des Modellierungsfehlers $\|\boldsymbol{\delta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ (siehe [ABN00]) bzw. $\|\boldsymbol{\delta}\|_{\mathfrak{E};\Omega}$ (siehe [Alo99]) für $\omega \rightarrow 0$.

Wir nehmen dies zum Anlaß, hier ebenfalls das asymptotische Verhalten des Fehlers für $\omega \rightarrow 0$ zu betrachten, beschränken uns dabei allerdings der Einfachheit halber auf den Fall konstanter Koeffizienten μ , ϵ und σ und nehmen an, daß \mathbf{J}_G für kleine ω nicht von ω abhängt. Weiterhin sei Ω zusammenziehbar.

Ausgehend von (2.44) bzw. (2.43) erhalten wir für die absoluten Fehler

$$\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \left(C_1 \epsilon \mu \omega^2 D^2 + (1 + C_2) \frac{\omega \epsilon}{\sigma} \right) \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (2.48)$$

$$\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathfrak{E};\Omega} = \sqrt{\omega} \|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathfrak{P};\Omega} \leq \omega \sqrt{2\epsilon} \left(C_1 \epsilon \mu \omega^2 D^2 + (1 + C_2) \frac{\omega \epsilon}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.49)$$

Wir müssen demnach das Verhalten von $\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ für $\omega \rightarrow 0$ untersuchen.

Eine Schranke für $\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$

Da \mathbf{E}^m Lösung von (2.37) ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \|\mathbf{rot} \mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 - \omega^2 \epsilon \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &= \operatorname{Re} a^m(\mathbf{E}^m, \mathbf{E}^m) \\ &\leq |i\omega (\mathbf{J}_G, \mathbf{E}^m)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}| \\ &\leq \omega \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{rot} \mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq \sqrt{\omega \mu \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \omega^2 \epsilon \mu \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2} \\ &= \sqrt{\omega \mu \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left(\|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \omega \epsilon \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right)}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Weiterhin wollen wir eine Abschätzung für $\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}$ erhalten, um anschließend wieder Satz 2.3 anwenden zu können. Dazu testen wir (2.37) mit

$$\mathbf{E}' = \begin{cases} \mathbf{E}'|_{\Omega_I} \in C_0^\infty(\Omega_I) \\ \mathbf{E}'|_{\Omega_C} \equiv 0 \end{cases}$$

und sehen, daß Lösungen der Variationsformulierung

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}^m - \omega^2 \epsilon \mathbf{E}^m = -i\omega \mathbf{J}_G \quad \text{in } \Omega_I \quad (2.51)$$

im Distributionensinne erfüllen. Partielle Integration (1.4) in Ω_I liefert dann das auf Ω_C reduzierte Problem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{E}^m, \mathbf{rot} \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} + \omega \sigma (\mathbf{E}^m, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} - \omega^2 \epsilon (\mathbf{E}^m, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \\ = -i\omega (\mathbf{J}_G, \mathbf{E}')_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} + \left\langle \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}^m \right)|_{\Omega_I} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_\tau \right\rangle_{\tau, \partial\Omega_C} \quad \forall \mathbf{E}' \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Wir spalten \mathbf{E}^m entsprechend einer $L^2(\Omega)$ -orthogonalen Helmholtz-Zerlegung

$$L^2(\Omega) = \mathbf{H}^0(\operatorname{div}; \Omega) \oplus \mathbf{grad} H_0^1(\Omega) \quad (2.53)$$

auf (siehe [GR86]),

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{E}_0^m + \mathbf{grad} \phi, \quad \mathbf{E}_0^m \in \mathbf{H}^0(\operatorname{div}; \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega), \quad \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (2.54)$$

Einsetzen der Zerlegung in (2.52) und Testen mit Gradienten liefert

$$\begin{aligned} i\omega\sigma (\mathbf{grad} \phi + \mathbf{E}_0^m, \mathbf{grad} \phi')_{L^2(\Omega_C)} - \omega^2\epsilon (\mathbf{grad} \phi + \mathbf{E}_0^m, \mathbf{grad} \phi')_{L^2(\Omega_C)} \\ = -i\omega (\mathbf{J}_G, \mathbf{grad} \phi')_{L^2(\Omega_C)} + \left\langle \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}^m|_{\Omega_I} \times \mathbf{n}, \mathbf{grad} \phi' \right\rangle_{\tau, \partial\Omega_C} \quad \forall \phi' \in H^1(\Omega_C), \end{aligned} \quad (2.55)$$

wobei wir berücksichtigt haben, daß wegen der Annahme $\overline{\Omega_C} \cap \partial\Omega = \emptyset$, für die Beschränkung auf Ω_C in der Tat alle Testfunktionen $\phi' \in H^1(\Omega_C)$ zugelassen sind. Der Oberflächenterm läßt sich mit (1.7) und (1.6) umschreiben zu

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}^m \right)|_{\Omega_I} \times \mathbf{n}, \mathbf{grad} \phi' \right\rangle_{\tau, \partial\Omega_C} &= - \left\langle \operatorname{div}_\Gamma \left(\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}^m \right)|_{\Omega_I} \times \mathbf{n} \right), \phi' \right\rangle_{\frac{1}{2}, \partial\Omega_C} \\ &= - \left\langle \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}^m \right)|_{\Omega_I}, \phi' \right\rangle_{\frac{1}{2}, \partial\Omega_C} \\ &= - \left\langle \mathbf{n} \cdot \left(\omega^2\epsilon \mathbf{E}^m - i\omega \mathbf{J}_G \right)|_{\Omega_I}, \phi' \right\rangle_{\frac{1}{2}, \partial\Omega_C}, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus der Erfüllung von (2.51) im Distributionensinne ergibt. Damit erhalten wir für (2.55) nach den weiteren partiellen Integrationen

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_G, \mathbf{grad} \phi')_{L^2(\Omega_C)} &= - (\operatorname{div} \mathbf{J}_G, \phi')_{L^2(\Omega_C)} + \langle \mathbf{J}_G|_{\Omega_C} \cdot \mathbf{n}, \phi' \rangle_{\frac{1}{2}, \partial\Omega_C}, \\ (\mathbf{E}_0^m, \mathbf{grad} \phi')_{L^2(\Omega_C)} &= - (\operatorname{div} \mathbf{E}_0^m, \phi')_{L^2(\Omega_C)} + \langle \mathbf{E}_0^m|_{\Omega_C} \cdot \mathbf{n}, \phi' \rangle_{\frac{1}{2}, \partial\Omega_C} = \langle \mathbf{E}_0^m \cdot \mathbf{n}, \phi' \rangle_{\frac{1}{2}, \partial\Omega_C} \end{aligned}$$

und kurzer Umformung:

$$(\mathbf{grad} \phi, \mathbf{grad} \phi')_{L^2(\Omega_C)} = (f, \phi')_{L^2(\Omega_C)} + \langle g, \phi' \rangle_{\frac{1}{2}, \Omega_C} \quad \forall \phi' \in H^1(\Omega_C) \quad (2.56)$$

mit

$$\begin{aligned} f &:= \frac{1}{\sigma + i\omega\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{J}_G, \\ g &:= \frac{1}{\sigma + i\omega\epsilon} \left(i\omega(\epsilon \mathbf{E}^m)|_{\Omega_I} \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{J}_G \cdot \mathbf{n}]_{\partial\Omega_C} \right) + \mathbf{E}_0^m|_{\partial\Omega_C} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

— ein Standard-Neumann-Problem in Ω_C . Da nach Voraussetzung

$$\mathbf{J}_G \perp \mathcal{D}_{\Omega_I}, \quad \mathbf{E}^m|_{\Omega_I} \perp \mathcal{D}_{\Omega_I} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_0^m \in \mathbf{H}^0(\operatorname{div}; \Omega),$$

ist für die rechte Seite $(f, 1)_{L^2(\Omega_C)} + \langle g, 1 \rangle_{\frac{1}{2}, \Omega_C} = 0$ erfüllt. Folglich ist (2.56) lösbar und es gilt (siehe z.B. [GR86])

$$\begin{aligned} \|\mathbf{grad} \phi\|_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega_C)} &\leq C \left(D \|f\|_{L^2(\Omega_C)} + \sqrt{D} \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)} \right) \\ &\leq \frac{C}{|\sigma + i\omega\epsilon|} \left(D \|\operatorname{div} \mathbf{J}_G\|_{L^2(\Omega_C)} + \sqrt{D} \left\| [\mathbf{J}_G \cdot \mathbf{n}]_{\partial\Omega_C} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{D} \omega \|(\epsilon \mathbf{E}^m)|_{\Omega_I} \cdot \mathbf{n}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)} \right) \\ &\quad + C \sqrt{D} \|\mathbf{E}_0^m \cdot \mathbf{n}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dabei ist C hier und im folgenden eine generische, dimensionslose Konstante. Die Skalierungen mit D sind für korrekte physikalische Einheiten der Terme erforderlich.

Der letzte Term in (2.57) läßt sich mit Hilfe des Spursatzes für Funktionen in $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_C)$ abschätzen:

$$C \sqrt{D} \|\mathbf{E}_0^m \cdot \mathbf{n}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)} \leq C D \|\mathbf{E}_0^m\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega_C)} = C D \|\mathbf{E}_0^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \leq C D \|\mathbf{E}_0^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.58)$$

Da $\mathbf{E}_0^m \in \mathbf{H}^0(\operatorname{div}; \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ und Ω als zusammenziehbar angenommen wurde, gilt nach [GR86, Lemma 3.4]

$$\|\mathbf{E}_0^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C D \|\mathbf{rot} \mathbf{E}_0^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.59)$$

Um der kompakteren Schreibweise willen definieren wir für die folgenden Umformungen

$$g(\mathbf{J}_G) := \left(D \|\operatorname{div} \mathbf{J}_G\|_{L^2(\Omega_C)} + \sqrt{D} \left\| [\mathbf{J}_G \cdot \mathbf{n}]_{\partial\Omega_C} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)} \right) \quad (2.60)$$

und erhalten dann mit (2.57), (2.58) und (2.59) für $\mathbf{E}^m = \mathbf{E}_0^m + \mathbf{grad} \phi$

$$\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \leq C \left(\frac{1}{|\sigma + i\omega\epsilon|} \left(g(\mathbf{J}_G) + \sqrt{D} \omega \epsilon \|\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^m|_{\Omega_I}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)} \right) + 2 D \|\mathbf{rot} \mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right). \quad (2.61)$$

Mit Hilfe der aus (2.40) in Satz 2.3 folgenden Ungleichung

$$\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq D C_1 \|\mathbf{rot} \mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (1 + C_2) \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}$$

und (2.50), (2.61) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq C_1 D \|\mathbf{rot} \mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (1 + C_2) \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \\
 &\leq C \left(3D \|\mathbf{rot} \mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{|\sigma + i\omega\epsilon|} \left(g(\mathbf{J}_G) + \sqrt{D} \omega\epsilon \|\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^m|_{\Omega_I}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)} \right) \right) \\
 &\leq C \left(3D \sqrt{\omega\mu} \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left(\|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \omega\epsilon \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sigma} \left(g(\mathbf{J}_G) + \sqrt{D} \omega\epsilon \|\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^m|_{\Omega_I}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)} \right) \right) \tag{2.62} \\
 &\leq C \left(3D \sqrt{\omega\mu} \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left(\|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \omega\epsilon \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sigma} \left(g(\mathbf{J}_G) + \omega\epsilon \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Die letzte Umformung folgt aus dem Spursatz für Funktionen in $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega_I)$:

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \|\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^m|_{\Omega_I}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_C)} \leq C \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{H}(\text{div}; \Omega_I)} = C \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} \leq C \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

man erinnere sich, daß $\mathbf{E}|_{\Omega_I} \in \mathbf{H}^0(\text{div}; \Omega_I)$. Unter Ausnutzung von $(A+B)^2 \leq 2(A^2+B^2)$ und $|A||B| \leq \frac{1}{2}(\alpha A^2 + \frac{1}{\alpha} B^2)$ mit noch zu bestimmendem $\alpha > 0$ erhalten wir dann durch Quadrieren von (2.62)

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &\leq C^2 \left(3D \sqrt{\omega\mu} \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left(\|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \omega\epsilon \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sigma} \left(g(\mathbf{J}_G) + \omega\epsilon \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \right)^2 \\
 &\leq 2C^2 \left(9D^2 \left(\omega\mu \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left(\|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \omega\epsilon \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{\sigma^2} \left(g(\mathbf{J}_G)^2 + \omega^2\epsilon^2 \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) \right)^2 \\
 &\leq C^2 \left(9D^2 \left(\alpha \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \omega^2\mu^2 \|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) + 18D^2 \omega^2\epsilon\mu \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + 4 \left(\frac{g(\mathbf{J}_G)}{\sigma^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \right)^2 \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 & \left(1 - 9C^2D^2\alpha - 18C^2D^2\omega^2\epsilon\mu - 4C^2\left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\right)^2\right) \\ & \leq C^2 \left(9\frac{(D\omega\mu)^2}{\alpha}\|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + 4\left(\frac{g(\mathbf{J}_G)}{\sigma}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Mit der Wahl $\alpha = \left(\frac{1}{6CD}\right)^2$ gilt dann für $0 \leq \omega \leq \omega_0 := \frac{1}{C} \min\left(\frac{1}{D\sqrt{72\epsilon\mu}}, \frac{\sigma}{4\epsilon}\right)$

$$\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq 4 \left((18C^2D^2\omega\mu)^2 \|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{2Cg(\mathbf{J}_G)}{\sigma}\right)^2 \right),$$

so daß schließlich

$$\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq (6CD)^2\omega\mu\|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{4C}{\sigma}g(\mathbf{J}_G). \quad (2.63)$$

Asymptotische Fehlerordnung

Der Term $g(\mathbf{J}_G)$ spielt die Rolle einer galvanischen Kopplung zwischen Quelle und Leiter. Wir untersuchen zwei Fälle:

1. **Es gibt keine wirksame galvanische Verbindung von Quelle zu Leiter:**
 $g(\mathbf{J}_G) = 0$

Dann folgt aus (2.63) für $0 \leq \omega < \omega_0$

$$\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \tilde{C}\omega\|\mathbf{J}_G\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

und man erhält mit (2.48) für den Modellierungsfehler, falls \mathbf{J}_G für kleine ω nicht von ω abhängt,

$$\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\omega^2) \quad \text{für } \omega \rightarrow 0. \quad (2.64)$$

Entsprechend erhält man mit (2.49) für die Energienorm

$$\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathfrak{E};\Omega} = \mathcal{O}(\omega^{\frac{5}{2}}) \quad \text{für } \omega \rightarrow 0, \quad (2.65)$$

die aber, wie bereits angemerkt, nicht die Bedeutung einer Energie hat. Die aussagekräftigere, skalierte Energienorm („Leistungsnorm“) $\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathfrak{P};\Omega}$ des Fehlers verhält sich wie die $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -Norm.

2. **Es gibt eine wirksame galvanische Verbindung von Quelle zu Leiter:**
 $g(\mathbf{J}_G) \neq 0$

Dann gilt entsprechend für $0 \leq \omega < \omega_0$

$$\|\mathbf{E}^m\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \tilde{C}g(\mathbf{J}_G)$$

und somit

$$\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\omega) = \|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathfrak{F};\Omega} \quad \text{für } \omega \rightarrow 0 \quad (2.66)$$

und

$$\|\mathbf{E}^m - \mathbf{E}\|_{\mathfrak{E};\Omega} = \mathcal{O}(\omega^{\frac{3}{2}}) \quad \text{für } \omega \rightarrow 0, \quad (2.67)$$

falls \mathbf{J}_G für kleine ω nicht von ω abhängt.

In Abb. 2.2 ist jeweils ein Beispiel mit quadratischem (Fall 1) und linearem (Fall 2) Modellierungsfehler gegeben.

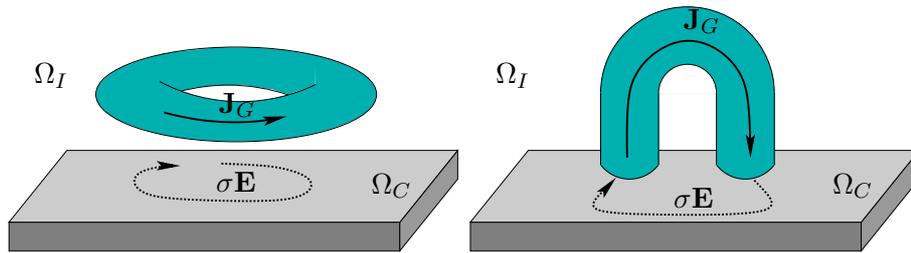


Abb. 2.2: Zwei typische Beispiele mit unterschiedlichem asymptotischen Modellierungsfehler $\delta = \mathbf{E}^m - \mathbf{E}$ für $\omega \rightarrow 0$: Fall 1 (links), $g(\mathbf{J}_G) = 0$, $\|\delta\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\omega^2)$ — Fall 2 (rechts), $g(\mathbf{J}_G) \neq 0$, $\|\delta\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\omega)$.

2.4.3 Diskussion

Nach [ABN00] eignet sich eine asymptotische Aussage über den Fehler des Wirbelstrommodells nur dann als Rechtfertigung, wenn sie besser ist als die des einfacheren, statischen Modells

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \perp \mathcal{D}_{\Omega_I}^\epsilon, \quad \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = 0 & \quad \text{in } \Omega_I, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_G, \quad \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0 & \quad \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (2.68)$$

für das man (siehe ebenfalls [ABN00]) lineare Konvergenz in ω bzgl. der $L^2(\Omega)$ -Norm erhält. In [Alo99] ist die Konvergenzaussage zu schwach, um dies zu erfüllen. Auch auf den hier betrachteten 2. Fall trifft diese Aussage zu. Die folgenden Überlegungen zeigen aber, daß eine gegenüber dem statischen Modell bessere Asymptotik allgemein nicht zu erwarten ist.

Bekanntlich existiert neben dem Wirbelstrommodell als *magnetoquasistatischer* Näherung der Maxwell-Gleichungen (Änderungen der magnetischen Energie dominiert) auch eine *elektroquasistatische* Näherung (Änderung der elektrischen Energie dominiert), siehe z.B. [Dir96]. Verdeutlichen läßt sich diese Tatsache auch mit den Mitteln der Netzwerktheorie, siehe Abb. 2.3. Aus diesem Grunde ist es nicht sinnvoll, das Wirbelstrommodell als „die Näherung der Maxwell-Gleichungen für kleine Frequenzen“ zu bezeichnen— es ist nur *eine* Näherung für kleine Frequenzen.

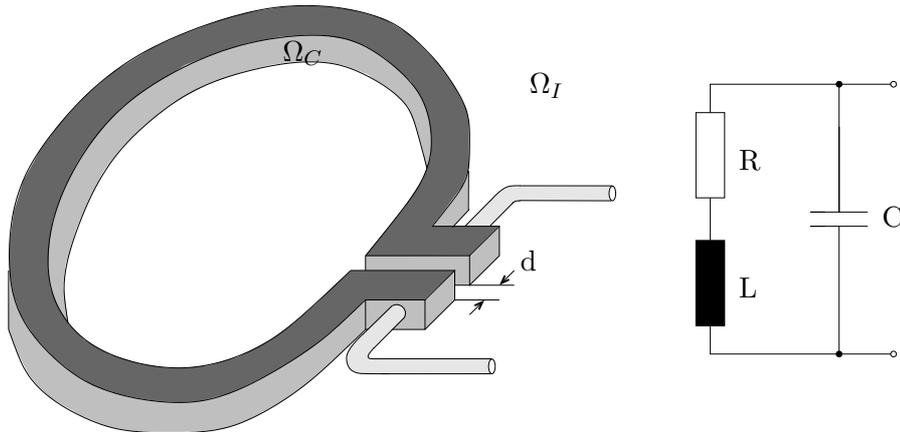


Abb. 2.3: Eine Plausibilitätsklärung mit Hilfe der Netzwerktheorie: Die gezeigte Geometrie links (vgl. deren Diskussion in [Bos98a]) läßt sich näherungsweise durch konzentrierte Elemente mit den Mitteln von Netzwerkgleichungen beschreiben und stellt im wesentlichen einen Parallelschwingkreis dar mit dem Widerstand R , der Kapazität C und der Induktivität L (rechts). Für kleine Kreisfrequenzen ω ergibt sich für die Eingangsimpedanz $Z = R(1 + i\omega(\frac{L}{R} - RC)) + \mathcal{O}(\omega^2)$. Falls $\frac{L}{R} > RC$, verhält sich die Anordnung asymptotisch induktiv (überwiegend magnetische Energie wird gespeichert), falls $\frac{L}{R} < RC$, kapazitiv (überwiegend elektrische Energie wird gespeichert).

Unter diesem Aspekt sind auch die Ergebnisse der asymptotischen Analyse für $\omega \rightarrow 0$ nicht verwunderlich: Wir haben keinerlei zusätzliche Annahmen getroffen, die für kleine Frequenzen die Dominanz der magnetischen Energie implizieren und somit den magnetoquasistatischen gegenüber dem elektroquasistatischen Grenzfall auszeichnen würden. Daher erhält man für den allgemeinen, zweiten Fall nur die gleiche Ordnung wie für das statische Modell, das in jedem Fall das Grenzproblem für $\omega \rightarrow 0$ darstellt.

In dem ersten Fall hingegen, in dem wir keinerlei galvanische Kopplung zwischen Quelle und Leiter haben, existieren ausschließlich *induzierte* Leiterströme und der statische Grenzfall für das elektrische Feld ist die Nulllösung. Insofern ist der magnetoquasistatische Fall ausgezeichnet, da das Magnetfeld i.a. nicht gegen die Nulllösung geht (nur falls $\mathbf{J}_G \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow 0$). Wir erhalten also die höhere Ordnung, weil der statische Grenzfall nur magnetische Energie aufweist. Man beachte aber, daß dies ein Spezialfall ist und daß für diesen auch die anfangs gemachten Voraussetzungen (*homogene* elektrische Randbedingungen, \mathbf{J}_G divergenzfrei in Ω_I und senkrecht auf \mathcal{D}_{Ω_I}) notwendig sind.

Wir fassen zusammen: Abgesehen von dem Fall ausschließlich *induzierter* Leitungsströme liefert die asymptotische Betrachtung des Wirbelstrommodells keine bessere Fehlerordnung in ω als das statische Modell, und es ist klar, daß nicht mehr erwartet werden kann.

Als Rechtfertigung verstehen wir die Existenz der Fehlerschranken (2.44) und (2.45), auch wenn wir hier nicht gezeigt haben, daß diese gegenüber dem statischen Modell verbesserte Schätzungen für den Fehler geben können. Dies sollte jedoch mit Hilfe eines analytischen Beispiels möglich sein. Aus Zeitgründen haben wir diesen Punkt nicht weiter untersucht. Die einzigen auftretenden Konstanten C_1, C_2 in (2.44) und (2.45) hängen nur

von der Form des Isolators und des Leiters ab, und sind dann groß, wenn die Geometrie, salopp gesprochen, große Kapazitäten⁵ ermöglicht. Beispielsweise werden die Konstanten C_1, C_2 in Abb. 2.3 groß, wenn der Abstand d sehr klein wird bei ansonsten gleichbleibenden Maßen.

Die Herausforderung liegt nun in der Angabe von hinreichend scharfen oberen Schranken für C_1 und C_2 in Abhängigkeit von der Berechnung zugänglichen geometrischen Größen. Mit diesen läge mittels (2.44) und (2.45) zum erstenmal eine konkrete obere Schranke für den Modellierungsfehler des Wirbelstrommodells vor. Anders als asymptotische Betrachtungen tragen die Abschätzungen (2.44) und (2.45) der Tatsache Rechnung, daß bei üblichen Aufgabenstellungen ein festes ω (bei allgemeinerer Zeitabhängigkeit dann das maximale im Spektrum) vorgegeben ist und man eigentlich nicht an Aussagen der Art „... es existiert ein ω , bei dem der Modellierungsfehler klein ist...“ interessiert ist.

Bemerkung 2.8 Da die rechte Seite \mathbf{J}_G nicht in die Betrachtungen miteingeht, sind (2.46) und (2.47) selbstverständlich nicht scharf in dem Sinne, daß sie auch *notwendige* Bedingungen für die Anwendbarkeit des Wirbelstrommodells darstellen. In Abb. 2.4 ist ein anschauliches Beispiel gegeben, bei dem trotz schlechter Fehlervoraussage durch (2.46) und (2.47) das Wirbelstrommodell eine gute Näherung ist.

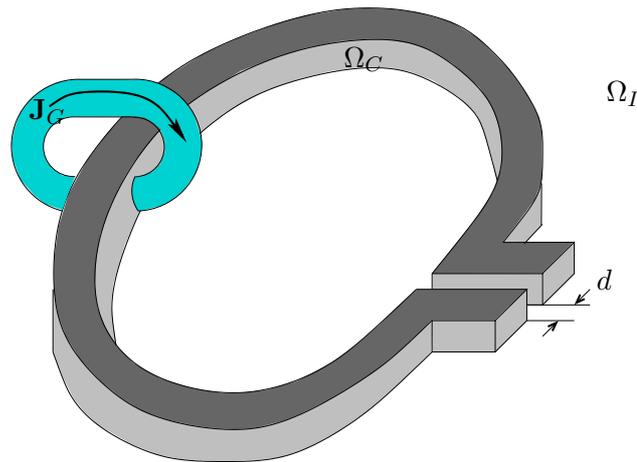


Abb. 2.4: Eine Anregung, bei der der Modellierungsfehler klein sein wird, obwohl die Bedingungen (2.46) und (2.47) aufgrund großer Konstanten C_1, C_2 bei kleinem d nicht erfüllt sein werden.

Bemerkung 2.9 Die hier angegebene Bedingung $g(\mathbf{J}_G) = 0$ für quadratische Konvergenz des Modellfehlers weicht von der in der Arbeit [ABN00] angegebenen Bedingung ab, nach der neben $\text{div } \mathbf{J}_G = 0$ in Ω_C die Orthogonalität von \mathbf{J}_G zu allen harmonischen Neumann-Vektorfeldern $\mathbf{q}_i \in \mathcal{N}_{\Omega_C}$ gelten muß. Nach [ABN00] verschwindet dann der Term niedrigster Ordnung des elektrischen Feldes in der dort verwendeten asymptotischen Entwicklung, der dann die Lösung von (2.68) ist. Die Anordnung in Fall 2 der

⁵ Gemeint ist hier nicht der klassische Kapazitätsbegriff, bei dem die Leiteroberflächen Äquipotentiallinien darstellen, sondern ganz allgemein die Fähigkeit zur Speicherung elektrischer Energie.

Abb. 2.2 zeigt jedoch, daß $\operatorname{div} \mathbf{J}_G = 0$ in Ω_C und die Orthogonalität von \mathbf{J}_G zu den Neumann-Vektorfeldern nicht hinreichend für ein Verschwinden von \mathbf{E} ist. (Es existieren keine Neumann-Vektorfelder, da Ω_C zusammenziehbar ist). Ebensovienig ist die Bedingung notwendig, wie das Beispiel eines leitenden Torus mit $\mathbf{J}_G \in \mathcal{N}_{\Omega_C}$ zeigt, bei dem $\mathbf{E} \equiv 0$ für die Lösung von (2.68) gilt.

3 Strom- und Spannungsquellen im Wirbelstrommodell

Die Anregungen im Wirbelstrommodell liegen bei vielen Aufgabenstellungen als *integrale Größen* in Form von gegebenen Spannungen U oder Strömen I vor. Die Größen stammen aus der Beschreibung von elektromagnetischen Vorgängen als Netzwerk mit konzentrierten Elementen wie Widerstände, Spulen, Kapazitäten usw.

Da es sich bei dem Netzwerkmodell, das auf Systeme differential algebraischer Gleichungen führt, um eine andere Beschreibung der Wirklichkeit handelt, ist zunächst zu klären, wie die dort auftretenden Zustandsgrößen Strom und Spannung im Wirbelstrommodell erklärt werden können.

Diese Fragestellung ist auch für die Kopplung von Netzwerken und Wirbelstrommodell von Interesse. Die Bedeutung solcher gekoppelter Beschreibungen nimmt in der Praxis ständig zu, da es auf diese Weise durch die Verbindung unterschiedlicher Modelle mit unterschiedlicher Abstraktion möglich ist, komplexe technische Anwendungen als Ganzes zu beschreiben anstatt nur deren Einzelaspekte. Obwohl die Betrachtung gekoppelter Systeme nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, wird deshalb in diesem Kapitel auch auf diesen Aspekt kurz eingegangen.

Nach bestem Wissen des Autors ist eine umfassende und hinreichende Darstellung von Strom- und Spannungsanregungen für das Wirbelstrommodell in der Literatur bisher nicht verfügbar und rechtfertigt daher ein eigenes Kapitel zu diesem Thema.

In Abschnitt 3.1 werden die Begriffe Strom und Spannung im Zusammenhang mit dem Wirbelstrommodell und die vom Wirbelstrommodell implizierte Leistungsbilanz kurz erläutert. In den Abschnitten 3.2 bis 3.4 werden systematisch mögliche Variationsformulierungen mit Strom- und Spannungsanregungen vorgestellt und deren Bedeutung für die Modellierung diskutiert. Da die \mathbf{H} - und die \mathbf{E} -basierten Formulierungen in Bezug auf die Spannungs- und Stromanregung sehr unterschiedlichen Charakter haben, werden diese jeweils gesondert betrachtet.

3.1 Grundlagen der Anregungen im Wirbelstrommodell

Sowohl um übliche Problemstellungen zu behandeln, in der ein Strom durch einen Leiter oder eine Spannung zwischen Kontakten gegeben ist, als auch in Hinsicht auf eine Kopplung zu Netzwerkmodellen reduziert sich die Problematik zunächst auf die Frage, wie die Begriffe Strom und Spannung im Wirbelstrommodell zu erklären sind.

Während der Begriff Strom durch eine orientierte Fläche Σ durch

$$I = \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

eindeutig definiert ist, hat der Begriff Spannung nur eine lokale Bedeutung, da Spannung entlang eines Pfades γ

$$U_\gamma = \int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

von der Wahl des Pfades γ abhängt, da $\mathbf{rot} \mathbf{E} \neq 0$. Hingegen ist im Netzwerkmodell Spannung zwischen zwei Netzwerkknoten eindeutig definiert und entspricht dem Gefälle der potentiellen Energie bezogen auf die Ladungen. Eine Kopplung durch Erhalt von Strom und Spannung ist also zunächst nicht möglich.

Jedoch läßt sich der Spannungsbegriff über die komplexe Leistung (bzw. den Leistungsfluß) *definieren*: Aus der Sicht des Netzwerkmodells ist das Wirbelstromproblem ein Ein- oder Mehrtor¹, siehe Abb. 3.1. Im Falle eines Eintors kann mittels der Gleichung

$$P = \frac{1}{2} U I^*$$

eine Spannung U erklärt werden, wobei $*$ für konjugiert komplex steht. P ist die dem Wirbelstrommodell von außen zugeführte komplexe Gesamtleistung. Für die Kopplung von Wirbelstrom- und Netzwerkmodell fordert man also den Erhalt von Strom und Leistung.

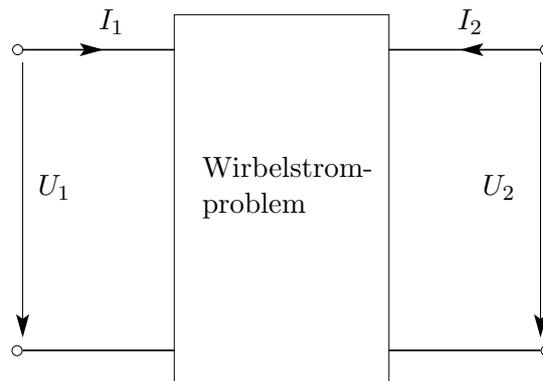


Abb. 3.1: Das Wirbelstrommodell ist aus Sicht des Netzwerkmodells ein Mehrtor. Sind beispielsweise 2 unabhängige Spannungen oder Ströme vorzugeben, ist das Wirbelstrommodell wie abgebildet ein Zweitor. Die Strom- und Spannungsrichtungen sind so gewählt, daß im Netzwerkmodell positiv gezählte Leistung an das Wirbelstrommodell abgegeben wird.

Im Falle eines Mehrtores funktioniert dies analog, vorausgesetzt, die dem Wirbelstrommodell zugeführten Leistungen P_k lassen sich identifizieren und jeweils eindeutig zu der Quelle zuordnen, die zu einem Tor gehört. D.h. notwendig ist hier eine *Lokalisierung* der Teilleistungen P_k . Entsprechend gilt dann $U_k := P_k / I_k^*$ mit den Torspannungen bzw. -strömen U_k und I_k .

Eine Leistungsbilanz für das Wirbelstrommodell liefert

¹ Ein Mehrtor oder n -Tor ist ein Grundelement im Netzwerkmodell mit n Klemmenpaaren, siehe z.B. [Sim89].

Satz 3.1 (magnetoquasistatischer Poyntingscher Satz) *Lösungen* (\mathbf{E}, \mathbf{H}) *des Wirbelstrommodells* (2.16) *erfüllen die Leistungsbilanz*

$$P_{mag} + P_{Ohm} = P = P_{\Omega} + P_{\partial\Omega} \quad (3.1)$$

mit

$$\begin{aligned} P_{mag} &:= \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega} \mu |\mathbf{H}|^2 d\mathbf{x}, & P_{Ohm} &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega_C} \sigma |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{x}, \\ P_{\Omega} &:= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_G^* d\mathbf{x}, & P_{\partial\Omega} &:= -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned}$$

Beweis: Multiplikation von (2.16b) mit \mathbf{H}^* , (2.16a) konjugiert mit \mathbf{E} und anschließende Subtraktion der Gleichungen liefert $\mathbf{H}^* \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}^* = -i\omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}$. Ausnutzen der Identität $\mathbf{H}^* \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}^* = \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$, Integration über Ω und Anwendung des Gaußschen Satzes liefert (3.1). \square

Den Realteil der komplexen Leistung nennt man *Wirkleistung*

$$P_w := \text{Re } P,$$

den Imaginärteil *Blindleistung*

$$P_b := \text{Im } P$$

und den Betrag *Scheinleistung*

$$P_s := |P|.$$

Die Wirkleistung ist die *im zeitlichen Mittel* verbrauchte Leistung, die der Generator aufbringen muß. Nach Satz 3.1 gilt für das Wirbelstrommodell $P_w = P_{Ohm}$, da μ hier als reell angenommen wurde. P_{Ohm} sind die zeitlich gemittelten Ohmschen Verluste. Es sei bemerkt, daß oft $\text{Im } \mu \neq 0$ angenommen wird, um magnetische Verluste zu modellieren (z.B. durch Hysterese). In diesem Fall trägt dann natürlich auch P_{mag} zur Wirkleistung bei.

Die Blindleistung ist die *Amplitude* der zwischen Generator und dessen Umgebung hin- und herfließenden Leistung. Im Wirbelstrommodell ist dies die Leistung, die für den Auf- und Abbau der magnetischen Energie W_{mag} erforderlich ist bzw. an den Generator abgegeben wird, $P_b = P_{mag} = i2\omega W_{mag}$. Der Vektor $\mathbf{S} := \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ beschreibt die *Leistungsflußdichte* und wird (*komplexer*) *Poyntingscher Vektor* genannt.

Satz 3.1 zeigt, daß es im Wirbelstrommodell grundsätzlich zwei Arten von Quellen gibt: Quellen P_{Ω} durch eingeprägte Ströme, die Ladungen entgegen dem elektrischen Feld \mathbf{E} transportieren können, und Quellen $P_{\partial\Omega}$ durch Randbedingungen. Dieser Unterscheidung tragen die beiden folgenden Abschnitte Rechnung.

Bemerkung 3.1 Die Vorzeichen sind so gewählt, daß $P_{\Omega}, P_{\partial\Omega} > 0$, falls die Quellen Leistung an das elektromagnetische System abgeben.

3.2 Anregung durch Generatorstromverteilungen

Eine Art der Anregung im Wirbelstrommodell sind vorgegebene Generatorstromverteilungen. Man kann hier nochmals zwischen geschlossenen Generatorstromschleifen in Ω_I , d.h. $\text{supp } \mathbf{J}_G \subset \Omega_I$, die typischerweise Spulen mit höheren Windungszahlen und bekannten Strömen modellieren, und Quellen an Massivleitern, d.h. $\text{supp } \mathbf{J}_G \cap \overline{\Omega_C} \neq \emptyset$ unterscheiden (siehe Abb. 3.2). Beide Fälle lassen sich jedoch jeweils mit der gleichen Variationsformulierung beschreiben. Im folgenden werden \mathbf{H} - und \mathbf{E} -basierte Variationsformulierungen

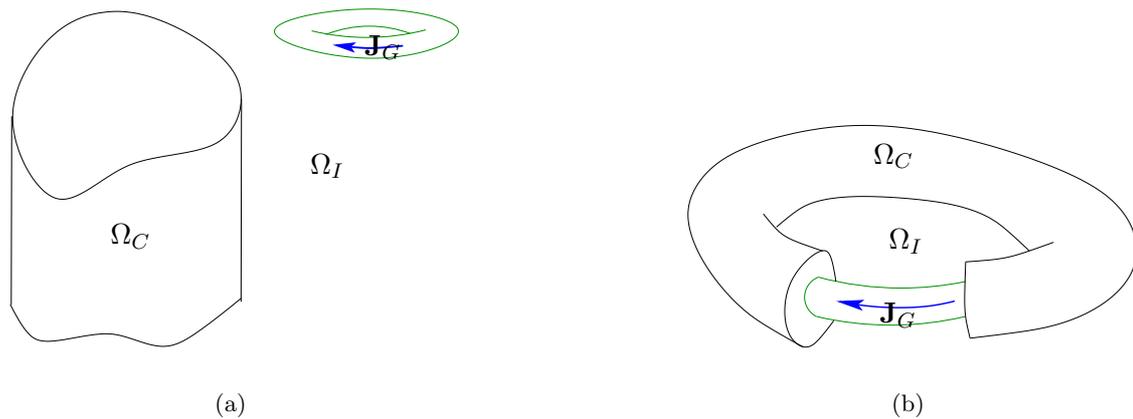


Abb. 3.2: Zwei typische Fälle bei Vorgabe von Erregungsstromverteilungen, links (a): geschlossene Erregungsschleife, ohne Kontakt zu $\overline{\Omega_C}$; rechts (b): eine Stromquelle mit Berührung zu $\overline{\Omega_C}$

ungen jeweils für Spannungs- und Stromeinkopplung vorgestellt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier und in den nachfolgenden Abschnitten auf den 1-Tor Fall, d.h. wir betrachten jeweils nur eine unabhängige Erregungsgröße I bzw. U , geben jedoch für einige Fälle Hinweise, wie das Modell auf den Mehrtorfall erweitert werden muß. Weiterhin setzen wir in diesem und in den folgenden Abschnitten voraus, daß $\text{supp } \mathbf{J}_G \subset \overline{\Omega_I}$ und nehmen homogene elektrische Randbedingungen $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ auf $\partial\Omega$ bzw. bei unbeschränktem Gebiet Abklingbedingungen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-2})$, $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1})$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ an, wenn nichts anderes ausdrücklich angegeben wird.

Bemerkung 3.2 Der Fall $\text{supp } \mathbf{J}_G \subset \Omega_C$ ist zwar nicht ohne Bedeutung, da so eine Quelle mit Innenwiderstand modelliert werden kann, jedoch können solche nichtidealen Quellen auch mit Hilfe von Netzwerkgleichungen realisiert werden.

3.2.1 H-basierte Formulierung

Stromanregung

Die Vorgabe eines Gesamtstromes erfolgt durch die Wahl von \mathbf{J}_G . Im Fall (b) ist damit auch der Gesamtstrom durch den Leiter festgelegt, da das Ampèresche Gesetz, das in der Variationsformulierung in starker Form enthalten ist, die Stetigkeit von $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ impliziert.

Es sei $\mathbf{H}_G \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ so gewählt, daß $\mathbf{rot} \mathbf{H}_G = \mathbf{J}_G$ in Ω_I . Prinzipiell kann in Situation (a) in Abb. 3.2 hierfür das Gesetz von Biot-Savart

$$\mathbf{H}_G(\mathbf{x}) = \mathbf{rot} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}_G}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}$$

verwendet werden. Für praktische Rechnungen ist jedoch ein \mathbf{H}_G mit möglichst kleinem Träger vorzuziehen, so daß hier von Alternativen (siehe z.B. [DHR⁺97]) Gebrauch gemacht werden sollte. Man beachte, daß $\text{supp} \mathbf{H}_G = \text{supp} \mathbf{J}_G$ durch das Ampèresche Gesetz ausgeschlossen wird.

Die entsprechende Variationsformulierung lautet:

Finde $\mathbf{H} \in \mathbf{H}_G + \mathcal{V}_0$, so daß

$$\int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}' d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0. \quad (3.2)$$

Die Generatorspannung U wird über die Leistung definiert. Nach der Leistungsbilanz (3.1) ist die an das Wirbelstromproblem abgegebene komplexe Leistung mit $\mathbf{H} - \mathbf{H}_G = \mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0$:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} |\mathbf{rot} \mathbf{H}|^2 d\mathbf{x} + \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega} \mu |\mathbf{H}|^2 d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} (\mathbf{H}_G + \mathbf{H}')^* d\mathbf{x} + \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot (\mathbf{H}_G + \mathbf{H}')^* d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{J}_G^* d\mathbf{x} + \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_G^* d\mathbf{x} = \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_G^* d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da $\text{supp} \mathbf{J}_G \cap \Omega_C = \emptyset$ angenommen wurde.

Die Spannung ist demnach

$$U = \frac{i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_G^* d\mathbf{x}}{2I^*}. \quad (3.3)$$

Durch Wahl einer Einheitsstromquelle mit noch unbekanntem Strom als Skalierung

$$\mathbf{J}_G = I \mathbf{J}_0, \quad \int_{\Sigma} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{n} dS = 1, \quad (3.4)$$

wobei Σ eine Querschnittfläche des Leiters Ω_C ist, kann bei entsprechender Wahl eines Erregungsfeldes \mathbf{H}_0 , so daß $\mathbf{rot} \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_0$, (3.3) auch

$$U = \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0^* d\mathbf{x} \quad (3.5)$$

geschrieben werden. Σ sei entgegen der Spannungszählrichtung orientiert, d.h. an das Wirbelstrommodell abgegebene Leistung wird positiv gezählt.

Spannungsanregung

Eine Spannungsanregung kann dementsprechend einfach über eine Nebenbedingung realisiert werden. Eine Variationsformulierung lautet dann:

Finde $\mathbf{H} \in \mathcal{V}_0$ und $I \in \mathbb{C}$, so daß

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega} \mu (\mathbf{H} + I \mathbf{H}_0) \cdot \mathbf{H}' \, d\mathbf{x} &= 0 \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0, \\ i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0^* \, d\mathbf{x} &= 2U. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dabei sei $\mathbf{H}_0 \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ so gewählt, daß $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_0$ mit \mathbf{J}_0 wie in (3.4). Der Strom I hat hier die Rolle eines Lagrange-Multiplikators.

3.2.2 E-basierte Formulierung

Stromanregung

Wie bei der \mathbf{H} -basierten Formulierung wird der Strom I durch Vorgabe von \mathbf{J}_G bestimmt. Im Fall (b) sorgt das in der \mathbf{E} -Formulierung in schwacher Form enthaltene Ampèresche Gesetz dafür, daß auch im Leiter Ω_C der Strom I fließt. Die Variationsformulierung lautet:

Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, so daß

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega). \quad (3.7)$$

Die Spannung wird wieder über die Leistung definiert:

$$\begin{aligned} P &= \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}^* \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{E}^* \, d\mathbf{x} = -\frac{I}{2} \int_{\Omega} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E}^* \, d\mathbf{x} \\ \implies U &= P/I^* = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E}^* \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Spannungsanregung

Eine Spannungseinprägung erhalten wir wieder mit Hilfe einer Nebenbedingung:

Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ und $I \in \mathbb{C}$, so daß

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + i\omega I \int_{\Omega} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} &= 0 \quad \forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega), \\ \int_{\Omega} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E}^* \, d\mathbf{x} &= -2U. \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3 Anregung durch Randbedingungen (Kontakte am Gebietsrand)

Eine weitere Art der Anregung sind Ströme durch Kontakte $\Sigma = \overline{\Omega_C} \cap \partial\Omega$ am Gebietsrand $\partial\Omega$ oder entsprechende den Kontakten zugeordnete Spannungen, die wieder über die Leistung definiert werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall zweier Kontakte $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ und $\partial\Omega$ einfach zusammenhängend wie in Abb. 3.3 dargestellt. Die Orientierung von Σ sei dabei von $\partial\Omega$ induziert.

Zwei Situationen werden unterschieden (siehe Abb. 3.3):

- a) Kontakte liegen an den Stellen, wo der Leiter Ω_C den äußeren Gebietsrand berührt
- b) Die Kontaktflächen Σ^+ und Σ^- und die Fläche Θ beschränken ein Volumen Ω^* , in dem eine elektromotorische Kraft (EMK) wirkt. Fügt man $\overline{\Omega^*}$ zu Ω_C hinzu, entsteht eine neue Schleife, d.h. die Topologie von Ω_C ändert sich, wobei Σ^+ und Σ^- (disjunkte) Seifert-Flächen bzgl. dieser neuen Schleife sind.

$\Theta \subset (\partial\Omega \cap \overline{\Omega_I})$ bzw. $\Theta \cup \Sigma$ wird der Ort der Leistungseinspeisung sein.

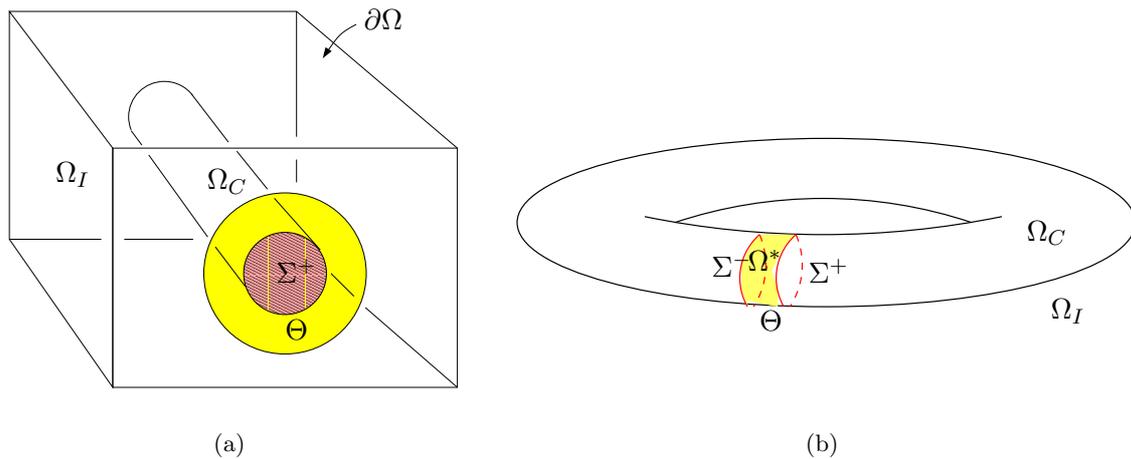


Abb. 3.3: (a) Anregung durch äußere Randbedingungen (b) Randbedingungen auf innerem Rand, $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^*$, $\Theta = \partial\Omega^* \cap \partial\Omega_I$

3.3.1 H-basierte Formulierung

Spannungsanregung

Für eine Spannungsanregung werden elektrische Randbedingungen verwendet:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Theta, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = -U \mathbf{grad}_\Gamma v \quad \text{auf } \Theta, \quad (3.10)$$

wobei

$$v|_{\Sigma^+} = 1, \quad v|_{\partial\Omega \setminus (\Theta \cup \Sigma^+)} = 0, \quad v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \quad (3.11)$$

Das Randintegral in (2.27) ergibt dann

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}' \, dS &= U \int_{\partial\Omega} \mathbf{grad}_\Gamma v \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}') \, dS \\ &= U \int_{\Theta} v \, \mathbf{rot} \, \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n} \, dS + U \int_{\partial\Theta} v \, \mathbf{H}' \cdot d\mathbf{s} = U \int_{\gamma^+} \mathbf{H}' \cdot d\mathbf{s}, \end{aligned}$$

mit $\gamma^+ = \partial\Sigma^+$. Die Variationsformulierung mit Spannungsanregung lautet dann:

Finde $\mathbf{H} \in \mathcal{V}_0$, so daß

$$\int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \, \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{H}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' \, d\mathbf{x} = U \int_{\gamma^+} \mathbf{H}' \cdot d\mathbf{s} \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0. \quad (3.12)$$

Setzt man in (3.12) statt \mathbf{H}' die konjugiert komplexe Lösung \mathbf{H}^* ein, so sieht man unmittelbar, daß die Leistungsbilanz erfüllt ist, $2P = U I^*$. Der zunächst unmotiviert über das Gradientenfeld eingeführte Spannungsbegriff ist also kompatibel zu der Definition über die Leistung.

Lemma 3.1 $\mathbf{H}' \mapsto \int_{\gamma^+} \mathbf{H}' \cdot d\mathbf{s}$ ist ein stetiges Funktional auf \mathcal{V}_0 , das beim Einsetzen der Lösung den Strom mißt, d.h. $I = - \int_{\gamma^+} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$.

Beweis: Für $\mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0$ ist $\mathbf{rot} \, \mathbf{H}'|_{\Omega_I} = 0$. In Ω_I kann daher \mathbf{H}' als Summe von einem Gradienten- und einem Cohomologievektorfeld dargestellt werden, siehe Kap. 1.2:

$$\mathcal{V}_0 \ni \mathbf{H}'|_{\Omega_I} = \mathbf{grad} \, \phi + \mathbf{q}, \quad \phi \in H^1(\Omega_I), \quad (3.13)$$

wobei \mathbf{q} ein Repräsentant der 1. Cohomologiegruppe $\mathcal{H}^1(\Omega_I)$ ist, die in dem vorliegenden Fall nur eindimensional ist, da die 1. Betti-Zahl $\beta_1(\Omega_I) = 1$ ist. Mit Hilfe einer Schnittfläche Ξ (Seifert-Fläche), die die Cohomologiegruppe $\mathcal{H}^1(\Omega_I \setminus \Xi)$ trivial macht, kann \mathbf{q} durch eine $H^1(\Omega)$ -Fortsetzung eines Gradientenfeldes in Ω_I , das auf Ξ springt, konstruiert werden:

$$\mathbf{q} := \widetilde{\mathbf{grad} \, \theta}, \quad \theta \in H^1(\Omega_I \setminus \Xi), \quad [\theta]_\Xi = 1. \quad (3.14)$$

Da $\gamma^+ \in \Omega_I$, ist $\int_{\gamma^+} \mathbf{H}' \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma^+} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{s} = [\theta]_\Xi$. Die Stetigkeit des Funktionals folgt dann aus

$$|[\theta]_\Xi| = |\Xi|^{-\frac{1}{2}} \|[\theta]_\Xi\|_{L^2(\Xi)} \leq C \|[\theta]_\Xi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Xi)} \leq C \left\| \widetilde{\mathbf{grad} \, \theta} \right\|_{L^2(\Omega_I)} \leq C \|\mathbf{H}'\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_I)},$$

wobei C eine nur von Ω_I abhängige, generische Konstante ist. Daß das Funktional auf \mathbf{H} mit dem Strom I antwortet, ist Folge des Ampèreschen Gesetzes (2.16a). \square

Bemerkung 3.3 Man beachte, daß im Fall (a) die Geometrie von Θ irrelevant ist für die Variationsformulierung und somit für \mathbf{H} . Das elektrische Feld \mathbf{E} in Ω_I hängt allerdings von Θ ab.

Bemerkung 3.4 Man betrachte Situation (b) und nehme dabei an, daß Σ^+ und Σ^- den Abstand δ haben. Im Hinblick auf Abschnitt 3.4 ist wichtig darauf hinzuweisen, daß der Grenzfall $\delta \rightarrow 0$ nicht mit dem Fall übereinstimmt, in dem Ω^* nicht vorhanden ist und die Schleife komplett von Ω_C gebildet wird. Der Grenzfall ist vielmehr ein Gebiet Ω_C mit Schlitz. Dies ist einsichtig, da auch bei einer allgemeineren Geometrie der Schleife stets das tangential elektrische Feld auf — und somit auch der magnetische Fluß durch — Σ^\pm verschwindet, ganz egal wie klein δ wird. Weiterhin geht die elektrische Energie gegen Unendlich für $\delta \rightarrow 0$.

Bemerkung 3.5 Die Verallgemeinerung von (3.12) auf den Mehrtorfall ist offensichtlich, da alle Flächen und Pfade jeweils eindeutig zu einem bestimmten Kontakt gehören.

Stromanregung

In Abb. 3.3 soll ein Strom $I \in \mathbb{C}$ durch die Kontakte durch Vorgabe der Normalkomponenten der Stromdichte \mathbf{J} vorgeschrieben werden, $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})|_{\Sigma^+} = j_n^+$, $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})|_{\Sigma^-} = j_n^-$, so daß

$$I_+ = \int_{\Sigma^+} j_n^+ dS, \quad I_- = \int_{\Sigma^-} j_n^- dS.$$

Auf dem restlichen Rand $\partial\Omega \setminus \Sigma$ ist notwendigerweise $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$. Für die Lösbarkeit wird vorausgesetzt, daß

$$I_+ = -I_-.$$

Wählen wir die Spannungsrichtung so, daß sie vom Netzwerkknoten, der Kontakt Σ^+ zugeordnet ist, zum Netzwerkknoten, der Σ^- zugeordnet ist, zeigt, setzen wir

$$I := I_- = -I_+.$$

Wir wählen ein $\mathbf{H}_{j_n} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, so daß

$$\operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H}_{j_n} \times \mathbf{n}) = \mathbf{rot} \mathbf{H}_{j_n} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})/I \text{ auf } \partial\Omega, \quad \mathbf{rot} \mathbf{H}_{j_n} = 0 \text{ in } \Omega_I$$

und definieren

$$\mathcal{V}_0^+ := \{\mathbf{H}' \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega); \mathbf{rot} \mathbf{H}' = 0 \text{ in } \Omega_I, \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H}' \times \mathbf{n}) = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Eine Variationsformulierung lautet dann:

Finde $\mathbf{H} \in I \mathbf{H}_{j_n} + \mathcal{V}_0^+$, so daß

$$\int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}' dx + i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' dx = 0 \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0^+. \quad (3.15)$$

Zusätzlich zu den vorgeschriebenen Normalkomponenten der Stromdichte impliziert die Variationsformulierung die Randbedingung

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

wie man durch Testen von (3.15) mit Gradientenfeldern leicht sieht.

Analog zu (3.5) kann die Spannung über die Leistung definiert werden. Es ergibt sich

$$U = \frac{2P}{I^*} = \int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{H}_{j_n}^* d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{j_n}^* d\mathbf{x}. \quad (3.16)$$

Bemerkung 3.6 Alternativ kann der Strom durch den Kontakt mit Hilfe einer Nebenbedingung und idealen Kontakten eingepreßt werden, analog zu (ii) bei der nachfolgenden **E**-basierten Formulierung.

3.3.2 E-basierte Formulierung

Spannungsanregung

Es seien wieder elektrische Randbedingungen wie in (3.9) mit dem Potential v aus (3.11) gegeben, \tilde{v} sei eine $H^1(\Omega)$ -Fortsetzung von v . Man beachte, daß $\mathbf{grad} \tilde{v} \notin \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$.

Die entsprechende **E**-basierte Variationsformulierung für Spannungsanregung lautet dann:

Finde $\mathbf{E} \in -U \mathbf{grad} \tilde{v} + \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$, so daß

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}' d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega). \quad (3.17)$$

Daß die so eingeführte Spannung mit der über die Leistung definierten identisch ist, ist wieder durch die Gültigkeit der Leistungsbilanz ersichtlich:

$$\begin{aligned} 2P &= i\omega \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}^* d\mathbf{x} + \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* d\mathbf{x} \\ &= -U \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{rot} \mathbf{grad} \tilde{v} d\mathbf{x} - U \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{grad} \tilde{v} d\mathbf{x} = -U \int_{\Sigma^+} \sigma \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{n} dS = U I^*, \end{aligned}$$

da das Funktional $F(\mathbf{E}) = - \int_{\Sigma^+} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = I$ den (negativ gezählten) Gesamtstrom durch den Kontakt Σ^+ liefert.

Stromanregung

Fall (i) $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = j_n$ an Kontakten vorgeschrieben:

Wie bei der **H**-Formulierung soll wieder die Normalkomponente der Stromdichte an Kontakten vorgeschrieben werden. Wir definieren den Raum

$$\mathcal{W}_0^+ := \{\mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega); \operatorname{div}_{\Gamma}(\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Jedes $\mathbf{E}' \in \mathcal{W}_0^+$ kann zerlegt werden in

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 - \mathbf{grad} v' \text{ mit } \mathbf{E}'_0 \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega), v' \in H^1(\Omega), \quad (3.18)$$

da $\partial\Omega$ als einfach zusammenhängend angenommen wurde. Anders als bei der \mathbf{H} -basierten Formulierung wird hier die Randbedingung $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf $\partial\Omega$ im starken Sinne durch die Konstruktion von \mathcal{W}_0^+ realisiert, da $\mathbf{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}$. Die Normalkomponente der Stromdichte $j_n = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ wird nur im schwachen Sinne vorgegeben: Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite in der Variationsformulierung (2.30) läßt sich mittels partieller Integration auf $\partial\Omega$ für $\mathbf{E}' \in \mathcal{W}_0^+$ mit (3.18) schreiben als

$$- \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}' dS = - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{grad}_\Gamma v' dS = \int_{\partial\Omega} v' \operatorname{div}_\Gamma(\mathbf{H} \times \mathbf{n}) dS = \int_{\partial\Omega} v' j_n dS.$$

Eine \mathbf{E} -basierte Variationsformulierung zur Stromeinprägung durch Vorgabe der Normalkomponenten der Stromdichten auf Kontakten lautet somit:

Finde $\mathbf{E} \in \mathcal{W}_0^+$, so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ und $\forall v' \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}' d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' d\mathbf{x} = -i\omega \int_{\partial\Omega} v' j_n dS. \quad (3.19)$$

Die Spannung wird wieder über die Leistung definiert. Dazu betrachten wir eine Zerlegung der Lösung von (3.19) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{grad} v$ analog (3.18) und setzen diese in den Ausdruck für die Leistung ein:

$$2P = i\omega \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}^* d\mathbf{x} + \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v j_n^* dS,$$

so daß

$$U = \frac{2P}{I^*} = \frac{\int_{\partial\Omega} v j_n^* dS}{I^*}.$$

Für eine Diskretisierung von (3.19) mit finiten Elementen empfiehlt sich dabei die Zerlegung (3.22) zu berücksichtigen, indem für $\mathbf{E}'_0 \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ -konforme Kantenelemente (siehe Kap. 4) und für die Approximation von v' der Raum stetiger skalarer Formfunktionen (Hutfunktionen), deren Freiheitsgrade zu den Knoten auf dem *Rand* gehören, verwendet werden. Dies liefert eine direkte diskrete Zerlegung.

Fall (ii) ideal leitender Kontakt mit vorgeschriebenem Gesamtstrom I :

Wir wählen für das elektrische Feld die Darstellung

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - U \mathbf{grad} \tilde{v},$$

wobei \tilde{v} wieder eine frei wählbare $H^1(\Omega)$ -Fortsetzung von $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ mit $v = 1$ auf Σ^+ , $v = 0$ auf Σ^- wie im Fall der Spannungsanregung ist und $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$. Somit ist der Strom durch eine in positiver Zählrichtung orientierte Schnittfläche Σ'

$$I = \int_{\Sigma'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{\Sigma^+} \tilde{v} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Da $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ_C und $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ in Ω_C im schwachen Sinn durch die Variationsformulierung impliziert wird, ergibt sich

$$I = - \int_{\partial\Omega_C} \tilde{v} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_{\Omega_C} \mathbf{J} \cdot \mathbf{grad} \tilde{v} \, dx = \int_{\Omega_C} \sigma(\mathbf{E}_0 - U \mathbf{grad} \tilde{v}) \cdot \mathbf{grad} \tilde{v} \, dx.$$

Mit diesem Ausdruck für den Strom kann eine \mathbf{E} -basierte Variationsformulierung mit Stromeinprägung als Spannungsanregung mit unbekannter Spannung U und einer Stromnebenbedingung realisiert werden:

Finde $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ und $U \in \mathbb{C}$, so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}' \, dx + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}' \, dx - U \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{grad} \tilde{v} \cdot \mathbf{E}' \, dx = 0 \\ - \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{grad} \tilde{v} \, dx + U \int_{\Omega_C} \sigma |\mathbf{grad} \tilde{v}|^2 \, dx = I. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Hier spielt die Spannung U die Rolle eines Lagrange-Multiplikators. Daß U in der Tat die Spannung ist, sieht man durch Einsetzen in die Leistungsbilanz wie zuvor bei der Spannungsanregung.

