

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Michael Biermann
aus Mönchengladbach

Tag der mündlichen Prüfung: 25.04.2001

**Akkretionsscheiben-Modelle
mit einer verallgemeinerten,
Reynolds-kritischen Turbulenz
in aktiven galaktischen Kernen
und um Protosterne**

Gutachter : Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl
Priv.-Doz. Dr. Hans M. Schmid

Zusammenfassung

Sowohl bei Quasaren als auch bei Protosternen reichen herkömmliche Akkretionsscheibenmodelle zur Beschreibung nicht mehr aus, da die Scheibenmassen im Vergleich zur Zentralmasse nicht mehr klein sein müssen. Für diese Scheiben wurden stationäre, geometrisch dünne Scheibenmodelle für eine verallgemeinerte, Reynolds-kritische Turbulenz berechnet.

Im Gegensatz zu Standard-Scheiben können diese sehr viel schneller Material durch die Scheibe akkretieren. Dies kann die extrem massereichen Schwarzen Löcher in AGN bereits in den frühen Phasen der Galaxienentwicklung erklären, in denen durch Wechselwirkungsprozesse viel Gas in das Zentrum gestürzt ist. Zudem wurden Scheibeninstabilitäten gefunden, die durch starke Änderungen der Opazität verursacht werden, und die ebenfalls für einen vorübergehend schnelleren Einfall von Material verantwortlich sein könnten. Schließlich konnte gezeigt werden, daß die inneren Bereiche in AGN bis zu (abhängig von der Massenakkretionsrate) einigen 10^4 Schwarzschildradien advektions- (oder konvektions-) dominierte Scheiben sind.

In protostellaren Scheiben macht sich der Einfluß der Selbstgravitation in einem starken Anwachsen der Flächendichte *und* der Zentraldichte sowie in einem mäßigen Anstieg der Zentraltemperatur bemerkbar. Ein Abflachen des Effektivtemperaturprofils zur Erklärung der beobachteten Spektren konnte aber nicht auf die Selbstgravitation zurückgeführt werden, sondern ist eher durch den Einfluß der umgebenden Molekülwolke bedingt. Die erhöhte Flächen- und Zentraldichte wird sich auf die Bildung von Staubagglomeraten in den frühen Phasen der protostellaren Entwicklung auswirken und so die Planetenentstehung beeinflussen.

Abstract

In the case of quasars and protostars standard accretion disks models are not a suitable prescription anymore as the disk mass is not negligible in comparison to the mass of the central object. For these disks stationary and geometrical thin disk models are calculated using a generalized Reynolds-critical prescription for the viscosity.

These disks are able to accrete material much faster than standard disks. This may explain the very massive black holes in AGN, which already can be found in the most distant and therefore youngest galaxies. In these early stages of galaxy evolution, lots of gas is expected to fall towards the galactic center due to merging processes. Furthermore disc instabilities were found, which are caused by strong changes in the opacity and which could also be responsible for temporary gas infall. Finally it is shown, that for high accretion rates the inner parts of disks in AGN up to some 10^4 Schwarzschild radii (depending on the mass accretion rate) are advection (or convection) dominated disks.

In protostellar disks self-gravity causes a significant increase of the surface density *and* the central density and, to a lower extent, the central temperature. The deviation of the $T \propto r^{-3/4}$ distribution of the spectrum of young stellar objects is not the consequence of self-gravity but may be due to the surrounding molecular cloud. The increased surface and central density will have implications on the dust agglomeration and therefore on planet formation.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Akkretionsscheiben	1
1.2	Beobachtungen	4
1.3	Die Viskosität	5
2	Modelle selbstgravitierender, stationärer Akkretionsscheiben	7
2.1	Notation und Annahmen	8
2.2	Grundlegende Gleichungen	12
2.2.1	Mechanische Gleichungen	12
2.2.2	Thermodynamische Gleichungen	16
2.2.3	Materialfunktionen	29
2.3	Standardakkretionsscheiben mit Selbstgravitation	33
2.4	Selbstgravitierende Akkretionsscheiben mit β -Viskosität	35
2.4.1	Selbstgravitierende Scheiben im subsonischen Bereich	35
2.4.2	Selbstgravitierende Scheiben im stoßdissipationsbegrenzten Limes	36
2.4.3	Eine analytische Lösung	37
3	Numerische Behandlung des Gleichungssystems	41
3.1	Das Potential und seine Ableitungen	41
3.1.1	Ein grundsätzliches Problem	41
3.1.2	Die Berechnung des Potentials	46
3.1.3	Die Ableitungen des Potentials	47
3.2	Die Winkelgeschwindigkeit und ihre Ableitung	48
3.3	Der Iterationsschritt	48
3.4	Der Parameterraum	49
4	Ergebnisse	53
4.1	Akkretionsscheiben in AGN	53
4.2	Protoplanetare Akkretionsscheiben	69
5	Zusammenfassung und Ausblick	91

A	Berechnung der Planck-gemittelten Opazität	93
B	Lösungen spezieller algebraischer Gleichungen der Ordnung n	95
B.1	Lösung der Gleichung (2.31)	95
B.2	Lösung der Gleichung (2.33)	97
B.3	Lösung der Gleichung (2.39)	100
B.4	Lösung der Gleichung (2.44)	100
C	Das Potential einer unendlich dünnen Scheibe mit $\Sigma = const$	103
D	Ein Verfahren zur Potentialberechnung nach Gauss	107
	Literaturverzeichnis	113

1 Einführung

1.1 Akkretionsscheiben

Akkretionsscheiben sind abgeplattete, mehr oder minder rotationssymmetrische Gebilde aus Gas und Staub, die um ein Zentralobjekt differentiell rotieren. Sie entstehen im wesentlichen als Folge des Zusammenspiels der Gravitation des Zentralobjekts und der Selbstgravitation der dieses umgebenden Akkretionsscheibe, der durch die Rotation hervorgerufenen Zentrifugalkraft und der viskosen Reibung innerhalb der Scheibe. So wird die Materie entweder, wie z.B. in Doppelsternsystemen, in denen der eine Stern von seinem Begleiter Materie erhält, bereits in einer Vorzugsrichtung auf das Zentralobjekt akkretiert, oder aber der Kollaps, wie er bei der Bildung von Sternen erfolgt, führt aufgrund der Drehimpulserhaltung dazu, daß die sich komprimierende Wolke mit zunehmendem Drehmoment immer flacher wird und eine Scheibe bildet. Durch diese wird nun vornehmlich in radialer Richtung Materie auf das Zentralobjekt bewegt, wobei gerade in den frühen Phasen der protostellaren Entwicklung auch der nicht in der Scheibenebene erfolgende Einfall von Materie auf dieselbe berücksichtigt werden muß. Durch die Reibung in der Scheibe werden die Bahnen der Gas- und Staubeilchen dabei zirkularisiert. Wieder aufgrund der Drehimpulserhaltung ist eine Akkretion auf diesem Wege aber nicht beliebig fortsetzbar, da die Zentrifugalkraft immer weiter ansteigt und ab einem gewissen Abstand jede weitere Annäherung auf das Zentrum unterbindet. Nun kommt die viskose Reibung zwischen den differentiell rotierenden Bereichen der Akkretionsscheibe zum Tragen: auf diese Weise wird Drehimpuls nach außen und Masse nach innen transportiert. Letztlich wandeln Akkretionsscheiben damit potentielle Energie in kinetische, thermische und eventuell auch magnetische Energie um, falls Magnetfelder in der betrachteten Scheibe von Bedeutung sind. Die freigesetzte potentielle Energie wird dabei zur Hälfte in kinetische Energie des akkretierten Materials umgewandelt, und zur Hälfte wird sie in der Scheibe dissipiert. Bei stationären Scheiben wird die Kühlung durch Strahlung dabei exakt durch die Heizung aufgrund der viskosen Reibung ausgeglichen.

Die Freisetzung von potentieller Energie ist ein ausgesprochen effektiver Prozeß und kann größenordnungsmäßig leicht abgeschätzt werden. So ist die freigesetzte potentielle Energie eines Körpers der Masse m , der auf die Oberfläche eines Objekts der Masse M und mit dem Radius R fällt, gegeben durch

$$\Delta E_{\text{accr}} \approx \frac{GMm}{R} .$$

Für einen Neutronenstern mit dem Radius $R = 10$ km und der Masse $M = 1 M_{\odot}$ findet man so $\Delta E_{\text{accr}} = 10^{20}$ erg/g. Zum Vergleich: Durch Kernfusion wird beim Wasserstoffbrennen die Energie $\Delta E_{\text{nuc}} = 0.007mc^2$ freigesetzt, was $6 \cdot 10^{18}$ erg/g entspricht, also nur ein Zwanzigstel des Wertes der freigesetzten Energie durch Akkretion. Auch ist der hohe Wirkungsgrad für die enorme Leuchtkraft der Kerne aktiver Galaxien verantwortlich. Die Effizienz der Energiefreisetzung durch Akkretion hängt stark von der Kompaktheit der Quelle M/R ab. So ist für Weiße Zwerge mit einer Sonnenmasse ($R \approx 10^9$ cm) die Kernfusion etwa 50 mal effizienter als Akkretion. Trotzdem ist die Akkretion für Weiße Zwerge sehr wichtig, denn wenn auf der Oberfläche des Weißen Zwerges Kernfusion stattfindet, dann geschieht dies als Nova-Explosion, d.h. zwar mit großer Helligkeit, aber nur kurzer Dauer. Dabei wird ein großer Teil des Wasserstoffvorrats verbraucht. Den größten Teil ihres Lebens findet daher bei Weißen Zwergen keine Kernfusion statt und Akkretion kann auch in diesem Fall sehr wichtig sein.

Im Prinzip sind die physikalischen Grundlagen zur Beschreibung von Akkretionsscheiben seit über 200 Jahren bekannt und von Kant in seiner *Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels* 1755 beschrieben worden. Bereits in der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts wurde von von Weizsäcker (1943) und Lüst (1952) ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Akkretionsscheiben aufgestellt, das abgesehen von Verfeinerungen bis heute im wesentlichen noch immer Grundlage aller gültigen Modelle ist. Bis 1973 konnte sich diese Theorie aber nicht erfolgreich durchsetzen, da die bis dahin verwendete molekulare Beschreibung der Viskosität zu viel zu großen Zeitskalen führte, die es Akkretionsscheiben

niemals gestattet hätte, sich zu entwickeln. Erst dann wurde von Shakura und Sunyaev (1973) eine alternative Parametrisierung auf der Basis einer turbulenten Viskosität vorgeschlagen, die diese Probleme umging und – zumindest für bestimmte Arten von Scheiben – ausgesprochen erfolgreich war.

Akkretionsscheiben sind ein weit verbreitetes Phänomen auf verschiedenen Größenskalen und in den unterschiedlichsten astrophysikalischen Umgebungen. Im wesentlichen lassen sich diese verschiedenen Arten von Akkretionsscheiben wohl in die vier folgenden, nach dem Grad ihrer Selbstgravitation geordneten Gruppen einteilen:

Ringsysteme um Planeten. Obwohl das gesamte Ringsystem z.B. des Saturn, aber auch dasjenige jedes anderen Planeten, nicht als Akkretionsscheibe beschrieben werden kann, gilt dies in guter Näherung für einzelne Ringsegmente, die keine durch Kleinstmonde hervorgerufene Lücken enthalten. So konnte der B-Ring von Schmit et al. (1999) als auf perfekten Keplerbahnen den Saturn umlaufendes hydrodynamisches Gas beschrieben werden. Das Gravitationspotential des Planeten wird dabei vollständig durch das des Planeten bestimmt, der Beitrag des Rings ist völlig vernachlässigbar. Allerdings halten sich Gravitations- und Zentrifugalkraft auf diese Weise exakt die Waage und sorgen für die Stabilität des Ringes. Die Selbstgravitation des Rings kommt – obwohl sie millionenfach schwächer als Saturns Gravitation ist – aber doch zum Tragen: im mitrotierenden Koordinatensystem ist sie dominant (da hier die beiden anderen Kräfte verschwinden) und sorgt so für Strukturbildung innerhalb des B-Rings. Wenn in der vorliegenden Arbeit aber von selbstgravitierenden Scheiben die Rede ist, so sind solche Scheiben gemeint, in denen sich ein signifikanter Anteil der Masse des Gesamtsystems ‘Zentralobjekt-Scheibe’ befindet. Eine genaue Definition, wann Scheiben als selbstgravitierend bezeichnet werden sollten, wird im nächsten Kapitel gegeben. Dieses Beispiel soll nur verdeutlichen, daß Selbstgravitation auch dann eine Rolle spielen kann, wenn sie völlig vernachlässigbar scheint.

Kataklysmische Veränderliche (und allgemein Doppelsternsysteme mit einem kompakten Stern und einer Scheibe). Kataklysmische Veränderliche (CV für *cataclysmic variable*) sind ein bestimmter Typ veränderlicher Sterne, deren Helligkeit innerhalb einer Zeitspanne, die von etwa einer Stunde bis zu wenigen Wochen reicht, um mehrere Größenklassen variiert. Es handelt sich hierbei um enge Doppelsternsysteme, bestehend aus einem Weißen Zwerg und einem späten Hauptreihenstern, deren gegenseitiger Abstand in der Größenordnung des Sternradiuses liegt. Ursprünglich handelte es sich bei diesen Veränderlichen um ein Doppelsternsystem mit einem K- oder M-Stern als Sekundärstern und einem deutlich massereicheren Hauptstern, der irgendwann zum Roten Riesen wurde. Dabei bildete dessen Hülle eine beide Sterne gemeinsam einschließende Hülle. Durch Reibung in dieser verlor das System Drehimpuls und der Abstand zwischen beiden Sternen verringerte sich. Auf diese Weise und durch Verringerung des Drehimpulses durch Sternwinde kamen sich die beiden Sterne so nahe, daß ein Massentransfer vom Sekundärstern zum inzwischen entstandenen Weißen Zwerg einsetzte, so daß sich eine Scheibe um den kompakten Stern ausbildete. Im Laufe ihres Lebens als Weißer Zwerg erhalten CVs auf diese Weise Materie vom Begleiter, die auf die Oberfläche akkretiert wird. Ab einer kritischen Masse dieser aufgesammelten Materie (etwa $10^{-5} \dots 10^{-4} M_{\odot}$) wird der Wasserstoff plötzlich gezündet und der Weiße Zwerg leuchtet als (klassische) Nova auf¹. Dabei wird die Hülle wieder abgestoßen und eventuell auch ein Teil des Weißen Zwerges selbst, so daß diese unter Umständen sogar mit der Zeit masseärmer statt massereicher werden.

Je nach Stärke des Magnetfeldes unterscheidet man grob zwei Arten von CVs: Solche mit starkem Magnetfeld bilden – zumindest in der Nähe des Weißen Zwergs – keine Scheibe aus, da die Materie entlang der Feldlinien auf die magnetischen Pole gezogen wird. Dabei wird das Material auf supersonische Geschwindigkeiten (einige 1000 km/s) beschleunigt und kurz über der Oberfläche des Weißen Zwerges wieder abgebremst. Die kinetische Energie wird in den auftretenden Stoßwellen dissipiert und heizt das einfallende Material und die magnetischen Pole des Weißen Zwergs auf 10^4 K auf. Als Folge entsteht Röntgen- und Zyklotron-Strahlung. Das Magnetfeld sorgt zudem für eine gebundene Rotation der beiden Sterne. In CVs ohne oder mit schwachem Magnetfeld bildet sich eine klassische (nicht selbstgravitierende) Akkretionsscheibe aus, wie sie z.B. in Frank et al. (1992) beschrieben wird. Diese Scheiben sind im wesentlichen nur im Optischen zu sehen, da sie im Infraroten vom Begleitstern und im UV vom Weißen Zwerg überstrahlt werden. In Phasen der Ruhe, wenn also die für das Wasserstoffbrennen erforderliche kritische Masse erst aufgesammelt wird, variiert das Spektrum des Systems in einer charakteristischen

¹Eine weitere Klasse von Veränderlichen, die SSXBs (Super Soft X-Ray Binaries), steht in enger Verbindung zu CVs und wird heute zunehmend als eine Unterklasse der kataklysmischen Veränderlichen betrachtet. Bei diesen ist die Akkretionsrate auf den Weißen Zwerg so hoch, daß die Kernfusion nicht mehr explosionsartig einsetzt, sondern stabil abläuft. Dann nimmt die Masse des Weißen Zwergs aber unauffällig zu und er wird, wenn er die Chandrasekhar-Masse überschreitet, als Supernova vom Typ Ia aufleuchten.

Weise, die davon abhängig ist, welche Komponente in welchem Maße vom Beobachter aus aufgrund der sich durch den Umlauf des Systems ändernden Konstellation zu sehen ist. Diese Lichtkurven können heute sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr gut interpretiert werden. Die hierbei bei der theoretischen Modellierung verwendete Parametrisierung der Viskosität, auf die in 1.3 eingegangen wird, hat sich für diese Scheiben als ausgesprochen erfolgreich erwiesen und wird seither auch in gänzlich anderen Systemen mit einer Akkretionsscheibe verwendet.

AGN. Aktiven galaktischen Kernen (AGN für *active galactic nuclei*) ist ihre hohe, nicht-stellare Aktivität eigen. Unter dieser Bezeichnung wird eine ganze Palette von Erscheinungen zusammengefaßt, die sich alle durch die enorme Leuchtkraft der Kernregionen der zugehörigen Galaxien auszeichnen, welche die Gesamtstrahlung der Galaxien bei weitem übertreffen können. Zurückzuführen ist diese Aktivität auf eine Akkretionsscheibe um ein Schwarzes Loch, dessen Masse üblicherweise zwischen 10^6 und $10^9 M_\odot$ angenommen wird (Blanford, 1992; Rees, 1984). Zu den AGN gehören *Seyfert-Galaxien*, die sich durch ihre hellen Kerne und Emissionslinien hochangeregter Atome auszeichnen, *Quasare*, die ursprünglich aufgrund ihrer Radiostrahlung gefunden wurden und die keine Absorptionslinien aufweisen, sondern ein starkes Kontinuum mit Emissionslinien zeigen, *QSOs* (quasi-stellare Objekte), die Quasaren ähneln, deren Radiostrahlung aber nicht nachgewiesen werden konnte, und *BL Lacerta-Objekte*, welche ein blaues, extrem polarisiertes Kontinuumsspektrum ohne starke Emissionslinien haben. Die BL Lacerta-Objekte selbst sind wieder eine Unterklasse der *Blazare*, die ein flaches IR-UV-Spektrum besitzen, im Optischen stark polarisiert sind und in diesem Frequenzbereich und im Radiokontinuum stark variabel sind. Alle AGN sind auch starke Röntgenstrahler. Außerdem weisen alle Objekte dieser Familie Jets auf (Leahy, 1999). Eine umfassende Übersicht über alle zur Familie der AGN gehörenden Objekte und deren Klassifikation und Phänomenologie findet man in Bregman (1990) und in Blanford et al. (1990). Allen diesen verschiedenen Typen von AGN, die sich abgesehen von QSOs und Quasaren im wesentlichen nur hinsichtlich ihrer Orientierung relativ zum Beobachter unterscheiden, ist gemeinsam, daß man ihre Aktivität auf die Existenz einer Akkretionsscheibe um ein supermassives Schwarzes Loch im Zentrum der Galaxie zuschreibt. Das heute verwendete Modell zur Beschreibung dieser Objekte geht auf Sanders et al. (1989) zurück.

In den weit entfernten und damit sehr alten Quasaren findet man Schwarze Löcher mit enormen Massen von bis zu $10^9 M_\odot$. Es stellt sich die Frage, ob diese Schwarzen Löcher bereits zu Beginn im wesentlichen ihre heutigen Massen besaßen und im Laufe ihres Lebens nur noch wenig an Masse zunahmen, oder ob sie direkt zu Beginn ihrer Entstehung sehr schnell mittels der sie umgebenden Akkretionsscheibe Material aufsammeln konnten. Modelle mit der auf Shakura und Sunyaev zurückgehenden Parametrisierung der Viskosität verneinen die letzte Variante, da die radiale Drift der Materie in der Scheibe in diesem Fall viel zu gering ist, um Materie schnell auf das Schwarze Loch zu akkretieren. Diese hätten dann aber nicht die heute beobachtbaren massereichsten Schwarzen Löcher bilden können. Allerdings gibt es berechtigten Zweifel, ob die hier vorliegende Viskositätsparametrisierung geeignet ist, diesen Typ von Akkretionsscheibe zu beschreiben, und so ist die Frage keineswegs geklärt.

Protoplanetare Scheiben. Diese Akkretionsscheiben wurden ursprünglich indirekt durch den IR-Exzeß der jungen Sterne, die sie umgeben, gefunden. Solche jungen Sterne entstehen i.a. in Untereinheiten von Riesenmolekülwolken mit Dichten von 1000 Atomen/Molekülen pro cm^3 und einer Temperatur von 10 K. Bei der durch eine Gravitationsinstabilität ausgelösten Kontraktion wächst die Dichte immer weiter bis auf 10^5 oder mehr Atome/Moleküle pro cm^3 an. Zunächst wird der Drehimpuls dabei durch eingefrorene Magnetfelder nach außen abgeführt, bis der Ionisationsgrad und die elektrische Leitfähigkeit so weit gesunken sind, daß sich die Magnetfelder von der Materiebewegung abkoppeln. Der weitere Kollaps erfolgt nun isotherm, bis das Gas optisch dick wird. Danach kollabiert die Wolke unter ihrer eigenen Schwerkraft weiter. Aufgrund der Drehimpulserhaltung bildet sich dabei wieder eine Scheibe aus, durch die Material wegen der auftretenden Zentrifugalkräfte erheblich langsamer zum Zentrum wandern kann, während der Drehimpuls nach außen transportiert wird.

Die auf diese Weise entstehenden T Tauri-Sterne mit Massen bis zu etwa $2.5 M_\odot$ bilden, anders als ihre massereicheren Geschwister, die Herbig Ae/Be-Sterne, wahrscheinlich starke Magnetfelder aus, sobald die Kernfusion einsetzt, da sie schnell und differentiell rotieren und ihre Außenbereiche konvektionsinstabil sind. Da T Tauri-Sterne schneller rotieren als Hauptreihensterne², dürften ihre Magnetfelder dann wohl auch viel stärker und zudem auch zeitlich variabel sein, abhängig vom vorhandenen Akkretionsstrom. Für die selbstgravitierenden Bereiche der Akkretionsscheibe, die weiter außen liegen, dürften die Magnetfelder des Sterns aber ohne Bedeutung sein. Daher wird auch auf eine Berücksichtigung einer durch magnetische

²Der zusätzliche Drehimpuls wird erst im Laufe der Zeit durch Sternwinde oder Magnetfelder abgebaut.

Kräfte verursachten Viskosität verzichtet, da diese wahrscheinlich nur zur Ausbildung der Jets, die in diesen jungen Systemen beobachtet werden, verantwortlich und damit nur in den inneren Bereichen der Scheibe wirksam sind.

In den frühen Phasen der Sternbildung sind die Scheibenmassen ganz ohne Frage den Massen der Zentralobjekte vergleichbar, zumindest aber nicht deutlich kleiner. Modelle für diese frühe Phase müssen also auf jeden Fall die Effekte der Selbstgravitation mit einbeziehen. So ist immer noch recht unverstanden, wie die äußeren Gasplaneten entstehen konnten, da die Dichte nach heutiger Lehrmeinung dort draußen nicht ausreichend gewesen sein konnte, um die heutigen Massen der Gasplaneten zu erklären. Diese Vorstellungen beruhen aber auf Modellen, die die Selbstgravitation der Scheibe unberücksichtigt lassen. Zwar behilft man sich heute mit der Migrationstheorie, die Planeten an ganz anderen, geeigneteren Orten entstehen läßt, um sie anschließend an die heutige Stelle zu versetzen. Mit dieser Theorie versucht man sowohl die weiten Bahnen der äußeren Gasplaneten in unserem Sonnensystem als auch die Existenz jupiterähnlicher Planeten auf sehr engen Bahnen um andere Sterne zu erklären, die man heute als Folge von durch die Beobachtungsgenauigkeit gegebenen Auswahlwirkungen in großer Zahl findet (Perryman, 2000), die aber so weit innen wegen des fehlenden (vor allem gasförmigen) Materials nicht entstanden sein können. Durch Migration sind also sowohl Driftbewegungen der Planeten nach innen als auch nach außen möglich. Ob Migration aber nach dieser Vorstellung überhaupt hinreichend effektiv arbeiten kann, ist noch nicht klar.

Auch muß das Anwachsen der Staubteilchen hinreichend schnell vonstatten gehen. Staubteilchen mit Durchmessern von wenigen μm sind vollständig an das Gas gekoppelt und werden von ihm mitgezogen. Im Abstand der Erdbahn bewegen sie sich innerhalb eines Jahres um den Zentralkörper, wenn dieser die Masse der Sonne hat. Die Bewegung in radialer Richtung verläuft größenordnungsmäßig 10.000 mal langsamer, so daß solche Staubteilchen bereits nach wenigen 10.000 Jahren vollkommen verschwunden wären, wenn sie es nicht schaffen, in dieser Zeit so stark anzuwachsen, daß sie vom Gas entkoppeln und nicht mehr mitgerissen werden. Diese eigene Aerodynamik wird erst ab Partikeldurchmessern von einigen Dezimetern erreicht. Selbstgravitation ist dazu – zumindest im Prinzip – in der Lage, da sie für eine Verdichtung der Materie sorgt, so daß Staub häufiger stoßen und damit schneller wachsen kann. Zwar wird Selbstgravitation in Erdnähe nie eine große Rolle gespielt haben, aber weiter außen kann sie sehr wohl für ein schnelleres Wachstum der Staubpartikel gesorgt haben, und diese Teilchen konnten dann während ihres Wachstums nach innen laufen und hinreichend schnell vom Gas entkoppeln.

Schließlich zeigen auch die Spektren von jungen Sternen nicht den erwarteten $T \propto r^{-3/4}$ -Verlauf, sondern einen flacheren Verlauf, welcher nur proportional zu $r^{-1/2}$ ist. Hierauf wird im nächsten Abschnitt genauer eingegangen. Mit den gängigen Modellen für Akkretionsscheiben ist dies nicht verständlich.

Es gibt also sowohl für Akkretionsscheiben in AGN als auch für solche in protostellaren Systemen gute Gründe, den Effekt der Selbstgravitation zu berücksichtigen. Beide Typen von Akkretionsscheiben sollen daher in dieser Arbeit im Rahmen einer selbstkonsistenten Einbeziehung der Selbstgravitation behandelt werden. Dabei werden nur stationäre Scheiben betrachtet. Das hat mehrere Gründe. Zunächst vereinfacht dies die Akkretionsscheiben beschreibenden hydrodynamischen und thermodynamischen Gleichungen erheblich, und gerade diese Vereinfachung gestattet i.a. eine tiefere physikalische Einsicht in die Lösung. Auch besteht nur in diesem Fall Aussicht auf analytische Lösungen. Schließlich liefern stationäre Lösungen gute Startwerte für zeitabhängige Probleme, und es ist möglich, sie für Stabilitätsbetrachtungen heranzuziehen, wie es auch im Fall nicht-selbstgravitierender Akkretionsscheiben gemacht wurde.

1.2 Beobachtungen

Die innersten Bereiche von AGN können nicht mit ausreichender Genauigkeit aufgelöst werden, um die Massenverteilung oder Gesamtmasse der Akkretionsscheibe im pc-Bereich zu bestimmen. Auf größeren Skalen dagegen gibt es ausgesprochen massive Scheiben (Scoville, 1999). Für solche Scheiben, aber auch aus den Spektren von AGN, können Massenakkretionsraten von $10M_{\odot}\text{yr}^{-1}$ und mehr abgeleitet werden (Huré, 1998; Szuskiwicz et al., 1996). Wenn sich derartige Massenakkretionsraten auch bis zu geringeren Abständen vom zentralen Schwarzen Loch aufrecht erhalten lassen, sind auch massereiche Scheiben in diesem Bereich zu erwarten. Gerade in wechselwirkenden Galaxien lassen numerische Simulationen den raschen Einfall von Gas als Folge der starken Änderungen im Gezeitenfeld beider Galaxien erwarten (Barnes & Hernquist, 1991), das dann aufgrund der Drehimpulserhaltung massive Scheiben in den Kernen

der Galaxien ausbilden muß.

Für die Existenz massereicher Scheiben sprechen auch die hohen Massen der zentralen Schwarzen Löcher in AGN, die $10^9 M_\odot$ überschreiten können (Di Matteo et al., 1997; Ford et al., 1994; Harms et al., 1994). Wenn solche Schwarzen Löcher nicht primordial bei der Entstehung der AGN vorhanden gewesen sein sollten, müssen sie in recht kurzer Zeit zu ihren heute beobachtbaren Massen gekommen sein. Dieses Anwachsen könnte durch den Zustrom aus einer massereichen Akkretionsscheibe erfolgen (Duschl, 2001).

Millimeter- und Submillimeter-Beobachtungen haben gezeigt, daß sich in Sternentstehungsgebieten Gas- und Staub-Scheiben um junge Sterne bilden (Sargent & Beckwith, 1987; Beckwith et al., 1986). Zwischen 30% und 60% aller Sterne in den Sternentstehungsgebieten Orion, Taurus-Auriga, Cepheus und Chamaeleon weisen solche protostellaren Scheiben auf (Osterloh & Beckwith, 1995; Henning et al., 1993, Chini et al., 1991; Weintraub et al., 1991; Beckwith et al., 1990). Diese Scheiben findet man vor allem um T Tauri-Sterne, jedoch scheinen zumindest einige der massereicheren Herbig Ae/Be-Sterne ebenfalls Scheiben auszubilden (Hillenbrandt et al., 1992). Mit dem HST konnten inzwischen auch etliche Scheiben direkt durch ihre absorbierende Wirkung nachgewiesen werden.

Unter der Annahme, daß die aus den Spektren bestimmten Temperaturverläufe ausschließlich auf Prozesse in der Scheibe zurückzuführen sind und von der Umgebung der Scheibe nicht beeinflusst werden, können Massen abgeleitet werden. Diese liegen zwischen 0.001 und etwa $1 M_\odot$. Sterne ab einem Alter von etwa 10^7 Jahren zeigen keinen Exzeß mehr im IR oder mm-Bereich. In dieser Zeit hat der Staub sich dann zu größeren Staubagglomeraten entwickelt, die ihre Energie nicht mehr im IR oder mm-Bereich abgeben und die daher in diesem Wellenlängenbereich nicht mehr nachweisbar sind. Viele der Scheiben um junge Sterne weisen ein flacheres Temperaturprofil auf, als man mit der gängigen Theorie für Akkretionsscheiben erwarten würde (Beckwith et al., 1990; Adams et al., 1987; Kenyon & Hartmann, 1987). Diese Abweichungen sind um so größer, je jünger die Sterne sind, so daß es naheliegend ist, diese Modifikationen als Folge der Selbstgravitation dieser massiven, jungen Scheiben zu interpretieren.

1.3 Die Viskosität

Die am weitesten verbreitete und erfolgreichste Beschreibung einer für Akkretionsscheiben geeigneten Viskosität ist die auf Shakura und Sunyaev (1973) zurückgehende α -Parametrisierung. Nachdem zuvor aus Zeitskalenbetrachtungen klar geworden war, daß molekulare Viskosität in Akkretionsscheiben überhaupt keine Rolle spielen kann, wurde angenommen, daß Turbulenz für die Reibung verantwortlich sein könnte. Um eine geeignete Parametrisierung der Viskosität zu erhalten, wurden Effektivitätsbetrachtungen eingeführt. Die Viskosität sollte isotrop sein, weswegen die Turbulenzlänge l_{turb} an jedem Ort r die lokale Höhe $h(r)$ nicht überschreiten durfte: $l_{\text{turb}} \leq h$. Zudem kann das Gas in der Scheibe nicht langfristig mit Überschallgeschwindigkeit strömen, da es seine kinetische Energie dann schnell dissipiert hätte und auf subsonische Geschwindigkeiten zurückgefallen wäre. Die Turbulenzgeschwindigkeit v_{turb} sollte daher die Schallgeschwindigkeit c_s nicht übersteigen: $v_{\text{turb}} \leq c_s$. Daher kann die Viskosität $\nu = l_{\text{turb}} v_{\text{turb}}$ durch

$$\nu = \alpha h c_s$$

mit $\alpha \leq 1$ parametrisiert werden. Mit dieser Parametrisierung ist es insbesondere gelungen, die Spektren, Lichtkurven und Zeitskalen kataklysmischer Veränderlicher sowohl qualitativ als auch quantitativ hervorragend zu modellieren.

Bei allen Erfolgen blieb allerdings immer unklar, warum die Viskosität durch die vertikale Größe h parametrisiert werden sollte, wenn der Drehimpuls und die Materie doch in radialer Richtung transportiert werden. Abgesehen von dieser theoretischen Ungereimtheit zeigten sich in der Folgezeit auch andere Schwierigkeiten bei der Verwendung der α -Viskosität. Trägt man nämlich die Massenakkretionsrate doppelt-logarithmisch gegen die Flächendichte bei einem konstanten Radius auf, so erhält man eine S-förmige Kurve, bei der nur die beiden Äste mit $d \log \dot{m} / d \log \Sigma > 0$ stabil sind. Diese beiden Äste konnten aber nicht mit einem einzigen α beschrieben werden, sondern benötigten jeweils einen eigenen Wert (Pringle et al., 1986). Zudem wurde es nötig, für einige Zwergnovae α -Werte größer als 5 anzunehmen (Pringle et al., 1986), im klaren Widerspruch zur Definition von α . Für AGN wurden sogar Werte im Bereich von 10 versucht (Collin-Souffrin, 1987).

In dieser Arbeit soll eine auch für selbstgravitierende Akkretionsscheiben geeignete Viskositäts-Parametrisierung verwendet werden. Diese Beschreibung führt die Viskosität auf turbulente Flüsse zurück, deren Reynolds-Zahl nahe der kritischen Reynolds-Zahl liegt, und parametrisiert die Viskosität in der Form

$$\nu = \beta r v_\varphi$$

(Duschl et al., 2000). Dabei ist r die radiale Koordinaten in der Scheibe, v_φ die Azimutalgeschwindigkeit und β das Reziproke der kritischen Reynoldszahl, die für alle Materialien etwa gleich ist und zwischen 100 und 1000 liegt. Diese Parametrisierung ist nur für solche Bereiche in Akkretionsscheiben gerechtfertigt, in denen die Turbulenzgeschwindigkeiten subsonisch bleiben. Überschreiten sie dagegen die Schallgeschwindigkeit, so ist eine abgeänderte Parametrisierung der Viskosität zu verwenden, die in 2.4.2 beschrieben wird.

2 Modelle selbstgravitierender, stationärer Akkretionsscheiben

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Beschreibung stationärer, selbstgravitierender Akkretionsscheiben abgeleitet. Dabei wird besonderer Wert auf selbstkonsistente Rechnungen gelegt, d.h. das Winkelgeschwindigkeitsprofil soll sich aus einem Potential berechnen, welches durch das Zentralpotential und die Massenverteilung innerhalb der Scheibe bestimmt ist. Denn gerade beim Potential wird sehr häufig nur das Keplersche Profil (Yu et al., 1997; Köhler, 1995; Lin & Pringle, 1987; Hachisu, 1986a,b; Hachisu et al., 1986a,b; Shore & White, 1982) oder aber ein willkürliches analytisches Profil ($\omega(r) \propto r^{-\delta}$: Hachisu, 1986a,b; Hachisu et al., 1986a,b; Wilson, 1981; Paczyński, 1978) verwendet, um die Simulationen einfach zu gestalten. Diese Rechnungen sind dann aber – trotz oft anders lautender Äußerungen – *nicht* selbstkonsistent. Dabei wurde die Bedeutung der Selbstgravitation bereits Anfang der 80er Jahre von Abramowicz et al. (1984) selbst für massearme Akkretionsscheiben hervorgehoben, da sie das empfindliche Gleichgewicht zwischen Gravitation des Zentralobjekts und Zentrifugalkraft stört. Viskose Kräfte spielen dabei nur eine vernachlässigbare Rolle (Abramowicz et al., 1984)¹, so daß die Willkür bei der Wahl eines Winkelgeschwindigkeitsprofils nicht dadurch gerechtfertigt werden darf, daß die Unkenntnis der makroskopischen Prozesse, welche für die Viskosität verantwortlich sind, genaue Aussagen a priori nicht möglich mache. Oft wird aber gerade diese Erklärung herangezogen, um sich auf einer analytischen Spielwiese für die Winkelgeschwindigkeit auszubreiten. Wirklich selbstkonsistent können Winkelgeschwindigkeitsprofile in den hier behandelten 1+1D-Modellen (siehe Abschnitt 2.1) natürlich auch nicht sein, da die vertikale Richtung nicht aufgelöst wird und daher in dieser Richtung ein selbstkonsistentes Potential nicht berechnet werden kann. Dennoch kann man an dieser Stelle eine ausgezeichnete analytische Näherung verwenden, da die in vertikaler Richtung wirkende Selbstgravitation nur von der lokalen Massenverteilung abhängt (siehe 2.2.2.1).

Weiterhin soll ein besonderes Augenmerk auf die Materialfunktionen gerichtet werden; vor allem die Beschreibung der Opazität wird häufig – so sie denn überhaupt Einzug in die Beschreibung selbstgravitierender Akkretionsscheiben gefunden hat – eher stark vereinfacht behandelt. Gerade in den selbstgravitierenden Bereichen der Scheiben, also in großen Abständen vom Zentrum (denn dort überwiegt die Gravitationswirkung der Scheibe leichter die des Zentralobjekts), ist die optische Tiefe oft sehr klein und das Rosseland-Mittel für die Opazität daher nicht mehr angemessen. Da es in dieser Arbeit aber um die selbstgravitierenden Teile von Akkretionsscheiben gehen soll, sind entsprechende Modifikationen für den Energietransport in der Scheibe nötig.

In dieser Arbeit soll es hauptsächlich um Akkretionsscheiben mit β -Viskosität (siehe Abschnitt 2.4) gehen, da sich die α -Viskosität als unzulänglich für die Beschreibung selbstgravitierender Akkretionsscheiben erwiesen hat (Duschl et al., 2000). Zu Vergleichszwecken – im wesentlichen natürlich um Unterschiede herauszustellen – werden aber auch Modelle für selbstgravitierende Akkretionsscheiben mit α -Viskosität behandelt.

Zunächst wird im folgenden auf die in dieser Arbeit verwendete Nomenklatur und einige vereinfachende Annahmen eingegangen. In Abschnitt 2.2 werden die grundlegenden Gleichungen zur Beschreibung von selbstgravitierenden Akkretionsscheiben besprochen. Dabei wird wie schon bei den klassischen α -Scheiben ein 1-Zonen-Modell verwendet. Hier werden auch die Materialfunktionen ‘Opazität’ und ‘Molekulargewicht’ behandelt. In den Abschnitten 2.3 und 2.4 werden dann die Gleichungssysteme für α - und β -Scheiben aufgestellt.

¹Das Argument von Abramowicz et al. gilt genau genommen nur für Scheiben mit α -Viskosität, kann aber für solche mit β -Viskosität verallgemeinert werden. In 2.4.2 wird für den Fall der β -Viskosität für die charakteristische Geschwindigkeitsskala der Turbulenz Δv_φ die Beziehung $\Delta v_\varphi = \sqrt{\beta} v_\varphi$ abgeleitet. Völlig analog läßt sich auch $\Delta v_\varphi = \sqrt{\alpha} c_s$ für α -Scheiben zeigen. Damit läßt sich aber überall in Abramowicz et al. $\alpha V_s^2 \doteq \alpha c_s^2$ durch βv_φ^2 ersetzen und man erhält wegen $\beta \ll 1$ die gleichen Resultate.

2.1 Notation und Annahmen

Wie schon im Fall klassischer α -Scheiben sollen auch in dieser Arbeit Zylinderkoordinaten r , φ und z zur Beschreibung selbstgravitierender Akkretionsscheiben herangezogen werden. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im geometrischen Mittelpunkt der Scheibe, in dem sich auch der Mittelpunkt des Zentralobjekts befinde (siehe Abbildung 2.1). Wann immer eine Unterscheidung zwischen Größen, die sich entweder auf die Scheibe oder das Zentralobjekt beziehen, notwendig ist, werden für die Scheibengrößen Kleinbuchstaben, für die entsprechenden Größen des Zentralobjekts aber Großbuchstaben verwendet. Zusätzlich erhalten die Scheibengrößen einen Index 'D', wenn eine Größe sowohl eine Scheiben- und eine Zentralkörpervariable beschreibt als auch eine Variable, die sich auf das Gesamtsystem bezieht. So bezeichnet $\omega_D(r, z)$ die Winkelgeschwindigkeit eines Testteilchens im radialen Abstand r und im vertikalen Abstand z vom Zentrum, wenn nur eine Akkretionsscheibe, aber kein Zentralobjekt vorhanden ist, $\Omega_*(R)$ dagegen die Winkelgeschwindigkeit eines Testteilchens im radialen, sphärischen Abstand R vom Zentralobjekt bei Abwesenheit einer Scheibe und $\omega(r, z)$ die Winkelgeschwindigkeit eines Testteilchens im Feld von Zentralobjekt und Scheibe.

Zur Vereinfachung werden die folgenden Annahmen gemacht:

1. Die Scheiben sind rotationssymmetrisch, d.h. es liegt Azimutalsymmetrie vor.
Selbstverständlich können in diesem Fall keine lokalen Störungen wie Spiralarme oder Turbulenzzellen, die für die Viskosität verantwortlich sein könnten, in azimuthaler Richtung aufgelöst werden (sehr wohl aber in radialer Richtung). Durch die Mittelung über solche Skalen kann die Physik dieser Abweichungen von der Azimutalsymmetrie aber dennoch berücksichtigt werden, solange man nicht Skalen auflösen muß, auf denen die Störungen wirksam sind.
2. Die Scheiben sind spiegelsymmetrisch zur Zentralebene.
3. Die Scheiben sind dünn, d.h. ihre Höhe ist in jedem Abstand r klein gegen r : $h(r) \ll r$.
4. Die Scheiben sind quasistationär.
In diesem Fall ändern sich die äußeren Parameter (Masse des Zentralobjekts M_* , Massenakkretionsrate \dot{m} , innerer und äußerer Rand r_i und r_a der Scheibe) gegenüber der viskosen Zeitskala, die ein Maß für die radiale Entwicklungszeitskala ist, nur unwesentlich. Die Zeitskala τ_{ext} , auf der sich die äußeren Bedingungen der Scheibe ändern, muß also gemäß Frank et al. (1992, siehe die Gleichungen (5.9) und (5.11)) der Bedingung

$$\tau_{\text{ext}} \gg \tau_{\text{visc}} \approx \frac{r}{v_r(r)} \approx \frac{r^2}{\nu}$$

genügen, wenn $v_r(r)$ die radiale Geschwindigkeit eines Testteilchens in der Scheibe im Abstand r und ν die Viskosität an dieser Stelle ist.

Anders als bei klassischen α -Scheiben wird in dieser Arbeit

- *nicht* vorausgesetzt, daß die Scheiben optisch dick sein müssen,
- *nicht* vorausgesetzt, daß das Gravitationspotential allein durch das Zentralobjekt bestimmt sei, und
- die Scheibe *nicht* in ein Vakuum, sondern in eine umgebende Molekülwolke der Dichte ρ_W und der Temperatur T_W eingebettet. Um den Einfluß dieser Randbedingung auf die Resultate abschätzen zu können, werden hier zwei verschiedene Szenarien betrachtet: einmal wird angenommen, daß das umgebende Material völlig isotrop und gleichförmig verteilt ist, so daß Dichte und Temperatur an jeder Stelle konstant sind², andererseits werden Modelle mit einer sphärischen Verteilung der Materie relativ zum Zentralobjekt und damit zum Ursprung des gewählten Koordinatensystems gerechnet. In letzterem Fall sind Temperatur und Dichte Funktionen des sphärischen Abstandes $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

²Selbstverständlich ist eine unendlich ausgedehnte, homogene und isotrope Wolke inkompatibel zur Poisson-Gleichung, da der Gradient des Potentials in diesem Fall verschwindet und die Dichte des Materials ebenfalls Null sein müßte. Hier sei jedoch angenommen, daß diese Annahmen in einem Gebiet gültig sind, das groß gegen die radiale Ausdehnung der Scheibe ist.

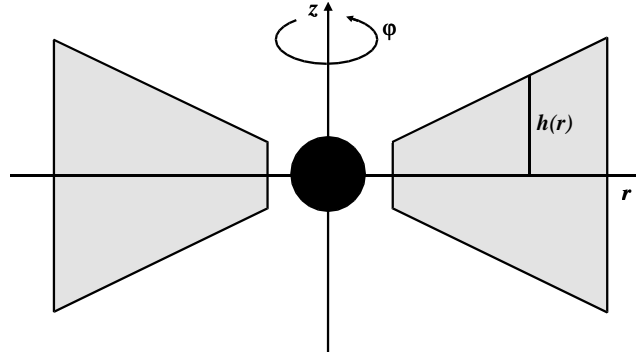


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung zur Erklärung der Größen in dünnen Akkretionsscheiben

Aufgrund von Annahme 1 wird das Problem um eine Dimension verringert, die Scheibe ist nur noch ein zweidimensionales Gebilde. Annahme 3 gestattet eine weitere Verringerung der Dimensionalität, da hierdurch Druck- und Temperaturgradienten in der Scheibe praktisch nur vertikal ausgerichtet sind, während der Drehimpuls- und Materietransport nur in radialer Richtung erfolgen. Damit lassen sich die radiale und vertikale Struktur aber entkoppeln. Daher kann in z -Richtung ein 1-Zonen-Modell verwendet werden, d.h. man löst die Scheibe in z -Richtung nicht auf. Sobald die radiale Struktur der Scheibe berechnet wurde, wird dann nachträglich die vertikale Struktur aufgesetzt. Es handelt sich daher effektiv um ein 1+1D-Modell. Durch die Reduktion der Dimensionalität muß man eine Flächendichte in radialer Richtung definieren. Sei $\rho(r, z)$ die Raumdichte der Scheibe im radialen Abstand r und im vertikalen Abstand z vom Ursprung, dann gilt für die Flächendichte

$$\Sigma(r) = \lim_{z \rightarrow \infty} \Sigma_z(r) \quad (2.1)$$

mit

$$\Sigma_z(r) = \int_{-z}^z \rho(r, z') dz' .$$

Die Halbdicke $h(r)$ (siehe Abbildung 2.1) sei definiert über die Beziehung³

$$\Sigma(r) = 2h(r)\rho_c(r) \quad (2.2)$$

mit der Zentraldichte $\rho_c(r) = \rho(r, 0)$. Die Masse der Scheibe berechnet sich dann aus

$$m = 2\pi \int_{r_i}^{r_a} r' \Sigma(r') dr' ,$$

wenn r_i und r_a der innere und äußere Rand der Scheibe sind.

³Die genaue Wahl der Beziehung zwischen Höhe und Flächenbelegung ist bis zu einem gewissen Maß willkürlich. Letztlich resultieren solche funktionalen Abhängigkeiten aus der Definition der Flächendichte selbst:

$$\Sigma(r) = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \rho(r, z') dz' = \hat{\rho}(r) \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z dz' = \hat{\rho}(r) \int_{-\infty}^{\infty} dz' = \bar{\rho}(r) \int_{-h}^h dz' = 2h(r)\bar{\rho}(r)$$

mit "vertikal gemittelten" Dichten $\hat{\rho}(r)$ und $\bar{\rho}(r)$ ($\bar{\rho}(r)$ beinhaltet auch noch den Anteil des Integrals für $z > h$ und $z < -h$). Isotherme Scheiben – und selbstgravitierende Scheiben sind weit außen oft hinreichend isotherm – haben das Dichteprofil $\rho(r) = \rho_c(r) \exp(-(r/h)^2/2)$, und die Flächendichte ist $\Sigma(r) = 2h(r)\rho_c(r)$. Es bietet sich daher an, als mittlere Dichte die Zentraldichte zu verwenden: $\bar{\rho}(r) = \rho_c(r)$. Dagegen spricht aber, daß man in der 1-Zonen-Näherung zwischen Zentralebene und Oberfläche linear interpoliert und daher $\bar{\rho}(r) = \frac{1}{2}(\rho_c(r) + \rho(r, h)) \approx \frac{1}{2}\rho_c(r)$ ansetzen würde, da die Oberflächendichte gegen die Zentraldichte vernachlässigt werden kann. Im Prinzip bleibt die Willkür bei der Wahl der vertikal gemittelten Dichten also bestehen; diese Unsicherheit ist intrinsisch in der 1-Zonen-Näherung enthalten und wird in 2.2.2.5 erneut Gegenstand einer Fußnote sein.

Die Qualität der 1-Zonen-Näherung ist erst kürzlich von Huré & Galliano (2001) untersucht worden. Die gemittelten Scheibenparameter erwiesen sich in guter Übereinstimmung mit den entsprechenden Größen in vertikal aufgelösten Scheiben. Typische Abweichungen liegen bei einem Faktor 2, wobei die Zentraltemperatur T_c mit nur 30% Abweichung am besten zwischen beiden Modellen übereinstimmt. Einzig die Scheibenhöhe ist nur bis auf einen Faktor 4 und damit eher schlecht bestimmt, wobei sie bei Scheiben in AGN und solchen um junge Sterne in der 1-Zonen-Näherung mit zunehmendem α immer besser mit derjenigen vertikal aufgelöster Scheiben übereinstimmt. Das Gleiche gilt für alle anderen Parameter bei Scheiben um Protosterne, während alle Größen bis auf die Höhe für Akkretionsscheiben in AGN mit zunehmendem Viskositätsparameter α eher etwas schlechter werden, die Abweichungen überschreiten einen Faktor 3 aber nicht.

Die Einbettung der Akkretionsscheiben in eine umgebende Molekülwolke hat zweierlei Folgen: zum einen befindet sich die Scheibe nun in einem Wärmebad, zum anderen wird es notwendig, eine effektive Flächendichte Σ_{eff} und eine effektive Zentralmasse $M_{*,\text{eff}}$ zu definieren. Anhand der in dieser Arbeit verwendeten Randbedingungen einer entweder völlig homogenen und isotropen oder einer sphärischen Verteilung des umgebenden Mediums läßt sich die Bedeutung dieser Größen veranschaulichen. Man denkt sich das System bestehend aus Zentralobjekt, Scheibe und umgebender Molekülwolke hinsichtlich der Massenzuteilung formal wie folgt aufgeteilt: Das Zentralobjekt habe die Masse M_* , die Wolke sei überall im Raum – auch dort, wo sich die Scheibe befindet – durch die Dichte ρ_W gekennzeichnet, und die Akkretionscheibe sei für diese Betrachtung durch den Dichte-‘Offset’ $\rho(r, z) - \rho_W$ bestimmt, liege also sozusagen “auf dem umgebenden Material”.

- Im Fall einer homogenen und isotropen Wolke erfährt ein Testteilchen durch das Wolkenmaterial keinerlei Kraft, und $M_{*,\text{eff}}$ und M_* stimmen exakt überein. Die durch die Scheibe in radialer Richtung ausgeübte Beschleunigung wird aber nicht durch die durch $\Sigma(r)$ gegebene, totale Scheibenmasse bestimmt, denn der Teil der Scheibenmasse, den die Wolke im Scheibenvolumen einnehmen würde, ist bereits in das Potential der Wolke eingegangen. Statt dessen ist nur der durch den Dichte-‘Offset’ $\rho(r, z) - \rho_W$ bestimmte Massenanteil für das Potential, welches für die durch die Scheibe ausgeübte Beschleunigung verantwortlich ist, relevant. Gleiches gilt für die Beschleunigung in vertikaler Richtung. Durch das Wolkenmaterial wird keine Kraft ausgeübt, und wieder trägt nur der durch $\rho(r, z) - \rho_W$ definierte Massenanteil der Scheibe zu der Beschleunigung in z -Richtung bei.
- Ähnlich einfach verhält es sich bei einer sphärischen Dichteverteilung der umgebenden Wolke. Die Schwerebeschleunigung durch die Wolke gleicht derjenigen des Zentralobjekts hinsichtlich ihrer Ausrichtung: sie ist immer entlang des sphärischen Radiusvektors \vec{R} auf das Zentrum hin gerichtet. An einer beliebigen Stelle r übt das weiter außen liegende Material keine Kraft auf ein Testteilchen in diesem Abstand aus. Die weiter innen liegende Masse der Wolke dagegen kann man sich im Zentrum der Wolke und damit im Zentralobjekt vereinigt denken. Ist $\rho_W(R)$ die Dichte der Wolke im sphärischen Abstand R , so gilt in diesem Fall für die effektive Masse des Zentralobjekts $M_{*,\text{eff}} = M_* + 4\pi \int_0^r \rho_W(R) R^2 dR = M_* + 4\pi \int_0^r \rho_W(r') r'^2 dr'$. Wie oben beschrieben darf der Teil des Scheibenmaterials, der in die Berechnung der effektiven Masse des Zentralobjekts eingegangen ist, nicht für die durch die Scheibe auf ein Testteilchen verursachte Kraft auf das Zentrum hin berücksichtigt werden. Da die Scheiben aber als dünn angenommen werden (Annahme 3), ändert sich die sphärische Dichte $\rho_W(R)$ bei gegebenem Abstand r kaum mit der Höhe – zumindest zwischen $z = -h$ und $z = h$ und bei großen Abständen r . Daher kann man in jedem Abstand r die für das effektive Potential der Scheibe relevante Dichte durch $\rho(r, z) - \rho_W(r)$ approximieren. In vertikaler Richtung ist der Anteil an der Schwerebeschleunigung, den das Wolkenmaterial im Scheibenvolumen annehmen würde, bereits durch die Projektion $-GM_{*,\text{eff}}/R^2$ des effektiven Beschleunigungsvektors von Zentralobjekt und Wolke auf die z -Achse berücksichtigt. Wie im ersten Fall trägt also nur der Dichte-‘Offset’ $\rho(r, z) - \rho_W(r)$ zur vertikalen Beschleunigung durch die Scheibe bei.

Die effektive Zentralmasse ist daher

$$M_{*,\text{eff}}(r) = \begin{cases} M_* & \text{Wolke homogen und isotrop} \\ M_* + 4\pi \int_0^r \rho_W(r') r'^2 dr' & \text{Wolke sphärisch} \end{cases} \quad (2.3)$$

und die effektive Flächendichte lautet

$$\Sigma_{\text{eff}}(r) = \begin{cases} 2(\rho_c(r) - \rho_W) h(r) & \text{Wolke homogen und isotrop} \\ 2(\rho_c(r) - \rho_W(r)) h(r) & \text{Wolke sphärisch} \end{cases} \quad (2.4)$$

Wie schon in Duschl et al. (2000) beschrieben, sollen auch hier drei Typen von Akkretionsscheiben unterschieden werden. Durch die Berücksichtigung des umgebenden Materials wird es hier allerdings notwendig, die Typen zu verallgemeinern:

- **Nicht-selbstgravitierende Scheiben (NSG-Scheiben):**
In diesen ist die Scheibenmasse gegen die Masse des Zentralobjekts völlig vernachlässigbar.
- **Keplersch selbstgravitierende Scheiben (KSG-Scheiben):**
Diese spüren in vertikaler Richtung bereits ihre eigene Masse, haben aber weiterhin ein Keplersches Winkelgeschwindigkeitsprofil. In vertikaler Richtung überwiegt also bereits die Schwerebeschleunigung der Scheibe, in radialer Richtung dagegen ist sie kleiner als die entsprechende Komponente des Zentralobjekts. An dieser Stelle müssen natürlich die oben beschriebenen effektiven Größen $M_{*,\text{eff}}$ und Σ_{eff} verwendet werden. Nun ist die vertikale Schwerebeschleunigung der Scheibe nur durch die lokale Massenverteilung bestimmt, und man kann in guter Näherung annehmen, daß die Scheibe lokal durch eine radial unendlich ausgedehnte Platte mit einem von r unabhängigen Dichteprofil approximiert wird. Dann folgt für die effektive Schwerebeschleunigung der Scheibe $g_{z,\text{D,eff}} = -2\pi G \Sigma_{\text{eff}} = -4\pi G(\rho_c - \rho_W)h = -\frac{2G}{r^2}(m(r) - 2\pi\rho_W hr^2)$ (siehe 2.2.2.1), wenn $m(r)$ die Masse der Scheibe innerhalb des Abstandes r ist. Für die Vertikalkomponente der effektiven Schwerebeschleunigung des Zentralkörpers findet man aber (siehe erneut 2.2.2.1) $g_{z,*,\text{eff}} = -GM_{*,\text{eff}}/r^3$ für dünne Akkretionsscheiben. Daher ist die Selbstgravitation in z -Richtung dann wichtig, wenn $g_{z,\text{D}} > g_{z,*}$, d.h. $m(r) > \frac{h}{2r}M_{*,\text{eff}} + 2\pi\rho_W hr^2$ ist. Für KSG-Scheiben soll die radiale Komponente $g_{r,\text{D}}$ aber kleiner als $g_{r,*}$ sein, deshalb muß die durch Σ_{eff} bestimmte Masse der Scheibe innerhalb von r kleiner als die effektive Masse des Zentralobjekts sein, die für das Keplersche Winkelgeschwindigkeitsprofil sorgt. Auf diese Weise findet man für Keplersch selbstgravitierende Scheiben den Massenbereich $\frac{h}{2r}M_{*,\text{eff}} + 2\pi\rho_W hr^2 < m(r) < M_{*,\text{eff}} + 2\pi\rho_W hr^2$.
- **Voll selbstgravitierende Scheiben (FSG-Scheiben):**
Diese spüren ihre Scheibenmasse in jeder Richtung und müssen daher reduzierte, durch die effektive Flächendichte Σ_{eff} bestimmte Massen haben, die oberhalb der effektiven Zentralmasse liegen. Für sie ist die Näherung einer Keplersch rotierenden Scheibe nicht mehr erfüllt, der Beitrag der Scheibe muß mit berücksichtigt werden.

Man findet zusammen also für diese drei Typen von Akkretionsscheiben bzgl. ihrer Massen

$$\text{NSG-Scheiben:} \quad m(r) < \frac{h}{2r}M_{*,\text{eff}} + 2\pi\rho_W hr^2$$

$$\text{KSG-Scheiben:} \quad \frac{h}{2r}M_{*,\text{eff}} + 2\pi\rho_W hr^2 < m(r) < M_{*,\text{eff}} + 2\pi\rho_W hr^2$$

$$\text{FSG-Scheiben:} \quad m(r) > M_{*,\text{eff}} + 2\pi\rho_W hr^2$$

Natürlich ist eine Akkretionsscheibe i.a. nicht nur einer dieser Scheibentypen: innen sind Scheiben immer nicht-selbstgravitierend, weiter außen werden sie dann vielleicht Keplersch selbstgravitierend, und genügend Masse vorausgesetzt können sie ganz außen sogar voll selbstgravitierend werden. Da nicht nur die Masse $m(r)$ der Scheibe innerhalb des Radius r wächst, sondern auch die effektive Zentralmasse $M_{*,\text{eff}}$ und – ein geeignetes Dichteprofil ρ_W vorausgesetzt – auch die Masse der Wolke $2\pi\rho_W hr^2$ innerhalb des Scheibenvolumens, kann eine voll selbstgravitierende Scheibe zumindest formal wieder Keplersch selbstgravitierend werden. Ob solche Scheiben existieren, müssen aber Rechnungen und Beobachtungen zeigen.

2.2 Grundlegende Gleichungen

Die Akkretionsscheiben beschreibenden Gleichungen lassen sich grundsätzlich in zwei Typen einteilen: mechanische und thermodynamische Gleichungen. Diese Gleichungen und ihre Folgerungen sowie die Materialfunktionen werden im folgenden im Rahmen der verwendeten Näherungen behandelt.

2.2.1 Mechanische Gleichungen

Es gibt zwei rein mechanische Erhaltungsgleichungen: dies sind die Massen- und die Drehimpulserhaltung. Aus diesen beiden Gleichungen folgen alle mechanischen Gleichungen zur Beschreibung von Akkretionsscheiben.

2.2.1.1 Kontinuitätsgleichung

Die Massenerhaltung beschreibt die zeitliche Änderung einer Masse in einem beliebigen Volumen V durch den Zu- und Abfluß von Materie durch die Oberfläche des umgebenden Volumens und lautet im allgemeinen Fall (Landau & Lifschitz, 1991)

$$\frac{\partial \rho(r, z, \varphi, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(r, z, \varphi, t) \vec{v}(r, z, \varphi, t)) = 0 .$$

Dies vereinfacht sich im (quasi-) stationären Fall und unter Verwendung der angenommenen Azimutalsymmetrie zu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho(r, z) v_r(r, z)) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho(r, z) v_z(r, z)) = 0 .$$

Im folgenden sei angenommen, daß sich in vertikaler Richtung ein hydrostatisches Gleichgewicht ausbildet (siehe 2.2.2.1). Dann verschwindet die z -Komponente der Geschwindigkeit und die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich weiter zu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho(r, z) v_r(r, z)) \approx \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho(r, z) v_r(r)) = 0 ,$$

da sich aufgrund der angenommenen geometrischen Dünne der Scheiben die Radialgeschwindigkeit kaum mit der Höhe ändert. Im 1-Zonen-Modell integriert man über die vertikale Richtung, das Integral kann unter die Ableitung gezogen werden und die Massenerhaltung lautet daher wegen (2.2)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma(r) v_r(r)) = 0$$

$$\Rightarrow r \Sigma(r) v_r(r) = \text{const} .$$

Natürlich ist hier die volle Flächendichte und nicht nur die effektive zu verwenden, da sich die Massenerhaltung auf das gesamte in der Scheibe eingeschlossene Material bezieht. Im Prinzip kann man die Integrationskonstante beliebig wählen, allerdings ist $r \Sigma v_r$ ein Massenfluß pro Längeneinheit, und so bietet es sich an, für die Integrationskonstante den Massenfluß \dot{m} durch einen Ring im Abstand r vom Zentrum mit der Geschwindigkeit $v_r(r)$ zu setzen:

$$\dot{m} := -2\pi r \Sigma(r) v_r(r) = \text{const} . \tag{2.5}$$

Die Massenakkretionsrate quasistationärer Akkretionsscheiben ist also nicht nur zeitlich konstant, sondern auch unabhängig vom Abstand r vom Zentrum überall in der Scheibe gleich.

2.2.1.2 Drehimpulserhaltung

Neben dem Transport von Materie wird auch Drehimpuls durch die Scheibe geführt. Dies erfolgt zum einen durch den Transport von Materie, welche mit Drehimpuls behaftet ist. Zum anderen wird Drehimpuls durch Reibung von Materie in der Scheibe aufgrund ihrer differentiellen Rotation transportiert. Der Gesamtdrehimpuls l setzt sich daher aus zwei Anteilen zusammen: einem durch Materie transportierten, advektiven Term l_{adv} und einem viskosen Anteil l_{visc} :

$$l = l_{\text{adv}} + l_{\text{visc}} .$$

Der durch den Transport von mit Drehimpuls behafteter Materie erzeugte Anteil ist für einen Ring der Dicke Δr im Abstand r gleich dem Produkt aus der Masse des Rings $2\pi r \Delta r \Sigma(r, t)$ und dem spezifischen Drehimpuls $r^2 \omega(r, t)$ an der Stelle r :

$$l_{\text{adv}}(r, t) = 2\pi r^3 \Delta r \Sigma(r, t) \omega(r, t) ,$$

wenn $\omega(r, t)$ die Winkelgeschwindigkeit des Rings im Abstand r vom Zentrum ist. Auch an dieser Stelle ist die Flächendichte (2.1) zu benutzen, da das gesamte rotierende Scheibenmaterial Drehimpuls transportiert. Ganz analog ist der Drehimpuls an der Stelle $r + \Delta r$:

$$l_{\text{adv}}(r + \Delta r, t) = 2\pi (r + \Delta r)^3 \Delta r \Sigma(r + \Delta r, t) \omega(r + \Delta r, t) .$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses allein aufgrund des Transports von mit Drehimpuls behafteter Materie ist also

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{\text{adv}}}{\partial t} &= 2\pi r^3 v_r(r, t) \Sigma(r, t) \omega(r, t) - 2\pi (r + \Delta r)^3 v_r(r + \Delta r, t) \Sigma(r + \Delta r, t) \omega(r + \Delta r, t) \\ &= 2\pi r^3 v_r(r, t) \Sigma(r, t) \omega(r, t) \\ &\quad - 2\pi (r + \Delta r)^3 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} v_r^{(n)}(r, t) \Delta r^n \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Sigma^{(m)}(r, t) \Delta r^m \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \omega^{(k)}(r, t) \Delta r^k \right] \\ &= 2\pi r^3 v_r(r, t) \Sigma(r, t) \omega(r, t) - 2\pi \left[r^3 v_r(r, t) \Sigma(r, t) \omega(r, t) \right. \\ &\quad \left. + r^3 (v_r'(r, t) \Sigma(r, t) \omega(r, t) + v_r(r, t) \Sigma'(r, t) \omega(r, t) + v_r(r, t) \Sigma(r, t) \omega'(r, t)) \Delta r \right. \\ &\quad \left. + 3r^2 \Delta r v_r(r, t) \Sigma(r, t) \omega(r, t) \right] + \mathcal{O}(\Delta r^2) \\ &\stackrel{\Delta r \rightarrow 0}{\approx} -2\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^3 v_r(r, t) \Sigma(r, t) \omega(r, t)) \Delta r . \end{aligned}$$

Der Strich bezeichnet dabei Ableitungen nach dem Radius r . Zur Berechnung des viskosen Anteils des Drehimpulses denkt man sich die Scheibe wieder in Ringe aufgeteilt. In einem bestimmten Bereich an den Grenzen des Rings reiben die Teilchen der Materie aneinander aufgrund der verschiedenen Geschwindigkeiten der Ringe. Dadurch werden die äußeren Schichten des betrachteten Rings vom weiter entfernten Ring abgebremst, die inneren Teile des betrachteten Rings hingegen werden beschleunigt. Dabei entsteht ein Drehmoment, das aufgrund der Reibung Drehimpuls durch die Scheibe transportiert. Sei \tilde{v} eine der Bewegung überlagerte Geschwindigkeitskomponente mit $\tilde{v} \ll v_\varphi$. Diese Komponente entsteht z.B. durch die Massenanziehung zweier Testteilchen oder einfach die thermische Bewegung und ist damit eine Materialfunktion. Sie führt zu leichten Änderungen der Kreisbahngeschwindigkeit und ist völlig stochastisch. Da $\tilde{v} \ll v_\varphi$ ist, geht das betrachtete Teilchen nur wenig aus dem Ring heraus: die typische Länge sei mit λ bezeichnet und hängt ebenfalls vom Material ab. Nun transportiert ein Teilchen, das von $r - \frac{\lambda}{2}$ nach $r + \frac{\lambda}{2}$ läuft, bezogen auf einen Punkt mit dem radialen Abstand r vom Zentrum den spezifischen Drehimpuls

$$\Delta l \left(r - \frac{\lambda}{2} \rightarrow r + \frac{\lambda}{2} \right) = \left(r - \frac{\lambda}{2} \right)^2 \Delta \omega = \left(r - \frac{\lambda}{2} \right)^2 \left(\omega \left(r - \frac{\lambda}{2}, t \right) - \omega(r, t) \right)$$

$$= -\frac{\lambda}{2}r^2\omega'(r,t) + \mathcal{O}(\lambda^2) \approx -\frac{\lambda}{2}r^2\omega'(r,t) .$$

Ein Teilchen, das von außen nach innen fällt, überträgt ganz analog den spezifischen Drehimpuls

$$\Delta l \left(r + \frac{\lambda}{2} \rightarrow r - \frac{\lambda}{2} \right) = - \left(r + \frac{\lambda}{2} \right)^2 \Delta\omega \approx -\frac{\lambda}{2}r^2\omega'(r,t) .$$

Das Minuszeichen rührt daher, daß bei diesem Prozeß Drehimpuls nach innen, also entgegengesetzt zur Richtung von r transportiert wird. Beide Prozesse transportieren also die gleiche Menge Drehimpuls in dieselbe Richtung. Der Nettodrehimpulstransport ergibt sich daher zu

$$dl_{\text{visc}} = -\lambda r^2\omega'(r,t) .$$

Auch ohne Massenänderung wird also rein durch Reibung Drehimpuls durch eine Scheibe transportiert. Dieser Fall ist jedoch nicht realisiert, da Akkretionsscheiben immer Masse transportieren. Das Drehmoment des betrachteten Rings auf einen weiter innen liegenden Ring, welches ohne den "globalen" Materiefluß verursacht wird, ist gleich dem durch die stochastische Geschwindigkeit \tilde{v} verursachten Massenfluß multipliziert mit dem Negativen des oben berechneten Drehimpulses (denn dl_{visc} ist der Drehimpuls, der von einem inneren Ring auf einen äußeren übertragen wird):

$$G(r,t) = \lambda r^2\omega'(r,t) \cdot 2\pi r \Sigma(r,t) \tilde{v} = 2\pi r^3 \Sigma(r,t) \omega'(r,t) \nu . \quad (2.6)$$

Im letzten Schritt wurden die beiden Materialeigenschaften λ und \tilde{v} zur kinematischen Viskosität ν zusammengefaßt, für die noch ein analytischer Ausdruck gesucht werden muß:

$$\nu = \lambda \tilde{v} .$$

Dabei ist ν sowohl ein Reibungsmaß, das angibt, wie effizient die Kopplung zwischen den Scheibenringen ist, als auch eine Materialeigenschaft. Der viskose Anteil an der zeitlichen Änderung der gesamten Drehimpulsbilanz auf den betrachteten Ring ist demnach die Differenz der übertragenen Drehmomente am äußeren und inneren Rand des betrachteten Rings:

$$\frac{\partial l_{\text{visc}}}{\partial t} = G(r + \Delta r, t) - G(r, t) = \frac{\partial G(r, t)}{\partial r} \Delta r$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses im Ring der Dicke Δr im radialen Abstand r muß nun gleich der Differenz aus zugeführtem und abgeführtem Drehmoment zuzüglich des viskosen Anteils sein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial t} &= 2\pi \frac{\partial}{\partial t} (r^3 \Delta r \Sigma(r, t) \omega(r, t)) \\ &= \frac{\partial l_{\text{adv}}}{\partial t} + \frac{\partial l_{\text{visc}}}{\partial t} \\ &= -2\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^3 v_r(r, t) \Sigma(r, t) \omega(r, t)) \Delta r + \frac{\partial G(r, t)}{\partial r} \Delta r \\ &= -2\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^3 v_r(r, t) \Sigma(r, t) \omega(r, t)) \Delta r + 2\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \Sigma(r, t) \omega'(r, t) \nu) \Delta r . \end{aligned}$$

Dies ist die Drehimpulserhaltung. Den ersten Term rechts bezeichnet man als Advektionsterm, den zweiten als Reibungsterm. Bei der angenommenen (Quasi-) Stationarität vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^3 v_r \Sigma \omega) = \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \Sigma \omega' \nu)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^3 v_r \Sigma \omega - r^3 \Sigma \omega' \nu) = 0 \\ \Rightarrow & \quad r^3 v_r \Sigma \omega - r^3 \Sigma \omega' \nu = \text{const.} \end{aligned}$$

Die Wahl einer geeigneten Integrationskonstanten wird in Duschl & Tscharnuter (1991) ausführlich für den Fall beschrieben, daß man einen radialen Energietransport zwischen Scheibe und innerer Randschicht sowie eine endliche Ausdehnung der Randzone zuläßt. Die Herleitung der Integrationskonstanten erfolgte dort aber unter der Annahme Keplerscher Rotation, die hier fallen gelassen werden soll. Trotzdem wird der Argumentation von Duschl & Tscharnuter so weit wie möglich gefolgt. Dazu betrachtet man wieder die Gleichung

$$v_r \Sigma \omega - \Sigma \omega' \nu = \frac{\tilde{C}}{r^3}.$$

Seien nun wie immer r_i der innere Rand der Scheibe und R_* der Radius des zentralen Schwarzen Lochs oder des Sterns, und sei Ω_* die Winkelgeschwindigkeit des Zentralobjekts. Da solche Objekte i.a. nicht Keplersch rotieren, ist Ω_* geringer als der Keplersche Wert der Winkelgeschwindigkeit an der Stelle $r = R_*$. Im Abstand $r = r_i$ dagegen ist die Winkelgeschwindigkeit durch $\omega(r_i)$ gegeben. Im Zwischenbereich – der Randschicht – muß die Azimutalgeschwindigkeit daher auf $R_* \Omega_*$ abgebremst werden, und es muß folglich einen Radius r_0 mit $R_* < r_0 < r_i$ geben, an dem die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit verschwindet: $\omega'(r_0) = 0$. Hieraus folgt dann

$$\begin{aligned} v_r(r_0) \Sigma(r_0) \omega(r_0) &= \frac{\tilde{C}}{r_0^3} \\ \Rightarrow \quad \tilde{C} &= r_0 v_r(r_0) \Sigma(r_0) \cdot r_0^2 \omega(r_0) \stackrel{(2.5)}{=} -\frac{\dot{m}}{2\pi} r_0^2 \omega(r_0) \\ \Rightarrow \quad \nu \Sigma &= v_r \Sigma \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\dot{m}}{2\pi} \frac{r_0^2 \omega(r_0)}{r^3 \omega'} = -\frac{\dot{m}}{2\pi r} \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\dot{m}}{2\pi} \frac{r_0^2 \omega(r_0)}{r^3 \omega'} = -\frac{\dot{m}}{2\pi r} \frac{\omega}{\omega'} \left(1 - \frac{r_0^2 \omega(r_0)}{r^2 \omega} \right). \end{aligned}$$

Die Modelle stationärer, geometrisch dünner Akkretionsscheiben sollen in dieser Arbeit auf zwei verschiedene Arten von Scheiben angewendet werden. Dies sind solche in aktiven galaktischen Kernen und protostellare Scheiben. Um den allgemein-relativistischen Einfluß des Schwarzen Lochs korrekt wiederzugeben, wird für diese Zentralobjekte ein post-Newtonsches Potential⁴ verwendet:

$$\Phi_*(r) = -\frac{GM_*}{r - R_S},$$

wobei $R_S = \frac{2GM_*}{c^2}$ der Schwarzschild-Radius des Schwarzen Lochs ist. Nahe beim Schwarzen Loch und damit bei $r = r_0$ kann die Winkelgeschwindigkeit dann sicherlich durch den post-Newtonschen Wert ersetzt werden (die Scheibe kann dort aus Symmetriegründen keinen Einfluß auf ω haben). Daher kann man hier getrost

$$\omega(r_0) = \sqrt{\frac{1}{r} \nabla \Phi(r)} = \sqrt{\frac{GM_*}{r_0(r_0 - R_S)^2}}$$

setzen. Bei einem Stern als Zentralobjekt dagegen ist die Winkelgeschwindigkeit Keplersch und es gilt

$$\omega(r_0) = \sqrt{\frac{GM_*}{r_0^3}}.$$

⁴Zwar werden Scheiben auch in so geringer Nähe zum Schwarzen Loch berechnet, daß post-Newtonsche Effekte nicht vernachlässigt werden können, andererseits aber nicht so nahe, daß eine vollständig allgemein-relativistische Behandlung notwendig wäre.

Daher lautet die Drehimpulserhaltung

$$\nu\Sigma = -\frac{\dot{m}}{2\pi r} \frac{\omega}{\omega'} f \quad (2.7)$$

mit

$$f := \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{GM_* r_0^3 / (r_0 - R_S)^2}}{r^2 \omega} & \text{für AGN-Scheiben} \\ 1 - \frac{\sqrt{GM_* r_0}}{r^2 \omega} & \text{für protostellare Scheiben} \end{cases}$$

2.2.2 Thermodynamische Gleichungen

Im folgenden werden die thermodynamischen Gleichungen für die Beschreibung von selbstgravitierenden Akkretionsscheiben behandelt. Das hydrostatische Gleichgewicht in vertikaler Richtung gestattet eine Modellierung der aufgesetzten Vertikalstruktur. Es wird hier angenommen, daß sich das Gleichgewicht immer instantan einstellt. Die Zustandsgleichung beschreibt die Temperatur- und Dichteabhängigkeit des Drucks; in dieser Arbeit wird angenommen, daß die Scheibenmaterie durch die Gleichungen eines idealen Gases beschrieben werden kann. Schließlich werden noch die Energieerhaltung und der Energietransport behandelt.