Lemma 3.2 *In den Variationsformulierungen (3.17) und (3.20) ist $\mathbf{B} = -\frac{1}{i\omega} \mathbf{rot} \mathbf{E}$ und somit auch $\mathbf{E}|_{\Omega_C}$ unabhängig von der Wahl von \tilde{v} .*

Beweis: Betrachte für die Vorgabe $\tilde{v} = \tilde{v}_1$ und $\tilde{v} = \tilde{v}_2$ in (3.17) bzw. (3.20)

$$\delta v := U (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) \quad \text{in } \Omega_C.$$

Es existiert $\delta \mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$, so daß

$$\delta \mathbf{E}|_{\Omega_C} = - \mathbf{grad} \delta v.$$

Da $\delta v|_{\Sigma^+} = \delta v|_{\Sigma^-} = 0$, existiert von $\delta v|_{\Omega_C}$ eine Fortsetzung $\widetilde{\delta v}$ in $H_0^1(\Omega)$. Mit der Wahl

$$\delta \mathbf{E} := - \mathbf{grad} \widetilde{\delta v}$$

gilt dann: Ist \mathbf{E}_1 eine Lösung zu der Wahl \tilde{v}_1 , dann ist $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 + \delta \mathbf{E}$ eine Lösung zu der Wahl \tilde{v}_2 und somit

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}_1 = \mathbf{rot} \mathbf{E}_2.$$

□

Bemerkung 3.7 Für das Wirbelstrommodell ist es nicht möglich, einen Strom durch einen in Ω_I endenden Leiter wie in Abb. 3.4 fließen zu lassen, da dies das Ampèresche Gesetz (2.16a) verletzen würde: Die Annahme $I > 0$ und Integration von (2.16a) über Σ_+ bzw. Σ_- in Abb. 3.4 führt auf einen Widerspruch:

$$0 \neq I = \int_{\Sigma_+} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial\Sigma_+} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial\Sigma_-} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma_-} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \square$$

Mißverständnisse hierüber liegen oft in der Tatsache begründet, daß für das elektrische Feld Zerlegungen verwendet werden, z.B. durch Vektor- und Skalarpotential, und nur der Strom eines Anteils betrachtet wird.

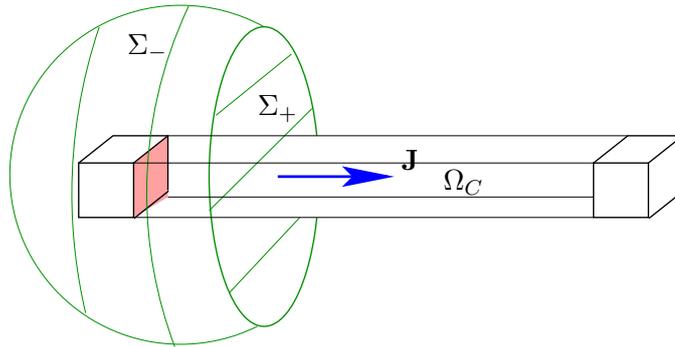


Abb. 3.4: Ein nichtverschwindender Strom durch Kontakte, die in einem Nichtleiter enden, verletzt das Ampèresche Gesetz.

3.4 Nichtlokale Anregungen

In manchen Fällen sind die Orte der Quellen im Wirbelstrommodell nicht bekannt (Fehlen von Modellinformationen) oder der genaue Feldverlauf am Ort der Quelle ist nicht von Interesse. Hierfür erscheinen die folgenden Variationsformulierungen attraktiv.

3.4.1 H-basierte Formulierung

Spannungsanregung

Bei der Spannungsanregung in Abschnitt 3.3.1 ergab sich, daß im Fall (a) die Lösung \mathbf{H} unabhängig von dem Ort der Leistungseinspeisung Θ war (siehe Abb. 3.3). So motiviert, entfernen wir in Fall (a) und (b) Θ aus $\partial\Omega$ und behalten die rechte Seite der Variationsformulierung (3.12). Im Fall (b) fügen wir Ω^* dafür zu Ω_C hinzu, so daß sich hier das Gebiet verändert (siehe Abb. 3.5). Die Variationsformulierung lautet also wieder:

Finde $\mathbf{H} \in \mathcal{V}_0$, so daß

$$\int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}' \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' \, dx = U \int_{\gamma^+} \mathbf{H}' \cdot ds \quad \forall \mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0. \quad (3.21)$$

Bemerkung 3.8 Eine Erweiterung auf den Mehrtorfall ist durch die Assoziierung von Schleifen zu Toren möglich.

Stromanregung

Die Nebenbedingung $\operatorname{rot} \mathbf{H}' = 0$ in Ω_I in der Definition des Raumes \mathcal{V}_0 in (2.26) kann wie im Beweis von Lemma 3.1 konstruktiv durch eine Zerlegung in Ω_I in Gradienten und Cohomologievektorfelder sichergestellt werden:

$$\mathcal{V}_0 \ni \mathbf{H}'|_{\Omega_I} = \operatorname{grad} \phi + \sum_{i=1}^{\beta_1(\Omega_I)} \mathbf{q}_i, \quad \phi \in H^1(\Omega_I), \quad (3.22)$$

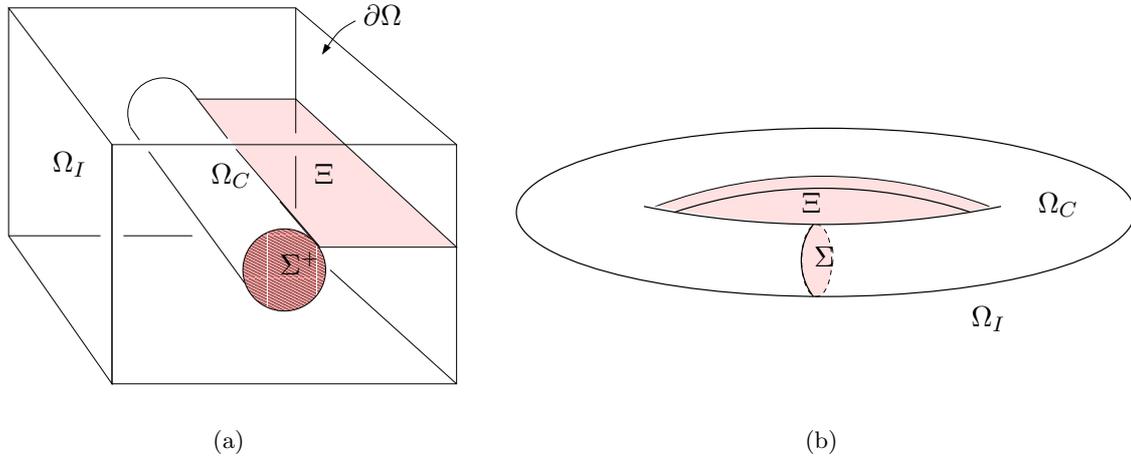


Abb. 3.5: Nichtlokale Anregungen: (a) Leiter mit Kontakt zum Gebietsrand mit Seifert-Fläche Ξ von Ω_I , (b) Leiterschleife ohne Kontakt zum Gebietsrand mit Seifert-Fläche Ξ von Ω_I und Seifert-Fläche Σ von Ω_C

wobei die \mathbf{q}_i eine Basis der 1. Cohomologiegruppe $\mathcal{H}^1(\Omega_I)$ bilden, die wieder mit Hilfe von Schnittflächen Ξ_i (Seifert-Flächen), die die Cohomologiegruppe $\mathcal{H}^1(\Omega_I \setminus (\Xi_1 \cup \dots \cup \Xi_{\beta_1(\Omega_I)}))$ trivial machen, konstruiert werden kann. Für den hier betrachteten Fall (Abb. 3.5) ist wieder $\beta_1(\Omega_I) = 1$, $\mathbf{q}_1 := \mathbf{q}$, $\Xi_1 = \Xi$, und wir können das Cohomologiefeld konstruieren durch $\mathbf{q} := \widetilde{\text{grad}} \theta$, $\theta \in H^1(\Omega_I \setminus \Xi)$, $[\theta]_{\Xi} = 1$, vgl. die Konstruktion im Beweis von Lemma 3.1.

Sei $\tilde{\mathbf{q}}$ eine $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ -Fortsetzung von \mathbf{q} . Dann kann ausgehend von der Variationsformulierung (2.27) der Gesamtstrom durch Σ^+ durch Fixieren des Anteils von $\tilde{\mathbf{q}}$ aus \mathcal{V}_0 festgelegt werden. Definiert man

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 := \left\{ \mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0, \int_{\gamma} \mathbf{H}' \cdot d\mathbf{s} = 0 \right\},$$

wobei $\gamma := \partial\Sigma^+$, so lautet eine entsprechende Variationsformulierung, um den Strom vorzuschreiben:

Finde $\mathbf{H} \in I\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathcal{V}}_0$, so daß

$$\int_{\Omega_C} \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{H}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{H}' \in \tilde{\mathcal{V}}_0. \quad (3.23)$$

3.4.2 Widersprüche in Zusammenhang mit nichtlokalen Anregungen

In Abschnitt 3.1 haben wir gesehen, daß die Leistung entweder durch einen Generatorstrom \mathbf{J}_G oder durch inhomogene Randbedingungen dem Wirbelstrommodell zugeführt werden kann. In (3.21) und (3.23) haben wir keine der beiden Quellarten. Das steht im Widerspruch zur Energieerhaltung.

Die Variationsprobleme (3.21) und (3.23) beschreiben die Physik in der Hinsicht nicht, daß sie kein zu \mathbf{H} passendes elektrisches Feld in Ω_I zulassen, d.h. kein elektrisches Feld $\mathbf{E}|_{\Omega_I}$, das Lösung von

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_C \quad \text{auf } \Gamma_C, \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma_C \quad (\text{nur Situation (a)}), \quad (3.24b)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -i\omega(\mu \mathbf{H}) \quad \text{in } \Omega_I, \quad (3.24c)$$

$$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = 0 \quad \text{in } \Omega_I, \quad (3.24d)$$

$$\int_{\Gamma_i} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.24e)$$

ist, wobei $\mathbf{E}_C = \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H}$ in Ω_C . Die rechten Seiten in (3.24a), (3.24b) und (3.24c) müssen eine Kompatibilitätsbedingung erfüllen (Stokes entlang $\partial\Xi$):

$$\int_{\partial\Xi} \mathbf{E}_C \cdot d\mathbf{s} = -i\omega \int_{\Xi} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.25)$$

— das Faradaysche Gesetz auf der Seifert-Fläche Ξ . Da bei der vorliegenden Regularität das Linienintegral in (3.25) nicht definiert ist (\mathbf{E} ist nur in $L^2(\Omega)$), betrachten wir (3.25) in schwacher Form (siehe [AFV01]):

$$\int_{\partial\Omega_C} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{q}} dS + i\omega \int_{\Omega_I} \mu \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}} d\mathbf{x} = 0. \quad (3.26)$$

Satz 3.2 Für Lösungen von (3.21) oder (3.23) ist (3.26) verletzt.

Beweis: Durch Testen von (3.21) mit $\mathbf{H}' \in \mathcal{V}_0$ bzw. (3.23) mit $\mathbf{H}' \in \tilde{\mathcal{V}}_0$ mit

$$\mathbf{H}' = \begin{cases} \mathbf{H}'|_{\Omega_C} \in C_0^\infty(\Omega_C), \\ \mathbf{H}'|_{\Omega_I} \equiv 0, \end{cases}$$

sehen wir, daß für jede Lösung \mathbf{H} in Ω_C

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{H} + i\omega(\mu \mathbf{H}) = 0$$

im Distributionensinne erfüllt ist. Partielle Integration liefert dann für (3.23)

$$\int_{\partial\Omega_C} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H}' dS + i\omega \int_{\Omega_I} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' d\mathbf{x} = 0.$$

Da jedoch $\tilde{\mathbf{q}} \notin \tilde{\mathcal{V}}_0$ wird (3.26) nicht impliziert. Für (3.21) ergibt sich mit $\mathbf{H}' = \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{V}_0$

$$\int_{\partial\Omega_C} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{q}} dS + i\omega \int_{\Omega_I} \mu \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{q}} d\mathbf{x} = U \neq 0$$

in Widerspruch zu (3.26). □

Um dennoch ein elektrisches Feld in Ω_I erklären zu können, muß zumindest eine der Bedingungen in (3.24) aufgegeben werden. Z.B. kann die Stetigkeitsbedingung $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_C} = 0$ geopfert werden, so daß

$$\mathbf{E} \notin \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega).$$

Wenn wir dies akzeptieren, wird auch klar, woher die Energie kommt, die das Wirbelstromproblem speist: Der Sprung $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_C}$ entspricht einem Sprung des Poyntingschen Vektors $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ entlang Γ_C und stellt somit eine Quelle dar. Die rechte Seite der Leistungsbilanz (3.1) muß um den Term

$$P_{\Gamma_C} := -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \mathbf{H}^* \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_C} dS$$

erweitert werden, der eine flächenhafte Quelle am Leiterrand darstellt.

3.4.3 E-basierte Formulierung

Wir betrachten wieder die Anordnungen in Abb. 3.5. Wie oben erklärt, suchen wir bei einer nichtlokalen Anregung \mathbf{E} nicht in $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$. Wir setzen daher mit $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ und $U \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - U \tilde{\mathbf{p}}. \quad (3.27)$$

$\tilde{\mathbf{p}}$ wird wie folgt konstruiert: Im Fall (a) setze

$$\mathbf{p} := \mathbf{grad} \theta, \quad \theta \in H^1(\Omega_C), \quad \theta|_{\Sigma^+} = 1, \quad \theta|_{\Sigma^-} = 0. \quad (3.28)$$

Es sei bemerkt, daß keine wirbelfreie Fortsetzung von \mathbf{p} nach $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ existiert. Im Fall (b) sei \mathbf{p} ein Repräsentant der 1. Cohomologiegruppe von $\mathcal{H}^1(\Omega_C)$ und werde konstruiert durch

$$\mathbf{p} := \widetilde{\mathbf{grad} \theta}, \quad \theta \in H^1(\Omega_C \setminus \Sigma), \quad [\theta]_{\Sigma} = 1. \quad (3.29)$$

In beiden Fällen wird \mathbf{p} in Ω_I mit Null fortgesetzt:

$$\tilde{\mathbf{p}} := \begin{cases} \mathbf{p} & \text{in } \Omega_C, \\ 0 & \text{in } \Omega_I. \end{cases}$$

Nachdem wir auf diese Weise ein auf Γ_C tangential unstetiges \mathbf{E} erklärt haben, $\mathbf{E} \notin \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, können wir \mathbf{E} -basierte Variationsformulierungen mit Spannungs- und Stromanregung angeben, wobei das elektrische Feld durch (3.27) gegeben ist:

Spannungsanregung

Finde $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$, so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}' dx + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}' dx = i\omega U \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}' dx. \quad (3.30)$$

Stromanregung

Finde $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ und $U \in \mathbb{C}$, so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}' \, dx + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}' \, dx - i\omega U \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}' \, dx &= 0, \\ \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{p} \, dx - U \int_{\Omega_C} \sigma |\mathbf{p}|^2 \, dx &= I. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Der Ausdruck für die in das Wirbelstromproblem eingespeiste Leistung ist sowohl bei Spannungs- als auch bei Stromanregung $P = \frac{1}{2} U I^*$, U ist die Umlaufspannung. Der Strom I ist in beiden Fällen durch die zweite Gleichung in (3.31) gegeben.

3.4.4 Physikalische Interpretation der nichtlokalen Anregungen

Wir haben gesehen, daß die vorgestellten nichtlokalen Anregungen auf elektrische Felder führen, die nicht in $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ liegen, da ihre Tangentialkomponenten auf Γ_C springen und der Sprung der Ort der Energieeinspeisung in das Modell ist. Die Ursache für diese unnatürliche Eigenschaft unseres Modells liegt in der das ursprüngliche Modell überbestimmenden Forderung, einen Strom oder eine Spannung vorschreiben zu wollen, ohne eine explizite Quelle (Generatorstromverteilung oder Randbedingung) modelliert zu haben. Letztere existieren natürlich stets in der Realität. Wir müssen daher jetzt einen „umgekehrten Modellierungsschritt“ machen und danach fragen, wie eine Situation aussehen könnte, die (evtl. näherungsweise) solch einen Sprung des elektrischen Feldes verursacht, und ob diese Situation von Interesse ist. Ansonsten wäre das Modell mit nichtlokaler Anregung ohne Relevanz.

Diesen Punkt zu klären ist insbesondere deshalb wichtig, da die vorgestellten Variationsformulierungen bzw. Varianten davon bereits für praktische Rechnungen verwendet werden, siehe z.B. [Hip02b] für die \mathbf{H} -basierte, [DHL99] für eine \mathbf{E} -basierte Formulierung (mit Vektorpotential).

Die Bemerkung 3.4 zeigt, daß sich nichtlokale Anregungen nicht als Grenzprozeß einer Anordnung mit Kontakten deuten lassen. Jedoch gibt es eine andere Deutung, die relevant ist (in dem Sinn, daß sie näherungsweise technisch umsetzbar ist und interessierende Situationen beschreibt): Die Sprünge $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_C}$ lassen sich als *Idealisierung dünner Spulen, die in ihrer Umgebung kein magnetisches Feld hervorrufen*, deuten, siehe Abb. 3.6. Die Idealisierung besteht darin, daß die Spulen als unendlich dünn angesehen werden und nur deren Auswirkung auf das elektrische Feld in deren Umgebung noch in die Modellierung eingeht. (Das umgebende *magnetische* Feld wird ja per Konstruktion nicht beeinflusst.) Die Felder innerhalb der dünnen Spule werden in der weiteren Modellierung nicht mehr betrachtet. Und genau das ist die Ursache für die beobachtete Verletzung des Faradayschen Gesetzes: Die magnetische Flußänderung innerhalb der dünnen Spulen fehlt. Somit ist auch die Art der Quelle eigentlich wieder eine gegebene Stromdichteverteilung.

Daß die genannten Spulen mit außen verschwindendem Magnetfeld grundsätzlich möglich sind, sieht man, indem man deren Vektorpotential \mathbf{A}_G analog zu $\tilde{\mathbf{q}}$ in (3.23)

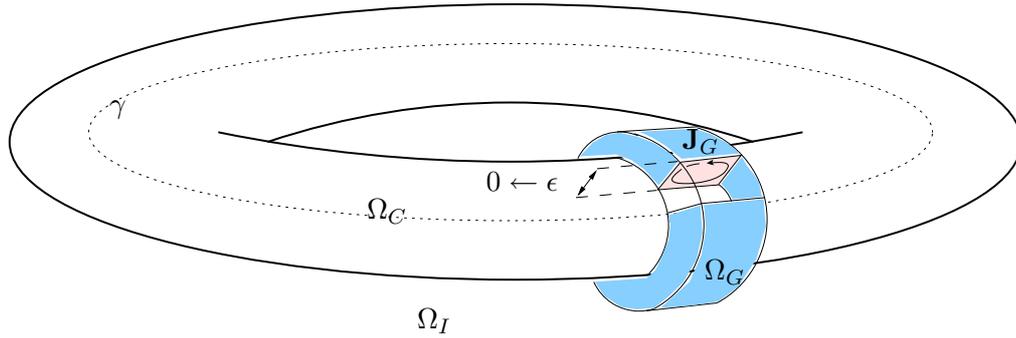


Abb. 3.6: Infinitesimale Spule mit Stromverteilung, die außerhalb der Spule ein verschwindendes Magnetfeld erzeugt. Zur Verdeutlichung der Stromverteilung wurde die Spule an einer Stelle offen gezeichnet.

konstruiert (siehe auch [Bos98a, Übung 8.5]): Sei Ω_G das von der Spule überdeckte Gebiet, Ω'_G das Komplement $\Omega'_G := \Omega \setminus \overline{\Omega_G}$, Ξ die entsprechende Seifert-Fläche, so daß die Cohomologiegruppe $\mathcal{H}^1(\Omega'_G \setminus \Xi)$ trivial ist. Definiere

$$\mathbf{A}_G|_{\Omega'_G} := \widetilde{\mathbf{grad}} \theta, \quad \theta \in H^1(\Omega'_G \setminus \Xi), \quad [\theta]_{\Xi} = 1$$

und setze $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ -konform nach Ω_G fort. Dann gilt mit $\mathbf{B}_G := \mathbf{rot} \mathbf{A}_G$

$$\mathbf{B}_G \equiv 0 \quad \text{in } \Omega'_G.$$

Andererseits verschwindet bei zeitlicher Änderung der Amplitude von \mathbf{A}_G das Umlaufintegral $\int_{\gamma} -i\omega \mathbf{A}_G \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma} \mathbf{E}_G \cdot d\mathbf{s}$ entlang des geschlossenen Pfades $\gamma \subset \Omega_C$ in Abb. 3.6 nicht, so daß auf diese Weise eine *induktive Einkopplung* von Strömen durch ein außerhalb der Spule verschwindendes $i\omega \mathbf{B}_G$ erfolgen kann.

Wir fassen zusammen: Die Lage dieser infinitesimalen Spulen ist für das magnetische Feld irrelevant, daher ja die Bezeichnung *nichtlokal* für die Anregungsart. Für das elektrische Feld im Nichtleiter Ω_I allerdings muß deren Lage angegeben werden, so daß deren nichtlokaler Charakter dann verloren geht. Hier wird wieder deutlich: Im Wirbelstrommodell erfordert die Bestimmung des elektrischen Feldes in ganz Ω mehr Informationen als zur Bestimmung des magnetischen Feldes nötig sind. Zu den zusätzlichen Informationen über die Ladungsdichten in Ω_I und Gesamtladungen der Leiter kommt hier die Information über die Lage der idealisierten Quellen hinzu.

Kopplung mit Netzwerkgleichungen

Die Interpretation der nichtlokalen Anregungen als *induktive* hat wichtige Konsequenzen für eine eventuelle Kopplung zu Netzwerkgleichungen: Der Strom I im Leiter Ω_C ist nicht identisch mit dem Netzwerkstrom I_L an dem assoziierten Tor, da letzterer mit dem (unbekannten) Spulenstrom identifiziert werden muß. Eine Kopplung durch den Erhalt der Ströme wie bei den anderen Anregungsarten kommt daher nicht in Betracht.

Jedoch ist die magnetische Flußänderung $i\omega\Phi$, die sich hinter dem Sprung $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_C}$ verbirgt, ein guter Kandidat für eine Kopplung, da sie in beiden Modellen eindeutig definiert ist. Da der Sprung des \mathbf{E} -Feldes durch das Cohomologievektorfeld erzeugt wird, erhalten wir für jede geschlossene Kurve $\gamma \subset \Gamma_C$, die einmal um die Leiterschleife herumgeht (siehe Abb. 3.6),

$$-i\omega\Phi = \int_{\gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_C} \cdot d\mathbf{s} = U,$$

was den Namen „Umlaufspannung“ für U motiviert. Die Tatsache, daß U nicht von der Wahl des Pfades γ abhängt, ist notwendig, um von „der Umlaufspannung“ zu sprechen, und liegt technisch gesprochen an der speziellen Konstruktion der Spule, die kein magnetisches Außenfeld erzeugt. Für die sog. induzierte Klemmspannung U_{ind} der Spule im Netzwerkmodell gilt

$$U_{ind} = -N i\omega\Phi = NU,$$

wobei N die Anzahl der Windungen ist.

Den Kopplungsstrom in der Spule I_L kann man über die Forderung nach Erhaltung der Leistungen berechnen — verglichen mit den anderen Anregungen haben sich also bezogen auf die Kopplung die Rollen von U und I vertauscht. Für die Berechnung von I_L muß dabei zusätzlich entweder die Änderung der magnetischen Energie innerhalb der Spule W_L oder die Eigeninduktivität L bekannt sein:

$$P_{Netzwerk} = \frac{1}{2}U_{ind} I_L^* = i\omega W_L + P = \frac{i\omega}{2}L |I_L|^2 + \frac{1}{2}U I^*,$$

wobei P die an das modellierte Wirbelstromproblem (ohne die Spule) abgegebene komplexe Leistung und $P_{Netzwerk}$ die an dem Tor vom Netzwerkmodell abgegebene Gesamtleistung ist.

Die benötigte Zusatzinformation spiegelt die Tatsache wieder, daß unterschiedliche Spulen, die bei gleicher Klemmspannung U_{ind} unterschiedliche Umlaufspannungen U erzeugen, verwendet werden können.

4 Finite Elemente und adaptive Mehrgitterverfahren

Die Variationsformulierungen der vorigen Kapitel sind mathematische Modelle des Wirbelstromproblems. Praxisrelevante Problemstellungen können nur mit Hilfe numerischer Verfahren gelöst werden. Dafür müssen die Variationsformulierungen durch eine Diskretisierung in lineare Gleichungssysteme abgebildet werden. Anschließend sollen die erhaltenen Systeme möglichst effizient gelöst werden. Dieses Kapitel beschreibt die Umsetzung dieser beiden Teilaufgaben und bildet den Schwerpunkt dieser Arbeit. Teile dieses Kapitels sind bereits in der Arbeit [Ste02] des Autors enthalten.

4.1 Finite-Element-Diskretisierung

Das Wirbelstromproblem liegt in Form der Variationsformulierungen in Kap. 2.3 vor. Dies legt die Diskretisierung mit der Ritz-Galerkin-Methode nahe, bei der man den zugrundeliegenden Ansatz- und Testraum durch einen endlichdimensionalen Teilraum ersetzt. Wählt man Basisfunktionen, die zu den geometrischen Objekten einer Triangulierung \mathcal{T}_h des Gebietes Ω assoziiert sind und lokalen Träger haben, führt dies auf die *Finite-Element-Methode* (FEM), die wir im folgenden verwenden.

Zunächst wollen wir einige Begriffe genauer spezifizieren. Sei Ω_h ein Lipschitz-Polyeder, welches Ω approximiert. Dabei sollen die Knoten des Randes von Ω_h auf dem Rand von Ω liegen. Weiterhin existiere eine Abbildung der Randdaten von $\partial\Omega$ auf $\partial\Omega_h$. Wir unterscheiden zwischen Ω_h und Ω , da wir in den folgenden Kapiteln auch Folgen von Approximationen des Gebietes Ω verwenden.

Definition 4.1 (Simplizes) Die zu d gegebenen Raumpunkte $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d \in \mathbb{R}^d$ gegebene Menge

$$T := \left\{ \mathbf{x} = \sum_{j=0}^k \lambda_j \mathbf{a}_j \mid \sum_{j=0}^k \lambda_j = 1; \lambda_j \in [0, 1], 0 \leq j \leq d \right\} \quad (4.1)$$

heißt *Simplex*.

Im Fall $d = 2$ sind dies Dreiecke, im Fall $d = 3$ Tetraeder.

Definition 4.2 (Baryzentrische Koordinaten) Die zu jedem $\mathbf{x} \in T$ eindeutig gegebenen $\lambda_j(\mathbf{x})$ in (4.1) heißen *baryzentrische Koordinaten*.

Definition 4.3 (Konsistente Triangulierung) Unter einer *konsistenten Triangulierung* \mathcal{T}_h von Ω_h verstehen wir eine endliche Menge von Simplex $T \in \overline{\Omega_h}$, so daß

- (i) $\text{vol}(T) > 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$
- (ii) $\cup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \overline{\Omega_h}$
- (iii) $T \cap T'$ ist leer, ein Knoten, eine Kante oder eine Fläche $\quad \forall T, T' \in \mathcal{T}_h, T \neq T'$.

Die Menge der Knoten (engl. *nodes*) der Triangulierung bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mathcal{T}_h)$, die Menge der orientierten Kanten (engl. *edges*) mit $\mathcal{E}(\mathcal{T}_h)$ und die Menge der orientierten Seitenflächen (engl. *faces*) mit $\mathcal{F}(\mathcal{T}_h)$. Weiterhin setzen wir $N_{\mathcal{N}} := |\mathcal{N}(\mathcal{T}_h)|$, $N_{\mathcal{E}} := |\mathcal{E}(\mathcal{T}_h)|$, $N_{\mathcal{F}} := |\mathcal{F}(\mathcal{T}_h)|$ und $N_{\mathcal{T}} := |\mathcal{T}_h|$, wobei $|\cdot|$ die Mächtigkeit der entsprechenden Menge bezeichnet. Der Parameter h ist ein (reziprokes) Maß für die Feinheit der Triangulierung. Wir wählen

$$h := \max\{\text{diam}(T) : T \in \mathcal{T}_h\},$$

so daß h die Länge der größten Simplexkante ist. Im Sinne einer Konvergenzbetrachtung $h \rightarrow 0$ nehmen wir an, daß die Familie der Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h\}_h$ *stabil* ist. Damit ist gemeint, daß die Winkel der Elemente für kleiner werdendes h nicht zu schlecht werden. Dies kann durch die Forderung, daß

$$\sup_{\mathcal{T}_h} \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\text{diam}(T)}{\rho(T)}$$

durch eine Konstante beschränkt ist, präzisiert werden. Dabei ist $\rho(T)$ der Durchmesser der größten in T enthaltenen Kugel.

Wir setzen stets voraus, daß die Leiterränder und Ränder mit Dirichlet-Randbedingungen von der Triangulierung aufgelöst werden, d.h. daß sie aus vollständigen Simplexrändern $F \in \mathcal{F}(\mathcal{T}_h)$ gebildet werden.

4.1.1 Whitney-Elemente

Für Variationsformulierungen, die auf dem Raum $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ basieren, haben sich in letzter Zeit die $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ -konformen Whitney-1-Elemente etabliert. In der Sprache des Differentialformen-Kalküls stellen diese diskrete 1-Formen dar, weshalb man auch von Whitney-1-*Formen* spricht. Zusammen mit anderen diskreten Differentialformen (Whitney- k -Formen) wurden sie ursprünglich von Whitney [Whi57] als ein Werkzeug der algebraischen Topologie entwickelt. Ihre Bedeutung als finite Elemente für elektromagnetische Probleme wurde von Bossavit erkannt, [Bos88b, Bos88a]. Eine sehr ausführliche Diskussion findet sich in [Bos98a, Kap. 5].

Unabhängig von dem differentialgeometrischen Kontext wurden Whitney-Elemente von Nédélec als gemischte finite Elemente niedrigster polynomialer Ordnung wiederentdeckt, [Néd80, Néd86]. Die Whitney-1-Elemente bezeichnet man daher auch als *Nédélec-Elemente erster Art und niedrigster Ordnung*. Von Whitney ursprünglich nur für simpliziale Gitter entwickelt, gibt es mittlerweile Whitney-Elemente für Hexaeder, Prismen und Pyramiden und auch Whitney-Elemente höherer Ordnung, siehe [DHN⁺94, GH99, Hip01, Bos02]. Wir beschränken uns hier auf den Fall niedrigster Ordnung auf Simplex.

Whitney-0-Elemente sind die bekannten stetigen, stückweise linearen Lagrange-Elemente, Whitney-2-Elemente sind die $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ -konformen Raviart-Thomas-Elemente ($\mathcal{RT0}(\mathcal{T}_h)$ -Elemente, siehe [RT77]) und Whitney-3-Elemente sind die elementweise konstanten Funktionen auf \mathcal{T}_h . Durch Whitney-0- und Whitney-3-Elemente werden also skalare Funktionen diskretisiert, durch Whitney-1- und Whitney-2-Elemente Vektorfelder. Die entsprechenden Räume der Whitney-Elemente bezeichnen wir mit $\mathcal{W0}(\mathcal{T}_h)$, $\mathcal{W1}(\mathcal{T}_h)$, $\mathcal{W2}(\mathcal{T}_h)$, $\mathcal{W3}(\mathcal{T}_h)$.

Whitney-1-Elemente

Der Raum $\mathcal{W1}(\mathcal{T}_h)$ der Whitney-1-Elemente sind wie folgt definiert. Auf einem Element $T \in \mathcal{T}_h$ ist

$$\mathcal{W1}(T) := \{\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Für $\mathcal{W1}(\mathcal{T}_h) \subset \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$ müssen die $\mathbf{u} \in \mathcal{W1}(\mathcal{T}_h)$ an den Elementgrenzen tangential stetig sein, was durch eine angemessene Wahl der Freiheitsgrade $\kappa_{e \in \mathcal{E}(\mathcal{T}_h)}$ sichergestellt wird. Diese sind gerade die Zirkulationen entlang der orientierten Gitterkanten,

$$\kappa_e(\mathbf{u}) = \int_e \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}, \quad e \in \mathcal{E}(\mathcal{T}_h),$$

was den Whitney-1-Elementen auch den Namen *Kantenelemente* gegeben hat. Eine Basis $\{\boldsymbol{\xi}_e\}_{e \in \mathcal{E}(\mathcal{T}_h)}$ von $\mathcal{W1}(\mathcal{T}_h)$ erhalten wir dann durch

$$\kappa_{e1}(\boldsymbol{\xi}_{e2}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } e1 = e2 \in \mathcal{E}(\mathcal{T}_h) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Basisfunktionen haben lokale Träger. Für ein Tetraeder $T \in \mathcal{T}_h$ mit den Eckknoten $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4$ gibt es eine explizite Darstellung der lokalen Basisfunktionen $\boldsymbol{\xi}_{e(ij),T}$ durch die baryzentrischen Koordinatenfunktionen λ_i , $i = 0, \dots, 3$ von T ,

$$\boldsymbol{\xi}_{e(ij),T}(\mathbf{x}) := \lambda_i(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_j(\mathbf{x}) - \lambda_j(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_i(\mathbf{x}),$$

wobei $e(i, j) \in \mathcal{E}(T)$ die Kante vom Knoten \mathbf{a}_i nach Knoten \mathbf{a}_j ist. Aus dieser Darstellung ergibt sich sofort

$$\mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_{e(ij),T}(\mathbf{x}) = 2 \mathbf{grad} \lambda_i(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} \lambda_j(\mathbf{x}),$$

d.h. die Rotation der Basisfunktionen von $\mathcal{W1}(\mathcal{T}_h)$ ist elementweise konstant, da $\mathbf{grad} \lambda_i$ elementweise konstant ist.

Whitney-2-Elemente

Analog verhält es sich für die $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ -konformen Whitney-2-Elemente. Hier sind die Freiheitsgrade die Flüsse durch die Elementseiten $F \in \mathcal{F}(\mathcal{T}_h)$, die Divergenz der Funktionen in $\mathcal{W2}(\mathcal{T}_h)$ ist elementweise konstant. Die Basis von $\mathcal{W2}(\mathcal{T}_h)$ bezeichnen wir mit $\{\boldsymbol{\psi}_{F \in \mathcal{F}(\mathcal{T}_h)}\}$. Die lokalen Basisfunktionen auf den Elementen haben die Darstellung

$$\boldsymbol{\psi}_{F(ijk),T} := 2(\lambda_i \mathbf{grad} \lambda_j \times \mathbf{grad} \lambda_k + \lambda_j \mathbf{grad} \lambda_k \times \mathbf{grad} \lambda_i + \lambda_k \mathbf{grad} \lambda_i \times \mathbf{grad} \lambda_j).$$

Dabei bezeichnet $F(ijk)$ die durch $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Tetraederseite. Die Argumente der baryzentrischen Koordinaten wurden der besseren Lesbarkeit halber weggelassen.

Vorteile der Whitney-Elemente

Gegenüber einer komponentenweisen Diskretisierung der \mathbf{E} - oder \mathbf{H} -Felder mit stückweise linearen Lagrange-Elementen („Knotenelementen“) hat die Diskretisierung mit Whitney-1-Elementen folgende Vorteile:

- Dirichlet-Randbedingungen können einfach durch Festlegen der Kantenzirkulationen auf dem Dirichlet-Rand implementiert werden. Im Gegensatz zu Knotenelementen macht dies auch an Ecken und Kanten keine Probleme.
- An Materialgrenzen kann die Normalkomponente springen, was dem physikalischen Verhalten entspricht. Die Stetigkeit der Knotenelemente ist unnatürlich.
- Der Raum der vektoriellen Knotenelemente ist $\mathbf{H}^1(\Omega)$ -konform. Da aber im Falle einspringender Ecken der Raum $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ein echter, abgeschlossener Unterraum von $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega)$ ist [CD97], kann eine Diskretisierung mit Knotenelementen keine geeignete Approximation des Problems liefern; der Raum ist — etwas salopp formuliert — einfach zu klein, siehe [Hip02a, Abschnitt 6].
- Bei dem Maxwell-Eigenwertproblem treten mit Knotenelementen unphysikalische Eigenlösungen, sogenannte „Geistermoden“ auf, mit Whitney-1-Elementen nicht, siehe z.B. [Bos90, Bof01].

Der Hauptvorteil (und dieser ist z.T. Ursache der zuvor genannten Vorteile) der Diskretisierung mit Whitney-Elementen ist deren strukturelle Eigenschaft: Die dem kontinuierlichen Problem innewohnende Struktur in Form des De Rham-Komplexes (1.8) hat ein diskretes Äquivalent, den Whitney-Komplex (siehe obere Zeile des Diagramms in Abb. 4.1). Dies bedeutet, daß für Whitney-1-Elemente diskrete Skalarpotentiale zur Verfügung stehen, die wiederum Whitney-Elemente sind (die Whitney-0-Elemente). Deren Gradienten sind ein Unterraum von $\mathcal{W}\mathbf{1}(\mathcal{T}_h)$ und bilden den Kern von \mathbf{rot} , falls Ω zusammenziehbar ist.

Analog verhält es sich mit den Whitney-2-Elementen. Diskrete Vektorpotentiale stehen in Form der Whitney-1-Elemente zur Verfügung, deren Rotation (wieder im Fall trivialer Topologie) den Kern des \mathbf{div} -Operators auf $\mathcal{W}\mathbf{2}(\mathcal{T}_h)$ bilden.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{W}\mathbf{0}(\mathcal{T}_h) & \xrightarrow{\mathbf{grad}} & \mathcal{W}\mathbf{1}(\mathcal{T}_h) & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \mathcal{W}\mathbf{2}(\mathcal{T}_h) & \xrightarrow{\mathbf{div}} & \mathcal{W}\mathbf{3}(\mathcal{T}_h) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \mathbb{C}^{N_{\mathcal{N}}} & \xrightarrow{\mathbf{G}} & \mathbb{C}^{N_{\mathcal{E}}} & \xrightarrow{\mathbf{R}} & \mathbb{C}^{N_{\mathcal{F}}} & \xrightarrow{\mathbf{D}} & \mathbb{C}^{N_{\mathcal{T}}}
 \end{array}$$

Abb. 4.1: Whitney-Komplex

Die Matrixoperatoren G , R , D

Die Operatoren \mathbf{grad} , \mathbf{rot} , \mathbf{div} haben ihr algebraisches Äquivalent in Form der *Inzidenzmatrizen* \mathbf{G} , \mathbf{R} und \mathbf{D} , die sich aus den Darstellungen in den Whitney-Basen ergeben. Die Operatoren bilden die Vektoren der Freiheitsgrade (Koeffizientenvektoren) der Whitney- k -Elemente auf die Freiheitsgrade der Whitney- $(k+1)$ -Elemente ab, wie in der unteren Reihe des Diagramms in Abb. 4.1 dargestellt ist. Die vertikalen Linien in dem Diagramm bezeichnen die Isomorphismen zwischen den Vektoren der Freiheitsgrade und den Elementen der Whitney-Räume.

Bemerkung 4.1 Die Vektoren der Freiheitsgrade (Koeffizientenvektoren) von $\mathcal{W}0(\mathcal{T}_h)$, $\mathcal{W}1(\mathcal{T}_h)$, $\mathcal{W}2(\mathcal{T}_h)$ und $\mathcal{W}3(\mathcal{T}_h)$ sind Elemente von $\mathbb{C}^{\mathcal{N}(\mathcal{T}_h)}$, $\mathbb{C}^{\mathcal{E}(\mathcal{T}_h)}$, $\mathbb{C}^{\mathcal{F}(\mathcal{T}_h)}$ und $\mathbb{C}^{\mathcal{T}_h}$. Wir identifizieren diese Räume jeweils mit $\mathbb{C}^{N_{\mathcal{N}}}$, $\mathbb{C}^{N_{\mathcal{E}}}$, $\mathbb{C}^{N_{\mathcal{F}}}$ und $\mathbb{C}^{N_{\mathcal{T}}}$.

Die Einträge der Inzidenzmatrizen repräsentieren die Gittertopologie. Die Einträge der Inzidenzmatrizen sind $+1$, -1 oder 0 . So sind die Einträge der Knoten-Kanten-Inzidenz-Matrix $\mathbf{G} = (G_{ij})$

$$G_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls Kante } i \text{ an Knoten } j \text{ endet} \\ -1 & \text{falls Kante } i \text{ an Knoten } j \text{ beginnt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Matrix \mathbf{G} spielt die Rolle des diskreten Gradienten. In gleicher Weise spielen die Kanten-Flächen-Inzidenz-Matrix $\mathbf{R} = (R_{ij})$ und die Flächen-Element-Inzidenzmatrix $\mathbf{D} = (D_{ij})$ die Rollen der auf den Vektor der Gitterzirkulationen wirkenden diskreten Rotation und die auf den Vektor der Gitterflüsse wirkenden diskreten Divergenz. Ihre Einträge sind

$$R_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls die Kante } i \text{ die Fläche } j \text{ begrenzt} \\ & \text{und deren Rand positiv durchläuft,} \\ -1 & \text{falls die Kante } i \text{ die Fläche } j \text{ begrenzt} \\ & \text{und deren Rand negativ durchläuft,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$D_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls die Fläche } i \text{ das Tetraeder } j \text{ begrenzt} \\ & \text{und die gleiche Orientierung wie dessen Rand hat,} \\ -1 & \text{falls die Fläche } i \text{ das Tetraeder } j \text{ begrenzt} \\ & \text{und die entgegengesetzte Orientierung wie dessen Rand hat,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Identitäten $\mathbf{rot grad} = 0$ und $\mathbf{div rot} = 0$ spiegeln sich in den algebraischen Beziehungen

$$\mathbf{R}\mathbf{G} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{D}\mathbf{R} = 0 \quad (4.2)$$

wieder.

4.1.2 Auswahl der Formulierung: E- vs. H-basiert

In den Kapiteln 2 und 3 haben wir zwei verschiedene Formulierungen des Wirbelstromproblems betrachtet, die elektrische (**E**-basierte) und die magnetische (**H**-basierte). Bei den Variationsformulierungen liegt der Raum $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ zugrunde, so daß beide mit Whitney-1-Formen diskretisiert werden können, allerdings enthalten die Lösungsräume unterschiedliche Nebenbedingungen.

Für das **H**-basierte Variationsproblem (2.27) ist es die Nebenbedingung

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_G \text{ in } \Omega_I,$$

die berücksichtigt werden muß. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. Man verwendet eine Sattelpunktformulierung, siehe [Bos98a, Kap. 8.3.1]. Die Nachteile sind hier, daß spezielle Lösungsverfahren verwendet werden müssen, um das entstehende Gleichungssystem zu lösen. Weiterhin tritt durch die Einführung des Lagrange-Multiplikators eine Vermehrung der Unbekannten auf.
2. Durch die Anwendung sogenannter Tree-Cotree-Techniken kann das Problem auf unabhängige Freiheitsgrade reduziert werden (siehe z.B. [Bos98a, KFB98]). Jedoch hängt die Kondition des entstehenden Gleichungssystems bei diesen graphenbasierten Methoden sehr von der Konstruktion des Baumes ab. Der Schwachpunkt resultiert aus der Tatsache, daß es sich um rein algebraische Verfahren handelt, bei denen die Metrik des Problems praktisch unberücksichtigt bleibt.
3. Es kann im stromfreien Gebietsteil mit einem Gradientenfeld gerechnet werden, was auf die sogenannte **H**- ϕ -Formulierung führt. Hier wird durch den Ansatz automatisch $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_G$ in Ω_I erfüllt, indem im Nichtleiter $\mathbf{H} = \mathbf{grad} \phi + \mathbf{H}_G$ gesetzt wird. \mathbf{H}_G ist eine partikuläre Lösung, so daß $\mathbf{rot} \mathbf{H}_G = \mathbf{J}_G$, die beispielsweise mit dem Gesetz von Biot-Savart oder ebenfalls durch Tree-Cotree-Techniken (siehe z.B. [DHR⁺97]) berechnet werden kann. Eine weitere, vielversprechende Alternative in Zusammenhang mit Multilevel-Triangulierungen findet man in [Hip00b].

Bei nichttrivialen Leitertopologien (wenn die erste Betti-Zahl $\beta_1(\Omega_C) \geq 1$ ist) müssen für diese Methode allerdings Seifert-Flächen (siehe Kap. 1.2) konstruiert werden, um mit Hilfe *springender* Skalarpotentiale (wie sie in Kap. 3 benutzt wurden) entsprechende Cohomologieanteile der Lösung repräsentieren zu können. Die automatische Konstruktion dieser Flächen ist Gegenstand aktueller Forschung und führt auf Algorithmen mit $\mathcal{O}(N^2)$ -Komplexität, siehe [Kot87, Kot89, GK01b, GK01a]. Dieselbe Komplexität erfordert die Konstruktion der entsprechenden Cohomologiefelder, wenn das Skalarpotential in Verbindung mit Randelementmethoden verwendet wird, siehe [HO01, Ost02], wobei hier N die Anzahl der Kanten der Leiterränder ist.

Für die **E**-basierte Variationsformulierung (2.30) ist ebenfalls eine Nebenbedingung an die Lösung zu stellen, wenn die Lösung eindeutig sein soll, siehe Satz 2.2. Drücken wir die Nebenbedingung in schwacher Form aus, erhalten wir folgende Sattelpunktformulierung, wobei wir vereinfachend $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ auf dem Rand annehmen und verlangen, daß keiner der Leiter $\Omega_{C,i}$ den Gebietsrand $\partial\Omega$ berührt.

Hierfür definieren wir den Raum

$$\mathcal{V} := \{\lambda \in H^1(\Omega_I) : \lambda|_{\partial\Omega} = 0, \lambda|_{\partial\Omega_{C,i}} = \text{konst. } \forall i \in \{1, \dots, \beta_2(\Omega_i)\}\}. \quad (4.3)$$

Die Sattelpunktformulierung lautet dann:

Finde $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ und $\lambda \in \mathcal{V}$, so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ und $\forall \lambda' \in \mathcal{V}$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_I} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{grad} \lambda \, d\mathbf{x} = -i\omega \int_{\Omega_G} \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x}, \quad (4.4a)$$

$$\int_{\Omega_I} \mathbf{E} \cdot \mathbf{grad} \lambda' \, d\mathbf{x} = 0. \quad (4.4b)$$

Die Nebenbedingung (4.4b) erzwingt die schwache Divergenzfreiheit von \mathbf{E} im Nichtleiter und das Verschwinden der Leiterladungen und macht \mathbf{E} damit eindeutig, vgl. Kap 2.2.

Interessiert uns jedoch als Modellierungsgröße das elektrische Feld \mathbf{E} gar nicht, sondern ausschließlich das Magnetfeld \mathbf{H} und die Ströme, wie es in den meisten Wirbelstromanwendungen der Fall ist, kann die Nebenbedingung fallengelassen werden. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur \mathbf{H} -Formulierung, bei der in der Nebenbedingung wesentliche Modellinformation enthalten ist. Wir erhalten dann die sogenannte *nichtgeeichte Formulierung*¹, siehe (2.30):

Suche $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$, so daß $\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x} = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}_G \cdot \mathbf{E}' \, d\mathbf{x}. \quad (4.5)$$

Da diese Formulierung im Unterschied zu der \mathbf{H} -Formulierung bei nichttrivialen Topologien keinerlei Extraaufwand erfordert und auch Erregungsströme einfach realisiert werden können, wählen wir diese für unsere Berechnungen. Wie wir sehen werden, ist auch die Nichteindeutigkeit der Lösung für die numerische Lösung des Problems unproblematisch.

4.1.3 Diskretes Wirbelstromproblem

Um Dirichlet-Randbindungen zu berücksichtigen, definieren wir $\mathcal{W}\mathbf{1}_0(\mathcal{T}_h)$ als den Raum der Whitney-Elemente, bei dem die Freiheitsgrade für Kanten, die Teil des Randes sind, verschwinden. Die Anzahl der Freiheitsgrade $N_{\mathcal{E}}$ reduziert sich dann auf die Anzahl der „aktiven“ Kanten, die nicht am Rand liegen.

Um die diskrete Formulierung zu erhalten, drücken wir $\mathbf{E}_h \in \mathcal{W}\mathbf{1}_0(\mathcal{T}_h)$ durch die Basis der Whitney-1-Elemente aus

$$\mathbf{E}_h = \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{E}}} \boldsymbol{\xi}_j x_j^c.$$

¹ Die Namensgebung deutet an, daß \mathbf{E} in Ω_I nur die Rolle eines Vektorpotentials spielt.

Der Vektor der Freiheitsgrade ist $\mathbf{x}^c = (x_j^c)_j \in \mathbb{C}^{N_\mathcal{E}}$. Einsetzen in (4.5) und Testen mit allen Whitney-1-Basisfunktionen ergibt das diskrete Problem:

Suche $\mathbf{x}^c \in \mathbb{C}^{N_\mathcal{E}}$, so daß für $i = 1, \dots, N_\mathcal{E}$

$$\sum_{j=1}^{N_\mathcal{E}} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_j \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\xi}_i \, d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \boldsymbol{\xi}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_i \, d\mathbf{x} \right) x_j^c = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}_G \cdot \boldsymbol{\xi}_i \, d\mathbf{x}. \quad (4.6)$$

Wir definieren noch die *Massenmatrizen* der Whitney-1- und der Whitney-2-Elemente $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{R}^{N_\mathcal{E} \times N_\mathcal{E}}$ und $\mathbf{M}_2 \in \mathbb{R}^{N_\mathcal{F} \times N_\mathcal{F}}$. Deren Koeffizienten sind

$$M_{1,ij}(\alpha) := \int_{\Omega} \alpha \boldsymbol{\xi}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_i \, d\mathbf{x},$$

$$M_{2,ij}(\alpha) := \int_{\Omega} \alpha \boldsymbol{\psi}_j \cdot \boldsymbol{\psi}_i \, d\mathbf{x}$$

mit $\alpha \in L^\infty(\Omega)$. Weiterhin definieren wir noch den Vektor der rechten Seite $\mathbf{b}^c := (b_i^c)_i \in \mathbb{C}^{N_\mathcal{E}}$,

$$b_i^c := -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J}_G \cdot \boldsymbol{\xi}_i \, d\mathbf{x}.$$

Dann läßt sich (4.6) als das komplexwertige lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^c \mathbf{x}^c = \mathbf{b}^c \quad (4.7)$$

schreiben, wobei die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N_\mathcal{E} \times N_\mathcal{E}}$ die Darstellung

$$\mathbf{A}^c = \mathbf{R}^T \mathbf{M}_2\left(\frac{1}{\mu}\right) \mathbf{R} + i\omega \mathbf{M}_1(\sigma) \quad (4.8)$$

hat, siehe [Bos98a]. Die Matrix \mathbf{A}^c ist dünn besetzt, komplex symmetrisch (nicht hermitesch) und es gilt $\operatorname{Re}((\mathbf{x}^c)^T \mathbf{A}^c (\mathbf{x}^c)^*) \geq 0$ für alle $\mathbf{x}^c \in \mathbb{C}^{N_\mathcal{E}}$. Ein hochgestelltes '*'-Zeichen bedeutet wieder konjugiert komplex.

Bemerkung 4.2 (Konvergenzordnung) Aus der Approximationseigenschaft der Whitney-1-Formen, siehe [Mon92, Mon93], und Anwendung des Cea-Lemmas ergibt sich für $h \rightarrow 0$ die Konvergenzaussage

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{\mathbf{e};\Omega} = \mathcal{O}(h),$$

falls $\mathbf{E} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{rot} \mathbf{E} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$.

Resultierend aus der Tatsache, daß es sich um eine ungeeichte Formulierung handelt, ist die Matrix singulär, falls nichtleitende Gebietsteile existieren. Bei der Wahl der rechten Seiten ist daher darauf zu achten, daß diese im Bildraum liegen. Dies kann jedoch durch eine geeignete Berechnung der Erregungsströme sichergestellt werden.

Diskrete Verträglichkeitsbedingung

Die Verträglichkeitsbedingung, die \mathbf{b}^c erfüllen muß, erhalten wir aus der Linksmultiplikation von (4.7) mit der transponierten Inzidenzmatrix \mathbf{G}^T . Unter Ausnutzung von (4.2) ergibt sich

$$\mathbf{G}^T \mathbf{A}^c = \mathbf{G}^T \mathbf{R}^T \mathbf{M}_2\left(\frac{1}{\mu}\right) \mathbf{R} + i\omega \mathbf{G}^T = i\omega \mathbf{G}^T \mathbf{M}_1(\sigma) = \mathbf{G}^T \mathbf{b}^c.$$

Bezeichne $\mathbf{G}_{\Omega_I}^T$ die Zeilen von \mathbf{G}^T , die zu Knoten in Ω_I gehören. Da im Nichtleiter $\sigma = 0$ ist, verschwindet hier die Massenmatrix und es folgt die Verträglichkeitsbedingung

$$\mathbf{G}_{\Omega_I}^T \mathbf{b}^c = 0. \quad (4.9)$$

Bedingung (4.9) ist die diskrete Form der schwachen Divergenzfreiheit von \mathbf{J}_G in Ω_I , die sich durch Testen des kontinuierlichen Problems mit Gradienten ergibt. Ist ein Vektorfeld nur zu allen Gradientenfeldern in dem endlichdimensionalen Raum $\mathcal{W}\mathbf{1}(\mathcal{T}_h)_0$ orthogonal, sprechen wir [Bos98a] folgend von \mathcal{T}_h -schwacher Divergenzfreiheit.

Da die Knoten-Kanten Inzidenzmatrix nur von der Gittertopologie abhängt, gilt die folgende Bemerkung, die für das im nächsten Teilkapitel vorgestellte Mehrgitterverfahren von Bedeutung ist.

Bemerkung 4.3 Die Erfüllung der Verträglichkeitsbedingung ist invariant gegenüber einer Änderung der Gittermetrik, solange die Gittertopologie erhalten bleibt.

Bemerkung 4.4 Zusätzlich zu Bedingung (4.9) muß auch das diskrete Analogon zur Orthogonalität der Erregungsstromdichte zu den Dirichlet-Vektorfeldern in Ω_I gelten. Diese läßt sich durch Anwendung einer Matrix auf \mathbf{b}^c ausdrücken, die aus aufsummierten Zeilen von \mathbf{G}^T besteht, die zu den Knoten auf $\partial\Omega_C$ gehören. Somit ist auch die Erfüllung dieser Bedingung nur von der Gittertopologie abhängig.

Reelles Gleichungssystem

Im weiteren Verlauf des Kapitels verwenden wir statt (4.7) das sich durch Zerlegung in Real- und Imaginarteil erzeugte reelle System

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N, \quad (4.10)$$

wobei $N = 2N_{\mathcal{E}}$ und

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T \mathbf{M}_2\left(\frac{1}{\mu}\right) \mathbf{R} & -\omega \mathbf{M}_1(\sigma) \\ \omega \mathbf{M}_1(\sigma) & \mathbf{R}^T \mathbf{M}_2\left(\frac{1}{\mu}\right) \mathbf{R} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \mathbf{x} \\ \operatorname{Im} \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \mathbf{b} \\ \operatorname{Im} \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

4.1.4 Assemblierung

Das Gleichungssystem (4.10) wird wie üblich bei Finite-Element-Diskretisierungen elementweise assembliert. Es wird angenommen, daß die Materialkoeffizienten μ und σ elementweise konstant sind. Dann sind auch die Einträge der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{R}^T \mathbf{M}_2\left(\frac{1}{\mu}\right) \mathbf{R}$

elementweise konstant, so daß hier mit Hilfe der Mittelpunktregel integriert werden kann. Für die Massenmatrix $M_1(\sigma)$ müssen Integrale über das Produkt zweier elementweise linearer Funktionen berechnet werden, so daß hier eine Quadratur 2. Ordnung die Terme exakt integriert. Auf ein Lumping (inexakte Quadratur der Massenmatrix) wurde verzichtet, da die dadurch erreichte Zeiteinsparung unerheblich ist.

Dirichlet-Randbedingungen

Die Assemblierung wurde so realisiert, daß für alle Freiheitsgrade, auch für die auf dem Dirichlet-Rand, eine Zeile des Gleichungssystems erzeugt wird. Nachträglich werden die zu Dirichlet-Rändern gehörenden Zeilen des Gleichungssystems überschrieben. Dabei wird die rechte Seite auf den vorgegeben Dirichlet-Wert gesetzt und die entsprechende Matrixzeile durch die entsprechende Zeile der Einheitsmatrix ersetzt. Dies ist algorithmisch einfacher, als die Dirichlet-Freiheitsgrade herauszukondensieren.

4.1.5 Anregungen

Es wurden zwei verschiedene Anregungsarten implementiert: Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen und Generatorstromverteilungen. Mit letzteren kann man im Sinne von Kapitel 3 Gesamtströme in das Modell einprägen. Dabei stehen beide Möglichkeiten aus Abschnitt 3.2 zur Verfügung, sowohl geschlossene Stromschleifen (Fall (a)) als auch an Leitern endende Stromquellen (Fall (b)). Der Einfachheit halber sind die vorgebbaren Stromquellen wirbelfrei, so daß diese im Fall (b) durch einen Gradienten bzw. im Fall (a) durch ein Neumann-Vektorfeld repräsentiert werden können.

Um die Stromquellen zu berechnen, sind dann Laplace-Probleme zu lösen. Dabei ist darauf zu achten, daß dies mit möglichst hoher Genauigkeit geschieht, da ansonsten die entstehende rechte Seite nicht im Bildraum der Matrix liegt.

4.1.6 Implementierung

Die Implementierung der Diskretisierung und aller weiteren in diesem Kapitel vorgestellten Algorithmen wurde unter Verwendung der Simulationsumgebung UG^2 (Kurzform von *unstrukturierte Gitter*) durchgeführt. Die Simulationsumgebung UG ist in der Arbeitsgruppe von G. Wittum entwickelt worden und wird ständig weiterentwickelt. Die erste Version für zweidimensionale Probleme stammte von P. Bastian, siehe [Bas96], der damals in der Arbeitsgruppe Wittum tätig war. In den letzten Jahren ist UG zu einer 3D-Version weiterentwickelt und durch viele Anwendungen und numerische Methoden erweitert worden. Die UG zugrundeliegende Idee ist, von einer spezifischen Applikation unabhängige Methoden und Datenstrukturen, wie sie zur Lösung und Diskretisierung partieller Differentialgleichungen benötigt werden, zur Verfügung zu stellen. Von besonderer Bedeutung ist dabei, daß durch die Verwendung der in UG vorhandenen Methoden, adaptive Mehrgitterverfahren mit vertretbarem Zeitaufwand realisiert werden können, siehe [Bas96, BBJ⁺97, BBJ⁺99, Lan01]. Einen weiteren Schwerpunkt bilden die parallelen Fähigkeiten von UG , die in dieser Arbeit allerdings nicht verwendet wurden.

² UG -Homepage: <http://cox.iwr.uni-heidelberg.de/~ug/>

Innerhalb dieser Arbeit wurde eine neue sogenannte „ \mathcal{UG} -Problemklasse“ implementiert, die alle Elektromagnetik-spezifischen Algorithmen enthält. An dem applikationsunabhängigen Teil von \mathcal{UG} wurden zahlreiche Änderungen vorgenommen, insbesondere um dreidimensionale, komplexe Geometrien verwenden zu können. \mathcal{UG} und die Elektromagnetik-Problemklasse sind in der Programmiersprache C geschrieben.

4.2 Mehrgitterverfahren

Die Dimension des entstehenden Gleichungssystems (4.10) kann sehr groß sein — für realistische 3D Problemstellungen ist die Anzahl der Unbekannten N ca. 10^5 bis 10^8 . Damit scheiden direkte Lösungsverfahren aus, da deren Aufwand zu groß ist. Hier sind iterative Verfahren besser geeignet. Das verwendete Verfahren sollte dabei möglichst *optimal komplex* sein. Damit ist gemeint, daß der Rechenaufwand, um einen Anfangsfehler (gemessen in einer geeigneten Norm) um einen festen Faktor zu reduzieren, $\mathcal{O}(N)$ ist. Die sogenannten Mehrgitterverfahren, mit denen sich dieses Kapitel beschäftigt, haben i.a. diese Eigenschaft. Zunächst wenden wir uns aber den einfachen klassischen Iterationsverfahren zu.

4.2.1 Klassische Iterationsverfahren

Definition 4.4 (Lineares, konsistentes Iterationsverfahren) Sei $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein gegebenes lineares Gleichungssystem, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$. Unter einem linearen, konsistenten Iterationsverfahren verstehen wir eine Vorschrift

$$\mathbf{x}^{(m+1)} := \mathbf{x}^{(m)} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.11)$$

mit einem beliebigen Startwert $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ und einer von m unabhängigen *angenäherten Inversen* $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Ein lineares Iterationsverfahren ist durch die Angabe von $\tilde{\mathbf{A}}$ eindeutig bestimmt. Die Bezeichnung *angenäherte Inverse* für $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ kommt daher, daß man möglichst $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \approx \mathbf{A}^{-1}$ wählen möchte, da man dann eine schnelle Konvergenz des Verfahrens erwartet, denn im Extremfall $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ ergibt die Iteration schon nach einem Schritt die exakte Lösung. Andererseits soll $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ möglichst leicht zu berechnen sein, was natürlich konträr zu dem vorigen Wunsch ist und $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ ausschließt. Manchmal wird die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ auch *Vorkonditionierer* genannt, siehe Abschnitt 4.2.7.