2.2.2.1 Hydrostatisches Gleichgewicht in vertikaler Richtung

Im hydrostatischen Gleichgewicht in vertikaler Richtung wird die Gravitationskraft durch die Druckgradientenkraft ausbalanciert, d.h. es gilt

$$\frac{\partial P(r, z)}{\partial z} = -\rho(r, z) g_z(r, z) .$$

Im 1-Zonen-Modell, in dem linear zwischen Scheibenmitte und -oberfläche interpoliert wird, kann man den Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten ersetzen. Auf der rechten Seite stehen dann die Größen in der Scheibenmitte:

$$\frac{\partial P(r, z)}{\partial z} \approx -\frac{P_c(r) - P_s(r)}{h} = -\rho \left(r, \frac{h}{2} \right) g_z \left(r, \frac{h}{2} \right) \approx -\rho_c(r) g_z(r, h) .$$

Dabei sind P_c und P_s die Drücke in der Scheibenmitte und an der Oberfläche. Der letzte Schritt bedarf einiger Erläuterungen: die Dichte auf halber Scheibenhöhe $z = \frac{1}{2}h$ bei einem bestimmten Radius⁵ unterscheidet sich nicht wesentlich von ρ_c , was sofort offensichtlich wird, wenn man isotherme Dichteprofile ($\rho \propto \exp(-\frac{1}{2}(\frac{r}{h})^2)$) oder aber solche für Scheiben mit hoher Masse ($\rho \propto \cosh^{-2}(\frac{r}{h})$) betrachtet, in denen fast die gesamte Masse zwischen der Mittelebene und $z = \frac{1}{2}h$ liegt. Dann ändert sich aber die Schwerebeschleunigung im Gegenzug zwischen $z = \frac{1}{2}h$ und $z = h$ kaum, weil die Hauptmasse eben immer unterhalb von $z = \frac{1}{2}h$ liegt. Die Fehler, die man auf diese Weise einbringt, sind aber klein gegen die Unsicherheiten, die durch die 1-Zonen-Näherung Einzug in die Rechnungen halten. Der durch das umgebende Material hervorgerufene Oberflächendruck soll hier also nicht vernachlässigt werden. Will man den Druck P_s berechnen, benötigt man die Kenntnis der Temperatur- und Dichteverteilung der Molekülwolke in der Umgebung der Scheibe. Da die Temperatur des umgebenden Materials auf jeden Fall als gering angenommen wird (einige wenige Dutzend K bei protoplanetaren Scheiben und etwa 150 K bei Akkretionsscheiben in AGN (siehe 3.4)), ist der Druck des umgebenden Materials der eines idealen Gases, d.h. i.a. gilt $P_W(R) = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_W(R) T_W(R)$, wobei alle Größen im Szenario einer homogenen und isotropen Wolke konstant sind. Der Druck an der Oberfläche der Scheibe muß diesen Druck ausbalancieren,

⁵Es handelt sich *nicht* um die mittlere Dichte!

d.h. $P_S = P_W(R)$. Die Schwerebeschleunigung in vertikaler Richtung g_z setzt sich nun aus dem effektiven Anteil des Zentralkörpers $g_{z,*,\text{eff}}$ und dem effektiven Scheibenanteil $g_{z,D,\text{eff}}$ zusammen:

$$g_z = g_{z,*,\text{eff}} + g_{z,D,\text{eff}} .$$

I.a. liefern sowohl das Zentralobjekt als auch die Molekülwolke einen Beitrag zur effektiven Schwerebeschleunigung $\vec{g}_{*,\text{eff}}$. Wie in 2.1 beschrieben, werden 2 Szenarien für das umgebende Material behandelt. Im ersten Fall ist das Medium homogen und isotrop verteilt und übt keine Kraft aus, es gibt daher keinen Beitrag zu $\vec{g}_{*,\text{eff}}$. Im zweiten Fall ist das Wolkenmaterial sphärisch verteilt, und das innerhalb eines bestimmten Radius R liegende Material trägt mit einem Anteil $-GM_W(R)/R^2$ zur effektiven Kraft des Zentralkörpers bei, wobei $M_W(R) = 4\pi \int_0^R \rho_W(R) R^2 dR$ die innerhalb von R eingeschlossene Masse der Wolke ist. Die weiter außen liegende Wolkenmasse hat keinen Einfluß auf Testteilchen innerhalb des Radius R , da sich hier alle Kräfte aus Symmetriegründen aufheben. Der effektive Anteil des Zentralkörpers ist der auf die z -Richtung projizierte Anteil der Schwerebeschleunigung $\vec{g}_{*,\text{eff}}$ des Zentralobjekts. Unter der Annahme dünner Scheiben kann man daher

$$g_{z,*,\text{eff}} = g_{*,\text{eff}} \sin(\angle(\vec{g}_{*,\text{eff}}, \vec{r})) \approx g_{*,\text{eff}} \frac{h}{r} \approx -\Omega_{*,\text{eff}}^2 h$$

schreiben. Dabei ist $\Omega_{*,\text{eff}}$ die Winkelgeschwindigkeit des Zentralobjekts mit der effektiven Masse (2.3). Für AGN-Scheiben wird daher der post-Newtonsche Wert

$$\Omega_{*,\text{eff}} = \sqrt{\frac{GM_{*,\text{eff}}}{R(R - R_S)}} \approx \sqrt{\frac{GM_{*,\text{eff}}}{r(r - R_S)}}$$

verwendet, und für protostellare Scheiben sei $\Omega_{*,\text{eff}}$ die Keplersche Winkelgeschwindigkeit, die aus dieser Masse resultiert:

$$\Omega_{*,\text{eff}} = \sqrt{\frac{GM_{*,\text{eff}}}{R^3}} \approx \sqrt{\frac{GM_{*,\text{eff}}}{r^3}} .$$

Für den vertikalen Anteil der Schwerebeschleunigung der Scheibe kann man so nicht verfahren. Der Grund hierfür ist einfach zu verstehen: die durch das Zentralobjekt ausgeübte Beschleunigung ist immer radial auf sein Zentrum hin ausgerichtet, und der vertikale Anteil dieser Beschleunigung ist in der Tat nur die Projektion von \vec{g}_* auf die z -Achse. Dasselbe gilt natürlich auch für die durch die effektive Zentralmasse $M_{*,\text{eff}}$ ausgeübte Schwerebeschleunigung, denn auch diese ist immer radial auf das Zentrum hin ausgerichtet. Anders sieht es im Fall von Scheiben aus: in radialer Richtung spürt die Scheibe die globale Massenverteilung, die bei selbstkonsistenten Rechnungen in die Potentialbestimmung mit eingeht. In vertikaler Richtung dagegen kann man den Beitrag der Scheibe gedanklich in 2 Anteile aufteilen: die unmittelbare Umgebung des Ortes, an dem die Beschleunigung bestimmt werden soll, trägt so zum Potential bei, daß die resultierende Gravitationskraft – schon aus Symmetriegründen – exakt zur Mittelebene hin ausgerichtet ist. Der gesamte Rest der Scheibe dagegen wirkt in Form der auf die vertikale Richtung projizierten Anteile der Beschleunigungen aller Ringe auf den gewählten Aufpunkt. Nun kann man aber das Potential in z -Richtung nicht auflösen und damit auch keine vertikalen Potentialgradienten – insbesondere auch nicht $\vec{g}_{z,D,\text{eff}}$ – selbstkonsistent berechnen, da man in der 1-Zonen-Näherung keine vertikale Struktur mitrechnet. Man kann sich diese Ringe aber in akzeptabler Näherung als im Zentralobjekt vereinigt denken, so daß sie die effektive Masse desselben vergrößern. Diese Näherung ist umso besser, je größer der minimale Abstand des Rings vom Aufpunkt ist. Für KSG-Scheiben, in denen die Masse der Scheibe noch immer klein gegen die Zentralmasse ist, kann dieser Beitrag zum Potential vernachlässigt werden, da die effektive Masse des Zentralpotentials sich eben kaum ändert. Zudem wird diese Näherung um so besser, je dünner die Scheibe ist, denn die Projektion der Beschleunigung des Zentralobjekts und der Scheibe sinken mit kleiner werdender Höhe, während diejenige der unmittelbaren Umgebung des Aufpunktes mit abnehmender Höhe einen größeren Beitrag liefert. Die Höhe selbst ist aber nach Huré (2001) bei dem hier verwendeten 1-Zonen-Modell nur bis auf einen Faktor 4 genau

bestimmt. Die Unsicherheit, die auf diese Weise bei der Berechnung des vertikalen Anteils der Beschleunigung durch die Scheibe auftritt, ist bei KSG-Scheiben auf jedenfall deutlich größer als diejenige, die von der Vernachlässigung des nicht-lokalen Scheibenbeitrags zum effektiven Zentralpotential herrührt. Eine – ihm Rahmen der hier verwendeten Näherungen – korrekte Berechnung des Scheibenanteils erscheint daher unangemessen aufwendig und soll hier unterbleiben. Für FSG-Scheiben ist der nicht-lokale Beitrag der Scheibe zur vertikalen Beschleunigung dagegen sehr wohl von der gleichen Größenordnung wie oder größer als der Beitrag des Zentralpotentials. In welchem Verhältnis diese beiden Anteile dann zum lokalen Beitrag von g_z stehen, hängt im wesentlichen aus den gleichen Gründen wie oben von der Höhe und zusätzlich vom Verlauf der Flächendichte ab: je stärker die Flächendichte nach außen hin abfällt, umso mehr Masse befindet sich im inneren Bereich der Scheibe und desto schlechter ist die Näherung. Wenn die Flächendichte aber außen sehr viel flacher ist, kann der lokale Beitrag der Scheibe dominieren, und die Näherung, den nicht-lokalen Beitrag der Scheibe zu vernachlässigen, wäre auch in diesem Fall recht gut. Die Qualität dieser Vereinfachung wird a posteriori zu überprüfen sein.

Nach dem oben Gesagten braucht aber nur die unmittelbare radiale und azimutale Umgebung für die vertikale Beschleunigungskomponente berücksichtigt zu werden. Dabei ist allerdings die Masse des für die vertikale Schwerebeschleunigung verantwortlichen Scheibenmaterials um einen solchen Betrag zu reduzieren, den die Wolke in diesem Scheibenvolumen einnehmen würde, da jener Anteil bereits in $g_{z,*,\text{eff}}$ berücksichtigt wurde. Hier wirkt also effektiv nur die durch den Dichteüberschuß $\rho(r, z) - \rho_{\text{W}}(r)$ erzeugte Schwerebeschleunigung. Man kann daher ohne großen Fehler annehmen, daß das Potential in z -Richtung gleich dem einer radial unendlich ausgedehnten Platte mit einer Dichteverteilung $\rho = \rho(|z|)$ ist (Paczynski, 1978). ρ hängt also nicht vom radialen Abstand ab und ist wegen der geforderten Symmetrie des Problems symmetrisch zur Mittelebene. Aus der Definition (2.1) der Flächendichte findet man einfach die Differentialgleichung

$$\frac{d\Sigma_{\text{eff}}}{dz} = \frac{d}{dz} \int_{-h}^h \rho(r, |z|) dz' = 2 \frac{d}{dz} \int_0^h \rho(r, |z|) dz' = 2 \int_{\rho_{\text{W}}}^{\rho_c} d\rho(r, |z|) = 2(\rho_c - \rho_{\text{W}}(r))$$

Aus der Poissongleichung für das effektive Scheibenpotential

$$\Delta\Phi_{\text{D,eff}} = 4\pi G(\rho_c - \rho_{\text{W}}(r))$$

findet man bei einem gegebenen Abstand r

$$\frac{dg_{z,\text{D,eff}}}{dz} = -\Delta\Phi_{\text{D,eff}} = -4\pi G(\rho_c - \rho_{\text{W}}(r)) = -2\pi G \frac{d\Sigma_{\text{eff}}}{dz}$$

$$\Rightarrow g_{z,\text{D,eff}} = -2\pi G \Sigma_{\text{eff}}(r) .$$

Diese Näherung ist nicht so schlecht wie man vielleicht annehmen mag: in den inneren Regionen der Scheibe ändern sich ρ_c und h zwar stark, und die Annahme einer unendlich ausgedehnten Platte mit radial konstantem Dichteprofil ist eher unbrauchbar, aber hier ist die Schwerebeschleunigung durch die des effektiven Zentralobjekts dominiert, und $\vec{g}_{z,\text{D,eff}}$ ist vernachlässigbar. Weiter außen aber wird die Näherung immer besser, da sich Zentraldichte und Höhe nur noch mäßig ändern.

Insgesamt findet man daher für das hydrostatische Gleichgewicht in vertikaler Richtung

$$\begin{aligned} P_c &= P_s - \rho_c h g_z = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_{\text{W}}(R) T_{\text{W}}(R) + \rho_c \Omega_{*,\text{eff}}^2 h^2 + 2\pi G \rho_c h \Sigma_{\text{eff}} \\ &\approx \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_{\text{W}}(r) T_{\text{W}}(r) + \rho_c h^2 (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G(\rho_c - \rho_{\text{W}}(r))) . \end{aligned} \quad (2.8)$$

An dieser Stelle bietet es sich an, einen Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit zu suchen. Man betrachtet hier die isotherme Schallgeschwindigkeit, die sich aus der Zustandsgleichung gemäß

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = c_s^2$$

ergibt. Da die Schallgeschwindigkeit in der 1-Zonen-Näherung in der Zentralebene von Interesse ist, ersetzt man den Differentialquotienten in Ermangelung einer besseren Abschätzung durch das Verhältnis der Größen in der Zentralebene:

$$P_c = \rho_c c_s^2 . \quad (2.9)$$

Ein Vergleich mit (2.8) zeigt sofort

$$c_s = \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{\rho_W(r)}{\rho_c} T_W(r) + h^2 \left(\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G(\rho_c - \rho_W(r)) \right)} . \quad (2.10)$$

Im Falle verschwindender Selbstgravitation der Scheibe und vernachlässigbarer Dichte der umgebenden Molekülwolke vereinfacht sich dieser Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit zu der aus der Theorie der α -Scheiben bekannten Beziehung $c_s = \Omega_* h$.

Man kann sich nun klarmachen, daß sich Akkretionsscheiben unabhängig davon, ob sie selbstgravitierend sind oder nicht, tatsächlich praktisch immer im hydrostatischen Gleichgewicht befinden. Dazu betrachtet man zwei verschiedene Zeitskalen: die Freifall-Zeitskala τ_{ff} , innerhalb derer die Scheibe bei ausgeschalteter Druckgradient-Kraft kollabieren würde, und die “Explosions”-Zeitskala τ_{expl} , in der die Auflösung der Scheibe bei abgeschalteter Gravitation erfolgen würde. Im Ungleichgewicht in vertikaler Richtung wird die Scheibenhöhe durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

beschrieben. Für die Abschätzung der Zeitskalen sollen wieder Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Daher findet man für die Freifall-Zeitskala

$$\begin{aligned} \frac{h}{\tau_{\text{ff}}^2} &= -g_z = \left(\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G(\rho_c - \rho_W(r)) \right) h \\ \Rightarrow \tau_{\text{ff}} &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G(\rho_c - \rho_W(r))}} . \end{aligned}$$

Für die “Explosions”-Zeitskala dagegen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{h}{\tau_{\text{expl}}^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \approx \frac{P_c - P_S}{\rho c h} = \frac{P_c}{\rho c h} - \frac{P_S}{\rho c h} = \frac{c_s^2}{h} - \frac{P_S}{\rho c h} \\ \Rightarrow \tau_{\text{expl}} &= \frac{h}{\sqrt{c_s^2 - \frac{P_S}{\rho c}}} \end{aligned}$$

Nahe dem hydrostatischen Gleichgewicht ist die Schallgeschwindigkeit aber durch (2.10) gegeben und man findet daher

$$\tau_{\text{expl}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{P_S}{\rho c} + h^2 \left(\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G(\rho_c - \rho_W(r)) \right) - \frac{P_S}{\rho c}}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G(\rho_c - \rho_W(r))}} .$$

In diesem Fall sind die beiden Zeitskalen also gleich und das Gleichgewicht ist daher stabil⁶, wenn die Störung nicht allzu groß ist.

⁶Befinden sich genau zwei Kräfte im Wettstreit, so herrscht immer genau dann Gleichgewicht, wenn die Zeitskalen für beide Prozesse identisch sind, da dann eine Störung einer Komponente auf der gleichen Zeitskala durch die zweite Kraft kompensiert wird.

2.2.2.2 Die Zustandsgleichung

Die Zustandsgleichung beschreibt, wie sich der Druck als Funktion der Dichte, Temperatur und gegebenenfalls der Chemie ändert: $P = P(\rho, T, \mu)$. Das Scheibenmaterial kann in ausgezeichneter Näherung als ideales Gas behandelt werden. Staub geht nicht direkt in die Zustandsgleichung mit ein, sondern wird nur über die Opazität mit berücksichtigt (siehe 2.2.3) und ist damit für die Vertikalstruktur von Bedeutung. Die Zustandsgleichung ist daher die des idealen Gases, wobei zusätzlich der eventuell auftretende Strahlungsdruck berücksichtigt werden soll:

$$P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4 = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{\Sigma}{h} T + \frac{a}{3} T^4, \quad (2.11)$$

wenn \mathcal{R} die Gaskonstante, μ das Molekulargewicht und a die Strahlungskonstante ist.

2.2.2.3 Dissipation in der Scheibe

Wie bereits in 2.2.1.2 beschrieben, verliert ein Ring der Akkretionsscheibe auch ohne Massenfluß durch Wechselwirkung mit dem äußeren und inneren Ring Drehimpuls. Die hierdurch geleistete Arbeit ist proportional zu

$$G(r + dr) - G(r) = \frac{\partial G}{\partial r} dr.$$

Die Arbeitsrate (geleistete Arbeit pro Zeit) ist proportional zu

$$\frac{\partial G}{\partial r} \frac{2\pi(r + dr) - 2\pi r}{\tau_{\text{rot}}} = \frac{2\pi}{\tau_{\text{rot}}} \frac{\partial G}{\partial r} dr = \omega \frac{\partial G}{\partial r} dr = \frac{\partial(G\omega)}{\partial r} dr - G\omega' dr,$$

wobei τ_{rot} die Umlaufperiode im Abstand r bezeichnet. Der linke Ausdruck auf der rechten Seite beschreibt die geleistete Arbeit pro Zeiteinheit aufgrund des globalen Transports von Drehimpuls (Rotationsenergie) durch die Scheibe, das Integral über dieselbe ergibt

$$\int_{r_i}^{r_a} \frac{\partial(G\omega)}{\partial r} dr = G\omega \Big|_{r_i}^{r_a} = 2\pi r^3 \Sigma \omega \omega' \nu \Big|_{r_i}^{r_a}$$

und hängt daher nur von den Rändern und damit den globalen Eigenschaften der Scheibe ab. Der rechte Term der Arbeitsrate ist lokaler Natur und wird als Dissipationsterm bezeichnet. Er behandelt die Umwandlung von mechanischer Energie in thermische durch lokalen Reibungsverlust. Man führt nun eine Dissipationsrate pro Flächeneinheit ein:

$$D(r) = -\frac{G\omega' dr}{2 \cdot 2\pi r dr} \stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{2} \nu \Sigma (r\omega')^2.$$

Der zusätzliche Faktor 2 im Nenner berücksichtigt, daß die Energie durch die Ober- und Unterseite der Scheibe dissipiert. Insgesamt erfolgt die Abstrahlung vorwiegend senkrecht zur Scheibe. Mit der Randschichtbetrachtung (Gleichung (2.7)) ergibt sich schließlich

$$D(r) = -\frac{\dot{m}}{4\pi} r \omega \omega' f. \quad (2.12)$$

Das einzige, was man hier vorausgesetzt hat, ist, daß die Viskosität nicht verschwindet, d.h. Reibung eine Rolle spielt. Die Dissipationsrate ist dann unabhängig von der Viskosität. Dies ist aber nicht verwunderlich, wenn man sich einen einzelnen Ring ansieht. Aufgrund der Viskosität wandert ein solcher Ring nach

innen, was aber nur die Folge des Gravitationspotentials ist. Die freigesetzte Energie resultiert nur aus der Potentialdifferenz. Man benötigt die Viskosität also, damit die Scheibe durch Reibung laufen kann, die Ausbeute ist aber allein die Folge des Gradienten des Gravitationspotentials. Im Prinzip kann – wenn auch nicht in stationären Scheiben – die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit ihr Vorzeichen ändern, womit aber gleichzeitig eine Umkehrung des Massenflusses einhergeht: auch die Massenakkretionsrate ändert dann ihr Vorzeichen. Die Dissipationsrate bleibt daher auch in diesem Fall positiv.

2.2.2.4 Die Energieerhaltung

Die totale zeitliche Änderung der Energie der Akkretionsscheibe setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: der Änderung der kinetischen Energie und der Änderung der inneren Energie, also

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) + \vec{\nabla} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) \vec{v} \right],$$

wobei $\frac{1}{2} \rho v^2$ die spezifische kinetische Energie und $\rho \epsilon$ die spezifische innere Energie ist. Diese zeitliche Änderung der Energie kann verursacht werden durch die zeitliche Änderung der Arbeiten, die aus den auf die Scheibe ausgeübten Kräften resultieren. Dies sind die Druckgradient-Kraft, die Gravitationskraft und viskose Kräfte. Schließlich müssen auch noch die durch radiative und konvektive Strahlungsflüsse verursachten Energieänderungen berücksichtigt werden⁷. Vernachlässigt werden sollen dagegen alle anderen äußeren Kräfte wie z.B. magnetische. Die Energieerhaltung lautet in diesem Fall

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) + \vec{\nabla} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) \vec{v} \right] = - \left(\vec{\nabla} P \right) \vec{v} + \vec{f}_{\text{grav}} \vec{v} + \vec{f}_{\text{visc}} \vec{v} - \vec{\nabla} \left(\vec{F}_{\text{rad}} + \vec{F}_{\text{conv}} \right),$$

wenn \vec{f}_{grav} und \vec{f}_{visc} die gravitative und die viskose Kraftdichte und \vec{F}_{rad} und \vec{F}_{conv} die radiative bzw. konvektive Strahlungsflußdichte bedeuten. Wie üblich soll hier angenommen werden, daß das akkretierte Material inkompressibel ist und daher $\text{div } \vec{v} = 0$ gilt. Dann schreibt sich die Energieerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) + \vec{\nabla} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon + P \right) \vec{v} \right] = \vec{f}_{\text{grav}} \vec{v} + \vec{f}_{\text{visc}} \vec{v} - \vec{\nabla} \left(\vec{F}_{\text{rad}} + \vec{F}_{\text{conv}} \right).$$

Da sich Akkretionsscheiben im hydrostatischen Gleichgewicht befinden (siehe 2.2.2.1), kann man den ersten Summanden auf der linken Seite der Energieerhaltung vernachlässigen. Zudem ist die innere (thermische) Energiedichte durch $\epsilon_{\text{therm}} = c_s^2$ und die gravitative Energiedichte durch $\epsilon_{\text{grav}} = v_\phi^2$ gegeben. Das bedeutet aber

$$\frac{\epsilon_{\text{therm}}}{\epsilon_{\text{grav}}} = \frac{c_s^2}{v_\phi^2}.$$

Gleichung (2.10) eignet sich nicht für eine Abschätzung dieses Verhältnisses, da der Term $\frac{P_s}{\rho_c} = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{\rho_W(r)}{\rho_c}$. $T_W(r)$ in der Schallgeschwindigkeit nur schwer zu handhaben ist. Statt dessen betrachtet man eine vertikal isotherm geschichtete Scheibe. In dieser ist $\partial P / \partial \rho = c_{s,c}^2 = \text{const}$, und man kann daher in diesem speziellen Fall

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{P_c - P_s}{\rho_c - \rho_W(r)} = c_{s,c}^2$$

setzen, da die Schallgeschwindigkeit $c_{s,c}$ in der Mittelebene der Scheibe und die Schallgeschwindigkeit $c_{s,w}$ der umgebenden Wolke gleich sind. Im isothermen Fall gilt also

$$P_c = P_s + (\rho_c - \rho_W(r)) c_{s,c}^2.$$

⁷Wärmeleitung spielt in optisch dünnen Akkretionsscheiben keine Rolle und kann daher vernachlässigt werden. Für optisch dicke Scheiben ist sie dagegen bereits in der Diffusionsnäherung enthalten (siehe 2.2.2.5).

Im nicht vertikal isothermen Fall dagegen gilt natürlich wieder Gleichung (2.9). Für das umgebende Wolkenmaterial andererseits gilt analog $P_W = \rho_W(r)c_{s,W}^2$, und daher erhält man im allgemeinen Fall

$$P_c = P_S + \rho_c c_{s,c}^2 - \rho_W(r) c_{s,W}^2 = P_S + \left(\rho_c - \rho_W(r) \frac{c_{s,W}^2}{c_{s,c}^2} \right) c_{s,c}^2 .$$

Da die Temperatur in der Mittelebene nicht unter der Temperatur des umgebenden Mediums liegt, ist die Schallgeschwindigkeit in der Wolke immer kleiner als die Schallgeschwindigkeit in der Mittelebene der Scheibe, allenfalls mag sie im vertikal isothermen Fall gleich sein. Daher findet man für den allgemeinen Fall

$$P_c \geq P_S + (\rho_c - \rho_W(r)) c_s^2 ,$$

wobei mit c_s jetzt immer die Schallgeschwindigkeit in der Mittelebene der Scheibe gemeint sei. Ein Vergleich mit (2.8) ergibt

$$\begin{aligned} & \rho_c h^2 (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G(\rho_c - \rho_W(r))) \geq (\rho_c - \rho_W(r)) c_s^2 \\ \Rightarrow & c_s \leq \sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)}} \sqrt{\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G(\rho_c - \rho_W(r))} h \\ \Rightarrow & \frac{\epsilon_{\text{therm}}}{\epsilon_{\text{grav}}} \leq \frac{\frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)} (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G(\rho_c - \rho_W(r))) h^2}{\omega^2 r^2} \end{aligned}$$

Um eine Abschätzung für diesen Ausdruck zu erhalten, muß man die Winkelgeschwindigkeit ω für selbstgravitierende Akkretionsscheiben abschätzen. Dabei muß nicht nur der effektive Anteil $\Omega_{*,\text{eff}}$ von Zentralobjekt und Wolke berücksichtigt werden, sondern auch der effektive Anteil der Scheibe $\omega_{D,\text{eff}}$, der sich aus dem effektiven Scheibenpotential $\Phi_{D,\text{eff}}$ gemäß

$$\omega_{D,\text{eff}} = \sqrt{-\frac{1}{r} \nabla_r \Phi_{D,\text{eff}}}$$

ergibt. Da das Potential der Scheibe als Teil der Lösung a priori nicht bekannt ist, postuliert man hier, daß nur die innerhalb des Radius r liegende, um die Masse der Wolke im Scheibenvolumen reduzierte Masse $m_{\text{eff}}(r)$ in der Form

$$\Phi_{D,\text{eff}} \approx -\frac{Gm_{\text{eff}}(r)}{r}$$

zum Potential beitrage. Die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe lautet dann

$$\omega_{D,\text{eff}} = \sqrt{\frac{Gm_{\text{eff}}(r)}{r^3}} .$$

Aufgrund der Superposition der Potentiale ist die resultierende Winkelgeschwindigkeit ω von Zentralobjekt und Scheibe

$$\omega = \sqrt{\Omega_{*,\text{eff}}^2 + \omega_{D,\text{eff}}^2} . \quad (2.13)$$

Sei nun im folgenden angenommen, daß sich auch das Potential eines Schwarzen Lochs in der Keplerschen Form verwenden lasse, was nicht zu nahe am Ereignishorizont eine gute Näherung ist. Damit gilt dann

für das Verhältnis von thermischer und gravitativer Energiedichte

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{\text{therm}}}{\epsilon_{\text{grav}}} &\leq \frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)} \frac{\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_c - \rho_W(r))}{\Omega_{*,\text{eff}}^2 + \omega_{\text{D},\text{eff}}^2(r)} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \\ &= \frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)} \frac{M_{*,\text{eff}} + 4\pi (\rho_c - \rho_W(r)) r^3}{M_{*,\text{eff}} + m_{\text{eff}}(r)} \left(\frac{h}{r}\right)^2. \end{aligned}$$

Man definiert nun eine Dichte $\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}}$, die ein Stern mit der Masse $M_{*,\text{eff}}$ hätte, wenn er auf das Volumen einer Sphäre mit Radius r aufgebläht würde und die Dichte in seinem Inneren homogen wäre:

$$\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}} := \frac{M_{*,\text{eff}}}{\frac{4\pi}{3} r^3}.$$

Damit folgt aber

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{\text{therm}}}{\epsilon_{\text{grav}}} &\leq \frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)} \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 \bar{\rho}_{c,*,\text{eff}} + 4\pi (\rho_c - \rho_W(r)) r^3}{\frac{4\pi}{3} r^3 \bar{\rho}_{c,*,\text{eff}} + m_{\text{eff}}(r)} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \\ &= \frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)} \frac{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}} + 3(\rho_c - \rho_W(r))}{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}} + \frac{3}{4\pi r^3} m_{\text{eff}}(r)} \left(\frac{h}{r}\right)^2. \end{aligned}$$

Die effektive Masse der Scheibe innerhalb des Radius r kann näherungsweise dadurch bestimmt werden, daß man annimmt, die Scheibe wäre ein Zylinder mit dem Radius r , der Höhe $2h(r)$ und der homogenen Dichte $\rho_c(r) - \rho_W(r)$. Zwar steigt die Dichte in inneren Regionen der Scheibe an, aber die Höhe nimmt gleichzeitig ab, so daß beide Größen entgegengesetzte Beiträge liefern. Die Näherung ist daher nicht allzu schlecht. Man findet also

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{\text{therm}}}{\epsilon_{\text{grav}}} &\leq \frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)} \frac{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}} + 3(\rho_c - \rho_W(r))}{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}} + \frac{3h}{2r} (\rho_c - \rho_W(r))} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \\ &= \frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)} \frac{1 + \frac{3(\rho_c - \rho_W(r))}{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}}}}{1 + \frac{h}{2r} \frac{3(\rho_c - \rho_W(r))}{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}}}} \left(\frac{h}{r}\right)^2. \end{aligned}$$

Der Term $\frac{3(\rho_c - \rho_W(r))}{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}}}$ ist ein Maß für die Selbstgravitation der Scheibe. Wie in 2.1 beschrieben, unterscheidet man NSG-, KSG- und FSG-Scheiben. Für NSG-Scheiben ist

$$\begin{aligned} m_{\text{eff}}(r) < \frac{h}{2r} M_{*,\text{eff}} &\Leftrightarrow 2\pi r^2 h (\rho_c - \rho_W) < \frac{h}{2r} \frac{4\pi}{3} r^3 \bar{\rho}_{c,*,\text{eff}} \\ &\Leftrightarrow \frac{3(\rho_c - \rho_W)}{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}}} < 1. \end{aligned}$$

Ganz analog gilt für KSG-Scheiben

$$\frac{h}{2r} M_{*,\text{eff}} < m_{\text{eff}}(r) < M_{*,\text{eff}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{3(\rho_c - \rho_W)}{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}}} < \frac{2r}{h}$$

und für FSG-Scheiben

$$m_{\text{eff}}(r) > M_{*,\text{eff}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3(\rho_c - \rho_W)}{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}}} > \frac{2r}{h}.$$

Sei nun

$$\xi := \frac{3(\rho_c - \rho_W(r))}{\bar{\rho}_{c,*,\text{eff}}} .$$

Der Term

$$\frac{1 + \xi}{1 + \frac{h}{2r}\xi}$$

ist streng monoton steigend, denn es gilt

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1 + \xi}{1 + \frac{h}{2r}\xi} \right) = \frac{1 + \frac{h}{2r}\xi - (1 + \xi)\frac{h}{2r}}{\left(1 + \frac{h}{2r}\xi\right)^2} = \frac{1 - \frac{h}{2r}}{\left(1 + \frac{h}{2r}\xi\right)^2} > 0 ,$$

da $\frac{h}{2r} < 1$ ist. Dieser Ausdruck nimmt also für $\xi \rightarrow \infty$ und damit Scheiben mit unendlich großer Masse sein Maximum an. Dieses ist gegeben durch

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1 + \xi}{1 + \frac{h}{2r}\xi} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi}{\frac{h}{2r}\xi} = \frac{2r}{h} .$$

Daher gilt

$$\frac{\epsilon_{\text{therm}}}{\epsilon_{\text{grav}}} < \frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)} \frac{2r}{h} \left(\frac{h}{r}\right)^2 = \frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_W(r)} \frac{2h}{r} .$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite ist von der Größenordnung 1, da die Zentralkichte in Scheiben die Dichte an der Oberfläche immer deutlich überwiegt. Eine Scheibe, deren Höhe also nie mehr als 5% des Radius beträgt, deponiert maximal 11% ihrer Energie in innere Energie, und das nur dann, wenn sie unendlich massereich und vertikal isotherm geschichtet ist, ansonsten ist die thermische Energiedichte teilweise erheblich kleiner als die gravitative Energiedichte. So gehen in einer typischen Keplersch selbstgravitierenden Akkretionsscheibe nur etwa 2.5% der Energie in thermische Energie, wenn ihre Dicke 5% des Radius nicht überschreitet und sie vertikal isotherm ist, ansonsten noch weniger. Für dünne Akkretionsscheiben gilt daher schließlich

$$\frac{\epsilon_{\text{therm}}}{\epsilon_{\text{grav}}} \ll 1 .$$

Abbildung 2.2 zeigt für verschiedene Verhältnisse h/r noch einmal das Verhältnis von thermischer zu gravitativer Energiedichte als Funktion der Scheibenmasse in Einheiten der Masse des Zentralobjekts und damit die Qualität der Ungleichung. Die kinetische Energiedichte ist von der gleichen Größenordnung wie die gravitative Energiedichte, denn Zentrifugalkraft und Gravitationskraft befinden sich in einem empfindlichen Gleichgewicht, und die Zentrifugalkraft liefert den Hauptbeitrag zur kinetischen Energie ($v_\varphi \gg v_r$). Daher gilt auch

$$\frac{\epsilon_{\text{therm}}}{\epsilon_{\text{kin}}} \ll 1 .$$

Nach (2.9) ist der Zentraldruck gegeben durch $P_c = \rho_c c_s^2$. Für das Scheibenmaterial als ideales Gas gilt für die innere Energie $\epsilon_{\text{therm}} = \frac{5}{2} \rho c_s^2$ und damit $P = \rho c_s^2 = \mathcal{O}(\epsilon \rho)$. Daher kann auch die durch die Druckgradient-Kraft erzeugte Leistung vernachlässigt werden und die Energieerhaltung vereinfacht sich zu

$$\vec{\nabla} \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \vec{v} \right] = \vec{f}_{\text{grav}} \vec{v} + \vec{f}_{\text{visc}} \vec{v} - \vec{\nabla} \left(\vec{F}_{\text{rad}} + \vec{F}_{\text{conv}} \right) .$$

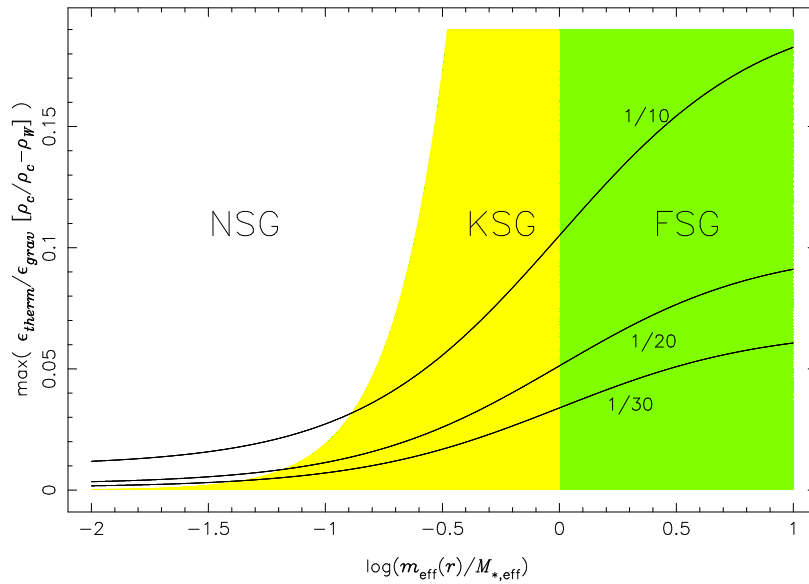


Abbildung 2.2: Das Verhältnis von thermischer zu gravitativer Energiedichte als Funktion der Scheibenmasse. Die Zahlenwerte geben die verschiedenen Verhältnisse von Scheibenhöhe zum Abstand r an. Zur Verdeutlichung sind die verschiedenen Bereiche der Scheibe (NSG, KSG & FSG) unterschiedlich dargestellt.

Im stationären Fall, der hier behandelt wird, lautet die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$, und es gilt daher $\vec{\nabla}[(\frac{1}{2}\rho v^2)\vec{v}] = \rho\vec{v}\vec{\nabla}(\frac{1}{2}v^2)$. Nimmt man an, daß die Scheibe Keplersch rotiert, so gilt $\vec{f}_{\text{grav}} = \rho\vec{\nabla}(\frac{1}{2}v^2)$, und die linke Seite hebt sich exakt gegen den ersten Summanden der rechten Seite auf. I.a. gilt dies nicht zwingend für nicht-Keplersche Rotation. Es sei hier aber angenommen, daß auch in diesem Fall in guter Näherung $\vec{f}_{\text{grav}} \approx \rho\vec{\nabla}(\frac{1}{2}v^2)$ gilt (diese Annahme ist a posteriori zu überprüfen), so daß die Energieerhaltung abschließend vereinfacht werden kann zu

$$\vec{f}_{\text{visc}}\vec{v} \approx \vec{\nabla}(\vec{F}_{\text{rad}} + \vec{F}_{\text{conv}}). \quad (2.14)$$

Diese Gleichung besagt, daß die gesamte Energie, die durch viskose Prozesse freigesetzt wird, in Strahlung oder Konvektion, nicht aber in innere Energie geht. In dieser Arbeit soll zusätzlich aus Gründen der Vereinfachung angenommen werden, daß der konvektive gegenüber dem radiative Energiefluß vernachlässigt werden kann.

2.2.2.5 Der Strahlungstransport

Im folgenden sei angenommen, daß sich die Akkretionsscheibe im thermodynamischen Gleichgewicht befinde, denn die thermische Relaxationszeit ist viel kleiner als die dynamische Entwicklungszeit der Scheibe (Watanabe et al., 1990; Kippenhahn & Thomas, 1982). Zudem sei angenommen, daß die Energie in der Scheibe ausschließlich in z -Richtung fließe. Es soll nun für den optisch dünnen und für den optisch dicken Fall die Strahlungsflußdichte bestimmt werden. Dabei wird die gleiche Vorgehensweise wie in Nakamoto & Nakagawa (1994) verwendet.