Für typische Wahlen für $\tilde{\mathbf{A}}$ schauen wir uns die einfachsten Vertreter der linearen Iterationsverfahren, die sogenannten klassischen Iterationsverfahren an. Dazu sei \mathbf{A} eindeutig in $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$ zerlegt mit der strikten unteren Dreiecksmatrix \mathbf{L} (d.h. die Komponenten sind $l_{ij} := a_{ij}$ für $i > j$, 0 sonst), der strikten oberen Dreiecksmatrix \mathbf{U} (d.h. die Komponenten sind $u_{ij} := a_{ij}$ für $i < j$, 0 sonst) und $\mathbf{D} := \text{diag}(\mathbf{A})$. Falls die Inverse von \mathbf{D} existiert, sind die folgenden Verfahren wohldefiniert:

Jacobi-Verfahren	: $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}$
Gauß-Seidel-Verfahren	: $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D} + \mathbf{L}$
SOR-Verfahren	: $\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\theta} \mathbf{D} + \mathbf{L}$
symmetrisches Gauß-Seidel-Verfahren	: $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{D} + \mathbf{L}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} + \mathbf{U})$
SSOR-Verfahren	: $\tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{\theta} (\mathbf{D} + \mathbf{L}) \frac{\theta}{2 - \theta} \mathbf{D}^{-1} (\frac{1}{\theta} \mathbf{D} + \mathbf{U})$

Beim SOR- und SSOR-Verfahren heißt der Parameter θ *Relaxationsparameter*, wobei $0 \leq \theta \leq 2$ üblich ist. Für $\theta > 1$ spricht man von *Überrelaxation* (der Name SOR entstammt der englischen Bezeichnung *successive overrelaxation*) für $\theta < 1$ von *Unterrelaxation*. Das SOR-Verfahren ist für $\theta = 1$ offensichtlich mit dem Gauß-Seidel-Verfahren identisch. Ebenso ist dann auch die symmetrische Variante des SOR-Verfahrens, das SSOR-Verfahren, mit dem symmetrischen Gauß-Seidel-Verfahren identisch. Es sind auch gedämpfte Varianten der Verfahren üblich, bei denen man $\tilde{\mathbf{A}}$ durch $\frac{1}{\vartheta} \tilde{\mathbf{A}}$ mit $0 < \vartheta < 1$ ersetzt, ϑ heißt *Dämpfungsparameter*³.

Mit $\mathbf{M} := \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{A}$ kann man die Iteration (4.11) auch als

$$\mathbf{x}^{(m+1)} := \mathbf{M} \mathbf{x}^{(m)} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{b}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

schreiben, \mathbf{M} heißt *Iterationsmatrix*. Wie man sieht, ist die rechte Seite in (4.12) in $\mathbf{x}^{(m)}$ und \mathbf{b} linear, daher kommt die Bezeichnung *lineares Iterationsverfahren*. Für den Fehler $\mathbf{e}^{(m)} := \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)}$ nach m Schritten des Iterationsverfahrens gilt

$$\mathbf{e}^{(m)} := \mathbf{M}^m \mathbf{e}^{(0)}, \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (4.13)$$

Die Menge der Eigenwerte von \mathbf{M} heißt *Spektrum* von \mathbf{M} und wird mit $\sigma(\mathbf{M})$ bezeichnet, der *Spektralradius* ist $\rho(\mathbf{M}) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{M})\}$. Der Fehler in (4.13) konvergiert genau dann (für jeden Anfangsfehler) gegen Null, wenn die Bedingung $\rho(\mathbf{M}) < 1$ erfüllt ist, siehe z.B. [Hac93]. Der Spektralradius der Iterationsmatrix gibt ebenfalls Auskunft über die asymptotische Rate von $\|\mathbf{e}^{(m+1)}\| / \|\mathbf{e}^{(m)}\|$ und wird deshalb auch (asymptotische) *Konvergenzrate* oder *Konvergenzgeschwindigkeit* genannt.

Konvergenzaussagen für die genannten Verfahren erhält man z.B. für symmetrisch positiv definite Matrizen (siehe z.B. [Hac93]):

Satz 4.1 (Konvergenz für symmetrisch positiv definite Matrizen) *Sei \mathbf{A} symmetrisch positiv definit. Dann konvergiert*

das Gauß-Seidel-Verfahren,

das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren,

das Jacobi-Verfahren,

falls $\mathbf{D} - \mathbf{A}$ symmetr. positiv definit ist,

das gedämpfte Jacobi-Verfahren,

falls $0 < \vartheta < 2/\rho(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})$,

das SOR- und das SSOR-Verfahren,

falls $0 < \theta < 2$.

³ Man beachte: Das Verfahren ist *stark gedämpft*, wenn der Dämpfungsparameter ϑ *klein* ist.

Bemerkung 4.5 (Defektformulierung) Aus praktischen Gründen schreibt man die Iteration (4.11) oft durch Einführung des *Defektes* $\mathbf{d}^{(m)} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}$ und der *Korrektur* $\mathbf{c}^{(m)} := \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)}$ im Schritt m als *Defektkorrektur-Schema*

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{(0)} &:= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}, \\ \mathbf{c}^{(m)} &:= \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{d}^{(m)}, \\ \mathbf{x}^{(m+1)} &:= \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c}^{(m)}, \\ \mathbf{d}^{(m+1)} &:= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Diese Darstellung der Iteration ist für die Implementierung von Vorteil: Wird der Defekt wie in (4.11) bei jedem Schritt mit Hilfe der aktuellen Lösung durch $(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)})$ berechnet, ergeben sich für die Änderungen dieses Ausdrucks von Schritt zu Schritt immer größere relative Auslöschungsfehler, je mehr sich die Iterierten $\mathbf{x}^{(m)}$ der tatsächlichen Lösung \mathbf{x} nähern. Spätestens wenn $\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}\|/\|\mathbf{b}\| < EPS$, wobei EPS die Maschinengenauigkeit ist (also bei doppelter Genauigkeit ca. 10^{-16}), ist eine weitere Konvergenz numerisch nicht zu erreichen. Bei Verwendung des Defektkorrektur-Schemas wird dieser Nachteil durch die ständige Korrektur von \mathbf{d} vermieden.

Blockvarianten

Häufig haben die zugrundeliegenden Vektoren und Matrizen eine spezielle Blockgestalt, die aus einer Zerlegung der Indexmenge $I := \{1, 2, \dots, N\}$ in N_B disjunkte, nichtleere Teilmengen I_j resultiert, $I = \bigcup_{j=1}^{N_B} I_j$. D.h. das Gleichungssystem hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1N_B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N_B1} & \dots & \mathbf{A}_{N_BN_B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N_B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{N_B} \end{pmatrix}$$

mit den Vektorblöcken \mathbf{x}_i , \mathbf{b}_i und den Matrixblöcken \mathbf{A}_{ij} , $1 \leq i, j \leq N_B$. Dann können die oben genannten Verfahren auch als Blockvarianten ausgeführt werden, wenn \mathbf{L} und \mathbf{U} entsprechend als strikte untere und obere *Blockdreiecksmatrizen* und \mathbf{D} als *Blockdiagonalmatrix* erklärt werden. Um \mathbf{D}^{-1} zu erhalten, müssen dann in den Verfahren die Blockmatrizen \mathbf{A}_{ij} invertiert werden. Die entstehenden Blockvarianten nennt man dann entsprechend *Block-Jacobi-Verfahren*, *Block-Gauß-Seidel-Verfahren* und so fort. Die Unbekannten können auf unterschiedliche Weisen zu Blöcken zusammengefaßt werden. Eine Möglichkeit ist das Zusammenfassen aller Unbekannten, die Freiheitsgrade am selben geometrischen Ort repräsentieren. Alternativ kann für jede (skalare) Gleichung ein Block gebildet werden. Spaltet man beispielsweise das aus der Diskretisierung des zeitharmonischen Wirbelstromproblems komplexwertige $N_{\mathcal{E}} \times N_{\mathcal{E}}$ -System (4.7) in Real- und Imaginärteil auf, impliziert die erste Blockvariante eine Anordnung

$$\mathbf{x} = \left(\operatorname{Re} x_1 \quad \operatorname{Im} x_1 \quad \operatorname{Re} x_2 \quad \operatorname{Im} x_2 \quad \dots \quad \operatorname{Re} x_{N_{\mathcal{E}}} \quad \operatorname{Im} x_{N_{\mathcal{E}}} \right)^T,$$

während die zweite Variante auf

$$\mathbf{x} = \left(\operatorname{Re} x_1 \quad \operatorname{Re} x_2 \quad \dots \quad \operatorname{Re} x_{N_\varepsilon} \quad \operatorname{Im} x_1 \quad \operatorname{Im} x_2 \quad \dots \quad \operatorname{Im} x_{N_\varepsilon} \right)^T$$

führt. Im folgenden benutzen wir Blockverfahren mit der ersten Blockungs-Variante, um das in Real- und Imaginärteil zerlegte System (4.10) zu lösen. Wie man sich leicht überlegen kann, sind die Blockverfahren für diesen Fall zu den komplexen Versionen der einfachen Verfahren äquivalent.

Nachteil der klassischen Iterationsverfahren

Alle zuvor genannten Verfahren haben einen schwerwiegenden Nachteil: Sie beseitigen im allgemeinen sehr schnell die zu hohen Eigenwerten gehörenden Fehleranteile, die bei elliptischen Operatoren zu hochfrequenten (räumlich stark oszillierenden) Moden gehören, die zu niedrigen Eigenwerten gehörenden, die bei elliptischen Operatoren zu niederfrequenten (glatten) Moden gehören, jedoch kaum. Aus diesem Grunde nennt man diese Verfahren in der Sprache der Mehrgitterverfahren auch *Glätter*.

Deren Verhalten ist dabei recht anschaulich: Beispielsweise führt die Anwendung des Gauß-Seidel-Verfahrens auf eine Diskretisierung der Laplace-Gleichung mit finiten Differenzen auf regelmäßigen Gittern dazu, daß während einer Iteration jede Unbekannte einmal durch die Mittelwerte ihrer Gitternachbarn ersetzt wird. Dann führen glatte Fehleranteile aber nur auf sehr kleine Korrekturen, da sich die Werte der Nachbarn kaum von der aktuell neu zu bestimmenden Komponente des Lösungsvektors unterscheiden. Das Problem dieser Verfahren liegt demnach in der zu starken Lokalität, die umso stärker wiegt, je größer die Anzahl der Unbekannten ist.

So zeigt sich bei der Anwendung der klassischen Iterationsverfahren auch, daß sich die Anzahl der Iterationen für eine konstante Reduktion des Defekts mit steigender Anzahl der Unbekannten immer weiter erhöht und die Konvergenzrate $\rho(\mathbf{M})$ sich immer mehr der Eins nähert. Typischerweise ist $\rho(\mathbf{M}) = 1 - \mathcal{O}(h^2)$, wobei h die Gitterweite ist, bzw. $\rho(\mathbf{M}) = 1 - \mathcal{O}(h)$ beim SOR-Verfahren mit optimal gewähltem Relaxationsparameter θ , siehe z.B. [Hac93, Wit95, Bra97].

Die Mehrgitter-Idee

Nach den Vorüberlegungen erscheint folgendes Vorgehen als sinnvoll: Man führt zunächst einige Schritte eines klassischen Iterationsverfahrens (also eines Glätters) aus, um die stark oszillierenden Bestandteile des Fehlers zu reduzieren. Dann geht man zu einem größeren Gitter über und bestimmt dort den verbleibenden glatten Anteil; dies ist möglich, da glatte Funktionen auch auf einem größeren Gitter dargestellt werden können. Wiederholt man dann das Wechselspiel von *Glättungsschritten* und *Grobgitterkorrektur*, so erhält man ein Iterationsverfahren, das sogenannte *Zweigitterverfahren*.

Da das Problem auf dem größeren Gitter aber immer noch sehr viele Unbekannte enthalten kann, wird die Idee rekursiv angewendet, bis man auf hinreichend kleine Probleme stößt, die man ohne weiteres z.B. mit einem direkten Verfahren lösen kann. Das so erhaltene Verfahren ist das *Mehrgitterverfahren*.

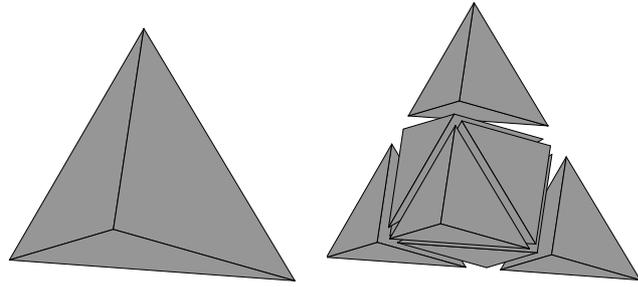


Abb. 4.2: Reguläre Verfeinerung eines Tetraeders

4.2.2 Die Komponenten des Mehrgitterverfahrens

Um das oben skizzierte Mehrgitterverfahren realisieren zu können, werden neben einem als gegeben angesehenen Diskretisierungsverfahren folgende Komponenten benötigt:

- eine Hierarchie von Gittern
- ein Transfer zwischen den Gittern, um Defekte auf das nächstniedrigere und Korrekturen auf das nächsthöhere Gitter zu übergeben
- Glättungsiteratoren
- ein Grobgitterlöser

Diese werden in den folgenden Abschnitten näher erläutert.

Gitterhierarchie

Statt einer einzigen Triangulierung \mathcal{T}_h des Gebietes Ω ist eine *Folge von Triangulierungen* $\{\mathcal{T}_l\}_{l=0,\dots,L}$ notwendig, $\mathcal{T}_L = \mathcal{T}_h$. (Wir beschränken uns wieder auf Simplicialzerlegungen.) \mathcal{T}_l nennen wir die *Triangulierung* oder das *Gitter auf Stufe* oder *Level* l . Dabei sei jedes Element $T \in \mathcal{T}_l$, $l > 0$ durch eine konsistente Verfeinerung eines Elements $\mathfrak{F}(T) \in \mathcal{T}_{l-1}$ entstanden. Das Element $\mathfrak{F}(T)$ heißt *Vater* oder *Vaterelement von* T und T *Sohn* oder *Sohnelement* von $\mathfrak{F}(T)$.

Die Verfeinerung kann beispielsweise durch eine *reguläre* Verfeinerung erfolgen, bei der durch Halbieren aller Kanten und Einfügen einer inneren Kante ein Tetraeder in 8 Söhne zerfällt, siehe Abb. 4.2. Wichtig ist dabei, daß die reguläre Verfeinerung eine *stabile* Verfeinerungsstrategie ist, bei der bei sukzessiver Anwendung der Regel die Elemente nicht entarten.⁴ Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung von Bisektionen, auf die hier aber nicht eingegangen werden soll, siehe [Bey98, Kap. 2.2.2].

Die so entstehende Folge von Triangulierungen ist *geschachtelt*

$$\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots \mathcal{T}_L = \mathcal{T}_h, \quad (4.14)$$

so daß unter Beibehaltung der Finite-Element-Ansätze auf jeder Stufe auch die Räume

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots \mathcal{V}_L = \mathcal{V}_h \quad (4.15)$$

⁴ Dies hängt von der Strategie ab, mit der die innere Kante gewählt wird. Bei der sogenannten „roten Verfeinerung“, siehe [Bey95, Bey98], kann man zeigen, daß sich die Teiltetraeder in 3 Ähnlichkeitsklassen einteilen lassen, so daß diese stabil ist.

geschachtelt sind.

Allerdings impliziert dies auch

$$\overline{\Omega}_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_l} T \quad \text{für } l = 0, \dots, L,$$

d.h. die Approximation Ω_h des Gebietes Ω ist auf allen Stufen gleich. Dies ist insbesondere für gekrümmte Gebietsberandungen eine zu starke Einschränkung, denn es ergeben sich so große geometrische Diskretisierungsfehler bzw. bereits sehr feine Anfangstriangulierungen.

Deswegen werden die nach einer Verfeinerung entstandenen neuen Gitterknoten am Rand stets auf die exakte Gebietsgeometrie projiziert⁵, wie in Abb. 4.3 am Beispiel einer Kugel demonstriert ist. Durch die so von Stufe zu Stufe verbesserte Gebietsapproximation

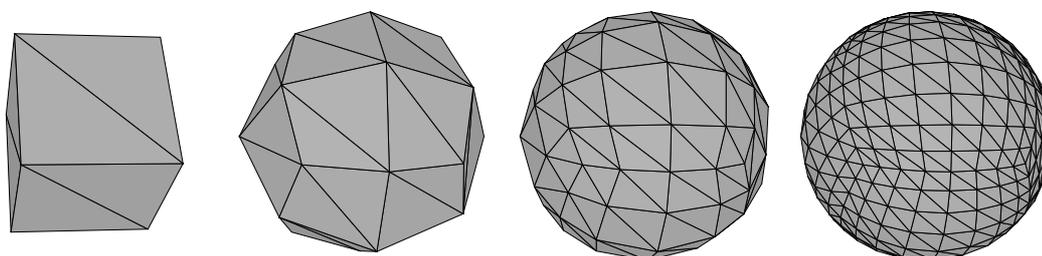


Abb. 4.3: Sukzessive Gebietsapproximationen bei einer Kugel

verliert man allerdings die Schachtelungseigenschaften (4.14) und (4.15), da für Elemente T in Randnähe nicht mehr $T \subset \mathfrak{F}(T)$ gilt.

Gittertransfer

Für das auf $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_L$ gestellte Problem (4.10) schreiben wir jetzt

$$\mathbf{A}_L \mathbf{x}_L = \mathbf{b}_L.$$

Mit der Diskretisierungsmethode des auf Stufe L gestellten Problems können die Hilfsprobleme

$$\mathbf{A}_l \mathbf{x}_l = \mathbf{b}_l \quad \text{für } l = 0, \dots, L-1$$

auf den Triangulierungen $\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_{L-1}$ assembliert werden.

Um auf Stufe l sich ergebende Defekte \mathbf{d}_l auf die Stufe $l-1$ bzw. auf Stufe $l-1$ erzeugte Korrekturen auf Stufe l übergeben zu können, benötigt man Transferoperatoren zwischen den Gittern. Diese sollten linear sein, damit das Gesamtverfahren linear sein kann. D.h. wir benötigen Matrizen \mathbf{p}_l und \mathbf{r}_l , so daß

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_l : \mathbb{R}^{N_{l-1}} &\rightarrow \mathbb{R}^{N_l}, & \mathbf{p}_l \mathbf{x}_{l-1} &= \mathbf{x}_l, \\ \mathbf{r}_l : \mathbb{R}^{N_l} &\rightarrow \mathbb{R}^{N_{l-1}}, & \mathbf{r}_l \mathbf{d}_l &= \mathbf{d}_{l-1}, \end{aligned}$$

⁵Einige dabei möglicherweise auftretende Schwierigkeiten sind in Anhang B diskutiert.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{N_{l-1}} & \xrightarrow{\mathbf{p}_l} & \mathbb{R}^{N_l} \\
\downarrow \mathcal{I}_{l-1} & & \downarrow \mathcal{I}_l \\
\mathcal{V}_{l-1} & \xrightarrow{i_{l-1}} & \mathcal{V}_l
\end{array}$$

Abb. 4.4: kanonische Prolongation \mathbf{p}_l

\mathbf{p}_l heißt *Prolongation (smatrix)*, \mathbf{r}_l *Restriktion (smatrix)* auf Stufe l . Für die explizite Wahl von Prolongation und Restriktion gibt es viele Möglichkeiten, die natürlich starken Einfluß auf die Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit haben, siehe z.B. [Hac85].

Bei Verwendung von konformen finiten Elementen und geschachtelten Räumen (4.15) existiert eine kanonische Wahl von Prolongation und Restriktion:

Die durch die Diskretisierung erfolgte Basiswahl $\{\psi_i^l\}_i$ der Räume $\mathcal{V}_l \subset \mathcal{V}$ definiert eine bijektive Abbildung \mathcal{I}_l zwischen Koeffizientenvektoren $\mathbf{x}_l = \left(x_1^l \ x_2^l \ \dots \ x_{N_l}^l\right)^T$ und Funktionen $u_l \in \mathcal{V}_l$ durch

$$\mathcal{I}_l : \mathbb{R}^{N_l} \rightarrow \mathcal{V}_l, \quad \mathcal{I}_l \mathbf{x}_l := \sum_{i=1}^{N_l} \psi_i^l x_i^l = u_l.$$

Durch die Inklusionen $i_l : \mathcal{V}_{l-1} \hookrightarrow \mathcal{V}_l$ ist dann für ein $\mathbf{x}_{l-1} \in \mathbb{R}^{N_{l-1}}$

$$i_l \mathcal{I}_{l-1} \mathbf{x}_{l-1} = i_l u_{l-1} = u_l = \mathcal{I}_l \mathbf{x}_l,$$

d.h. eine kanonische Prolongation ist

$$\mathbf{p}_l := \mathcal{I}_l^{-1} i_l \mathcal{I}_{l-1}.$$

Verdeutlicht sind die Zusammenhänge in dem kommutativen Diagramm in Abb. 4.4. Für die Restriktionen wählt man⁶

$$\mathbf{r}_l := \mathbf{p}_l^T.$$

Eine Eigenschaft der kanonischen Prolongation und Restriktion ist die Gültigkeit der Gleichung

$$\mathbf{A}_{l-1} = \mathbf{r}_l \mathbf{A}_l \mathbf{p}_l, \quad (4.16)$$

wenn die Matrizen \mathbf{A}_l und \mathbf{A}_{l-1} aus einer (konformen) Galerkin-Diskretisierung des kontinuierlichen Problems hervorgehen (siehe z.B. [Hac85, Bem. 3.6.6]). Deswegen nennt man $\mathbf{r}_l \mathbf{A}_l \mathbf{p}_l$ auch *Galerkin-Produkt*. Hat man Prolongations- und Restriktionsoperator

⁶ Vorausgesetzt man verwendet die euklidischen Skalarprodukte auf den \mathbb{R}^{N_l} . Im allgemeinen ist $\mathbf{r}_l = \mathbf{p}_l'$ die natürliche Wahl, wobei \mathbf{p}_l' der adjungierte Operator zu \mathbf{p}_l bzgl. des verwendeten Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)_l$ auf den \mathbb{R}^{N_l} ist, d.h.

$$(\mathbf{p}_l \mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{y}_l)_l = (\mathbf{x}_{l-1}, \mathbf{p}_l' \mathbf{y}_l)_{l-1} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_{l-1}}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_l}.$$

Die kanonische Restriktion ist demnach (anders als die Prolongation) von der Wahl der diskreten Skalarprodukte abhängig. Eine Motivation für die Wahl anderer als der euklidischen Skalarprodukte kann die Forderung sein, daß die diskrete Norm unabhängig von der Stufe l die Größenordnung der kontinuierlichen $L^2(\Omega)$ -Norm wiedergibt, siehe auch [Hac85, Abschnitt 3.1.3 und 3.6].

definiert und verwendet keine Galerkin-Diskretisierung, stellt der Ausdruck $\mathbf{r}_l \mathbf{A}_l \mathbf{p}_l$ eine Alternative zur Verwendung der Diskretisierung dar, um die Grobgittermatrizen \mathbf{A}_l , $l < L$, zu berechnen.

Wie bereits angemerkt, sind jedoch aufgrund der Projektion der Randknoten auf die tatsächliche Geometrie nach jeder Verfeinerung die Räume nicht geschachtelt. Eine natürliche Wahl der Prolongation und Restriktion ist dann einfach die kanonische Prolongation und Restriktion zwischen \mathcal{V}_{l-1} und $\tilde{\mathcal{V}}_l$, wobei $\tilde{\mathcal{V}}_l$ der entstehende Raum ist, wenn nach der Verfeinerung *keine* Verschiebung der auf Stufe l neu hinzukommenden Knoten auf den tatsächlichen Gebietsrand durchgeführt wird. D.h. man verschiebt die zu projizierenden Knoten sozusagen erst, nachdem die Transferoperatoren des jeweiligen Gitterlevels aufgestellt wurden.

Bemerkung 4.6 (Singuläre Matrizen) Ist die Matrix \mathbf{A}_L singulär und liegt die rechte Seite \mathbf{b}_L und damit der Defekt $\mathbf{d}_L = \mathbf{b}_L - \mathbf{A}_L \mathbf{x}_L$ in $\text{Bild}(\mathbf{A}_L)$, ist das Problem $\mathbf{A}_L \mathbf{x}_L = \mathbf{b}_L$ lösbar. Damit auch die auf den Stufen $0 \leq l < L$ gestellten Probleme des Mehrgitterverfahrens lösbar sind, muß

$$\mathbf{d}_l \in \text{Bild}(\mathbf{A}_l) \Rightarrow \mathbf{d}_{l-1} = \mathbf{r}_l \mathbf{d}_l \in \text{Bild}(\mathbf{A}_{l-1}) \quad (4.17)$$

gelten. Ist $\text{Kern}(\mathbf{A}_l^T) = \text{Kern}(\mathbf{A}_l)$ (z.B. bei symmetrischer Matrix), $\mathbf{r}_l = \mathbf{p}_l^T$ und gilt

$$\mathbf{p}_l \mathbf{c}_{l-1} \in \text{Kern}(\mathbf{A}_l) \quad \forall \mathbf{c}_{l-1} \in \text{Kern}(\mathbf{A}_{l-1}), \quad (4.18)$$

(z.B. wenn neben der Schachtelung der Räume auch die Schachtelung der Kerne

$$\text{Kern}(\mathbf{A}_0) \subset \text{Kern}(\mathbf{A}_1) \subset \dots \subset \text{Kern}(\mathbf{A}_L)$$

gilt und die kanonische Prolongation und Restriktion verwendet wird) ist (4.17) erfüllt.

Beweis: Bezeichne $(\cdot, \cdot)_l$ das euklidische Skalarprodukt auf Level l . Es ist $\mathbf{d}_l \in \text{Bild}(\mathbf{A}_l) \Leftrightarrow (\mathbf{d}_l, \mathbf{c}_l)_l = 0 \quad \forall \mathbf{c}_l \in \text{Kern}(\mathbf{A}_l)$. Wegen (4.18) $\Rightarrow 0 = (\mathbf{d}_l, \mathbf{p}_l \mathbf{c}_{l-1})_l = (\mathbf{p}_l^T \mathbf{d}_l, \mathbf{c}_{l-1})_{l-1} = (\mathbf{r}_l \mathbf{d}_l, \mathbf{c}_{l-1})_{l-1} = (\mathbf{d}_{l-1}, \mathbf{c}_{l-1})_{l-1} \quad \forall \mathbf{c}_{l-1} \in \text{Kern}(\mathbf{A}_{l-1}) \Leftrightarrow \mathbf{d}_{l-1} \in \text{Bild}(\mathbf{A}_{l-1}) \quad \square$

Glätter

Um die auf dem Gitterlevel l hochfrequenten Fehleranteile zu dämpfen, eignen sich nach Abschnitt 4.2.1 Iterationen der in Abschnitt 4.2.1 genannten klassischen Iterationsverfahren, der Glätter. Im folgenden Teil dieses Kapitels verstehen wir unter einem Glättungsschritt den unten stehenden Algorithmus. Bei der Formulierung des Algorithmus haben wir Bemerkung 4.5 berücksichtigt.

Es wird wie auch für alle weiteren Algorithmen eine Pseudo-Code Notation benutzt, die soweit selbsterklärend sein sollte. Man beachte, daß (wie auch in C üblich) skalare Parameter reine Eingabeparameter sind („call by value“), während nichtskalare Parameter (also Vektoren und Matrizen) auch zur Ausgabe verwendet werden können („call by reference“).

Algorithmus 4.1 (Glätter) \mathbf{c} ist der Korrektur-, \mathbf{d} der Defektvektor, $\tilde{\mathbf{A}}$ ist die approximierende Matrix, z.B. $\tilde{\mathbf{A}} = \text{diag}(\mathbf{A})$ für das Jacobi-Verfahren, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$ für das Gauß-Seidel-Verfahren etc.

```

procedure S( $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ ) {
     $\mathbf{w} \leftarrow \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{d}$ 
     $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} - \mathbf{A} \mathbf{w}$            (Defektaktualisierung)
     $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{c} + \mathbf{w}$        (Lösungsaktualisierung)
}

```

Da die Glättungsoperationen nur auf einer Gitterstufe arbeiten, ist der Index l weggelassen worden. Die Bezeichnung S kommt von *smoother* (engl. f. Glätter).

Grobgitterlöser

Als Löser auf Stufe 0 kann bei regulärer Matrix \mathbf{A}_0 z.B. ein direktes Lösungsverfahren wie z.B. eine **LU**-Zerlegung eingesetzt werden. Alternativ bietet sich aber auch hier ein iteratives Verfahren an, insbesondere wenn das Problem auf Stufe 0 immer noch relativ groß ist oder bei singulärer Matrix \mathbf{A}_0 . Die Erfahrung zeigt, daß es oft völlig ausreichend ist, den Defekt auf Stufe 0 immer nur um 2 bis 4 Größenordnungen zu reduzieren, ohne daß sich dies auf die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens auswirkt. Der alternative Einsatz eines direkten Verfahrens kann dann sogar unökonomisch sein.

4.2.3 Der Mehrgitterzyklus

Nachdem wir die Komponenten des Mehrgitterverfahrens genauer vorgestellt haben, können wir jetzt den rekursiv definierten Algorithmus eines Mehrgitterzyklus angeben.

Algorithmus 4.2 (MG-Zyklus) \mathbf{A}_l ist die Matrix auf Stufe l , \mathbf{c}_l der Korrektur- und \mathbf{d}_l der Defektvektor auf Stufe l . S_1 und S_2 sind Glätter, oft wählt man $S_1 = S_2$.

```

procedure MGC( $l, \mathbf{c}_l, \mathbf{d}_l$ ) {
    if ( $l = 0$ ) then löse  $\mathbf{A}_0 \mathbf{c}_0 = \mathbf{d}_0$            (Lösung auf größtem Gitter)
    else {
        for ( $1 \leq i \leq \nu_1$ ) do  $S_1(\mathbf{c}_l, \mathbf{d}_l)$        (Vorglättung)
         $\mathbf{d}_{l-1} \leftarrow \mathbf{r}_l \mathbf{d}_l$                  (Restriktion)
         $\mathbf{c}_{l-1} \leftarrow 0$ 
        for ( $1 \leq i \leq \gamma$ ) do MGC( $l-1, \mathbf{c}_{l-1}, \mathbf{d}_{l-1}$ ) (Grobgitterkorrektur)
         $\mathbf{w}_l \leftarrow \mathbf{p}_l \mathbf{c}_{l-1}$                  (Prolongation)
         $\mathbf{d}_l \leftarrow \mathbf{d}_l - \mathbf{A} \mathbf{w}_l$                  (Defektaktualisierung)
         $\mathbf{c}_l \leftarrow \mathbf{c}_l + \mathbf{w}_l$                  (Korrekturaktualisierung)
        for ( $1 \leq i \leq \nu_2$ ) do  $S_2(\mathbf{c}_l, \mathbf{d}_l)$        (Nachglättung)
    }
}

```

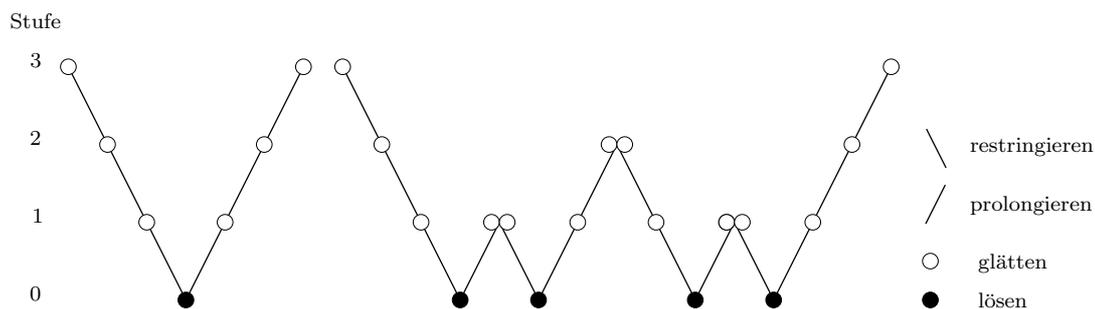


Abb. 4.5: V- und W-Zyklus bei 4 Stufen

Wie man sieht, ist der Algorithmus durch das Festlegen der Komponenten Glätter, Restriktion, Prolongation und Matrizen \mathbf{A}_l für $l < L$ (die sich aus der Diskretisierungsmethode und Gitterhierarchie ergeben) noch nicht eindeutig bestimmt. Zusätzlich müssen noch die *Parameter*

- ν_1 , die Anzahl der Vorglättungsschritte,
- ν_2 , die Anzahl der Nachglättungsschritte und
- γ , die Zykluszahl,

festgelegt werden, die üblicherweise unabhängig von der Stufe l gewählt werden. Die Zykluszahl γ bestimmt die Anzahl der rekursiven Aufrufe, um auf der jeweils niedrigeren Stufe eine Korrektur zu berechnen. Üblicherweise wählt man $\gamma = 1$ oder 2 . Für $\gamma = 1$ nennt man den entstehenden Mehrgitterzyklus *V-Zyklus*, für $\gamma = 2$ *W-Zyklus*, da die graphische Darstellung der Abfolge der im Mehrgitterzyklus „besuchten“ Gitterstufen die Form dieser Buchstaben annimmt, siehe Abb. 4.5.⁷ Größere Werte für γ lohnen sich in der Regel nicht, da der Aufwand mit steigender Zykluszahl schnell so groß wird, daß das Verfahren nicht mehr optimal komplex ist. In drei Raumdimensionen ist das ab $\gamma = 8$ der Fall. Dies kann man sich leicht anhand der Zunahme der Gitterpunkte von Stufe $l - 1$ zu Stufe l bei uniformer Verfeinerung überlegen.

Auch die Anzahl der Vor- und Nachglättungsschritte ν_1, ν_2 hält man in der Praxis eher gering. In dieser Arbeit verwenden wir meistens $\nu_1 = \nu_2 = 1$, maximal $\nu_1 = \nu_2 = 2$. Die Anzahl der gewählten Glättungsschritte bringt man in der Bezeichnung für entstehende Verfahren zum Ausdruck: Je nach Zyklusart nennt man den Mehrgitterzyklus $V(\nu_1, \nu_2)$ - bzw. $W(\nu_1, \nu_2)$ -Zyklus.

⁷ Man beachte, daß im Falle des W-Zyklus nach Algorithmus 4.2 auf Stufe 0 der Grobgitterlöser tatsächlich zweimal aufgerufen wird, so daß man in Abb. 4.5 (rechts) die ausgefüllten Punkte dann konsequenter Weise durch jeweils 2 ersetzen sollte. Wir gehen hier wie üblich davon aus, daß der Grobgitterlöser (insbesondere wenn es sich um einen direkten Löser handelt) bei dem jeweils zweiten Aufruf das Problem als „gelöst“ erkennt, obwohl der Defekt aufgrund von Rundungsfehlern sicherlich nicht Null sein wird, und so ein weiteres „Lösen“ vermieden wird. So ist der nur einfache Punkt gerechtfertigt. Bei der Programmierung des Mehrgitterzyklus sollte man auf Stufe $l = 1$ einfach $\gamma = 1$ setzen.

Bemerkung 4.7 (Additiver und multiplikativer Mehrgitterzyklus) Bei Algorithmus 4.2 handelt es sich um den *multiplikativen* (klassischen) Mehrgitterzyklus. Eine andere Variante ist der *additive* Mehrgitterzyklus, bei dem das Glätten auf den einzelnen Stufen unabhängig voneinander ausgeführt wird, d.h. in einem rekursiven Algorithmus wird der Gittertransfer nicht durch Aufruf von Vor- und Nachglättungsoperation eingeschlossen. Da das Glätten somit auf allen Stufen gleichzeitig geschehen kann, erschien die additive Variante insbesondere für die Parallelisierung attraktiv, siehe [BPX90]. Für einen Vergleich zwischen additiver und multiplikativer Variante verweisen wir auf [BHW98].

Als *Mehrgitterlöser* bezeichnen wir die folgende Iteration des Mehrgitterzyklus:

Algorithmus 4.3 (MG-Löser) *Die Iteration wird solange durchgeführt, bis der Defekt um einen vorgegebenen Faktor θ reduziert wurde. Eine Aktualisierung des Defektes ist hier nicht notwendig, da dies innerhalb von $MGC()$ geschieht.*

```

procedure MGSolver ( $\theta, \mathbf{x}_L, \mathbf{b}_l$ ) {
     $\mathbf{d}_L \leftarrow \mathbf{A}_L \mathbf{x}_L - \mathbf{b}_L$                 (Anfangsdefekt berechnen)
     $\epsilon \leftarrow \theta \|\mathbf{d}_L\|$                 (Abbruchschranke berechnen)
    repeat {
         $\mathbf{c}_L \leftarrow 0$ 
         $MGC(L, \mathbf{c}_L, \mathbf{d}_L)$ 
         $\mathbf{x}_L \leftarrow \mathbf{x}_L + \mathbf{c}_L$                 (Lösungsaktualisierung)
    }
    until  $\|\mathbf{d}_L\| < \epsilon$ 
}

```

4.2.4 Mehrgitter für $H(\mathbf{rot}; \Omega)$

In diesem Abschnitt wenden wir uns dem Mehrgitterverfahren für das zeitharmonische Wirbelstromproblem zu.

Aufgrund der Diskretisierung mit Whitney-1-Formen ist eine entsprechende Prolongation und Restriktion zu realisieren. Mit Hinweis auf Abschnitt 4.2.2 werden die Inklusionen als natürliche Prolongation verwendet. Die Lösbarkeit der Hilfsprobleme auf den Gitterstufen $l < L$ ist gewährleistet, da neben den Ansatzräumen auch die Kerne von \mathbf{A}_l geschachtelt sind, siehe Bemerkung 4.6. Wegen Bemerkung 4.3 und Bemerkung 4.4 stellt auch die Projektion der Randknoten auf die tatsächliche Geometrie (sukzessive Gebietsapproximation) kein Problem dar, da dabei die Gittertopologie unverändert bleibt.

Weiterhin ist eine Modifikation des Glätters notwendig: Es ist bekannt (siehe [Hip99, AFW00]), daß Standardglätter wie das Gauss-Seidel- oder Jacobi-Verfahren für Gleichungssysteme, die mit Bilinearformen (bzw. Sesquilinearformen) der Art

$$a(\cdot, \cdot) = (\alpha \mathbf{rot} \cdot, \mathbf{rot} \cdot)_{L^2(\Omega)} + (\beta \cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)} \quad \text{mit reellen } \alpha, \beta \in L^\infty(\Omega), \quad (4.19)$$

assoziiert sind, nicht funktionieren. Bilinearformen dieser Art treten bei zeitabhängigen Maxwell- oder Wirbelstromproblemen in jedem Zeitschritt oder bei den verlustlosen zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen auf. Der Koeffizient α ist immer gleichmäßig positiv,

wohingegen $\beta \geq 0$ nur für die zeitabhängigen Probleme gilt. Im Falle der verlustlosen zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen ist β gleichmäßig negativ.

Die Ursache für das Versagen der Standardglätter liegt in dem großen Kern des **rot**-Operators, der (abgesehen von dem niederdimensionalen Raum der Cohomologievektorfelder, siehe Abschnitt 1.2) aus den Gradienten besteht. Für Gradienten ist $a(\cdot, \cdot) = (\beta \cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ (der entsprechende Operator ist also die mit β skalierte Identität) und räumlich stark oszillierende Gradientenfelder führen nicht auf hohe Eigenwerte. Es handelt sich also um einen „Mangel an Elliptizität“, d.h. der assoziierte Operator $\mathbf{rot} \alpha \mathbf{rot} + \beta \mathbf{id}$ verhält sich hier nicht wie der Laplace-Operator, der alle Funktionen entsprechend ihrer Frequenz verstärkt und somit hochfrequente Funktionen hohen Eigenwerten zuordnet. Da Standardglätter aber nur Moden mit hohen Eigenwerten effektiv dämpfen, verbleiben hochfrequente Gradientenanteile des Fehlers und das Mehrgitterverfahren versagt.

Für den Fall $\beta > 0$ gibt es bisher zwei unterschiedliche Ansätze für ein geeignetes Glättungsverfahren für Probleme der Form (4.19), so daß das Mehrgitterverfahren h -unabhängig konvergiert, d.h. die Konvergenzrate durch eine von der Anzahl der Gitterstufen L bzw. der Gitterweite $h = h_L$ unabhängige Konstante $\rho < 1$ beschränkt ist:

In der Arbeit von Arnold, Falk und Winther [AFW00] wurde ein spezieller überlappender Blockglätter vorgestellt. Die Blockung wird dabei durch das Sammeln aller Kantenfreiheitsgrade, deren Kanten zu demselben Knoten gehören, erzeugt. Gezeigt wird dort gleichmäßige Mehrgitterkonvergenz für den V-Zyklus, sowohl für die multiplikative als auch die additive Variante des Glätters. Die Beweise beruhen hier auf der klassischen Mehrgittertheorie, [BH83, Bra93], beziehen sich auf konstante $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und setzen ein konvexes Gebiet Ω voraus. Dafür sind die Konvergenzaussagen hier unabhängig von α und β .

Von Hiptmair wurde in [Hip99] ein modifizierter Gauß-Seidel-Glätter vorgeschlagen. Die zugrundeliegende Idee ist hier eine (approximative) diskrete Helmholtz-Zerlegung. Diese führt einfach auf einen zusätzlichen Glättungsschritt im Raum der diskreten Skalarpotentiale. Mit Hilfe der variationellen Mehrgittertheorie (siehe z.B. [Xu92]) ist in [Hip00a] für diesen Glätter gleichmäßige Konvergenz für den V-Zyklus bewiesen worden, wobei eine dem zeitabhängigen Wirbelstromproblem sehr nahekommende Situation mit variablem $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ und einem Ω , das auch einspringende Ecken erlaubt, vorausgesetzt wurde. Eine Robustheitsaussage bezüglich der Abhängigkeit von α und β kann leider nicht getroffen werden. Dieser Glätter wird in der vorliegenden Arbeit verwendet und im folgenden genauer erklärt.

Zunächst sei aber darauf hingewiesen, daß der hier vorliegende Fall des *zeitharmonischen* Wirbelstromproblems nicht von der Theorie der genannten Referenzen abgedeckt wird, da dieser auf Sesquilinearformen mit *komplexen* Koeffizienten

$$a(\cdot, \cdot) = (\alpha \mathbf{rot} \cdot, \mathbf{rot} \cdot)_{L^2(\Omega)} + (i\beta \cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}, \quad \beta \geq 0 \quad (4.20)$$

führt. Dem Autor ist bisher keine Arbeit bekannt, die hierzu Aussagen theoretischer Art macht. Die Experimente und Anwendungen in diesem Kapitel werden jedoch zeigen, daß mit dem in [Hip99] vorgeschlagenen Glättungsverfahren das Mehrgitterverfahren auch für den komplexen Fall gut funktioniert bzw. einen guten Vorkonditionierer liefert.

4.2.5 Der hybride Glätter

Eine ausführliche Motivation, wie ein für die Diskretisierung von (4.19) effektiv arbeitendes Glättungsverfahren konstruiert werden kann, findet sich in [Hip99, BDH⁺99]. Der Vollständigkeit halber geben wir hier die wichtigsten Punkte wieder.

Wir beschränken uns auf $\alpha = \beta \equiv 1$. Die Grundidee wird von einer $L^2(\Omega)$ -orthogonalen Helmholtz-Zerlegung

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) = \mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega) \oplus \mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)^\perp \quad (4.21)$$

geliefert. Ein Glättungsoperator muß sowohl Fehleranteile im Kern des \mathbf{rot} -Operators $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)$ als auch in dessen orthogonalen Komplement $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)^\perp$ effektiv dämpfen. Wie im vorigen Abschnitt bereits angemerkt, wird dies auf $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)$ nicht gelingen, da hier hochfrequente Fehlermoden nicht hohen Eigenwerten des Operators \mathbf{A} zugeordnet sind.

Nach Abschnitt 1.2 besteht der Kern des \mathbf{rot} -Operators aus den Gradienten plus einem Cohomologie-Anteil,

$$\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega) = \mathbf{grad} H^1(\Omega) \oplus \mathcal{H}^1(\Omega).$$

Letzterer ist von niedriger Dimension, $\dim \mathcal{H}^1(\Omega) = \beta_1(\Omega)$, die nur von der Topologie von Ω abhängig ist. Wir gehen davon aus, daß die Gitterhierarchie des Mehrgitterverfahrens durch Verfeinerung entstanden ist, und daß bereits das Anfangsgitter die Topologie von Ω richtig wiedergibt, so daß die Gebietstopologie auf allen Stufen gleich ist. Dann können Repräsentanten der Cohomologieklassen in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ auf dem größten Gitter dargestellt werden. Daher können wir davon ausgehen, daß Fehleranteile in $\mathcal{H}^1(\Omega)$ von dem Grobgitterlöser auf Stufe 0 eliminiert werden.

Für den Glätter sind daher auf dem Kern des \mathbf{rot} -Operators nur die Gradientenfelder von Relevanz. Testen wir diese Fehleranteile gegen alle Gradientenfelder, ergibt sich

$$a(\mathbf{grad} \phi, \mathbf{grad} \phi') = (\mathbf{grad} \phi, \mathbf{grad} \phi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \phi' \in H^1(\Omega), \quad (4.22)$$

d.h. im Raum der Skalarpotentiale erhalten wir den Laplace-Operator,

$$\mathbf{grad}' \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{grad} = \Delta, \quad (4.23)$$

\mathbf{grad}' ist der adjungierte Operator zu \mathbf{grad} . Es ist dann naheliegend, einen Glättungsschritt im Raum der Potentiale auszuführen, um den Fehler in $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)$ effektiv zu dämpfen. Dies ist in der Tat möglich, da durch die Diskretisierung mit Whitney-1-Formen Gleichung (4.22) ihr diskretes Analogon

$$\mathbf{G}^T \mathbf{A}_h \mathbf{G} = \Delta_h \quad (4.24)$$

hat. Dadurch sind mit Hilfe der Matrix \mathbf{G} , dem diskreten Gradienten, und \mathbf{G}^T , diskrete Potentiale verfügbar. Diese können durch die Standard-„Hut-Funktionen“ (den Whitney-0-Formen) als Basis von $\mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$ dargestellt werden.

Algorithmisch bedeutet dies, daß für die Glättung auf $\mathcal{W}\mathbf{1}(\mathcal{T}_h) \cap \mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)$ der „Kanten-Defekt“ \mathbf{d} mittels $\mathbf{G}^T \mathbf{d}$ auf die Knoten transferiert wird, mit einem Glättungsschritt eines üblichen Glätters angewendet auf Δ_h eine Korrektur \mathbf{c}_{node} berechnet wird

und diese anschließend durch $\mathbf{G} \mathbf{c}_{node}$ in den Raum der Kantenfreiheitsgrade zurücktransferiert wird. Da \mathbf{G} nichts anderes als die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix ist, ist das Hin- und Hertransferieren zwischen Knoten und Kanten rein lokal.

Es verbleibt die Glättung der Fehleranteile in $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)^\perp$ zu betrachten. Wegen der Orthogonalität zu den Gradientenfeldern sind Funktionen in $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)^\perp$ divergenzfrei. Die bei genügend Regularität gültige Identität

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} = \mathbf{grad} \operatorname{div} - \Delta \quad (4.25)$$

zeigt, daß sich auf $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)^\perp$ der Operator wie

$$\mathbf{A} = -\Delta + \mathbf{id}$$

verhält.⁸ D.h. der Operator verhält sich hier elliptisch und ein übliches Mehrgitterverfahren wird gut funktionieren.

Nun bildet die Diskretisierung mit Whitney-Formen viel Struktur des kontinuierlichen Problems in das diskrete ab, leider jedoch nicht genug, um den Raum $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)^\perp$ algorithmisch verfügbar zu haben, d.h. in Form geeigneter, lokaler Finite-Element-Räume. Die Helmholtz-Zerlegung (4.21) ist diskret also nicht umsetzbar. Jedoch sind die Basisfunktionen ξ_{ee} von $\mathbf{W1}(\mathcal{T}_h)$ für feine Gitter hinreichend orthogonal zu $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)$, wie man durch die Abschätzung (siehe [Hip99])

$$\|\xi_e\|_{L^2(\Omega)} \leq C h_e \|\mathbf{rot} \xi_e\|_{L^2(\Omega)},$$

$h_e = \operatorname{diam} \operatorname{supp}(\xi_e)$, erkennen kann. Für feinere Gitter sind also die Basisfunktionen nahezu in $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)^\perp$, so daß ein normaler Glättungsschritt auf den Kantenfreiheitsgraden die Zerlegung (4.21) approximativ berücksichtigt.

Da sich ein Gesamtglättungsschritt somit sowohl aus einem Glättungsschritt auf den Kantenfreiheitsgraden als auch einem im Raum der diskreten Potentiale zusammensetzt, wurde vom Autor der Arbeit [Hip99] das entstehende Verfahren *hybrider Glätter* genannt. Diese Bezeichnung wollen wir hier übernehmen.

Im Falle des zeitharmonischen Wirbelstromproblems ist in (4.20) $\alpha = \mu^{-1}$ und $\beta = \omega\sigma$, so daß nur auf dem leitfähigen Gebietsteil Ω_C $\beta > 0$ gilt, im nichtleitenden Teil Ω_I verschwindet β . Der zusätzliche Glättungsschritt im Raum der Potentiale läßt sich dann nur für Knoten in $\overline{\Omega_C}$ durchführen. Dies spielt jedoch keine Rolle, denn alle diskreten Gradienten von Knoten-Basisfunktionen, die zu Knoten außerhalb $\overline{\Omega_C}$ gehören, liegen in $\operatorname{Kern}(\mathbf{A}_h)$ und haben somit keinerlei Einfluß auf die Defektberechnung.

Für den hybriden Glätter wird für die Glättung über die Knoten (auf jeder Gitterstufe $l > 0$) die Matrix \mathbf{A}_{node} benötigt, die $\mathcal{S}_1(\mathcal{T}_l)$ -Diskretisierung von

$$(\phi, \phi') \mapsto i\omega \int_{\Omega_C} \sigma \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \phi' \, dx$$

⁸ Um etwas präziser zu sein: Falls Ω beispielsweise ein konvexes Polyeder ist, gilt $\mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)^\perp \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ und es gilt für ein $C > 0$

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{u})| \geq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega)^\perp,$$

siehe [GR86, Corroloar 3.6 und Theorem 3.9].

mit Lagrange-Elementen. Für eine möglichst modulare Implementierung sollte die Matrix nicht wie üblich über eine elementweise Assemblierungsroutine mit Zugriff auf die eigentliche Problemdefinition (Geometrie, Koeffizienten, Randbedingungen, Parameter) assembliert werden, sondern vor dem ersten Aufruf des Glätters auf Stufe l direkt aus der Kantenmatrix \mathbf{A}_l berechnet werden. Dies geschieht im folgenden Algorithmus mittels der Prozedur $S_{\text{hybrid-PreProcess}}$.

Algorithmus 4.4 (Vorbereitung des hybriden Glätters)

```

procedure  $S_{\text{hybrid-PreProcess}}(\mathbf{A}, \mathbf{A}_{\text{node}})$  {
     $\mathbf{A}_{\text{node}} \leftarrow \mathbf{G}_{\overline{\Omega}_C}^T \mathbf{A} \mathbf{G}_{\overline{\Omega}_C}$ 
}

```

Da sich sowohl die Berechnung der Knotenmatrix als auch der im nachfolgenden Algorithmus 4.5 dargestellte Glättungsschritt jeweils nur auf einer Stufe abspielt, haben wir den Stufenindex l weggelassen. $\mathbf{G}_{\overline{\Omega}_C}$ bezeichnet die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix, also den diskreten Gradienten, beschränkt auf Knoten in $\overline{\Omega}_C$. S_{node} und S_{edge} können zwei beliebige Standardglätter wie das Gauß-Seidel- oder Jacobi-Verfahren sein. Die zu den Kanten assoziierten Vektoren \mathbf{c} und \mathbf{d} sind die Korrektur und der Defekt.

Algorithmus 4.5 (Hybrider Glätter)

```

procedure  $S_{\text{hybrid}}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  {
     $S_{\text{edge}}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$            (Kanten-Glättungsschritt f. Matrix  $\mathbf{A}$ )
     $\mathbf{d}_{\text{node}} \leftarrow \mathbf{G}_{\overline{\Omega}_C}^T \mathbf{d}$        (Einsammeln der Kantendefekte auf Knoten)
     $\mathbf{c}_{\text{node}} \leftarrow 0$ 
     $S_{\text{node}}(\mathbf{c}_{\text{node}}, \mathbf{d}_{\text{node}})$        (Knoten-Glättungsschritt f. Matrix  $\mathbf{A}_{\text{node}}$ )
     $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{G}_{\overline{\Omega}_C} \mathbf{c}_{\text{node}}$        (Verteilen der Knotenkorrekturen auf die Kanten)
     $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} - \mathbf{A} \mathbf{w}$            (Defektaktualisierung)
     $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{c} + \mathbf{w}$              (Korrekturaktualisierung)
}

```

Innerhalb \mathcal{UG} wurde der Algorithmus 4.5 in der Form eines Metaglätters implementiert, der für die beiden Glättungsschritte zwei unabhängige, bereits vorhandene Glättungsalgorithmen nutzt. Auf diese Weise sind verschiedene Varianten des Glätters einfach und schnell realisierbar.

4.2.6 Projektion der Lösung bei Anwesenheit von Nichtleitern

Da wir eine nichtgeeichte Formulierung gewählt haben, ist die Lösung \mathbf{E} in Ω_I nur eindeutig bis auf einen „elektrostatischen Anteil“. Zwar ist wie in 4.1 geschildert dieser Anteil irrelevant für das magnetische Feld und die Stromverteilung (die eigentlich interessierenden Größen), jedoch kann die $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -Norm dieses Anteils nach mehreren Mehrgitter-Iterationen sehr groß werden. Aufgrund der endlichen Rechengenauigkeit kann es so zu Auslöschungsfehlern kommen. Um dies zu verhindern, kann die Lösung so auf den durch

die Eichung (4.4b) definierten Unterraum projiziert werden, daß der Defekt unverändert bleibt. Das bedeutet, wir müssen ein ϕ in \mathcal{V} (für die Definition siehe (4.3)) finden, so daß

$$\int_{\Omega_I} \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \phi' = - \int_{\Omega_I} \mathbf{E} \cdot \mathbf{grad} \phi' dx \quad \forall \phi' \in \mathcal{V} \quad (4.26)$$

und die Lösung \mathbf{E} durch

$$\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E} + \mathbf{grad} \phi$$

nach einem oder mehreren Mehrgitter-Schritten korrigieren.

Da so die \mathcal{T}_h -schwache Divergenz von \mathbf{E} in Ω_I zu Null korrigiert wird, könnte man den entstehenden Algorithmus „ \mathcal{T}_h -schwaches Divergenz-Korrektur-Schema“ nennen. Wir müssen jedoch beachten, daß der Algorithmus auch Cohomologie-Anteile von \mathbf{E} beseitigt, genauer die harmonischen Dirichlet-Vektorfelder in Ω_I , die durch die Eichung (4.4b) ebenfalls ausgeschlossen werden. Deshalb ist die zu (4.26) assoziierte Matrix nicht vollständig schwach besetzt, so daß hier ein Schur-Komplement Verfahren eingesetzt werden könnte. Für die Implementierung in \mathcal{UG} haben wir uns jedoch für eine andere Strategie entschieden, die auf vollständig schwach besetzte Matrizen führt. Das hat den Vorteil, daß alle in \mathcal{UG} verfügbaren Lösungs- und Glättungs-Algorithmen ohne irgendwelche Änderungen verwendet werden können. Allerdings müssen wir für diesen Implementierungsvorteil mit der a priori-Berechnung einer \mathcal{T}_h -schwach divergenzfreien Basis der harmonischen Dirichlet-Felder bezahlen:

Der implementierte Projektions-Algorithmus besteht aus einem vorbereitenden Teil, Algorithmus 4.6, der vor dem ersten Aufruf der Projektion einmal ausgeführt werden muß, und dem eigentlichen Projektionsschritt, Algorithmus 4.7. In dem vorbereitenden Teil werden

1. der \mathcal{T}_h -schwache Divergenzoperator $\tilde{\mathbf{B}}$ assembliert, der nur die Zeilen des zur Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ assoziierten Operators \mathbf{B} enthält, die zu inneren Knoten von Ω_I gehören,
2. $\beta_2(\Omega_I)$ Testvektoren \mathbf{q}_i aufgestellt, die bei Anwendung auf den Lösungsvektor die Ladung auf $\Omega_{C,i}$ liefern (die \mathbf{q}_i 's sind gerade die Zeilen von \mathbf{B} , die zu Knoten auf $\partial\Omega_I$ gehören),
3. der diskrete Laplace-Operator Δ_h assembliert,
4. die Potentiale einer normierten Basis $\{\mathbf{grad} \phi_{D,i}\}_{i=1 \dots \beta_2(\Omega_I)}$ für die diskreten harmonischen Dirichlet-Felder in Ω_I aufgestellt
5. und die Maxwellschen Potentialkoeffizienten p_{ij} berechnet, (siehe Kapitel 1).

Punkt 4, das Aufstellen der Dirichlet-Basis-Potentiale, ist der aufwendigste, denn er erfordert die Lösung von $\beta_1(\Omega_I)$ Laplace-Problemen mit Dirichlet-Randbedingungen. Das i -te Dirichlet-Problem lautet:

Finde $\phi_{D,i}$ in $\{u \in H^1(\Omega_I) : u|_{\partial\Omega_{C,j}} = \delta_{ij}\}$, so daß

$$\int_{\Omega_I} \mathbf{grad} \phi_{D,i} \cdot \mathbf{grad} \phi' = 0 \quad \forall \phi' \in H_0^1(\Omega_I).$$

Für die Diskretisierung verwenden wir wieder $\mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$ -Lagrange-Elemente. Zur Lösung der entstehenden Gleichungssysteme wird ein Standard-Mehrgitterverfahren benutzt, beispielsweise ein $V(1,1)$ -Zyklus mit Gauß-Seidel-Glätter.

Mit Hilfe der Vektoren \mathbf{q}_j und der Dirichlet-Basis kann die Kapazitätsmatrix $\mathbf{C} = (c_{ij})$ aufgestellt werden, deren Einträge sind die Quotienten aus dem elektrostatischen Potential auf dem i -ten Leiter, das durch eine Ladung Q_j auf dem j -ten Leiter hervorgerufen wird. Da bei der Lösung der Laplace-Probleme das Potential auf dem i -ten Leiter eins ist und auf den jeweils anderen verschwindet, ergibt sich für die Kapazitätskoeffizienten

$$c_{ij} = (\mathbf{q}_j^T \mathbf{G}_{\overline{\Omega}_I} \phi_i),$$

wobei ϕ_i der Koeffizientenvektor von $\phi_{D,i}$ ist und $\mathbf{G}_{\overline{\Omega}_I}$ den diskreten Gradienten in Ω_I bezeichnet. Die benötigte Matrix der Potentialkoeffizienten ist dann $\mathbf{P} = (p_{ij}) = \mathbf{C}^{-1}$, vgl. Abschnitt 1.2.1.

Zusammenfassend ergibt sich für die Vorbereitung der Projektion der unten stehende Algorithmus. Dessen Komplexität ist bei Verwendung des Mehrgitterverfahrens für die Lösung der Dirichlet-Probleme $\mathcal{O}(N_{node} (1 + \beta_2(\Omega_I)))$, wobei N_{node} die Anzahl der Gitterknoten ist.⁹ Man beachte, daß bei trivialer Topologie ($\beta_2(\Omega_I) = 0$) nur die ersten beiden Schritte notwendig sind.

Algorithmus 4.6 (Vorbereitung der Projektion)

```

procedure ProjectingIterPreProcess() {
    assembliere  $\tilde{\mathbf{B}}$  ( $\mathcal{T}_h$ -schwacher Divergenz-Operator)
    assembliere  $\Delta_h$  (diskreter Laplace-Operator)
    berechne Potentiale d. Dirichlet-Basis  $\{\mathbf{grad} \phi_{D,i}\}_{i=1 \dots \beta_2(\Omega_I)}$ 
    berechne  $\{\mathbf{q}_i\}_{i=1 \dots \beta_2(\Omega_I)}$  (Ladungs-Testvektoren)
    berechne Potentialkoeffizienten  $p_{ij}$ 
}

```

In dem Projektionsschritt selbst muß ein Poisson-Problem gelöst werden. Dies kann (und sollte zur Erhaltung der Gesamtkomplexität) näherungsweise durch ein oder mehrere Mehrgitteriterationen geschehen und resultiert dann natürlich in einer approximierten Projektion. Der erste Schritt liefert dann eine Korrektur \mathbf{c}_{node} , um $\mathbf{E}|_{\Omega_I}$ (näherungsweise) \mathcal{T}_h -schwach divergenzfrei machen zu können.

Dann wird die Korrektur durch eine weitere modifiziert, um alle Dirichlet-Vektorfelder eliminieren zu können. Zu diesem Zweck werden die Leiterladungen mittels

$$Q_i = \mathbf{q}_i^T (-\mathbf{c} + \mathbf{G}_{\overline{\Omega}_I} \mathbf{c}_{node})$$

bestimmt, wobei hier die Veränderung durch den ersten Schritt mitberücksichtigt wird. Die zusätzliche Korrektur ergibt sich dann aus einer Linearkombination der Dirichlet-Basis mit Hilfe der Potentialkoeffizienten. Anschließend wird der Gradient der Korrektur \mathbf{c}_{node} zu \mathbf{c} hinzuaddiert, wie in Algorithmus 4.7 dargestellt.

⁹ Wenn nicht ausgenutzt wird, daß die zur Berechnung der Kapazitätskoeffizienten erforderlichen Skalarprodukte nur für Vektoren mit $\mathcal{O}(N_{node}^{2/3})$ nichtverschwindenden Einträgen ausgeführt werden, dominiert asymptotisch das Aufstellen der Kapazitätsmatrix. Es ergibt sich dann ein Aufwand $\mathcal{O}(N_{node} (1 + \beta_2^2(\Omega_I)))$.

Algorithmus 4.7 (Projektion)

```

procedure ProjectingIteratorStep(c) {
   $\mathbf{d}_{node} \leftarrow \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{c}$  ( $\mathcal{T}_h$ -schwache Divergenz)
  löse (näherungsweise)  $\Delta_h \mathbf{c}_{node} = -\mathbf{d}_{node}$  ( $\mathcal{T}_h$ -schwache Divergenz-Korrektur)
  berechne  $\beta_2(\Omega_I)$  Ladungen  $Q_j$ 
  for  $1 \leq i \leq \beta_2(\Omega_I)$  do
     $\mathbf{c}_{node} \leftarrow \mathbf{c}_{node} + (\sum_{j=1}^{\beta_2(\Omega_I)} p_{ij} Q_j) \phi_i$  (Ladungseliminierung/-reduktion)
   $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{G}_{\Omega_I} \mathbf{c}_{node}$  (diskreter Gradient)
}

```

Der in der Simulationsumgebung \mathcal{UG} implementierte Projektionsalgorithmus verwendet zur Lösung der Laplace-Probleme bzw. zur Iteration über das Poisson-Problem zwei beliebige, bereits vorhandene Lösungsverfahren. Der Projektionsschritt kann in Verbindung mit jedem Iterationsverfahren benutzt werden. Auf diese Weise kann die Projektion stufenweise angewendet werden (z.B. nach jedem Glätten) oder jeweils nach ein oder mehreren Mehrgitterschritten. Weiterhin kann er auch als a posteriori-Löser für das elektrostatische Problem verwendet werden, wenn keine Projektion für das Wirbelstromproblem verwendet wird.

4.2.7 Mehrgitter und Krylov-Raum-Verfahren

Mehrgitterverfahren werden häufig in Verbindung mit Krylov-Raum-Verfahren verwendet, insbesondere wenn es um die Behandlung komplexer, realitätsnaher Problemstellungen geht. Deshalb wollen wir hier kurz auf diese eingehen.

Der zu einer Matrix \mathbf{A} und einer rechten Seite \mathbf{b} gegebene n -dimensionale Krylov-Unterraum ist

$$\mathcal{K}^n := \text{span} \{ \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \}. \quad (4.27)$$

Krylov-Raum-Verfahren basieren auf der Idee, ein N -dimensionales Problem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ auf niederdimensionale Krylov-Unterräume zu projizieren. Als Ergebnis erhält man eine Reduktion des Original-Matrixproblems auf eine Folge von Matrixproblemen der Dimension $n = 1, 2, 3, \dots$. Iterierte $\mathbf{x}^n \in \mathcal{K}^n$ ergeben sich durch Minimierung der Defekte $\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(n)}$ oder der Fehler $\mathbf{e}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}$ auf \mathcal{K}^n bezüglich einer geeigneten Norm. Die einzelnen Krylov-Raum-Verfahren unterscheiden sich in Art und Anzahl der beteiligten Krylov-Räume und darin, wie die Minimierung durchgeführt wird.

Beispielsweise führt das bekannte, für symmetrisch positiv definite Matrizen eingesetzte CG-Verfahren [HS52] (Verfahren der konjugierten Gradienten) auf eine Minimierung des Fehlers in der Energienorm $\|\mathbf{e}^{(n)}\|_{\mathbf{A}} := \sqrt{(\mathbf{e}^{(n)})^T \mathbf{A} \mathbf{e}^{(n)}}$. Das für beliebige Matrizen einsetzbare GMRES-Verfahren [SS86] (engl. *Generalized Minimum Residuals*) minimiert $\|\mathbf{d}^{(n)}\|_2$, die euklidische Norm der Defekte. Beide Verfahren führen bei Abwesenheit von Rundungsfehlern nach spätestens N Schritten auf die exakte Lösung.

Während das CG-Verfahren die benötigten Vektoren mittels einer 3-Term-Rekursion berechnen kann, ist beim GMRES-Verfahren die Speicherung der kompletten Basis von \mathcal{K}^n erforderlich und führt so auf einen mit der Anzahl der Iterationen steigenden Speicher-

und Zeitaufwand. Um diesen Nachteil zu vermeiden, sind weitere Verfahren entwickelt worden, die ebenso wie das GMRES-Verfahren auch für unsymmetrische Matrizen geeignet sind, aber auf kurze Rekursionen führen. Die am weitesten verbreiteten Vertreter sind das BiCGStab-Verfahren [vdV92] (engl. *BiConjugate Gradients Stabilized*) und das QMR-Verfahren [FN91] (engl. *Quasi-Minimal Residual*). Beide Verfahren sind vom Aufwand und der Gleichmäßigkeit der Konvergenz vergleichbar (siehe [BBC⁺94]), das QMR-Verfahren erfordert jedoch neben dem Zugriff auf \mathbf{A} auch den Zugriff auf die Transponierte \mathbf{A}^T . Für komplex-symmetrische Systeme, wie sie hier vorliegen, sind spezielle QMR-Verfahren angebracht, die ohne die Transponierte auskommen, siehe [Fre94, DLVH99]. Da diese in \mathcal{UG} jedoch nicht vorhanden sind, werden wir im folgenden das bereits implementierte BiCGStab-Verfahren verwenden.

Im allgemeinen sind Krylov-Raum-Verfahren ohne Vorkonditionierung langsam. Ihre Effektivität hängt stark von der Konditionszahl und der Verteilung der Eigenwerte ab.¹⁰ Wird das Originalproblem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jedoch geeignet vorkonditioniert, kann die Konvergenz erheblich beschleunigt werden. Wie in Abschnitt 4.2.1 ist $\tilde{\mathbf{A}}$ eine reguläre, möglichst leicht zu invertierende Matrix. Die Anwendung als Linksvorkonditionierer bedeutet beispielsweise, daß das Krylov-Raum-Verfahren auf das dem Originalproblem äquivalente Problem

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{b}$$

angewendet wird, wobei die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{A}$ für das Krylov-Raum-Verfahren bessere spektrale Eigenschaften haben soll. Algorithmisch erfordert die Vorkonditionierung im Vergleich zu dem nicht-vorkonditionierten Verfahren zusätzlich die Lösung von Problemen der Art

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{y} = \mathbf{z}, \quad (4.28)$$

siehe z.B. [BBC⁺94].

Als Vorkonditionierer können beispielsweise die klassischen Verfahren aus Abschnitt 4.2.1 dienen. Ein $\mathcal{O}(N)$ -Löser resultiert jedoch nicht daraus. Ebenso läßt sich aber auch für (4.28) ein Mehrgitterschritt verwenden. Man spricht dann von einem *durch Mehrgitter vorkonditionierten Krylov-Raum-Verfahren*. Dieser Sprachgebrauch entspricht der Krylov-Unterraummethoden-Sicht. In vielen Fällen erhält man eine erhebliche Konvergenzbeschleunigung, im idealen Fall mit von der Gitterweite unabhängigen Iterationsanzahlen bei vorgegebenem Reduktionsfaktor für den Defekt.

Aus der Sicht des Mehrgitterverfahrens kann die Situation auch als Anwendung des Krylov-Raum-Verfahrens auf die Mehrgitteriteration im Sinne einer Iterierten-Rekombination gedeutet werden, was den Sprachgebrauch *Krylov-Unterraum-Beschleunigung des Mehrgitterverfahrens* rechtfertigt, siehe z.B. [Hac93, TOS01].

In der Regel bietet die Kombination der beiden Methoden für Modellprobleme, bei denen man ideale Mehrgitterkonvergenz erhält, keine wesentlichen Vorteile und der Mehraufwand lohnt sich nicht. Bei praxisnahen Problemen erhält man jedoch oft eine deutliche

¹⁰ Man beachte jedoch: Rückschlüsse vom Spektrum auf das Konvergenzverhalten sind nur für normale Matrizen ($\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$) möglich. Für allgemeine Matrizen lassen sich Konvergenzraten mit Hilfe der Eigenwertverteilung von \mathbf{A} nicht voraussagen. So wird in [GPS96] gezeigt, daß für jede Eigenwertverteilung eine Matrix existiert, für die GMRES ein vorgegebenes Konvergenzverhalten reproduziert.

Verbesserung gegenüber einer einfachen Mehrgitteriteration, beispielsweise bei Anisotropie, geometrischen Singularitäten oder bei unstrukturierten Gittern mit einigen wenigen „schlechten“ Elementen.

Eine typische in der Praxis auftauchende Situation ist, daß ein Mehrgitterverfahren im wesentlichen gut funktioniert, d.h. die hochfrequenten Moden werden durch den Glätter reduziert, die niederfrequenten durch die Grobgitterkorrekturen. Es bleiben jedoch einige Fehlerkomponenten übrig, die nur sehr schlecht gedämpft werden und auf einige isolierte große Eigenwerte der Iterationsmatrix des Mehrgitterverfahrens zurückzuführen sind. Bei einer solchen Situation ist es oft möglich, durch die Kombination mit einem Krylov-Raum-Verfahren eine substantielle Beschleunigung zu erreichen, da das Krylov-Raum-Verfahren nach einigen Schritten (deren Anzahl ungefähr der Anzahl der isolierten Eigenwerte entspricht) die Moden der isolierten Eigenwerte „erfaßt“. Anschließend erhält man eine Konvergenzrate, die der Iterationsmatrix ohne die isolierten Eigenwerte entspricht. Die Kombination von Mehrgitterverfahren und Krylov-Raum-Verfahren ist also insbesondere für die Robustheit interessant.

4.2.8 Numerische Experimente

Gute Näherungen für die Konvergenzrate $\rho(\mathbf{M})$ sind die *letzte Reduktionsrate* des Defektes auf Stufe L nach m Schritten

$$\rho_L^{(m)} := \frac{\|\mathbf{d}_L^{(m)}\|}{\|\mathbf{d}_L^{(m-1)}\|},$$

und die *mittlere Reduktionsrate*

$$\bar{\rho}_L^{(m)} := \left(\frac{\|\mathbf{d}_L^{(m)}\|}{\|\mathbf{d}_L^{(0)}\|} \right)^{\frac{1}{m}},$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm ist. Erstere ist für die Theorie interessanter, da diese weniger von der Startlösung \mathbf{x}^0 abhängt und somit meistens eine bessere Näherung für die tatsächliche Konvergenzrate $\rho(\mathbf{M})$ liefert, letztere ist für die Praxis bedeutsamer, da sie den tatsächlichen Rechenaufwand widerspiegelt. In den nachfolgenden Experimenten werden wir diese Zahlen angeben und als „beobachtete Konvergenzraten“ bezeichnen.

Wie bereits in Abschnitt 4.2.4 erwähnt, beziehen sich die Beweise für die h -unabhängige Konvergenz des Mehrgitterverfahrens mit Algorithmus 4.5 als Glätter nur auf den reellen Fall (4.19). Die nachfolgenden Experimente rechtfertigen die Anwendung aber auch auf den komplexen Fall (4.20), der dem zeitharmonischen Wirbelstromproblem entspricht.

Experiment 4.1 (Einheitsquadrat, relative Skalierung der Koeffizienten) Wir untersuchen die Konvergenz eines V(1,1)-Mehrgitterverfahrens mit dem hybriden Glätter als Vor- und Nachglätter. Der hybride Glätter verwendet sowohl für die Glättung über die Kanten als auch über die Knoten eine Gauß-Seidel-Iteration ohne eine spezielle Anordnung der Freiheitsgrade.

Das Gebiet ist das Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$. Das Gitter auf Stufe 0 besteht aus 2 Dreiecken. Die Gitter auf den Stufen $l > 0$ werden durch reguläre Verfeinerung erzeugt, so daß sich die Anzahl der Elemente von Stufe l zu $l + 1$ jeweils vervierfacht, siehe Abb. 4.6.

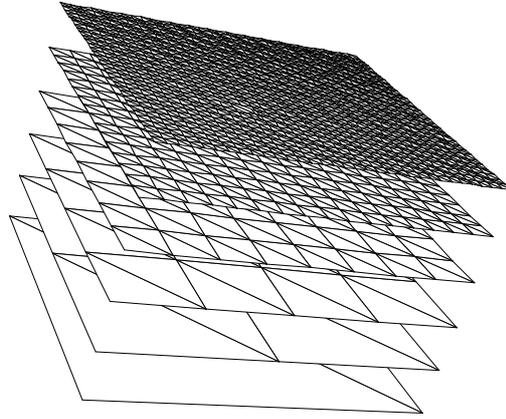


Abb. 4.6: Triangulierungen auf Stufe 0 bis 5 von Experiment 4.1

Für das Experiment wurden Dirichlet-Randbedingungen $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ verwendet. Um die Abhängigkeit der Konvergenzraten von der relativen Skalierung der Koeffizienten zu untersuchen, wird der Koeffizient β in der Sesquilinearform (4.20) variiert, während $\alpha \equiv 1$ gesetzt wird. Die rechte Seite ist $\mathbf{b} = 0$, gestartet wird mit einer zufälligen Anfangslösung. Es werden solange Mehrgitteriterationen durchgeführt, bis der Anfangsdefekt, gemessen in der euklidischen Norm, um den Faktor 10^{20} reduziert ist.

In Tab. 4.1 geben wir die gemessene Konvergenzrate $\rho_L^{(m)}$ für die letzte Iteration an und in Klammern die mittlere gemessene Konvergenzrate $\bar{\rho}_L^{(m)}$. Der Einfluß des Startwertes wurde durch Mittelung über jeweils drei Experimentwiederholungen abgemildert. Das Experiment zeigt, daß die Konvergenzraten auf den höheren Stufen unabhängig von der Gitterweite sind. Auch wenn eine leichte Verschlechterung bei großen β -Werten zu erkennen ist, ist das Verfahren relativ robust gegenüber Variationen des Verhältnisses zwischen den Koeffizienten α und β .

Experiment 4.2 (Einheitsquadrat, MG als Vorkonditionierer) Wir wiederholen das vorige Experiment für $\beta = 0.01$, $\beta = 1$ und $\beta = 100$, benutzen das Mehrgitterverfahren aber als Vorkonditionierer für ein BiCGStab-Verfahren. In Tab. 4.2 sind die Anzahlen der sich ergebenden BiCGStab-Iterationen dargestellt. Man erkennt, daß diese ab $L > 4$ konstant bleiben und nahezu unabhängig von β sind. Das Mehrgitterverfahren erweist sich somit als hervorragender Vorkonditionierer. Die durchschnittliche Konvergenzrate beträgt hier $\bar{\rho}_L^{(m)} = 0.01$. Ohne BiCGStab-Verfahren ergab sich 0.14. Damit lohnt sich der Einsatz des BiCGStab-Verfahrens, denn jede BiCGStab-Iteration besitzt etwa den doppelten Aufwand einer Mehrgitteriteration, aber $2\bar{\rho}_L^{(m)} = 0.02 < (0.14)^2$.

L	1	2	3	4	5	6	7
N_L	16	80	352	1472	6016	24320	97792
$\beta = 0.01$	0.12 (0.12)	0.14 (0.13)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)	0.17 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)
$\beta = 0.1$	0.12 (0.12)	0.14 (0.13)	0.16 (0.14)	0.17 (0.14)	0.17 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)
$\beta = 0.5$	0.12 (0.12)	0.15 (0.13)	0.16 (0.13)	0.17 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)
$\beta = 1.0$	0.13 (0.13)	0.15 (0.14)	0.15 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)
$\beta = 2.0$	0.14 (0.14)	0.15 (0.14)	0.15 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)	0.16 (0.14)
$\beta = 5.0$	0.17 (0.16)	0.16 (0.14)	0.15 (0.13)	0.16 (0.14)	0.17 (0.14)	0.17 (0.14)	0.17 (0.14)
$\beta = 10.0$	0.20 (0.19)	0.14 (0.12)	0.14 (0.13)	0.16 (0.14)	0.17 (0.14)	0.18 (0.14)	0.17 (0.14)
$\beta = 100.0$	0.20 (0.19)	0.18 (0.18)	0.15 (0.14)	0.15 (0.14)	0.17 (0.14)	0.19 (0.15)	0.19 (0.14)

Tab. 4.1: Mehrgitterkonvergenzraten für den V(1,1)-Zyklus, Experiment 4.1

L	1	2	3	4	5	6	7
$\beta = 0.01$	7	9	10	10	10	10	10
$\beta = 1.0$	8	10	10	10	10	10	10
$\beta = 100.0$	6	12	12	11	11	11	11

Tab. 4.2: BiCGStab-Iterationen für eine Defektreduktion um den Faktor 10^{20} , Experiment 4.2

Experiment 4.3 (Einheitswürfel, relative Skalierung der Koeffizienten) Dieses Experiment ist identisch mit Experiment 4.1, abgesehen davon, daß das Gebiet jetzt der Einheitswürfel $\Omega = (0, 1)^3$ ist. Die Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 hat 9 Knoten (8 an den Würfeckpunkten und ein weiterer im Schwerpunkt) und 12 Tetraeder, die sich alle den Knoten im Schwerpunkt teilen. Diese Triangulierung ergibt etwas bessere Kantenverhältnisse als die häufig verwendete Zerlegung in 6 Tetraeder. Für $1 \leq l \leq L$ werden die Triangulierungen \mathcal{T}_l durch reguläre Verfeinerung erzeugt, siehe Abb. 4.7. Die Konver-

genzraten sind in Tab. 4.3 dargestellt. Es zeigt sich auch hier, daß die Konvergenzraten ab Stufe 4 praktisch unverändert bleiben und das Mehrgitterverfahren robust gegenüber einer Variation der relativen Skalierung der Koeffizienten α und β ist.

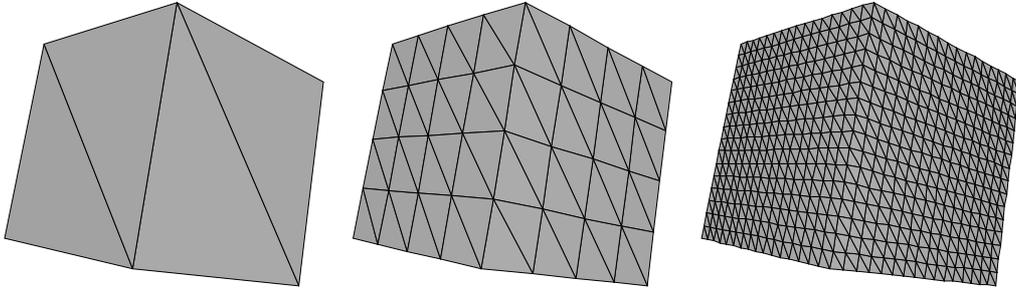


Abb. 4.7: Triangulierungen \mathcal{T}_0 , \mathcal{T}_2 und \mathcal{T}_4 von Experiment 4.3

L	1	2	3	4	5
N_L	164	1 528	13 232	110 176	899 264
$\beta = 0.01$	0.16 (0.15)	0.30 (0.27)	0.38 (0.35)	0.43 (0.38)	0.45 (0.40)
$\beta = 0.1$	0.15 (0.15)	0.30 (0.27)	0.38 (0.35)	0.43 (0.38)	0.45 (0.40)
$\beta = 0.5$	0.15 (0.14)	0.29 (0.27)	0.38 (0.35)	0.43 (0.38)	0.45 (0.40)
$\beta = 1.0$	0.16 (0.14)	0.29 (0.28)	0.38 (0.35)	0.43 (0.38)	0.45 (0.40)
$\beta = 2.0$	0.18 (0.17)	0.30 (0.28)	0.38 (0.35)	0.43 (0.38)	0.45 (0.40)
$\beta = 5.0$	0.19 (0.18)	0.31 (0.29)	0.38 (0.35)	0.43 (0.38)	0.45 (0.39)
$\beta = 10.0$	0.20 (0.19)	0.30 (0.28)	0.39 (0.35)	0.43 (0.38)	0.44 (0.39)
$\beta = 100.0$	0.21 (0.20)	0.34 (0.31)	0.37 (0.34)	0.41 (0.37)	0.44 (0.39)

Tab. 4.3: Mehrgitterkonvergenzraten für den V(1,1)-Zyklus, Experiment 4.3

Experiment 4.4 (Einheitswürfel, MG als Vorkonditionierer) Wie im 2D-Fall wiederholen wir das letzte Experiment für $\beta = 0.01$, $\beta = 1$ und $\beta = 100$ und benutzen das Mehrgitterverfahren als Vorkonditionierer für ein BiCGStab-Verfahren. Die Anzahl der Iterationen sind in Tab. 4.4 dargestellt. Auch in 3D ist das Mehrgitterverfahren demnach ein sehr guter Vorkonditionierer und ein aufwandsbereinigter Vergleich der Konvergenzraten zeigt, daß sich die Beschleunigung durch das Krylov-Raum-Verfahren lohnt.

Experiment 4.5 (Einheitskugel, Zyklusarten) In diesem Experiment wollen wir einerseits den Einfluß der Randprojektion bei Verfeinerung (sukzessive Gebietsapproxi-

L	1	2	3	4	5
$\beta = 0.01$	10	13	15	16	16
$\beta = 1.0$	10	14	15	17	16
$\beta = 100.0$	13	18	17	17	18

Tab. 4.4: BiCGStab-Iterationen für eine Defektreduktion um den Faktor 10^{20} , Experiment 4.4

L	1	2	3	4	5
N_L	164	1 528	13 232	110 176	899 264
V(1,1)	0.21 (0.19)	0.36 (0.33)	0.41 (0.38)	0.47 (0.43)	0.53 (0.48)
V(2,2)	0.01 (0.01)	0.19 (0.16)	0.23 (0.19)	0.24 (0.20)	0.30 (0.25)
W(1,1)	0.21 (0.19)	0.34 (0.32)	0.39 (0.35)	0.44 (0.40)	0.49 (0.44)
W(2,2)	0.01 (0.01)	0.15 (0.13)	0.17 (0.14)	0.22 (0.18)	0.27 (0.22)

Tab. 4.5: Mehrgitterkonvergenzraten bei verschiedenen Zyklusarten, Experiment 4.5

mation) und andererseits den Einfluß der Zyklusart und der Anzahl der Glättungsschritte untersuchen.

Das Gebiet ist jetzt eine Einheitskugel $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$ mit Dirichlet-Randbedingungen. Wie in Experiment 4.3 ist die rechte Seite Null und wir iterieren bis der Defekt um den Faktor 10^{20} reduziert wurde (bei einer zufälligen Startlösung). Die Triangulierungen der Stufen 0 bis 3 sind in Abb. 4.3 zu sehen. Die Anfangstriangulierung ist mit der des Würfels im Experiment 4.3 identisch. Die feineren Triangulierungen werden durch reguläre Verfeinerung erzeugt, wobei die Randknoten jeweils auf den tatsächlichen Gebietsrand projiziert werden. Folglich ist die Gittertopologie identisch mit der von Experiment 4.3. In diesem Experiment sind die Koeffizienten $\alpha = \beta \equiv 1$. In Abhängigkeit von Zyklusart und Anzahl der Glättungsschritte ergeben sich die Konvergenzraten $\rho_L^{(m)}$ in Tab. 4.5, die Zahlen in Klammern sind wieder die für die Praxis relevanteren mittleren Reduktionsraten $\bar{\rho}_L^{(m)}$.

Vergleichen wir die Konvergenzraten für den V(1,1)-Zyklus mit den Konvergenzraten für $\beta = 1$ in Experiment 4.3 (Tab. 4.3), so sehen wir hier eine leichte Verschlechterung. Als Ursache dafür ist die geringere Qualität der Gitter aufgrund der Projektion der Randknoten anzusehen. Es ergeben sich bei der Kugel sowohl größere Maximalwinkel zwischen Elementseiten als auch ein größeres Verhältnis zwischen der längsten und der kürzesten Kante. Stellen wir W- und V-Zyklus gegenüber, so ist zu erkennen, daß der W-Zyklus geringfügig bessere Konvergenzraten ergibt. Aufwandsbereinigt ergibt sich jedoch kein Vorteil, so daß wir im folgenden stets den V-Zyklus verwenden werden. Eine Verdopplung der Glättungsschritte führt für beide Zyklusarten näherungsweise auf eine Halbierung der Konvergenzraten, wie es auch asymptotisch für den symmetrischen Fall

aus der Theorie unter zusätzlichen Annahmen folgt, siehe [Hac93, Kap. 10.7].

Experiment 4.6 (Randsingularität) Um das Verhalten des Mehrgitterverfahrens bei einspringenden Ecken zu untersuchen, wiederholen wir Experiment 4.3, mit dem einzigen Unterschied, daß das Gebiet statt eines Würfels jetzt das L-förmige Gebiet

$$\Omega := \{(0, 2) \times (0, 1) \times (0, 2)\} \setminus [1, 2]^3$$

ist. Triangulierungen sind in Abb. 4.8 zu sehen. Es ergeben sich die Konvergenzraten in Tab. 4.6. Abgesehen von einer Verschlechterung der Konvergenzrate aufgrund der geringeren Gebietsregularität, sehen wir vergleichbare Ergebnisse wie in Experiment 4.3, d.h. irreguläre Gebiete haben keinen großen Einfluß auf das Verfahren. Für den Laplace-Operator erhält man ein vom Verhältnis vergleichbares Absinken der Konvergenzrate bei dem L-förmigen Gebiet gegenüber dem Würfelexperiment.

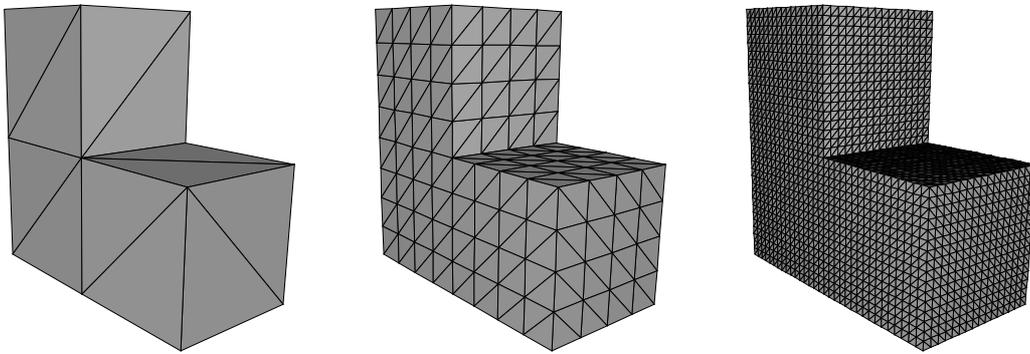


Abb. 4.8: Triangulierungen \mathcal{T}_0 , \mathcal{T}_2 und \mathcal{T}_4 des L-förmigen Gebietes von Experiment 4.6

L	1	2	3	4
N_L	589	5 060	41 704	338 768
$\beta = 0.01$	0.32 (0.29)	0.42 (0.38)	0.49 (0.43)	0.55 (0.48)
$\beta = 0.1$	0.32 (0.29)	0.42 (0.38)	0.49 (0.44)	0.55 (0.48)
$\beta = 0.5$	0.32 (0.14)	0.42 (0.38)	0.49 (0.43)	0.55 (0.48)
$\beta = 1.0$	0.31 (0.29)	0.42 (0.38)	0.49 (0.43)	0.55 (0.47)
$\beta = 2.0$	0.32 (0.29)	0.42 (0.38)	0.49 (0.43)	0.55 (0.48)
$\beta = 5.0$	0.31 (0.28)	0.40 (0.37)	0.48 (0.43)	0.54 (0.47)
$\beta = 10.0$	0.30 (0.27)	0.39 (0.36)	0.47 (0.42)	0.53 (0.47)
$\beta = 100.0$	0.27 (0.26)	0.35 (0.32)	0.40 (0.37)	0.47 (0.40)

Tab. 4.6: Mehrgitterkonvergenzraten für den V(1,1)-Zyklus, Experiment 4.6

Experiment 4.7 (Springende Koeffizienten) In diesem Experiment studieren wir das Verhalten des V(1,1)-Mehrgitterzyklus bei springenden Koeffizienten. Das Gebiet ist wieder der Würfel $\Omega = (0, 1)^3$. Diesen unterteilen wir in zwei Teilgebiete $\Omega_1 := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^3$ und $\Omega_2 := \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$. Die Anfangstriangulierung ist in Abb. 4.9 links zu sehen. Sie besteht aus 12 Würfeln, die jeweils in 6 Tetraeder zerlegt sind.

Die Koeffizienten sind jetzt ortsabhängig, wir setzen

$$\alpha(\mathbf{x}) := \begin{cases} \alpha_1 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \beta(\mathbf{x}) := \begin{cases} \beta_1 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und variieren α_1 und β_1 . Es ergeben sich die gemessenen Konvergenzraten in Tab. 4.7. Man erkennt ein Absinken der Konvergenzraten für den Fall, daß $\beta_1 \gg 1$ oder $\alpha_1 \ll 1$. Der erste Fall entspricht einer verglichen mit der Umgebung hohen Leitfähigkeit von Ω_1 , der zweite Fall einer verglichen mit der Umgebung hohen Magnetisierbarkeit von Ω_1 . In beiden haben nichtverschwindende Lösungen Singularitäten an den Ecken und Kanten von Ω_1 , so daß die Regularität geringer ist.

Abgesehen davon sind die Konvergenzraten grundsätzlich etwas schlechter aufgrund der von Experiment 4.3 abweichenden Anfangstriangulierung: Die Kantenlängen- und Winkelverhältnisse sind bei der Zerlegung eines Würfels in 6 Tetraeder etwas schlechter als bei der in den vorigen Experimenten verwendeten Zerlegung in 12. Ein Vergleich der ersten Zeile von Tab. 4.7 mit der Zeile für $\beta = 1$ in Tab. 4.3 (Experiment 4.3) zeigt, daß sich dies in den Konvergenzraten negativ bemerkbar macht.

Das Experiment zeigt, daß die Konvergenzraten auch bei springenden Koeffizienten gleichmäßig von eins weg beschränkt bleiben.

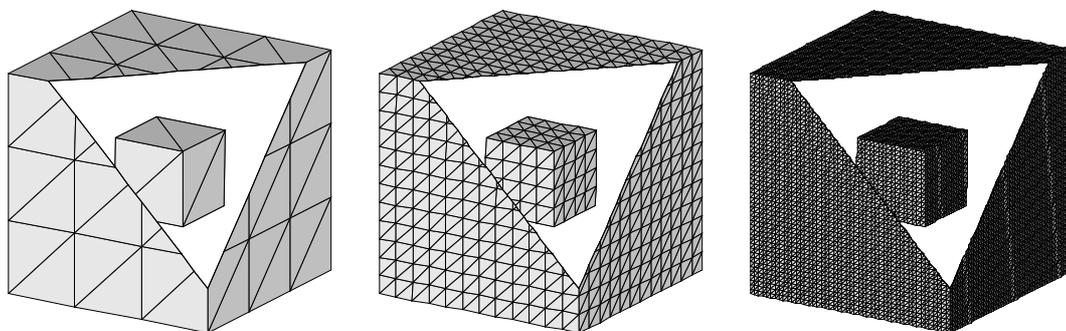


Abb. 4.9: Triangulierungen \mathcal{T}_0 , \mathcal{T}_2 und \mathcal{T}_4 (aufgeschnitten) für das Experiment 4.7

Experiment 4.8 (Springende Koeffizienten, MG als Vorkonditionierer) Wir wiederholen das vorige Experiment, benutzen aber den V(1,1)-Mehrgitterzyklus zur Vorkonditionierung eines BiCGStab-Verfahrens, siehe Tab. 4.8. Es ergeben sich mittlere Konvergenzraten von 0.10 bis 0.18 und ein aufwandsbereinigter Vergleich zur MG-Iteration ohne Krylov-Raum-Verfahren zeigt, daß sich dessen Einsatz lohnt.

L		1	2	3	4
N_L		2412	21672	183312	1507104
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 1$	0.56 (0.53)	0.60 (0.56)	0.62 (0.57)	0.62 (0.57)
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 10^4$	0.55 (0.51)	0.61 (0.56)	0.63 (0.58)	0.65 (0.59)
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 10^{-4}$	0.55 (0.45)	0.60 (0.50)	0.57 (0.52)	0.59 (0.54)
$\alpha_1 = 10^4$	$\beta_1 = 1$	0.55 (0.45)	0.60 (0.50)	0.58 (0.52)	0.59 (0.54)
$\alpha_1 = 10^{-4}$	$\beta_1 = 1$	0.58 (0.54)	0.65 (0.61)	0.69 (0.63)	0.72 (0.64)

Tab. 4.7: Mehrgitterkonvergenzraten für den V(1,1)-Zyklus bei springenden Koeffizienten, Experiment 4.7

L		1	2	3	4
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 1$	19	20	19	20
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 10^4$	18	21	23	27
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 10^{-4}$	16	18	18	19
$\alpha_1 = 10^4$	$\beta_1 = 1$	16	18	19	19
$\alpha_1 = 10^{-4}$	$\beta_1 = 1$	19	21	24	26

Tab. 4.8: Anzahl der durch den V(1,1)-Zyklus vorkonditionierten BiCGStab-Iterationen für eine Defektreduktion um den Faktor 10^{20} bei springenden Koeffizienten, Experiment 4.8

Experiment 4.9 (Dämpfung von Neumann-Vektorfeldern) In Kap. 4.2.5 haben wir gesehen, daß Fehleranteile, die im Kern des **rot**-Operators liegen und sich als Gradienten darstellen lassen, durch den zusätzlichen Glättungsschritt im Raum der diskreten Potentiale effektiv gedämpft werden können. Zwar bilden die Gradientenfelder den wesentlichen Anteil im Kern des **rot**-Operators, es verbleibt jedoch ein niederdimensionaler, von der Gebietstopologie abhängiger Kernanteil, der nicht durch Gradienten dargestellt werden kann. Es handelt sich um die Neumann-Vektorfelder als Repräsentanten der 1. Co-homologiegruppe $\mathcal{H}^1(\Omega)$, deren Anteile am Fehler durch den Grobgitterlöser auf Level 0 eliminiert werden müssen.

In diesem Experiment werden wir diese Überlegungen überprüfen und so die Anwendbarkeit des Verfahrens auf Leiterstrukturen nichttrivialer Topologie rechtfertigen. Dazu verwenden wir den Torus

$$\Omega := \{(0, 3)^2 \times (0, 1)\} \setminus (1, 2)^3,$$

Triangulierungen sind in Abb. 4.10 zu sehen. Die erste Betti-Zahl des Gebietes ist eins, so daß genau ein Mode durch den Glätter schlecht gedämpft werden sollte, wenn wir Neumann-Randbedingungen $\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$ annehmen. Bei Dirichlet-Randbedingungen $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ existiert dieser Mode nicht.

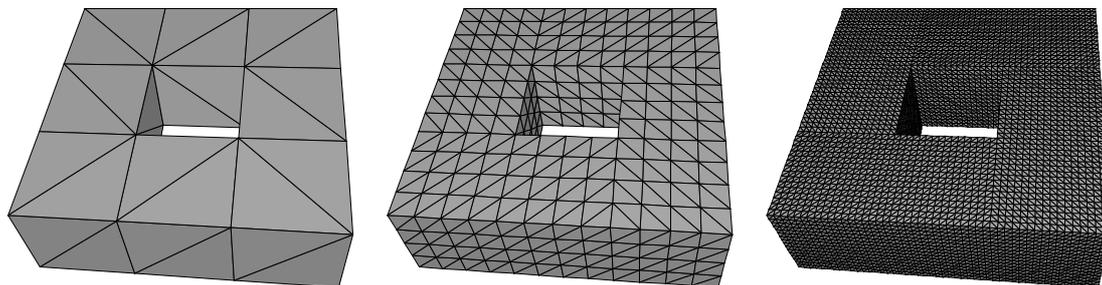


Abb. 4.10: Triangulierungen \mathcal{T}_0 , \mathcal{T}_2 und \mathcal{T}_4 des Torus aus Experiment 4.9

Wir starten wieder mit einer Zufallslösung und verschwindender rechter Seite. Nach 50 Iterationen eines V(1,1)-MG-Zyklus mit einfachen hybriden Gauß-Seidel-Glättungen messen wir die letzte Konvergenzrate und die mittlere Konvergenzrate. Dies führen wir sowohl für Dirichlet- als auch Neumann-Randbedingungen durch. Dann wiederholen wir dasselbe Experiment, schalten jetzt jedoch die Grobgitterlösung auf Stufe 0 aus. Die Konvergenzraten sind in Tab. 4.9 zu sehen.

L	Dirichlet-Randbedingungen			Neumann-Randbedingungen		
	N_L	Lsg. auf Level 0		N_L	Lsg. auf Level 0	
		ja	nein		ja	nein
1	1 046	0.525 (0.49)	0.721 (0.66)	1 814	0.458 (0.41)	0.998 (0.84)
2	9 724	0.583 (0.54)	0.697 (0.62)	12 796	0.631 (0.55)	0.998 (0.82)
3	83 576	0.629 (0.56)	0.689 (0.60)	95 864	0.669 (0.58)	0.998 (0.81)
4	692 464	0.680 (0.58)	0.685 (0.59)	741 616	0.681 (0.59)	0.998 (0.78)

Tab. 4.9: Mehrgitterkonvergenzraten nach 50 V(1,1)-Iterationen bei nichttrivialer 1. Homologiegruppe mit und ohne Lösung auf Level 0, Experiment 4.9

Man erkennt deutlich, daß ohne die Grobgitterlösung sich sehr viel schlechtere Konvergenzraten ergeben als mit Grobgitterlösung. Allerdings schwindet der Unterschied mit zunehmender Stufenzahl beim Dirichlet-Problem.

Anders verhält es sich beim Neumann-Problem. Hier erhält man konstant schlechte Konvergenzraten ohne Grobgitterlöser. Ein Blick auf den Fehler am Ende der 50 Iterationen zeigt, daß in der Tat alle Fehlerkomponenten bis auf ein Neumann-Vektorfeld gedämpft wurden, siehe Abb. 4.11. Das bestätigt, daß für die Dämpfung der Cohomologievektorfelder das Lösen auf Stufe 0 von essentieller Bedeutung ist.

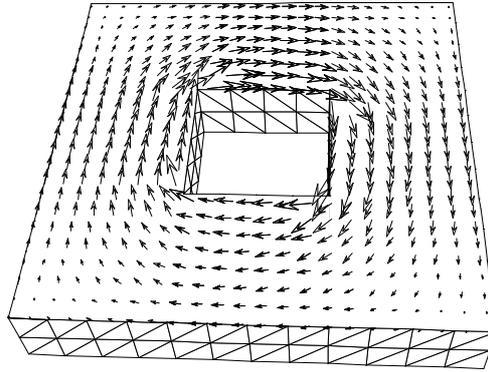


Abb. 4.11: Fehler nach 50 MG-Iterationen auf Level 3, Experiment 4.9

Experiment 4.10 (Anwesenheit von Nichtleitern) Bei der Anwesenheit nichtleitender Gebietsteile ist die Lösung des zeitharmonischen Wirbelstromproblems nicht eindeutig. Um die $L^2(\Omega)$ -Norm der Lösung im Nichtleiter zu beschränken, verwenden wir den in Kap. 4.2.6 vorgestellten Projektionsalgorithmus.

Das Gebiet ist identisch mit dem aus Experiment 4.7 und besteht aus zwei Teilgebieten (siehe Abb. 4.9). Der äußere Würfel hat jetzt die Leitfähigkeit Null, d.h. $\beta_2 = 0$ und wir variieren β_1 . Die rechte Seite ist Null, so daß das Problem lösbar ist.

Wir verwenden wieder den hybriden Glätter, diesmal mit symmetrischen Gauß-Seidel-Glättungen für Kanten und Knoten für ein V(1,1)-Mehrgitterverfahren und lösen ein Dirichlet-Problem mit Zufallsstartvektor. Die Mehrgitteriteration wird abgebrochen, wenn der Anfangsdefekt um den Faktor 10^{10} reduziert ist. Eine deutlich größere Reduktion ist nicht sinnvoll, da der erste berechnete Defekt nur bis auf Rechengenauigkeit im Bildraum der Matrix liegt und die Iteration spätestens nach einer Reduktion um den Faktor 10^{16} (bei doppelter Genauigkeit) nicht weiter konvergieren wird. In Tab. 4.10 ist zu sehen, daß man für den singulären Fall vergleichbare Konvergenzraten wie im regulären Fall erreicht.

L	1	2	3	4
N_L	2 412	21 672	183 312	1 507 104
$\beta = 0.01$	0.50 (0.43)	0.52 (0.47)	0.54 (0.48)	0.54 (0.48)
$\beta = 1.0$	0.49 (0.42)	0.53 (0.47)	0.54 (0.49)	0.54 (0.49)
$\beta = 100.0$	0.49 (0.43)	0.53 (0.46)	0.54 (0.48)	0.55 (0.48)

Tab. 4.10: Mehrgitterkonvergenzraten für den V(1,1)-Zyklus bei nichtleitendem Gebietsteil, Experiment 4.10

Experiment 4.11 (Jacobi-Glättungen) In diesem letzten Experiment werden wir zeigen, daß das hybride Glättungsverfahren auch mit Jacobi-Iterationen funktioniert. Dies ist von Relevanz für eine eventuelle Parallelisierung des Verfahrens, da das Jacobi-Verfahren

im Unterschied zum Gauß-Seidel-Verfahren keine Kommunikation während einer Iteration benötigt. Da bei dem hybriden Glättungsschritt der Informationsaustausch zwischen Knoten und Kanten vollständig lokal ist, liegt damit ein ideal parallelisierbares Verfahren vor.

Wir verwenden einen $V(1,1)$ -Zyklus als Vorkonditionierer für ein BiCGStab-Verfahren. Damit das Verfahren konvergiert, müssen die Jacobi-Schritte gedämpft werden. Für die Kantenkorrekturen wählen wir eine Dämpfung von 0.6, für die Knoten 0.9. Diese Werte haben sich in der Praxis als sinnvoll herausgestellt.

Die weiteren Parameter des Experiments stimmen mit Experiment 4.3 überein. Es ergeben sich die in Tab. 4.11 dargestellten Iterationszahlen für eine Defektreduktion um den Faktor 10^{20} . Faktisch bleiben die Anzahl der Iterationen und damit die mittleren Konvergenzraten ab Stufe 3 konstant, eine Abhängigkeit vom Parameter β ist nicht erkennbar.

L	1	2	3	4	5
$\beta = 0.01$	19	24	28	29	28
$\beta = 1.0$	18	25	29	29	28
$\beta = 100.0$	22	30	28	28	28

Tab. 4.11: Anzahl der BiCGStab-Iterationen für eine Defektreduktion um den Faktor 10^{20} bei Vorkonditionierung durch ein $V(1,1)$ -Mehrgitterverfahren mit Jacobi-Glättungen, Experiment 4.11

4.3 Adaptivität

Die Berechnung einer Finite-Element-Lösung als Näherung an das kontinuierliche Variationsproblem soll typischerweise eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

- (a) Unter Einsatz minimaler Rechnerressourcen (Rechenzeit, Speicheraufwand) soll der Fehler der diskreten Lösung kleiner als ein vorgeschriebener Maximalwert sein.
- (b) Bei fest vorgegebenen maximalen Rechnerressourcen soll die Lösung möglichst genau sein.

Der Rechen- und Speicheraufwand wird hauptsächlich durch die Zahl der Unbekannten und damit durch die Wahl der Triangulierung bestimmt. Da wir in dieser Arbeit keine höheren Ansätze verwenden, müssen demzufolge „optimale“ Triangulierungen konstruiert werden, um die Bedingungen zu erfüllen (h -Methode).

Da bei der Lösung des Wirbelstromproblems stark lokale Phänomene wie

- der Skineffekt und
- Ecken- und Kanten-Singularitäten an Materialsprüngen und Rändern

eine Rolle spielen, muß die Triangulierung lokal der Lösung angepaßt werden. Anpassungen sollen automatisch aus einer Anfangstriangulierung erzeugt werden. Dies kann nur schrittweise durch wiederholtes Lösen und Anwendung einer *a posteriori*-Fehlerschätzung im Sinne des folgenden Ablaufschemas geschehen:

Algorithmus 4.8 (Adaptive Berechnung)

```

repeat {
  stelle Diskretisierung auf
  löse Gleichungssystem
  schätze Fehler
  if (Fehler < Toleranz bzw. Rechnerressourcen erschöpft) then Abbruch
  adaptiere Gitter
}

```

4.3.1 A posteriori-Fehlerschätzer

Ist \mathbf{E}_h die diskrete Näherungslösung für die kontinuierlichen Lösung \mathbf{E} , benötigen wir zur Erfüllung der Bedingung (a) einen Schätzwert η des Fehlers

$$\boldsymbol{\delta}_h := \mathbf{E} - \mathbf{E}_h$$

in einer geeigneten Norm. Der Schätzwert η soll möglichst einer Bedingung

$$c\eta \leq \|\boldsymbol{\delta}_h\| \leq C\eta \quad (4.29)$$

mit von h unabhängigen Konstanten $c, C > 0$ genügen. Weiterhin sollte der Schätzwert lokal berechenbar sein, d.h. η läßt sich als Summe

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \quad (4.30)$$

darstellen, wobei die Größen η_T sich allein aus auf den Elementen verfügbaren Daten berechnen lassen. Dies ist einerseits wichtig für eine effektive Berechnung der Schätzung, andererseits erhält man so eine Information über die geschätzte *Fehlerverteilung*. Aus dieser kann man sehen, *wo* die Triangulierung zu verfeinern ist. Ein Ausdruck für η , der (4.29) und (4.30) erfüllt, heißt *lokaler Fehlerschätzer*.¹¹

Die rechte Ungleichung in (4.29) bedeutet, daß der Fehlerschätzer *zuverlässig* ist, d.h. daß er ungenaue Lösungen tatsächlich als solche erkennt. Die linke Ungleichung bedeutet, daß der Fehlerschätzer *effizient* ist und den tatsächlichen Fehler nicht zu stark überschätzt und somit den unnötigen Verbrauch von Ressourcen vermeidet. Ein Maß für die Effizienz ist der Quotient C/c , der nicht zu sehr von eins abweichen sollte.

Für die Bedingung (b) auf Seite 100 ist der Anspruch etwas geringer als für Bedingung (a): Es wird keine Information über die absolute Größe des Fehlers benötigt, sondern nur eine *relative Fehlerverteilung*. Dies bedeutet, daß die absoluten Größen der Konstanten in (4.29) nicht von Relevanz sind.

Für das zeitharmonische Wirbelstromproblem verwenden wir den in [BHHW00] beschriebenen residuenbasierten Fehlerschätzer. Dieser ist speziell für zeitdiskretisierte Wirbelstromprobleme entwickelt worden, also für den reellen Fall (4.19). In der genannten

¹¹ Zwecks klarer Unterscheidung spricht man häufig von einem *Fehlerindikator*, falls (4.29) nicht erfüllt ist.

Arbeit ist die Gültigkeit von (4.29) für einen mittels lokaler Summation darstellbaren Schätzer bewiesen worden. Die Abschätzung des Fehlers erfolgt in der Energienorm $\|\cdot\|_{\mathbf{e};\Omega}$. Physikalisch ist diese ein Maß für den Betrag der skalierten komplexen Leistung des Fehlers (siehe Bemerkung 2.5). Der Fehlerschätzer läßt sich auch auf den komplexen Fall anwenden, indem alle reellen Skalarprodukte durch hermitesche ersetzt werden und die Energienorm umdefiniert wird.

Der Fehler $\boldsymbol{\delta}_h$ ist Lösung der Fehlergleichung

$$a(\boldsymbol{\delta}_h, \mathbf{v}) = r(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}) - a(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega),$$

wobei $a(\cdot, \cdot)$ und f die Sesquilinearform und die rechte Seite von (4.5) sind. Das Funktional $r(\cdot)$ bezeichnet man als *Residuum*. Die grundlegende Idee des Fehlerschätzers ist die Ausnutzung der Gleichheit von Energienorm des Fehlers und der Dualnorm des Residuums. Für die weiteren Abschätzungen des Fehlers spielt wieder eine Helmholtz-Zerlegung von $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ wie bei der Konstruktion des Glätters eine Rolle. Für weitere Details, sei auf [BHHW00] und den Übersichtsartikel [BDH⁺99] der gleichen Autoren verwiesen.

Die sich ergebenden elementweisen Schätzwerte η_T lauten

$$\eta_T = \sqrt{(\eta_T^\perp)^2 + (\eta_F^0)^2 + (\eta_F^\perp)^2} \quad (4.31a)$$

mit

$$(\eta_T^\perp)^2 = \min\left(\omega^2 \mu h_T^2, \frac{\omega}{\sigma}\right) \|\sigma \mathbf{E}_h + \mathbf{J}_{G,h}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2, \quad (4.31b)$$

$$(\eta_F^\perp)^2 = \sum_{F \in \mathcal{F}(T)} \frac{1}{2} h_F \frac{\omega^2 \mu_T}{(1 + \frac{\mu_T}{\mu_F})^2} \left\| \left[\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}_h \right]_F \right\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2, \quad (4.31c)$$

$$(\eta_F^0)^2 = \sum_{F \in \mathcal{F}(T)} \frac{1}{2} h_F \frac{\omega \sigma_T}{(\sigma_T + \sigma_F)^2} \left\| \left[\mathbf{n} \cdot (\sigma \mathbf{E}_h + \mathbf{J}_{G,h}) \right]_F \right\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2. \quad (4.31d)$$

Eine hochgestellte „0“ bezeichnet Terme, die aus der Abschätzung auf $\mathbf{H}_0^0(\mathbf{rot}; \Omega)$ resultieren, während ein hochgestelltes „ \perp “ den Anteil der Abschätzung auf dem Komplement bezeichnet. Die tiefgestellten „T“ bzw. „F“ bei den Flächentermen η_T^\perp und η_F^\perp bezeichnen die Grenzwerte des jeweiligen Koeffizienten auf dem Element T bzw. auf dem Nachbar-element von T an der Seite F .

Die einzelnen Terme beinhalten Informationen über die Verletzung des Ampèreschen Gesetzes $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$, das von der Finite-Element-Lösung nur im \mathcal{T}_h -schwachen Sinne erfüllt wird: Da $\mathbf{rot} \mathbf{H}_h = \mathbf{rot}(\frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E}_h)$ und für Whitney-1-Formen auf einem Element $\mathbf{rot} \mathbf{E}_h$ konstant ist, folgt $\mathbf{rot} \mathbf{H}_h = 0$. Der Term η_T^\perp mißt somit die Abweichung $\mathbf{J}_h = \sigma \mathbf{E}_h + \mathbf{J}_{G,h}$ vom Ampèreschen Gesetz im Element. Die Verletzung (der aus dem Ampèreschen Gesetz folgenden) tangentialen Stetigkeit des \mathbf{H} -Feldes wird von dem Term η_F^\perp gemessen. Der Term η_F^0 schließlich gibt die Abweichung von der Divergenz des Ampèreschen Gesetzes an, $\mathbf{div}(\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}) \Rightarrow \mathbf{div} \mathbf{J} = 0$ in Ω . Da auf den Elementen σ konstant ist, $\mathbf{div} \mathbf{E}_h = 0$ gilt und außerdem die erregende Stromdichte $\mathbf{J}_{G,h}$ stückweise konstant ist, gilt auf jedem Element $\mathbf{div} \mathbf{J} = 0$. Für globale Divergenzfreiheit müssen die

Sprünge der Normalkomponenten über die Elementseiten verschwinden. Die Größe dieser Sprünge wird von η_F^0 gemessen.

Alle Terme lassen sich mit sehr niedrigem Aufwand berechnen, da wir stückweise konstante Koeffizienten bei der Implementierung vorausgesetzt haben. Es sind nur Normen von linearen oder konstanten Funktionen zu berechnen, so daß nur Quadraturen niedriger Ordnung benutzt werden müssen.

Es sei noch angemerkt, daß die Konstanten des residuenbasierten Fehlerschätzers in der abgeleiteten Beziehung (4.29) von der Geometrie und den Koeffizienten des Problems abhängen und nicht algorithmisch verfügbar sind. Demzufolge erhalten wir den geschätzten Fehler nur in einer skalierten Energienorm. Da wir im folgenden aber nur an der Fehlerverteilung interessiert sind, im Sinne von Bedingung (b), ist dies völlig ausreichend. Wir weisen aber darauf hin, daß von den Autoren Beck, Hiptmair und Wohlmuth von [BHHW00] auch ein hierarchischer Fehlerschätzer entwickelt wurde [BHW00], der diesen Nachteil nicht hat. Dessen Implementierung und algorithmischer Aufwand ist jedoch bedeutend größer, weshalb wir uns in dieser Arbeit für den residuenbasierten Fehlerschätzer entschieden haben. Für allgemeinere Informationen über Fehlerschätzer sei auf die Arbeit [Ver96] verwiesen.

4.3.2 Gitteradaption

Ist eine Fehlerschätzung vorhanden, muß entschieden werden, welche der Elemente verfeinert werden sollen. Hierfür gibt es verschiedene Strategien, siehe [Ver96, Dör96, KA00]. In unserer Implementierung in \mathcal{UG} verwenden wir folgenden einfachen Algorithmus, um ausgehend von den Elementschätzungen $\{\eta_T\}_T$ die Elemente zu markieren, die verfeinert werden sollen.

Algorithmus 4.9 (Auswahlstrategie)

```

procedure SetRefinementMarks( $\mathcal{T}_h, \{\eta_T\}_T, \xi \in (0, 1)$ ) {
     $\eta_{max} \leftarrow \max_{T \in \mathcal{T}_h}(\eta_T)$ 
    forall ( $T \in \mathcal{T}_h$ ) do
        if ( $\eta_T > \xi \eta_{max}$ ) then markiere T zur Verfeinerung
    }

```

In den nachfolgenden Anwendungen wählen wir typischerweise $\xi = 0.25$ oder $\xi = 0.5$.

Die markierten Elemente können jetzt beispielsweise durch die in Abschnitt 4.2.2 vorgestellte reguläre Verfeinerung durch Zerlegung in acht Tetraeder stabil verfeinert werden. Allerdings entstehen dann i.a. sogenannte „hängende Knoten“. (So werden Mittelpunkte von Kanten, an denen nicht alle angrenzenden Elemente verfeinert wurden, bezeichnet.) Analog dazu entstehen natürlich auch „hängende Kanten“. Bei der Diskretisierung müssen die zu den hängenden Knoten und Kanten assoziierten Freiheitsgrade gesondert behandelt werden und aus den regulären interpoliert werden. Andernfalls wären die Finite-Element-Räume nicht mehr konform.

Wir wollen uns aber hier auf konsistente Gitter beschränken. Um solche zu erhalten, muß für die regulär verfeinerten Elemente ein sogenannter „grüner Abschluß“ berechnet

werden, um das Gitter wieder konsistent zu machen. Hierfür benötigt man *irreguläre Verfeinerungsregeln*. Diese sollen durch Einfügen zusätzlicher Seiten und Kanten in der Umgebung eines regulär verfeinerten Teils der Triangulierung einen konsistenten Übergang zu dem nicht verfeinerten Teil schaffen. Die entstehenden Elemente bezeichnet man entsprechend als „grün verfeinert“. In Analogie dazu spricht man von einem regulär verfeinerten Element als „rot verfeinert“. Daher nennt man diese Art der adaptiven Gitteranpassung (eine stabile reguläre Regel + grüne Abschlußregeln) auch Rot/Grün-Verfeinerung. Das Vorbild hierzu ist der bekannte 2D Mehrgittercode PLTMG von R. Bank, von dem auch die Bezeichnung „grüne Verfeinerung“ stammt, [BSW83, Ban90].

In Abb. 4.12 ist eine lokale Verfeinerung eines Tetraedergitters dargestellt, wie sie in \mathcal{UG} realisiert ist. Dabei wurde das an der linken äußeren Ecke liegende Tetraeder im Anfangsgitter (links) zur Verfeinerung markiert. Der Verfeinerungsalgorithmus führt die reguläre (rote) Verfeinerung des markierten Elements durch und berechnet einen grünen Abschluß, der innerhalb einer Elementtiefe für eine konsistente Anpassung an die nicht verfeinerten Elemente sorgt (rechts). Da die nicht verfeinerten Elemente mit ihren Vater-elementen übereinstimmen heißen diese *Kopielemente*. Diese sind innerhalb \mathcal{UG} stets gelb gefärbt.

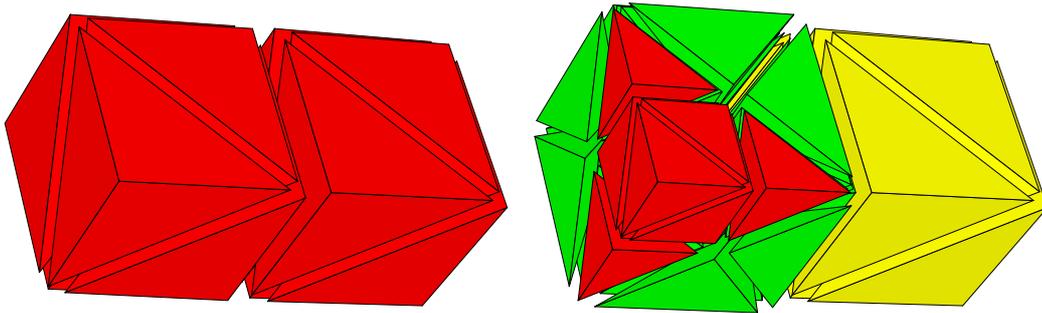


Abb. 4.12: Lokale Verfeinerung eines triangulierten Quaders in \mathcal{UG} : Im Anfangsgitter (links) wurde ein Tetraeder regulär verfeinert (rechts). Die grünen Elemente schließen den regulär verfeinerten Bereich konsistent zum nichtverfeinerten Bereich (gelb) ab.

Wiederholte Anwendung einer grünen Verfeinerung führt auf eine Entartung der Elemente, d.h. die grüne Verfeinerung ist nicht stabil. Deshalb ist eine Verfeinerung von grünen Elementen nicht erlaubt. Sind grün verfeinerte Elemente zur Verfeinerung markiert, werden diese durch eine reguläre Verfeinerung ersetzt. Dies garantiert die Stabilität des Verfeinerungsalgorithmus. Man erkennt daraus aber auch, daß es sich bei dem Verfeinerungsalgorithmus nicht um eine Abbildung $\mathcal{T}_l \mapsto \mathcal{T}_{l+1}$ handelt, wie man vielleicht zunächst denken mag, sondern um eine Abbildung zwischen Triangulierungshierarchien, den „Mehrgittern“, $\{\mathcal{T}_l\}_{0 \leq l \leq L} \mapsto \{\mathcal{T}'_l\}_{0 \leq l \leq L'}$, wobei im allgemeinsten Fall nur $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}'_0$ gelten muß. Auch muß sich die Anzahl der Stufen nach einer Verfeinerung nicht unbedingt erhöht haben.

Die Verfeinerungsmarken von jedem Gitter \mathcal{T}_l werden auf \mathcal{T}_{l-1} restringiert. Insgesamt besteht die Verfeinerung aus den folgenden Schritten, die auf jeder Stufe $l > 0$ erfolgt, wobei bei Stufe 1 begonnen wird:

1. Entfernen von grünen Elementen (bei Bedarf)
2. Einfügen neuer roter Elemente
3. Einfügen neuer grüner Elemente (konsistenter Abschluß)
4. Kopieren der restlichen Elemente auf das aktuelle Level

Um den grünen Abschluß zu realisieren, gibt es mehrere Möglichkeiten. Beispielsweise werden in dem Multilevel-Code KASKADE [BER95] vier irreguläre Verfeinerungstypen bereitgestellt. Falls die Regeln nicht anwendbar sind, wird die reguläre Verfeinerung verwendet. Ein Nachteil dieser Strategie ist, daß es zu einer Art Dominoeffekt kommen kann und der zu verfeinernde Bereich sich ausbreitet. Nach [Bey98] breitet sich dieser Effekt jedoch nicht über das gesamte Gitter aus.