Im optisch dünnen Fall kann man in guter Näherung annehmen, daß die Scheibe in vertikaler Richtung isotherm geschichtet ist, d.h. daß T_c bei gegebenem Radius r überall in vertikaler Richtung die Temperatur beschreibt. Außerdem wird keine Streuung berücksichtigt. Man betrachtet nun ein Strahlungsfeld der Intensität I_ν bei der Frequenz ν , das beim Durchlaufen einer Materialsäule der Dicke ds und der Dichte ρ eine Intensitätsänderung dI_ν erfährt. Diese Änderung dI_ν wird einerseits durch Absorptions- und andererseits durch Emissionsprozesse bestimmt. Die Absorption ist proportional zur eingestrahnten Intensität I_ν , zur Dichte des Mediums ρ und zur durchlaufenen Strecke ds ; die Proportionalitätskonstante ist die Opazität $\kappa_\nu = \kappa_\nu(\rho, T)$. Die Emission hängt nicht von der eingestrahnten Intensität ab, zumindest solange, wie sich die Bedingungen im Medium nicht ändern, sondern ist nur zur durchlaufenen Strecke

ds proportional. Die Proportionalitätskonstante ist hier die Emissivität ϵ_ν . Für die Intensitätsänderung gilt damit

$$dI_\nu = -I_\nu \rho \kappa_\nu ds + \epsilon_\nu ds$$

$$\Rightarrow \frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu \rho \kappa_\nu + \epsilon_\nu .$$

Dies ist die Differentialgleichung für den Strahlungstransport. Im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht ist das Verhältnis der Emissivität ϵ_ν zum Produkt $\rho \kappa_\nu$ durch die Kirchhoff-Planck-Funktion

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.15)$$

gegeben. Damit folgt

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \rho \kappa_\nu (B_\nu(T) - I_\nu) .$$

Ist θ der Winkel zwischen der Strahlrichtung und der vertikalen Richtung z , so gilt wegen $dz = \cos \theta ds$

$$\frac{dI_\nu}{dz} = \frac{\rho \kappa_\nu}{\cos \theta} (B_\nu(T) - I_\nu) .$$

Allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$I_\nu(z, \theta) = I_\nu(z_0, \theta) e^{-\frac{2\tau_\nu}{\cos \theta}} + \int_0^{\tau_\nu} B_\nu(T) e^{-2\frac{\tau_\nu - \tau'}{\cos \theta}} d\tau'$$

mit der optischen Tiefe der Frequenz ν

$$\tau_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \rho \kappa_\nu dz' . \quad (2.16)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt, daß die mittlere optische Tiefe nicht diejenige über die gesamte Strecke von z_0 bis z ist, sondern nur etwa halb so groß – diese Näherung ist dann besonders gut, wenn das Dichteprofil symmetrisch zur Mittelebene und $z_0 = -z$ ist. Da die Scheibe vertikal isotherm ist, ist $B_\nu(T)$ bzgl. der optischen Tiefe konstant und kann vor das Integral gezogen werden. Dieses kann dann analytisch ausgewertet werden und man findet

$$I_\nu(z, \theta) = I_\nu(z_0, \theta) e^{-\frac{2\tau_\nu}{\cos \theta}} + \left(1 - e^{-\frac{2\tau_\nu}{\cos \theta}}\right) B_\nu(T_c) .$$

Da angenommen ist, daß der Energietransport hauptsächlich in z -Richtung erfolgt, ist θ klein und damit $\cos \theta \approx 1$. Im optisch dünnen Fall gilt daher $\tau_\nu / \cos \theta \ll 1$. Dann kann die Lösung der Strahlungstransportgleichung aber approximiert werden durch

$$I_\nu(z, \theta) = \left(1 - \frac{2\tau_\nu}{\cos \theta}\right) I_\nu(z_0, \theta) + \frac{2\tau_\nu}{\cos \theta} B_\nu(T_c) .$$

Sei im folgenden nun $z_0 = -h$. Die gesamte Intensität ist das Integral von I_ν über alle Frequenzen:

$$I(z, \theta) = \int_0^\infty I_\nu(z, \theta) d\nu \approx I(-h, \theta) - \int_0^\infty \frac{2\tau_\nu}{\cos \theta} I_\nu(-h, \theta) d\nu + \int_0^\infty \frac{2\tau_\nu}{\cos \theta} B_\nu(T_c) d\nu . \quad (2.17)$$

Die aus der umgebenden Wolke auf die Scheibenoberfläche einfallende Strahlung bei $z = -h$ ist die Schwarzkörperstrahlung der Wolke mit der Temperatur T_W . Die Intensität der nach oben gerichteten Strahlung bei $z = -h$ ist deshalb gegeben durch

$$I(-h, \theta) = \int_0^{\infty} B_\nu(T_W) d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T_W^4. \quad (2.18)$$

Für den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (2.17) weiß man, daß $I_\nu(-h, \theta)$ durch die Kirchhoff-Planck-Funktion $B_\nu(T_W)$ gegeben ist, daher folgt für $z = h$

$$\begin{aligned} - \int_0^{\infty} \frac{2\tau_\nu}{\cos\theta} I_\nu(-h, \theta) d\nu &= - \frac{2}{\cos\theta} \int_0^{\infty} \tau_\nu B_\nu(T_W) d\nu \stackrel{(2.16)}{=} - \frac{1}{\cos\theta} \int_0^{\infty} \int_{-h}^h \rho \kappa_\nu dz' B_\nu(T_W) d\nu \\ &= - \frac{1}{\cos\theta} \int_{-h}^h \rho \int_0^{\infty} \kappa_\nu B_\nu(T_W) d\nu dz' = - \frac{1}{\cos\theta} \int_{-h}^h \rho \kappa_P dz' \cdot \int_0^{\infty} B_\nu(T_W) d\nu \\ &\stackrel{(2.18)}{=} - \frac{2\tau_P}{\cos\theta} \frac{\sigma}{\pi} T_W^4, \end{aligned}$$

wobei das Planck-Mittel der optischen Tiefe τ_P ganz analog zu τ_ν aus dem Planck-Mittel der Opazität

$$\kappa_P = \frac{\int_0^{\infty} \kappa_\nu B_\nu(T) d\nu}{\int_0^{\infty} B_\nu(T) d\nu}$$

berechnet wurde. Auf völlig identische Weise findet man für den dritten Summanden von (2.17)

$$\int_0^{\infty} \frac{2\tau_\nu}{\cos\theta} B_\nu(T_c) d\nu = \frac{2\tau_P}{\cos\theta} \frac{\sigma}{\pi} T_c^4$$

und damit für die Gesamtintensität der nach oben gerichteten Strahlung an der Oberfläche

$$I(h, \theta) = \left(1 - \frac{2\tau_P}{\cos\theta}\right) \frac{\sigma}{\pi} T_W^4 + \frac{2\tau_P}{\cos\theta} \frac{\sigma}{\pi} T_c^4.$$

Der nach oben gerichtete Energiefluß berechnet sich aus $I(h, \theta)$ mittels

$$F_{\text{rad}}^\uparrow(h) = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(h, \theta) \cos\theta \sin\theta d\theta = (1 - 4\tau_P) \sigma T_W^4 + 4\tau_P \sigma T_c^4.$$

Der nach unten gerichtete Energiefluß bei $z = h$ ist aber gerade

$$F_{\text{rad}}^\downarrow(h) = -\sigma T_W^4$$

und so gilt für den Gesamtfluß an der Oberfläche

$$F_{\text{rad}}(h) = F_{\text{rad}}^\uparrow(h) + F_{\text{rad}}^\downarrow(h) = 4\tau_P \sigma (T_W^4 - T_c^4).$$

Die Dissipationsrate $D(r)$ ist nun das Doppelte des Strahlungsflusses an der Stelle $z = h$, da auch die Unterseite der Scheibe mit in die Dissipationsrate eingeht:

$$D(r) = 2F_{\text{rad}}(h)$$

$$\Rightarrow \sigma T_c^4 = \frac{1}{8\tau_{\text{P}}} D(r) + \sigma T_{\text{W}}^4 . \quad (2.19)$$

Die Effektivtemperatur ist die Temperatur desjenigen schwarzen Körpers, der pro Einheitsfläche die gleiche Gesamtenergie abstrahlt. Sie stellt sich also als Folge der Temperatur T_{W} der umgebenden Molekülwolke und der Hälfte der Dissipationsrate ein:

$$\sigma T_{\text{eff}}^4 = \frac{1}{2} D(r) + \sigma T_{\text{W}}^4 . \quad (2.20)$$

Nun soll noch der optisch dicke Fall behandelt werden. Dieser Grenzfall ist wesentlich einfacher, da man aufgrund der hohen optischen Tiefe davon ausgeht, daß ein Photon auf seinem Weg zur Oberfläche hinreichend viele Absorptions- und Emissionsprozesse durchläuft. Dann kann man aber, wie im Sternaufbau üblich und in Kippenhahn & Weigert (1994, siehe §5.1) beschrieben, eine Diffusionsnäherung für den Strahlungstransport machen. Die Strahlungsflußdichte \vec{F}_{rad} ist dann gegeben durch

$$\vec{F}_{\text{rad}} = -\frac{16\sigma}{3\rho\kappa_{\text{R}}} T^3 \vec{\nabla} T$$

mit dem Rosseland-Mittel der Opazität

$$\kappa_{\text{R}} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu} .$$

Da der Gradient der Temperatur in radialer Richtung in dünnen Scheiben wesentlich kleiner als der vertikale Temperaturgradient ist, kann man $\vec{\nabla} T$ durch $\partial T / \partial z$ ersetzen und findet so ⁸

$$F_{\text{rad}} = -\frac{16\sigma}{3\rho\kappa_{\text{R}}} T^3 \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{4\sigma}{3\rho\kappa_{\text{R}}} \frac{\partial T^4}{\partial z} .$$

Die Dissipationsrate ist wie im optisch dünnen Fall durch $D(r) = 2F_{\text{rad}}(h)$ gegeben. Nun ist aber

$$F_{\text{rad}}(h) = \lim_{z \rightarrow h} F_{\text{rad}}(z) = -\frac{4\sigma}{3\rho\kappa_{\text{R}}} \lim_{z \rightarrow h} \frac{T^4(z) - T_c^4}{z} = -\frac{4\sigma}{3\rho\kappa_{\text{R}} h} (T_{\text{eff}}^4 - T_c^4) = -\frac{4\sigma}{3\tau_{\text{R}}} (T_{\text{eff}}^4 - T_c^4)$$

mit dem Rosseland-Mittel der optischen Tiefe

$$\tau_{\text{R}} = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \rho\kappa_{\text{R}} dz = \frac{1}{2} \kappa_{\text{R}} \int_{-h}^h \rho dz = \frac{1}{2} \kappa_{\text{R}} \Sigma = \rho_c \kappa_{\text{R}} h .$$

Daher folgt für die Dissipationsrate

$$D(r) = -\frac{8\sigma}{3\tau_{\text{R}}} (T_{\text{eff}}^4 - T_c^4) \quad (2.21)$$

⁸Der Faktor 4, der wegfällt oder hinzukommt, je nachdem, ob man die vierte Potenz der Temperatur oder die Temperatur selbst nach der Höhe ableitet, ist eine Unsicherheit, die wieder inhärent in der 1-Zonen-Näherung verankert ist und daher nicht abgebaut werden kann. Der Effekt für die Temperatur durch diese Unsicherheit ist aber von der Größe $\sqrt[4]{4}$ und daher eher klein.

Mit der Effektivtemperatur (2.20) und der Dissipationsrate (2.21) findet man so für die Zentraltemperatur

$$\sigma T_c^4 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\tau_R}{4} \right) D(r) + \sigma T_W^4 . \quad (2.22)$$

Mit (2.19) für den optisch dünnen Fall und (2.22) für den optisch dicken Fall findet man damit insgesamt für die Zentraltemperatur

$$\sigma T_c^4 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3\tau_R}{4} + \frac{1}{4\tau_P} \right) D(r) + \sigma T_W^4 . \quad (2.23)$$

2.2.3 Materialfunktionen

Im folgenden werden die beiden Materialfunktionen Opazität und mittleres Molekulargewicht behandelt. Die dritte Materialfunktion, die Viskosität, wird im entsprechenden Zusammenhang in den nächsten beiden Abschnitten besprochen.

2.2.3.1 Die Opazität

Die Beschreibung der Opazität in protoplanetaren Akkretionsscheiben bedarf besonderer Sorgfalt, da der Massenextinktionskoeffizient κ stark von der Temperatur und in geringem Maße von der Dichte abhängt. Da die Opazität die Vertikalstruktur selbstgravitierender Akkretionsscheiben in starkem Maße beeinflusst, soll diese Abhängigkeit des Extinktionskoeffizienten von T und ρ in die Rechnungen mit eingehen. Zudem bedeutet eine Berücksichtigung einer komplexeren Opazitätsbeschreibung für die hier behandelten Modelle nur einen verschwindend geringen, zusätzlichen Arbeitsaufwand bei der Berechnung der Scheibenparameter.

Eine korrekte Modellierung der Opazität in protoplanetaren Scheiben muß aufgrund des weiten Temperaturbereichs sowohl eine Gas- als auch eine Staubkomponente berücksichtigen. Bei Temperaturen zwischen 170 K und 1700 K ist die Extinktion durch Staub dominiert, der sich vorwiegend aus amorphen Magnesium-Eisen-Silikaten und Kohlenstoffruß zusammensetzt. Bei der genauen Staubzusammensetzung ist dabei auch die Aufheizung des Materials beim Aufprall auf die Scheibenoberfläche zu berücksichtigen, die zu Modifikationen führen kann. In den Außenbereichen der Scheibe, in denen die Temperatur unter 170 K sinkt, ist der Staub von einer Eisschicht überzogen; das Verdampfen des Eises bzw. das Ausfrieren erfolgt in einem kleinen Temperaturintervall um 170 K. Bei etwa 1700 K ist der gesamte Staub in der Scheibe verdampft, und in diesen inneren Bereichen der Akkretionsscheibe dominiert die Gaskomponente der Opazität. Auch hier übernehmen je nach Temperaturbereich verschiedene Moleküle oder Ionen die Rolle des Absorbers. Im Bereich $2000 \text{ K} < T < 4000 \text{ K}$ sind Wasser, Kohlenmonoxid und Titanoxid dominierend, ab 4000 K bis hin zu 8000 K überwiegt die Extinktion von H^- -Ionen. Oberhalb von 8000 K treten gf- und ff-Übergänge von Wasserstoff, Helium und einigen Metallen sowie etliche Metalllinien im UV in den Vordergrund. Ab 30.000 K schließlich sind H und He vollständig ionisiert und die Extinktion wird durch die Thomson-Streuung an den freien Elektronen verursacht.

Im Rahmen dieser Arbeit bietet es sich an, eine analytische Näherung für den Massenextinktionskoeffizienten zu verwenden, die die beobachteten Opazitäten in den entsprechenden Temperaturbereichen gut anpaßt. Eine solche stückweise Interpolation für optisch dicke Scheiben wurde bereits von Bell & Lin (1994) durchgeführt. In dieser Arbeit werden fast identische Approximationen verwendet. Der Massenextinktionskoeffizient wird hier (wie bei Bell & Lin) stückweise für die einzelnen Temperaturbereiche in der Form von Potenzgesetzen

$$\kappa_i = \kappa_{0,i} \rho^{q_i} T^{p_i}$$

approximiert, wobei die κ_i als Rosseland-Mittel zu verstehen sind.

i	Material / Prozeß	Opazität	AGN			protostellar		
			$\kappa_{0,i}$ [$\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$]	q_i	p_i	$\kappa_{0,i}$ [$\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$]	q_i	p_i
1	Staub mit Eismänteln	κ_{Eis}	$2.0 \cdot 10^{-4}$	0	2	$2.0 \cdot 10^{-4}$	0	2
2	Eisverdampfung	$\kappa_{\text{Eis-V}}$	$2.0 \cdot 10^{16}$	0	-7	$2.0 \cdot 10^{16}$	0	-7
3	Staubteilchen	κ_{Staub}	$1.0 \cdot 10^{-1}$	0	$\frac{1}{2}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$	0	$\frac{1}{2}$
4	Staubverdampfung	$\kappa_{\text{Staub-V}}$	$1.74 \cdot 10^{83}$	1	-24	$1.74 \cdot 10^{83}$	1	-24
5	Moleküle	κ_{Mol}	$1.0 \cdot 10^{-8}$	$\frac{2}{3}$	3	$1.6 \cdot 10^{-2}$	0	0
6	Negatives Wasserstoffion	κ_{H^-}	$1.0 \cdot 10^{-36}$	$\frac{1}{3}$	10	-	-	-
7	gf- und ff-Übergänge	κ_{Atom}	$1.5 \cdot 10^{20}$	1	$-\frac{5}{2}$	-	-	-
8	Elektronenstreuung	κ_{Elek}	0.348	0	0	-	-	-

Tabelle 2.1: Frequenzgemittelte Teilopazitäten für verschiedene Temperaturbereiche.

Die einzelnen in dieser Arbeit verwendeten Exponenten q_i und p_i sowie die Normierungen $\kappa_{0,i}$ für die verschiedenen Teilopazitäten sind in Tabelle 2.1 angegeben. Die Werte für die Exponenten im Fall von Akkretionsscheiben in AGN stimmen mit denjenigen von Bell & Lin (1994) überein. Nur die Normierung der Opazität für die Staubverdampfung wurde abgeändert. In der angegebenen Arbeit wurde die Temperatur, bei der aller Staub verdampft ist und die zu dem starken Abfall in der Opazität führt, mit 1500 K angegeben. Lattimer et al. (1978) konnten aber zeigen, daß für typische Verhältnisse in protoplanetaren Akkretionsscheiben die letzten Staubkomponenten erst bei 1700 K verdampfen. Für diese Scheiben und solche in den Kernen aktiver Galaxien soll daher eine modifizierte Normierung $\kappa_{\text{Staub-V}}$ verwendet werden.

Bei protostellaren Akkretionsscheiben wird eine zusätzliche Modifikation vorgenommen. Der Grund hierfür liegt im Auftreten thermischer Instabilitäten in der Scheibe, sobald die Opazität mit etwa der dritten Potenz der Temperatur oder stärker anwächst (Hartmann & Kenyon (1996)). Diese thermischen Instabilitäten könnten die Ursache für die Ausbrüche bei FU Orionis-Sternen sein, die einige Monate andauern und in Abständen von etwa 1000 Jahren auftreten. Der Grund für die thermische Instabilität ist der starke Anstieg der Opazität aufgrund der Molekül- und H^- -Absorption. Dieser Anstieg erfolgt aber erst bei Temperaturen oberhalb von etwa 2000 K. Demnach sind nur die innersten Bereiche der Scheibe betroffen, deren Beitrag zur Selbstgravitation der Scheibe aber völlig vernachlässigbar ist. Da thermische Instabilitäten in einem Modell stationärer Akkretionsscheiben nicht eingebaut werden können, werden die Molekülextinktion und alle weiteren Extinktionen bei höheren Temperaturen auf einen konstanten Wert gesetzt. Diese Modifikation folgt damit derjenigen von Ruden & Pollack (1991), die die dynamische Entwicklung des protosolaren Nebels untersuchten.

Die Interpolation zwischen den einzelnen Temperaturbereichen erfolgt durch

$$\frac{1}{\kappa_{\text{R}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\kappa_{\text{Eis}}^4} + \frac{T_0^{10}}{T_0^{10} + T^{10}} \frac{1}{\kappa_{\text{Eis-V}}^4 + \kappa_{\text{Staub}}^4}} + \sqrt[4]{\frac{1}{\kappa_{\text{Staub-V}}^4 + \kappa_{\text{Mol}}^4 + \kappa_{\text{H}^-}^4} + \frac{1}{\kappa_{\text{Atom}}^4 + \kappa_{\text{Elek}}^4}} \quad (2.24)$$

(Gail, 2000), wobei $T_0 = 3000$ K gesetzt wird. Diese Wahl ist in gewissem Maße willkürlich, sie sorgt nur dafür, daß die Opazitäten für Staub und Eisverdampfung abgeschaltet werden. Auch der Exponent 10 ist in gewissem Rahmen beliebig, solange dieser Übergang in einem hinreichend kleinen Temperaturbereich erfolgt. Schließlich ist auch die Wahl der vierten Potenz für die κ_i 's nur das Resultat des Wunsches, schmale Übergangsbereiche zwischen den einzelnen Temperaturbereichen zu erreichen.

In den optisch dünnen Bereichen einer Scheibe muß man anders vorgehen. Diese Gebiete weisen Temperaturen im Bereich von wenigen 100 K abwärts auf, so daß nur die Staubopazitäten für geringe Temperaturen berücksichtigt werden müssen. In diesem Fall läßt sich zeigen, daß die Planck-gemittelte Opazität für Staubteilchen mit Radien unterhalb von 10 μm durch

$$\kappa_{\text{P}}(\rho, T; \chi) = \frac{Z(4 - \chi)\Gamma(4 + \chi)\zeta(4 + \chi)}{Z(4)\Gamma(4)\zeta(4)} \kappa_{\text{R}}(\rho, T) \quad (2.25)$$

beschrieben werden kann, wobei Z durch (A.2) im Anhang A definiert, Γ die Gamma-Funktion und ζ die

Riemannsche Zeta-Funktion ist. Die Ableitung von (2.25) ist ebenfalls im Anhang A zu finden. χ ist der konstante Exponent für die bei Staubabsorption bei geringen Temperaturen angenommene Abhängigkeit der Opazität von der Frequenz in Form eines Potenzgesetzes $\kappa_\nu \propto \nu^\chi$. Üblicherweise setzt man $\chi = 2$ (Draine & Lee, 1984), neuere Untersuchungen lassen aber einen Wert von 1 oder darunter erwarten (Beckwith & Sargent, 1991), so daß in dieser Arbeit sowohl Rechnungen mit $\chi = 2$ als auch solche mit $\chi = 1$ gemacht werden. In diesen beiden Fällen gilt

$$\kappa_P(\rho, T; 2) = 2.39 \cdot \kappa_R(\rho, T) ,$$

$$\kappa_P(\rho, T; 1) = 1.06 \cdot \kappa_R(\rho, T) .$$

2.2.3.2 Das mittlere Molekulargewicht

Das Gas selbstgravitierender Akkretionsscheiben kann in guter Näherung als ideales Gas behandelt werden, da die typischen Dichten dieser Scheiben hinreichend gering sind. Vernachlässigt man den Strahlungsdruck in der Zustandsgleichung, so findet man

$$P = \sum_i N_i kT .$$

Die Summation erfolgt dabei über alle Teilchensorten i , deren Dichten durch N_i gegeben sind⁹. Da sich die Materie in Akkretionsscheiben bzgl. ihrer Zusammensetzung nicht wesentlich von der kosmischen Häufigkeitsverteilung unterscheiden wird, kann man sich hier auf die Berücksichtigung von Wasserstoff und Helium, die immerhin 99,87% der gesamten Materie ausmachen, beschränken und alle anderen Elemente vernachlässigen.

Bei der Berechnung des mittleren Molekulargewichts kann die Ionisation von Wasserstoff und Helium unberücksichtigt bleiben, da sie erst bei Temperaturen oberhalb von 10.000 K und damit in den innersten Scheibenbereichen einsetzt. Dort ist die Selbstgravitation der Scheibe aber völlig vernachlässigbar, so daß die dort notwendigen Modifikationen des mittleren Molekulargewichts in dieser Arbeit nicht von Bedeutung sind. In die Berechnung des mittleren Molekulargewichts geht i.a. aber sehr wohl die Dissoziation von Wasserstoff ein, die mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes behandelt wird. Dazu betrachtet man den Partialdruck P_H des Wasserstoffatoms unter der Annahme, daß der gesamte Wasserstoff dissoziiert vorliegt:

$$P_H = \frac{\mathcal{R}\rho T}{1 + A_{\text{He}}\epsilon_{\text{He}}} . \quad (2.26)$$

Dabei bedeuten $A_{\text{He}} = 4$ das Atomgewicht von Helium und $\epsilon_{\text{He}} = 0.1$ den Heliumanteil. Der Partialdruck P_H von Wasserstoff setzt sich aber auch aus dem Partialdruck p_H des freien Wasserstoffs und dem Partialdruck p_{H_2} des H_2 -Moleküls gemäß

$$P_H = p_H + 2p_{\text{H}_2} \quad (2.27)$$

zusammen. Eine Beziehung zwischen diesen einzelnen Partialdrücken erhält man aus dem Massenwirkungsgesetz:

$$p_{\text{H}_2} = p_H^2 K_P(T) . \quad (2.28)$$

Dabei ist

$$K_P(T) = e^{-\frac{\Delta G}{\mathcal{R}T}}$$

⁹Genaugenommen muß hier auch der Druck der Elektronen berücksichtigt werden. Da deren Masse aber gegen die der Atome völlig vernachlässigbar ist, kann man hier auf ihre Miteinbeziehung verzichten.

die Massenwirkungskonstante, die sich aus dem Gibbs'schen Potential ΔG für Molekülbildung berechnet. Aus (2.27) und (2.28) erhält man

$$\begin{aligned} P_{\text{H}} &= p_{\text{H}} + 2p_{\text{H}}^2 K_P(T) \\ \Rightarrow \quad p_{\text{H}}^2 - \frac{1}{2K_P(T)} p_{\text{H}} &= \frac{P_{\text{H}}}{2K_P(T)} \\ \Rightarrow \quad p_{\text{H}} &= \frac{1}{4K_P(T)} + \sqrt{\frac{P_{\text{H}}}{2K_P(T)} + \frac{1}{16K_P(T)}} \end{aligned}$$

(die zweite Lösung würde zu einem negativen Partialdruck führen und muß daher nicht berücksichtigt werden). Der Partialdruck des Wasserstoffmoleküls berechnet sich dann nach (2.28). Für den Partialdruck des Heliums p_{He} schließlich gilt

$$p_{\text{He}} = \epsilon_{\text{He}} P_{\text{H}} .$$

Aus der Zustandsgleichung findet man damit für das mittlere Molekulargewicht

$$\mu = \frac{\mathcal{R}\rho T}{p_{\text{H}} + p_{\text{H}_2} + p_{\text{He}}} . \quad (2.29)$$

Für die weit außen liegenden, selbstgravitierenden Bereiche von Akkretionsscheiben ist der Grenzfall von Interesse, in dem alle Wasserstoffatome molekular gebunden sind, in dem also keine Dissoziation auftritt. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \mu_{\text{H}_2} &= \frac{\mathcal{R}\rho T}{p_{\text{H}_2} + p_{\text{He}}} \stackrel{(2.26)}{=} \frac{P_{\text{H}}(1 + 4\epsilon_{\text{He}})}{p_{\text{H}_2} + p_{\text{He}}} \stackrel{(2.27)}{=} \frac{2p_{\text{H}_2}(1 + 4\epsilon_{\text{He}})}{p_{\text{H}_2} + p_{\text{He}}} \stackrel{(2.28)}{=} \frac{p_{\text{H}_2}(2 + 8\epsilon_{\text{He}})}{p_{\text{H}_2} + \epsilon_{\text{He}} P_{\text{H}}} \\ &\stackrel{(2.27)}{=} \frac{2 + 8\epsilon_{\text{He}}}{1 + 2\epsilon_{\text{He}}} = \frac{7}{3} . \end{aligned}$$

Der andere Grenzfall ist der für Gebiete mit völliger Dissoziation, hier findet man

$$\mu_{\text{H}} = \frac{1 + 4\epsilon_{\text{He}}}{1 + \epsilon_{\text{He}}} = \frac{14}{11} .$$

Für vollständig ionisiertes Gas mit kosmischer Häufigkeit schließlich erhält man

$$\mu_{\text{i}} = 0.615 .$$

Da sich beide extremen Werte für das mittlere Molekulargewicht nicht erheblich voneinander unterscheiden und die Temperaturen in den selbstgravitierenden Bereichen protoplanetarer Akkretionsscheiben zu gering für eine signifikante Dissoziation der Wasserstoffmoleküle sind (typische Temperaturen liegen hier im Bereich von 100 K), wird hier für diese Scheiben für das mittlere Molekulargewicht der konstante Wert $\frac{7}{3}$ verwendet. Entsprechend findet man für die Temperaturen in AGN-Scheiben bis hin zu etlichen 10^4 Schwarzschildradien Werte von 10.000 K und mehr, so daß das gesamte Gas ionisiert ist. Hier wird dann der Wert $\mu = 0.615$ verwendet. Der zusätzliche Aufwand, der für die Berechnung der Scheibenparameter bei gleichzeitiger Verwendung der druck- und temperaturabhängigen Form (2.29) des mittleren Molekulargewichts betrieben werden müßte, erscheint bei den geringen Abweichungen des Molekulargewichts von dem entsprechenden Wert in den selbstgravitierenden Bereichen nicht angemessen, was besonders im nächsten Abschnitt klar werden wird.

2.3 Standardakkretionsscheiben mit Selbstgravitation

In diesem Abschnitt sollen selbstgravitierende Scheiben mit α -Viskosität behandelt werden. Dabei wird ein allgemeiner Lösungsalgorithmus vorgestellt, der für die hier verwendete 1-Zonen-Näherung im wesentlichen analytisch behandelt werden kann. Für Standardakkretionsscheiben wurde bereits Anfang der 70er Jahre von Shakura & Sunyaev (1973) eine Viskositätsparametrisierung vorgeschlagen, die keine Aussage über die zugrundeliegende Physik der Turbulenz macht, aber ihre Effektivität begrenzt:

$$\nu = \alpha h c_s .$$

Dabei wird angenommen, daß α über die Scheibe nur marginal variiert, also konstant gesetzt werden kann. I.a. geht man von $\alpha \leq 1$ aus, da die Turbulenz isotrop sein soll und nicht über die Scheibe hinausgehen kann und da die Materie subsonisch sein muß¹⁰, da ansonsten Energie dissipiert wird und die Geschwindigkeiten des geschockten Materials dann wieder unter die Schallgeschwindigkeit fallen.

Aus der Drehimpulserhaltung (2.7) findet man so

$$\nu \Sigma = \alpha h c_s \cdot 2 \rho_c h = 2 \alpha \rho_c h^2 c_s = - \frac{\dot{m}}{2 \pi r} \frac{\omega}{\omega'} f . \quad (2.30)$$

Mit dem hydrostatischen Gleichgewicht (2.8)

$$P_c = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_W(r) T_W(r) + \rho_c h^2 \left(\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4 \pi G (\rho_c - \rho_W(r)) \right) ,$$

der Schallgeschwindigkeit (2.10)

$$c_s = \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{\rho_W(r)}{\rho_c} T_W(r) + h^2 \left(\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4 \pi G (\rho_c - \rho_W(r)) \right)} ,$$

der Zustandsgleichung (2.11)

$$P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4$$

und den Gleichungen für den Strahlungstransport (2.23)

$$\sigma T_c^4 = - \frac{\dot{m}}{8 \pi} \left(1 + \frac{3 \tau_R}{4} + \frac{1}{4 \tau_P} \right) r \omega \omega' f + \sigma T_W^4$$

und (2.20)

$$\sigma T_{\text{eff}}^4 = - \frac{\dot{m}}{8 \pi} r \omega \omega' f + \sigma T_W^4$$

erhält man ein Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und den Unbekannten P_c , ρ_c , h , T_c , T_{eff} und c_s .

Um dieses Gleichungssystem zu lösen, geht man wie folgt vor: aus der Drehimpulserhaltung (2.30) und der Schallgeschwindigkeit (2.10) erhält man die Höhe als Funktion der Dichte:

$$4 \alpha^2 \rho_c^2 h^4 c_s^2 = 4 \alpha^2 \rho_c^2 h^4 \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{\rho_W(r)}{\rho_c} T_W(r) + h^2 \left(\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4 \pi G (\rho_c - \rho_W(r)) \right) \right)$$

¹⁰Zumindest muß die Materie in der Scheibe solange subsonisch bleiben, wie kein treibender Mechanismus für supersonische Geschwindigkeiten existiert.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\dot{m}^2 \omega^2}{4\pi^2 r^2 \omega'^2} f^2 \\
\Rightarrow \quad h^6 + \frac{\frac{\mathcal{R}}{\mu} \frac{\rho_{\text{W}}(r)}{\rho_{\text{c}}} T_{\text{W}}(r)}{\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_{\text{c}} - \rho_{\text{W}}(r))} h^4 - \frac{\dot{m}^2 \omega^2 f^2}{16\pi^2 \alpha^2 r^2 \omega'^2} \frac{1}{\rho_{\text{c}}^2 (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_{\text{c}} - \rho_{\text{W}}(r)))} &= 0 .
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \frac{\mathcal{R} \rho_{\text{W}}(r) T_{\text{W}}(r)}{\mu \rho_{\text{c}} (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_{\text{c}} - \rho_{\text{W}}(r)))} = A_1(\rho_{\text{c}}) > 0 , \\
A_2 &:= -\frac{\dot{m}^2 \omega^2 f^2}{16\pi^2 \alpha^2 r^2 \omega'^2} \frac{1}{\rho_{\text{c}}^2 (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_{\text{c}} - \rho_{\text{W}}(r)))} = A_2(\rho_{\text{c}}) < 0
\end{aligned}$$

schreibt sich diese Gleichung dritten Grades im Quadrat der Höhe mit nur von der Zentralsdichte ρ_{c} abhängenden Koeffizienten

$$h^6 + A_1 h^4 + A_2 = 0 . \quad (2.31)$$

Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung dieser Gleichung ist

$$h = h(\rho_{\text{c}}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{6} C_1 + \frac{2}{3} \frac{A_1^2}{C_1} - \frac{1}{3} A_1} & A_2 < -\frac{4}{27} A_1^3 \\ \sqrt{\frac{1}{3} A_1} & A_2 = -\frac{4}{27} A_1^3 \\ \sqrt{\max(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)} & A_2 > -\frac{4}{27} A_1^3 \end{cases} \quad (2.32)$$

(siehe Anhang B.1) mit

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \sqrt[3]{-108 A_2 - 8 A_1^3 + 12 \sqrt{81 A_2^2 + 12 A_1^3 A_2}} , \\
\tilde{h}_1 &:= \frac{1}{6} C_1 + \frac{2}{3} \frac{A_1^2}{C_1} - \frac{1}{3} A_1 , \\
\tilde{h}_2 &:= -\frac{1}{12} C_1 - \frac{1}{3} \frac{A_1^2}{C_1} - \frac{1}{3} A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{1}{6} C_1 - \frac{2}{3} \frac{A_1^2}{C_1} \right) , \\
\tilde{h}_3 &:= -\frac{1}{12} C_1 - \frac{1}{3} \frac{A_1^2}{C_1} - \frac{1}{3} A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{1}{6} C_1 - \frac{2}{3} \frac{A_1^2}{C_1} \right) .
\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen von (2.11) und (2.8) und Einsetzen von (2.32) erhält man eine Gleichung vierten Grades für die Temperatur, wobei die Koeffizienten wieder nur von der Zentralsdichte abhängen:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_{\text{c}} T_{\text{c}} + \frac{a}{3} T_{\text{c}}^4 &= \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_{\text{W}}(r) T_{\text{W}}(r) + \rho_{\text{c}} h^2 (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_{\text{c}} - \rho_{\text{W}}(r))) \\
\Rightarrow \quad T_{\text{c}}^4 + \frac{3\mathcal{R}}{a\mu} \rho_{\text{c}} T_{\text{c}} &= \frac{3\mathcal{R}}{a\mu} \rho_{\text{W}}(r) T_{\text{W}}(r) + \frac{3\rho_{\text{c}} h^2}{a} (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_{\text{c}} - \rho_{\text{W}}(r))) .
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
A_3 &:= \frac{3\mathcal{R}}{a\mu} \rho_{\text{c}} = A_3(\rho_{\text{c}}) > 0 , \\
A_4 &:= \frac{3\mathcal{R}}{a\mu} \rho_{\text{W}}(r) T_{\text{W}}(r) + \frac{3\rho_{\text{c}} h^2}{a} (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_{\text{c}} - \rho_{\text{W}}(r))) = A_4(\rho_{\text{c}}) < 0
\end{aligned}$$

gilt damit

$$T_c^4 + A_3 T_c + A_4 = 0 . \quad (2.33)$$

Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung dieser Gleichung ist

$$T_c = -\frac{1}{12^{2/3} C_3^{1/6} C_4^{1/4}} \left[C_4^{3/4} - \sqrt{-C_4^{3/2} + 36 A_3 \sqrt{C_3}} \right] = T_c(\rho_c) \quad (2.34)$$

(siehe Anhang B.2) mit

$$C_3 := 9A_3^2 + \sqrt{81A_3^4 - 768A_4^3} = C_3(\rho_c) > \sqrt{-768A_4^3} > 0 ,$$

$$C_4 := \sqrt[3]{18C_3^2 + 24A_4} = C_4(\rho_c) > 0 .$$

Setzt man (2.32) und (2.34) in (2.23) ein, so erhält man eine implizite Gleichung für ρ_c , die man z.B. mit der Van Wijngaarden-Decker-Brent-Methode (Press et al., 1996) lösen kann. Mit diesem ρ_c berechnet man dann aus (2.32) die Höhe h und aus (2.34) die Zentraltemperatur T_c . Aus der Zustandsgleichung (2.11) kann man dann den Zentraldruck berechnen, und aus (2.20) erhält man die Effektivtemperatur der Scheibe.

2.4 Selbstgravitierende Akkretionsscheiben mit β -Viskosität

2.4.1 Selbstgravitierende Scheiben im subsonischen Bereich

Da die α -Viskosität sich wie in 1.3 beschrieben für selbstgravitierende Akkretionsscheiben als ungeeignet erwiesen hat, benötigt man eine alternative Parametrisierung der Viskosität. In dieser Arbeit soll die von Duschl et al. (2000) vorgeschlagene β -Viskosität

$$\nu = \beta r v_\varphi$$

angewendet werden. Mit dieser schreibt sich die Drehimpulserhaltung

$$\nu \Sigma = 2\beta \rho_c h r^2 \omega = -\frac{\dot{m} \omega}{2\pi r \omega'} f . \quad (2.35)$$

Alle anderen Gleichungen bleiben unverändert; es lauten also die Zustandsgleichung

$$P_c = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_c T_c + \frac{a}{3} T_c^4 ,$$

das vertikale hydrostatische Gleichgewicht

$$P_c = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_W(r) T_W(r) + \rho_c h^2 (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_c - \rho_W(r)))$$

und die beiden Gleichungen des Strahlungstransports

$$\sigma T_c^4 = -\frac{\dot{m}}{8\pi} \left(1 + \frac{3\tau_R}{4} + \frac{1}{4\tau_P} \right) r \omega \omega' f + \sigma T_W^4 ,$$

$$\sigma T_{\text{eff}}^4 = -\frac{\dot{m}}{8\pi} r \omega \omega' f + \sigma T_W^4 .$$

Wie unter 2.3 wird für die Winkelgeschwindigkeit nicht zwangsläufig der Keplersche Wert verwendet, sondern der selbstgravitative Einfluß der Scheibe berücksichtigt. Aus der Drehimpulserhaltung (2.35) erhält man sofort für die Höhe

$$h = -\frac{\dot{m}f}{4\pi\beta r^3\omega'} \frac{1}{\rho_c} = h(\rho_c) . \quad (2.36)$$

Damit läßt sich wie unter 2.3 eine Gleichung für die Temperatur als Funktion der Dichte aufstellen und lösen und schließlich eine implizite Gleichung für ρ_c durch Einsetzen von $h(\rho_c)$ und $T_c(\rho_c)$ in (2.23) erzielen.

2.4.2 Selbstgravitierende Scheiben im stoßdissipationsbegrenzten Limes

Die β -Viskosität kann – wie jede andere Parametrisierung der Viskosität auch – als Produkt einer charakteristischen Länge l_{turb} und einer charakteristischen Geschwindigkeit v_{turb} geschrieben werden:

$$\nu = l_{\text{turb}}v_{\text{turb}} = \Delta r \Delta v_\varphi ,$$

wobei Δr und Δv_φ diejenigen maximalen Längen- und Geschwindigkeitsskalen seien, die durch die lokalen Bedingungen erlaubt sind. Für jedes vernünftige Rotationsgesetz und unter den Annahmen $\Delta r \ll r$ und $\Delta v_\varphi \ll v_\varphi$ kann man schreiben

$$\Delta v_\varphi = \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right| \Delta r . \quad (2.37)$$

Damit folgt dann leicht

$$\begin{aligned} \nu &= \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|^{-1} \Delta v_\varphi^2 \approx \frac{r}{v_\varphi} \Delta v_\varphi^2 = \beta r v_\varphi \\ \Rightarrow \quad \Delta v_\varphi &= \sqrt{\beta} v_\varphi \\ \Rightarrow \quad \Delta r &= \sqrt{\beta} r , \end{aligned}$$

wobei wegen $\beta = 10^{-2} \dots 10^{-3} \ll 1$ und damit auch $\sqrt{\beta} \ll 1$ die obigen Annahmen $\Delta r \ll r$ und $\Delta v_\varphi \ll v_\varphi$ im Nachhinein gerechtfertigt werden. Die für die Turbulenz charakteristische Geschwindigkeit Δv_φ darf aber die Schallgeschwindigkeit nicht überschreiten, da ansonsten Stoßwellen auftreten und Energie dissipiert wird, bis die turbulente Störung wieder subsonisch ist. Es muß also

$$\Delta v_\varphi = \sqrt{\delta} c_s$$

mit $\delta < 1$ gelten. Damit hat man wegen (2.37) aber auch eine Bedingung für die charakteristische Längenskala:

$$\Delta r = \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|^{-1} \Delta v_\varphi = \left| \frac{\partial(\omega r)}{\partial r} \right|^{-1} \sqrt{\delta} c_s = \sqrt{\delta} \frac{c_s}{|\omega + \omega' r|} .$$

Im stoßdissipationsbegrenzten Limes muß man die Viskosität also durch

$$\nu = \Delta r \Delta v_\varphi = \delta \frac{c_s^2}{|\omega + \omega' r|} \quad (2.38)$$

parametrisieren. Diese Viskositätsparametrisierung sei als δ -Viskosität bezeichnet. Sie interpoliert zwischen der α -Viskosität für nicht-selbstgravitierende Scheiben und der in Duschl et al. (2000) abgeleiteten

γ -Viskosität für FSG-Scheiben im stoßdissipationsbegrenzten Limes. Auch für diesen Grenzfall ändert sich die Vorgehensweise beim Aufsuchen der Lösung des Gleichungssystems nicht. Die Höhe berechnet sich aus

$$\begin{aligned} \nu\Sigma &= 2\delta \frac{\rho_c h c_s^2}{|\omega + \omega' r|} = \frac{2\delta \rho_c h}{|\omega + \omega' r|} \left(\frac{\mathcal{R} \rho_W(r)}{\mu \rho_c} T_W(r) + h^2 (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_c - \rho_W(r))) \right) \\ &= -\frac{\dot{m}\omega f}{2\pi r \omega'} \\ \Rightarrow \quad h^3 + \frac{\mathcal{R} \rho_W(r) T_W(r)}{\mu \rho_c (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_c - \rho_W(r)))} h + \frac{\dot{m}\omega |\omega + \omega' r| f}{4\pi \delta r \omega' \rho_c (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_c - \rho_W(r)))} &= 0. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} B_1 &:= \frac{\mathcal{R} \rho_W(r) T_W(r)}{\mu \rho_c (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_c - \rho_W(r)))} = B_1(\rho_c) > 0, \\ B_2 &:= \frac{\dot{m}\omega |\omega + \omega' r| f}{4\pi \delta r \omega' \rho_c (\Omega_{*,\text{eff}}^2 + 4\pi G (\rho_c - \rho_W(r)))} = B_2(\rho_c) < 0 \end{aligned}$$

schreibt sich dies

$$h^3 + B_1 h + B_2 = 0. \quad (2.39)$$

Als einzige physikalisch sinnvolle Lösung dieser Gleichung erhält man

$$h = \frac{1}{6} C_5 - \frac{2B_1}{C_5} = h(\rho_c)$$

(siehe B.3) mit

$$C_5 := \sqrt[3]{-108B_2 + 12\sqrt{12B_1^3 + 81B_2^2}}.$$

Damit verfährt man wieder wie oben beschrieben.

2.4.3 Eine analytische Lösung

Für die weit außen liegenden Bereiche von selbstgravitierenden, protoplanetaren Akkretionsscheiben, in denen die Temperatur unterhalb von 150 K liegt, kann man eine analytische Lösung finden. Hier gilt nämlich für die Opazität (siehe Tabelle 2.1)

$$\kappa = \kappa_{\text{Eis}} = \kappa_{0,1} T^2.$$

Zudem kann der Strahlungsdruck in diesen kalten Bereichen vernachlässigt werden¹¹. Zur besseren Darstellung sei im folgenden der die innere Randschicht beschreibende Term $1 - \sqrt{GM_* r_0}/r^2 \omega$ wieder durch f abgekürzt. Die Gleichungen (2.7), (2.11), (2.8) und (2.23) reduzieren sich also auf

$$\rho_c h = -\frac{\dot{m} f}{4\pi \beta r^3 \omega'}, \quad (2.40)$$

¹¹Auf diese Annahme kann im Prinzip verzichtet werden, ohne daß man die Möglichkeit auf eine analytische Lösung verliert, jedoch ist sie derart gut erfüllt, daß ihre Aufgabe sinnlos erscheint.

$$P_c = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_c T_c , \quad (2.41)$$

$$P_c = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_W(r) T_W(r) + \frac{G \rho_c h^2}{r^3} (M_{*,\text{eff}} + 4\pi (\rho_c - \rho_W(r)) r^3) , \quad (2.42)$$

$$\sigma T_c^4 = -\frac{\dot{m}}{8\pi} \left(1 + \frac{3\kappa_{0,1}}{4} T_c^2 \rho_c h + \frac{1}{4\eta\kappa_{0,1} T_c^2 \rho_c h} \right) r \omega \omega' f + \sigma T_W^4 . \quad (2.43)$$

wobei η durch

$$\eta := \frac{Z(4-\chi)\Gamma(4+\chi)\zeta(4+\chi)}{Z(4)\Gamma(4)\zeta(4)}$$

definiert ist (siehe (A.3)). Durch Einsetzen des Produkts $\rho_c h$ aus (2.40) in (2.43) erhält man

$$\begin{aligned} \sigma T_c^4 &= -\frac{\dot{m}}{8\pi} \left(1 - \frac{3\kappa_{0,1}\dot{m}}{16\pi\beta r^3 \omega'} T_c^2 - \frac{\pi\beta r^3 \omega'}{\eta\kappa_{0,1}\dot{m}} \frac{1}{T_c^2} \right) r \omega \omega' f + \sigma T_W^4 \\ \Rightarrow T_c^6 + \frac{\dot{m}}{8\pi\sigma} \left(T_c^2 - \frac{3\kappa_{0,1}\dot{m}}{16\pi\beta r^3 \omega'} T_c^4 - \frac{\pi\beta r^3 \omega'}{\eta\kappa_{0,1}\dot{m}} \right) r \omega \omega' f - T_W^4 T_c^2 &= 0 \\ \Rightarrow T_c^6 - \frac{3\kappa_{0,1}\dot{m}^2 \omega f}{128\pi^2 \beta \sigma r^2} T_c^4 + \left(\frac{\dot{m} r \omega \omega' f}{8\pi\sigma} - T_W^4 \right) T_c^2 - \frac{\beta r^4 \omega \omega'^2 f}{8\sigma \eta \kappa_{0,1}} &= 0 . \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} B_3 &:= -\frac{3\kappa_{0,1}\dot{m}^2 \omega f}{128\pi^2 \beta \sigma r^2} = B_3(r) < 0 , \\ B_4 &:= \frac{\dot{m} r \omega \omega' f}{8\pi\sigma} - T_W^4 = B_4(r) < 0 , \\ B_5 &:= -\frac{\beta r^4 \omega \omega'^2 f}{8\sigma \eta \kappa_{0,1}} = B_5(r) < 0 \end{aligned}$$

schreibt sich diese Gleichung

$$T_c^6 + B_3 T_c^4 + B_4 T_c^2 + B_5 = 0 . \quad (2.44)$$

Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung ist

$$T_c = T_c(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{6}C_6 - 6C_7 - \frac{1}{3}B_3} & D \geq 0 \\ \sqrt{\max(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3)} & D < 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

(siehe B.4) mit der Diskriminanten

$$D = \frac{1}{27} B_4^3 - \frac{1}{108} B_3^2 B_4^2 - \frac{1}{6} B_3 B_4 B_5 + \frac{1}{4} B_5^2 + \frac{1}{27} B_3^3 B_5$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= \frac{1}{6} C_6 - 6C_7 - \frac{1}{3} B_3 , \\ \tilde{T}_2 &= -\frac{1}{12} C_6 + 3C_7 - \frac{1}{3} B_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} i \left(\frac{1}{6} C_6 + 6C_7 \right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}_3 &= -\frac{1}{12}C_6 + 3C_7 - \frac{1}{3}B_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(\frac{1}{6}C_6 + 6C_7 \right) , \\ C_6 &:= \sqrt[3]{36B_3B_4 - 108B_5 - 8B_3^3 - 12\sqrt{12B_4^3 - 3B_3^2B_4^2 - 54B_3B_4B_5 + 81B_5^2 + 12B_3^3B_5}} , \\ C_7 &:= \frac{\frac{1}{3}B_4 - \frac{1}{9}B_3^2}{C_6} .\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen von (2.41) und (2.42) erhält man nach Einsetzen der durch (2.45) bestimmten Zentraltemperatur eine Bestimmungsgleichung für die Höhe:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_c T_c &= \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_W T_W + \frac{G\rho_c h^2}{r^3} (M_{*,\text{eff}} + 4\pi(\rho_c - \rho_W)r^3) \\ \Rightarrow \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_c T_c &= \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_W T_W + \frac{G\rho_c h}{r^3} (M_{*,\text{eff}}h + 4\pi\rho_c h r^3 - 4\pi\rho_W h r^3) \\ \stackrel{(2.40)}{\Rightarrow} \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_c T_c &= \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_W T_W - \frac{G\dot{m}f}{4\pi\beta r^6 \omega'} \left(M_{*,\text{eff}}h - \frac{\dot{m}}{\beta\omega'} - 4\pi\rho_W h r^3 \right) \\ \Rightarrow \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_c h T_c &= \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_W T_W h - \frac{GM_{*,\text{eff}}\dot{m}h^2 f}{4\pi\beta r^6 \omega'} + \frac{G\dot{m}^2 h f}{4\pi\beta^2 r^6 \omega'^2} + \frac{G\rho_W \dot{m}h^2 f}{\beta r^3 \omega'} \\ \stackrel{(2.40)}{\Rightarrow} -\frac{\mathcal{R}\dot{m}T_c f}{4\pi\beta\mu r^3 \omega'} &= \frac{\mathcal{R}}{\mu}\rho_W T_W h - \frac{GM_{*,\text{eff}}\dot{m}h^2 f}{4\pi\beta r^6 \omega'} + \frac{G\dot{m}^2 h f}{4\pi\beta^2 r^6 \omega'^2} + \frac{G\rho_W \dot{m}h^2 f}{\beta r^3 \omega'} \\ \Rightarrow h^2 - \frac{G\mu\dot{m}^2 f + 4\pi\mathcal{R}\beta^2 r^6 \omega'^2 \rho_W T_W}{\beta G\mu\dot{m}\omega' (M_{*,\text{eff}} - 4\pi\rho_W r^3)} h &- \frac{\mathcal{R}T_c r^3}{G\mu (M_{*,\text{eff}} - 4\pi\rho_W r^3)} = 0 \\ \Rightarrow h &= \frac{G\mu\dot{m}^2 f + 4\pi\mathcal{R}\beta^2 r^6 \omega'^2 \rho_W T_W}{2\beta G\mu\dot{m}\omega' f (M_{*,\text{eff}} - 4\pi\rho_W r^3)} \\ &+ \sqrt{\frac{\mathcal{R}T_c r^3}{G\mu (M_{*,\text{eff}} - 4\pi\rho_W r^3)} + \left(\frac{G\mu\dot{m}^2 f + 4\pi\mathcal{R}\beta^2 r^6 \omega'^2 \rho_W T_W}{2\beta G\mu\dot{m}\omega' f (M_{*,\text{eff}} - 4\pi\rho_W r^3)} \right)^2} = h(r) .\end{aligned}\tag{2.46}$$

Die zweite Lösung ist negativ und daher hier nicht von Interesse. Mit der Höhe (2.46) läßt sich aus der Drehimpulserhaltung (2.40) die Zentraldichte berechnen:

$$\rho_c = -\frac{\dot{m}f}{4\pi\beta r^3 \omega' h} = \rho_c(r) .\tag{2.47}$$

Die Dichte (2.47), die Höhe (2.46) und die Zentraltemperatur (2.45) lösen also das Gleichungssystem (2.40) – (2.43).

3 Numerische Behandlung des Gleichungssystems

3.1 Das Potential und seine Ableitungen

3.1.1 Ein grundsätzliches Problem

Für eine vorgegebene Massenverteilung $\rho(\vec{r}')$ in einem Volumen V läßt sich das zugehörige Potential am Punkt \vec{r} gemäß

$$\Phi(\vec{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3 r'$$

berechnen. Potentiallösungen sind inzwischen für etliche analytisch vorgegebene Dichteverteilungen bekannt (Binney & Tremaine, 1987; Earn, 1996; Robijn & Earn, 1996) oder können ganz allgemein als Reihenentwicklung für beliebige Dichteverteilungen angegeben werden. Auch numerische Lösungsverfahren existieren in großer Zahl. Bei dem hier vorliegenden Problem einer (für die Numerik) unendlich dünnen Scheibe mit einem inneren Rand r_i und einem äußeren Rand r_a tauchen aber einige Schwierigkeiten auf, die in anderen Fällen nicht auftreten. So muß man sich zunächst klarmachen, daß anders als im Fall einer sphärischen Massenverteilung die Masse außerhalb des Aufpunktes \vec{r} einen Beitrag zum Potential liefert. Der Grund hierfür ist die fehlende sphärische Symmetrie, die eine Ungleichheit der Kräfte entgegengesetzter Ringsegmente auf den Punkt \vec{r} zur Folge hat. Jeder weiter außen als der Aufpunkt \vec{r} liegende Ring reduziert daher die kombinierte, nach innen gerichtete Gravitationskraft von Zentralobjekt und weiter innen liegenden Ringen der Scheibe; solche äußeren Ringe führen zu einer nach außen gerichteten Gravitationskraft. Einzig im Fall einer Mestel-Scheibe ($\Sigma(r) \propto r^{-1}$) braucht wie im sphärischen Fall nur die weiter innen liegende Masse berücksichtigt zu werden (Binney & Tremaine, 1987).

Das eigentliche Problem bei der Bestimmung des Potentials im Rahmen dieser Arbeit ist aber eines, das sich erst in der zweiten radialen Ableitung $\Phi''(\vec{r})$ bemerkbar macht. Um deutlich zu machen, daß die auftretenden Schwierigkeiten nicht numerischer Natur sind, soll eine unendlich dünne Scheibe mit einem inneren Rand r_i , der hier ohne Einfluß auf die folgenden Resultate gleich Null gesetzt wird¹, und einem äußeren Rand r_a sowie einer konstanten Massenbelegung $\Sigma(r) = \Sigma_0 = \text{const}$ betrachtet werden. Deren Potential berechnet sich nach (C.1) aus

$$\Phi_D(r) = -4G\Sigma_0 r_a E\left(\frac{r}{r_a}\right).$$

$E(x)$ ist hierbei das vollständige elliptische Integral zweiter Art. In Abbildung 3.1 sind dieses Potential und die Potentialanteile, die an jedem Abstand r nur die weiter innen bzw. nur die weiter außen liegende Masse ($\Phi_{D,i}$ bzw. $\Phi_{D,a}$) berücksichtigen, dargestellt. Man erkennt, daß die weiter außen liegende Masse wie erwartet zu einer nach außen gerichteten Kraft führt, da Φ'_D in diesem Fall negativ ist. Zudem ist offensichtlich, daß die Gravitationskraft in den inneren Bereichen der Scheibe aus Symmetriegründen verschwindet (hier ist $\Phi'_D = 0$). Schließlich fällt auf, daß die Potentialkurve positiv gekrümmt ist, während die Krümmung des Potentials einer Punktmasse und damit die des Zentralpotentials bekanntermaßen negativ ist. Aus diesem Umstand folgt das Problem, welches sich beim Auffinden selbstkonsistenter Lösungen in dieser Arbeit ergibt. Dies soll nun gezeigt werden. Die beiden ersten Ableitungen von Φ_D sind

¹Das Potential einer Scheibe mit konstanter Massenbelegung kann auch für einen nicht verschwindenden inneren Rand r_i vollständig analytisch bestimmt werden. Für diesen Fall werden Φ_D und seine Ableitungen in Anhang C angegeben. An

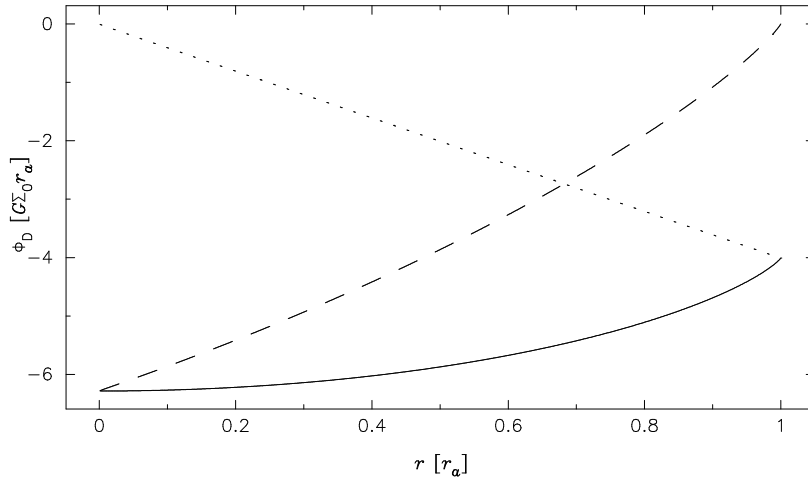


Abbildung 3.1: Das Potential einer unendlich dünnen Scheibe mit konstanter Flächendichte (durchgezogen) und die Anteile dieses Potentials, die in jedem Abstand r entweder nur die weiter innen liegende Masse ($\Phi_{D,i}$, gestrichelt) oder nur die weiter außen liegende Masse ($\Phi_{D,a}$, gepunktet) berücksichtigen.

$$\Phi'_D(r) = -4G\Sigma_0 E \left(\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2} \right)$$

und

$$\Phi''_D(r) = -4G\Sigma_0 \frac{r}{r_a \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2}} E \left(\frac{r}{r_a} \right) .$$

Die Masse der Scheibe ist trivialerweise $m_D = \pi\Sigma_0 r_a^2$. Man parametrisiert nun die Masse des Zentralobjekts durch die Scheibenmasse:

$$M = \frac{m_D}{q} = \frac{\pi}{q} \Sigma_0 r_a^2 .$$

q ist dann ein Maß für die Selbstgravitation. Das Potential des Gesamtsystems erhält man als Superposition der Potentiale von Zentralobjekt und Scheibe:

$$\Phi(r) = \Phi_*(r) + \Phi_D(r) = -\frac{GM}{r} - 4G\Sigma_0 r_a E \left(\frac{r}{r_a} \right) = -G\Sigma_0 r_a \left(\frac{\pi}{q} \frac{r_a}{r} + 4E \left(\frac{r}{r_a} \right) \right) .$$

Die ersten beiden Ableitungen dieses Potentials sind

$$\begin{aligned} \Phi'(r) &= \Phi'_*(r) + \Phi'_D(r) = \frac{GM}{r^2} - 4G\Sigma_0 E \left(\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2} \right) \\ &= G\Sigma_0 \left(\frac{\pi}{q} \frac{r_a^2}{r^2} - 4E \left(\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

dieser Stelle würde eine Berücksichtigung von $r_i \neq 0$ jedoch zu erheblichen Komplikationen führen, die aber keine tiefere Einsicht in das Problem geben, das hier angesprochen werden soll. Das liegt daran, daß das auftretende Problem eine Folge der Selbstgravitation der Scheibe ist, und der innere Bereich der Scheibe trägt nicht wesentlich zu deren Masse bei.

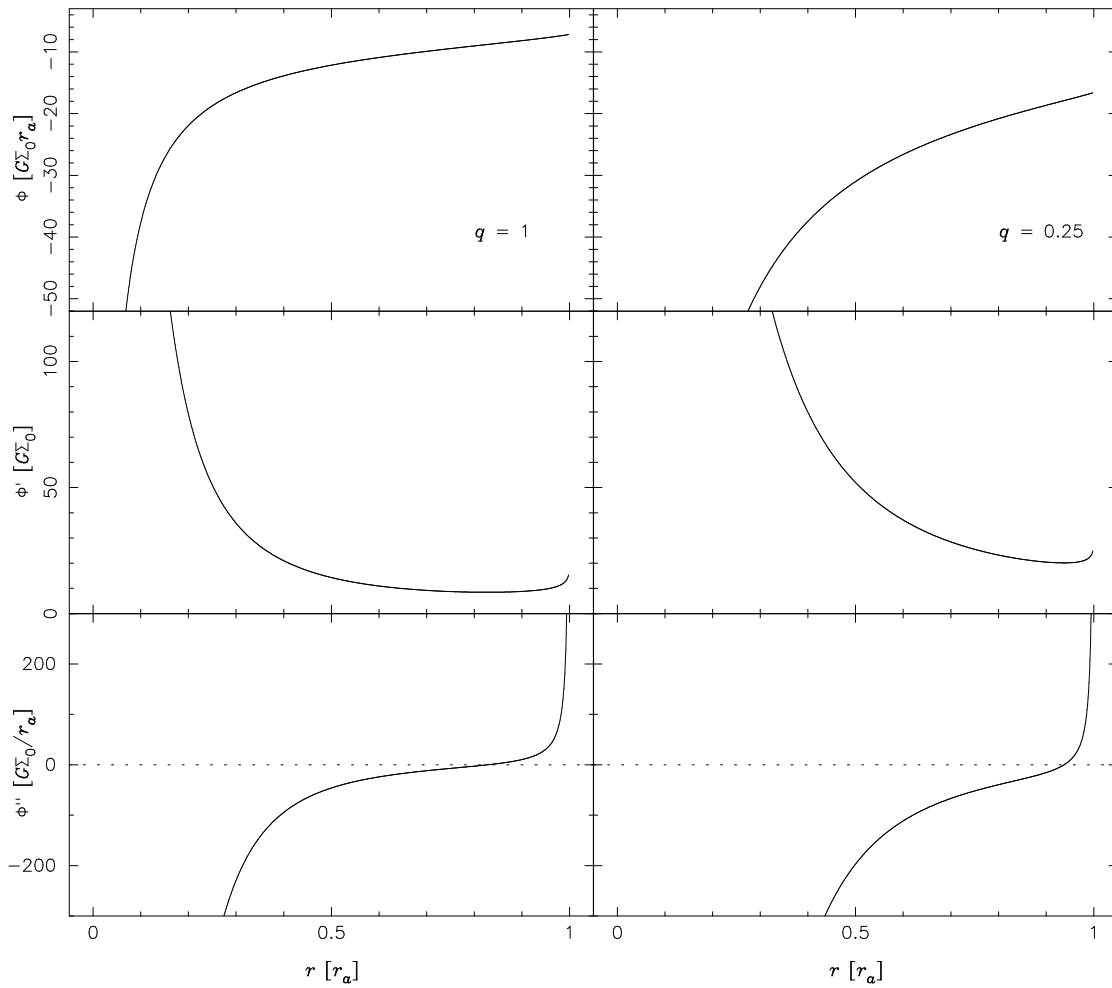


Abbildung 3.2: Potentiale und ihre Ableitungen für Gesamtsysteme aus einem Zentralobjekt und einer Scheibe. Links haben Zentralobjekt und Scheibe die gleiche Masse, in den rechten Abbildungen enthält die Scheibe nur $1/4$ der Masse des Zentralobjekts.

und

$$\begin{aligned} \Phi''(r) &= \Phi_*''(r) + \Phi_D''(r) = -\frac{2GM}{r^3} - 4G\Sigma_0 \frac{r}{r_a \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2}} E\left(\frac{r}{r_a}\right) \\ &= -2\frac{G\Sigma_0}{r_a} \left(\frac{\pi r_a^3}{q r^3} + 2 \frac{r}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2}} E\left(\frac{r}{r_a}\right) \right). \end{aligned}$$

Das Gesamtpotential und seine Ableitungen sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Die linke Seite zeigt die Resultate für eine voll selbstgravitierende Scheibe, während die rechten Kurven für eine Keplersch selbstgravitierende Scheibe stehen. Offensichtlich ändert $\Phi''(r)$ sein Vorzeichen, und der Abstand r , bei dem dies geschieht, ist von q abhängig. Je größer q ist, je massereicher also die Scheibe und je größer ihre Selbstgravitation ist, desto weiter innen erfolgt der Vorzeichenwechsel in $\Phi''(r)$. Berechnet man für dieses System die Winkelgeschwindigkeit und ihre radiale Ableitung (Gleichungen (3.3) und (3.4)), so findet man die in Abbildung 3.3 dargestellten Verläufe. Da $\Phi''(r)$ direkt in die Berechnung von $\omega'(r)$ eingeht, zeigt auch die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit eine Nullstelle, wenn auch an weiter außen liegender Stelle als $\Phi''(r)$. Wegen (2.30) oder (2.35) divergiert dann aber zwangsläufig das Produkt $\nu\Sigma$.

In realistischen Akkretionsscheiben tritt natürlich keine konstante Flächendichte auf. So ist die Ablei-

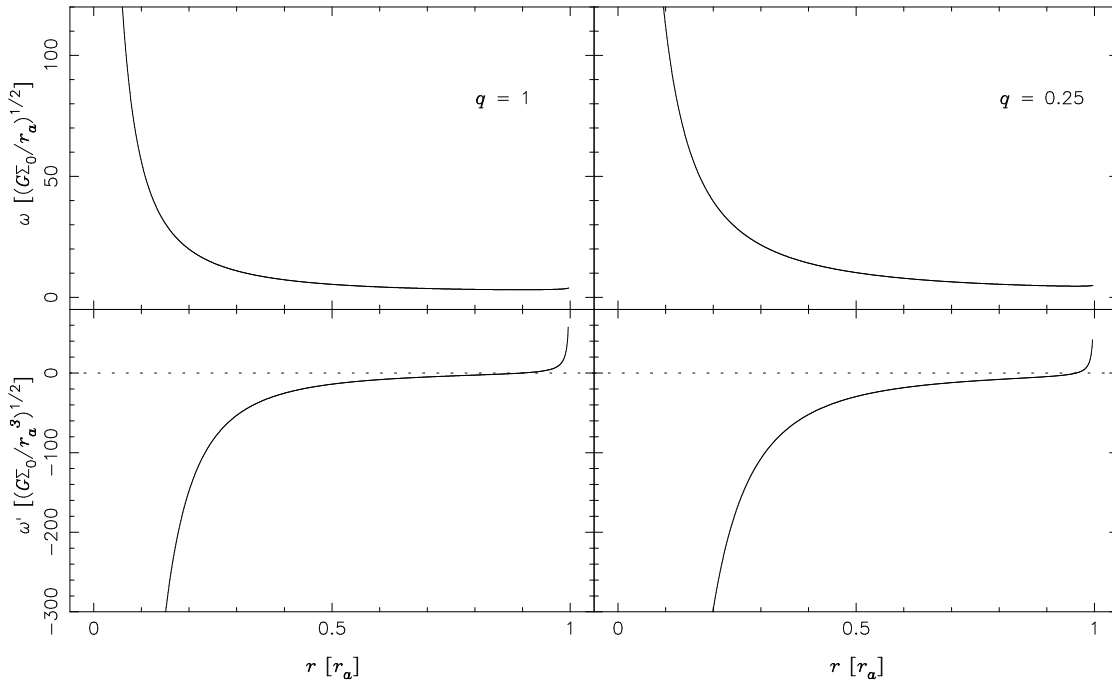


Abbildung 3.3: Winkelgeschwindigkeiten und ihre ersten Ableitungen für die in Abbildung 3.2 gezeigten Scheiben. Der Grad der Selbstgravitation ist wieder angegeben.

tung der Winkelgeschwindigkeit für Keplersch selbstgravitierende β -Scheiben $\omega' = -\frac{3}{2}\frac{\omega}{r} = -\frac{3}{2}\sqrt{GM/r^5}$, und damit gilt nach (2.35) $\Sigma \propto r^{-1/2}$, wenn man die innere Randbedingung vernachlässigt. Für α -Scheiben können keine derartigen definitiven Aussagen gemacht werden, da die Viskosität über die Schallgeschwindigkeit an die Thermodynamik koppelt, so daß auch die Flächendichte selbst durch die Thermodynamik bestimmt wird. Für β -Scheiben kann man das obige Problem der Divergenz von $\nu\Sigma$ an der Stelle, an der ω' sein Vorzeichen wechselt, genauer fassen. Wegen der Endlichkeit von $\nu = \beta r v_\varphi = \beta r^2 \omega$ bedeutet dies nämlich, daß die Flächendichte selbst divergieren muß und damit entweder die Höhe oder die Dichte (oder beide). Dies ist aber sicherlich unphysikalisch.

Auch für realistische Potentiale, die den Potentialanteil der Akkretionsscheibe berücksichtigen, tritt aber ab einer bestimmten Masse relativ zu derjenigen des Zentralobjekts das oben beschriebene Problem der Divergenz von $\nu\Sigma$ an einem bestimmten Radius auf. Selbstkonsistente Lösungen können auf diese Weise nicht gefunden werden. Es gibt aber einen Ausweg: Wie oben beschrieben hängt die Stelle, an der der Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung des Potentials stattfindet, bei gegebenem äußeren Rand r_a von q ab. Andererseits liegt – bei konstantem q – diese Stelle bei Vergrößerung von r_a auch entsprechend weiter außen. Es bietet sich daher an, die Akkretionsscheiben formal bis zu einem größeren Radius r als bis zum Außenradius r_a , bis zu dem man die Scheibengleichungen lösen möchte, zu rechnen, so daß die problematische Stelle außerhalb des interessierenden Bereichs liegt. Eine solche Behandlung bedarf aber mehrerer Bemerkungen.

Zunächst ist zu klären, welchen Einfluß die Masse außerhalb des Radius r_a auf das Potential der Scheibe bis einschließlich zum Radius r_a hat. Dazu werden die Scheibengleichungen bis zum Außenrand r_a , wie in Kapitel 2 beschrieben, gelöst, und bis zu einem Radius $2r_a$ wird eine "künstliche" Masse an die Akkretionsscheibe angehängt. Diese zusätzliche Masse soll sich ohne Sprung und mit der gleichen Steigung bzgl. der Ringmassen an die Scheibe weiter innen anschließen. Abbildung 3.4 zeigt solche Massenverteilungen, für die anschließend selbstkonsistente Lösungen gesucht wurden. Die Ergebnisse für die Winkelgeschwindigkeit sind zusammen mit dem Keplerschen Wert für diese voll selbstgravitierenden Scheiben bis zum interessierenden Außenrand r_a in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Winkelgeschwindigkeiten bei $r = r_a$ liegen bei weniger als 3% für alle Massenverteilungen und sind weiter innen natürlich noch geringer. Die genaue Massenverteilung außen hat also so gut wie keinen Einfluß auf die Resultate bis zum Außenrand r_a , solange die Masse nicht zu schnell abfällt oder ansteigt. Ähnliche Rechnungen wurden auch für die in dieser Arbeit vorgestellten Resultate gemacht: dabei zeigte sich grundsätzlich das gleiche Verhalten. Eine Akkretionsscheibe kann auf diese Weise also

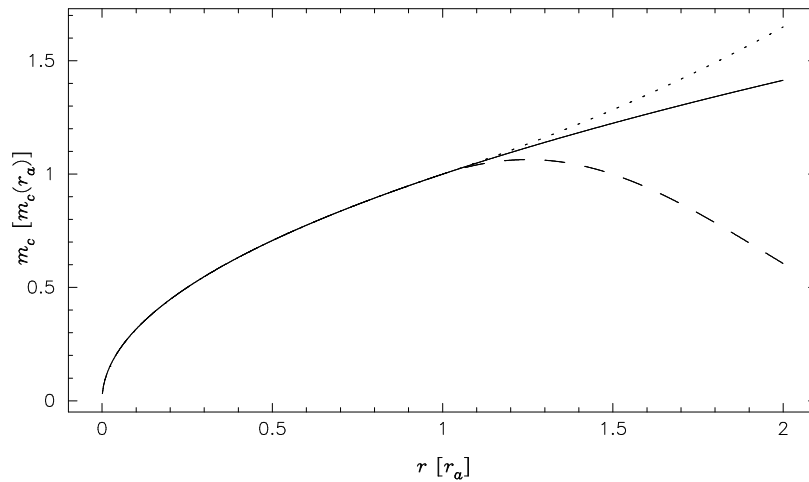


Abbildung 3.4: Ringmassen m_c für voll selbstgravitierende Akkretionsscheiben. Ab $r = r_a$ werden "künstliche" Massen an die Scheiben angehängt, die nicht mehr Lösungen der Scheibengleichungen sind.

numerisch behandelt werden.

Trotz des numerischen Auswegs sollte man versuchen zu verstehen, was der Grund für die Schwierigkeiten ist. Letztlich sind alle Probleme darauf zurückzuführen, daß die Masse pro Ring nach außen immer weiter zunimmt, obwohl dies in der Natur zweifelsohne nicht der Fall ist. Ab einem gewissen Abstand vom Zentralobjekt müssen die Ringmassen also wieder fallen. Dies geschieht im Prinzip auch im Rahmen der hier beschriebenen stationären Scheiben, da nur die effektive Ringmasse (diejenige abzüglich der Masse, die das umgebende Material im Ringvolumen aufweist) in die Potentialberechnung eingeht. Da die Dichte der Scheiben nach außen hin abfällt, werden auch die Ringmassen irgendwann nicht mehr weiter steigen, sondern sinken. Dies geschieht aber für massereiche Scheiben, in denen Selbstgravitation eine Rolle spielt, erst bei viel zu großen Abständen vom Zentrum. Andererseits ist aber fraglich, ob bei großen Abständen vom Zentrum die Annahme der Stationarität überhaupt noch sinnvoll ist. Dort spielen ohne Frage zusätzliche, hier nicht berücksichtigte Effekte eine Rolle. So ist in Kapitel 2 angenommen worden, daß Materie nur durch die Scheibe akkretiert wird, was mit zunehmender Entfernung vom Zentrum nicht mehr zu halten ist. Dort wird auch Material auf die Scheibe einfallen und zu einer Vergrößerung der Temperatur führen. Dies hat aber eine Vergrößerung der Höhe und eine Verringerung der Dichte zur Folge, so daß hier vielleicht schon zusätzlich die Annahme einer dünnen Scheibe problematisch wird. Auch wird dort draußen Turbulenz eine viel größere Rolle spielen. Zusätzlich müssen Asymmetrien, wie sie z.B. durch den Strahlungsdruck heißer O- und B-Sterne der Umgebung erzeugt werden, in Betracht

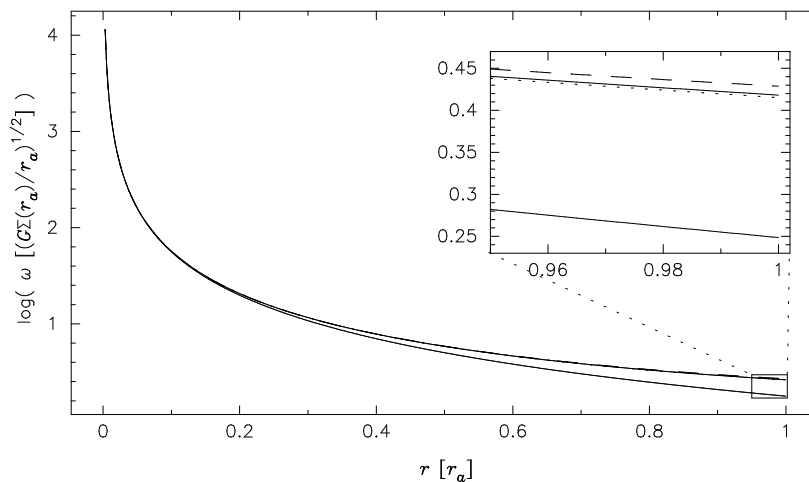


Abbildung 3.5: Winkelgeschwindigkeiten der in Abbildung 3.4 dargestellten Massenverteilungen.

gezogen werden. Bei protostellaren Akkretionsscheiben ist in den Frühphasen der Entwicklung, in denen die Selbstgravitation am größten ist, zudem weit vom Zentrum entfernt ein eher sphärischer Kollaps viel wahrscheinlicher, da die Drehimpulserhaltung hier noch keine hinreichende Abplattung des kollabierenden Materials verursachen konnte. Dann aber bricht wieder die Näherung einer dünnen Scheibe zusammen. All dies zeigt, daß die in Kapitel 2 vorgestellten Gleichungen Akkretionsscheiben bei hinreichend großen Abständen vom Zentralobjekt nicht beschreiben können, da hier andere Prozesse eine Rolle spielen. Für eine selbstkonsistente Behandlung der stationären Scheiben ist aber nur die nähere Umgebung außerhalb des betrachteten Außenrandes r_a für den inneren Bereich von Bedeutung, und hier werden sich die Ringmassen nicht zu schlagartig ändern. Eine Vorgehensweise, wie sie oben beschrieben wurde, erscheint also sinnvoll und gerechtfertigt.

In dieser Arbeit wird als äußerer formaler Rand der Scheibe daher der Wert $16r_a$ verwendet, so daß man maximal 4 Iterationsschritte (siehe 3.3) zur Verfügung hat, um selbstkonsistente Resultate zu erhalten. Nach jedem Iterationsschritt wird der formale Außenrand auf die Hälfte reduziert, so daß die problematischen Stellen, an denen die radiale Ableitung der Winkelgeschwindigkeit ihr Vorzeichen wechselt, immer außerhalb liegen.

3.1.2 Die Berechnung des Potentials

Nach jedem Iterationsschritt (siehe 3.3) wird für die Scheibe auf der Basis der vorliegenden Massenverteilung das Potential berechnet. Numerische Verfahren hierzu gibt es in großer Zahl. Hier soll ein Verfahren vorgestellt werden, das ursprünglich auf Gauss zurückgeht und das für das hier vorliegende Problem einer dünnen Scheibe mit Azimutalsymmetrie optimal angepaßt ist. In seiner allgemeinen Form ist es zur Berechnung 3-dimensionaler Potentiale² geeignet und kann z.B. in MacMillan (1958) nachgelesen werden. Da diese Quelle recht alt und daher eventuell schwer zugänglich ist, wird in Anhang D für die in dieser Arbeit verwendete Vereinfachung einer eindimensionalen Scheibe kurz das Verfahren beschrieben. An dieser Stelle wird daher nur kurz auf die für die Numerik relevanten Schritte eingegangen, ohne diese zu begründen.

Der Vorteil dieses Verfahrens ist, daß die Radius- und die Massenabhängigkeit des Potentials separiert werden können. Dies hat den Vorteil, daß für alle in dieser Arbeit berechneten Scheiben nur ein einziges Mal der Radiusanteil des Potentials bestimmt werden muß, dessen Berechnung den größten Zeitaufwand erfordert.