Eine andere Möglichkeit ist die Bereitstellung eines *vollständigen Regelsatzes*, der alle möglichen Verfeinerungsmuster abdeckt und somit den Abschluß innerhalb einer Elementschicht garantiert. In \mathcal{UG} kann von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht werden. Der Regelsatz wurde automatisch generiert, um Fehler bei der Programmierung zu minimieren und erzeugt 242 irreguläre Verfeinerungsregeln. Alternativ bietet \mathcal{UG} eine algorithmische Erzeugung anderer Regeln zur Laufzeit, die auch für Hexaeder-, Prismen- und Pyramiden-Elemente funktioniert.¹² Für Simplizes ist der genaue Algorithmus in [Lan01, Kap. 6.9] zu finden. Auch bei diesem Algorithmus ist ein Abschluß innerhalb einer Elementschicht garantiert.

4.3.3 Numerische Experimente

In den folgenden Experimenten untersuchen wir das Verhalten des Mehrgitterverfahrens bei adaptiver Verfeinerung. In allen Experimenten verwenden wir einen $V(1,1)$ -Zyklus und einfache Gauß-Seidel-Iterationen für den hybriden Glätter.

Experiment 4.12 (Adaptive Verfeinerung) Wir wenden ein Mehrgitterverfahren auf den Einheitswürfel mit Dirichlet-Randbedingungen an. Die rechte Seite ist Null und wir beginnen mit einer Zufallslösung. Der Würfel wird zunächst uniform bis Level 3 und dann sukzessive an einer Ecke verfeinert, wie in Abb. 4.13 zu sehen ist.

Die Konvergenzraten in Tabelle 4.12 zeigen, daß die adaptive Verfeinerung sich nicht negativ auf die Konvergenzraten auswirkt, vgl. Tab. 4.3 für uniforme Verfeinerung.

Experiment 4.13 (Adaptive Verfeinerung mit Fehlerschätzer) Wir wiederholen das Experiment 4.8 (springende Koeffizienten, zwei geschachtelte Würfel), verwenden aber am Gebietsrand inhomogene Dirichlet-Randbedingungen auf vier Würfelseiten

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E})|_{z=0} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E})|_{z=1} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E})|_{y=0} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E})|_{y=1} = \mathbf{e}_x$$

und an den übrigen Seiten $x = 1$ und $x = 0$ homogene Neumann-Randbedingungen

$$\mathbf{n} \times \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0.$$

¹² Ein vollständiger Regelsatz bei größerer Elementvielfalt ist wegen des benötigten Speicherbedarfs unzuweckmäßig, siehe [Lan01].

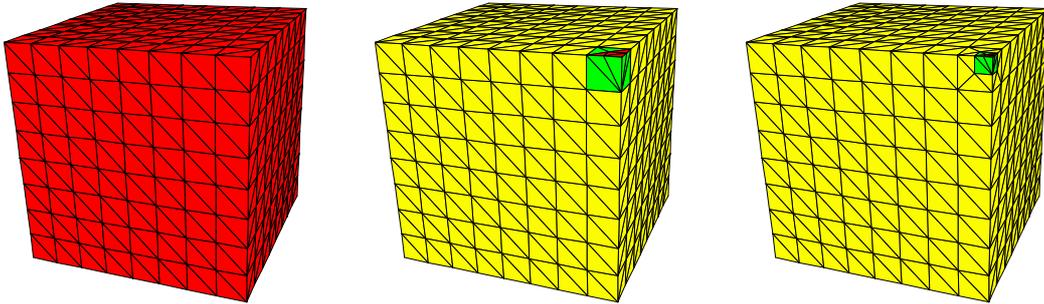


Abb. 4.13: Gitter \mathcal{T}_3 bis \mathcal{T}_5 des Würfels bei lokaler Adaption, Experiment 4.12

L	3	4	5	6	7
N_L	13 232	13 378	13 548	13 718	13 888
$\beta = 0.01$	0.38 (0.35)	0.46 (0.40)	0.44 (0.41)	0.44 (0.41)	0.44 (0.40)
$\beta = 1.0$	0.38 (0.35)	0.46 (0.41)	0.44 (0.40)	0.44 (0.41)	0.44 (0.40)
$\beta = 100.0$	0.37 (0.34)	0.46 (0.42)	0.44 (0.40)	0.44 (0.40)	0.44 (0.41)

Tab. 4.12: Mehrgitterkonvergenzraten für den V(1,1)-Zyklus mit hybriden Gauß-Seidel-Glättungen bei adaptiv verfeinerten Gittern, Experiment 4.12

Im Fall konstanter Koeffizienten ergäbe sich aus den Randbedingungen ein x -gerichtetes Magnetfeld in Ω , das für $\beta = 0$ konstant wäre. Durch Koeffizientensprünge wird dieses Feld gestört. Insbesondere für große Leitfähigkeit (β_1 groß) oder hohe Magnetisierbarkeit (kleines α_2) des inneren Würfels ergeben sich starke Feldkonzentrationen an den Kanten des inneren Würfels.

Mit Hilfe des Fehlerschätzers wird adaptiv verfeinert. Für die Auswahl der zu verfeinernden Elemente wurde in Algorithmus 4.9 immer der Wert $\xi = 0.25$ verwendet. Es wird solange adaptiv verfeinert, bis eine weitere Verfeinerung den verfügbaren Speicher überschreiten würde (in diesem Fall 2.0 GB). Die rechte Seite und der Startwert sind Null. In Tab. 4.13 sehen wir die Anzahl der BiCGStab-Iterationen mit V(1,1)-Mehrgitter-Vorkonditionierung für eine Defektreduktion um den Faktor 10^{20} . In der rechten Spalte ist die Anzahl der Unbekannten auf der jeweils höchsten Gitterstufe angegeben. Bedingt durch die Adaptionstrategie ergeben sich bei den verschiedenen Koeffizientensprüngen unterschiedliche maximale Stufenzahlen und Anzahlen der Unbekannten. Während ohne Koeffizientensprung (1. Zeile in Tab. 4.13) die maximale Stufe $L = 4$ ist, treten bei den zuvor genannten Fällen β_1 groß bzw. α_1 klein mit singulärem Verhalten der Lösung maximale Stufen $L = 6$ auf. Der Grad der Adaption des Gitters ist also in den letzten Fällen erwartungsgemäß besonders stark ausgeprägt, siehe Abb. 4.14. Das Magnetfeld für α_1 klein (letzte Zeile in Tab. 4.13) ist in Abb. 4.15 dargestellt.

L		1	2	3	4	5	6	$\max N_L$
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 1$	22	27	26	28	–	–	1 438 398
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 10^4$	26	25	28	32	33	27	522 210
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 10^{-4}$	26	24	23	25	24	–	249 016
$\alpha_1 = 10^4$	$\beta_1 = 1$	26	24	23	25	25	–	248 938
$\alpha_1 = 10^{-4}$	$\beta_1 = 1$	26	28	32	34	33	31	590 678

Tab. 4.13: Anzahl der durch den V(1,1)-Zyklus vorkonditionierten BiCGStab-Iterationen für eine Defektreduktion um den Faktor 10^{20} bei springenden Koeffizienten und adaptiver Verfeinerung mit Hilfe des Fehlerschätzers, Experiment 4.13.

Die Anzahl der Iterationen ist in allen Fällen höher als bei Experiment 4.8 mit uniformer Verfeinerung, siehe Tab. 4.8. Allerdings ist zu berücksichtigen, daß in Experiment 4.8 auf allen Rändern Dirichlet-Randbedingungen vorgeschrieben waren und mit einem Zufallswert gestartet wurde. Letzterer enthält meistens eher hochfrequente Fehleranteile, die relativ schnell reduziert werden.

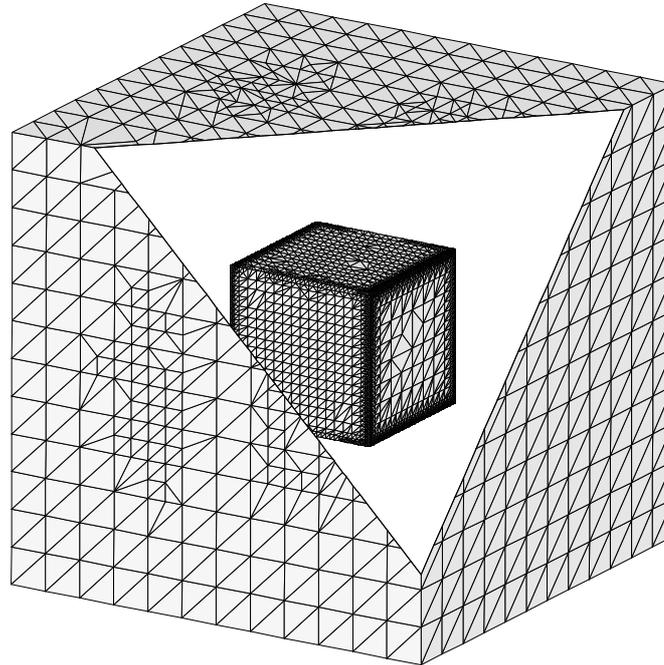


Abb. 4.14: Adaptiv verfeinertes Gitter \mathcal{T}_6 in Experiment 4.13 bei großer Permeabilität des inneren Würfels (letzte Zeile in Tab. 4.13).

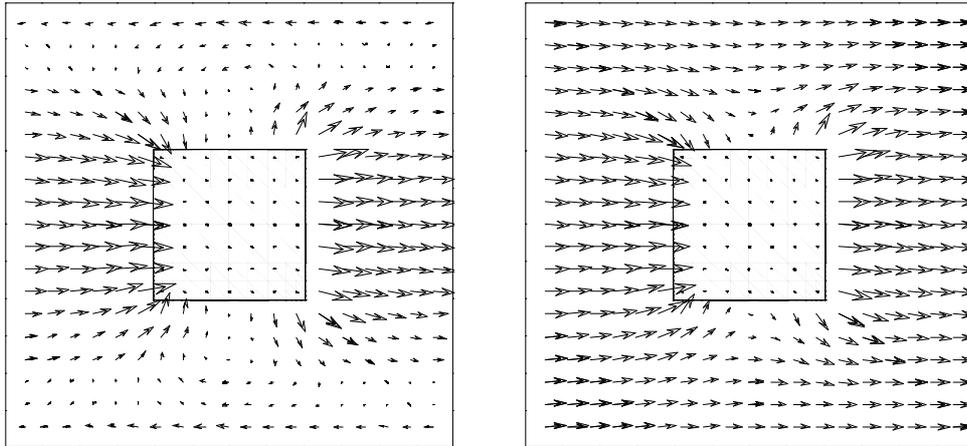


Abb. 4.15: $\operatorname{Re} \mathbf{H}$ (links) und $\operatorname{Im} \mathbf{H}$ (rechts) in Experiment 4.13 entlang eines Schnittes bei großer Permeabilität des inneren Würfels (letzte Zeile in Tab. 4.13), $L = 5$. An den Kanten des inneren Würfels ergeben sich Singularitäten.

4.4 Lokales Mehrgitterverfahren

4.4.1 Optimalität des Mehrgitterverfahrens und lokal adaptierte Gitter

Die Optimalität des Mehrgitterverfahrens resultiert aus zwei Bedingungen:

1. Die Konvergenzrate ist unabhängig von der Anzahl der Unbekannten N_L gleichmäßig von eins weg beschränkt.
2. Der Aufwand (Speicher und Zeit) für eine Iteration ist $\mathcal{O}(N_L)$.

Für die Gültigkeit der zweiten Bedingung ist ein *geometrisches Wachstum* der Anzahl der Unbekannten zwischen den Triangulierungen des Mehrgitterverfahrens notwendig, d.h.

$$N_l > q N_{l-1}, \quad l = 1, \dots, L$$

für ein $q > 1$, denn dann ist der Aufwand für alle Stufen mit Hilfe der geometrischen Reihe durch

$$\mathcal{O}\left(\frac{q}{q-1} N_L\right)$$

abschätzbar. Im Unterschied zu uniformer Verfeinerung kann bei adaptiver Verfeinerung die zweite Bedingung verletzt sein, wenn nur wenige Elemente zur Verfeinerung markiert werden (wie beispielsweise in Abb. 4.13). Dann steigt der Aufwand für eine Iteration auf

$$\mathcal{O}(N_L \log N_L).$$

Dieser Nachteil war der Ausgangspunkt für die Entwicklung der hierarchische Basen Methode (HB) durch Yserentant, [Yse84], und des hierarchische Basen Mehrgitterverfahrens (HBMG) durch Bank, Dupont und Yserentant, [BDY88]. Ersteres ist ein additives,

letzteres ein multiplikatives Verfahren. Die Grundidee der beiden Verfahren ist, daß auf jeder Stufe l nur über die „neuen“ Freiheitsgrade geglättet wird. Bezeichnet \mathcal{P}_l die Menge der geometrischen Objekte (Knoten, Kanten, Seiten, Tetraeder) der Triangulierung \mathcal{T}_l , an denen die Freiheitsgrade lokalisiert¹³ sind, werden also nur Korrekturen für Freiheitsgrade auf $p \in \mathcal{P}_l \setminus \mathcal{P}_{l-1}$ durch Glättungen auf Stufe l berechnet. Diese p nennen wir *aktive Menge* \mathcal{A}_l .

Zwar erhält man mit den genannten Verfahren in der Tat linearen Aufwand für eine Iteration, jedoch verschlechtert sich die Gesamtkomplexität auf $\mathcal{O}(N_L \log N_L)$ durch sinkende Konvergenzraten. Ein weiterer Nachteil dieser Verfahren ist, daß hier die Konstruktion robuster Verfahren wie in [Wit89] nicht funktioniert.

Diese Nachteile werden vermieden, wenn man den Bereich, über den geglättet wird, etwas vergrößert, so daß dieser alle $p \in \mathcal{P}_l$ enthält, deren Basisfunktionen sich von Stufe $l-1$ zu Stufe l verändert haben. Bezüglich HB und HBMG entspricht dies einer Zunahme der Nachbarmfreiheitsgrade. Bei üblichen Diskretisierungen beschränkt sich die Glättung dann auf alle Freiheitsgrade, die auf Objekten lokalisiert sind, die zu einem verfeinerten Element gehören. Eine additive Mehrgittervariante mit dieser aktiven Menge ist mit dem BPX-Vorkonditionierer zum ersten Mal von Bramble, Pasciac und Xu in [BPX90] theoretisch analysiert worden, die multiplikative Variante von Bramble, Pasciac, Wang und Xu in [BPWX91] (BPWX-MG).

Die multiplikative Variante wird *lokales Mehrgitterverfahren* genannt, da sie die natürliche Verallgemeinerung des klassischen Mehrgitterverfahrens auf lokal verfeinerte Gitter ist und bei uniformer Verfeinerung mit dem klassischen Mehrgitterverfahren übereinstimmt. Vor der Analyse in [BPWX91] gab es aber Arbeiten, die auf derselben bzw. ähnlichen Idee beruhen, siehe [Bra77, Riv84]. In Zusammenhang mit Robustheit sei auf [BW94] verwiesen, für einen Vergleich zwischen additiver und multiplikativer Variante auf [BHW98] und für die Parallelisierung lokaler Mehrgitterverfahren auf [Bas96].

In Abb. 4.16 ist für den Fall von Knotenfreiheitsgraden der unterschiedliche Glättungsbereich von HB/HBMG zu BPX/lokales MG dargestellt.

4.4.2 Implementierung des lokalen Mehrgitterverfahrens

In diesem Abschnitt wollen wir die wesentlichen Aspekte der Implementierung des lokalen Mehrgitterverfahrens für die \mathcal{UG} -Elektromagnetik-Problemklasse diskutieren. Dazu werden zunächst einige Begriffe und Konzepte eingeführt, die zum allgemeinen Verständnis des lokalen Mehrgitterverfahrens notwendig sind. Wir orientieren uns bei der Begriffsbildung und Notation größtenteils an den Arbeiten von C. Wieners, [Wie97, Wie01]. Es sei darauf hingewiesen, daß wir aus Gründen der Einfachheit bei unserer Darstellung geringfügig von der tatsächlichen Implementierung abweichen, die in \mathcal{UG} realisiert wurde.

Geometriebasierte Daten

Die geometrischen Orte der Freiheitsgrade $p \in \mathcal{P}_l$ werden wir im weiteren *Interpolationpunkte* oder einfach *Punkte (der Stufe l)* nennen. Die Menge der Punkte, die zu

¹³ Sind Freiheitsgrade an Kanten, Seiten oder Tetraedern lokalisiert, meinen wir damit, daß sich diese als Integrale über das entsprechende Objekt darstellen lassen.

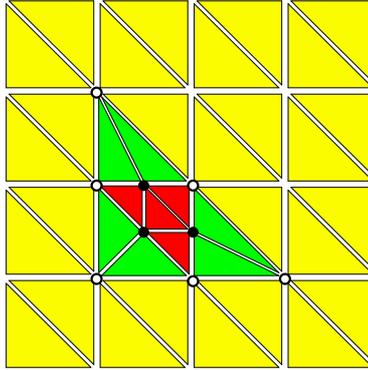


Abb. 4.16: Aktive Menge bei Knotenfreiheitsgraden (2D): Bei HB und HBMG wird auf dem dargestellten Level nur auf den ausgefüllten Knoten geglättet, bei BPX und lokalem Mehrgitter zusätzlich auf den nicht ausgefüllten.

einem Element $T \in \mathcal{T}_l$ gehören, bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_l[T]$, $N[p]$ bezeichnet die Anzahl der Freiheitsgrade an einem Punkt p . Im Fall des Wirbelstromproblems sind die Punkte die Kanten der Triangulierungen und es gilt $N[p] = 2$. Die Laplace-Probleme bei der Quellenberechnung, der Projektion und dem hybriden Glätter haben Knotenfreiheitsgrade und es gilt $N[p] = 1$ bzw. $N[p] = 2$. Die Anzahl der Elementfreiheitsgrade ist

$$N[T] = \sum_{p \in \mathcal{P}_l[T]} N[p],$$

und die Gesamtanzahl der Freiheitsgrade auf der Stufe l ist

$$N_l = N[\mathcal{P}_l] = \sum_{p \in \mathcal{P}_l} N[p].$$

Für die Restriktion eines Vektors \mathbf{x}_l auf Stufe l auf ein Element $T \in \mathcal{T}_l$ schreiben wir im folgenden $\mathbf{x}_l[T] \in \mathbb{R}^{N[T]}$ und für die Restriktion auf einen Punkt $\mathbf{x}_l[p] \in \mathbb{R}^{N[p]}$. Das diskretisierte Problem auf dem feinsten Gitter \mathcal{T}_L ist

$$\mathbf{A}_L \mathbf{x}_L = \mathbf{b}_L \tag{4.32}$$

mit der globalen Systemmatrix $\mathbf{A}_L \in \mathbb{R}^{N_L \times N_L}$, der globalen rechten Seite $\mathbf{b}_L \in \mathbb{R}^{N_L}$ und dem globalen Lösungsvektor $\mathbf{x}_L \in \mathbb{R}^{N_L}$. Die Matrix muß auf allen Stufen verfügbar sein und kann aus den lokalen Elementmatrizen, die wir mit $\mathbf{A}_l[T]$ bezeichnen, assembliert werden (siehe Abschnitt 4.1),

$$\mathbf{A}_l = \sum_{T \in \mathcal{T}_l} \mathbf{A}_l[T].$$

Die rechte Seite wird nur auf dem feinsten Gitter benötigt, da auf den unteren Stufen $l < L$ Problem (4.32) durch das Defektproblem $\mathbf{A}_l \mathbf{c}_l = \mathbf{d}_l$ ersetzt wird, siehe Abschnitt 4.2.3.

Die rechte Seite kann auf dem Gitter \mathcal{T}_L ebenso aus den elementweisen rechten Seiten $\mathbf{b}_l[T]$ assembliert werden,

$$\mathbf{b}_L = \sum_{T \in \mathcal{T}_L} \mathbf{b}_L[T].$$

Die globalen Blockmatrizen $\mathbf{A}_l[p, q] \in \mathbb{R}^{N[p] \times N[q]}$, $p, q \in \mathcal{P}_l$, können aus den Elementmatrizen $\mathbf{A}_l[T]$ mit $p, q \in \mathcal{P}_l[T]$ assembliert werden. Bei den verwendeten Diskretisierungen gilt $\mathbf{A}_l[p, q] = 0$, wenn kein Element existiert mit $p, q \in \mathcal{P}_l[T]$.

Konzept der Vektorklassen und lokale Gitter

Die Beschränkung der Glättung auf die aktive Menge wird durch die Realisierung lokaler Gitter $\mathcal{T}_l^{lok} \subset \mathcal{T}_l$ umgesetzt, die im allgemeinen nicht das ganze Gebiet Ω_l überdecken. Die Implementierung des lokalen Mehrgitteralgorithmus soll sicherstellen, daß

1. Glättung und
2. Defektberechnung

auf jeder Gitterstufe ohne Kommunikation zu unteren Gitterstufen erfolgen kann. Um dies zu gewährleisten, bestehen die lokalen Gitter nicht nur aus den verfeinerten Elementen, sondern auch einigen Kopieelementen. Für eine genauere Definition wird das Konzept der Vektorklassen eingeführt, siehe [Wie97].

Jedem Punkt (geometrischen Objekt mit Freiheitsgraden) $p \in \mathcal{P}_l$ wird auf einer Stufe eine Vektorklasse $\text{class}_l(p) \in \{0, 1, 2, 3\}$ zugeordnet:

$$\text{class}_l(p) := \begin{cases} 3, & \text{falls } p \text{ zur aktiven Menge auf Stufe } l \text{ gehört,} \\ 2, & \text{falls } \text{class}_l(p) \neq 3 \text{ und es existiert ein } T \in \mathcal{T}_l, \\ & \text{so daß } p, q \in \mathcal{P}_l[T] \text{ mit } \text{class}_l(q) = 3, \\ 1, & \text{falls } \text{class}_l(p) \neq 3, \text{class}_l(p) \neq 2, \text{ und es existiert ein } T \in \mathcal{T}_l, \\ & \text{so daß } p, q \in \mathcal{P}_l[T] \text{ mit } \text{class}_l(q) = 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Vektorklasse gibt die durch den Matrixgraphen definierte Distanz eines Punktes zur aktiven Menge wieder. Punkte mit $\text{class}_l(p) = 3$ sind Teil der aktiven Menge, Punkte mit $\text{class}_l(p) = 2$ haben den Abstand 1 und Punkte mit $\text{class}_l(p) = 1$ den Abstand 2. Alle anderen Punkte ($\text{class}_l(p) = 0$) haben einen Abstand, der größer als 2 ist.

Eine Korrektur der Lösung $\mathbf{x}[p]$ mit $\text{class}_l(p) = 3$ ändert den Defekt für alle Punkte p mit $\text{class}_l(p) \geq 2$. Um diesen berechnen zu können, benötigt man die aktuelle Lösung auf Punkten p mit $\text{class}_l(p) \geq 1$. Dies führt auf die folgende Definition lokaler Gitter:

Definition 4.5 (Lokales Gitter)

$$\mathcal{T}_l^{lok} := \{T \in \mathcal{T}_l \mid \text{Es gilt } \text{class}_l(p) \geq 2 \text{ für mindestens ein } p \in \mathcal{P}_l[T]\}$$

heißt *lokale Triangulierung* oder *lokales Gitter auf Stufe l*.

Da auf Stufe 0 $\text{class}_0(p) = 3$ für alle $p \in \mathcal{P}_0$ gilt, folgt aus der Definition $\mathcal{T}_0^{\text{lok}} = \mathcal{T}_0$. Als Objekte im Speicher existieren nur die lokalen Gitter $\mathcal{T}_l^{\text{lok}}$, nicht mehr die globalen \mathcal{T}_l . Abbildung 4.17 verdeutlicht den Unterschied zwischen lokalen und globalen Gittern anhand einer 2D-Gitterhierarchie, die jeweils aus einer lokalen Verfeinerung hervorging.

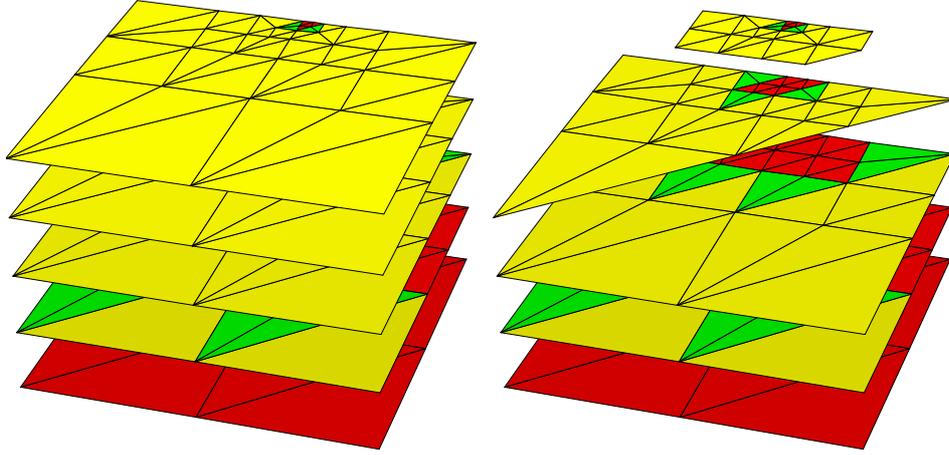


Abb. 4.17: 2D-Gitterhierarchie mit globalen (links) und lokalen Gittern (rechts).

Die lokalen Gitter sind die kleinsten Teilmengen der (globalen) Triangulierungen, die Glätten auf der aktiven Menge mit Defektaktualisierung ohne Zugriff auf niedrigere Gitter ermöglichen. Allerdings ist noch eine Bedingung an die Lösung und die Korrektur zu stellen.

Hierarchische Konsistenz

Im folgenden schreiben wir kurz \mathbf{x}^{lok} , \mathbf{A}^{lok} für die Restriktion von Vektoren und Matrizen auf das lokale Gitter. Nur diese existieren tatsächlich als Objekte im Speicher.

Damit die Defektaktualisierung und die Aktualisierung der rechten Seite tatsächlich auf den lokalen Gittern berechnet werden können, müssen die Lösung und die Korrektur, die sich bei Verwendung lokaler Gitter im allgemeinen über mehrere Gitterstufen verteilen, *hierarchisch konsistent* sein.

Definition 4.6 (Hierarchisch konsistente Vektoren) Eine Familie lokaler Vektoren $\{\mathbf{x}_l^{\text{lok}}\}_{l=0,\dots,L}$ heißt *hierarchisch konsistent*, wenn

$$\mathbf{x}_l^{\text{lok}}[p] = \mathbf{x}_{l-1}^{\text{lok}}[p] \quad \forall p \in \mathcal{P}_l \text{ mit } \text{class}_1(p) < 3, \quad l = 1 \dots, L.$$

Analog definieren wir für Matrizen:

Definition 4.7 (Hierarchisch konsistente Matrizen) Eine Familie lokaler Matrizen $\{\mathbf{A}_l^{\text{lok}}\}_{l=0,\dots,L}$ heißt *hierarchisch konsistent*, wenn

$$\mathbf{A}_l^{\text{lok}}[p, q] = \mathbf{A}_{l-1}^{\text{lok}}[p, q] \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_l \text{ mit } \text{class}_1(p), \text{class}_1(q) < 3, \quad l = 1 \dots, L.$$

Werden die Matrizen und die rechte Seite elementweise auf den lokalen Gittern \mathcal{T}_l^{lok} assembliert, sind diese im Unterschied zu den über globale Gitter assemblierten nicht hierarchisch konsistent: $\mathbf{A}_l^{lok}[p, q]$ und $\mathbf{b}_l^{lok}[p]$ für $\text{class}_1(p), \text{class}_1(q) \leq 1$ sind nicht vollständig assembliert und dürfen nicht benutzt werden. Da für die lokale Defektberechnung aber nur $\mathbf{A}_l^{lok}[p, q]$ für $\text{class}_1(p) \geq 2$ oder $\text{class}_1(q) \geq 2$ bzw. $\mathbf{b}_l^{lok}[p]$ für $\text{class}_1(p) \geq 2$ benötigt wird, spielt die Inkonsistenz keine Rolle für die Glättungsoperation.

Da die auf den \mathcal{T}_l^{lok} definierten lokalen Defekte $\mathbf{d}_l^{lok}[p] := \mathbf{b}_l^{lok}[p] - \mathbf{A}_l^{lok}[p, q] \mathbf{x}_l^{lok}[q]$ nur für $\text{class}_1(p) \geq 2$ berechnet werden, sind auch diese nicht hierarchisch konsistent. Für den Lösungsalgorithmus wird jedoch auch der globale Defekt auf dem feinsten (globalen) Gitter benötigt, z.B. zur Überprüfung, ob der Defekt bereits hinreichend reduziert wurde (Abbruchkriterium). Dazu kann der globale Defekt rekursiv aus den Defekten auf den lokalen Gittern berechnet werden,

$$\mathbf{d}_l[p] = \begin{cases} \mathbf{d}_l^{lok}[p] & \text{falls } \text{class}_1(p) \geq 2 \\ \mathbf{d}_{l-1}^{lok}[p] & \text{sonst} \end{cases}, \quad l = 1, \dots, L. \quad (4.33)$$

Analog ist die globale rechte Seite definiert. Bei der Restriktion des Defektes im Mehrgitterzyklus ist daher darauf zu achten, daß nur auf die $\mathbf{d}_l^{lok}[p]$ restringiert wird mit

$$p \in \mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{M}_l := \{q \in \mathcal{P}_l \mid q \notin \mathcal{P}_{l+1} \text{ oder } \text{class}_{l+1}(p) \geq 2\},$$

$\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{M}_l$ heißt *Neue-Defekt-Menge*. Prolongiert wird hingegen auf alle Punkte des lokalen Gitters.

Lokale Glätter und lokaler Mehrgitterzyklus

Nach den obigen Betrachtungen können wir jetzt die Algorithmen der lokalen Varianten von Glättung (vgl. Algorithmus 4.1), Mehrgitterzyklus (vgl. Algorithmus 4.2) und Mehrgitterlöser (vgl. Algorithmus 4.3) angeben. Mit $\mathbf{A}_l^{lok}[p, \cdot]$ bezeichnen wir die zum Punkt p gehörende Blockzeile einer Matrix \mathbf{A}_l^{lok} .

Algorithmus 4.10 (lokaler Glätter) *Die einzige Veränderung gegenüber der globalen Glättungsoperation liegt in der Begrenzung der Korrektur auf die aktive Menge ($\text{class}_1(p) = 3$). Bei globaler Verfeinerung entspricht der Algorithmus dem globalen Glättungsalgorithmus 4.1, da dann $\text{class}_1(p) = 3$ für alle $p \in \mathcal{P}_l$ gilt.*

```

procedure  $S^{lok}(\mathbf{c}_l^{lok}, \mathbf{d}_l^{lok})$  {
   $\mathbf{w}^{lok}[p] \leftarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}^{-1}[p, \cdot] \mathbf{d}_l^{lok} & \forall p \in \mathcal{P}_l \text{ mit } \text{class}_1(p) = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ 
   $\mathbf{d}_l^{lok} \leftarrow \mathbf{d}_l^{lok} - \mathbf{A}_l^{lok} \mathbf{w}_l^{lok}$  (Defektaktualisierung)
   $\mathbf{c}_l^{lok} \leftarrow \mathbf{c}_l^{lok} + \mathbf{w}_l^{lok}$  (Korrekturaktualisierung)
}

```

Algorithmus 4.11 (lokaler MG-Zyklus) Auch dieser Algorithmus entspricht bei globaler Verfeinerung der seiner globalen Variante, Algorithmus 4.2. Die einzige Modifikation besteht in der Begrenzung der Restriktion. Es sei daran erinnert, daß $\mathbf{A}_0^{lok} = \mathbf{A}_0$, $\mathbf{d}_0^{lok} = \mathbf{d}_0$ und $\mathbf{c}_0^{lok} = \mathbf{c}_0$.

```

procedure MGClok ( $l, \mathbf{c}_l^{lok}, \mathbf{d}_l^{lok}$ ) {
  if ( $l = 0$ ) then löse  $\mathbf{A}_0^{lok} \mathbf{c}_0^{lok} = \mathbf{d}_0^{lok}$  (Lösung auf größtem Gitter)
  else {
    for ( $1 \leq i \leq \nu_1$ ) do  $S_1^{lok}(\mathbf{c}_i^{lok}, \mathbf{d}_i^{lok})$  (Vorglättung)
     $\mathbf{d}_{l-1}^{lok}[p] \leftarrow \mathbf{r}_i^{lok}[p, \cdot] \mathbf{d}_i^{lok} \quad \forall p \in \mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{M}_{l-1}$  (Restriktion)
     $\mathbf{c}_{l-1}^{lok} \leftarrow 0$ 
    for ( $1 \leq i \leq \gamma$ ) do MGC ( $l-1, \mathbf{c}_{l-1}^{lok}, \mathbf{d}_{l-1}^{lok}$ ) (Grobgitterkorrektur)
     $\mathbf{w}_l^{lok} \leftarrow \mathbf{p}_l^{lok} \mathbf{c}_{l-1}^{lok}$  (Prolongation)
     $\mathbf{d}_l^{lok} \leftarrow \mathbf{d}_l^{lok} - \mathbf{A}_l^{lok} \mathbf{w}_l^{lok}$  (Defektaktualisierung)
     $\mathbf{c}_l^{lok} \leftarrow \mathbf{c}_l^{lok} + \mathbf{w}_l^{lok}$  (Korrekturaktualisierung)
    for ( $1 \leq i \leq \nu_2$ ) do  $S_2^{lok}(\mathbf{c}_i^{lok}, \mathbf{d}_i^{lok})$  (Nachglättung)
  }
}

```

Algorithmus 4.12 (lokaler MG-Löser) Im Unterschied zum globalen MG-Löser 4.3 muß der Anfangsdefekt und die Defektnorm im Abbruchkriterium rekursiv berechnet werden. Die Aktualisierung der Lösung muß für alle Gitterlevel erfolgen.

```

procedure MGSolverlok ( $\theta, \mathbf{x}_l^{lok}, \mathbf{b}_l^{lok}$ ) {
  berechne rekursiv  $\mathbf{d}_L = \mathbf{A}_L \mathbf{x}_L - \mathbf{b}_L$  nach (4.33)
   $\epsilon \leftarrow \theta \|\mathbf{d}_L\|$  (Abbruchschranke berechnen)
  repeat {
     $\mathbf{c}_L^{lok} \leftarrow 0$ 
    MGClok( $L, \mathbf{c}_L^{lok}, \mathbf{d}_L^{lok}$ )
    for ( $0 \leq l \leq L$ ) do  $\mathbf{x}_l^{lok} \leftarrow \mathbf{x}_l^{lok} + \mathbf{c}_l^{lok}$  (Lösungsaktualisierung)
  }
  until  $\|\mathbf{d}_L\| < \epsilon$ 
}

```

4.4.3 Modifikation für den hybriden Glätter

Bei der Verwendung des hybriden Glätters (Algorithmus 4.5) wird die hierarchische Konsistenzbedingung verletzt, wenn wir das zuvor dargestellte Konzept nicht ändern. Die Verletzung wird durch die Korrektur aus dem Glättungsschritt im Raum der Knotenpotentiale \mathbf{c}_{node} erzeugt

$$\mathbf{w} = \mathbf{G}_{\Omega_C} \mathbf{c}_{node}.$$

Man erinnere sich, daß $\mathbf{G}_{\overline{\Omega}_C}$ die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix ist, die einem diskreten Gradienten entspricht. Algorithmisch bedeutet die Multiplikation des Knotenvektors \mathbf{c}_{node} mit $\mathbf{G}_{\overline{\Omega}_C}$ die Verteilung der Knotenwerte auf die angrenzenden Kanten, wobei die Orientierung der Kanten berücksichtigt wird. Dies ist in Abb. 4.18 anhand eines Knotens am Rande des verfeinerten Bereichs dargestellt. In der Abbildung sind auch die Vektorklassen der Knoten und Kanten dargestellt.¹⁴ Wie man sieht, verändert die Korrektur nicht nur Kanten p der aktiven Menge ($\text{class}_1(p) = 3$), in der Abbildung schwarz dargestellt, sondern auch Kanten mit $\text{class}_1(p) < 3$, in der Abbildung rot dargestellt.

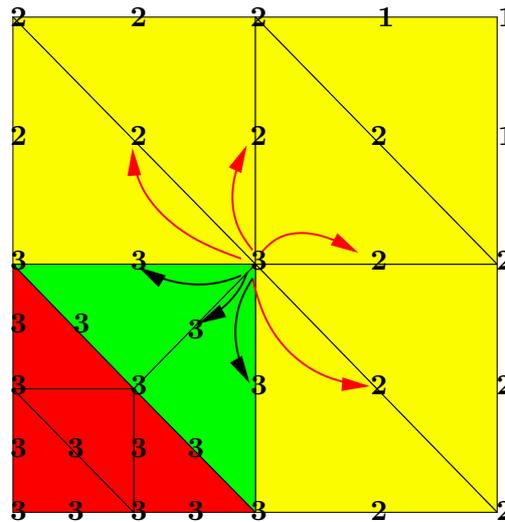


Abb. 4.18: Vektorklassen und Korrektur durch Potential-Glättungsschritt des hybriden Glätters

Um dies zu beheben, reicht es nicht aus, die Korrektur durch den Knoten-glättungsschritt einfach auf die aktive Kantenmenge zu beschränken, denn dann wäre die Korrektur nicht mehr im Kern des **rot**-Operators.

Würde man die Korrektur aus dem Knoten-glättungsschritt so weit einschränken, daß nur die Knotenwerte verteilt werden, an denen ausschließlich Kanten der aktiven Menge angrenzen, läge die Korrektur zwar im Kern des **rot**-Operators, jedoch würden nicht mehr alle Moden in $\text{Kern}(\mathbf{rot})$ effektiv geglättet werden. Ein Beispiel ist der Gradient der Knotenbasisfunktion, die am mittleren Knoten in der Abbildung eins ist und an den anderen verschwindet.

Deshalb wird die aktive Menge für den hybriden Glätter so erweitert, daß alle Kanten, die an Knoten eines verfeinerten Elements enden, alle zur aktiven Menge gehören. Daraus resultiert eine Erweiterung der lokalen Gitter um eine Elementschicht, vergleiche Abb. 4.17 mit Abb. 4.19 im nachfolgenden Experiment.

¹⁴ Die dargestellten Vektorklassen spiegeln wieder, daß neben durch die Systemmatrix bedingten Kanten-Kanten-Verbindungen durch die Existenz von $\mathbf{G}_{\overline{\Omega}_C}$ auch Knoten-Kanten-Verbindungen im Matrix-graph enthalten sind.

4.4.4 Numerische Experimente

Wir wiederholen die Experimente aus dem letzten Abschnitt, verwenden aber lokale und nicht globale Glättungsiterationen.

Experiment 4.14 (Adaptive Verfeinerung und lokales MG) Wir wiederholen Experiment 4.12, verwenden aber ein lokales Mehrgitterverfahren, so daß sich die Glättungsoperationen nur auf eine kleine Umgebung des verfeinerten Bereichs beschränken, siehe Abb. 4.19. Ein Vergleich zwischen den sich ergebenden Konvergenzraten in Tab. 4.14 mit den Konvergenzraten bei globaler Glättung in Tab. 4.12 zeigt keinerlei relevanten Unterschied.

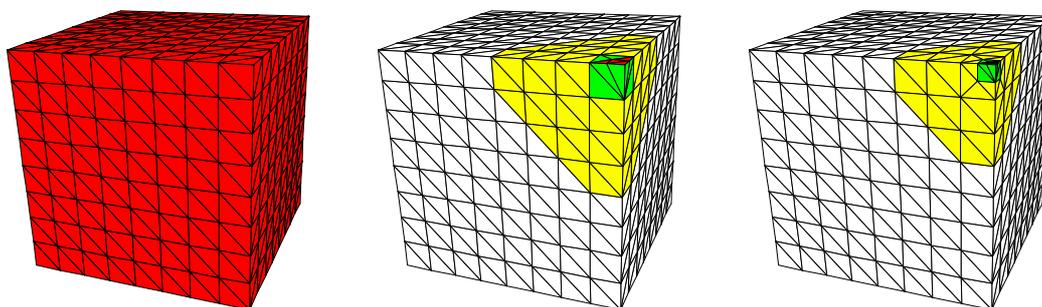


Abb. 4.19: Gitter \mathcal{T}_3 bis \mathcal{T}_5 des Würfels bei lokaler Adaption, Experiment 4.14. Das lokale Gitter beschränkt sich auf den farbigen Bereich.

L	3	4	5	6	7
N_L	13 232	13 378	13 548	13 718	13 888
$\beta = 0.01$	0.38 (0.35)	0.46 (0.43)	0.44 (0.42)	0.44 (0.41)	0.44 (0.41)
$\beta = 1.0$	0.38 (0.35)	0.46 (0.44)	0.44 (0.40)	0.44 (0.40)	0.44 (0.40)
$\beta = 100.0$	0.37 (0.34)	0.46 (0.43)	0.44 (0.41)	0.44 (0.41)	0.44 (0.41)

Tab. 4.14: Mehrgitterkonvergenzraten für einen lokalen V(1,1)-Zyklus mit hybriden Gauß-Seidel-Glättungen bei adaptiv verfeinerten Gittern, Experiment 4.14

Experiment 4.15 (lokales MG und adaptive Verfeinerung mit Fehlerschätzer)

In dem letzten Experiment wiederholen wir Experiment 4.13, verwenden aber lokale Glättungsoperationen. Wie in Tab. 4.15 zu erkennen ist, ergeben sich für die erste, dritte und vierte Zeile keine relevanten Unterschiede zu globaler Glättung. Der sparsamere Speicherverbrauch bei lokaler Glättung ermöglicht für Zeile drei und vier jeweils ein weiteres Level. In den Zeilen zwei und fünf, den Fällen mit singulärem Lösungsverhalten, sieht man einen deutlichen Anstieg der Iterationszahlen gegenüber globaler Glättung.

L		1	2	3	4	5	6	$\max N_L$
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 1$	22	27	26	28	–	–	1 438 398
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 10^4$	26	25	29	35	37	36	522 210
$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 10^{-4}$	26	24	24	26	25	28	711 500
$\alpha_1 = 10^4$	$\beta_1 = 1$	26	24	23	26	25	28	709 934
$\alpha_1 = 10^{-4}$	$\beta_1 = 1$	26	27	31	37	38	39	590 678

Tab. 4.15: Anzahl der durch einen lokalen $V(1,1)$ -Zyklus vorkonditionierten BiCGStab-Iterationen für eine Defektreduktion um den Faktor 10^{20} bei springenden Koeffizienten und adaptiver Verfeinerung mit Hilfe des Fehlerschätzers, Experiment 4.15. Für die Verfeinerungsauswahl wurde $\xi = 0.25$ verwendet.

4.5 Anwendungen

In diesem Abschnitt wollen wir das in den vorigen Kapiteln vorgestellte lokale Mehrgitterverfahren für die Berechnung realistischer Problemstellungen verwenden. Die Erzeugung der Gebietsgeometrie und der Startgitter \mathcal{T}_0 kann bei realistischen Anwendungen nicht mehr „von Hand“ geschehen, wie in den vorigen Experimenten.

Hier greifen wir auf kommerzielle Softwarelösungen zurück: Für die Erzeugung der Gebietsgeometrie und Bearbeitung wird das CAD Programm Pro/ENGINEER¹⁵ verwendet, für die Gittererzeugung der Tetraedergittergenerator ICEM CFD Tetra¹⁶.

Die adaptive Verfeinerung und die \mathcal{T}_0 -Gitterbeschreibung benötigen ein gemeinsames Interface für die Geometriebeschreibung. Hierfür verwenden wir das in \mathcal{UG} vorhandene LGM-Interface (engl. *linear grid model*). Um die in den proprietären Formaten der kommerziellen Software-Pakete vorliegenden Gitter- und Geometriedaten für das LGM-Interface verfügbar zu machen, wurden innerhalb der \mathcal{UG} -Arbeitsgruppe kürzlich die dafür notwendigen Anbindungen entwickelt.

Das LGM-Interface beschreibt die Geometrie mit Hilfe einer Oberflächentriangulierung; um Mißverständnisse zu vermeiden, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese nichts mit der Triangulierung \mathcal{T}_0 zu tun hat, auf der gerechnet wird. Um auch sehr feine Oberflächentriangulierungen effizient verwenden zu können, wurde innerhalb dieser Arbeit das LGM-Interface überarbeitet und mit Octree-ähnlichen Datenstrukturen versehen. Feine Oberflächentriangulierungen sind stets notwendig, wenn die Geometrie gekrümmte Flächen enthält.

4.5.1 Das TEAM 7 Benchmark Problem

Für die Validierung der vorgestellten Algorithmen und ihrer Implementierung verwenden wir das TEAM Benchmark-Problem 7. Es gehört zu einer Reihe von Testproblemen, die explizit für die Validierung von Elektromagnetik-Codes entwickelt und vermessen wurden (siehe [FN90]).

Das Problem besteht aus einer Aluminiumplatte ($\sigma = 3.526 \cdot 10^7$ S/m) mit einem Loch und einer Erregerspule über der Platte mit einem zeitharmonischen 50 Hz Erregungsstrom von 2742 AT (siehe Abb. 4.20). Alle Längen sind in Millimetern angegeben. Der Erregungsstrom erreicht sein Maximum bei $\omega t = 0$ und fließt in mathematisch positivem Sinn, wenn man die Anordnung von einer Position mit großer z -Koordinate betrachtet. Von der Erregerspule werden in der Aluminiumplatte Wirbelströme induziert.

Entlang der Strecke \overline{AB} in Abb. 4.20 liegen Meßwerte für die Größe $\text{sign}(\text{Re } B_z)|B_z|$ vor, mit denen die berechneten Werte verglichen werden sollen. Die Anordnung ist so konstruiert worden, daß Symmetrieeigenschaften nicht vorhanden sind.

Das Rechengebiet Ω wird künstlich auf einen Würfel mit 1m Kantenlänge beschränkt, wobei die Platte im Zentrum des Würfels liegt. An $\partial\Omega$ stellen wir Dirichlet-Randbedingungen $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$. Als Erregungsstrom verwenden wir ein Neumann-Vektorfeld, das a priori berechnet wird. Dies führt einen zusätzlichen Modellierungsfehler ein, da die

¹⁵ PTC, <http://www.ptc.com>

¹⁶ ICEM CFD Engineering, <http://www.icemcfd.com>

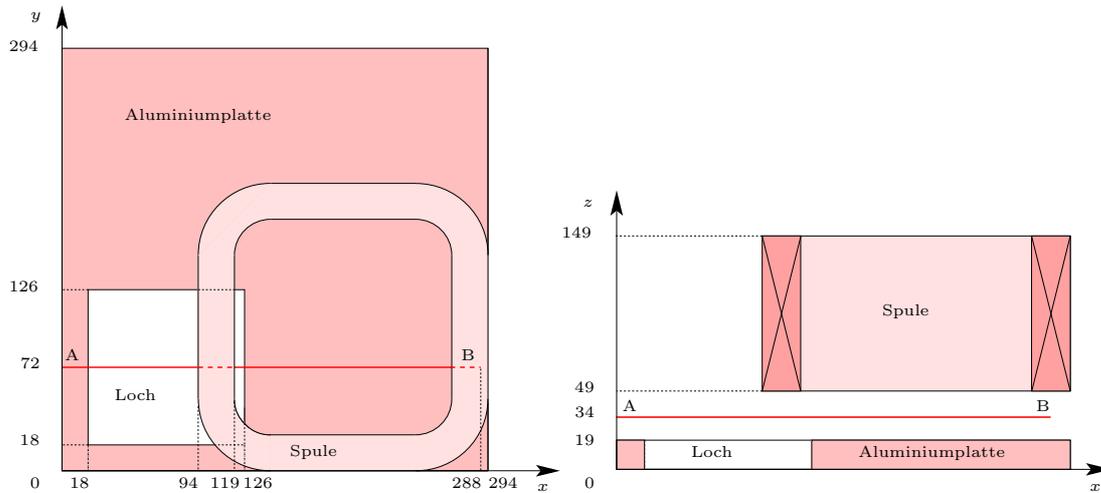


Abb. 4.20: TEAM 7 Benchmark Problem

Erregungsstromdichte nicht konstant über dem Spulenquerschnitt ist. Allerdings ist dieser zu vernachlässigen, da die Radien der Erregerspule hinreichend groß sind.

Die Grobgittertriangulierung \mathcal{T}_0 ist in Abb. 4.21 zu sehen. Um eine Gitterhierarchie zu generieren, wird \mathcal{T}_0 uniform verfeinert. Die Gitterstufen $l > 1$ werden adaptiv (Algorithmus 4.8) durch wiederholtes Rechnen und Verfeinern mit Hilfe des residuenbasierten Fehlerschätzers erzeugt. Zusätzlich wird bei jedem adaptiven Schritt entlang der Strecke \overline{AB} in Abb. 4.20 verfeinert. Auf diese Weise werden Triangulierungen bis Stufe 5 erzeugt.

Für die Lösung der linearen Gleichungssysteme wird als äußere Iteration das BiCGStab-Verfahren verwendet. Als Vorkonditionierer dient ein lokales V(1,1)-Mehrgitterverfahren mit hybriden, einfachen Gauß-Seidel-Glättungsschritten. Zusätzlich wurde nach jeder Mehrgitteriteration eine Iteration des Projektionsalgorithmus 4.7 ausgeführt. Für die Projektionsiteration auf dem Poisson-Problem wird ebenfalls ein V(1,1)-MG-Zyklus eingesetzt. Die Projektion erfordert in diesem Fall die a priori-Berechnung eines Dirichlet-Vektorfeldes.

Als Grobgitterlöser verwenden wir eine konstante Anzahl von Iterationen des hybriden Glätters. Ein Vergleich mit einem direkten Löser, der auf ein regularisiertes Gleichungssystem angewendet wird, zeigt dabei keinen Unterschied im Konvergenzverhalten. Wegen des deutlich niedrigeren Zeitaufwandes haben wir das iterative Verfahren bevorzugt.

Tabelle 4.16 zeigt, daß die Anzahl der Iterationen praktisch konstant bleibt während des adaptiven Verfeinerungsprozesses. Demzufolge funktioniert das Mehrgitterverfahren ausgezeichnet bei dem Benchmark Problem.

Das aus der Lösung auf Stufe 5 berechnete magnetische Feld entlang der Strecke \overline{AB} ist in Abb. 4.22 aufgetragen und zeigt eine gute Übereinstimmung mit den eingetragenen Meßwerten. In Abb. 4.23 ist der Realteil der induzierten Stromdichte in der Mitte der Aluminiumplatte dargestellt. Abbildung 4.24 zeigt das Magnetfeld entlang eines Schnittes

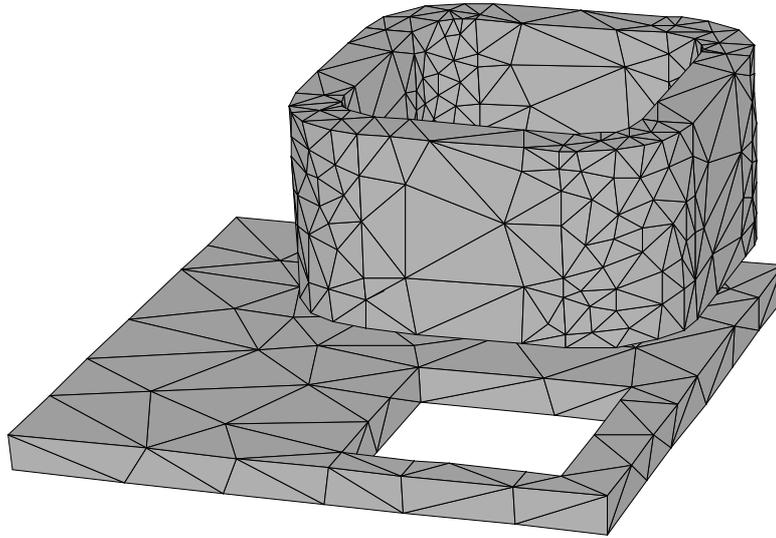


Abb. 4.21: Triangulierung \mathcal{T}_0 des TEAM 7 Benchmark Problems. Das Gitter des umgebenden Luftbereiches ist nicht dargestellt.

L	0	1	2	3	4	5
$N_{\mathcal{T}}$	$5.6 \cdot 10^3$	$4.5 \cdot 10^4$	$7.2 \cdot 10^4$	$8.0 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^5$	$3.8 \cdot 10^5$
$N_{\mathcal{E}}$	$6.7 \cdot 10^3$	$5.3 \cdot 10^4$	$8.8 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^5$	$2.0 \cdot 10^5$	$4.7 \cdot 10^5$
#Iterationen	—	15	15	16	15	16

Tab. 4.16: Anzahl der Iterationen des durch einen V(1,1)-MG-Zyklus vorkonditionierten BiCGStab-Verfahrens für eine Defektreduktion um den Faktor 10^8 . Zusätzlich ist die Anzahl der Tetraeder $N_{\mathcal{T}}$ und die Anzahl der Kanten $N_{\mathcal{E}}$ von \mathcal{T}_L angegeben.

von einer weiteren Rechnung ohne die zusätzliche Verfeinerung entlang der vorgegebenen Strecke \overline{AB} . Das dort abgebildete Gitter zeigt die lokale Verfeinerung. Insbesondere sieht man, daß der Bereich der Erregerspule stark verfeinert ist.

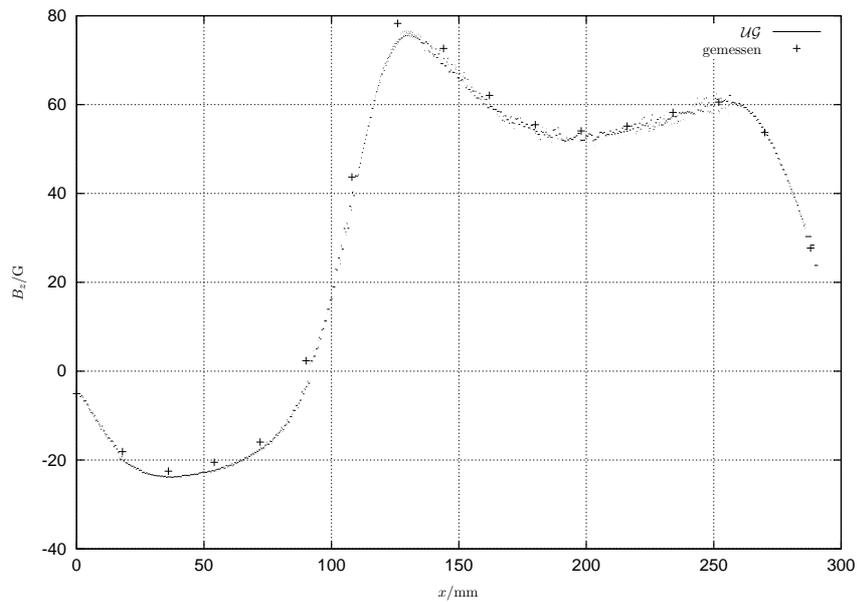


Abb. 4.22: Verifikation mit den Meßwerten des TEAM 7 Benchmark Problems: $\text{sign}(\text{Re } B_z)|B_z|$ entlang der Strecke \overline{AB} in Abb. 4.20. Man beachte, daß das berechnete \mathbf{B} stückweise konstant ist und das Gitter \mathcal{T}_5 sehr fein entlang der Strecke ist.

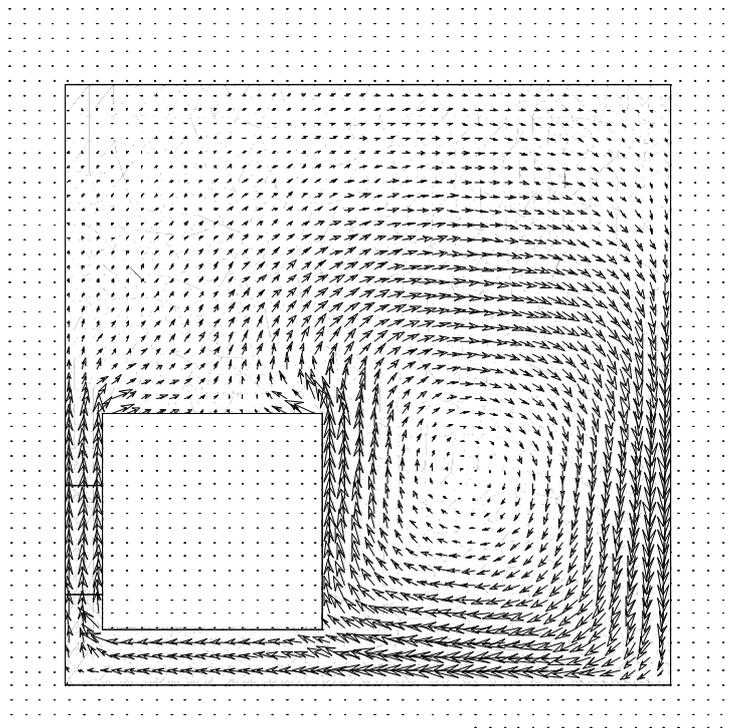
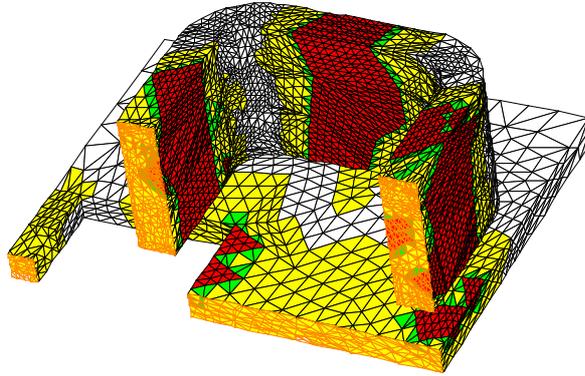
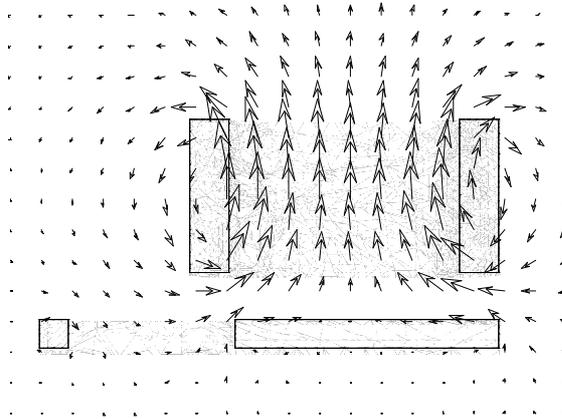


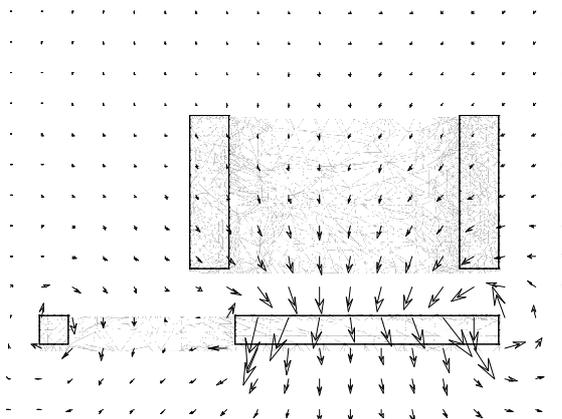
Abb. 4.23: $\text{Re } \mathbf{J}$ entlang der Platte des TEAM 7 Benchmark Problems.



(a) Schnittebene, Gitter ohne Verfeinerung entlang \overline{AB}



(b) $\text{Re } \mathbf{H}$



(c) $\text{Im } \mathbf{H}$

Abb. 4.24: Gitter und Magnetfeld entlang eines Schnittes des TEAM 7 Benchmark Problems

4.5.2 Gasisolierte Schaltanlage

Bei der folgenden Anwendung handelt es sich um eine gasisolierte Schaltanlage. Anlagen dieser Art stellen Knotenpunkte in Energiesystemen dar und dienen zum Schalten großer Leistungen. In Abb. 4.25 ist das CAD-Modell eines Prototyps von ABB Calor Emag¹⁷ zu sehen. Die gasisolierte Schaltanlage, im weiteren kurz „GIS“ genannt, besteht im wesentlichen aus einem Aluminium-Gehäuse (in Abb. 4.25 teilweise weggelassen, um das Innere zu erkennen) und drei Leiterstrukturen. Der vertikale Teil ist beweglich, was für die Berechnung allerdings irrelevant ist, da wir nur den geschlossenen Zustand betrachten. Als Isoliergas wird SF₆ verwendet. Auch das spielt im Rahmen der Wirbelstromberechnung keine Rolle. Berechnet werden die Stromverteilungen und magnetischen Felder. Aus diesen können bei Bedarf Leiterkräfte und Erwärmung berechnet werden, wovon wir hier jedoch absehen.