Man denkt sich die Scheibe nun in N Ringe aufgeteilt. Für eine Scheibe mit dem Radius 1 sei $r_k \leq 1$, $k \in \{1, N\}$, der Abstand vom Zentrum, an dem das Potential der Scheibe berechnet werden soll, und $r_l \leq 1$, $l \in \{1, N\}$, sei der Radius eines Ringes der Masse $m_{c,l}$. Man bestimmt nun für $r_k \neq r_l$ die beiden Abstände

$$p_{kl} := r_k + r_l ,$$

$$q_{kl} := |r_k - r_l|$$

sowie daraus die beiden Parameter

$$p_{1,kl} := \frac{2r_l p_{kl}}{p_{kl} + q_{kl}} ,$$

$$q_{1,kl} := \frac{2r_l q_{kl}}{p_{kl} + q_{kl}} .$$

Diese beiden Werte sind die Startwerte für eine arithmetische und eine geometrische Reihe:

$$p_{n+1,kl} := \frac{p_{n,kl} + q_{n,kl}}{2} ,$$

$$q_{n+1,kl} := \sqrt{p_{n,kl} q_{n,kl}} ,$$

²Effektiv handelt es sich nur um 2-dimensionale Potentiale, da die Massenverteilung symmetrisch in φ ist.

die beide gegeneinander und damit gegen einen gemeinsamen Grenzwert $\tilde{\mathcal{L}}_{kl}$ konvergieren. Aufgrund der Konstruktion der $\tilde{\mathcal{L}}_{kl}$ sind diese nur noch mit der physikalischen Ausdehnung zu multiplizieren, um den tatsächlichen Radialanteil des Potentials zu bestimmen. Diese korrigierten Grenzwerte seien mit \mathcal{L}_{kl} bezeichnet. Man muß nun noch den Fall $r_k = r_l$ behandeln, bei dem das Potential eines Masserings an einer Stelle des Rings berechnet werden soll. Nach (D.7) kann man in diesem Fall

$$\mathcal{L}_{kk} := \frac{\pi}{\operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \cos\frac{\Delta r}{4\pi r_k}}\right)} r_k$$

setzen und kennt so den Radialanteil des Potentials an allen Stellen der Scheibe. Das Potential des Rings mit dem (jetzt nicht mehr auf ≤ 1 normierten) Radius r_l am Ort \vec{r}_k ist dann gegeben durch

$$\Phi_{D,kl} := \Phi_{D,l}(r_k) = -\frac{p_{1,kl}}{p_{kl}} \frac{Gm_{c,l}}{\mathcal{L}_{kl}}.$$

Das Potential der gesamten Scheibe am Ort \vec{r}_i ist daher

$$\Phi_{D,k} := \Phi_D(r_k) = -G \sum_l \frac{p_{1,kl}}{p_{kl}} \frac{m_{c,l}}{\mathcal{L}_{kl}}.$$

Das totale Potential (einschließlich des Anteils des Zentralobjekts) ist demnach für Akkretionsscheiben in AGN

$$\Phi_k := \Phi(r_k) = -\frac{GM_*}{r_k - R_S} - G \sum_l \frac{p_{1,kl}}{p_{kl}} \frac{m_{c,l}}{\mathcal{L}_{kl}},$$

wobei $R_S = \frac{2GM_*}{c^2}$ der Schwarzschildradius des Schwarzen Lochs im Zentrum der Galaxie ist, und für protoplanetare Scheiben

$$\Phi_k := \Phi(r_k) = -\frac{GM_*}{r_k} - G \sum_l \frac{p_{1,kl}}{p_{kl}} \frac{m_{c,l}}{\mathcal{L}_{kl}}.$$

Da der formale Außenrand der Akkretionsscheibe nach jedem Iterationsschritt halbiert wird, braucht das Potential auch nicht für die volle Scheibe gelöst werden, sondern nur bis einschließlich zur ersten Stützstelle außerhalb des neuen formalen Außenrandes des nächsten Iterationsschritts. Die zusätzliche Stützstelle ganz außen wird für die Ableitungen des Potentials benötigt (siehe nächster Unterabschnitt).

3.1.3 Die Ableitungen des Potentials

Sei N_{j-1} die Zahl der Stützstellen des letzten Iterationsschritts, für dessen Massenverteilung das Potential berechnet werden soll. Da der formale Außenrand im nächsten Iterationsschritt halbiert wird, stehen danach nur noch $N_j = \frac{N_{j-1}}{2}$ Stützstellen zur Verfügung, und man benötigt daher nur Ableitungen an diesen Stellen. Bei gegebenem Potential Φ_k , $k \in \{1, \frac{N_{j-1}}{2} + 1\}$, berechnet man zunächst eine Hilfsgröße $\phi'_{k+\frac{1}{2}} := \phi'(r_{k+\frac{1}{2}})$, die zur besseren Unterscheidung der später verwendeten Ableitungen des Potentials in kleinen griechischen Buchstaben geschrieben wird:

$$\phi'_{k+\frac{1}{2}} := \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{\Delta r}, \quad k \in \{2, N_j\}$$

wobei Δr der konstante Abstand zwischen zwei Stützstellen ist: $\Delta r := r_k - r_l = \text{const.}$ Für $k = 1$ wird dann bei der Berechnung der ersten Ableitung des Potentials die Keplersche Form verwendet, d.h.

$$\Phi'_1 = \frac{GM_*}{r_1^2}.$$

Für $k \in \{2, N_j\}$ dagegen wird Φ'_k aus den Hilfsableitungen $\phi'_{k+\frac{1}{2}}$ gemäß

$$\Phi'_k = \frac{1}{2} \left(\phi'_{k+\frac{1}{2}} + \phi'_{k-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2\Delta r} (\Phi_{k+1} - \Phi_k + \Phi_k - \Phi_{k-1}) = \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_{k-1}}{2\Delta r}$$

berechnet. Zusammen gilt also

$$\Phi'_k = \begin{cases} \frac{GM_*}{r_k^2} & k = 1 \\ \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_{k-1}}{2\Delta r} & k \in \{2, N_j\} \end{cases} \quad (3.1)$$

Ganz analog setzt man für $k = 1$ für die Krümmung des Potentials die Keplersche Form

$$\Phi''_1 = -\frac{2GM_*}{r_1^3}$$

an. Für $k \in \{2, N_j\}$ berechnet sich Φ''_k linear aus den Hilfsgrößen $\phi'_{k+\frac{1}{2}}$ nach

$$\Phi''_k = \frac{\phi'_{k+\frac{1}{2}} - \phi'_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta r} = \frac{1}{(\Delta r)^2} (\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}) .$$

Für die zweite Ableitung des Potentials erhält man also insgesamt

$$\Phi''_k = \begin{cases} -\frac{2GM_*}{r_k^3} & k = 1 \\ \frac{1}{(\Delta r)^2} (\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}) & k \in \{2, N_j\} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2 Die Winkelgeschwindigkeit und ihre Ableitung

Wie bei klassischen α -Scheiben soll der Druckgradient in radialer Richtung als vernachlässigbar klein angenommen werden (siehe 2.2.2.4 und Abramowicz et al. (1984)), so daß die Zentrifugalkraft allein durch die Gravitationskraft ausgeglichen wird. Daher gilt

$$\begin{aligned} \omega^2(r)r &= \frac{d\Phi(r)}{dr} \\ \Rightarrow \omega(r) &= \sqrt{\frac{1}{r} \frac{d\Phi(r)}{dr}} . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit läßt sich einfach analytisch aus (3.3) berechnen:

$$\omega'(r) = \frac{d\omega(r)}{dr} = \frac{1}{2\omega(r)} \left(\frac{1}{r} \frac{d^2\Phi(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) = -\frac{\Phi'(r) - r\Phi''(r)}{2r^2\omega(r)} , \quad (3.4)$$

wobei $\Phi'(r)$ und $\Phi''(r)$ gemäß (3.1) und (3.2) berechnet werden.

3.3 Der Iterationsschritt

Der erste Iterationsschritt unterscheidet sich ein wenig von allen auf ihn folgenden Schritten und soll daher gesondert behandelt werden. Das Spezielle dieses Iterationsschritts ist es, daß eine Winkelgeschwindigkeit

und ihre radiale Ableitung vorgegeben statt aus einer bekannten Massenverteilung berechnet werden. Für diese erste Winkelgeschwindigkeit wird für alle in dieser Arbeit berechneten Scheiben ein Keplersches Profil angesetzt. Die Scheibe wird dabei als in N_1 äquidistante Ringe der Dicke Δr aufgeteilt gedacht. An den Stützstellen r_k , $k \in \{1, N_1\}$, werden die Werte für ω und ω' vorgegeben. Wie in 2.3 und 2.4 beschrieben werden dann die Scheibengleichungen gelöst.

An dieser Stelle ist eine Bemerkung angebracht, warum äquidistante Stützstellen verwendet werden, da üblicherweise logarithmisch äquidistante oder exponentiell verteilte Stützstellen gewählt werden, um die inneren Bereiche der Scheibe gut aufzulösen. In dieser Arbeit sind aber die selbstgravitierenden Bereiche der Scheibe von großer Bedeutung, und diese liegen außen. Um dort noch eine hinreichend gute Auflösung zu erreichen, wurde eine äquidistante Verteilung gewählt, die außen feiner als die anderen erwähnten Verteilungen ist. Eine Auflösung ist im Falle von α -Scheiben dann gut, wenn $\Delta r \approx h(r)$ ist. Eine deutlich feinere Verteilung der Stützstellen ist sinnlos, da aufgrund der vorausgesetzten Isotropie der Turbulenz Aussagen über kleinere Skalen nicht getroffen werden können. Diese Einschränkung gibt es bei β -Scheiben im Prinzip nicht. Zwar kann auch hier keine beliebig hohe Auflösung erreicht werden, da die einzelnen Ringe sehr wohl mit benachbartem Material wechselwirken. Man kann Δr aber so klein wählen, daß diese Wechselwirkung über den vorgegebenen Abstand der Ringe vernachlässigt werden kann. Anders als beim Isotropieargument der α -Scheiben kann man hier zumindest formal zu deutlich kleineren Auflösungen kommen. Die Frage, bis zu welchen Auflösungen man bei β -Scheiben vordringen kann, bedarf mindestens einer zweidimensionalen Behandlung des Problems und kann und soll im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden. Wählt man dagegen eine deutlich geringere Auflösung als $\Delta r \approx h(r)$, so löst man die Scheibe nur unzureichend auf und verliert eventuell unnötigerweise Informationen.

Im zweiten Iterationsschritt und in allen darauf folgenden wird dann aus der aus dem letzten Schritt gewonnenen Massenverteilung zunächst für alle $k \in \{1, N_j + 1\}$ das Potential gewonnen, wenn j die Nummer des aktuellen Iterationsschritts ist. Nach (3.1) und (3.2) werden hieraus die Ableitungen des Potentials und nach (3.3) und (3.4) ω und ω' berechnet, die damit an allen Stützstellen r_k , $k \in \{1, N_j\}$, des aktuellen, j -ten Iterationsschritts zur Verfügung stehen. Damit werden erneut die Scheibengleichungen gelöst.

Die Iteration wird dann abgebrochen, wenn die Winkelgeschwindigkeit des aktuellen Iterationsschritts sich von demjenigen des letzten Schritts nur noch maximal um 1% unterscheidet, also wenn

$$\left| \frac{\omega_j(r_k) - \omega_{j-1}(r_k)}{\omega_j(r_k)} \right| \leq 0.01 \quad \forall r_k, \quad k \in \{1, N_j\} .$$

3.4 Der Parameterraum

Insgesamt gibt es 10 verschiedene Parameter bei den hier vorliegenden Simulationen. Diese sind die Massenakkretionsrate \dot{m} , der Viskositätsparameter β bzw. α , die Masse des Zentralobjekts M_* , Temperatur T_W und Dichte ρ_W des umgebenden Materials, das mittlere Molekulargewicht μ , der Exponent χ des Opazitäts-Potenzgesetzes (A.1) für optisch dünne Scheiben, der innere Rand r_i und der äußere Rand r_a der Scheibe und der Radius r_0 innerhalb der Randschicht, an dem die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit verschwindet. Die in dieser Arbeit verwendeten Bereiche bzw. Werte für diese Parameter sollen im folgenden angegeben und motiviert werden.

Einer der wichtigsten Parameter ist die Massenakkretionsrate, die entscheidend mitbestimmt, wie massereich eine Scheibe relativ zum Zentralobjekt ist. Für Akkretionsscheiben in AGN findet man in der Regel Werte im Bereich von $1 M_\odot \text{ yr}^{-1}$, jedoch gibt es auch Beispiele für höhere Massenakkretionsraten. So erscheint $\dot{m} \geq 10 M_\odot \text{ yr}^{-1}$ im Fall von Arp 220, dem gemergten Überrest zweier massereicher Galaxien, deren Gasmassen nun auf das Zentrum zustürzen, wahrscheinlich (Scoville, 1999). Ähnliche Resultate erhalten Szuskiwicz et al. (1996) für AGN aus der spektralen Energieverteilung. Diese Beobachtungen könnten aber auch durch deutlich höhere Massenakkretionsraten ($\approx 10^2 M_\odot \text{ yr}^{-1}$) erklärt werden, wenn man gleichzeitig die Massen der Schwarzen Löcher in den Zentren reduziert. Auch Huré (1998) fand Massenakkretionsraten bis zu $10^2 M_\odot \text{ yr}^{-1}$ für AGN. Die Akkretionsraten in Scheiben in AGN werden in dieser Arbeit daher im Bereich $0.1 - 100 M_\odot \text{ yr}^{-1}$ variiert. Für protoplanetare Scheiben erhält man natürlich deutlich geringere Werte für \dot{m} . Typische Werte liegen unterhalb von $10^{-7} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ (Hartigan et al., 1995; Papaloizou et al., 1999). Doch auch Akkretionsraten zwischen $3 \cdot 10^{-7}$ und $10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1}$

konnten für diese Scheiben abgeleitet werden (Hartmann, 1998; Hartigan et al., 1991; Basri & Bertout, 1989; Pudritz & Norman, 1986; Terebey et al., 1984). Für FU Ori-Sterne findet man sogar – wenn auch nur für die kurze Zeit von maximal wenigen 100 Jahren – Akkretionsraten von $10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ (Chandler & Richter, 1999; Hartmann & Calvet, 1995). Da man an stationären, selbstgravitierenden Scheiben interessiert ist, wird für \dot{m} ein Bereich von 10^{-7} bis $10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ für protoplanetare Scheiben verwendet.

Der Viskositätsparameter β ist aufgrund seiner Definition als Kehrwert der kritischen Reynoldszahl im wesentlichen bereits vorgegeben. Kritische Reynoldszahlen liegen zwischen etwa 100 und 1000, so daß für β der Bereich $10^{-2} - 10^{-3}$ verwendet wird. Die Wahl eines geeigneten Viskositätsparameters α erweist sich als schwieriger. Standardmäßig werden heute für protoplanetare Scheiben Werte im Bereich von $\alpha = 10^{-1}$ bis 10^{-3} verwendet, wobei $\alpha = 10^{-2}$ stark bevorzugt wird (Calvet et al., 1999; Stepinski, 1998; Nakamoto & Nakagawa, 1995; Ruden & Lin, 1986). Für Akkretionsscheiben in AGN soll der Wert $\alpha = 0.1$ verwendet werden, da in der Literatur für diesen Scheibentyp eher größere Werte für α üblich sind (Shore & White, 1982; Huré, 1998). Diese Werte werden aber nicht in allen Simulationen verwendet. Stattdessen wird bei Scheiben, die innen – wie alle Scheiben – nicht selbstgravitierend sind, die aber weiter außen Keplersch selbstgravitierend werden, der Viskositätsparameter α für ein vorgegebenes β so berechnet, daß die Viskositäten an der Stelle, an der der Übergang von der NSG- zur KSG-Scheibe erfolgt, gleich sind:

$$\begin{aligned} \nu &= \alpha h c_s \frac{1}{2} \beta r v_{\phi} = \beta r^2 \omega \\ \Rightarrow \quad \alpha &= \frac{r^2 \omega}{h c_s} \beta . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Mit diesen aus den Simulationen resultierenden α 's, die ebenfalls iterativ bestimmt werden müssen, da ein neues α den Ort des Einsetzens Keplerscher Selbstgravitation verschiebt, werden dann die Scheibengleichungen für den α -Teil der Scheibe berechnet.

Die Masse des Zentralobjekts in AGN reicht bei supermassiven Schwarzen Löchern bis zu $10^9 M_{\odot}$ und darüber hinaus (Di Matteo et al., 1997; Ford et al., 1994; Harms et al., 1994). In dieser Arbeit sollen aber nur Schwarze Löcher mit $10^6 M_{\odot}$ als Zentralobjekte in AGN betrachtet werden. Wenn die supermassiven Schwarzen Löcher nicht bereits zu Beginn in den Galaxien vorhanden waren, müssen sie ihre Massen im Laufe der Zeit erst akkretiert haben und damit früher entsprechend erheblich masseärmer gewesen sein. Diese "jungen" Schwarzen Löcher hatten dann auch die Chance, selbstgravitierende Akkretionsscheiben um sich zu bilden. Heutige supermassive Scheiben in AGN werden kaum die Massen ihrer Zentralobjekte erreichen – zumindest nicht im Bereich von wenigen pc um das Zentrum, in dem die Scheibe nach Sanders et al. (1989) noch symmetrisch zur Mittelebene und nicht gewarpt ist. Zudem sind solche massearmen Schwarzen Löcher auch nicht ungewöhnlich: die Milchstraße selbst beherbergt ein Zentralobjekt in diesem Massenbereich (Genzel et al., 1997). Für die protoplanetaren Scheiben werden Zentralmassen zwischen 1 und $2.5 M_{\odot}$ betrachtet, also T Tauri-Sterne, deren Massen zwischen denen Brauner Zwerge ($0.08 M_{\odot}$) und etwa $2 M_{\odot}$ liegen (Bertout, 1989; Herbig, 1962; Joy, 1945), und massearme Herbig Ae/Be-Sterne, deren Massen oberhalb von $2 M_{\odot}$ liegen (Herbig, 1960). Wieder wird es für diese masseärmeren Sterne einfacher sein, selbstgravitierende Scheiben zu bilden, was der Grund für die getroffene Wahl ist.

Für die Temperatur der umgebenden Molekülwolke wird im Falle von AGN warmes Gas mit $T_W = 150$ K angenommen (Rodríguez-Fernández et al., 2000). Die genaue Wahl der Umgebungstemperatur ist bei Akkretionsscheiben in AGN unbedeutend, da diese Scheiben ausgesprochen hohe Temperaturen haben und der Einfluß von T_W vernachlässigbar ist. Bei protoplanetaren Scheiben liegt die Umgebungstemperatur zumindest in den frühen Phasen der Akkretion höher als in den mit etwa 10 K recht kühlen, weiter entfernten Bereichen der Wolke, da das Material aufgrund des Kollapses potentielle Energie u.a. auch in thermische Energie des einfallenden Materials umwandelt. Untersuchungen der Temperatur in den dichtesten Gebieten von Molekülwolken – den Geburtsstätten der Sterne – haben gezeigt, daß hier Temperaturen bis zu 100 K auftreten können (Chandler & Richter, 1999; Hartmann, 1998; Solomon & Sanders, 1985; Torrelles et al., 1983). Der für protoplanetare Akkretionsscheiben gewählte Temperaturbereich ist in dieser Arbeit daher 20 – 100 K.

Die Dichte der interstellaren Materie in Galaxienkernen liegt im Bereich von etwa 10^3 oder mehr Atomen/Molekülen pro cm^3 . So sind insbesondere Molekülwolken in der Nähe galaktischer Zentren erheblich dichter und auch heißer als diejenigen außerhalb des Zentrums (Rodríguez-Fernández et al., 2000). Dieser

Parameter	AGN-Scheiben	protostellare Scheiben
\dot{m} [$M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$]	0.1 ... 100	$10^{-7} \dots 10^{-5}$
β (α)	$10^{-2} \dots 10^{-3}$ (10^{-1})	$10^{-2} \dots 10^{-3}$ (10^{-2})
M_* [M_{\odot}]	$10^6, 10^7$	1 – 2.5
T_W [K]	150	20 – 100
n_W [cm^{-3}]	10^3	$10^3 \dots 10^6$
μ	0.615	$\frac{7}{3}$
χ	1, 2	1, 2
r_a	$10^5 R_S$	100 AU
r_i	$3 R_S$	$2 R_{\odot}$
r_0	$2.9 R_S$	$1.9 R_{\odot}$

Tabelle 3.1: In dieser Arbeit verwendete Werte(bereiche) für die vorliegenden Parameter. Der Wert für den Viskositätsparameter α wird nur bei NSG-Scheiben verwendet, für selbstgravitierende Scheiben erhält man aus (3.5) ein geeignetes α .

Wert soll auch als Parameter für die Umgebungsdichte in AGN verwendet werden. Wie schon bei der Temperatur des umgebenden Materials ist auch die genaue Wahl der Dichte nicht so kritisch, da die Dichte der Akkretionsscheiben diejenige der Umgebung erheblich übersteigt. Die benötigte Raumdichte erhält man dann aus der Zahldichte gemäß der Beziehung $\rho_W = \mu m_p n_W$, wobei m_p die Masse des Protons und n_W die Zahldichte in Einheiten von cm^{-3} bezeichnet. Die Dichte von Molekülwolken in Sternentstehungsgebieten liegt bei 10^3 Atomen/Molekülen pro cm^3 und darüber (Hartmann, 1998). In den dichtesten Gebieten dieser Wolken, in denen durch Kontraktion Sterne entstehen, erreicht die Zahldichte Werte bis 10^5 cm^{-3} (Benson & Myers, 1989) und sogar darüber (Plume et al., 1997; Pratap et al., 1997; Lada et al., 1997; Bally & Leventhal, 1991; Mirabel et al.; 1991; Wilson & Walmsley, 1989). In dieser Arbeit wird nach obigen Resultaten ein Dichtebereich von $10^3 - 10^6 \text{ cm}^{-3}$ angesetzt.

Eine genaue temperaturabhängige Berechnung des mittleren Molekulargewichts erscheint wie in 2.2.3.2 beschrieben für die vorliegende Problematik selbstgravitierender Akkretionsscheiben unangemessen. So fällt die Temperatur von Scheiben in AGN über weite Bereiche (einige $10^5 R_S$) kaum unter 10^5 K. Das akkretierte Material ist dann aber zu einem großen Teil vollständig ionisiert und man erhält $\mu = \frac{14}{11}$. Entsprechend sind – abgesehen von den inneren Bereichen – protoplanetare Scheiben eher kalt, und das Material liegt in Form von Molekülen vor; in diesem Fall ist $\mu = \frac{7}{3}$. Die Abweichungen von μ sind dann nur in den inneren Bereichen signifikant, die selbstgravitierenden Bereiche bleiben davon unberührt. Es sollen daher die genannten Werte für das mittlere Molekulargewicht verwendet werden.

Für den Exponent χ des Opazitäts-Potenzgesetzes (A.1) in optisch dünnen Scheiben mit Staub, dessen Durchmesser $10 \mu\text{m}$ nicht überschreitet, werden für beide Scheibentypen die in 2.2.3.1 angegebenen Werte 1 und 2 verwendet.

Der innere Rand der Scheibe ist bei Scheiben um Schwarze Löcher und damit solchen in AGN durch die Allgemeine Relativitätstheorie vorgegeben: innerhalb von 3 Schwarzschildradien sind bei nicht rotierenden Schwarzen Löchern stabile Bahnen um das Zentralobjekt nicht mehr möglich³ (Misner et al., 1973). Der innere Rand der Scheibe ist bei AGN also $r_i = \frac{6GM_*}{c^2}$. Der Radius, an dem die radiale Ableitung der Winkelgeschwindigkeit verschwindet, sei $r_0 = 2.9 R_S$. Die genaue Wahl von r_0 ist wieder unproblematisch, da sie nur die inneren, nicht selbstgravitierenden Bereiche beeinflusst. T Tauri-Sterne haben größere Radien als Hauptreihensterne vergleichbarer Masse. Als Rand der Scheibe wird daher für Sterne aller Massen $r_i = 2R_{\odot}$ gesetzt. Zwar glaubt man heute, daß der innere Rand von Scheiben um T Tauri-Sterne aufgrund ihrer Magnetfelder weiter außen liegt und der Transport der Materie auf den Stern entlang der Magnetfelder erfolgt (Ostriker & Shu, 1995; Königl, 1991; Camenzind, 1990). Jedoch beziehen sich diese Vorstellungen schon auf eine "post"-protostellare Phase der Sternentwicklung. Es ist unwahrscheinlich, daß sich bei hohen Massenakkretionsraten bereits starke Magnetfelder ausbilden konnten, so daß hier $r_i = 2R_{\odot}$ nicht ungerechtfertigt erscheint. Der Radius r_0 wird dann auf $1.9R_{\odot}$ gesetzt. Wieder ist diese Wahl eher willkürlich, für die Resultate der hier durchgeführten Simulationen aber eher unbedeutend.

³Dieses Resultat erhält man aus der Lösung der Schwarzschild-Metrik. Bei rotierenden Schwarzen Löchern muß man aber die Kerr-Metrik anwenden; dies führt zu einem von dem spezifischen Drehimpuls des Schwarzen Lochs abhängenden kleinsten Abstand, für den noch stabile Bahnen möglich sind. Dieser Abstand sinkt mit steigendem spezifischen Drehimpuls des Schwarzen Lochs.

Korrekterweise müßte man eigentlich abhängig von der Masse des Protosterns jeweils unterschiedliche mit der Masse (und dem Sternradius) zunehmende Abstände r_i und r_0 betrachten. Der höchste Grad der Selbstgravitation wird aber bei gegebener Massenakkretionsrate bei den masseärmsten Sternen erreicht. Da die genauen Werte von r_i und r_0 wie schon mehrfach erwähnt für die Resultate der selbstgravitierenden Bereiche der Akkretionsscheiben aber belanglos sind, wurde aus Gründen der Einfachheit ein für alle Scheiben gleicher Wert angenommen.

Als äußerer Rand der Scheibe wird bei Akkretionsscheiben in AGN der Wert $10^5 R_S$ verwendet, wobei $R_S = \frac{2GM_*}{c^2}$ der Schwarzschild-Radius des zentralen Schwarzen Lochs ist. Das entspricht im AGN-Modell von Sanders et al. (1989) dem Bereich, in dem die Scheibe noch symmetrisch zur Mittelebene ist. Weiter außen ist sie dann gewarpt und durch das hier angegebene Gleichungssystem nicht mehr beschreibbar. Bei protoplanetaren Scheiben zeigen die Beobachtungen, daß die Scheiben äußere Ränder von etwa 100 AU besitzen (Dutrey et al., 1996; Kitamura et al., 1996; Lay et al.; 1995), sieht man einmal von der mit etlichen 100 AU ungewöhnlich großen Scheibe von β Pictoris (Lagrange et al., 2000; Smith & Terrile, 1984) ab.

In Tabelle 3.1 sind die verwendeten Parameter und die ihnen zugeordneten Werte(bereiche) noch einmal zusammenfassend aufgeführt.

4 Ergebnisse

4.1 Akkretionsscheiben in AGN

Zunächst sollen die Ergebnisse für Akkretionsscheiben in aktiven galaktischen Kernen dargestellt werden. Dazu wurden Simulationen für Scheiben um zentrale Schwarze Löcher der Massen 10^6 und $10^7 M_\odot$ durchgeführt. Die Massenakkretionsraten wurden gleich 0.1, 1, 10 und $100 M_\odot \text{ yr}^{-1}$ gesetzt. Alle Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Umgebung mit der Zahldichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ gesetzt. Der Viskositätsparameter β wurde zwischen 10^{-3} und 10^{-2} variiert, α ist für alle entsprechenden Scheiben gleich 0.1. Ferner wurde $\chi = 2$ gesetzt.

In Tabelle 4.1 sind die Abstände vom Zentrum für diese Scheiben angegeben, bei denen sie Keplersch oder voll selbstgravitierend werden. Zusätzlich sind für β -Scheiben die Radien angegeben, an denen die Turbulenzgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit überschreitet und die δ -Viskosität (2.38) an die Stelle der β -Parametrisierung treten muß. In einem solchen Fall wird für δ der Wert 0.999 verwendet, die Scheiben bleiben in diesem Fall marginal subsonisch. Da für alle α -Scheiben $\alpha \equiv 0.1$ gewählt wurde, unterscheiden sich diese Scheiben für $\beta = 10^{-3}$ und $\beta = 10^{-2}$ natürlich nicht.

Zunächst erkennt man in Tabelle 4.1, daß der Abstand, an dem die β -Viskosität zu supersonischen Turbulenzgeschwindigkeiten führen würde, und an denen aus diesem Grund die δ -Viskosität als geeignetere Beschreibung verwendet wird, mit zunehmender Massenakkretionsrate und daher mit anwachsendem Grad der Selbstgravitation immer weiter nach außen wandert. Wie von Duschl et al. (2000) erwartet, gibt es also nicht-selbstgravitierende, subsonische Bereiche in Akkretionsscheiben, in denen die β -Viskosität eine adäquate Alternative zur α -Parametrisierung ist.

In Tabelle 4.1 fällt sofort auf, daß β - und α -Scheiben sich mit zunehmender Massenakkretionsrate vollkommen unterschiedlich verhalten. So steigt der Grad der Selbstgravitation in β -Scheiben, wie zu erwarten, mit zunehmender Massenakkretionsrate an: zwar wird keine der β -Scheiben innerhalb von 10^5

$\dot{m} [M_\odot/\text{yr}]$	β	10^{-3}						10^{-2}					
		$10^{-6} M_\odot$			$10^{-7} M_\odot$			$10^{-6} M_\odot$			$10^{-7} M_\odot$		
	Typ	δ	KSG	FSG	δ	KSG	FSG	δ	KSG	FSG	δ	KSG	FSG
		ab $r [10^3 R_S]$	ab $r [10^3 R_S]$			ab $r [10^3 R_S]$			ab $r [10^3 R_S]$			ab $r [10^3 R_S]$	
0.1	β	0.6	–	–	0.0	–	–	0.2	–	–	0.0	–	–
	α	#	20.9	–	‡	‡	‡	#	20.9	–	‡	‡	‡
1	β	7.5	–	–	0.6	–	–	2.0	–	–	0.2	–	–
	α	#	–	–	‡	‡	‡	#	–	–	‡	‡	‡
10	β	–	37.7	–	6.7	12.1	–	21.0	57.3	–	2.0	12.4	–
	α	#	–	–	#	–	–	#	–	–	#	–	–
100	β	–	34.3	–	21.8	13.8	–	–	87.0	–	19.7	–	–
	α	#	–	–	#	–	–	#	–	–	#	–	–

α -Scheiben können per Konstruktion keine supersonischen Turbulenzgeschwindigkeiten erzeugen, deshalb muß nicht auf die δ -Viskosität umgeschaltet werden.

‡ für diese Scheiben konnten keine selbstkonsistenten Lösungen gefunden werden (siehe Text)

Tabelle 4.1: Die Radien, an denen die Akkretionsscheiben Keplersch oder voll selbstgravitierend bzw. bei denen β -Scheiben supersonisch werden und deshalb auf die δ -Viskosität (2.38) umgeschaltet wird (Spalte “ δ ab $r [10^3 R_S]$ ”), als Funktion der Masse des zentralen Schwarzen Lochs, der Massenakkretionsrate und des Viskositätsparameters β , jeweils für β -Scheiben und für α -Scheiben. Die Rechnungen wurden für Scheiben in einer homogenen und isotropen Molekülwolke mit $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und $T_W = 150 \text{ K}$ sowie für $\chi = 2$ und $\alpha = 0.1$ durchgeführt. δ ist gleich 0.999, wenn es verwendet wird.

Schwarzschildradien voll selbstgravitierend, Keplersche Selbstgravitation dagegen wird sehr wohl erreicht. α -Scheiben dagegen sind bei dem gewählten Wert von $\alpha = 0.1$ bereits bei Massenakkretionsraten von $0.1 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ bei einem Zentralobjekt von $10^6 M_{\odot}$ zumindest Keplersch selbstgravitierend, für Zentralmassen von $10^7 M_{\odot}$ liegen bereits FSG-Scheiben vor. Für diese Scheiben steigt die Masse jedes Rings mit dem Radius aber so stark an, daß keine selbstkonsistente Lösungen gefunden werden konnten. Für solche Scheiben ist die vereinigte Gravitationskraft von Zentralobjekt und Scheibe (abgesehen von den innersten Bereichen der Scheibe) nach außen gerichtet, so daß stationäre Lösungen nicht mehr möglich sind. Im nächsten Abschnitt wird dieser Umstand ausführlicher diskutiert werden. Mit zunehmender Massenakkretionsrate werden α -Scheiben nun aber nicht wie β -Scheiben massereicher, sondern vielmehr masseärmer: sie werden ab einer bestimmten Massenakkretionsrate wieder vollständig nicht-selbstgravitierend.

Dieser erstaunliche Unterschied wird im folgenden anhand der Abbildungen 4.1 bis 4.12 diskutiert werden, in denen die Höhe, die Flächendichte, die Zentral- und die Effektivtemperatur, die optische Tiefe sowie das Verhältnis von thermischer zu gravitativer Energiedichte als Funktion des Abstandes vom Zentralobjekt für die in Tabelle 4.1 angegebenen Scheiben dargestellt sind.

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen die Scheibenhöhe der berechneten Scheiben. Für die α -Scheiben mit den Parametern $M_* = 10^6 M_{\odot}$, $\dot{m} \geq 10 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ und $M_* = 10^7 M_{\odot}$, $\dot{m} = 100 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ wurden die Scheiben nicht bis zu einem geringsten Abstand von $10 R_S$ berechnet, da diese Scheiben derart dick sind, daß eine so hohe Auflösung bei α -Scheiben, wie in 3.3 beschrieben, nicht mehr sinnvoll ist. Für β -Scheiben dagegen gilt dies nicht, daher wurden diese Scheiben weiter nach innen gerechnet. Zwei Merkmale dieses Scheibenparameters sind besonders auffällig: erstens zeigen fast alle β -Scheiben mindestens einen Sprung in der Höhe, in der sich diese um bis zu zwei Größenordnungen ändern kann. Diese Sprünge sind auf ein extrem kleines radiales Intervall beschränkt ($\Delta r \leq 10 R_S$) und sollen weiter unten besprochen werden. Auch alle anderen Scheiben, die kein solches Feature zeigen, haben aber weiter außen entsprechende Sprünge. Die zweite Besonderheit der hier abgebildeten Scheiben ist, daß sie mit zunehmender Massenakkretionsrate immer dicker werden, so daß die Annahme geometrisch dünner Akkretionsscheiben massiv verletzt wird. Dies gilt besonders für alle α -Scheiben mit Massenakkretionsraten oberhalb von $1 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$. Aber auch β -Scheiben sind in den inneren Bereichen für die in dieser Arbeit gemachten Annahmen erheblich zu dick. Die Ausdehnung dieses inneren Bereichs wächst mit zunehmender Massenakkretionsrate; alle hier dargestellten β -Scheiben erreichen ab einem gewissen Abstand vom Zentrum aber wieder einen Bereich, in dem die Annahme geometrischer Dünne gut erfüllt ist.

Mit dem starken Anwachsen der Höhe geht bei α -Scheiben ein noch ausgeprägterer Abfall der Flächendichte einher, wie aus den Abbildungen 4.3 und 4.4 zu ersehen ist. Genauso erstaunlich ist das erneute, ebenso starke Anwachsen der Flächendichte für die α -Scheibe mit den Parametern $M_* = 10^6 M_{\odot}$ und $\dot{m} = 100 M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, die mit der verhältnismäßig "geringen" Dicke dieser Scheibe korrespondiert. Auch findet man die bereits bei der Scheibenhöhe festgestellten Sprünge in der Verteilung der Flächendichte wieder. Die Flächendichte folgt auch bei β -Scheiben nicht mehr zwangsläufig dem Potenzgesetz $\Sigma(r) \propto r^{-1/2}$, da die meisten abgebildeten β -Scheiben ab einem gewissen Abstand vom Zentrum aufgrund supersonischer Turbulenzgeschwindigkeiten auf die δ -Parametrisierung der Viskosität umschalten. Diese Scheiben seien trotzdem als β -Scheiben bezeichnet. Mit der Verwendung der δ -Viskosität koppelt aber auch bei β -Scheiben die Drehimpulserhaltung an die Thermodynamik und der Verlauf der Flächendichte wird komplizierter. Zusätzlich gibt es ganz innen Abweichungen vom $r^{-1/2}$ -Profil, da die äquidistante Stützstellenverteilung für diese Bereiche ungeeignet ist.

Die in der Scheibenhöhe und der Flächendichte gefundenen starken Unterschiede sind in der Verteilung der Zentraltemperaturen, die in den Abbildungen 4.5 und 4.6 dargestellt sind, nicht zu erkennen, nur die Sprünge erscheinen auch hier. Die Effektivtemperaturen sind natürlich jeweils für α - und β -Scheiben identisch, da alle Scheiben ein Keplersches Winkelgeschwindigkeitsprofil haben. Die Effektivtemperatur nimmt dann nur mit zunehmender Massenakkretionsrate und zunehmender Zentralmasse zu. Die scheinbare Abnahme der Effektivtemperatur in den Abbildungen 4.7 und 4.8 mit zunehmender Massenakkretionsrate ist natürlich nur darauf zurückzuführen, daß der Radius in Einheiten des Schwarzschildradius angegeben ist; die Diagramme auf der rechten Seite sind physikalisch also zehnfach weiter ausgedehnt. Gleiches gilt natürlich auch für die Zentraltemperatur selbst.

In den Abbildungen 4.9 und 4.10 sind die optischen Tiefen der hier berechneten Scheiben dargestellt. Bis zu dem eventuell auftauchenden Sprung sind die relevanten Beiträge der Opazität zur optischen Tiefe die der Elektronenstreuung und der g - und f -Streuung. Die optische Tiefe bleibt bei β -Scheiben bis zum Sprung nahezu konstant und auf einem sehr hohen Level: diese Bereiche der Scheiben sind optisch

extrem dick, wobei die optische Tiefe mit der Massenakkretionsrate anwächst. Beim Sprung selbst dann werden die Scheiben schlagartig optisch dünn. α -Scheiben dagegen sind, sieht man von der Scheibe mit $M_* = 10^6 M_\odot$ und $\dot{m} = 100 M_\odot \text{ yr}^{-1}$ ab, in der auch die Flächendichte viel größer ist als in den anderen α -Scheiben, im wesentlichen optisch dünn, was aufgrund der großen Höhe und der geringen Flächendichte auch zu erwarten war.

Der Grund für alle diese Abweichungen von der Theorie der Standardakkretionsscheiben wird verständlich, wenn man das Verhältnis von thermischer und gravitativer Energiedichte in diesen Scheiben betrachtet. Diese Verhältnisse sind in den Abbildungen 4.11 und 4.12 dargestellt. Insbesondere zeigen alle α -Scheiben mit der bekannten Ausnahme ($M_* = 10^6 M_\odot$, $\dot{m} = 100 M_\odot \text{ yr}^{-1}$), daß die thermische Energiedichte in diesen Scheiben erheblich größer ist als die gravitative. Aber auch in den inneren Bereichen von β -Scheiben, in denen ebenfalls die Annahme geometrischer Dünne verletzt ist, übersteigt die thermische Energiedichte die gravitative erheblich. Damit bricht aber eine wichtige Näherung für das hier vorgestellte Scheibenmodell zusammen (siehe 2.2.2.4).

Scheiben, deren thermische Energiedichte nicht vernachlässigbar gegenüber der gravitativen ist, werden als ADAF-Scheiben (für *advection dominated accretion flow*) bezeichnet. Man unterscheidet hier zwei Typen von ADAF-Scheiben. Bei super-Eddingtonscher Massenakkretionsrate¹ ist die optische Tiefe in den Scheiben so hoch, daß die Strahlung diese nicht verlassen kann und mit der Bewegung der Materie nach innen geführt, also advektiert, wird. Diese Scheiben bezeichnet man als optisch dicke ADAF-Scheiben, ihre Theorie wurde von Katz (1977), Begelman (1978) und Abramowicz et al. (1988) ausgearbeitet. Der zweite Typ von ADAF-Scheiben tritt bei Massenakkretionsraten auf, die unterhalb der Eddington-Grenze liegen. Hier kann das Gas aufgrund seiner sehr geringen Dichte nicht ausreichend schnell kühlen, da der Energieaustausch zwischen Ionen und Elektronen nur sehr langsam abläuft. Auch in diesem Fall wird die Strahlung dann nach innen advektiert, bevor die Materie die durch viskose Reibung freigesetzte Energie lokal abstrahlen kann. Man bezeichnet diesen Scheibentyp daher auch als optisch dünne ADAF-Scheiben. Sie wurden erstmals von Ichimaru (1977) beschrieben und später dann erneut von Rees et al. (1982), Narayan & Yi (1995a, 1995b, 1994) und Abramowicz et al. (1995) ausgearbeitet. In beiden ADAF-Typen kann man die radiale Geschwindigkeitskomponente und die radialen Druckgradientkraft nicht vernachlässigen. Außerdem muß man in horizontaler Richtung den advektiven Energiefluß bei der Energieerhaltung berücksichtigen.

Die Eddington-Leuchtkraft für die hier behandelten Objekte beträgt $L_{\text{Edd}} \approx 1.3 \cdot 10^{38} (M_*/M_\odot) \text{ erg s}^{-1}$ (Frank et al., 1992), also $1.3 \cdot 10^{44} \text{ erg s}^{-1}$ bzw. $1.3 \cdot 10^{45} \text{ erg s}^{-1}$ für Scheiben um Zentralmassen von 10^6 und $10^7 M_\odot$. Die kritischen Massenakkretionsraten für diese Leuchtkräfte berechnen sich gemäß $\dot{m}_{\text{Edd}} = L_{\text{Edd}}/\eta c^2$, wobei $\eta \approx 0.1$ die Effizienz bei der Umwandlung von Ruhemasse in Energie angibt. Kritische Massenakkretionsraten sind also $10^{24} \text{ g s}^{-1} \approx 0.1 M_\odot \text{ yr}^{-1}$ für ein Schwarzes Loch von $10^6 M_\odot$ und $10^{25} \text{ g s}^{-1} \approx 1 M_\odot \text{ yr}^{-1}$ für ein solches mit $10^7 M_\odot$. Genau für α -Scheiben mit diesen Massenakkretionsraten findet man aber das plötzliche Ansteigen der Höhe, den rapiden Abfall in der Flächendichte und die daraus folgende Verringerung der optischen Tiefe. Eine korrekte Behandlung dieser Scheiben setzt also die Theorie für ADAF-Scheiben voraus und kann daher hier nicht erfolgen.

Da die hier verwendeten Massenakkretionsraten super-Eddingtonsch sind, sollte man erwarten, daß die Scheiben optisch dick sind, wie es bei β -Scheiben auch der Fall ist. α -Scheiben dagegen weisen sehr geringe Dichten auf und sind daher optisch dünn. Dieses Versagen der α -Beschreibung ist zwar in seiner Deutlichkeit etwas überraschend, da aber zwei wichtige Annahmen der Theorie massiv verletzt sind, kann aus den Lösungen nur geschlossen werden, daß sie inkonsistent mit den Annahmen sind. Einzig der Grund für diese Inkonsistenz ist ersichtlich. Die für diese Scheibenbereiche korrekten ADAF-Modelle werden dann in ihren Eigenschaften erheblich von denjenigen der α -Scheiben abweichen. Auch diejenigen Bereiche bei β -Scheiben, in denen die thermische Energiedichte nicht vernachlässigbar klein gegen die gravitative Energiedichte ist, dürfen, obwohl sie ADAF-Scheiben in ihren Konsequenzen viel ähnlicher sehen, nicht als korrekt betrachtet werden, da sie die Annahmen der Theorie, aus der sie hervorgegangen sind, verletzen. Diese Scheiben werden aber anders als α -Scheiben weiter außen wieder dünn; gleichzeitig übersteigt dann auch die gravitative Energiedichte wieder die thermische, und die Scheibenlösungen in diesem Bereich sind eine zutreffende Beschreibung solcher Akkretionsscheiben.

¹Die allein durch Akkretion in einem Zentralpotential GM_*/R_* freigesetzte Leuchtkraft ist gerade $L = |d\Delta E_{\text{pot}}/dt| \approx GM_*\dot{m}/R_*$. Als Eddington-Limit L_{Edd} der Leuchtkraft wird derjenige Wert bezeichnet, für den sich der Strahlungsdruck und die Gravitationskraft gerade die Waage halten, wobei sphärische Abstrahlung und vollständig ionisierte Materie angenommen wird. Die Eddingtonsche Massenakkretionsrate ist dann gerade diejenige, die zu der Leuchtkraft L_{Edd} führt.

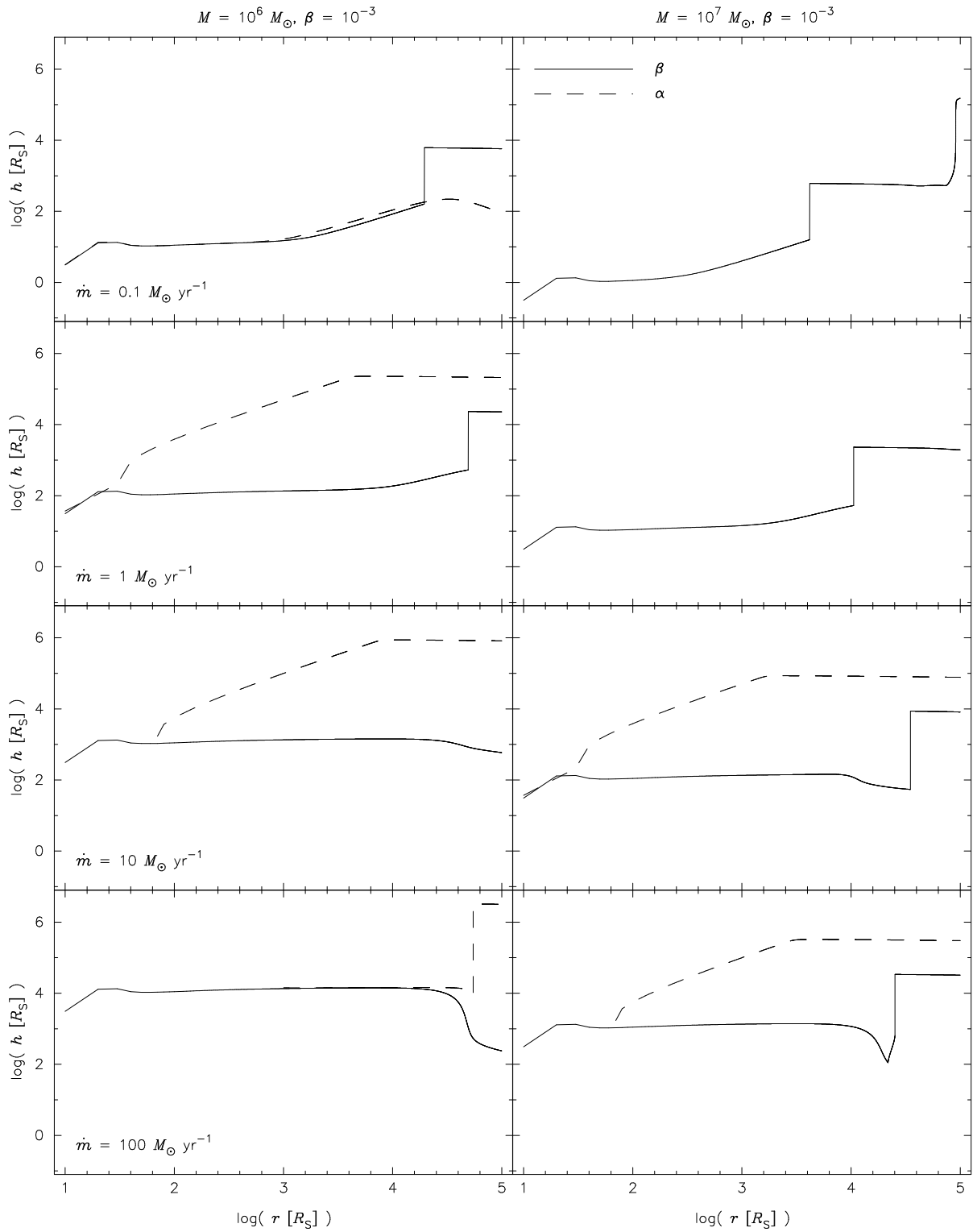


Abbildung 4.1: Die Höhe als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_\odot$, rechts für solche von $10^7 M_\odot$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

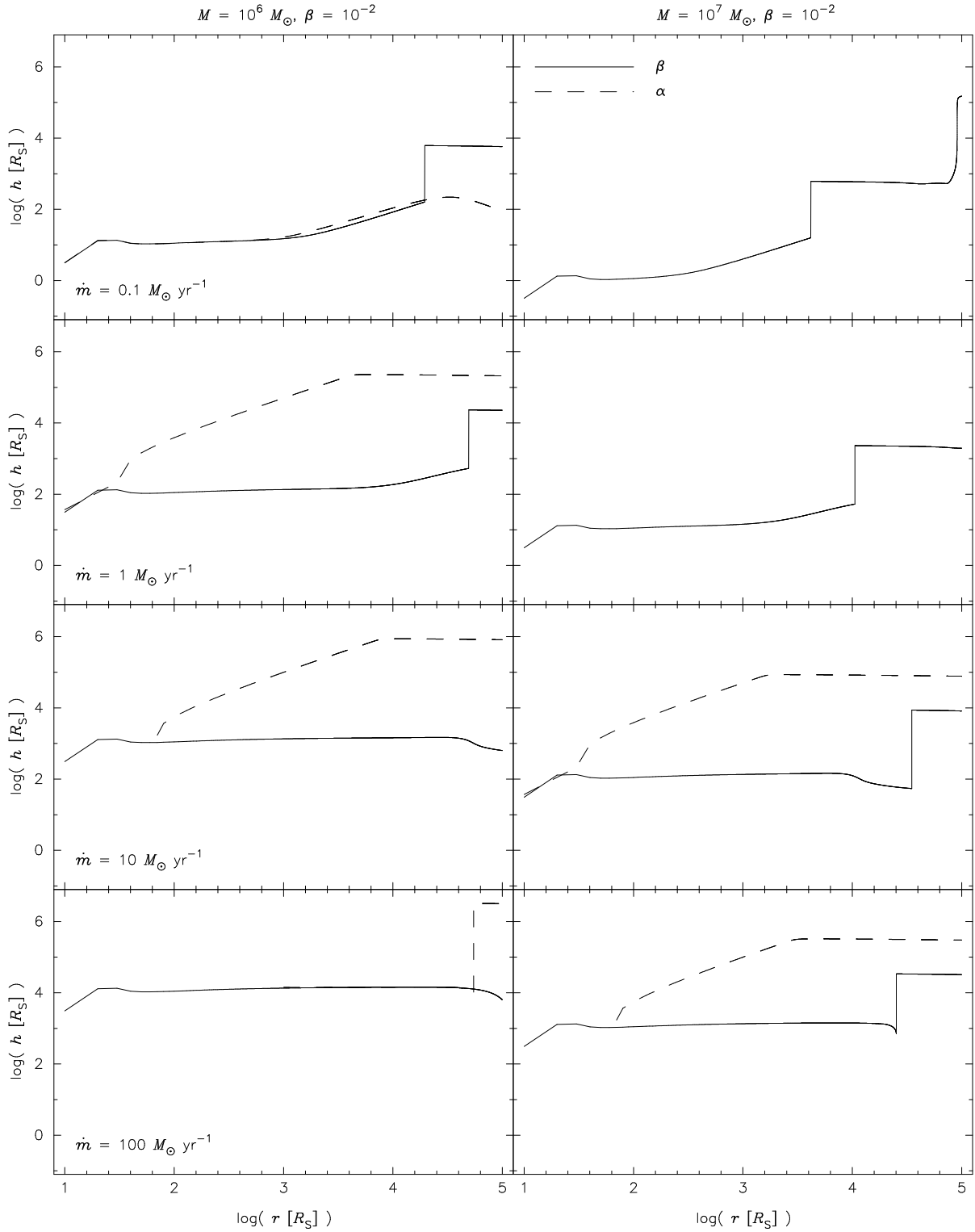


Abbildung 4.2: Die Höhe als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

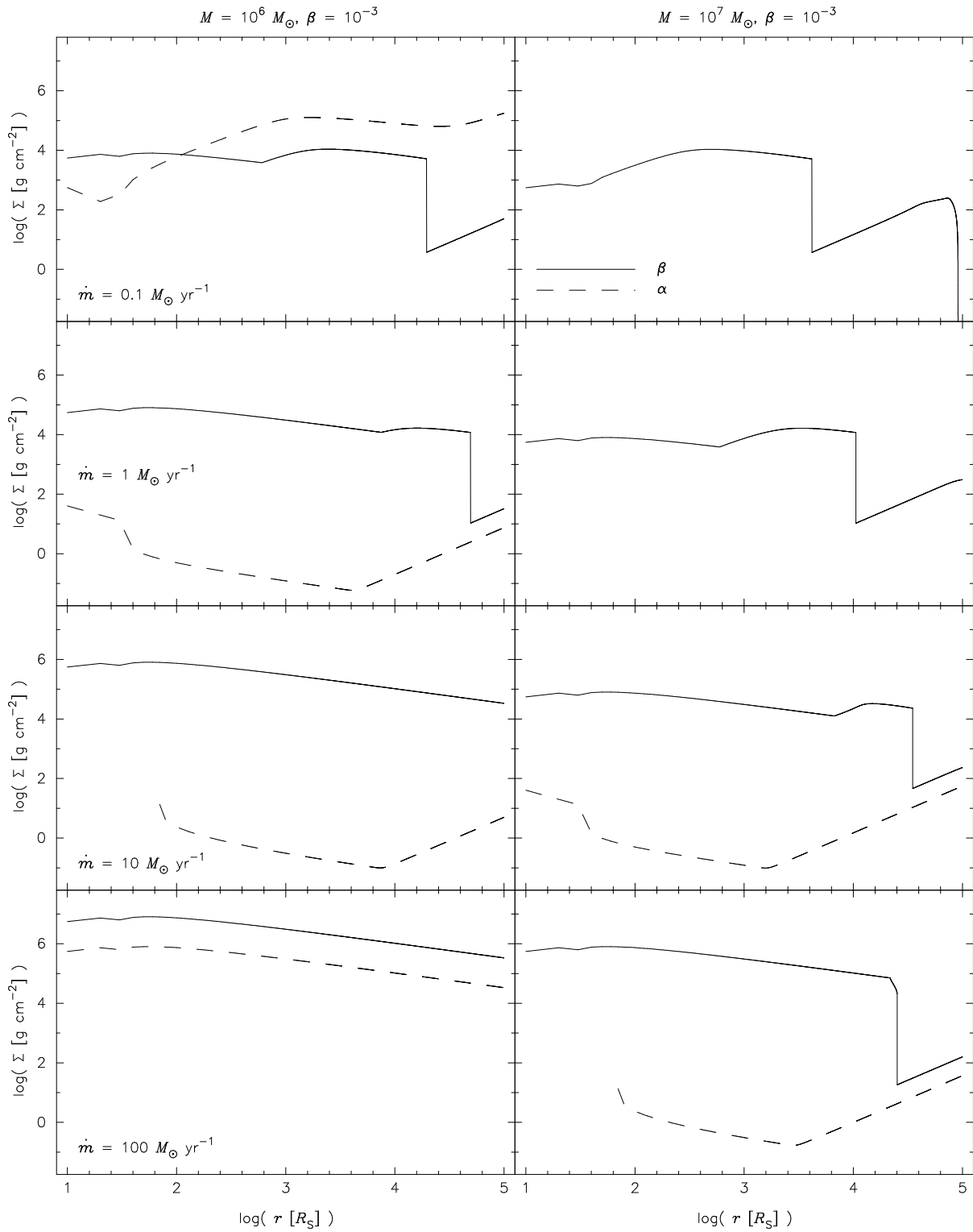


Abbildung 4.3: Die Flächendichte als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

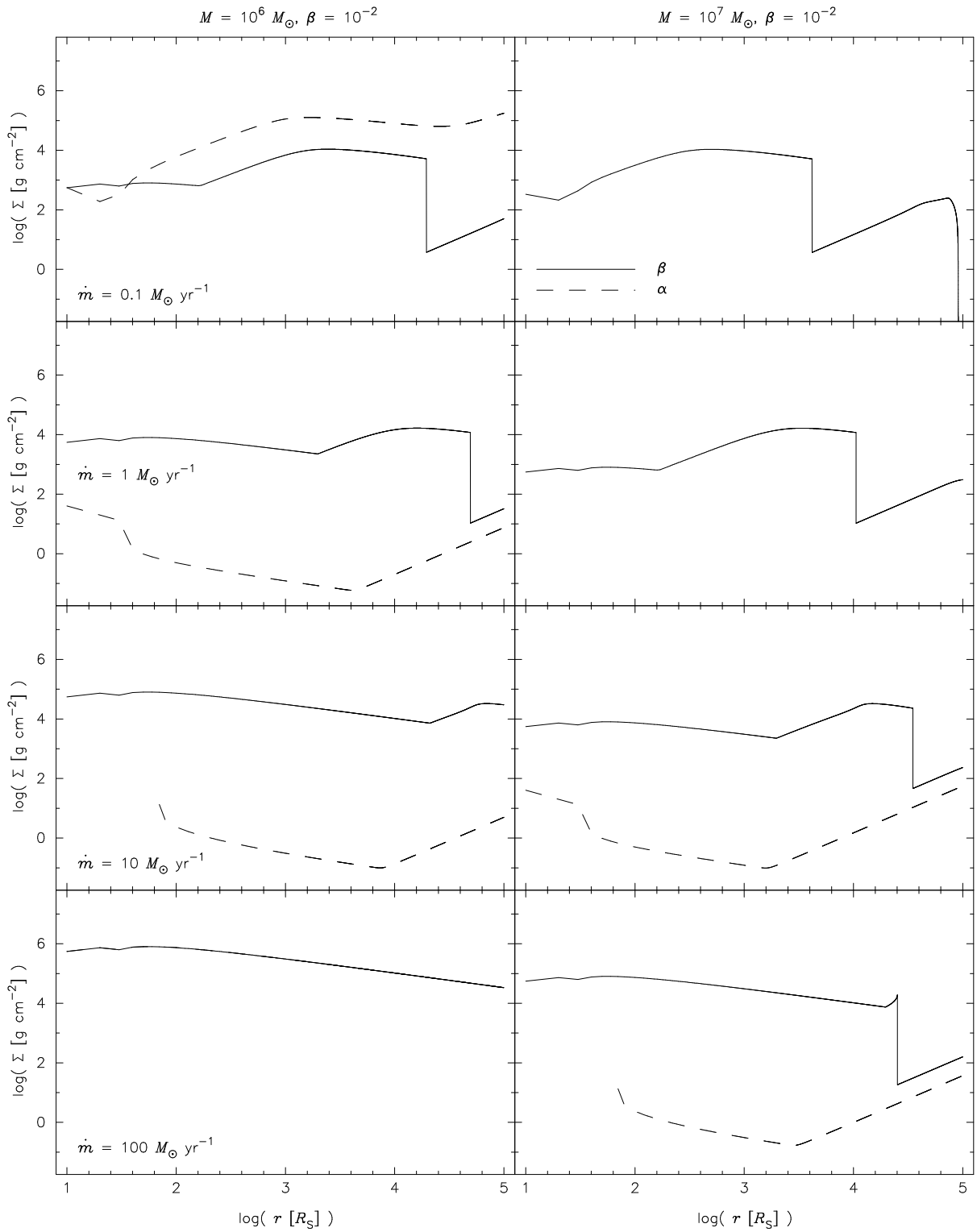


Abbildung 4.4: Die Flächendichte als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

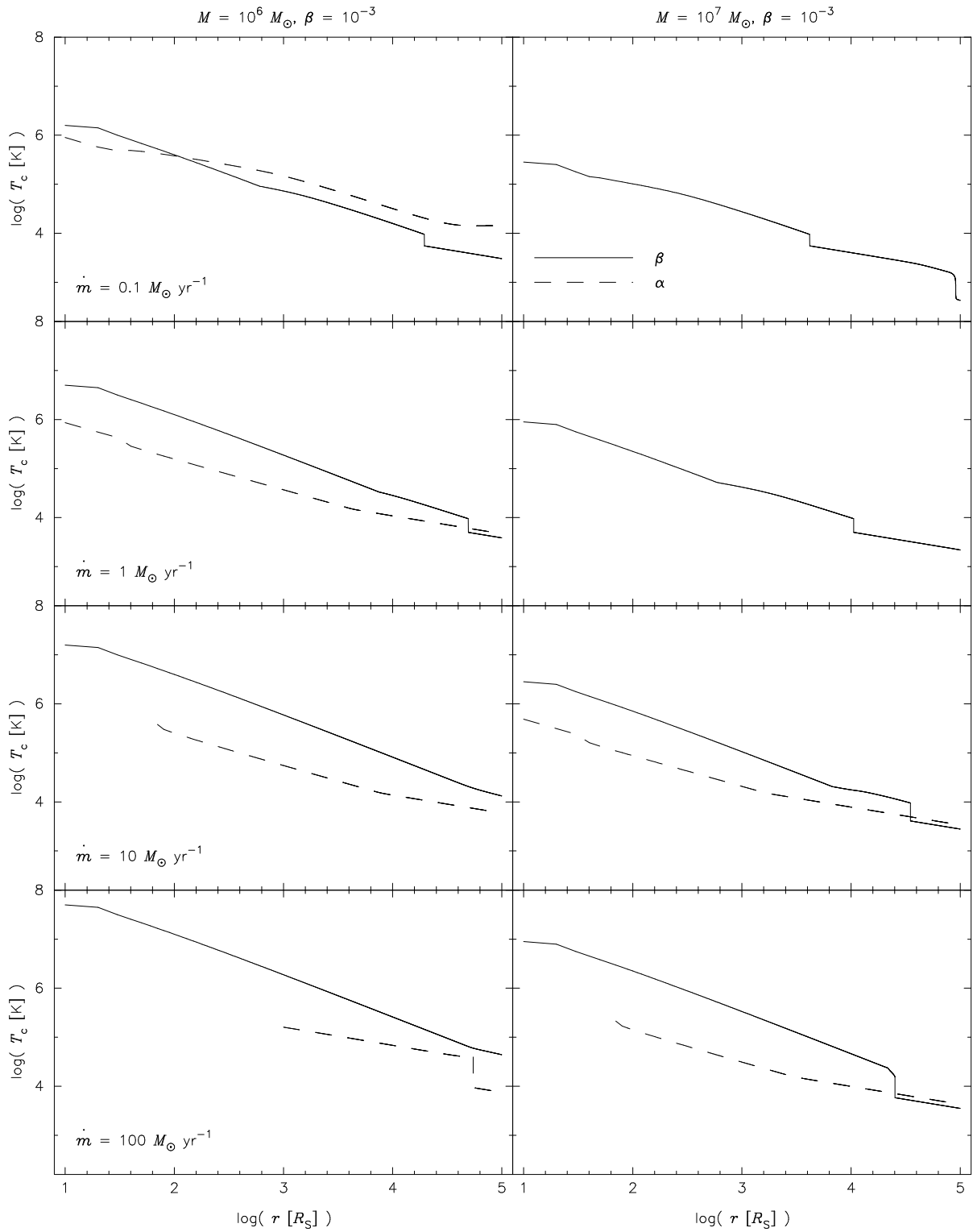


Abbildung 4.5: Die Zentraltemperatur als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

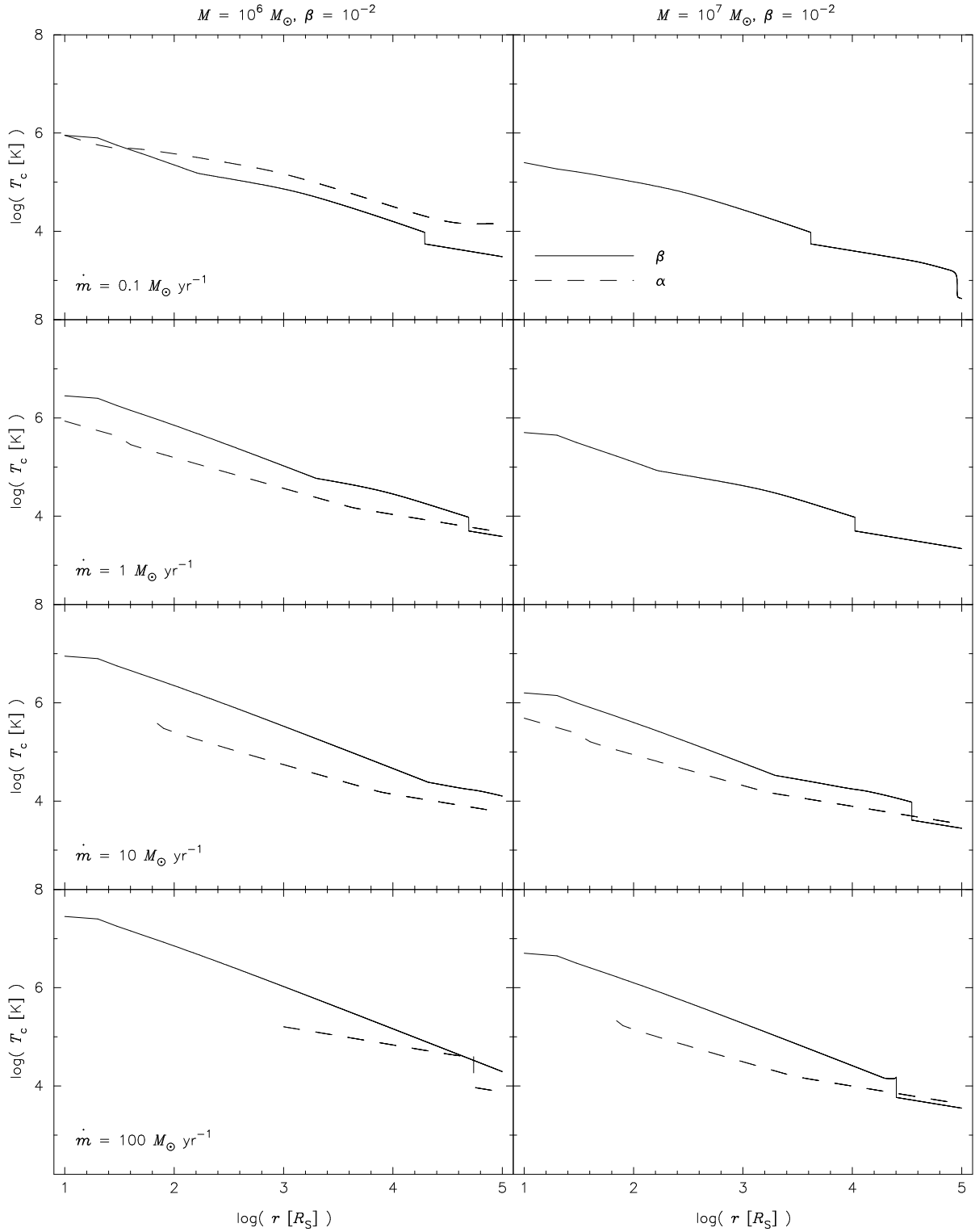


Abbildung 4.6: Die Zentraltemperatur als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

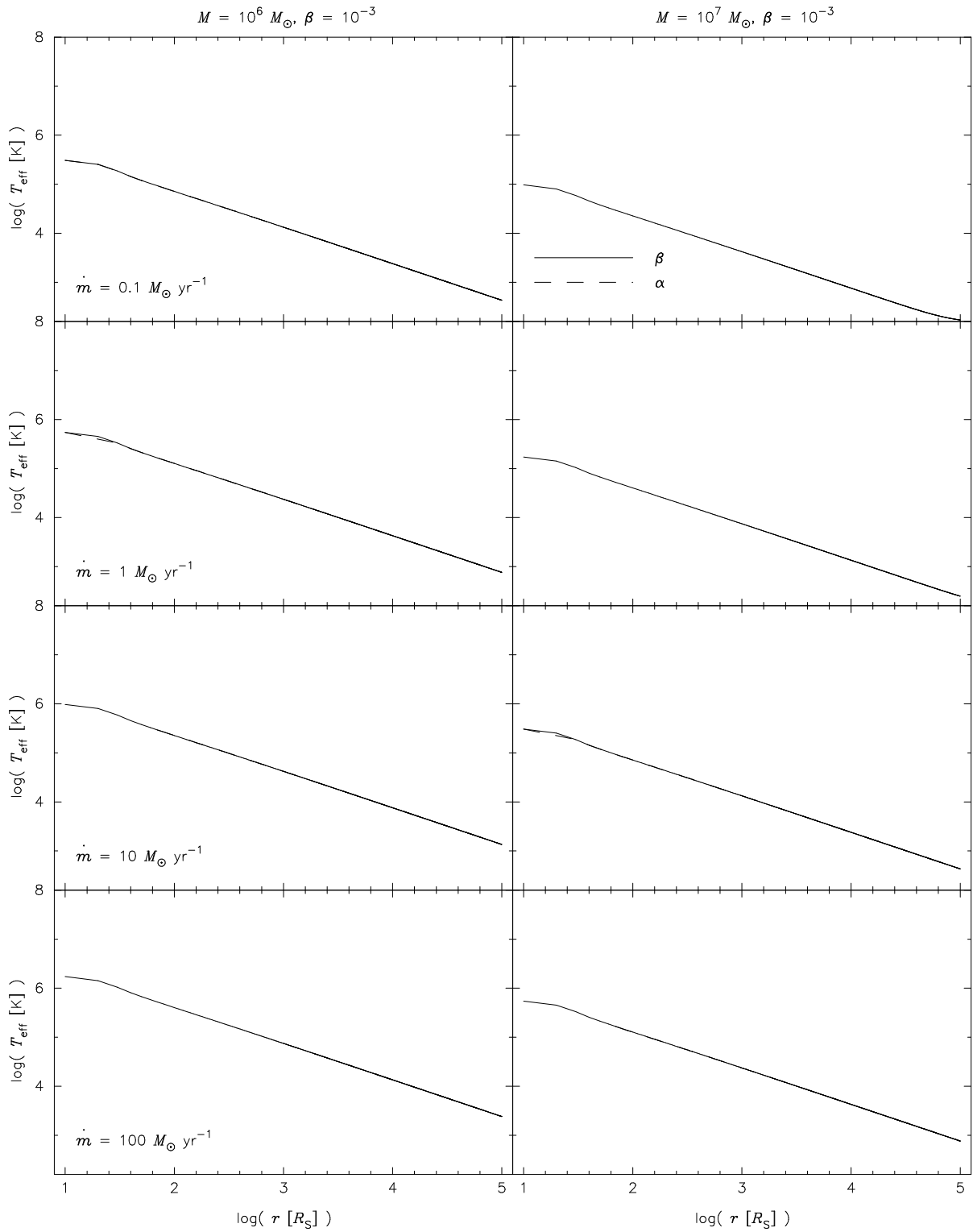


Abbildung 4.7: Die Effektivtemperatur als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

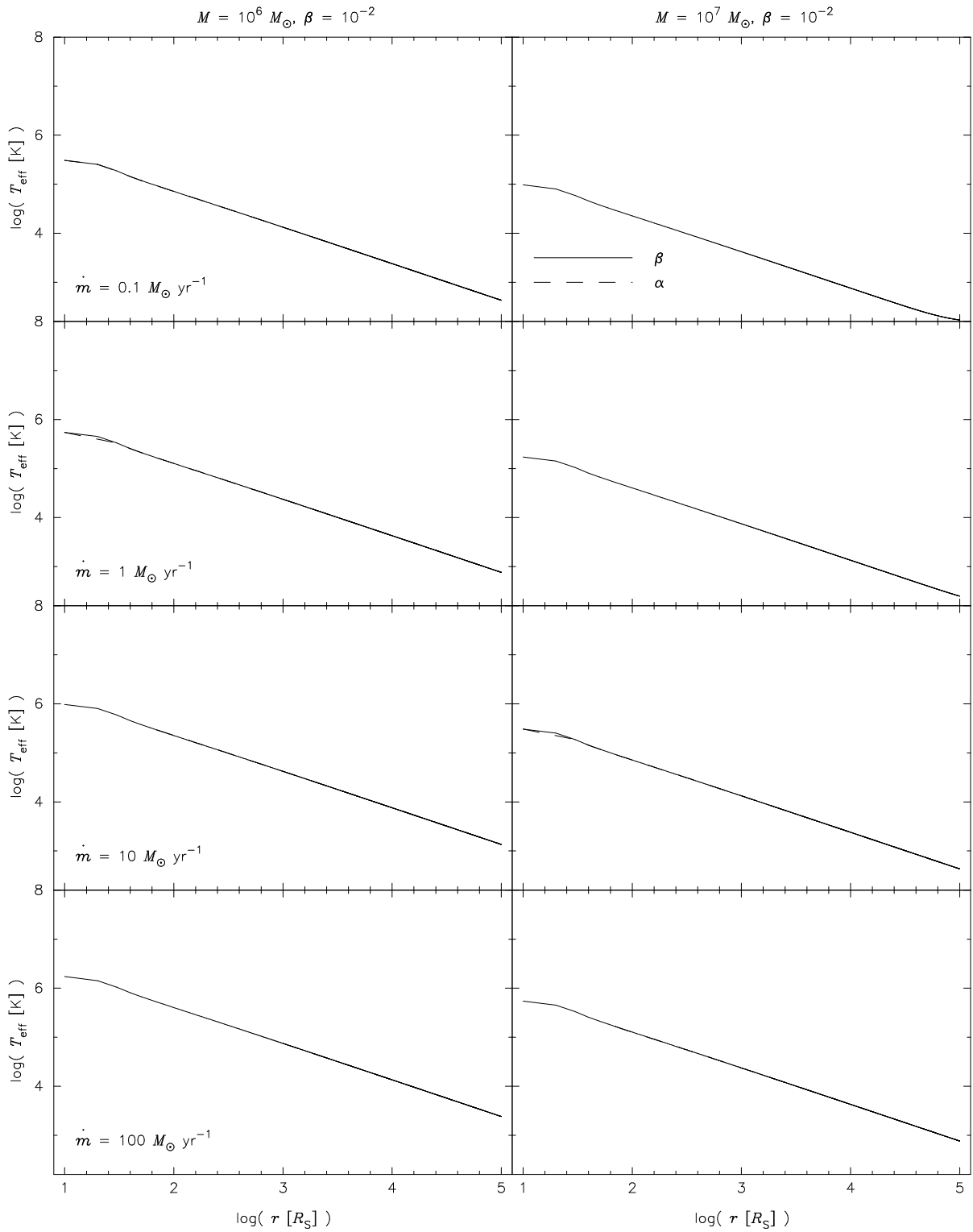


Abbildung 4.8: Die Effektivtemperatur als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

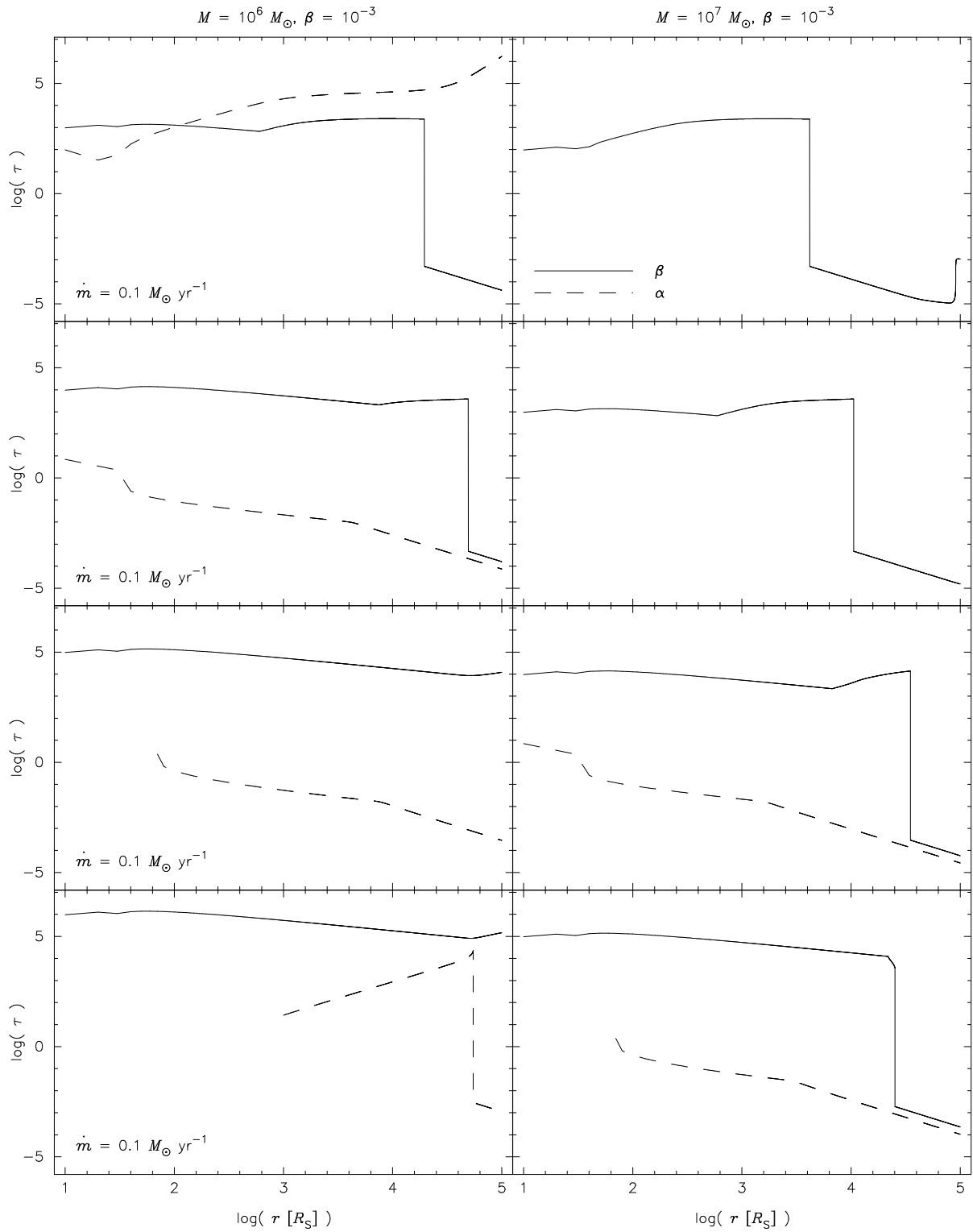


Abbildung 4.9: Die optische Tiefe als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