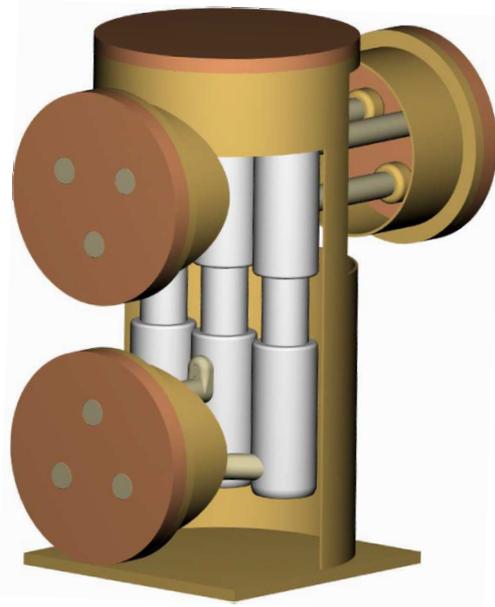


Abb. 4.25: CAD-Modell der gasisolierten Schaltanlage

Die Leitfähigkeit der inneren Leiterstruktur ist temperaturabhängig und beträgt $26\text{--}32 \cdot 10^6 \text{ S/m}$. Für die Berechnung verwenden wir den Mittelwert. Die Gehäusewand wird vereinfachend als idealeitend angenommen, so daß wir ein Innenraumproblem mit der Randbedingung $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ an der Gehäuseinnenwand erhalten.

Simuliert wird ein zeitharmonischer Strom von 4000 A bei 50 Hz in jedem Leiter, wobei die Leiterströme untereinander eine Phasenverschiebung von $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ haben (Drehstrom). Anders als bei dem TEAM 7 Benchmark handelt es sich hier also nicht um induzierte Wirbelströme, sondern um sogenannte „eingepreßte“, da der Gesamtstrom in jedem Leiter fest vorgegeben ist. Die Anregung wird durch kleine zylinderförmige Stromquellen an den Leiterenden realisiert. Deren Radius stimmt mit denen der Leiter überein.

¹⁷ ABB Calor Emag Hochspannung GmbH, Hanau-Grossauheim, <http://www.abb.com>

Die Stromquellen werden wieder a priori berechnet und bestehen aus \mathcal{T}_h -schwach divergenzfreien Gradientenfeldern.

Die Herausforderung dieses Problems besteht in der relativ komplizierten Geometrie, die auf ein schon relativ großes Grobgitterproblem führt. Zunächst verwenden wir ein vereinfachtes Modell, das nur den mittleren Leitungspfad enthält.

Vereinfachtes GIS-Modell mit nur einem Leitungspfad

Die Gittergenerierung und CAD-Bearbeitung geschieht wieder mit den anfangs genannten kommerziellen Programmen. Die Anfangstriangulierung (siehe Abb. 4.26) wird zunächst einmal uniform verfeinert. Unter Anwendung von Algorithmus 4.8 wird dann eine adaptive Berechnung durchgeführt. Diese erzeugt zwei weitere Gitterstufen, die feinste Triangulierung ist ebenfalls in Abb. 4.26 zu sehen.

Weiterhin ist in den Abbildungen 4.27—4.29 die Gitterhierarchie dargestellt. Da es sich um lokale Gitter handelt, decken diese nicht das ganze Rechengebiet ab. Bei einem Vergleich mit der nachfolgenden Lösung sieht man eine deutliche Zunahme der Elemente im Bereich hoher Stromkonzentrationen. Man erkennt schon an den entstandenen Gittern eine deutliche Ausprägung des Skineffektes.

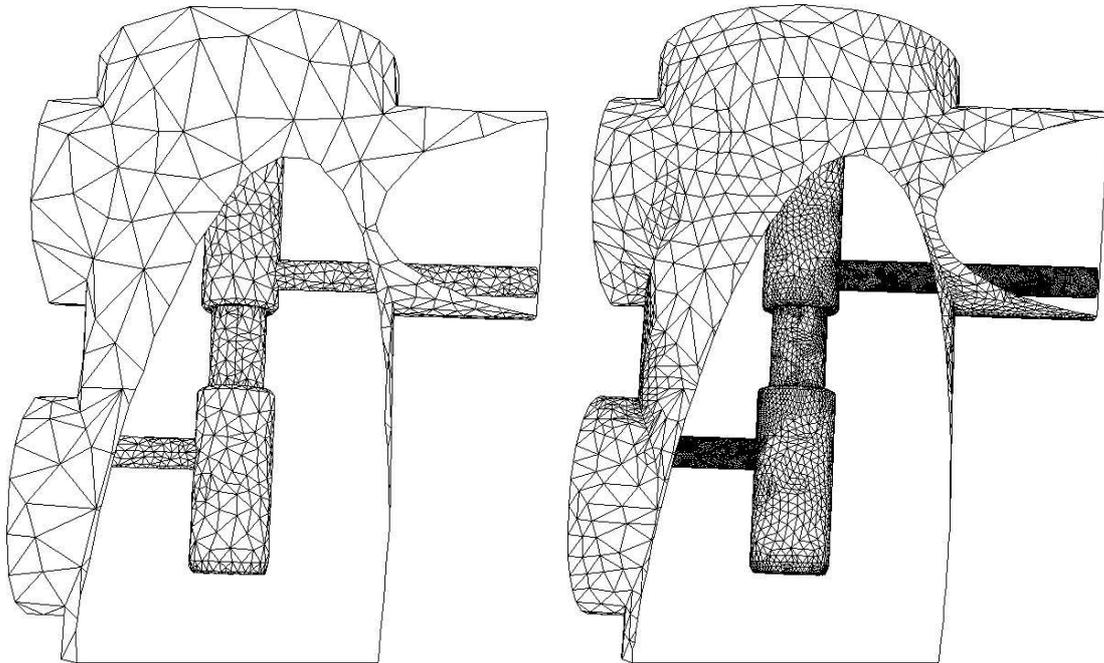
Für die Lösung der linearen Gleichungssysteme verwenden wir hier ein $V(2,2)$ -Mehrgitterverfahren mit hybriden, symmetrischen Gauß-Seidel-Glättungen. Das BiCGStab-Verfahren wird als Grobgitterlöser eingesetzt und reduziert den Defekt auf Stufe 0 bei jedem Aufruf um den Faktor 10^4 . Tabelle 4.17 zeigt die mittleren gemessenen Konvergenzraten des MG-Verfahrens. Die Anzahl der Kanten auf der feinsten Gitterstufe beträgt $7.8 \cdot 10^5$, so daß das zuletzt gelöste System ca. 1.5 Millionen reelle Unbekannte hat.

L	0	1	2	3
$N_{\mathcal{T}}$	$2.5 \cdot 10^4$	$2.0 \cdot 10^5$	$3.1 \cdot 10^5$	$6.3 \cdot 10^5$
$N_{\mathcal{E}}$	$3.0 \cdot 10^4$	$2.4 \cdot 10^5$	$3.8 \cdot 10^5$	$7.8 \cdot 10^5$
$\bar{\rho}_L^{(m)}$	—	0.44	0.66	0.66

Tab. 4.17: Gemessene mittlere Konvergenzraten des vereinfachten GIS-Modells

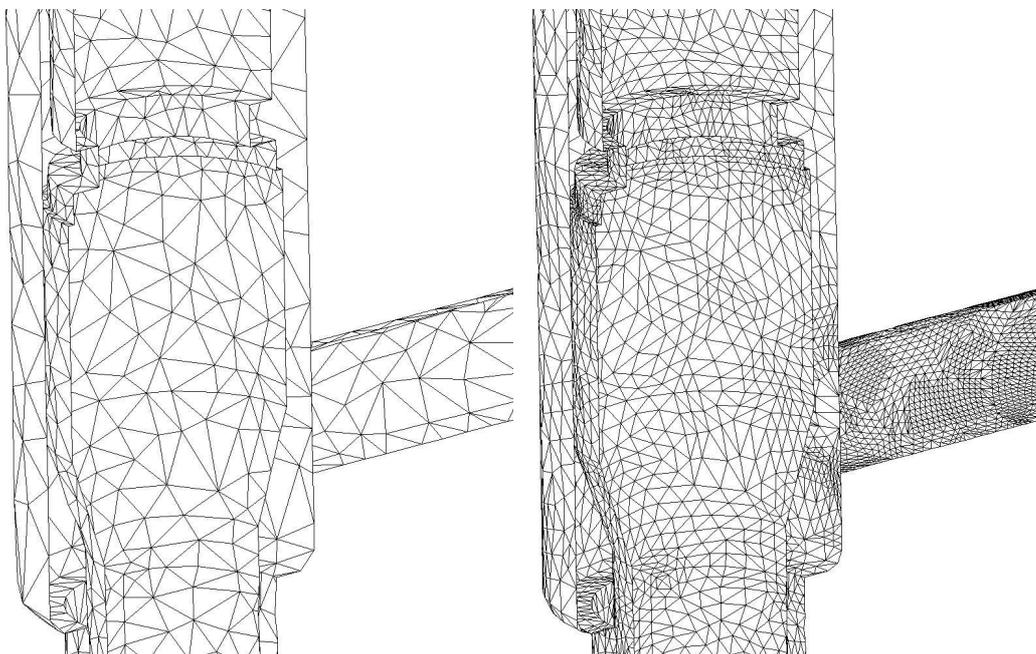
Der Betrag des Magnetfeldes und der Stromdichte ist in Abb. 4.30 längs des Leiters zu sehen. Man erkennt deutlich den Skineffekt. Zum Zeitpunkt $\omega t = \frac{3\pi}{2}$ ist der Gesamtstrom durch den Leiter Null. Man erkennt aber, daß der Leiter zu diesem Zeitpunkt dennoch nicht stromfrei ist — der Strom fließt außen in die eine und innen in die andere Richtung. Der Richtungswechsel geschieht am Ort der Stromquelle (in der Abbildung am rechten Leiterende zu sehen), die nichtleitend ist. Das Magnetfeld ist zu diesem Zeitpunkt auf das Leiterinnere beschränkt.

In Abb. 4.31 ist das Magnetfeld entlang verschiedener Schnitte durch das Modell dargestellt. Die Farben der Vektoren haben dabei folgende Bedeutung: Grün bedeutet in der Schnittebene liegend, blau zeigt in die Schnittebene hinein, rot heraus.



(a) Stufe 0

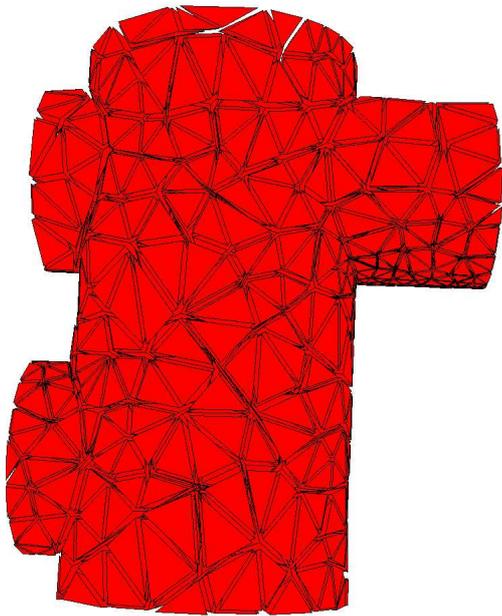
(b) Stufe 3



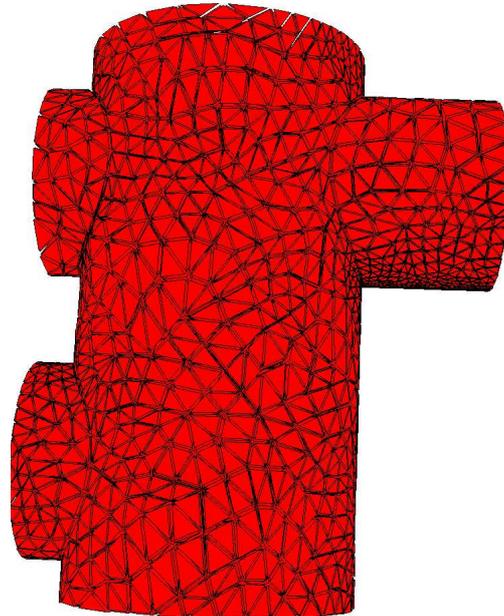
(c) Stufe 0, vergrößerter Ausschnitt

(d) Stufe 3, vergrößerter Ausschnitt

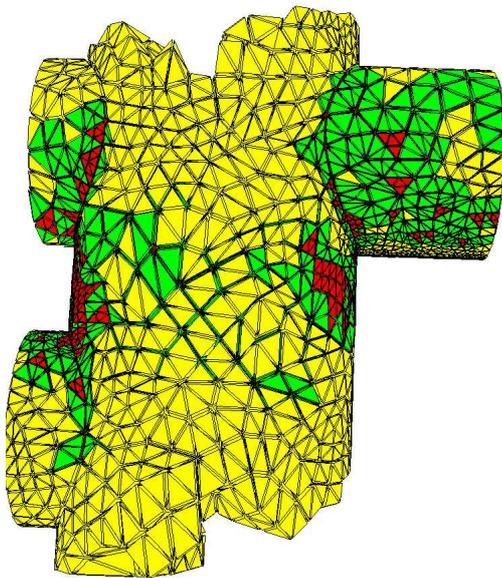
Abb. 4.26: Vereinfachte GIS-Anlage, Schnitt durch Oberflächengitter auf Stufe 0 und 3.



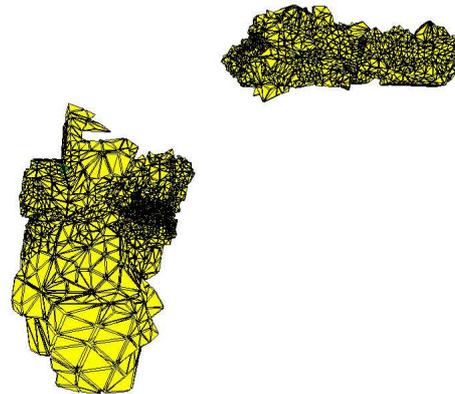
(a) Gitter auf Stufe 0



(b) Gitter auf Stufe 1

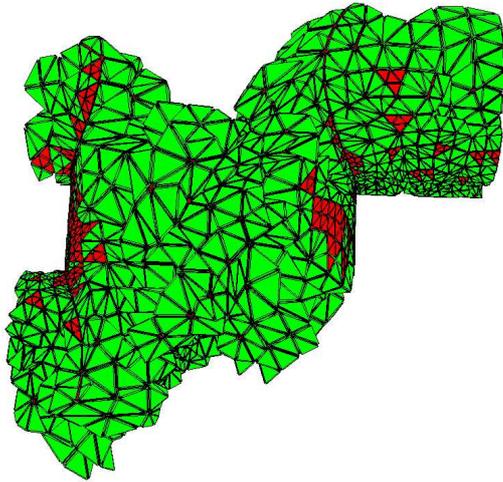


(c) lokales Gitter auf Stufe 2

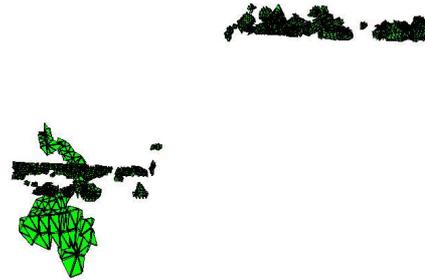


(d) lokales Gitter auf Stufe 3

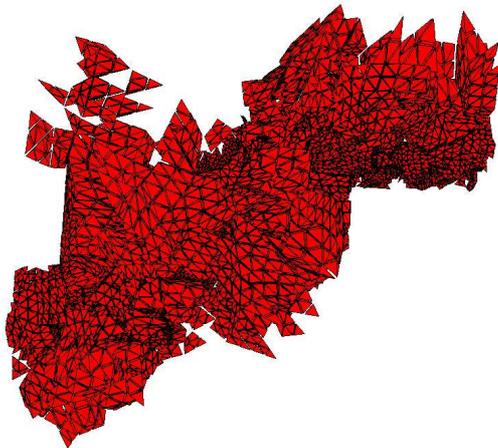
Abb. 4.27: Vereinfachte GIS-Anlage, Gitter von Stufe 0 bis 3. Von Stufe 0 zu Stufe 1 wurde uniform verfeinert, danach lokal. Regulär verfeinerte Elemente sind rot, Abschlußelemente grün, Kopielemente gelb.



(a) verfeinerte Elemente auf Stufe 2



(b) verfeinerte Elemente auf Stufe 3



(c) regulär verfeinerte Elemente auf Stufe 2



(d) regulär verfeinerte Elemente auf Stufe 3

Abb. 4.28: Vereinfachte GIS-Anlage, lokale Gitter auf Stufe 2 und 3 ohne Kopielemente (nur verfeinerte Elemente). Regulär verfeinerte Elemente sind rot, Abschlüsselemente sind grün.

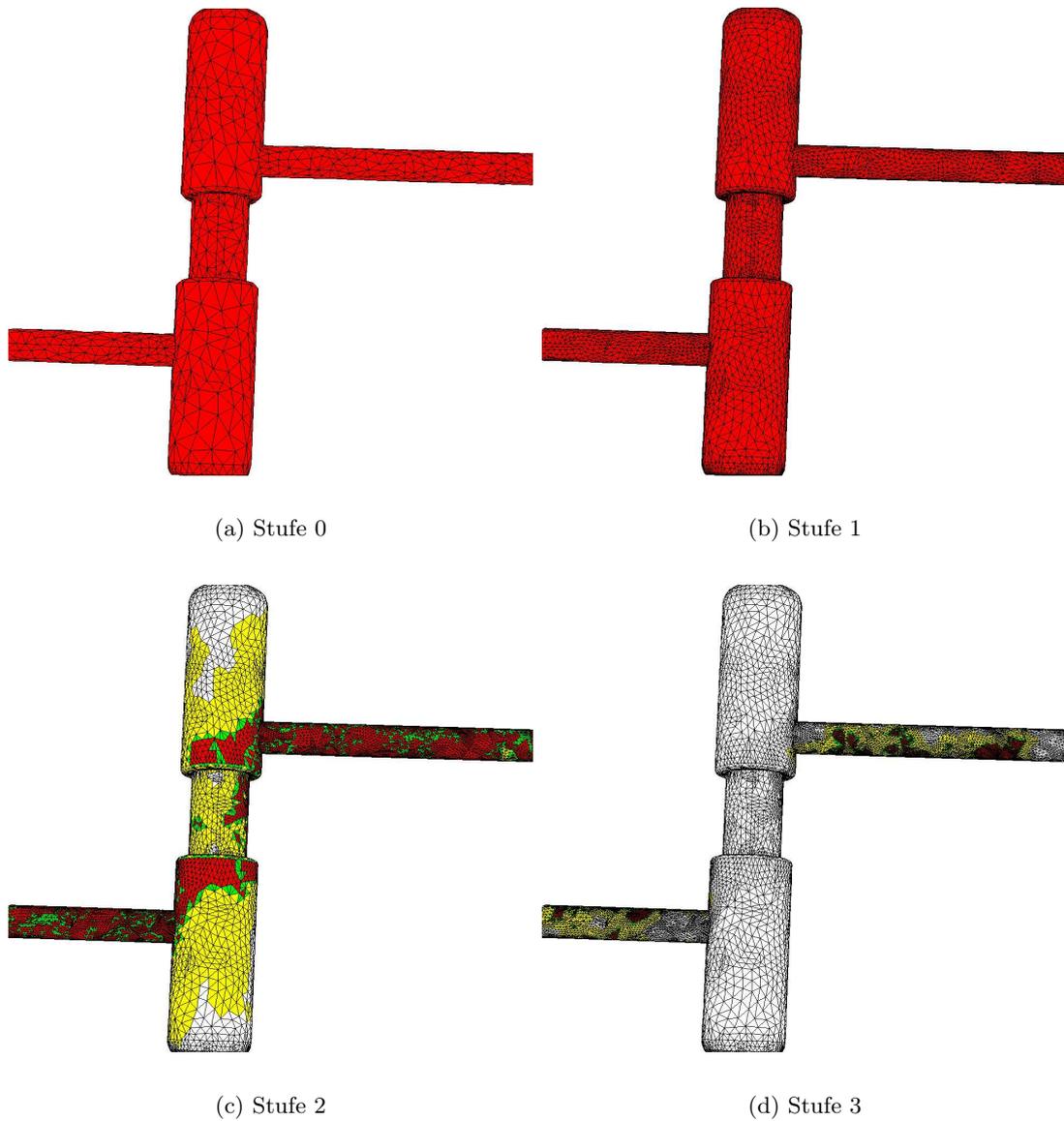


Abb. 4.29: Vereinfachte GIS-Anlage, Gitter des Leiters auf Stufe 0 bis Stufe 3. Die weißen Elemente sind nicht Teil der lokalen Gitter auf der jeweiligen Stufe.

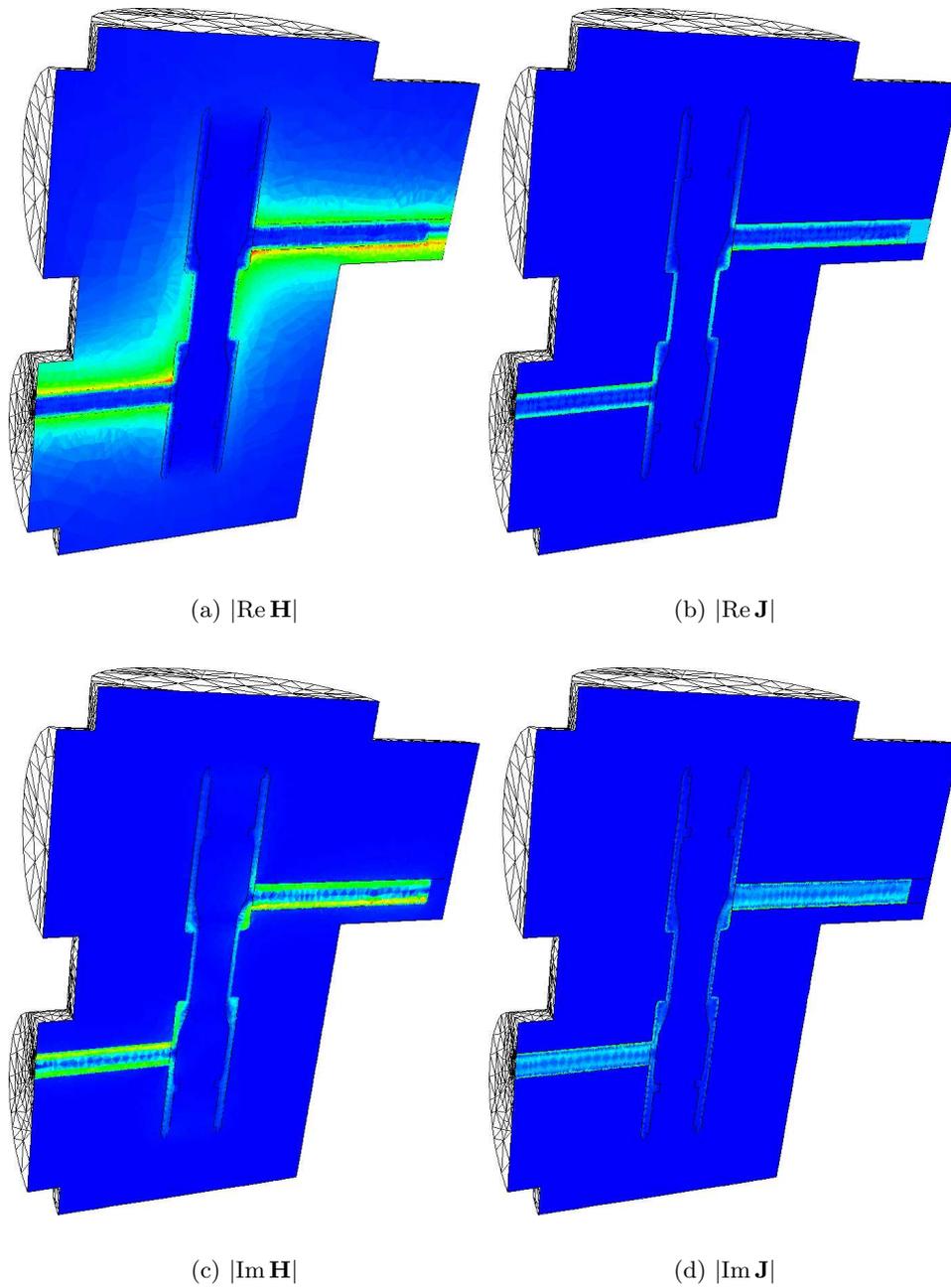
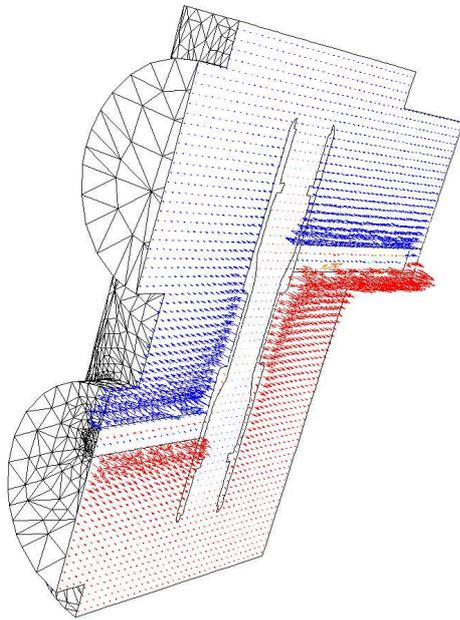
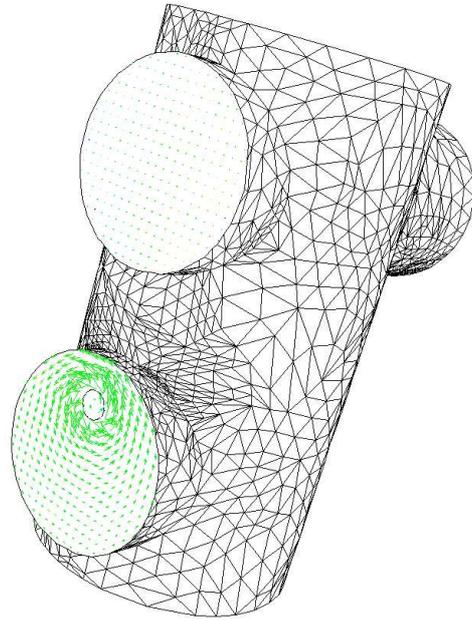


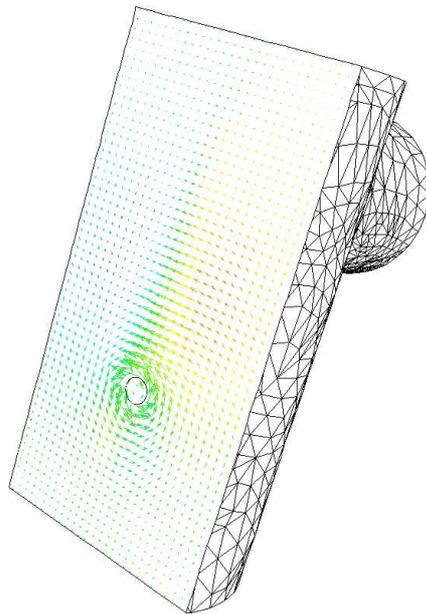
Abb. 4.30: Vereinfachte GIS-Anlage, Betrag des Magnetfeldes und der Stromdichte zum Zeitpunkt $\omega t = 0$ (oben) und $\omega t = \frac{3\pi}{2}$ (unten).



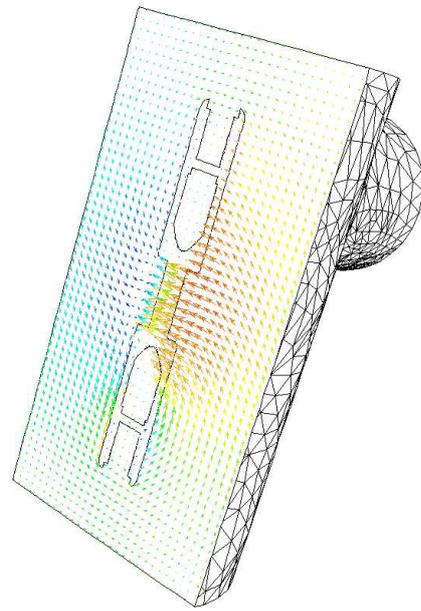
(a)



(b)



(c)



(d)

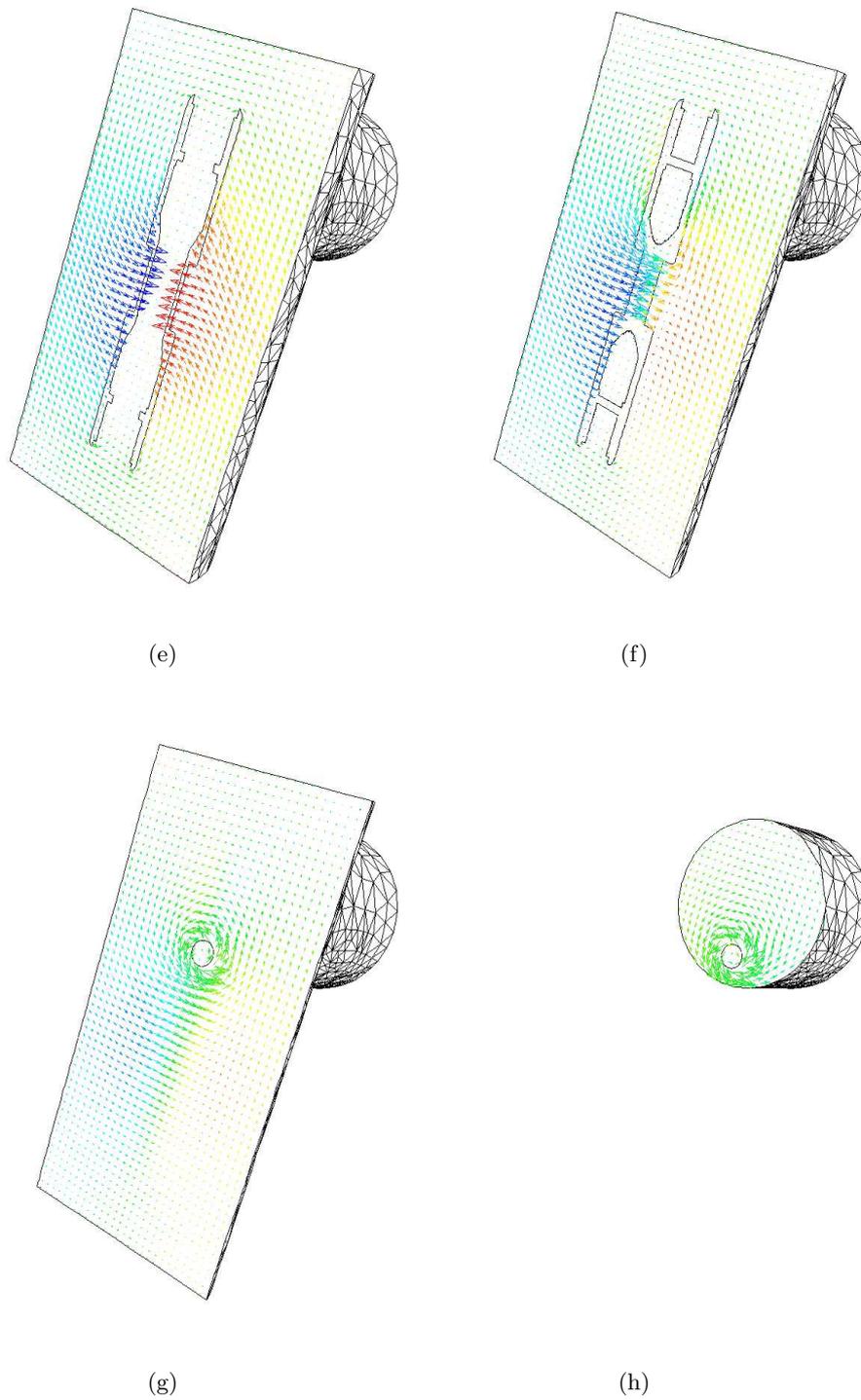


Abb. 4.31: Das Magnetfeld zum Zeitpunkt $\omega t = 0$ entlang von Schnitten durch die vereinfachte GIS-Anlage.

Vollständiges GIS-Modell

Wir berechnen jetzt das vollständige GIS-Modell mit allen drei Leitungspfaden. Da die Anzahl der notwendigen Gitterpunkte der Anfangstriangulierung bei dem vereinfachten GIS-Modell im wesentlichen durch die komplizierte Struktur des Leiters bestimmt wurde, ist es nicht verwunderlich, daß wir jetzt ein etwa dreimal so großes Grobgitter (siehe Abb. 4.32) erhalten. Ansonsten verfahren wir wie bei der Berechnung des vereinfachten GIS-Modells.

Nach einer uniformen Verfeinerung gelingt nur noch ein adaptiver Schritt, da wir dann an Speichergrenzen stoßen (2 GB). Das feinste Gitterlevel ist Stufe 2 und umfaßt 1.8 Millionen Unbekannte. Die Gitterhierarchie ist in den Abbildungen 4.33– 4.35 dargestellt.

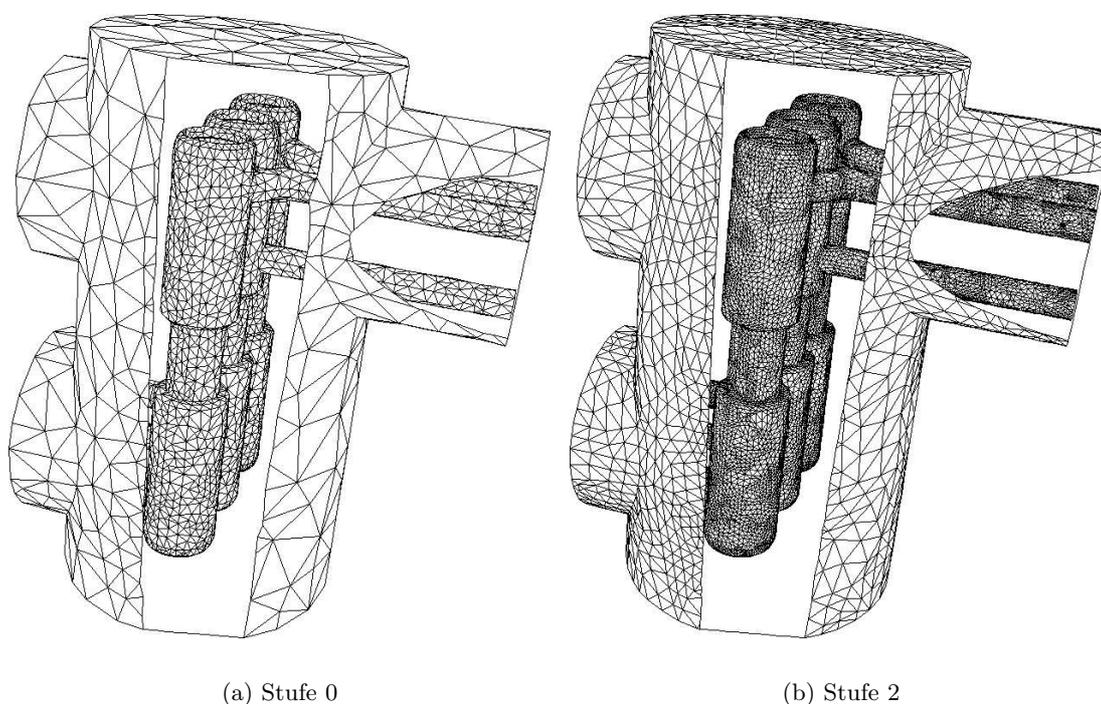


Abb. 4.32: Vollständige GIS-Anlage, Schnitt durch Oberflächengitter auf Stufe 0 und 2.

Die gemessenen Mehrgitterkonvergenzraten sind hier jedoch nicht gut, Tab. 4.18. Während die Konvergenz des Zweigitterverfahrens sogar etwas besser als bei dem vereinfachten GIS-Modell ist, verschlechtert diese sich nach der adaptiven Verfeinerung erheblich.

Die Ursache dafür ist eine deutliche Verschlechterung der Elementwinkel, bedingt durch die Projektion der neuen Knoten auf den Gebietsrand (sukzessive Gebietsapproximation). Während man bei trivialen Testgeometrien das Anfangsgitter leicht so konstruieren kann, daß eine zunehmende Winkelverschlechterung nicht auftritt, vgl. Anhang B, ist

L	0	1	2
$N_{\mathcal{T}}$	$7.8 \cdot 10^4$	$6.3 \cdot 10^5$	$7.5 \cdot 10^5$
$N_{\mathcal{E}}$	$9.3 \cdot 10^4$	$7.4 \cdot 10^5$	$9.0 \cdot 10^5$
$\bar{\rho}_L^{(m)}$	—	0.58	0.78

Tab. 4.18: Gemessene mittlere Konvergenzraten des V(2,2)-MG-Verfahrens für das GIS-Modell

L	0	1	2
$\bar{\rho}_L^{(m)}$	—	0.58	0.59

Tab. 4.19: Gemessene mittlere Konvergenzraten des GIS-Modells ohne Randprojektion

dies bei realen technischen Geometrien und automatischer Gittergenerierung sehr schwierig. Ohne die Projektion auf die tatsächliche Geometrie ergeben sich die Konvergenzraten in Tab. 4.19, die besser sind als bei dem vereinfachten Modell.

Abbildungen 4.36–4.41 zeigen das Magnetfeld. Bei den Vektordarstellungen gilt wieder, daß grüne Pfeile in der Schnittebene liegen, blaue hineinzeigen und rote heraus. In den Abbildungen 4.42 und 4.43 ist der Betrag der Stromdichte zu sehen, man sieht wieder deutlich den Skinneffekt. Ein Vergleich mit Meßwerten ist bei diesem Modell leider nicht möglich, da entsprechende Daten nicht vorliegen. Es ist auch deutlich zu erkennen, daß der Skinneffekt noch deutlich besser aufgelöst werden müßte.

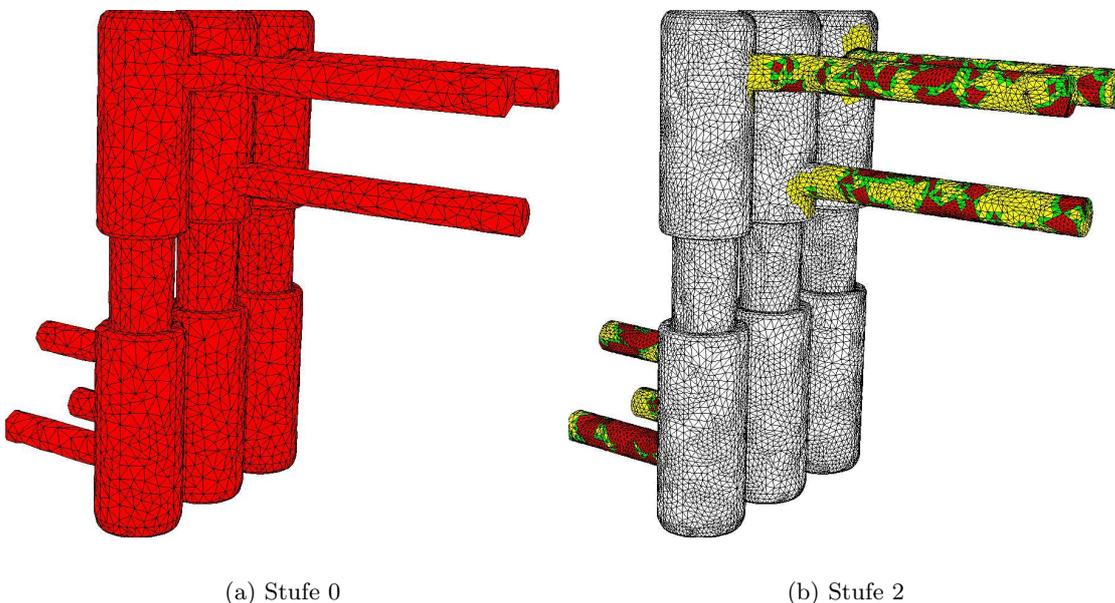
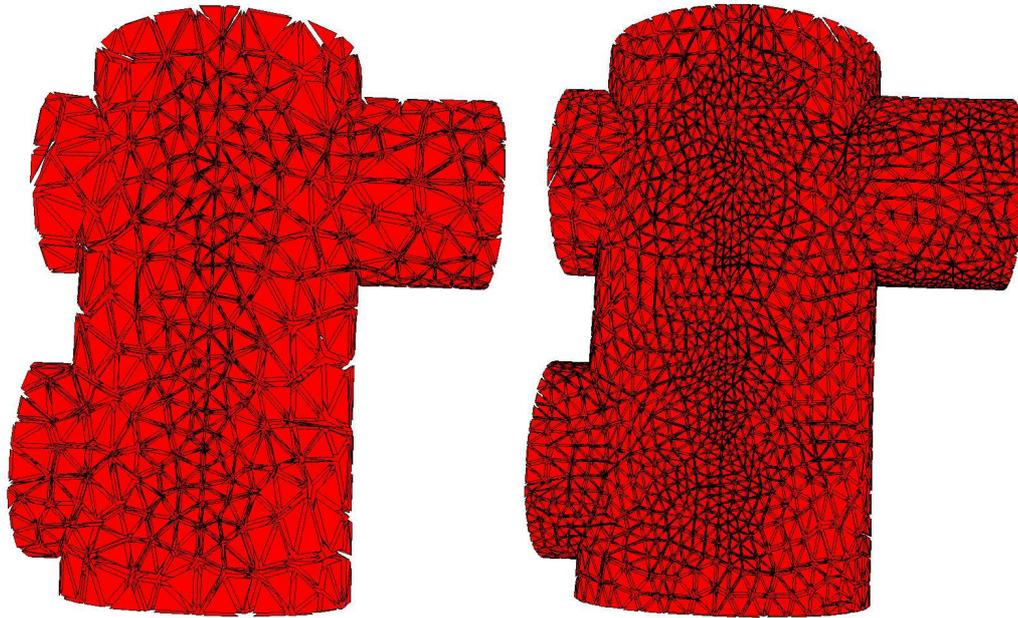
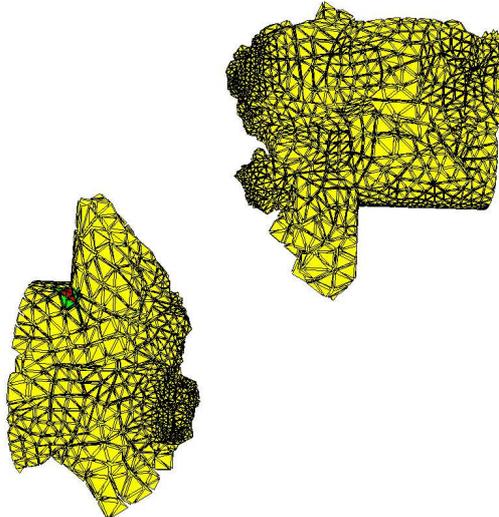


Abb. 4.33: Vollständige GIS-Anlage, Gitter der Leiter auf Stufe 0 bis Stufe 2. Die weißen Elemente sind nicht Teil der lokalen Gitter.



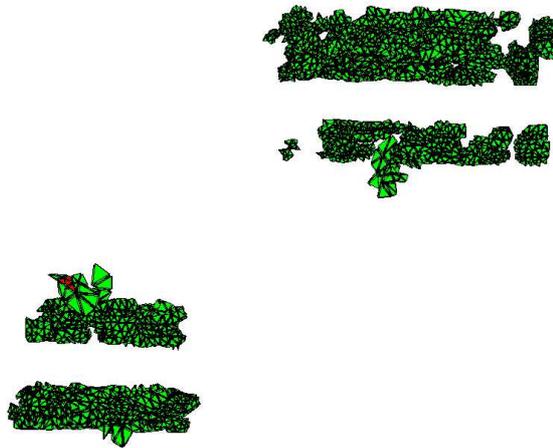
(a) Gitter auf Stufe 0

(b) Gitter auf Stufe 1



(c) lokales Gitter auf Stufe 2

Abb. 4.34: Vollständige GIS-Anlage, Gitter von Stufe 0 bis 2. Von Stufe 0 zu Stufe 1 wurde uniform verfeinert, danach lokal. Regulär verfeinerte Elemente sind rot, Abschlußelemente grün, Kopieelemente gelb.

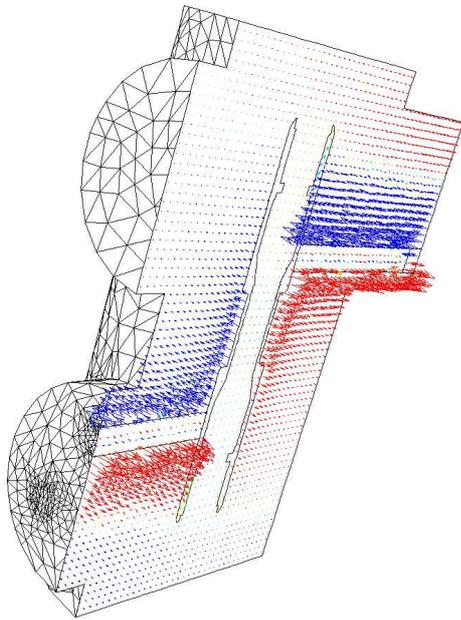


(a) verfeinerte Elemente auf Stufe 2

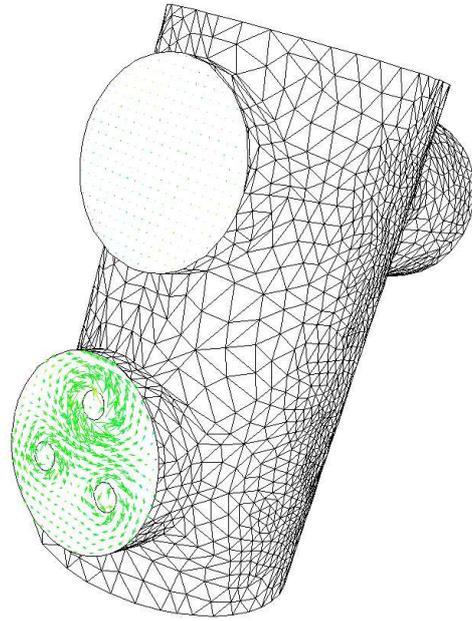


(b) regulär verfeinerte Elemente auf Stufe 2

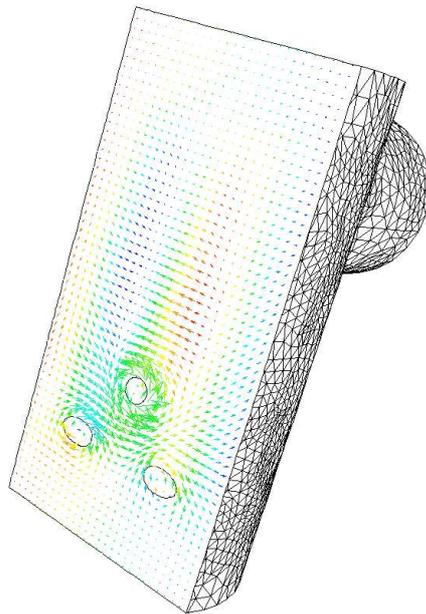
Abb. 4.35: Vollständige GIS-Anlage, lokale Gitter auf Stufe 2 und 3 ohne Kopieelemente (nur verfeinerte Elemente). Regulär verfeinerte Elemente sind rot, Abschlußelemente sind grün.



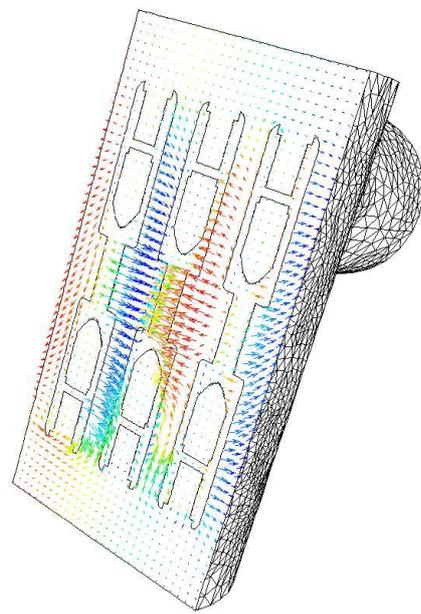
(a)



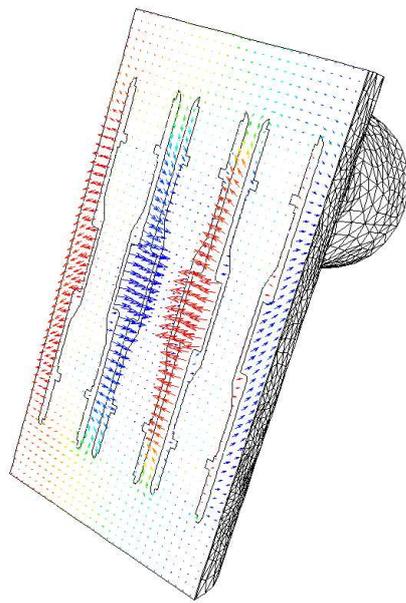
(b)



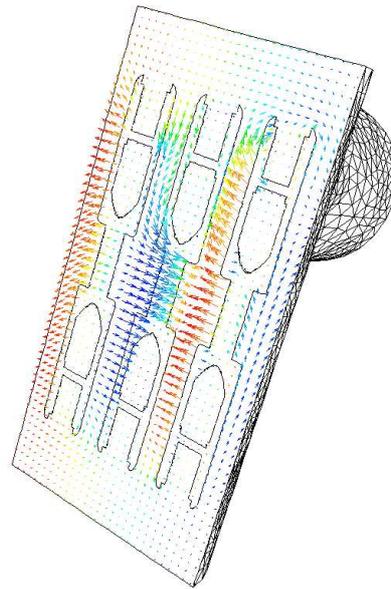
(c)



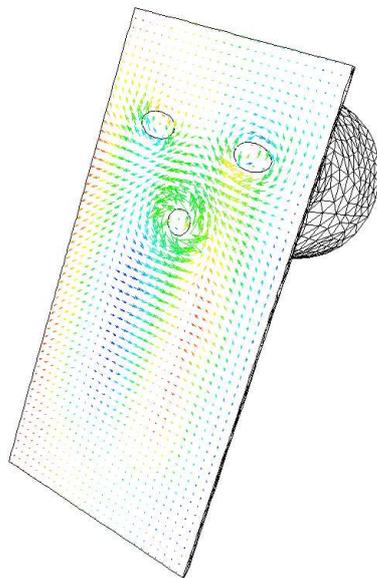
(d)



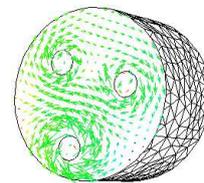
(e)



(f)

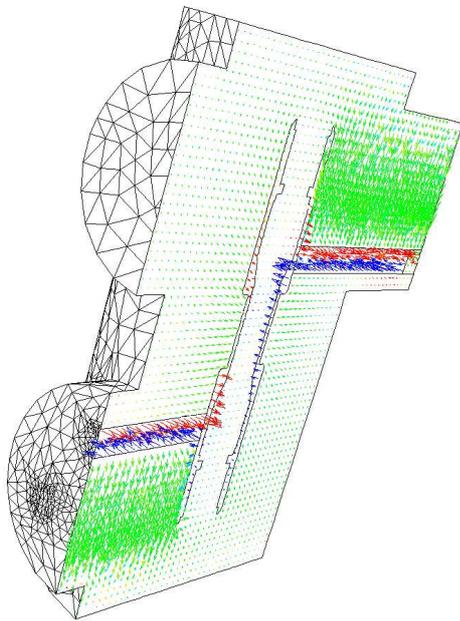


(g)

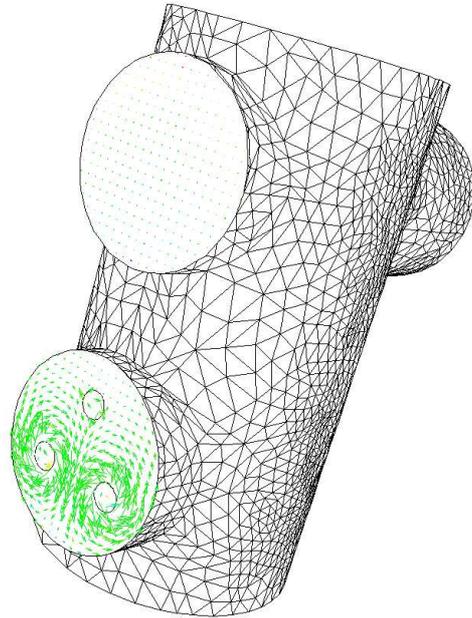


(h)

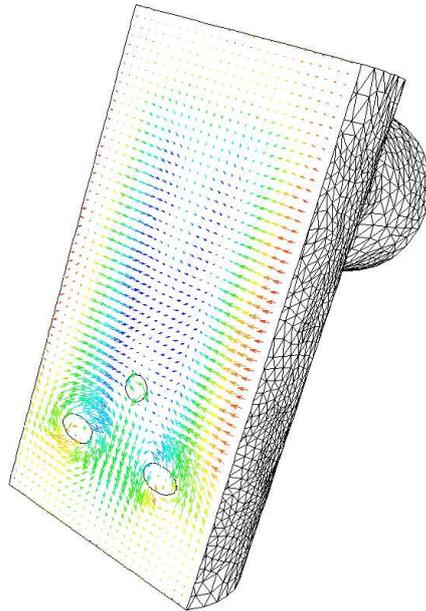
Abb. 4.36: Das Magnetfeld zum Zeitpunkt $\omega t = 0$ entlang von Schnitten durch die vollständige GIS-Anlage.



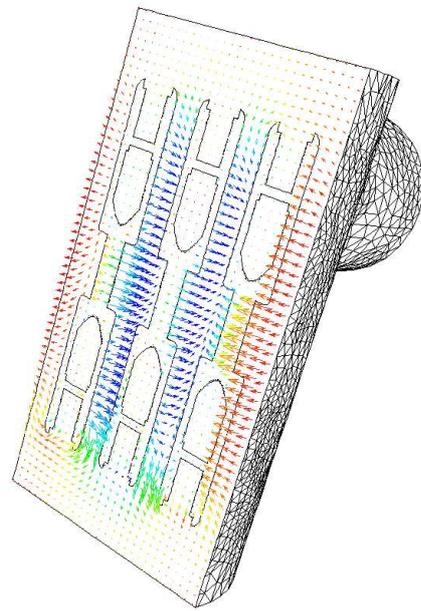
(a)



(b)



(c)



(d)

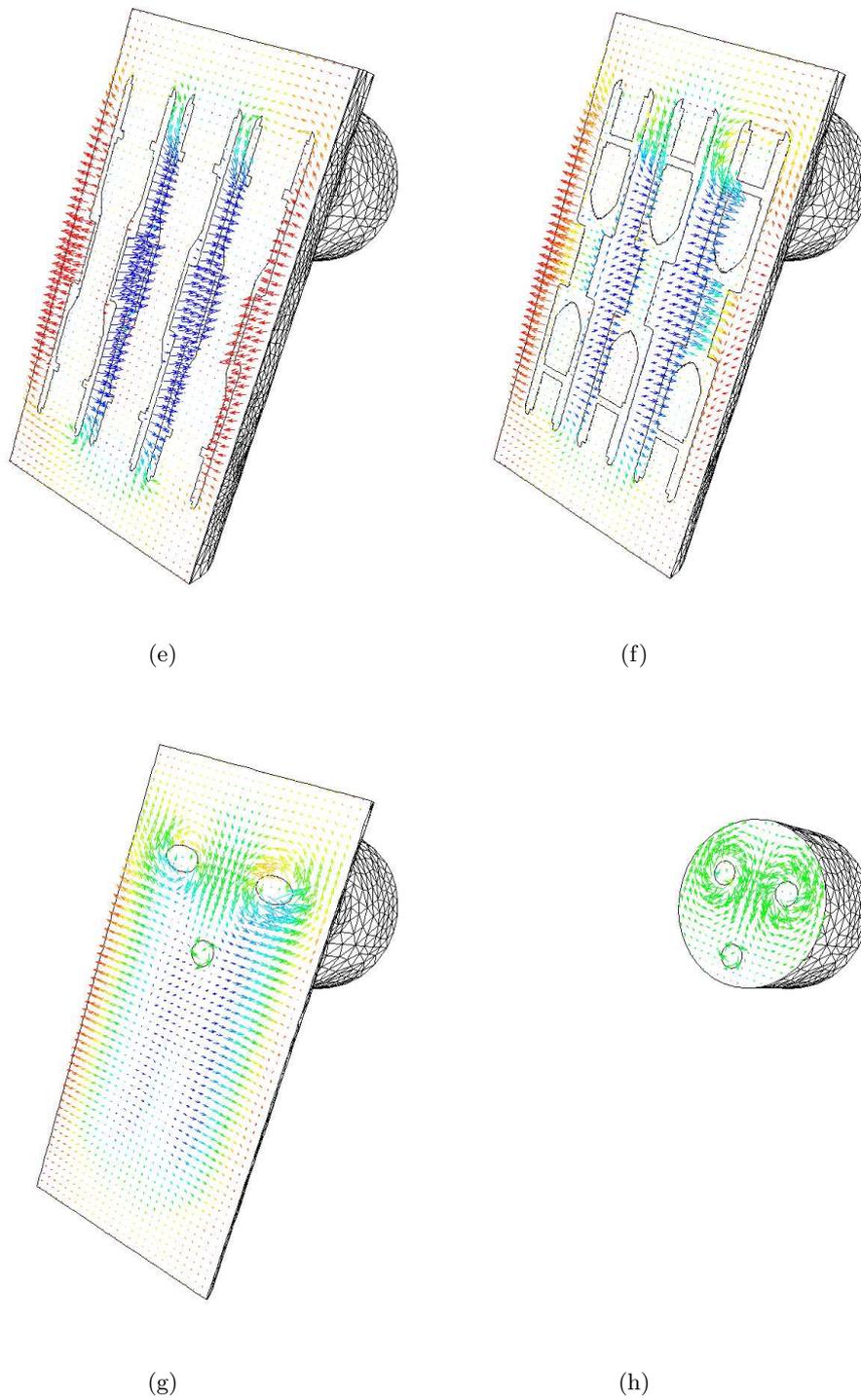


Abb. 4.37: Das Magnetfeld zum Zeitpunkt $\omega t = \frac{3\pi}{2}$ entlang von Schnitten durch die vollständige GIS-Anlage.

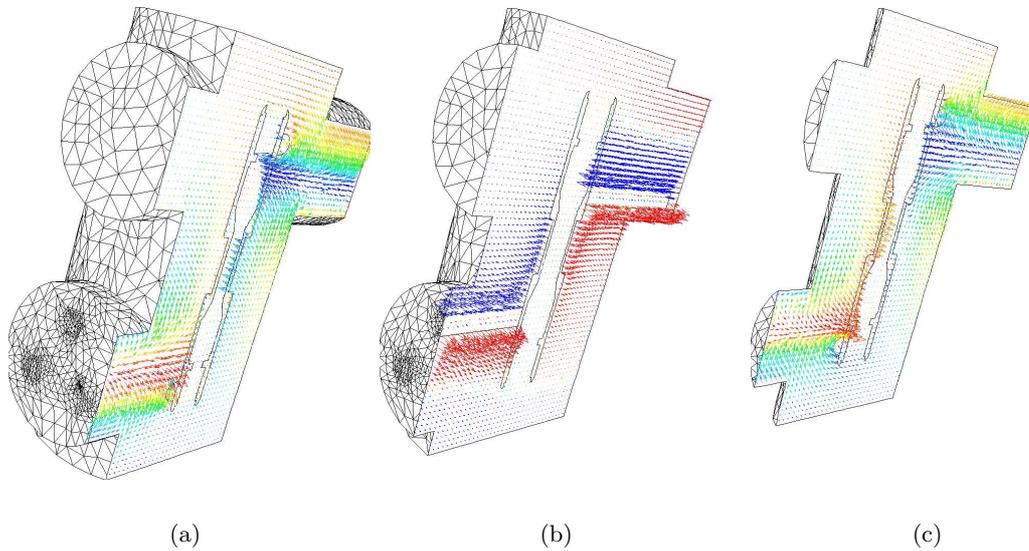


Abb. 4.38: Das Magnetfeld zum Zeitpunkt $\omega t = 0$ auf Schnitten entlang der Leiter der vollständigen GIS-Anlage.

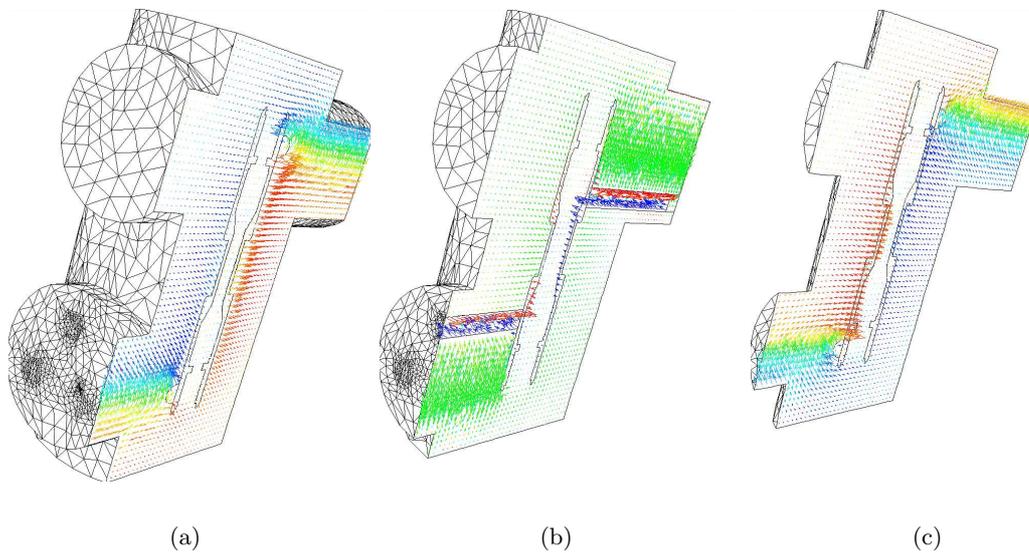


Abb. 4.39: Das Magnetfeld zum Zeitpunkt $\omega t = \frac{3\pi}{2}$ entlang auf Schnitten entlang der Leiter der vollständigen GIS-Anlage.

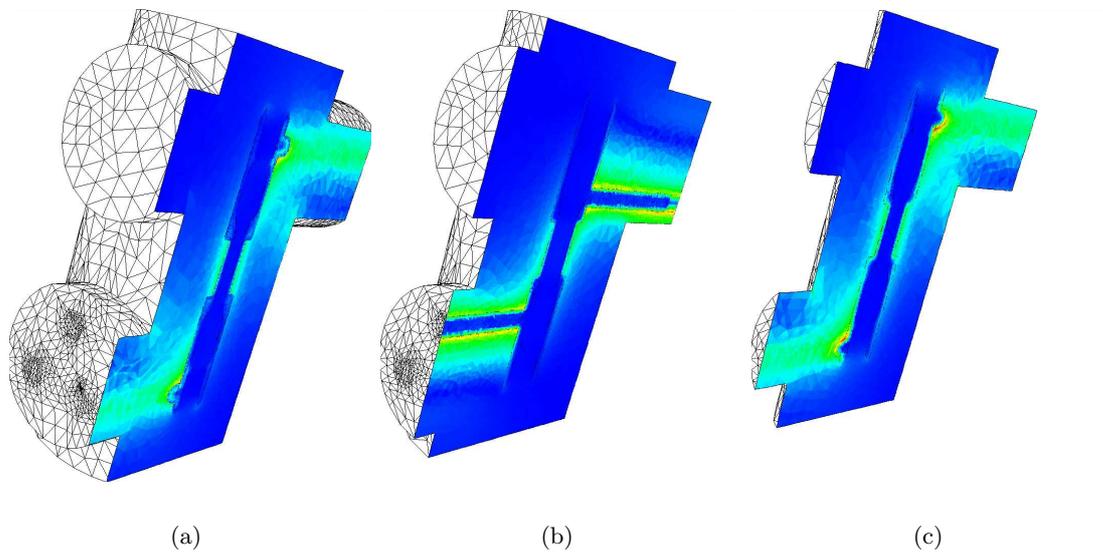


Abb. 4.40: Betrag des Magnetfeldes zum Zeitpunkt $\omega t = 0$ auf Schnitten entlang der Leiter der vollständigen GIS-Anlage.

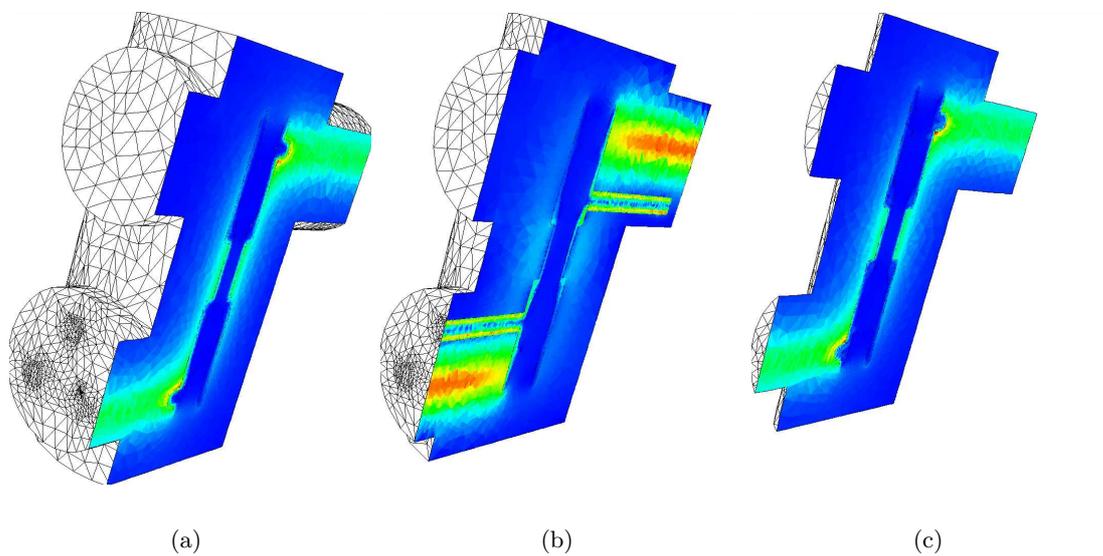


Abb. 4.41: Betrag des Magnetfeldes zum Zeitpunkt $\omega t = \frac{3\pi}{2}$ auf Schnitten entlang der Leiter der vollständigen GIS-Anlage.

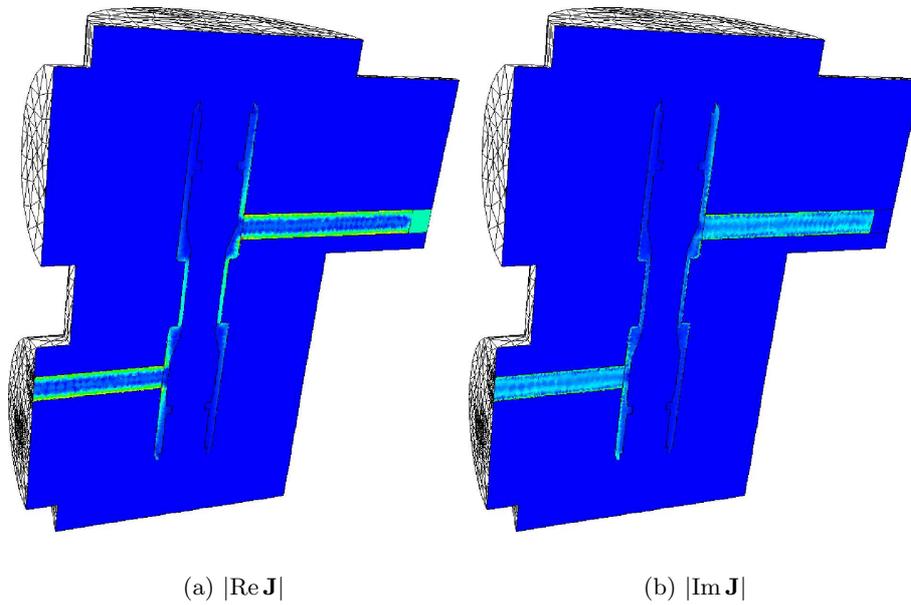


Abb. 4.42: Vollständige GIS-Anlage, Betrag der Stromdichte entlang des mittleren Leiters zum Zeitpunkt $\omega t = 0$ und $\omega t = \frac{3\pi}{2}$.

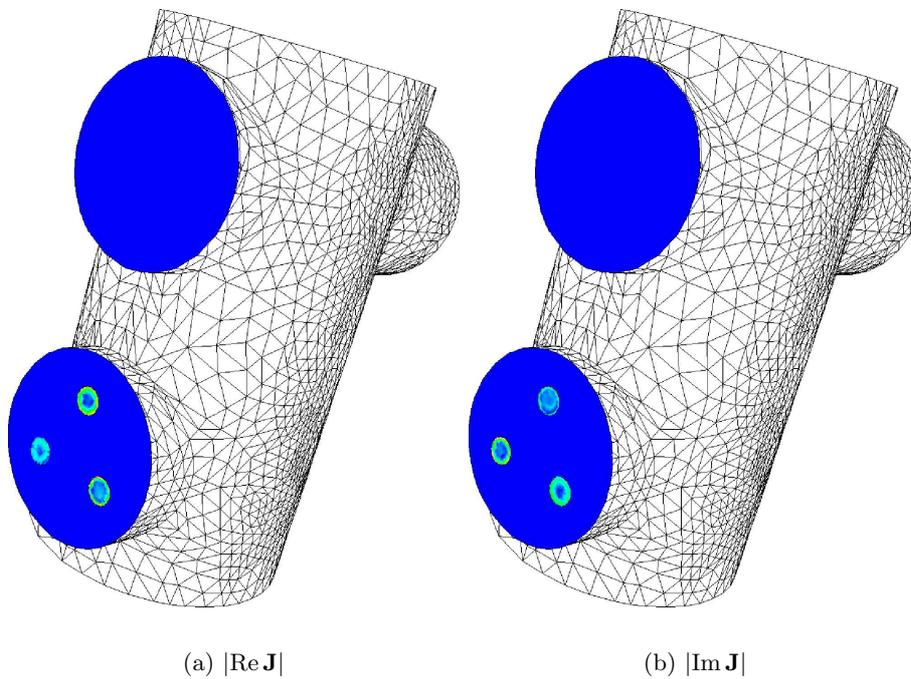


Abb. 4.43: Vollständige GIS-Anlage, Betrag der Stromdichte zum Zeitpunkt $\omega t = 0$ und $\omega t = \frac{3\pi}{2}$.

5 Eine skalare Randelementmethode für Impedanzrandbedingungen

In diesem Kapitel betrachten wir den Fall, daß Ω unbeschränkt ist. Für die numerische Behandlung eignet sich für diesen Fall die sogenannte Randelementmethode, kurz BEM (von engl. *boundary element method*), die nur eine Triangulierung des Randes erfordert und die Abklingbedingungen im Unendlichen automatisch erfüllt. Deren Anwendbarkeit setzt allerdings gebietsweise konstante Koeffizienten voraus, da ansonsten die Reduktion eines im Gebiet gestellten Problems auf den Rand nicht vollständig gelingt. Dies stellt natürlich eine Einschränkung gegenüber den im vorigen Kapitel benutzten finiten Elementen oder anderen volumenorientierten Methoden dar.

Dieser Einschränkung stehen aber neben der Behandlung unbeschränkter Gebiete auch weitere Vorteile gegenüber:

- Das Problem ist um eine Raumdimension reduziert und hat bei Verwendung geeigneter Matrixdarstellungen einen asymptotisch geringeren Aufwand. Optimale Komplexität erhält man beispielsweise mit Hilfe des Panel Clustering Verfahrens [Sau00].
- Phänomene wie der Skineffekt, die eine feinskalige Lösung in zur Oberfläche senkrechter Richtung hervorrufen, implizieren keine feine Triangulierung.

Gerade der letzte Punkt ist natürlich von Interesse, haben wir doch im vorigen Kapitel am Beispiel des GIS-Modells gesehen, daß bei adaptiver Verfeinerung der Skineffekt zu einer deutlichen Konzentration der Freiheitsgrade an den Leiterrändern führt.

Allerdings muß dieser Vorteil der Randelementmethode hier etwas relativiert werden: Grob gesagt entsteht die Überlegenheit aus dem Umstand, daß bei der Randelementmethode die feine Skala in Form einer stark oszillierenden Fundamentallösung enthalten ist, vgl. z.B. [May86]. Dies erfordert dann aber eine aufwendige Quadratur. Folglich handelt es sich hier eigentlich um eine Verschiebung des numerischen Aufwands vom Lösen zum Aufstellen des Gleichungssystems.

Ein zu stark ausgeprägter Skineffekt führt demnach auch bei der Randelementmethode zu einem irgendwann nicht mehr vertretbaren numerischen Aufwand. Um solche Probleme dennoch numerisch behandeln zu können, muß das Modell geändert werden. Dies geschieht in diesem Kapitel durch den Einsatz von *Impedanzrandbedingungen*.

Dieser Teil der Arbeit basiert auf einer Zusammenarbeit mit dem deutschen ABB Forschungszentrum, innerhalb der eine proprietäre BEM-Software zur Berechnung elektromagnetischer Felder vom Autor dieser Arbeit weiterentwickelt wurde. Aus Kompatibilitätsgründen wird im folgenden die \mathbf{H} -basierte Wirbelstromformulierung verwendet. Teile dieses Kapitels sind vom Autor bereits in [SS01] und [SS02] veröffentlicht worden.

5.1 Impedanzrandbedingungen

Das betrachtete Gebiet ist jetzt der gesamte \mathbb{R}^3 . Wie in den vorigen Kapiteln bezeichnet $\Omega_C \subset \mathbb{R}^3$ den als endlich angenommenen leitenden Gebietsteil und Ω_I dessen Komplement, der von einem Isolator ausgefüllt wird. Mit Γ bezeichnen wir (abweichend von der zuvor verwendeten Konvention) den Rand von Ω_C . Wir nehmen im folgenden an, daß die erste Betti-Zahl $\beta_1(\Omega_C)$ verschwindet, also Ω_C keine Schleifen bildet. Daraus resultiert auch, daß $\beta_1(\Omega_I)$ verschwindet. Für eine Erweiterung auf den allgemeineren Fall verweisen wir auf die Anmerkungen in [SS02].

Wenn die Leitfähigkeiten sehr hoch sind, und die sogenannte *Eindringtiefe*

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

klein genug ist, kann man das Verhalten der Felder innerhalb des Leiters näherungsweise durch eine *Leonotovich-* oder *Impedanzrandbedingung*

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \eta \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \quad \text{auf } \Gamma \quad (5.1)$$

beschreiben. Dies erlaubt die Lösung eines Außenraumproblems statt eines Transmissionsproblems, siehe [Ryt40, CK81, HM82, MS84, AN96, SV95, May98]. Die Größe

$$\eta = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (5.2)$$

wird *Flächenimpedanz* genannt, \mathbf{n} ist das nach außen gerichtete Normalenvektorfeld auf Ω_C . Bei den Koeffizienten σ und μ in (5.2) (die i.a. unstetig auf Γ sind) handelt es sich um die Grenzwerte von Ω_C . Der Einfachheit halber nehmen wir ab jetzt an, daß sie auf Γ konstant sind. Die nachfolgenden Beweise können aber auf den allgemeineren Fall leicht erweitert werden.

Das auf Ω_I reduzierte Wirbelstromproblem (2.16) mit den Abklingbedingungen (2.17) und der Impedanzrandbedingung (5.1) nennen wir *Impedanzproblem*. Es lautet

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_G \quad \text{in } \Omega_I \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} \quad \text{in } \Omega_I \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \text{in } \Omega_I \quad (5.3c)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \eta \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \quad \text{auf } \Gamma \quad (5.3d)$$

$$\mathbf{E} = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5.3e)$$

$$\mathbf{H} = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (5.3f)$$

Die Verwendung von Integralgleichungsmethoden für das Außenraumproblem mit Impedanzrandbedingungen für die vollen Maxwellgleichungen wurde z.B. in [Ben84, CK81] behandelt. Diese Integralgleichungen sind vektorwertig.

Das Wirbelstromproblem, formuliert als partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in \mathbf{H} , erlaubt eine Darstellung als Gradientenfeld im Nichtleiter Ω_I , so daß bei der Verwendung der Impedanzrandbedingung das Gesamtproblem skalar wird. Diese Idee wurde

bereits von Mayergoyz [MB94] in Zusammenhang mit finiten Elementen benutzt. Wir werden die dort gegebene Formulierung analysieren und zeigen, wie sie auf eine stark elliptische Pseudo-Differentialgleichung 1. Ordnung auf dem Leiterrand Γ reduziert werden kann. Für deren numerische Lösung verwenden wir eine Galerkin-Randelementmethode und zeigen, daß die Ohmschen Verluste mit $\mathcal{O}(h^{\frac{5}{2}})$ konvergieren.

Bemerkung 5.1 In der Herleitung der Impedanzrandbedingung (5.1) ist vorausgesetzt, daß die Krümmung von Γ beschränkt ist, siehe [Ryt40, SV95]. Wir nehmen deshalb im folgenden an, daß Γ glatt ist.

Bemerkung 5.2 Die Impedanzrandbedingung ist eine Näherung erster Ordnung für das Wirbelstromproblem, wenn $\delta k \ll 1$, d.h. der Fehler ist $\mathcal{O}(\delta k)$ mit $k = \max(|k_1|, |k_2|)$, wobei k_1, k_2 die Hauptkrümmungen von Γ sind. Weiterhin muß für die Gültigkeit der Impedanzrandbedingung die Wellenlänge im freien Raum und der Abstand zu allen Quellen groß im Vergleich zu δ sein. Bezüglich dieser beiden Größen ist die Impedanzrandbedingung eine Approximation zweiter Ordnung, siehe [Mit67].

5.2 Eliminierung des elektrischen Feldes

Das elektrische Feld kann im Impedanzmodell (5.3) eliminiert werden. Nach (1.7) ist

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \text{div}_\Gamma(\mathbf{E} \times \mathbf{n}). \quad (5.4)$$

Einsetzen von (5.1) in (5.4) liefert

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\text{div}_\Gamma(\eta \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})).$$

Unter Ausnutzung des Faradayschen Gesetzes (5.3b) folgt dann die zu (5.1) äquivalente Impedanzrandbedingung

$$\text{div}_\Gamma \mathbf{H}_t + \alpha H_n = 0 \quad \text{auf } \Gamma. \quad (5.5)$$

Dabei ist $\mathbf{H}_t = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$ die Projektion von \mathbf{H} auf die Tangentialebene an Γ , $H_n = \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$ die Normalkomponente und $\alpha := i\omega\mu_0/\eta$. Beachte, daß wegen $\omega, \mu, \sigma > 0$

$$\alpha = \frac{i\omega\mu_0}{\eta} = \frac{i\omega\mu_0\sqrt{2}}{(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega^2\mu_0^2\sigma}{2\omega\mu}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2\mu_r^2}} = (1+i) \frac{1}{\mu_r\delta} =: (1+i)\beta,$$

mit $0 < \beta \in \mathbb{R}$.

Wir zerlegen \mathbf{H} in $\overline{\Omega}_I$ in ein (bekanntes) Erregungsfeld \mathbf{H}_G und ein unbekanntes Sekundärfeld \mathbf{H}_0 . Aus (5.3) und (5.5) ergibt sich dann das Impedanzproblem in \mathbf{H} ,

$$\text{div } \mathbf{H}_0 = 0 \quad \text{in } \Omega_I, \quad (5.6a)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}_0 = 0 \quad \text{in } \Omega_I, \quad (5.6b)$$

$$\text{div}_\Gamma \mathbf{H}_{0,t} + \alpha H_{0,n} = g \quad \text{auf } \Gamma, \quad (5.6c)$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-2}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (5.6d)$$

wobei

$$g := -\text{div}_\Gamma \mathbf{H}_{G,t} - \alpha H_{G,n}.$$

Bemerkung 5.3 (Erregungsfeld \mathbf{H}_G) Das Erregungsfeld kann z.B. mit dem Gesetz von Biot-Savart,

$$\mathbf{H}_G(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_G} \mathbf{J}_G(\mathbf{y}) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y},$$

berechnet werden, wobei Ω_G der Träger der Generatorströme \mathbf{J}_G ist.

5.3 Skalarpotential-Formulierung

Wie zuvor angemerkt, ist der Vorteil der Formulierung (5.5), daß sie auf ein skalares Problem reduziert werden kann, wie im folgenden gezeigt wird.

Aus (5.6b) und der Annahme, daß die erste Betti-Zahl von Ω_I verschwindet, erhalten wir in Ω_I die Darstellung

$$\mathbf{H}_0 = -\operatorname{grad} \phi, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_G - \operatorname{grad} \phi. \quad (5.7)$$

Einsetzen in (5.6) liefert

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{in } \Omega_I, \quad (5.8a)$$

$$B\phi := -\Delta_\Gamma \phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial n} = g \quad \text{auf } \Gamma, \quad (5.8b)$$

$$\phi = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (5.8c)$$

wobei $\Delta_\Gamma = \operatorname{div}_\Gamma \operatorname{grad}_\Gamma$ den Laplace-Beltrami-Operator auf Γ bezeichnet. Das Problem (5.8) ist kein Standardproblem, da der Hauptteil des Operators auf dem Rand Γ definiert ist.

Lemma 5.1 *Jede Lösung von (5.8) liefert mittels (5.7) eine Lösung von (5.6).*

Für eine Variationsformulierung von (5.8) führen wir den Raum \mathcal{V} als Vervollständigung von

$$\mathcal{D}(\Omega_I) = \{\phi \in C^\infty(\overline{\Omega_I}) : \phi \text{ hat beschränkten Träger in } \Omega_I\}$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ ein, wobei

$$\|\phi\|^2 := \|\operatorname{grad} \phi\|_{L^2(\Omega_I)}^2 + D \|\operatorname{grad}_\Gamma \phi\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (5.9)$$

Hier und im folgenden ist die Konstante $D > 0$ beliebig und hat die Dimension einer Länge; sie dient dem Erhalt korrekter physikalischer Einheiten. Beispielsweise kann $D := \operatorname{diam}(\Omega_C)$ gesetzt werden.

Man beachte, daß $\|\cdot\|$ in der Tat eine Norm ist, da Konstanten nicht in \mathcal{V} enthalten sind. Per definitionem ist der Raum \mathcal{V} ein abgeschlossener Unterraum des (Standard)-Beppo-Levi-Raums, der im allgemeinen mit $BL(\Omega_I)$ bezeichnet wird, siehe [DL90b, Kap. IX, S. 114 ff.].

Offensichtlich ist \mathcal{V} ein Hilbert-Raum bezüglich des zu (5.9) gehörenden Skalarproduktes

$$(\phi, \psi) := \int_{\Omega_I} \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi^* d\mathbf{x} + D \int_{\Gamma} \operatorname{grad}_\Gamma \phi \cdot \operatorname{grad}_\Gamma \psi^* dS,$$

wobei „*“ wieder konjugiert komplex bedeutet.

Um der kürzeren Schreibweise willen bezeichnen wir wie in den vorigen Kapiteln das (hermitesche) L^2 -Skalarprodukt auf Ω_I bzw. Γ mit $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega_I)}$ bzw. $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Gamma)}$, falls die Argumente skalar sind, und mit $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)}$ bzw. $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$, falls die Argumente vektoriell sind. Restriktionen auf den Rand sind wieder im Sinne der Spuren zu verstehen.

Durch die Anwendung der partiellen Integrationsformel (1.5) (man beachte dabei, daß der Normalenvektor \mathbf{n} in Ω_I hinein zeigt) erhält man eine Variationsformulierung für das skalare Impedanzproblem (5.8):

Finde $\phi \in \mathcal{V}$, so daß $\forall \phi' \in \mathcal{V}$

$$a(\phi, \phi') := (\mathbf{grad}_\Gamma \phi, \mathbf{grad}_\Gamma \phi')_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} + \alpha (\mathbf{grad} \phi, \mathbf{grad} \phi')_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} = (g, \phi')_{L^2(\Gamma)}. \quad (5.10)$$

Lemma 5.2 Die in (5.10) definierte Sesquilinearform ist stetig und \mathcal{V} -koerziv, d.h. es gilt

$$|a(\phi, \phi)| \geq C \|\phi\|^2 \quad \forall \phi \in \mathcal{V}$$

für eine Konstante $C > 0$.

Beweis: Da $\alpha = (1 + i)\beta$, $\beta > 0$, ist

$$|a(\phi, \phi)| \geq \operatorname{Re} a(\phi, \phi) = \|\mathbf{grad}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + \beta \|\mathbf{grad} \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)}^2 \geq C \|\phi\|^2$$

für alle $\phi \in \mathcal{V}$, $C > 0$. Weiterhin ist $a(\cdot, \cdot)$ stetig, da für alle $\phi, \psi \in \mathcal{V}$

$$|a(\phi, \psi)| \leq \left| (\mathbf{grad}_\Gamma \phi, \mathbf{grad}_\Gamma \psi)_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right| + |\alpha| \left| (\mathbf{grad} \phi, \mathbf{grad} \psi)_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} \right| \leq C \|\phi\| \|\psi\|$$

mit einer Konstanten C gilt. \square

Ein Funktional $g \in H^{-1}(\Gamma)$ ist \mathcal{V} -stetig,

$$|g(\phi)| \leq \|g\|_{H^{-1}(\Gamma)} \|\phi\|_{H^1(\Gamma)} \leq \|g\|_{H^{-1}(\Gamma)} \|\phi\|,$$

denn wegen der Stetigkeit der Spurabbildung (siehe [DL90b, Theorem 2, §1, Kap. XI]) ist

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{H^1(\Gamma)}^2 &= (\operatorname{diam} \Gamma)^2 \|\mathbf{grad}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + \|\phi\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\leq C \left(D^3 \|\mathbf{grad}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + D^2 \|\mathbf{grad} \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)}^2 + \left\| \frac{\phi}{\sqrt{1 + |\frac{x}{D}|^2}} \right\|_{L^2(\Omega_I)}^2 \right) \\ &\leq C \left(D \|\mathbf{grad}_\Gamma \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{grad} \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)}^2 \right) \\ &= C \|\phi\|^2. \end{aligned}$$

Die Skalierungen mit D dienen wieder dem Erhalt korrekter physikalischer Einheiten. Die letzte Ungleichung folgt aus der Tatsache, daß

$$\left(D^2 \|\mathbf{grad} \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)}^2 + \left\| \frac{\phi}{\sqrt{1 + |\frac{x}{D}|^2}} \right\|_{L^2(\Omega_I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

in $BL(\Omega_I)$ eine zu $\|\mathbf{grad} \phi\|_{L^2(\Omega_I)}$ äquivalente Norm ist, siehe [DL90b, Theorem 1, §1, Kap. XI].

Dann folgt aus Lemma 5.2 und dem Lax-Milgram-Lemma

Satz 5.1 Für jedes $g \in H^{-1}(\Gamma)$ besitzt Problem (5.10) eine eindeutige Lösung $\phi \in \mathcal{V} \cap C^\infty(\Omega_I)$ und es gilt die a priori- Abschätzung

$$\|\phi\| \leq C(\Omega_I, \beta) \|g\|_{H^{-1}(\Gamma)}.$$

Wenn $g \in C^\infty(\Gamma)$, gilt sogar $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega_I})$.

5.4 Reduktion auf den Rand

Wir überführen Problem (5.8) in eine Integrodifferentialgleichung auf dem Rand Γ . Dafür muß die Lösung der in Ω_I zu erfüllenden Laplace-Gleichung durch noch zu bestimmende Daten auf dem Rand Γ ausgedrückt werden. Eine zentrale Rolle spielt dabei die *Singularitätenfunktion* oder *Fundamentallösung* des Laplace-Operators $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$.

Grundsätzlich kann die Reduktion auf den Rand auf zwei verschiedene Arten geschehen (siehe z.B. [Hac89]),

- mittels der Greenschen Darstellungsformel

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (5.11)$$

- oder durch klassische Potentialansätze mit Flächenbelegungen.

Die erste Möglichkeit nennt man auch die *direkte Methode*, da bei dem klassischen Dirichlet- oder Neumann-Problem nach dem Auflösen der entstehenden Randintegralgleichung die gesuchte Unbekannte auf dem Rand direkt zur Verfügung steht. Im Gegensatz dazu verwendet man bei der zweiten Möglichkeit eine unbekannte Flächenbelegung. Wenn diese nach Auflösen der entstehenden Randintegralgleichung bekannt ist, muß man sie noch in den Integralansatz einsetzen, um die eigentlich gesuchte Unbekannte zu erhalten. Daher nennt man diese Methode auch *indirekte Methode*.

Wir verwenden im folgenden die indirekte Methode und benutzen das *Einfachschichtpotential*

$$\phi(\mathbf{x}) = (\mathcal{S}\lambda)(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \lambda(\mathbf{y}) \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dS_{\mathbf{y}} \quad \mathbf{x} \notin \Gamma, \quad (5.12)$$

mit der Belegungsdichte λ auf Γ .

Bemerkung 5.4 Der Grund für unsere Wahl ist praktischer Natur: Die bisherige Software des Projektpartners ABB baut ebenfalls auf diesem Ansatz für die Lösung des Wirbelstromproblems auf, so daß sich so das vorgeschlagene Impedanzproblem mit diesem ideal kombinieren läßt. Weiterhin lassen sich so alle Postprocessing-Routinen für die anschließende Feldberechnung (siehe Abschnitt 5.6) unverändert übernehmen.

Einsetzen von (5.12) in (5.8b) ergibt

$$-\Delta_{\Gamma} V \lambda - \alpha \frac{\partial}{\partial n} (V \lambda) = g, \quad (5.13)$$

wobei $V \lambda := (\mathcal{S}\lambda)|_{\Gamma}$ der *Einfachschichtoperator* auf dem Rand Γ ist. Formel (5.13) ist eine Integrodifferentialgleichung auf Γ für die Belegungsdichte λ . Die Sprungbedingungen des Einfachschichtpotentials implizieren (siehe z.B. [Hac89])

$$A\lambda := -\Delta_{\Gamma} V \lambda + \alpha \left(\frac{1}{2} \text{id} - K' \right) \lambda = g \text{ auf } \Gamma, \quad (5.14)$$

wobei

$$(K'\lambda)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{x}}} \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \lambda(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (5.15)$$

der adjungierte Operator des klassischen Doppelschichtoperators ist (abgesehen von einem Faktor $\frac{1}{2}$). Die Abhängigkeit der Normalen und des Flächenelements haben wir durch ein tiefgestelltes \mathbf{x} bzw. \mathbf{y} gekennzeichnet. Da Γ als glatt angenommen wurde, ist der Integrand in (5.15) schwach singulär, wenn $\lambda \in C^0(\Gamma)$.

Partielle Integration liefert eine schwache Formulierung von (5.13):

Finde $\lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so daß $\forall \lambda' \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$a_{\Gamma}(\lambda, \lambda') := (\mathbf{grad}_{\Gamma} V \lambda, \mathbf{grad}_{\Gamma} \lambda')_{L^2(\Gamma)} + \alpha \left(\left(\frac{1}{2} \text{id} - K' \right) \lambda, \lambda' \right)_{L^2(\Gamma)} = (g, \lambda')_{L^2(\Gamma)}. \quad (5.16)$$

Lemma 5.3 Die Sesquilinearform $a_{\Gamma}(\cdot, \cdot)$ in (5.16) ist auf $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ stetig und erfüllt die Gårding-Ungleichung (1.9), d.h. es gibt ein $c > 0$ und eine kompakte Form $k(\cdot, \cdot)$ auf $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so daß

$$\forall \lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : |a_{\Gamma}(\lambda, \lambda)| \geq \text{Re } a_{\Gamma}(\lambda, \lambda) \geq c \|\lambda\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 - k(\lambda, \lambda). \quad (5.17)$$

Beweis:

i) **Stetigkeit**

Es ist bekannt (siehe z.B. e.g. [Cos88]), daß für $\Gamma \in C^{\infty}$

$$V : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+1}(\Gamma),$$

$$K' : H^s(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma)$$

für jedes $s \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left| (\mathbf{grad}_{\Gamma} V \lambda, \mathbf{grad}_{\Gamma} \lambda')_{L^2(\Gamma)} \right| &\leq \|\mathbf{grad}_{\Gamma} V \lambda\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\mathbf{grad}_{\Gamma} \lambda'\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq C \|V \lambda\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \|\lambda'\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq C \|\lambda\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\lambda'\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

da $\mathbf{grad}_{\Gamma} : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma)$ und $V : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+1}(\Gamma)$ stetig für alle $s \in \mathbb{R}$.

ii) **Gårding-Ungleichung**

Der Einfachschichtoperator V ist ein stark elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung -1 auf $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und es gilt

$$\forall q \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \quad (V q, q)_{L^2(\Gamma)} \geq C(\Gamma) \|q\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 .$$

Wir betrachten den Operator

$$A_0 = -\Delta_\Gamma V .$$

Offensichtlich ist $A_0 : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma)$ stetig und, als Komposition des Pseudodifferentialoperators V und des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_\Gamma$, selbst ein Pseudodifferentialoperator auf Γ der Ordnung $+1$. Nach der Theorie Pseudodifferentialoperatoren (siehe z.B. [Tay81]) ist sein Hauptsymbol

$$\sigma_0(A_0) = \sigma_0(-\Delta_\Gamma) \sigma_0(V) = |\boldsymbol{\xi}|^2 |\boldsymbol{\xi}|^{-1} = |\boldsymbol{\xi}| ,$$

welches somit für $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ positiv ist. Also ist A_0 stark elliptisch und es gilt: Es existiert ein $c > 0$ und ein kompakter Operator $T_0 : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, so daß

$$\operatorname{Re}((A_0 + T_0)\lambda, \lambda)_{L^2(\Gamma)} \geq c \|\lambda\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \quad \forall \lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) .$$

Setzen von $T = T_0 - \alpha(\frac{1}{2} \operatorname{id} - K')$ liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((A + T)\lambda, \lambda)_{L^2(\Gamma)} &= \operatorname{Re}((A_0 + T_0)\lambda, \lambda)_{L^2(\Gamma)} \\ &\geq c \|\lambda\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \quad \forall \lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) . \end{aligned}$$

Die Annahme folgt dann mit

$$k(\lambda, \lambda) := (T\lambda, \lambda)_{L^2(\Gamma)} .$$

Also ist A in (5.14) ein stark elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung $+1$ und (5.17) impliziert die Gültigkeit der Fredholmschen Alternative. □

Lemma 5.4 *Das homogene Problem $A\lambda = 0$ hat nur die triviale Lösung $\lambda = 0$.*

Beweis: Wir nehmen an, daß die Behauptung nicht gilt und eine nichttriviale Lösung existiert. Dann erfüllt $\phi(\mathbf{x}) = (\mathcal{S}\lambda)(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega_C \cup \Omega_I$, (5.8a) in $\Omega_I \cup \Omega_C$ und ebenso (5.8c). Weiterhin ist (5.8b) mit $g = 0$ erfüllt, und es gilt die Sprungeigenschaft $[\phi]_\Gamma = 0$, siehe z.B. [Hac89].

Da die Variationsformulierung der partiellen Differentialgleichung nach Satz 5.1 für $g = 0$ nur die Nulllösung in Ω_I besitzt, gilt $\phi^I := \phi|_{\Omega_I} = 0$. Wegen $[\phi]_\Gamma = 0$ verschwindet dann $\phi^C := \phi|_{\Omega_C}$ am Rand von Ω_C . Also ist ϕ^C Lösung des inneren Dirichlet-Problems

$$\Delta\phi^C = 0 \quad \text{in } \Omega_C, \quad \phi^C|_\Gamma = 0 ,$$

welches die eindeutige Lösung $\phi^C = 0$ in Ω_C hat, so daß $\phi \equiv 0$ in $\Omega_I \cup \Omega_C$. Da $\phi(\mathbf{x}) = (\mathcal{S}\lambda)(\mathbf{x})$, impliziert dies $\lambda \equiv 0$, denn wegen der Darstellungsformel (siehe [DL90b])

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n_{\mathbf{y}}} \right]_{\Gamma} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dS_{\mathbf{y}}$$

gilt $\lambda = \left[\frac{\partial \phi}{\partial n_{\mathbf{y}}} \right]_{\Gamma} = 0$, ein Widerspruch. \square

Satz 5.2 Für jedes $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ hat das Variationsproblem (5.16) eine eindeutige Lösung $\lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und ihr Potential $\phi(\mathbf{x}) = (\mathcal{S}\lambda)(\mathbf{x})$ ist die eindeutige Lösung von Problem (5.8).

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit folgen aus (5.17) und Lemma 5.4 in der üblichen Weise. Das Potential $(\mathcal{S}\lambda)$ ist per Konstruktion eine Lösung von (5.8a,b,c). Wegen der Stetigkeit von \mathcal{S} gilt $\lambda \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \Rightarrow \phi \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3)$ (siehe z.B. [Cos88, Theorem 1 (i)]), somit ist $\phi|_{\Gamma} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ und $\phi \in \mathcal{V}$. Da $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset H^{-1}(\Gamma)$, ist $g \in H^{-1}(\Gamma)$, so daß nach Satz 5.1 das Problem (5.8) eine eindeutige Lösung $\tilde{\phi} \in \mathcal{V}$ hat. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist $\tilde{\phi} = \phi$. \square

5.4.1 Regularität

Das Randwertproblem ist nicht im klassischen Sinne elliptisch, da der Randoperator $B\phi = -\Delta_{\Gamma}\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial n}$ nicht dem Differentialoperator Δ in $\Omega_I \cup \Omega_C$ untergeordnet ist. Daher ist die Standard-Theorie hier nicht anwendbar. Dennoch erlaubt die Reformulierung von (5.8) als Pseudodifferentialgleichung (5.14) auf Γ und die starke Elliptizität von A folgende Aussage:

Satz 5.3 Sei $\Gamma \in C^{\infty}$ und $g \in H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$, $s \geq 0$ in (5.8b). Dann gilt für die Lösung ϕ von (5.10) $\phi \in H_{\text{loc}}^{2+s}(\mathbb{R}^3)$, $\phi|_{\Gamma} \in H^{\frac{3}{2}+s}(\Gamma)$.

Beweis: Wenn $g \in H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$, impliziert die starke Elliptizität und Stetigkeit von A in (5.14) $\lambda \in H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$. Aus den Abbildungseigenschaften des Einfachschichtpotentials [Cos88] folgt dann

$$\phi = (\mathcal{S}\lambda) \in H_{\text{loc}}^{2+s}(\mathbb{R}^3).$$

\square

Bemerkung 5.5 Da in $\Delta\phi = 0$ in Ω_I gilt, ist natürlich $\phi \in C^{\infty}(\Omega_I)$. Die wesentliche Aussage von Satz 5.3 ist die Regularität von ϕ einschließlich des Randes Γ .

5.5 Galerkin-Diskretisierung

Sei $\{\mathcal{T}_h\}_h$ eine quasiuniforme, stabile Familie von Triangulierungen von Γ , bestehend aus dreieckigen, gekrümmten Randelementen.

Bemerkung 5.6 Hier und im folgenden setzen wir exakte Elementabbildungen voraus, d.h. die Fläche wird nicht approximiert, wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird. Dann existiert kein geometrischer Diskretisierungsfehler.

Sei $\mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h)$ der Raum stetiger, stückweise polynomialer Funktionen des Grades p , $p \geq 1$, in den lokalen Koordinaten auf Γ . Dann ist für jedes $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h) \subset H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Gamma), \quad \dim \mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h) = \mathcal{O}(p^2 |\mathcal{T}_h|),$$

wobei $|\mathcal{T}_h|$ die Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_h bezeichnet. Der Raum $\mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h)$ hat die *Approximationseigenschaft*

$$\min_{v \in \mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h)} \|\lambda - v\|_{H^s(\Gamma)} \leq C h^{\min(p+1, k)-s} \|\lambda\|_{H^k(\Gamma)} \quad (5.18)$$

für $\lambda \in H^k(\Gamma)$, wobei C unabhängig von h und λ ist und $0 \leq s \leq 1$, $k \geq s$. Die Galerkin-Randelementmethode für das Problem (5.16) lautet:

$$\text{Finde } \lambda_N \in \mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h), \text{ so daß } a_\Gamma(\lambda_N, \lambda') = (g, \lambda')_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \lambda' \in \mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h). \quad (5.19)$$

Wegen der Erfüllung der Gårding-Ungleichung und der Injektivität von A gilt mit Satz 5.3 und (5.18):

Lemma 5.5 *Für hinreichend kleines h hat (5.19) eine eindeutige Lösung $\lambda_N \in \mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h)$ und es gilt*

$$\|\lambda - \lambda_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \inf_{v \in \mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h)} \|\lambda - v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Wenn insbesondere $g \in H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$, $s > 0$, dann gilt für $h \rightarrow 0$:

$$\|\lambda - \lambda_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C h^{\min(p+\frac{1}{2}, s)} \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)}. \quad (5.20)$$

Für die Berechnung der Ohmschen Verluste sind wir ebenfalls an $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -Abschätzungen interessiert. Hier gilt

Lemma 5.6 *Wenn $g \in H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$, $s \geq 1$, dann ist für $h \rightarrow 0$*

$$\|\lambda - \lambda_N\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C h^{\min(p+\frac{3}{2}, s+1)} \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)}. \quad (5.21)$$

Beweis: Wir nutzen ein Dualitätsargument: Sei $e_N = \lambda - \lambda_N$.

$$\|e_N\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \sup_{\xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \frac{(e_N, \xi)_{L^2(\Gamma)}}{\|\xi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}}.$$

Sei A' der zu A adjungierte Operator. Für $\xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sei $\phi_\xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ die Lösung von

$$A' \phi_\xi = \xi.$$

Da $\xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $A' : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-1}(\Gamma)$ ein Isomorphismus ist, gilt

$$\|\phi_\xi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq C \|\xi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Ausnutzen der Galerkin-Orthogonalität liefert

$$\begin{aligned} (e_N, \xi)_{L^2(\Gamma)} &= (A^{-1} A e_N, \xi)_{L^2(\Gamma)} = (A e_N, (A')^{-1} \xi)_{L^2(\Gamma)} = (A e_N, \phi_\xi)_{L^2(\Gamma)} \\ &= a_\Gamma(e_N, \phi_\xi - \eta) \end{aligned}$$

für jedes $\eta \in \mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h)$. Dann folgt aus der Stetigkeit von $a_\Gamma(\cdot, \cdot)$ und (5.18)

$$\begin{aligned} |(e_N, \xi)_{L^2(\Gamma)}| &\leq C \|e_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\phi_\xi - \eta\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq C h \|e_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\phi_\xi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq C h \|e_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\xi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß

$$\|e_N\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C h \|e_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

und unter Ausnutzung von (5.20) erhalten wir (5.21). \square

Aus Lemma 5.6 erhalten wir unmittelbar eine Konvergenzaussage über die Ohmschen Verluste, d.h. der Größe

$$P = \frac{\operatorname{Re} \eta}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{H}_t|^2 dS = \frac{\operatorname{Re} \eta}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{H}_{G,t} - \mathbf{grad}_\Gamma(V \lambda)|^2 dS. \quad (5.22)$$

Das approximierte magnetische Feld bezeichnen wir mit \mathbf{H}_N . Die approximierte Verlustleistung ist

$$P_N = \frac{\operatorname{Re} \eta}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{H}_{N,t}|^2 dS = \frac{\operatorname{Re} \eta}{2} \int_{\Gamma} |\mathbf{H}_{G,t} - \mathbf{grad}_\Gamma(V \lambda_N)|^2 dS.$$

Für den Fehler $|P - P_N|$ gilt dann,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\operatorname{Re} \eta} |P - P_N| &= \left| \int_{\Gamma} |\mathbf{H}_t|^2 - |\mathbf{H}_{N,t}|^2 dS \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma} \operatorname{Re} \left(|\mathbf{H}_t|^2 - |\mathbf{H}_{N,t}|^2 - 2i \operatorname{Im}(\mathbf{H}_t^* \cdot \mathbf{H}_{N,t}) \right) dS \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma} \operatorname{Re} \left((\mathbf{H}_{0,t} - \mathbf{H}_{0,N,t}) \cdot (\mathbf{H}_t + \mathbf{H}_{N,t})^* \right) dS \right| \\ &\leq \int_{\Gamma} |(\mathbf{grad}_\Gamma V(\lambda - \lambda_N)) \cdot (\mathbf{H}_t + \mathbf{H}_{N,t})^*| dS \\ &\leq \|\mathbf{grad}_\Gamma V(\lambda - \lambda_N)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\mathbf{H}_t + \mathbf{H}_{N,t}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\leq C \left(\|\mathbf{H}_t\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\mathbf{H}_{N,t}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right) \|\lambda - \lambda_N\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Da λ_N in $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ beschränkt und die Galerkin-Diskretisierung (5.19) stabil ist, folgt

$$\|\mathbf{H}_t\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|\mathbf{H}_{N,t}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C$$

mit einer von N unabhängigen Konstante C . Wegen (5.21) gilt dann:

Lemma 5.7 (Konvergenz der Ohmschen Verluste) *Wenn $g \in H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$, gilt für den Diskretisierungsfehler der Ohmschen Verluste für $h \rightarrow 0$*

$$|P - P_N| \leq C h^{\min(p+\frac{3}{2}, s+1)} \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)} .$$

Inbesondere konvergieren für $p = 1$ und glattem g die Ohmschen Verluste mit $\mathcal{O}(h^{\frac{5}{2}})$.

5.6 Numerische Resultate

Wir definieren den Operator

$$(\mathbf{K} \lambda)(\mathbf{x}) := -v.p. \int_{\Gamma} \lambda(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} dS_{\mathbf{y}} .$$

Mit dem Integral ist hier der Cauchy-Hauptwert (siehe z.B. [Hac89]) gemeint, „v.p.“ steht für (frz.) *valeur principale*. Für die Berechnung schreiben wir die Sesquilinearform (5.16) um und ziehen den Oberflächengradienten unter den Einfachschichtoperator

$$\begin{aligned} a_{\Gamma}(\lambda, \lambda') &= (\mathbf{grad}_{\Gamma} V \lambda, \mathbf{grad}_{\Gamma} \lambda')_{L^2(\Gamma)} + \alpha \left(\left(\frac{1}{2} \text{id} - K' \right) \lambda, \lambda' \right)_{L^2(\Gamma)} \\ &= (\mathbf{K} \lambda, \mathbf{grad}_{\Gamma} \lambda')_{L^2(\Gamma)} + \alpha \left(\left(\frac{1}{2} \text{id} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \right) \lambda, \lambda' \right)_{L^2(\Gamma)} . \end{aligned}$$

Partielle Integration der rechten Seite in (5.16) ergibt

$$\begin{aligned} (g, \lambda')_{L^2(\Gamma)} &= -(\text{div}_{\Gamma} \mathbf{H}_{G,t} + \alpha H_{G,n}, \lambda')_{L^2(\Gamma)} \\ &= (\mathbf{H}_{G,t}, \mathbf{grad}_{\Gamma} \lambda')_{L^2(\Gamma)} - \alpha (H_{G,n}, \lambda')_{L^2(\Gamma)} . \end{aligned}$$

Für die Implementierung der vorgestellten Methode verwenden wir gekrümmte Dreiecke mit stückweise quadratischer Geometriedarstellung und stetige, stückweise lineare Ansätze für die Unbekannte und die Testfunktionen. D.h. für jedes Element $T_j \in \mathcal{T}_h$ gibt es eine Abbildung χ_j , die es erlaubt, auf Γ definierte Funktionen auf ein Referenzelement „zurückzuziehen“, in unserem Fall auf das Einheits-simplex $\mathbb{R}^2 \supset U = \{\mathbf{u} : 0 < u_1 < 1, 0 < u_2 < u_1\}$, siehe Abb. 5.1:

$$\chi_j : U \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3, \quad \chi_j(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^6 N_i(\mathbf{u}) \mathbf{x}_{j_i},$$

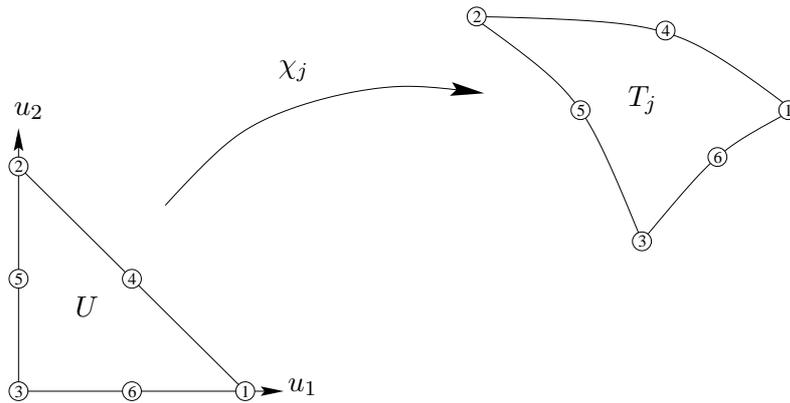


Abb. 5.1: χ_j bildet das Einheitssimplex auf das Element T_j ab.

wobei $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in U$, $\mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}, \mathbf{x}_{j_3}$ die Eckknoten des Elements T_j und $\mathbf{x}_{j_4}, \mathbf{x}_{j_5}, \mathbf{x}_{j_6}$ die Kantenmittelpunkte sind. Die N_i sind Polynome 2. Grades bzw. bilinear in den Komponenten von \mathbf{u} . Mit $u_3 := 1 - u_1 - u_2$ ist

$$\begin{aligned} N_1(\mathbf{u}) &= u_1(2u_1 - 1) & N_4(\mathbf{u}) &= 4u_1u_2 \\ N_2(\mathbf{u}) &= u_2(2u_2 - 1) & N_5(\mathbf{u}) &= 4u_2u_3 \\ N_3(\mathbf{u}) &= u_3(2u_3 - 1) & N_6(\mathbf{u}) &= 4u_3u_1. \end{aligned}$$

Wir verwenden $\lambda_N, \lambda' \in \mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$,

$$\lambda_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) \lambda_{N,j},$$

wobei die φ_j die Knotenbasisfunktionen von $\mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$ sind (die sogenannten „Hutfunktionen“), mit den Eigenschaften $\varphi_j(\mathbf{x}_i) = \delta_{ji}$ für alle Knoten \mathbf{x}_i der Triangulierung \mathcal{T}_h (δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol) und $\varphi_i|_{T_j} \circ \chi_j$ linear für alle $T_j \in \mathcal{T}_h$. $N = |\mathcal{N}(\mathcal{T}_h)|$ ist die Anzahl der Knoten von \mathcal{T}_h .

Das diskrete Problem lautet:

$$\sum_{j=1}^N a_{\Gamma N, ij} \lambda_{N,j} = g_{N,i}, \quad i = 1 \dots N, \quad (5.23)$$

mit

$$\begin{aligned} a_{\Gamma N, ij} &:= \int_{\text{supp } \varphi_i} (\mathbf{grad}_{\Gamma} \varphi_i - \alpha \varphi_i \mathbf{n}) \cdot \mathbf{K} \varphi_j + \frac{\alpha}{2} \varphi_i \varphi_j dS, \\ g_{N,i} &:= \int_{\text{supp } \varphi_i} (\mathbf{grad}_{\Gamma} \varphi_i - \alpha \varphi_i \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H}_G dS. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Matrixkoeffizienten müssen doppelte Oberflächenintegrale berechnet werden — die äußeren Integrale der Galerkin-Produkte und die inneren des Integraloperators \mathbf{K} . Wie üblich geschieht dies elementweise, wobei wir mit $T_{\mathbf{x}}$ das aktuelle Element der äußeren Integration und mit $T_{\mathbf{y}}$ das aktuelle Element der inneren Integration bezeichnen.

Eine Schwierigkeit besteht in der Tatsache, daß die inneren Integrale als Funktionen von \mathbf{x} nicht glatt sind, sondern ein $\log(\text{dist}(\mathbf{x}; \partial T_{\mathbf{x}}))$ -Verhalten zeigen, siehe z.B. [SW92]. Dies bedeutet, daß Standard-Quadraturen hier nicht angewendet werden können. Ein angemessenes Quadraturschema ist jedoch in [ES98] und [vS97] vorgestellt worden, das wir hier übernehmen können. Dort werden die doppelten Oberflächenintegrale über Elementpaare $\{T_{\mathbf{x}}, T_{\mathbf{y}}\}$ als Integrale über vierdimensionale Gebiete aufgefaßt und die Singularitäten mit Hilfe von Transformationen durch Einführung relativer Koordinaten beseitigt. Für die Implementierung müssen wir vier Fälle unterscheiden:

- T_x und T_y sind identisch.
- T_x und T_y besitzen eine gemeinsame Kante.
- T_x und T_y besitzen einen gemeinsamen Knoten.
- T_x und T_y sind disjunkt.

Für den ersten Fall wird beispielsweise das Doppelintegral in eine Summe von 6 regulären Integralen über dem Gebiet $(0, 1) \times T_3$ transformiert, wobei T_3 das dreidimensionale Einheitssimplex ist. Für diese werden dann Standard-Gauß-Quadraturen angewendet. Für die Lösung des linearen Gleichungssystems (5.23) wird das GMRES-Verfahren [SS86] mit einer einfachen Skalierung als Vorkonditionierung verwendet.

Nach dem Lösen des Gleichungssystems wird das Magnetfeld \mathbf{H} mittels

$$\mathbf{H}_N(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2} \text{id } \mathbf{n} - \mathbf{K}\right) \lambda_N + \mathbf{H}_G$$

auf Γ berechnet. Hier wird für die Integration eine in [GG90] dargestellte Methode benutzt, die die stark singulären Integrale auf eine Summe regulärer Integrale zurückführt.

Aus dem Magnetfeld kann schließlich die Stromdichte auf dem Rand mittels (5.1) und dem Ohmschen Gesetz $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ berechnet werden.

Bemerkung 5.7 Es ist offensichtlich, daß die Approximation der Oberfläche mit stückweise quadratischer Interpolation weder C^∞ noch C^1 ist. Die Theorie in den vorigen Abschnitten ignoriert sowohl die Geometrieapproximation als auch den Effekt der numerischen Quadratur. Trotz dieser Tatsache zeigt das folgende numerische Beispiel die vorhergesagte Konvergenzrate.

5.6.1 Kugelmodell bei endlicher Eindringtiefe

Als Testbeispiel betrachten wir eine approximierte Kugel mit dem Radius $R = 1$ m (siehe Abb. 5.2)¹ in einem konstanten Erregungsfeld $\mathbf{H}_G = 1 \text{ A/m } \mathbf{e}_z$ und $\omega = 2\pi 50 \text{ s}^{-1}$. Die Materialparameter repräsentieren Stahl, d.h. $\sigma = 0.666 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ und $\mu_r = 200$. Es ergibt sich somit eine Eindringtiefe $\delta = 1.95 \text{ mm}$, und die Verwendung des Wirbelstrommodells mit Impedanzrandbedingung (Impedanzproblem) ist gerechtfertigt, da $R \gg \delta$. Für diesen Fall ergibt sich für die Konstante $\beta = 2.56 \text{ m}^{-1}$, so daß wegen $\alpha = (1 + i)\beta$ beide Terme der Sesquilinearform (5.16) numerisch relevant sind. Alle physikalischen Größen sind in SI-Einheiten dargestellt.

Es wurde eine Folge von Triangulierungen erzeugt, um die vorausgesagte Konvergenz der Ohmschen Verluste zu verifizieren, siehe Tab. 5.1 und Abb. 5.2.

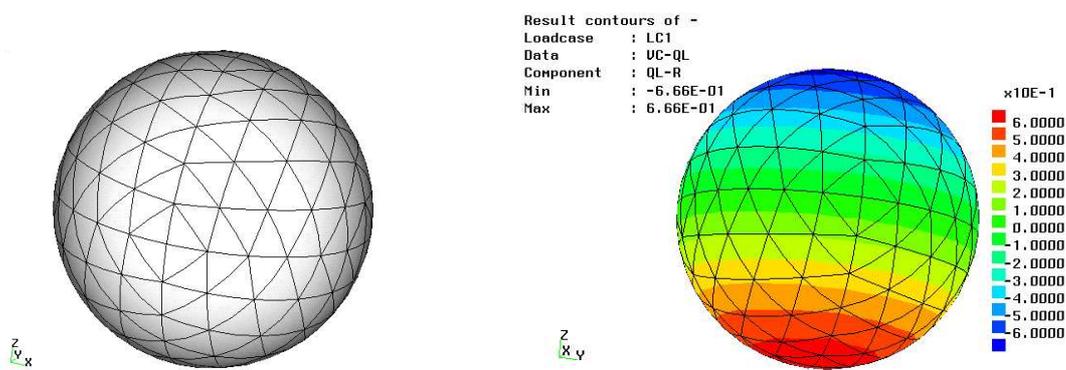


Abb. 5.2: Triangulierung Nr. 4 mit 288 Elementen

Abb. 5.3: Realteil der Flächenbelegungsichte λ . Der Imaginärteil sieht genauso aus, jedoch ist $\max(\text{Im } \lambda_N) = 0.594$.

Triangulierung	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ \mathcal{N}(\mathcal{T}_h) $	6	18	66	146	258	402	578	1026	2118
$ \mathcal{T}_h $	8	32	128	288	512	800	1152	2048	4232

Tab. 5.1: Triangulierungen der Kugel

Unsere Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung dieses Beispiels, die in vielen Lehrbüchern gefunden werden kann, z.B. [Bla88]. Die sich ergebende Flächenbelegungsichte λ ist in Abb. 5.3 dargestellt. Abbildung 5.4 zeigt das daraus berechnete Magnetfeld auf der Oberfläche. Weiterhin bestätigt Abb. 5.5 die theoretisch vorhergesagte $\mathcal{O}(h^{\frac{5}{2}})$ -Konvergenz der Ohmschen Verluste. In Abb. 5.6 ist die Stromdichte zu sehen.

¹ Die Triangulierungen und alle Graphiken in diesem Kapitel wurden mit CADfix, FECS Ltd., generiert (siehe <http://www.fegs.co.uk>).

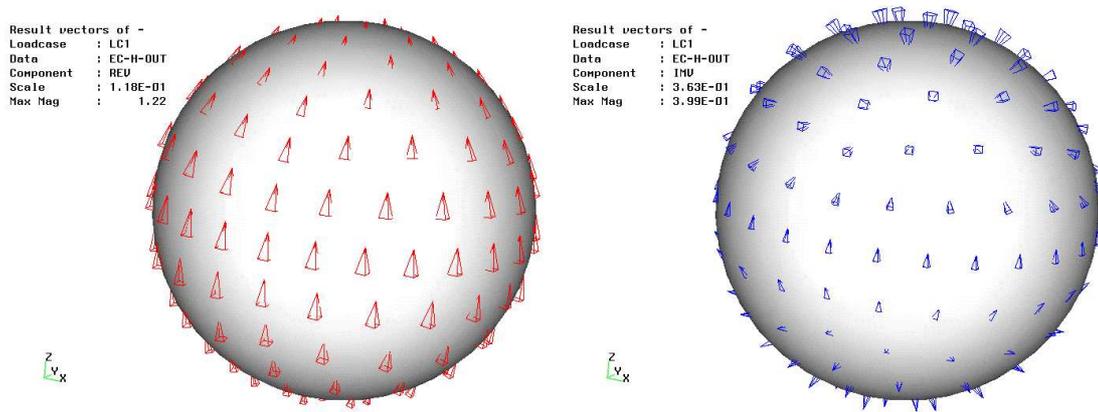


Abb. 5.4: Realteil (links) und Imaginärteil (rechts) des Magnetfeldes auf Γ .

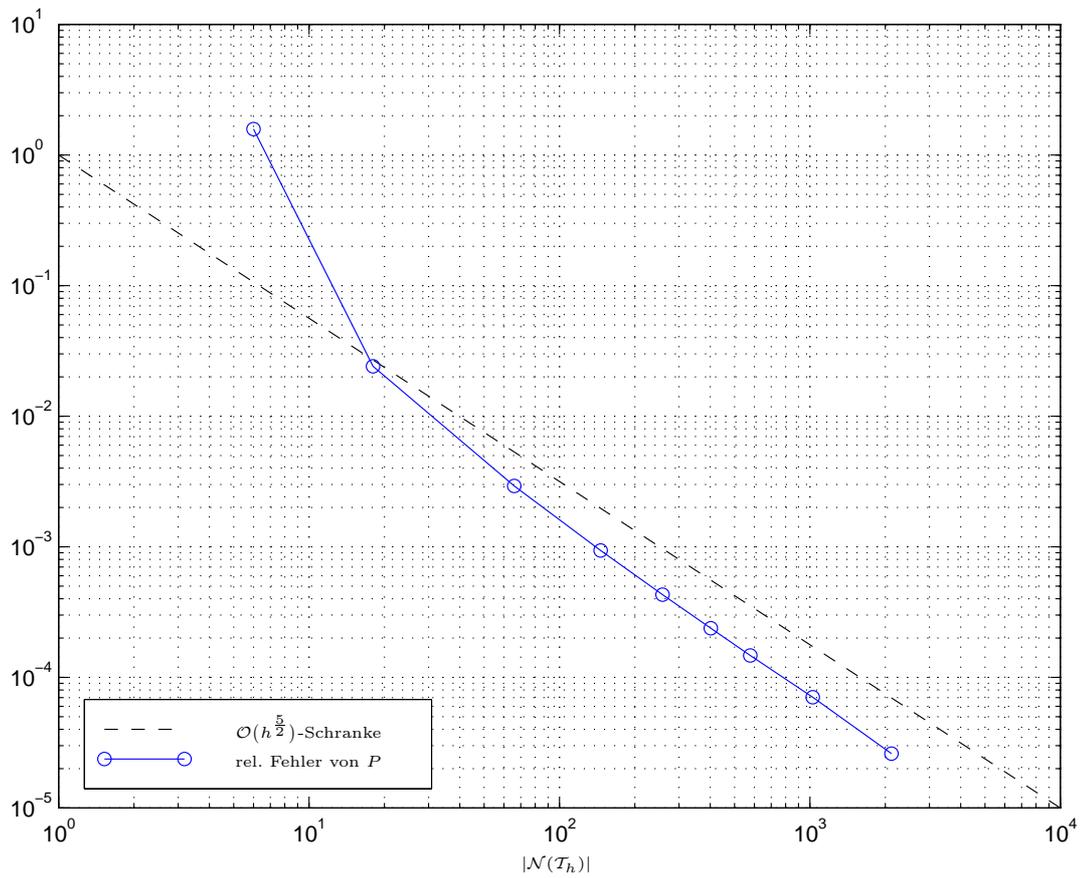


Abb. 5.5: Relativer Fehler der Ohmschen Verlustleistung in Abhängigkeit von der Anzahl der (komplexen) Unbekannten.

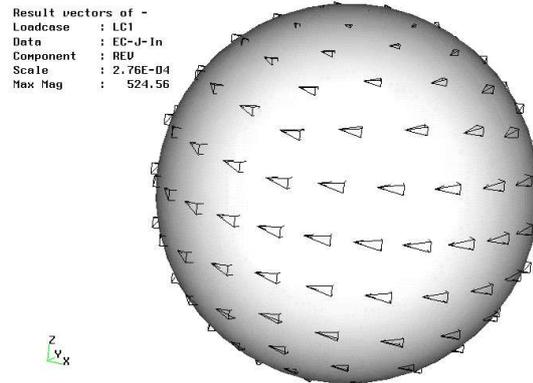


Abb. 5.6: Realteil der Stromdichte \mathbf{J} auf Γ . Der Imaginärteil sieht genauso aus, jedoch beträgt dessen Maximalwert 730.0 A/m.

5.6.2 Grenzfälle

Der Vollständigkeit halber betrachten wir die zwei Grenzfälle für die Konstante β :

i) $\beta \rightarrow \infty$

Das ist der **ideal leitende Grenzfall**, wenn $\sigma \rightarrow \infty$. Hier verbleibt nur der kompakte Anteil der Sesquilinearform, und das Impedanzproblem wird zum Standard-Neumann-Problem, welches gut gestellt ist. Abbildung 5.7 zeigt das Magnetfeld auf der Oberfläche für diesen Fall. Die Impedanzrandbedingung (5.1) degeneriert hier zur Randbedingung des Idealleiters

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0.$$

ii) $\beta \rightarrow 0$

Dies kann als der **magnetostatische Grenzfall** bezeichnet werden. Hier gilt $\mu \rightarrow \infty$, während ω und σ beschränkt bleiben. Da der kompakte Anteil jetzt in der Sesquilinearform fehlt, ist das Problem schlecht gestellt. Es existieren nichttriviale Lösungen für das homogene Problem mit konstantem Potential auf Γ ; dies sind Potentiale der Dirichlet-Vektorfelder, die bereits in den vorigen Kapiteln mehrfach eine Rolle gespielt haben. Numerisch stellt man für diesen Fall eine sehr hohe Konditionszahl der Matrix fest.

Die Lösung wird eindeutig, wenn z.B.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

gefordert wird, was der physikalischen Bedingung der Nichtexistenz einer magnetischen Ladung entspricht. In unserem speziellen Fall kann die Bedingung durch das Einschränken auf bzgl. des Äquators der Kugel antisymmetrische Lösungen λ leicht implementiert werden. Das Magnetfeld ist in Abb. 5.8 dargestellt.

In beiden Grenzfällen wird der Poynting-Vektor tangential zu Γ , und es existiert keine Verlustleistung in Ω_C .

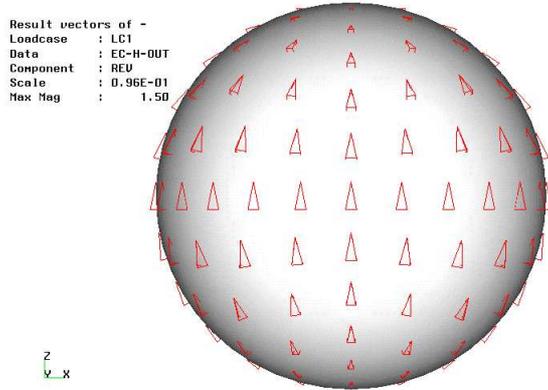


Abb. 5.7: Das Magnetfeld für $\sigma \rightarrow \infty$.

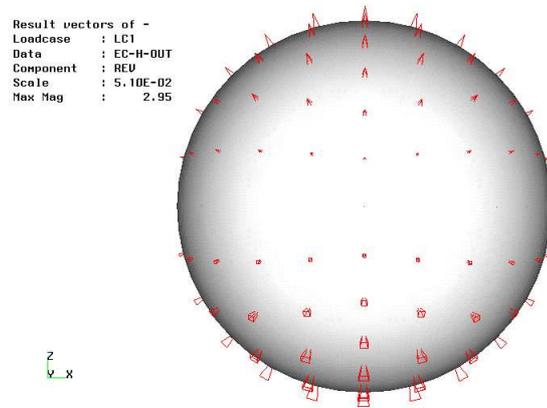


Abb. 5.8: Das Magnetfeld für $\mu \rightarrow \infty$.

6 Ausblick

Die vorliegende Arbeit hat sich sowohl mit einigen Aspekten der Modellierung zeitharmonischer Wirbelströme beschäftigt, als auch mit deren Berechnung mittels numerischer Methoden. In diesem letzten Kapitel soll auf einige Möglichkeiten hingewiesen werden, wie die in dieser Arbeit behandelten Themen erweitert und ergänzt werden können.

In Kapitel 2 wurden mit (2.44) und (2.45) Abschätzungen für den Modellierungsfehler des Wirbelstrommodells angegeben.

- Es sollte untersucht werden, inwieweit diese Bedingungen scharf sind, in dem Sinn, daß Lösungen existieren, für die sich die Gleichheit in der Fehlerabschätzung ergibt. Dies könnte mit Hilfe einer analytischen Lösung geschehen.
- Es bleibt zu zeigen, daß das Wirbelstrommodell dem einfacheren, statischen (2.68) „überlegen“ ist; anschaulich ist dies klar, denn Phänomene wie der Skineffekt werden vom Wirbelstrommodell wiedergegeben, vom statischen nicht.
- Um Aussagen über den Modellierungsfehler konkreter Situationen treffen zu können, sind für die Konstanten in (2.44) und (2.45) algorithmisch berechenbare Schranken wünschenswert. Hier werden Größen wie die maximale Krümmung eine Rolle spielen.

Kapitel 3 hat vielfältige Möglichkeiten der Realisierung von Strom- und Spannungsquellen für das Wirbelstrommodell vorgestellt. Es wurde jedoch aus Zeitgründen nur die Anregung mittels Generatorströmen implementiert.

- Die Implementierungen der weiteren Anregungsarten (Kontakte, nichtlokale Anregungen) sollten numerisch untersucht werden.
- Die numerischen Eigenschaften der vorgestellten Variationsformulierungen werden unterschiedliche Eigenschaften besitzen, wenn es darum geht, das Wirbelstrommodell mit Netzwerkmodellen zu koppeln. Auch hier besteht weiterer Forschungsbedarf.

In Kapitel 4 wurde demonstriert, daß mit Hilfe finiter Elemente und adaptiven, lokalen Mehrgitterverfahren sehr praxisnahe Problemstellungen gelöst werden können. Insbesondere bei stark ausgeprägtem Skineffekt stößt man jedoch an Grenzen des Verfahrens. Es ergeben sich noch viele Verbesserungsmöglichkeiten:

- Um komplexere Probleme behandeln zu können, sollte das Verfahren parallelisiert werden. Da einerseits die Simulationsumgebung \mathcal{UG} insbesondere für parallele Berechnungen entworfen wurde und andererseits bei der Implementierung der Elektromagnetik-Klasse darauf geachtet wurde, daß die verwendeten Algorithmen konform zum Parallelisierungskonzept von \mathcal{UG} sind, sollte eine Parallelisierung in einem überschaubaren Zeitrahmen möglich sein.
- Zumindest auf dem feinsten Gitter sollten auch Whitney-Elemente höherer Ordnung verwendet werden.
- Die Diskretisierung sollte auf Hexaeder, Prismen und Pyramiden erweitert werden.
- Die Anwendung sollte auf zeitabhängige, nichtlineare Wirbelstromprobleme erweitert werden.
- Für die Lösung auf Stufe 0 sollte ein algebraisches Mehrgitterverfahren verwendet werden, siehe beispielsweise [RS00].
- Für die sukzessive Gebietsapproximation ist eine Modifikation der Gitterverfeinerung notwendig, wenn deren Stabilität garantiert sein soll (siehe Anhang B).

Die h -unabhängige Konvergenz des Mehrgitterverfahrens wurde anhand von numerischen Experimenten nachgewiesen.

- Ein Beweis für die h -unabhängige Konvergenz für das zeitharmonische Wirbelstromproblem steht noch aus.

Für die Randelementmethode in Kap. 5 ist

- eine Erweiterung auf nichttriviale Leitertopologien und
- eine Beschleunigung, beispielsweise durch das Panel Clustering Verfahren [Sau00],

von Relevanz.

Die einfachste Form des
Schlusses besteht darin, einfach
aufzuhören.

(M. Rommel, dt. Politiker)

Anhang A

Beweis von Satz 2.3

Lemma A.1 (Fortsetzungssatz, [Hip03]) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Sei Ω_C strikt in Ω enthalten und zusammenziehbar, $\partial\Omega_C$ ebenfalls Lipschitz, $\Omega_C := \Omega \setminus \overline{\Omega_I}$ und $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}^0(\operatorname{div}_\epsilon; \Omega_I) =: \mathcal{X} \oplus \mathcal{D}_{\Omega_I}^\epsilon$. Dann gibt es einen stetigen Fortsetzungsoperator $T_C : \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_C) \mapsto \mathcal{X}$, dessen Norm nur von den Normen der Sobolevschen Fortsetzungsoperatoren $H^1(\Omega_C) \mapsto H^1(\Omega)$ und $H^1(\Omega_I) \mapsto H^1(\Omega)$ abhängt.

Beweis: Nach dem Sobolevschen Fortsetzungssatz existieren stetige Fortsetzungsoperatoren $S_I : H^1(\Omega_I) \mapsto H^1(\Omega)$ und $S_C : H^1(\Omega_C) \mapsto H^1(\Omega)$. Sei $u \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_C)$ gegeben. Wir spalten \mathbf{u} entsprechend der $L^2(\Omega)$ -orthogonalen Helmholtz-Zerlegung (siehe [GR86])

$$L^2(\Omega_C) = \mathbf{H}_0^0(\operatorname{div}; \Omega_C) \oplus \mathbf{grad} H^1(\Omega_C)$$

auf und erhalten

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{grad} \phi, \quad \mathbf{u}^0 \in \mathbf{H}_0^0(\operatorname{div}; \Omega_C) \cap \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_C), \quad \phi \in H^1(\Omega_C).$$

Sei $\mathbf{v} := \mathbf{rot} \mathbf{u}^0 \in \mathbf{H}^0(\operatorname{div}; \Omega_C)$. Da $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\frac{1}{2}, \partial\Omega_C} = 0$, ist das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0 && \text{in } \Omega_I, \\ \partial_n \psi &= -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} && \text{auf } \partial\Omega_C, \\ \partial_n \psi &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

lösbar. Für die schwache Formulierung des Randwertproblems gilt

$$|\psi|_{H^1(\Omega_I)} \leq \|S_I\| \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_C)}.$$

Sei B_Ω eine Ω einbettende Kugel. Wir definieren

$$\mathbf{w} := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{in } \Omega_C \\ \mathbf{grad} \psi & \text{in } \Omega_I \\ 0 & \text{in } B_\Omega \setminus \Omega \end{cases},$$

so daß $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^0(\operatorname{div}; B_\Omega)$. Nach [GR86, Satz 3.5] gibt es ein $\Psi \in \mathbf{H}^1(B_\Omega)$, so daß $\mathbf{rot} \Psi = \mathbf{w}$, $\operatorname{div} \Psi = 0$ und

$$\|\Psi\|_{\mathbf{H}^1(B_\Omega)} \leq K \|\mathbf{w}\|_{L^2(B_\Omega)},$$

wobei $K > 0$ eine Konstante mit der Dimension einer Länge ist, die zwar von B_Ω , nicht jedoch von Ω abhängt.

Demzufolge ist dann

$$\|\Psi\|_{\mathbf{H}^1(B_\Omega)} \leq K \sqrt{\|S_I\|^2 + 1} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \leq K \sqrt{\|S_I\|^2 + 1} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}. \quad (\text{A.1})$$

Im folgenden benutzen wir das Symbol Ψ ebenfalls für die Restriktion von Ψ auf Ω_C .

Da $\mathbf{u}^0 - \Psi \in \mathbf{H}^0(\mathbf{rot}; \Omega_C)$ und Ω_C als zusammenziehbar angenommen wurde, gilt

$$\mathbf{u}^0 - \Psi = \mathbf{grad} \eta$$

für ein $\eta \in H^1(\Omega_C)$ mit

$$|\eta|_{H^1(\Omega_C)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} + \|\Psi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} + K \sqrt{\|S_I\|^2 + 1} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}. \quad (\text{A.2})$$

Man beachte, daß wir für ein allgemeines Ω_C nur $\mathbf{u}^0 - \Psi = \mathbf{grad} \eta + \mathbf{h}$, \mathbf{h} ist ein harmonisches Vektorfeld, bekommen hätten.

Insgesamt erhalten wir dann für \mathbf{u} die Darstellung

$$\mathbf{u} = \Psi + \mathbf{grad} \theta, \quad \theta = \eta + \phi \in H^1(\Omega_C), \quad \Psi \in \mathbf{H}^1(\Omega_C). \quad (\text{A.3})$$

Wir setzen θ zu $\tilde{\theta} \in H^1(\Omega)$ und die Komponenten von Ψ zu $\tilde{\Psi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ harmonisch fort. Dann gilt mit

$$\|S_C\| := \max \left\{ \sup_{\phi} \frac{\|S_C \phi\|_{H^1(\Omega)}}{\|\phi\|_{H^1(\Omega_C)}}, \sup_{\phi} \frac{|S_C \phi|_{H^1(\Omega)}}{|\phi|_{H^1(\Omega_C)}} \right\}$$

unter der Berücksichtigung, daß Konstanten auf Konstanten abgebildet werden,

$$\|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|S_C\| \|\theta\|_{H^1(\Omega_C)}, \quad (\text{A.4})$$

$$\|\tilde{\Psi}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|S_C\| \|\Psi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_C)}.$$

Mit $\tilde{\mathbf{u}} := \tilde{\Psi} + \mathbf{grad} \tilde{\theta}$ gilt $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ und unter Benutzung von (A.3) und (A.4)

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\tilde{\Psi}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|S_C\| \left(\|\Psi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_C)} + |\eta|_{H^1(\Omega_C)} + |\phi|_{H^1(\Omega_C)} \right).$$

Mit Hilfe von (A.1) und (A.2) erhalten wir dann schließlich die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &= \|\mathbf{rot} \tilde{\Psi}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{\|S_C\|}{D_C} \|\Psi\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_C)} \\ &\leq \frac{K}{D_C} \|S_C\| \sqrt{\|S_I\|^2 + 1} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq \|S_C\| \left(2K \sqrt{\|S_I\|^2 + 1} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} + |\phi|_{H^1(\Omega_C)} \right) \\ &\leq 2 \|S_C\| \left(K \sqrt{\|S_I\|^2 + 1} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \right) \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}K \|S_C\|}{D_C} \left(\sqrt{\|S_I\|^2 + 1} + 1 \right) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_C)}, \end{aligned}$$

wobei $D_C := \text{diam}(\Omega_C)$. Eine $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -orthogonale Projektion auf das Komplement von $\mathcal{D}_{\Omega_I}^\epsilon \oplus \epsilon \mathbf{grad} H_0^1(\Omega_I)$ führt auf die gewünschte Fortsetzung $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{X}$. \square

Lemma A.2 (Friedrichs-Typ Ungleichung, [Hip03]) Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Lipschitz-Rand, ϵ ein gleichmäßig positives Skalarfeld. Dann gilt für

$$\mathbf{u} \in \mathcal{X}_N := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div}_\epsilon; \Omega) \cap \mathcal{D}_\Omega^{\epsilon \perp}$$

die Ungleichung

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\text{div}(\epsilon \mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right)$$

mit einer Konstante $C = C(\Omega) > 0$.

Beweis: Wir nehmen an, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\mathbf{u}_n \in \mathcal{X}_N$ existiert, so daß

$$\|\mathbf{u}_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \geq n \left(\|\mathbf{rot} \mathbf{u}_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\text{div}(\epsilon \mathbf{u}_n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right). \quad (\text{A.5})$$

Dann gilt für $\mathbf{u}_n^0 := \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}$

$$\|\mathbf{rot} \mathbf{u}_n^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\|\text{div}(\epsilon \mathbf{u}_n^0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{A.7})$$

und

$$\|\mathbf{u}_n^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.8})$$

Da die Einbettung $\mathcal{X}_N \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ kompakt ist (siehe [Hip02a, Korollar 4.3]), existiert eine Teilfolge

$$(\mathbf{u}_{n_k}^0)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbf{u}_{n_k}^0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}^* \in \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Aus (A.6), (A.7) folgt, daß auch $\mathbf{u}_{n_k}^0 \rightarrow \mathbf{u}^*$ in \mathcal{X}_N für $k \rightarrow \infty$, so daß

$$\mathbf{u}^* \in \mathcal{X}_N, \quad \text{div}(\epsilon \mathbf{u}^*) = 0, \quad \text{und} \quad \mathbf{rot} \mathbf{u}^* = 0.$$

Dann ist $\mathbf{u}^* \in \mathcal{D}_\Omega^\epsilon \cap \mathcal{D}_\Omega^{\epsilon \perp} = \emptyset \implies \mathbf{u}^* = 0$, in Widerspruch zu (A.8). Da folglich die Eingangsbehauptung (A.5) falsch ist, muß Lemma A.2 richtig sein. \square

Mit Hilfe von Lemma A.1 und A.2 läßt sich Satz 2.3, den wir im folgenden der besseren Übersicht halber nochmals angeben, jetzt beweisen:

Satz 2.3 Sei $\Omega_I \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge von $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Omega_C := \Omega \setminus \overline{\Omega_I}$ deren Komplement, so daß $\partial\Omega_I$ und $\partial\Omega_C$ Lipschitz sind, $\mathcal{X} := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}^0(\text{div}_\epsilon; \Omega_I) \cap \mathcal{D}_{\Omega_I}^{\epsilon \perp}$. Dann existieren nur von der Form von Ω_I und Ω_C abhängige Konstanten C_1 und C_2 , so daß

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)}^2 \leq \left(C_1 D^2 \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C_2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)}^2 \right) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{X},$$

mit $D = \text{diam}(\Omega)$.

Beweis: Wir wählen ein beliebiges $\mathbf{u} \in \mathcal{X}$ und setzen $\mathbf{v} := \mathbf{u}|_{\Omega_C} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_C)$. Nach Lemma A.1 finden wir eine Fortsetzung $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{X}$, so daß

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} &\leq K_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_C)} , \\ \|\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} &\leq K_2 \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} . \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega_I) \cap \mathbf{H}^0(\mathbf{div}_\epsilon; \Omega_I)$, $\tilde{\mathbf{u}} \perp \mathcal{D}_{\Omega_I}^\epsilon$ und

$$\|\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} \leq \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} + K_2 \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} .$$

Durch Kombination von Lemma A.2

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} &\leq K_3 \left(\|\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} + \|\mathbf{div} \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} \right) \\ &= K_3 \|\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} \end{aligned}$$

und

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} \leq \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} + \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)}$$

erhalten wir mit $D_C := \text{diam}(\Omega_C)$, $D := \text{diam}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} &\leq K_3 \|\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} + K_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega_C)} \\ &\leq K_3 \left(\|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} + K_2 \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_I)} \right) \\ &\quad + K_1 \left(D_C \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \right) \\ &= (K_3 (K_2 + 1) + K_1 D_C) \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + K_1 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} \\ &\leq D \sqrt{\frac{C_1}{2}} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sqrt{\frac{C_2}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_C)} . \end{aligned}$$

Ein Skalierungsargument zeigt schließlich, daß die Konstanten C_1, C_2 nicht durch eine Änderung der Größe der Anordnung beeinflusst werden. \square

Anhang B

Schwierigkeiten bei sukzessiver Gebietsapproximation

Bei der in Kapitel 4 beschriebenen sukzessiven Gebietsapproximation können verschiedene Schwierigkeiten entstehen. Hier werden beispielhaft zwei Grundprobleme dargestellt, bei denen die Elemente entarten können. Der besseren Übersicht wegen wurden 2D-Beispiele gewählt. Die Probleme existieren natürlich auch in 3D, wobei dort die Vielfalt der problematischen Situationen zunimmt.

Elemente können flach werden

Wenn mehr als eine Elementseite an einem glatten Randstück liegt, können die Elemente bei Verfeinerung immer flacher werden, wie in Abb. B.1 an den Elementen links und rechts in der oberen Reihe zu sehen ist. Das Problem läßt sich durch Einführen eines inneren Knoten beheben, siehe untere Reihe der Abbildung, was einer Bisektion entspricht.

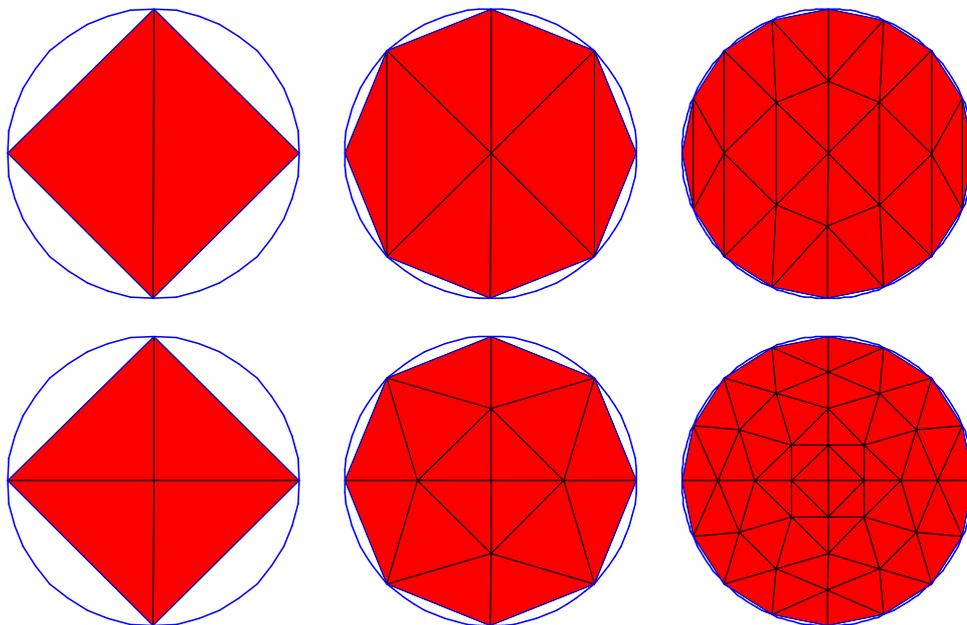


Abb. B.1: Problematik der flacher werdenden Elemente

In 3D-Situationen wurde diese Situation bei automatisch erzeugten, groben Gittern häufig beobachtet. Durch eine automatische a priori-Bisektion aller in Frage kommender Elemente und anschließender Berechnung eines grünen Abschlusses kann das Problem behoben werden.

Nichtkonvexe Gebiete: Elemente können entarten oder „umklappen“

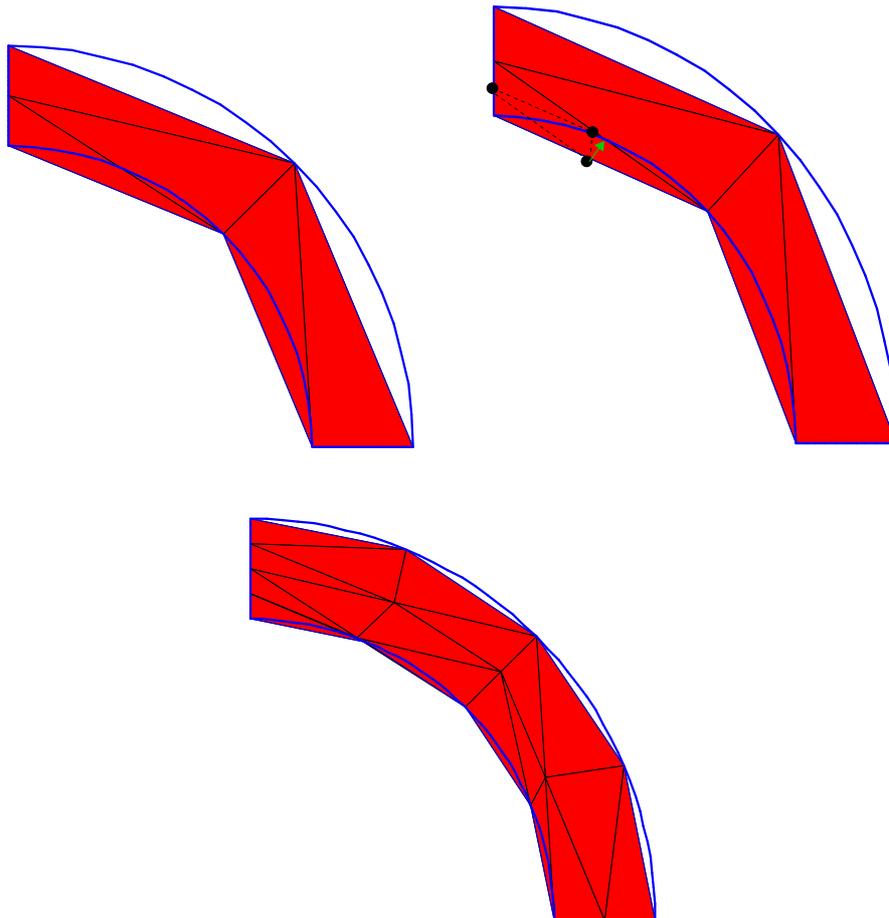


Abb. B.2: Entartende Elemente bei nichtkonvexem Gebiet

Bei nichtkonvexen Gebieten oder Teilgebieten und sehr grober Auflösung können bei Verfeinerung sehr flache Elemente entstehen; der Effekt kann so extrem sein, daß sich die Elemente bei der Verschiebung der neuen Knoten auf den Rand schließlich selbst durchdringen („umklappen“). In Abb. B.2 sieht man ein Beispiel, bei dem ein Element so degeneriert, daß von den eigentlich vier Sohnelementen (oberes Bild, rechts) nur noch zwei zu erkennen sind (unteres Bild).

Notation

Gebiete

Ω	Gebiet (offen und zusammenhängend) im \mathbb{R}^3
Ω_C	offene Teilmenge von Ω (Leiter)
Ω_I	$:= \Omega \setminus \overline{\Omega_C}$ (Isolator)
Γ	Gebietsrand im \mathbb{R}^3
Γ_e	Gebietsrand mit elektrischer Randbedingung
Γ_h	Gebietsrand mit magnetischer Randbedingung
\mathbf{n}	äußerer Einheitsnormalenvektor

Allgemeines

\cdot	(reelles) euklidisches Skalarprodukt des \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^N
\times	(reelles) Vektorprodukt (äußeres Produkt) des \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{C}^3
$\text{diam } \Omega$	Durchmesser von Ω
$\text{supp}(f)$	Träger von f , $\text{supp}(f) := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$
$\mathcal{O}(f)$	Landau-Symbol: eine Funktion mit $ \mathcal{O}(f)/f \leq C$, C konstant
$[\cdot]_\Gamma$	Sprung einer Funktion oder eines Vektorfeldes entlang Γ
Re	Realteil
Im	Imaginärteil
z^*	konjugiert komplexe Zahl zu $z \in \mathbb{C}$
$ \cdot $	Betrag bzw. euklidische Norm im \mathbb{R}^3
\forall	für alle
δ	Abstand
$\text{Kern}(L)$	Kern der linearen Abbildung L

$\text{Bild}(L)$ Bild der linearen Abbildung L

Differentialoperatoren

grad	Gradient
div	Divergenz
rot	Rotation
Δ	Laplace-Operator
grad $_{\Gamma}$	Oberflächengradient
rot $_{\Gamma}$	vektorielle Oberflächenrotation
div $_{\Gamma}$	Oberflächendivergenz
rot $_{\Gamma}$	skalare Oberflächenrotation
Δ_{Γ}	Laplace-Beltrami-Operator

Funktionsräume

$C_0^{\infty}(\Omega)$	Raum der skalaren glatten Funktionen mit kompaktem Träger in Ω
$C_0^{\infty}(\Omega)$	$:= C_0^{\infty}(\Omega)^3$
$L^2(\Omega)$	Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf Ω
$\mathbf{L}^2(\Omega)$	$:= L^2(\Omega)^3$
$H^s(\Omega)$	Standard-Sobolev-Raum reeller Ordnung s
$\mathbf{H}^s(\Omega)$	$:= H^s(\Omega)^3$
$H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^3)$	Raum der Funktionen, die lokal in H^s liegen
$\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$	$:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$
$\mathbf{H}^0(\text{div}; \Omega)$	$:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega), \text{div } \mathbf{u} = 0\}$
$\mathbf{H}(\text{div}_{\epsilon}; \Omega)$	$:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{div}(\epsilon \mathbf{u}) \in L^2(\Omega)\}$
$\mathbf{H}^0(\text{div}_{\epsilon}; \Omega)$	$:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega), \text{div}(\epsilon \mathbf{u}) = 0\}$
$\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$	$:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{rot } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$
$\mathbf{H}^0(\text{rot}; \Omega)$	$:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega), \text{rot } \mathbf{u} = 0\}$
$\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}; \Gamma)$	Raum der gedrehten tangentialen Spuren von $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$

$\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma; \Gamma)$	Raum der tangentialen Spuren von $\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)$
$BL(\Omega)$	Beppo-Levi-Raum

Cohomologie

$\beta_1(\Omega), \beta_2(\Omega)$	1. und 2. Betti-Zahl von Ω
$\mathcal{H}^1(\Omega)$	1. Cohomologiegruppe
$\mathcal{H}^2(\Omega, \partial\Omega)$	2. relative Cohomologiegruppe
\mathcal{D}_{Ω_I}	harmonische Dirichlet-Vektorfelder in Ω_I
\mathcal{N}_{Ω_C}	harmonische Neumann-Vektorfelder in Ω_C

Normen und Skalarprodukte

$\ \cdot\ _{\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)}$	$:= \sqrt{\ \cdot\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \text{diam}(\Omega)^2 \ \text{div} \cdot\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2}$
$\ \cdot\ _{\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)}$	$:= \sqrt{\ \cdot\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \text{diam}(\Omega)^2 \ \text{rot} \cdot\ _{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2}$
$\ \cdot\ _V$	natürliche Norm des Hilbert-Raumes V
$(\cdot, \cdot)_V$	hermisches Skalarprodukt des Hilbert-Raumes V
$\ \cdot\ _{\mathfrak{E}; \Omega}$	Energienorm (bei \mathbf{E} -basierter Formulierung)
$\ \cdot\ _{\mathfrak{P}; \Omega}$	skalierte Energienorm („Leistungsnorm“)
$\langle \cdot, \cdot \rangle_V$	duale Paarung von V und V'
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma}$	duale Paarung von $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ oder $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, je nach Argument
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tau, \Gamma}$	duale Paarung von $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma; \Gamma)$ und $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma; \Gamma)$

Elektromagnetische Größen

\mathcal{E}, \mathbf{E}	elektrisches Feld und komplexe Amplitude
\mathcal{B}, \mathbf{B}	magnetische Induktion und komplexe Amplitude
\mathcal{D}, \mathbf{D}	dielektrische Verschiebungsdichte und komplexe Amplitude
\mathcal{H}, \mathbf{H}	magnetisches Feld und komplexe Amplitude
\mathcal{J}, \mathbf{J}	elektrische Stromdichte und komplexe Amplitude
\mathbf{J}_G	komplexe Amplitude der Generatorstromdichte (eingepögte Stromdichte)

ρ, q	elektrische Ladungsdichte und komplexe Amplitude
ω	Kreisfrequenz
λ	Wellenlänge oder Belegungsdichte beim Einfachichtpotential
c	Lichtgeschwindigkeit
ϵ	Permittivität
μ	Permeabilität
ϵ_0	$\approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
σ	elektrische Leitfähigkeit
δ	Eindringtiefe
U	Spannung
I	Strom
P	(komplexe) Leistung
C	Kapazität
L, L_{ij}	Induktivität, Induktivitäten
P, p_{ij}	(Matrix der) Potentialkoeffizienten
C, c_{ij}	(Matrix der) Kapazitätskoeffizienten
Φ, Φ_{ij}	magnetischer Fluß, Teilflüsse
η	Oberflächenimpedanz

Finite Element Diskretisierung

$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform oder Sesquilinearform
\mathbf{A}	der zur Bilinearform assoziierte Operator
\mathbf{A}, \mathbf{A}_h	Systemmatrix
\mathbf{x}, \mathbf{b}	Lösungsvektor und rechte Seite
\mathbf{G}	diskreter Gradient
\mathbf{R}	diskrete Rotation
\mathbf{D}	diskrete Divergenz
Ω_h	Gebietsapproximation
\mathcal{T}_h	Triangulierung

h	Gitterweite
T	Element
$\mathcal{S}_p(\mathcal{T}_h)$	Raum der global stetigen, stückweise polynomialen Funktionen des Grades p
$\mathcal{RT0}(\mathcal{T}_h)$	Raviart-Thomas-Raum
$\mathcal{W0}(\mathcal{T}_h)$	$= \mathcal{S}_1(\mathcal{T}_h)$, Raum der Whitney-0-Formen
$\mathcal{W1}(\mathcal{T}_h)$	Raum der Whitney-1-Formen (Kantenelemente)
$\mathcal{W2}(\mathcal{T}_h)$	$= \mathcal{RT0}(\mathcal{T}_h)$, Raum der Whitney-2-Formen (Flächenelemente)
$\mathcal{W3}(\mathcal{T}_h)$	Raum der Whitney-3-Formen
$\mathcal{N}(\mathcal{T}_h)$	(Eck-)Knoten der Triangulierung \mathcal{T}_h
$\mathcal{E}(\mathcal{T}_h)$	Kanten der Triangulierung \mathcal{T}_h
$\mathcal{F}(\mathcal{T}_h)$	Seiten der Triangulierung \mathcal{T}_h
$\text{vol}(T)$	Volumen von T

Mehrgitterverfahren

\mathbf{c}, \mathbf{d}	Korrektur und Defekt
\mathcal{T}_l	Triangulierung der Stufe l
$\mathbf{A}_l, \mathbf{x}_l, \mathbf{b}_l$	Matrix, Lösungsvektor und rechte Seite auf Stufe l
$\mathbf{c}_l, \mathbf{d}_l$	Korrektur und Defekt auf Stufe l
\mathbf{G}	Knoten-Kanten Inzidenzmatrix (diskreter Gradient)
\mathbf{R}	Kanten-Seiten Inzidenzmatrix (diskrete Rotation)
$\mathbf{L}, \mathbf{L}(\mathbf{A})$	strikte untere Dreiecksmatrix (von \mathbf{A})
$\mathbf{U}, \mathbf{U}(\mathbf{A})$	strikte obere Dreiecksmatrix (von \mathbf{A})
S	Glättungsoperation
$\tilde{\mathbf{A}}$	approximierte Matrix (z.B. $\text{diag}(\mathbf{A}), \text{diag}(\mathbf{A}) + \mathbf{L}(\mathbf{A})$)
\mathbf{r}_l	Restriktionsmatrix von Stufe l
\mathbf{p}_l	Prolongationsmatrix von Stufe l
\mathbf{I}	Einheitsmatrix (Identität)
$\sigma(\mathbf{A})$	Spektrum von \mathbf{A}
$\rho(\mathbf{A})$	Spektralradius von \mathbf{A}

\mathcal{K}^n	Krylov-Unterraum der Dimension n
$\mathfrak{F}(T)$	Vaterelement von T
\mathcal{I}_l	Isomorphismus zwischen Koeffizientenvektor und Finite-Element-Funktionen auf Stufe l
\mathcal{P}_l	Menge der geometrischen Objekte als Träger der Freiheitsgrade („Interpolationspunkte“)
\mathcal{T}_l^{lok}	lokales Gitter auf Stufe l
\mathbf{A}_l^{lok}	lokale Matrix der Stufe l
\mathbf{x}_l^{lok}	Vektor auf lokalem Gitter auf Stufe l

Randelemente

ϕ	Skalarpotential
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform oder Sesquilinearform
$a_\Gamma(\cdot, \cdot)$	Sesquilinearform auf dem Rand
λ	Flächenbelegungsichte
$\mathcal{S}\lambda$	Einfachschichtpotential
V	Einfachschichtoperator auf dem Rand
K	Doppelschichtoperator
K'	adjungierter Doppelschichtoperator
\mathbf{K}	vektorieller Randoperator
A	Pseudodifferentialoperator auf dem Rand
A_0	Hauptteil des Operators A

Literaturverzeichnis

- [ABN00] **H. Ammari, A. Buffa und J.-C. Nédélec.** A justification of eddy currents model for the Maxwell equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 60(5): S. 1805–1823 (2000).
- [AFV01] **A. Alonso Rodriguez, P. Fernandes und A. Valli.** Weak and strong formulations for the time-harmonic eddy-current problem in general domains. Techn. Ber. UTM-603, Università degli Studi di Trento, Povo (Trento), Italy (September 2001).
- [AFW00] **D. Arnold, R. Falk und R. Winther.** Multigrid in $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$. *Numer. Math.*, 85(2): S. 175–195 (2000).
- [Alo99] **A. Alonso.** A mathematical justification of the low-frequency heterogeneous time-harmonic Maxwell equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 9(3): S. 475–489 (1999).
- [AN96] **H. Ammari und J.-C. Nédélec.** Sur les conditions d'impédance généralisées pour les couches minces. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I*, 322: S. 995–1000 (1996).
- [AR90] **R. Albanese und G. Rubinacci.** Formulation of the eddy-current problem. *IEE Proc. A*, 137(1): S. 16–22 (1990).
- [Ban90] **R. Bank.** *PLTMG: A Software Package for Solving Elliptic Partial Differential Equations, User's Guide 6.0.* SIAM, Philadelphia (1990).
- [Bas96] **P. Bastian.** *Parallele adaptive Mehrgitterverfahren.* Teubner Skripten zur Numerik. Teubner-Verlag (1996).
- [BBC⁺94] **R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine und H. van der Vorst.** *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods.* SIAM Books, Philadelphia (1994).
- [BBJ⁺97] **P. Bastian, K. Birken, K. Johannsen, S. Lang, N. Neuss, H. Rentz-Reichert und C. Wieners.** UG—a flexible software toolbox for solving partial differential equations. *Computing and Visualization in Science*, 1: S. 27–40 (1997).

- [BBJ⁺99] **P. Bastian, K. Birken, K. Johannsen, S. Lang, V. Reichenberger, C. Wieners, G. Wittum und C. Wrobel.** Parallel solutions of partial differential equations with adaptive multigrid methods on unstructured grids. In *High performance computing in science and engineering II* (1999).
- [BC01a] **A. Buffa und P. Ciarlet.** On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part I: An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 24(1): S. 9–30 (2001).
- [BC01b] **A. Buffa und P. Ciarlet.** On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part II: Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 24(1): S. 31–48 (2001).
- [BCS02] **A. Buffa, M. Costabel und D. Sheen.** On traces for $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 276: S. 845–867 (2002).
- [BDH⁺99] **R. Beck, P. Deuffhard, R. Hiptmair, R. Hoppe und B. Wohlmuth.** Adaptive multilevel methods for edge element discretizations of Maxwell's equations. *Surveys on Mathematics for Industry*, 8(3-4): S. 271–312 (1999).
- [BDY88] **R. Bank, T. Dupont und H. Yserentant.** The hierarchical basis multigrid method. *Numer. Math.*, 52(4): S. 427–458 (1988).
- [Ben84] **A. Bendali.** Numerical analysis of the exterior boundary value problem for time harmonic Maxwell equations by a boundary finite element method. Part 1: The continuous problem. *Math. Comp.*, 43(167): S. 29–46 (1984).
- [BER95] **R. Beck, B. Erdmann und R. Roitzsch.** KASKADE 3.0. An object-oriented adaptive finite element code. Techn. Ber. TR 95-4, ZIB, Berlin, Germany (June 1995).
- [Bey95] **J. Bey.** Tetrahedral grid refinement. *Computing*, 55(4): S. 355–378 (1995).
- [Bey98] **J. Bey.** *Finite-Volumen und Mehrgitterverfahren für elliptische Randwertprobleme.* Advances in numerical mathematics. Teubner, Stuttgart, Leipzig (1998).
- [BF91] **F. Brezzi und M. Fortin.** *Mixed and hybrid finite element methods.* Springer (1991).
- [BH83] **D. Braess und W. Hackbusch.** A new convergence proof for the multigrid method including the V-cycle. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20: S. 967–975 (1983).
- [BHHW00] **R. Beck, R. Hiptmair, R. Hoppe und B. Wohlmuth.** Residual based a-posteriori error estimators for eddy current computation. *M²AN*, 34(1): S. 159–182 (2000).
- [BHW98] **P. Bastian, W. Hackbusch und G. Wittum.** Additive and multiplicative multi-grid – a comparison. *Computing*, 60(4): S. 345–364 (1998).

- [BHW00] **R. Beck, R. Hiptmair und B. Wohlmuth.** A hierarchical error estimator for eddy current computation. In *ENUMATH 99 - Proceedings of the 3rd European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Jyväskylä, Finland, July 26-30* (Hg. P. Neittaanmäki und T. Tiihonen), S. 110–120. World Scientific, Singapore (2000).
- [Bir88] **O. Biro.** Use of a two-component vector potential for 3-d eddy current calculations. *IEEE Trans. Mag.*, 24(1): S. 102–105 (1988).
- [BK00] **A. Bossavit und L. Kettunen.** Yee-like schemes on staggered cellular grids: A synthesis between FIT and FEM approaches. *IEEE Trans. Mag.*, 36(4): S. 861–867 (2000). contribution to COMPUMAG '99.
- [Bla88] **J. V. Bladel.** *Electromagnetic Fields*. Hemisphere Pub., revised Aufl. (1988).
- [Bof01] **D. Boffi.** Finite elements for the time harmonic Maxwell's equations. In *Computational Electromagnetics. Proceedings of the GAMM Workshop on Computational Electromagnetics, Kiel, Germany, January 26–28, 2001* (Hg. C. Carstensen, S. Funken, W. Hackbusch, R. Hoppe und P. Monk), Bd. 28 von *LNCSE*, S. 11–22. Springer, Berlin (2001).
- [Bos85] **A. Bossavit.** Two dual formulations of the 3-D eddy-currents problem. *COMPEL*, 4(2): S. 103–116 (1985).
- [Bos88a] **A. Bossavit.** A rationale for edge elements in 3D field computations. *IEEE Trans. Mag.*, 24: S. 74–79 (1988).
- [Bos88b] **A. Bossavit.** Whitney forms: A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proc. A*, 135(8): S. 493–500 (1988).
- [Bos90] **A. Bossavit.** Solving Maxwell's equations in a closed cavity and the question of spurious modes. *IEEE Trans. Mag.*, 26(2): S. 702–705 (1990).
- [Bos98a] **A. Bossavit.** *Computational Electromagnetism. Variational Formulation, Complementarity, Edge Elements*. Nr. 2 in Academic Press Electromagnetism Series. Academic Press, San Diego (1998).
- [Bos98b] **A. Bossavit.** “Mixed” systems of algebraic equations in computational electromagnetism. *COMPEL*, 17(1/2/3): S. 59–63 (1998).
- [Bos00] **A. Bossavit.** Most general “non-local” boundary conditions for the Maxwell equation in a bounded region. *COMPEL*, 19(2): S. 239–245 (2000).
- [Bos02] **A. Bossavit.** Generating whitney forms of polynomial degree one and higher. *IEEE. Trans. Mag.*, 38(2): S. 341–344 (2002).
- [BPR⁺90] **O. Biro, K. Preis, W. Renhart, K. Richter und G. Vrisk.** Performance of different vector potential formulations in solving multiply connected 3D eddy current problems. *IEEE Trans. Mag.*, 26(2): S. 438–441 (1990).

- [BPWX91] **J. Bramble, J. Pasciak, J. Wang und J. Xu.** Convergence estimates for multigrid algorithms without regularity assumptions. *Math. Comput.* 57, 57(195): S. 23–45 (1991).
- [BPX90] **J. Bramble, J. Pasciak und J. Xu.** Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comp.*, 55: S. 1–22 (1990).
- [Bra77] **A. Brandt.** Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Math. Comp.*, 31(138): S. 333–390 (1977).
- [Bra93] **J. Bramble.** *Multigrid methods*, Bd. 294 von *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, London (1993).
- [Bra97] **D. Braess.** *Finite Elemente*. Springer-Verlag Berlin, 2. Aufl. (1997).
- [BSW83] **R. Bank, A. Sherman und A. Weiser.** Refinement algorithm and data structures for regular local mesh refinement. In *Scientific Computing* (Hg. R. Stepleman et al.), Bd. 44, S. 3–17. IMACS North-Holland, Amsterdam (1983).
- [BW94] **P. Bastian und G. Wittum.** On robust and adaptive multi-grid methods. In *Multigrid Methods IV, Proceedings of the Fourth European Multigrid Conference, Amsterdam, July 6-9, 1993*, Bd. 116 von *ISNM*, S. 1–17. Birkhäuser, Basel (1994).
- [CD97] **M. Costabel und M. Dauge.** Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains. Techn. Ber. 97–19, IRMAR, Rennes (September 1997).
- [Ces96] **M. Cessenat.** *Mathematical Methods in Electromagnetism*, Bd. 41 von *Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific, Singapore (1996).
- [CK81] **D. Colton und R. Kress.** The impedance boundary value problem for the time-harmonic Maxwell equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 3: S. 475–487 (1981).
- [Cos88] **M. Costabel.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(3): S. 613–626 (1988).
- [DHL99] **P. Dular, F. Henrotte und W. Legros.** A general and natural method to define circuit relations associated with magnetic vector potential formulations. *IEEE Trans. Mag.*, 35(3): S. 1630–1633 (1999).
- [DHN⁺94] **P. Dular, J.-Y. Hody, A. Nicolet, A. Genon und W. Legros.** Mixed finite elements associated with a collection of tetrahedra, hexahedra and prisms. *IEEE Trans Magnetics*, MAG-30(5): S. 2980–2983 (1994).
- [DHR⁺97] **P. Dular, F. Henrotte, F. Robert, A. Genon und W. Legros.** A generalized source magnetic field calculation method for inductors of any shape. *IEEE Trans. Mag.*, 33(2): S. 1398–1401 (1997).

- [Dir96] **H. Dirks.** Quasi-stationary fields for microelectronic applications. *Electrical Engineering*, 79: S. 145–155 (1996).
- [DL88] **R. Dautray und J.-L. Lions.** *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Bd. 2. Springer, Berlin (1988).
- [DL90a] **R. Dautray und J.-L. Lions.** *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Bd. 4. Springer, Berlin (1990).
- [DL90b] **R. Dautray und J.-L. Lions.** *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Bd. 4. Springer, Berlin (1990).
- [DLVH99] **H. De Gersem, D. Lahaye, S. Vandewalle und K. Hameyer.** Comparison of quasi minimal residual and bi-conjugate gradient iterative methods to solve complex symmetric systems arising from time-harmonic magnetic simulations. *COMPEL*, 18(3): S. 298–310 (1999).
- [Dör96] **W. Dörfler.** A convergent adaptive algorithm for poisson’s equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33: S. 1106–1124 (1996).
- [ES98] **S. Erichsen und S. Sauter.** Efficient automatic quadrature in 3-d galerkin bem. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157: S. 215–224 (1998).
- [Fla89] **H. Flanders.** *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover Publications (1989).
- [FN90] **K. Fujiwara und T. Nakata.** Results for benchmark problem 7. *COMPEL*, 9(3): S. 137–154 (1990).
- [FN91] **F. Freund und N. Nachtigal.** QMR: A quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems. *Numer. Math.*, 60: S. 315–339 (1991).
- [Fra97] **T. Frankel.** *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press (1997).
- [Fre94] **R. Freund.** Transpose-free quasi-minimal residual methods for non-Hermitian linear systems. *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, 60(69): S. 69–93 (1994).
- [GG90] **M. Guiggiani und A. Gigante.** A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method. *Trans. ASM—J. Appl. Mech.*, 57: S. 906–914 (1990).
- [GH99] **V. Gradinaru und R. Hiptmair.** Whitney elements on pyramids. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 8: S. 154–168 (1999).
- [GK01a] **P. Gross und P. Kotiuga.** Data structures for geometric and topological aspects of finite element algorithms. *Progress in Electromagnetic Research, PIER* 32: S. 151–169 (2001).

- [GK01b] **P. Gross und P. Kotiuga.** Finite element-based algorithms to make cut sfor magnetic scalar potentials: Topological constraints and computational complexity. *Progress in Electromagnetic Research*, PIER 32: S. 207–245 (2001).
- [GPS96] **A. Greenbaum, V. Ptak und Z. Strakos.** Any convergence curve is possible for GMRES. *SIAM Matrix Anal. Appl.*, 17(3): S. 465–470 (1996).
- [GR86] **V. Girault und P. Raviart.** *Finite element methods for Navier–Stokes equations.* Springer, Berlin (1986).
- [Hac85] **W. Hackbusch.** *Multi-grid Methods and Applications.* Springer–Verlag, Berlin (1985).
- [Hac86] **W. Hackbusch.** *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* B.G. Teubner–Verlag, Stuttgart (1986).
- [Hac89] **W. Hackbusch.** *Integralgleichungen. Theorie und Numerik*, Bd. 68 von *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik.* Teubner-Verlag, Stuttgart (1989).
- [Hac93] **W. Hackbusch.** *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme.* B.G. Teubner–Verlag, Stuttgart, 2. Aufl. (1993).
- [Hip99] **R. Hiptmair.** Multigrid method for Maxwell’s equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(1): S. 204–225 (1999).
- [Hip00a] **R. Hiptmair.** Multigrid for eddy current computation. Report 154, SFB 382, Universität Tübingen, Tübingen, Germany (March 2000). Submitted to Math. Comp.
- [Hip00b] **R. Hiptmair.** Multilevel gauging for edge elements. *Computing*, 64(2): S. 97–122 (2000).
- [Hip01] **R. Hiptmair.** Higher order Whitney forms. In *Geometric Methods for Computational Electromagnetics* (Hg. F. Teixeira), Bd. 32 von *Progress in Electromagnetics Research*, S. 271–299. PIERS, Boston, MA (2001).
- [Hip02a] **R. Hiptmair.** Finite elements in computational electromagnetism. *Acta Numerica*, j: S. 237–339 (2002). DOI 10.1017/S0962492902000041.
- [Hip02b] **R. Hiptmair.** Symmetric coupling for eddy current problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1): S. 41–65 (2002).
- [Hip03] **R. Hiptmair.** Zum Beweis des Fortsetzungssatzes und der Friedrichs-Typ Ungleichung. Private Korrespondenz.
- [HM82] **S. Hariharan und R. MacCamy.** Integral equation procedures for eddy current problems. *Journal of Computational Physics*, 45: S. 80–99 (1982).

- [HO01] **R. Hiptmair und J. Ostrowski.** Generators of $h_1(\gamma_h, \mathbb{Z})$ for triangulated surfaces: Construction and classification. Techn. Ber. 160, Sonderforschungsbereich 382, Universität Tübingen, Tübingen, Germany (March 2001).
- [HS52] **M. Hestenes und E. Stiefel.** Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 49: S. 409–436 (1952).
- [HS03] **R. Hiptmair und O. Sterz.** Current and voltage excitations for the eddy current model. Techn. Ber. 2003-07, SAM, ETH Zürich (Juli 2003). (eingereicht).
- [Jac83] **J. Jackson.** *Klassische Elektrodynamik.* Walter de Gruyter, Berlin, 2. Aufl. (1983).
- [Jän93] **K. Jänich.** *Vektoranalysis.* Springer, Berlin, 2. Aufl. (1993).
- [KA00] **P. Knabner und L. Angermann.** *Numerik partieller Differentialgleichungen.* Springer, Berlin (2000).
- [Ket01] **L. Kettunen.** Fields and circuits in computational electromagnetism. *IEEE Trans. Mag.*, 37(5): S. 3393–3396 (2001).
- [KFB98] **L. Kettunen, K. Forsman und A. Bossavit.** Formulation of the eddy current problems in multiply connected regions in terms of \mathbf{h} . *Int. J. Numer. Meth. Engr.*, 41: S. 935–954 (1998).
- [Kos94] **A. Kost.** *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder.* Springer, Berlin (1994).
- [Kot87] **P. Kotiuga.** On making cuts for magnetic scalar potentials in multiply connected regions. *J. Appl. Phys.*, 61(8): S. 3916–3918 (1987).
- [Kot89] **P. Kotiuga.** An algorithm to make cuts for magnetic scalar potentials in tetrahedral meshes based on the finite element method. *IEEE Trans. Magnetics*, 25(5): S. 4129–4131 (1989).
- [Lan01] **S. Lang.** *Parallele Numerische Simulation instationärer Probleme mit adaptiven Methoden auf unstrukturierten Gittern.* Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, Germany (2001). Mitteilungen des Instituts für Wasserbau, Heft 110.
- [LM72] **J. Lions und F. Magenes.** *Nonhomogeneous boundary value problems and applications.* Springer-Verlag, Berlin (1972).
- [Mar68] **E. Martensen.** *Potentialtheorie.* Teubner, Stuttgart (1968).
- [May86] **I. Mayergoyz.** 3D eddy current problems and the boundary integral equation method. In *Computational electromagnetics* (Hg. Z. Cendes), S. 163–171. Elsevier, Amsterdam (1986).

- [May98] **I. Mayergoyz.** *Nonlinear diffusion of electromagnetic fields. With applications to eddy currents and superconductivity.* Nr. 1 in Academic Press Electromagnetism Series. Academic Press, San Diego (1998).
- [MB94] **I. Mayergoyz und G. Bedrosian.** On finite element implementation of impedance boundary conditions. *J. Appl. Phys.*, 75(10): S. 6027–6029 (1994).
- [McL00] **W. McLean.** *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations.* Cambridge University Press, Cambridge, UK (2000).
- [Mit67] **K. Mitzner.** An integral equation approach for scattering from a body of finite conductivity. *Radio Science*, 2(12): S. 1459–1470 (1967).
- [Mon92] **P. Monk.** A finite element method for approximating the time-harmonic Maxwell equations. *Numer. Math.*, 63: S. 243–261 (1992).
- [Mon93] **P. Monk.** An analysis of Nédélec’s method for the spatial discretization of Maxwell’s equations. *J. Comp. Appl. Math.*, 47: S. 101–121 (1993).
- [MS84] **R. MacCamy und E. Stephan.** Solution procedures for three-dimensional eddy-current problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 101: S. 348–379 (1984).
- [Néd80] **J. Nédélec.** Mixed finite elements in R^3 . *Numer. Math.*, 35: S. 315–341 (1980).
- [Néd86] **J. Nédélec.** A new family of mixed finite elements in R^3 . *Numer. Math.*, 50: S. 57–81 (1986).
- [NTF88] **T. Nakata, N. Takahashi und K. Fujiwara.** Physical meaning of grad ϕ in eddy current analysis using magnetic vector potentials. *IEEE Trans. Mag.*, 24(1): S. 178–181 (1988).
- [Ost02] **J. Ostrowski.** *Boundary Element Methods for Inductive Hardening.* Dissertation, Fakultät für Mathematik und Physik, Tübingen (November 2002).
- [Pic82] **R. Picard.** On the boundary value problem of electro- and magnetostatics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 92 A*, S. 165–174 (1982).
- [Pup99] **D. Puppe.** *History of topology*, Kap. Herbert Seifert (1907-1966), S. 1021–1028. Elsevier, Amsterdam (1999).
- [Riv84] **M. Rivara.** Design and data structure of a fully adaptive finite element software. *ACM Trans. Math. Software*, 10: S. 242–246 (1984).
- [RS00] **S. Reitzinger und J. Schöberl.** Algebraic multigrid for edge elements. Techn. Ber. SFB 00-15, Johannes Kepler Universität Linz, Linz, Austria (June 2000).

- [RT77] **P. A. Raviart und J. M. Thomas.** *A Mixed Finite Element Method for Second Order Elliptic Problems*, Bd. 606 von *Springer Lecture Notes in Mathematics*, S. 292–315. Springer, New York (1977).
- [Ryt40] **S. Rytov.** Calcul du skin-effet par la méthode des perturbations. *Journal de Physique USSR*, 2: S. 233–242 (1940).
- [Sau00] **S. Sauter.** Variable order panel clustering. *Computing*, 64: S. 223–261 (2000).
- [Sch80] **B. Schutz.** *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge University Press, Cambridge (1980).
- [Sim89] **K. Simonyi.** *Theoretische Elektrotechnik*, Bd. 20 von *Hochschulbücher für Physik*. VEB Verlag Deutscher Wissenschaften, Berlin (1989).
- [SS86] **Y. Saad und M. Schultz.** GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3): S. 856–869 (1986).
- [SS98] **J. Shen und O. Sterz.** A mixed Galerkin and collocation approach for treating edge and corner problems in the boundary element method. *IEEE Trans. Mag.*, 34(5): S. 3296–3299 (1998).
- [SS01] **O. Sterz und C. Schwab.** A scalar boundary integrodifferential equation for eddy current problems using an impedance boundary condition. *Comput. Visual. Sci.*, 3: S. 209–217 (2001).
- [SS02] **O. Sterz und C. Schwab.** A scalar BEM for time harmonic eddy current problems with impedance boundary conditions. In *Scientific Computing in Electrical Engineering. Proceedings of the 3rd International Workshop Scientific Computing in Electrical Engineering, Warnemünde, Germany, August 20–23, 2000* (Hg. U. van Rienen, M. Günther und D. Hecht), Bd. 18 von *LNCSE*, S. 129–136. Springer, Berlin (2002).
- [Ste02] **O. Sterz.** Multigrid for time harmonic eddy currents without gauge. In *Scientific Computing in Electrical Engineering. Proceedings of the 4th International Workshop Scientific Computing in Electrical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, June 23–28, 2002, LNCSE*. Springer, Berlin (2002). (angenommen).
- [SV95] **T. Senior und J. Volakis.** *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. IEE Electromagnetic Waves Series 41. IEE Publications, London (1995).
- [SW92] **C. Schwab und W. Wendland.** On numerical cubatures of singular surface integrals in boundary element methods. *Numerische Mathematik*, 62: S. 343–369 (1992).

- [SW99] **V. Schulz und G. Wittum.** Transforming smoothers for optimization saddlepoint problems. Preprint 99-07, Universität Heidelberg, SFB 359, Germany (1999).
- [Tay81] **M. Taylor.** *Pseudodifferential operators.* Princeton University Press, Princeton (1981).
- [Tay96] **M. Taylor.** *Partial Differential Equations, Basic Theory.* Nr. 23 in Texts in Applied Mathematics. Springer, New York (1996).
- [TOS01] **U. Trottenberg, C. Osterlee und A. Schüller.** *Multigrid.* Academic Press, London (2001).
- [vdV92] **H. van der Vorst.** BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(2): S. 631–644 (1992).
- [Ver96] **R. Verfürth.** *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques.* Teubner-Verlag, Stuttgart (1996).
- [vS97] **T. von Petersdorff und C. Schwab.** Fully discrete multiscale galerkin BEM. In *Multiscale Wavelet Methods for Partial Differential Equations* (Hg. W. Dahmen, A. Kurdila und P. Oswald), Bd. 6, S. 287–345. Academic Press (1997).
- [Wei77] **T. Weiland.** Eine Methode zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen für sechskomponentige Felder auf diskreter Basis. *AEÜ*, 31(3): S. 116–120 (1977).
- [Wei97] **S. Weintraub.** *Differential Forms.* Academic Press, San Diego (1997).
- [Whi57] **H. Whitney.** *Geometric Integration Theory.* Princeton Univ. Press, Princeton (1957).
- [Wie97] **C. Wieners.** The implementation of adaptive multigrid methods for finite elements. SFB 404 Preprint 97/12, Universität Stuttgart, Germany (1997).
- [Wie01] **C. Wieners.** Local multigrid methods on hierarchical meshes. In *Proceedings of the 17th GAMM-Seminar*, S. 1–8. Leipzig (2001).
- [Wil56] **C. Wilcox.** An expansion theorem for electromagnetic fields. *Commun. Pure Appl. Math.*, IX: S. 115–134 (1956).
- [Wit89] **G. Wittum.** On the robustness of ILU-smoothing. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 10: S. 699–717 (1989).
- [Wit95] **G. Wittum.** Multi-grid methods—An introduction. Techn. Ber. 95-5, Institut für Computeranwendungen, Universität Stuttgart, Germany (1995).
- [Xu92] **J. Xu.** Iterative methods by space decomposition and subspace correction. *SIAM Review*, 34: S. 581–613 (1992).

- [Yee66] **K. Yee.** Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 16: S. 302–307 (1966).
- [Yse84] **H. Yserentant.** Über die Aufspaltung von Finite-Element-Räumen in Teilräume verschiedener Verfeinerungsstufen. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen (1984). Habilitationsschrift.