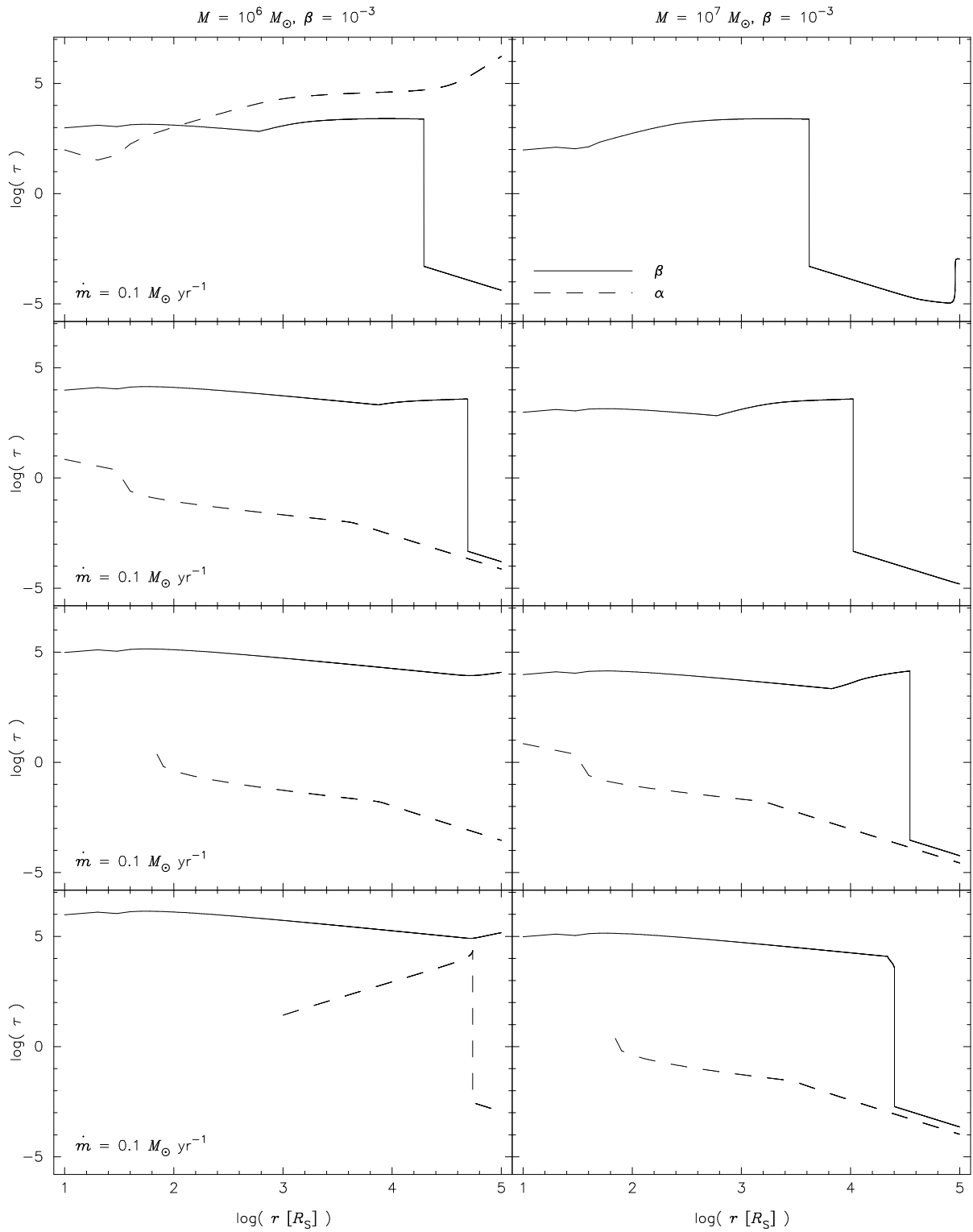


Abbildung 4.10: Die optische Tiefe als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

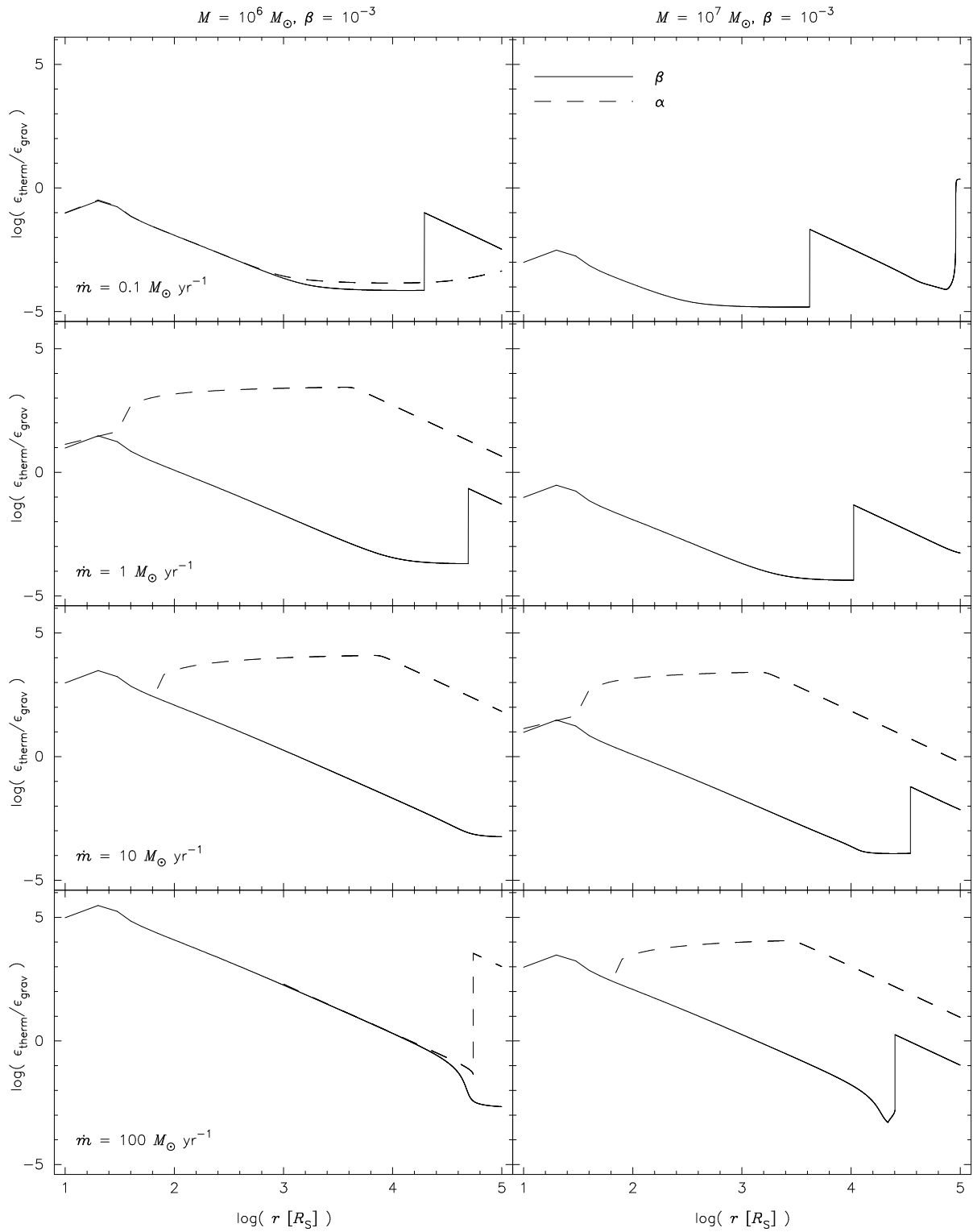


Abbildung 4.11: Das Verhältnis von thermischer zu gravitativer Energiedichte als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

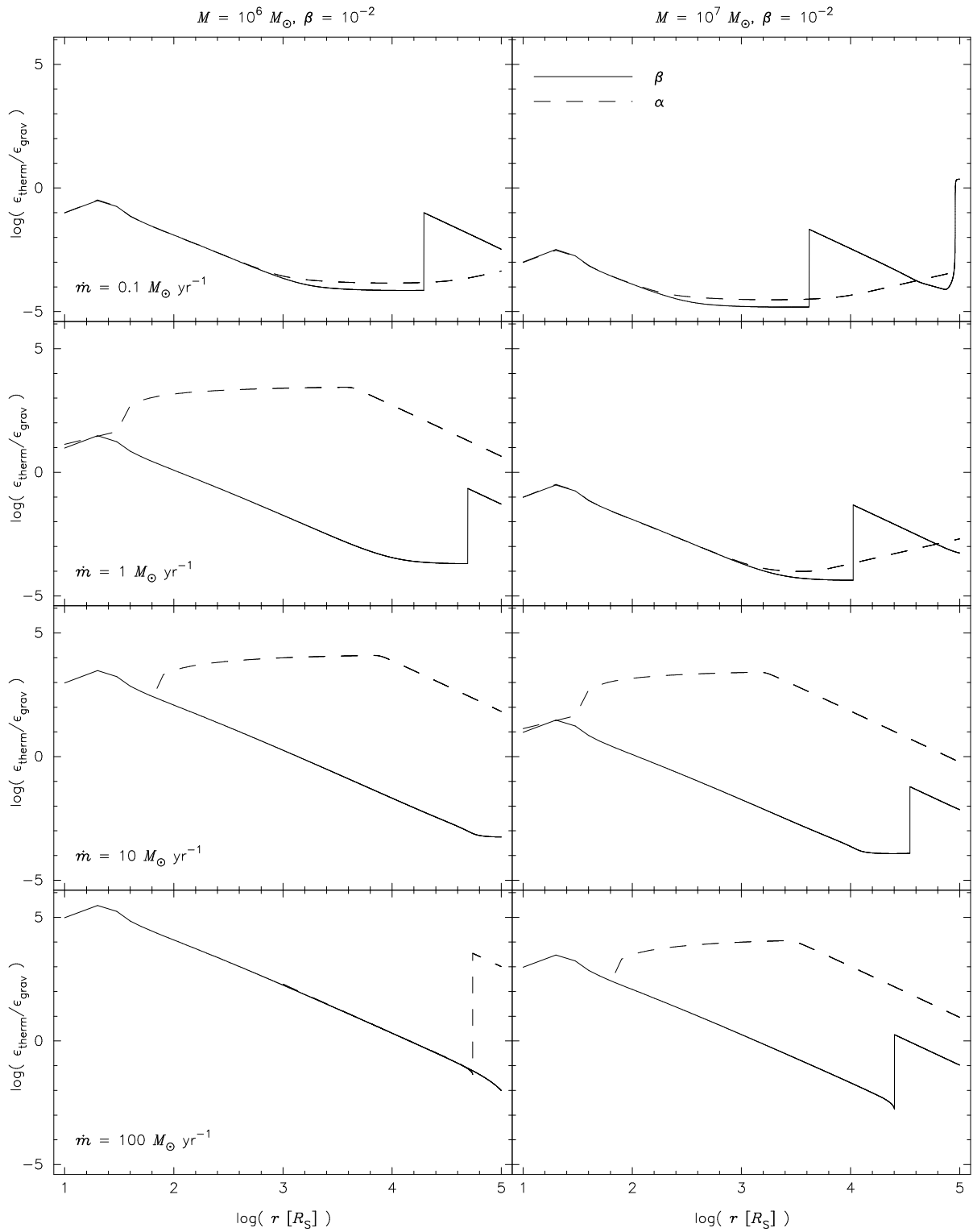


Abbildung 4.12: Das Verhältnis von thermischer zu gravitativer Energiedichte als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 150 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für β -Scheiben (durchgezogen) und α -Scheiben (gestrichelt), links für Zentralmassen von $10^6 M_{\odot}$, rechts für solche von $10^7 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

Es ist bekannt, daß ADAF-Scheiben konvektions-instabil werden können. Solche CDAF-Scheiben (für *convection dominated accretion flow*) sind ebenfalls in der Lage, Energie in radialer Richtung zu transportieren, bevor diese lokal dort abgestrahlt werden kann, wo sie durch Reibung freigesetzt wurde. Diese Scheiben stellen daher ebenfalls einen Ausweg aus dem oben beschriebenen Problem dar.

Im folgenden soll auf die schon mehrfach erwähnten Sprünge in der Höhe, der Flächendichte (bei α - und δ -Scheiben), der Temperatur und der optischen Tiefe eingegangen werden. Der erste, innerste Sprung wird von dem starken Abfall der Opazität beim Einsetzen der H^- -Absorption verursacht, in der sich die Opazität um mehrere Größenordnungen ändert. Dieser Abfall erfolgte bei den hier durchgeführten Rechnungen in einem extrem kleinen radialen Intervall (≤ 10 Schwarzschildradien). In diesem Intervall ändert sich die Temperatur um eine Größenordnung, die Flächendichte, Höhe und optische Tiefe variieren sogar um mehrere Größenordnungen. Dies aber muß unweigerlich zu einer Scheibeninstabilität führen. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß für eine korrekte Behandlung dieser in einem stationären Modell gefundenen Instabilität zeitabhängige, zweidimensionale Rechnungen notwendig sind, die diese Zone dann bestätigen müssen. Letzteres ist aber wahrscheinlich, weil die starke Temperaturabhängigkeit der Opazität bei der H^- -Absorption bekanntermaßen zu thermischen Instabilitäten führt (Duschl, 1993). Außerdem dürfte die Änderung der Opazität um mehrere Größenklassen bei gleichzeitiger geringfügiger Änderung der Temperatur und der Dichte eine Instabilität zwangsläufig unvermeidlich machen. Eine zweite Instabilität, die durch die Staubverdampfung verursacht wird, ist in der β -Scheibe mit $M_* = 10^7 M_\odot$ und $\dot{m} = 0.1 M_\odot \text{ yr}^{-1}$ zu erkennen.

Beide Instabilitäten können, wenn sie sich auch bei zeitabhängigen Rechnungen als korrekt erweisen sollten, dazu führen, daß Material in erheblich stärkerem Maß nach innen fällt, als man es aufgrund der radialen Drift in diesen Scheiben erwarten würde. β -Scheiben akkretieren Material aufgrund der veränderten Viskositätsparametrisierung ohnehin in selbstgravitierenden Scheiben (KSG und FSG) schneller als α -Scheiben². Dieser schnellere Einfall kann durch solche Scheibeninstabilitäten zusätzlich – wenn auch nur sporadisch – beschleunigt werden. Auf diese Weise lassen sich die hohen Massen der Schwarzen Löcher in AGN bereits in den frühen Phasen der Galaxienentwicklung erklären, in denen durch Mergingprozesse viel Gas ins Zentrum gestürzt wurde. Wie von Duschl (2001) erwartet, ist so ein zügiges “Füttern” der zentralen Schwarzen Löcher in Quasaren möglich. Dann können aber Schwarze Löcher in sehr kurzer Zeit zu den heute beobachtbaren massiven Exemplaren anwachsen.

Der Einfluß der Selbstgravitation auf Akkretionsscheiben in AGN ist aufgrund der schlechten Statistik selbstkonsistenter Lösungen sicherlich schwierig zu bestimmen. Ein Versuch soll hier trotzdem unternommen werden. Ausgedehntere selbstgravitierende Bereiche für die hier berechneten Scheiben hätte man dadurch erreichen können, daß man den Außenrand r_a der Scheibe vergrößert. Für große Abstände vom Zentrum erwartet man aber zumindest bei dem $10^7 M_\odot$ -Kandidaten Abweichungen von der Symmetrie zur Mittelebene, da die Scheiben weiter außen gewarpt sein können. Die Wirkung der Selbstgravitation soll also anhand der Lösungen beschrieben werden, die – zumindest in den entsprechenden Bereichen – Keplersch selbstgravitierend und selbstkonsistent sind. Im wesentlichen sind das die sieben β -Scheiben mit Massenakkretionsraten oberhalb von oder gleich $10 M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Interessant ist in diesem Zusammenhang die einzige Ausnahme: die Scheibe um ein Schwarzes Loch der Masse $10^7 M_\odot$, mit der Massenflußrate $\dot{m} = 100 M_\odot \text{ yr}^{-1}$ und mit dem Viskositätsparameter $\beta = 10^{-2}$. Diese Scheibe wird nicht mehr Keplersch selbstgravitierend, obwohl dies aufgrund der höheren Akkretionsrate zu erwarten wäre. Allerdings setzt die H^- -Absorption bei dieser Scheibe in einem Abstand von etwa 25.000 Schwarzschildradien ein und führt zu einer starken Verringerung der Flächendichte, so daß außen nicht mehr genug Material zum Erreichen Keplerscher Selbstgravitation bereitsteht. Selbstgravitierend ist auch die α -Scheibe mit $M_* = 10^6 M_\odot$ und $\dot{m} = 0.1 M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Für diese Scheibe steigt die Flächendichte aber ähnlich stark an wie bei den Scheiben, für die aufgrund der nach außen gerichteten Gravitationskraft keine selbstkonsistenten Lösungen bestimmt werden konnten (s.o.). Es ist also nicht unwahrscheinlich, daß für diese Scheibe zwar noch selbstkonsistente Lösungen gefunden werden konnten, diese aber eher unphysikalisch sind. Deshalb sollten nur die β -Scheiben betrachtet werden.

Sobald Selbstgravitation eine Rolle spielt, die Scheiben also Keplersch selbstgravitierend werden, verringert sich die Scheibenhöhe deutlich, bis dann eventuell die oben beschriebene Instabilität als Folge des Einsetzens der H^- -Absorption auftritt. Es ist allerdings schwierig zu klären, ob die Verringerung der Höhe durch die Selbstgravitation der Scheibe bedingt ist oder dadurch, daß bei ganz ähnlichen Abständen die thermische Energiedichte wieder vernachlässigbar gegenüber der gravitativen Energiedichte wird. Letzte-

²Im Falle einer nicht selbstgravitierenden Scheibe geht die β -Parametrisierung in die α -Viskosität über, dann verringert sich aber auch die radiale Drift in diesen Scheiben.

res führt natürlich ebenfalls zu dünnen Scheiben. Die Scheiben mit den größeren Zentralmassen sprechen aber eher für den Einfluß der Selbstgravitation, da $\epsilon_{\text{therm}}/\epsilon_{\text{grav}} \ll 1$ schon bei geringeren Abständen erreicht wird als Keplersche Selbstgravitation. Da keine der β -Scheiben voll selbstgravitierend wird, folgen alle Flächendichten dem $r^{-1/2}$ -Profil, bis sie eventuell supersonisch werden, um dann auf die δ -Viskosität umzustellen. Wie bei der Flächendichte macht sich auch bei der Effektivtemperatur kein Einfluß der Selbstgravitation bemerkbar. Bei der Zentraltemperatur erkennt man aber ein Abflachen des Profils bei größeren Radien, das aber durch die entsprechende Änderung der optischen Tiefe verursacht wird. Diese wiederum wird innen durch die Elektronenstreuung und weiter außen durch die gf- und ff-Übergänge bestimmt. Der Einfluß der Selbstgravitation ist daher in diesem kleinen Satz von KSG-Scheiben allenfalls in der Höhe erkennbar. Da diese Scheiben aber gerade eben Keplersch selbstgravitierend geworden sind, war auch nicht zu erwarten, daß starke Änderungen in den Scheibenparametern resultieren würden. Auch der Einfluß des Viskositätsparameters β ist kaum zu erkennen: Je größer β ist, desto weiter außen setzt die Selbstgravitation ein, da ein großes β verstärkte Reibung innerhalb der Scheibe bedeutet, so daß in verstärktem Maße Drehimpuls und Materie durch die Scheibe transportiert wird. Mit β steigt auch die Turbulenzgeschwindigkeit (siehe 2.4.2). Dann werden die Scheiben aber früher supersonisch und die δ -Viskosität kommt schon bei geringeren Abständen zum Tragen.

Die Umgebung hat bzgl. ihrer Temperatur und Dichte keine Auswirkungen auf die Scheibe, da diese erheblich heißer und dichter ist. Dies gilt zumindest für die hier untersuchten Bereiche. Insofern hat auch kein vernünftiges Temperatur- oder Dichteprofil der umgebenden Molekülwolke Einfluß auf die Scheibengrößen. Auch die Variation von χ führt nicht zu Modifikationen bei den Resultaten: weder werden die Radien für die Instabilitäten verändert, noch ändert sich die optische Tiefe selbst in den optisch dünnen Scheibenbereichen stark. Entsprechend gering sind die Auswirkungen auf alle anderen Scheibenparameter.

4.2 Protoplanetare Akkretionsscheiben

Um den Einfluß der Selbstgravitation auf die Struktur protostellarer Akkretionsscheiben zu untersuchen, wurden Scheiben um Zentralmassen von 0.5 und 2.5 M_{\odot} mit Massenakkretionsraten von 10^{-7} , 10^{-6} , $3 \cdot 10^{-6}$ und $10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ berechnet. Diese Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_{\text{W}} = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_{\text{W}} = 50 \text{ K}$ eingebettet, und für $\beta = 10^{-3}$ und $\beta = 10^{-2}$ sowie für $\chi = 2$ wurden Lösungen mit einem selbstkonsistenten Potential gesucht. Zum Vergleich wurden die folgenden Scheibentypen berechnet:

- | | |
|--------------------------|--|
| Typ ' β ' | In diesen Scheiben wird überall – auch in den nicht-selbstgravitierenden Bereichen der Scheibe – die β -Parametrisierung $\nu = \beta r v_{\phi}$ für die Viskositätsbeschreibung verwendet. Der Gebrauch der β -Viskosität auch in den inneren Bereichen ist dadurch gerechtfertigt, daß die β -Parametrisierung für nicht-selbstgravitierende Scheiben im dissipationslimitierten Limes in die für diese Scheiben geeignete α -Parametrisierung übergeht (Duschl et al., 2000). Wenn die Turbulenzgeschwindigkeit dagegen supersonisch wird, ist die für diesen Scheibenbereich geeignetere Parametrisierung (2.38) in die Rechnungen einzubauen. Diese Rechnungen sollen durchgeführt werden, um die Qualität der β -Viskosität auch für die inneren Bereiche genauer zu quantifizieren. |
| Typ ' $\alpha + \beta$ ' | Bei diesem Scheibentyp wird im inneren nicht-selbstgravitierenden Bereich als Viskositätsbeschreibung die α -Parametrisierung gewählt. Wie in 3.4 beschrieben, wird an der Stelle, an der die Scheibe Keplersch selbstgravitierend wird, auf die β -Parametrisierung umgeschaltet. In diesen Scheiben bleibt der Wert für β fest; α ist also so zu wählen, daß es Gleichung (3.5) für eine selbstkonsistente Lösung genügt. |
| Typ ' α ' | Bei diesen Scheiben wird – wie in der Literatur oft üblich – ausschließlich die α -Viskosität verwendet. Der Selbstgravitation der Scheibe wird in vertikaler Richtung aber dennoch durch die Berücksichtigung des Scheibenanteils an der Beschleunigung zur Mittelebene der Scheibe hin und in radialer Richtung durch die Berechnung eines selbstkonsistenten Potentials Rechnung getragen. Für diesen Typ Scheibe wird zum besseren Vergleich dasselbe α wie dasjenige verwendet, welches sich aus dem Typ ' $\alpha + \beta$ ' ergibt. |

Die verwendeten Werte für α und die Abstände, an denen die oben angegebenen Scheiben Keplersch bzw. voll selbstgravitierend werden, sind in Tabelle 4.2 angegeben. Wenn für bestimmte Parametersätze

$\dot{m} [M_{\odot}/\text{yr}]$	β	10^{-3}						10^{-2}					
	M_*	$0.5 M_{\odot}$			$2.5 M_{\odot}$			$0.5 M_{\odot}$			$2.5 M_{\odot}$		
	Typ	α	KSG	FSG	α	KSG	FSG	α	KSG	FSG	α	KSG	FSG
			ab r	[AU]		ab r	[AU]		ab r	[AU]		ab r	[AU]
10^{-7}	β	‡	–	–	‡	–	–	‡	–	–	‡	–	–
	$\alpha + \beta$	†	†	†	†	†	†	†	†	†	†	†	†
	α	0.040	–	–	0.103	–	–	0.326	–	–	0.955	–	–
10^{-6}	β	‡	38.7	–	‡	–	–	‡	–	–	‡	–	–
	$\alpha + \beta$	0.100	31.5	–	†	†	†	†	†	†	†	†	†
	α	0.100	30.9	–	0.130	–	–	0.230	–	–	0.658	–	–
$3 \cdot 10^{-6}$	β	‡	17.8	–	‡	64.8	–	‡	–	–	‡	–	–
	$\alpha + \beta$	0.110	19.2	–	0.270	57.9	–	0.384	79.7	–	†	†	†
	α	‡	‡	‡	0.270	57.3	–	0.384	77.6	–	0.467	–	–
10^{-5}	β	‡	9.4	63.7	‡	33.3	–	‡	33.3	–	‡	–	–
	$\alpha + \beta$	0.064	9.9	63.8	0.162	31.4	–	1.474	37.8	–	†	†	†
	α	‡	‡	‡	‡	‡	‡	1.474	38.2	–	1.170	–	–

‡ für β -Scheiben ist kein Wert für α erforderlich

† solange eine Scheibe nicht selbstgravitierend wird, unterscheiden sich die Typen ‘ α ’ und ‘ $\alpha + \beta$ ’ nicht

‡ es existieren keine selbstkonsistenten Lösungen (siehe Text)

Tabelle 4.2: Der Parameter α und die Radien, an denen die Akkretionsscheiben Keplersch oder voll selbstgravitierend werden, als Funktion der Masse des Protosterns, der Massenakkretionsrate und des Viskositätsparameters β , jeweils für β -Scheiben, gemischte α - und β -Scheiben und für reine α -Scheiben. Die Rechnungen wurden für Scheiben in einer homogenen und isotropen Molekülwolke mit $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und $T_W = 50 \text{ K}$ sowie für $\chi = 2$ durchgeführt.

α -Scheiben nicht selbstgravitierend werden, unterscheiden sich die Typen ‘ $\alpha + \beta$ ’ und ‘ α ’ natürlich nicht; für solche ‘ $\alpha + \beta$ ’-Scheiben sind daher keine Rechnungen durchgeführt worden. Zudem sind Ergebnisse für Rechnungen aufgelistet, bei denen die α -Scheibe nicht Keplersch selbstgravitierend wird, für die aber nicht der für diesen Fall vorgesehene Wert für α (10^{-2}) verwendet wurde. Dies liegt daran, daß die entsprechenden Scheiben für $\alpha = 10^{-2}$ innerhalb des äußeren Radius von 100 AU selbstgravitierend wurden und ein α gemäß (3.5) bestimmt wurde. Für den neuen Wert wurde dagegen innerhalb von 100 AU keine Selbstgravitation mehr erreicht. Schließlich existieren für einige reine α -Scheiben keine selbstkonsistenten Lösungen. Der Grund hierfür soll genauer untersucht werden.

Im Prinzip ist der Grund für die Nichtexistenz selbstkonsistenter Lösungen für α -Scheiben leicht zu verstehen. Nach (2.35) ist die Massenverteilung für β -Scheiben im Keplerschen Fall durch $\Sigma(r) \propto r^{-1/2}$ gegeben, wenn man die innere Randbedingung vernachlässigt. Die Masse jedes Massenrings wächst dann wie $m_c = 2\pi r \Delta r \Sigma(r) \propto r^{1/2}$ an, wenn man wie in dieser Arbeit eine äquidistante Stützstellenverteilung annimmt. Für solche Massenverteilungen kann, wie in 3.1.2 beschrieben, einfach das Potential der Scheibe berechnet werden. Auch die Modifikationen, die durch die Selbstgravitation der Akkretionsscheibe hervorgerufen werden, erweisen sich als nicht problematisch. Abbildung 4.13 zeigt im oberen Teil der Abbildung die Ringmassen als Funktion des Abstandes des Rings vom Zentrum und der Massenakkretionsrate. Im unteren Teil der Abbildung sind die entsprechenden Ringmassen für die zugehörigen α -Scheiben aus Tabelle 4.2 dargestellt. Man sieht deutlich, daß die Ringmassenverteilungen sich erheblich von denjenigen für β -Scheiben unterscheiden und daß sie sich auch erheblich stärker ändern. Für geringe Massenakkretionsraten ($10^{-7} \dots 10^{-6} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$) steigen die Ringmassen zunächst mit wachsendem Abstand vom Zentralobjekt auf einen maximalen Wert, um dann für größere Abstände wieder abzufallen. Bei höheren Massenakkretionsraten steigt die Ringmasse aber mit zunehmendem Abstand immer weiter an, und der Anstieg ist deutlich steiler als derjenige bei β -Scheiben. Dies hat zur Folge, daß die Gravitationskraft der Scheibe allein, die mit derjenigen des Zentralobjekts konkurriert, nach außen gerichtet ist (was bei den \sqrt{r} -Profilen der β -Scheiben noch nicht der Fall ist): die in jedem Abstand r vom Zentrum weiter innen liegende Masse der Scheibe reicht nicht mehr aus, um die Gravitationskraft der erheblich größeren Masse weiter außen zu kompensieren. In den inneren, nicht-selbstgravitierenden Bereichen der Scheibe ist der Anstieg der Ringmassen zwar noch stärker, aber diese Bereiche werden von der Gravitationskraft des Sterns dominiert. Weiter außen dagegen werden die Gravitationskräfte von Zentralobjekt und Scheibe (betragsmäßig) vergleichbar, und hier ändert die Gravitationskraft dann ihre Richtung. Eine nach außen

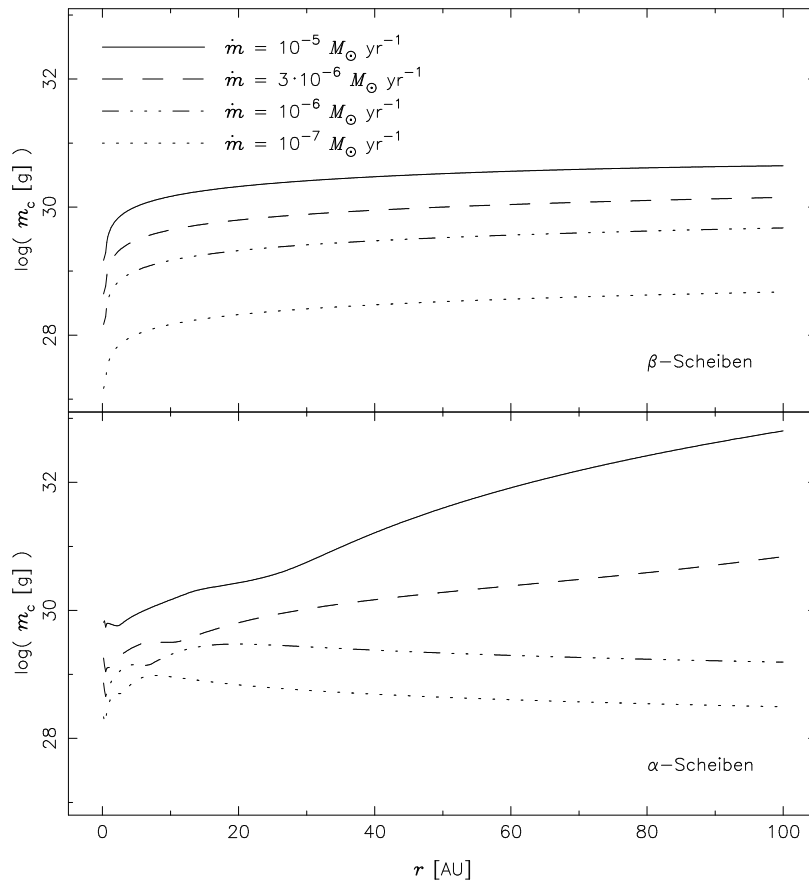


Abbildung 4.13: Die Ringmassen als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten für β -Scheiben (oben) und α -Scheiben (unten). Diese Rechnungen wurden für einen Zentralstern mit $0.5 M_\odot$, eine umgebende, homogene und isotrope Molekülwolke mit $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und $T_W = 50 \text{ K}$ sowie für $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$ durchgeführt.

gerichtete Gravitationskraft kann aber nicht durch eine wie auch immer geartete Winkelgeschwindigkeit kompensiert werden, denn deren Beitrag ist grundsätzlich nach außen gerichtet. Daher können für solche massiven α -Scheiben keine selbstkonsistenten Lösungen berechnet werden.

Auffällig ist, daß alle α -Werte größer, in der Regel sogar deutlich größer, als der heute allgemein verwendete Wert $\alpha = 0.01$ sind. Sogar Werte über 1 wurden gemäß Gleichung (3.5) berechnet. Wie in 1.3 beschrieben, handelt es sich hierbei nicht um den ersten Versuch, entgegen der eigentlichen Bedeutung von α als Effektivitätsbeschränkung für die Viskosität Werte jenseits von 1 zu verwenden. Daß die berechneten α keine klare Tendenz zeigen, ist darin begründet, daß sich die Scheibenhöhe sehr stark mit der Selbstgravitation ändern kann und so auch bei vorgegebenem β der Viskositätsparameter α starken Variationen unterliegt. Da die Höhe in α -Scheiben durch die Thermodynamik mitbestimmt wird, fließen auch solche physikalischen Bedingungen in die Bestimmung von α ein. Insgesamt sind aber bei selbstgravitierenden Scheiben größere Werte als 0.01 bevorzugt. Allerdings darf man nicht vergessen, daß voll selbstgravitierende α -Scheiben nach den hier vorliegenden Rechnungen nicht existieren können, da ihr eigenes Potential sie zerstören würde. Allenfalls für KSG-Scheiben berechnete Werte machen daher Sinn.

In den Abbildungen 4.14 bis 4.25 sind die Höhe, die Flächendichte, die Zentraldichte, die Zentral- und die Effektivtemperatur sowie die optische Tiefe als Funktion des Radius für die in Tabelle 4.2 angegebenen Scheiben dargestellt. Die wichtigsten Ergebnisse sollen im folgenden dargestellt werden.

Die Abbildungen 4.14 und 4.15 zeigen die Höhe als Funktion des Radius. Die Höhe ist zur besseren Anschauung relativ zur radialen Ausdehnung stark überhöht dargestellt, so daß die Scheiben in Wirklichkeit erheblich dünner sind als hier gezeigt. Deutlich ist zu erkennen, daß die Höhe mit zunehmender Selbstgravitation abnimmt. So bleibt die Höhe relativ unabhängig von der Massenakkretionsrate, solange die Scheibe nicht selbstgravitierend wird. Sobald aber Keplersche Selbstgravitation einsetzt, verringert sich

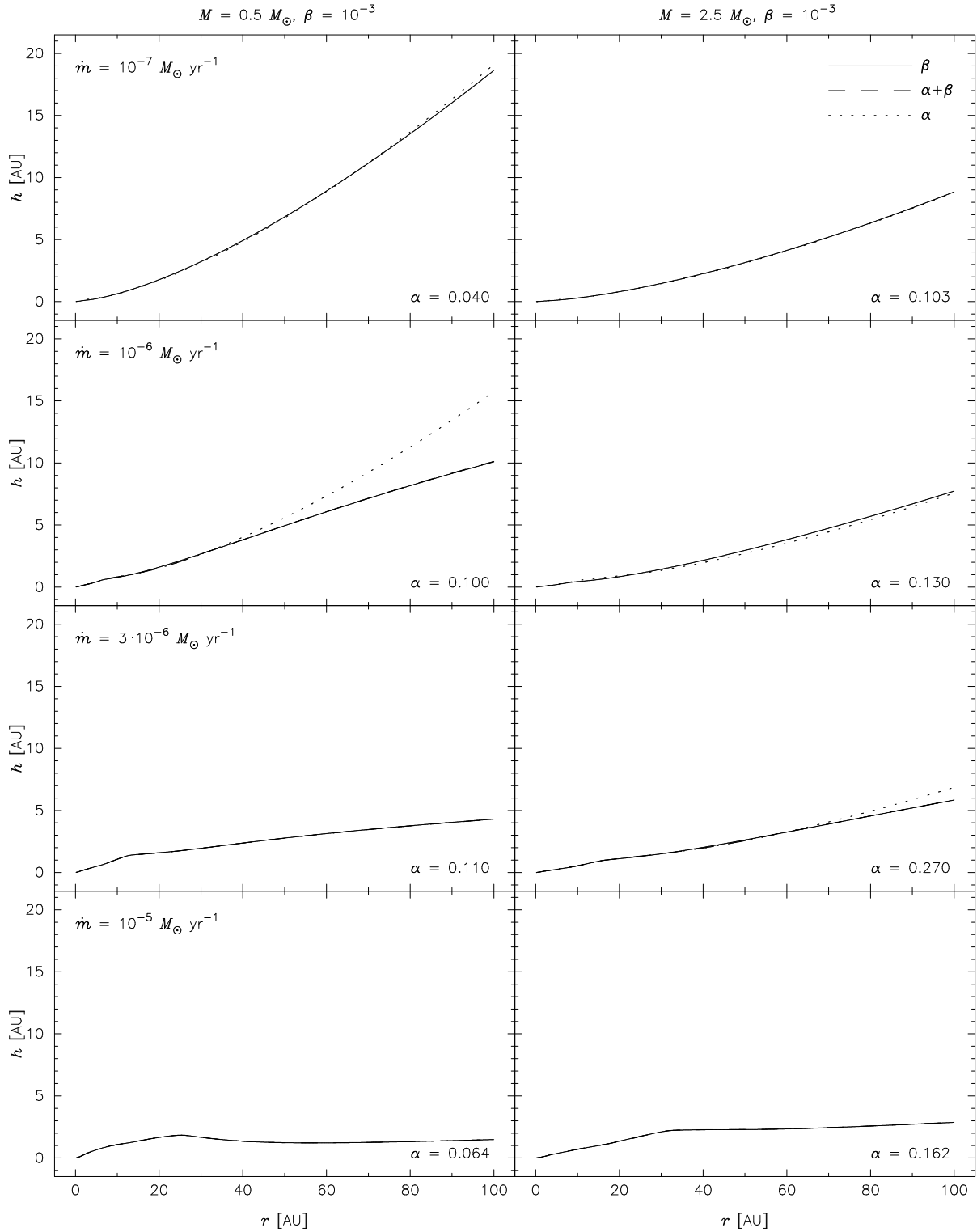


Abbildung 4.14: Die Höhe als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen ‘ β ’ (durchgezogen), ‘ $\alpha + \beta$ ’ (gestrichelt) und ‘ α ’ (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_\odot$, rechts für solche von $2.5 M_\odot$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

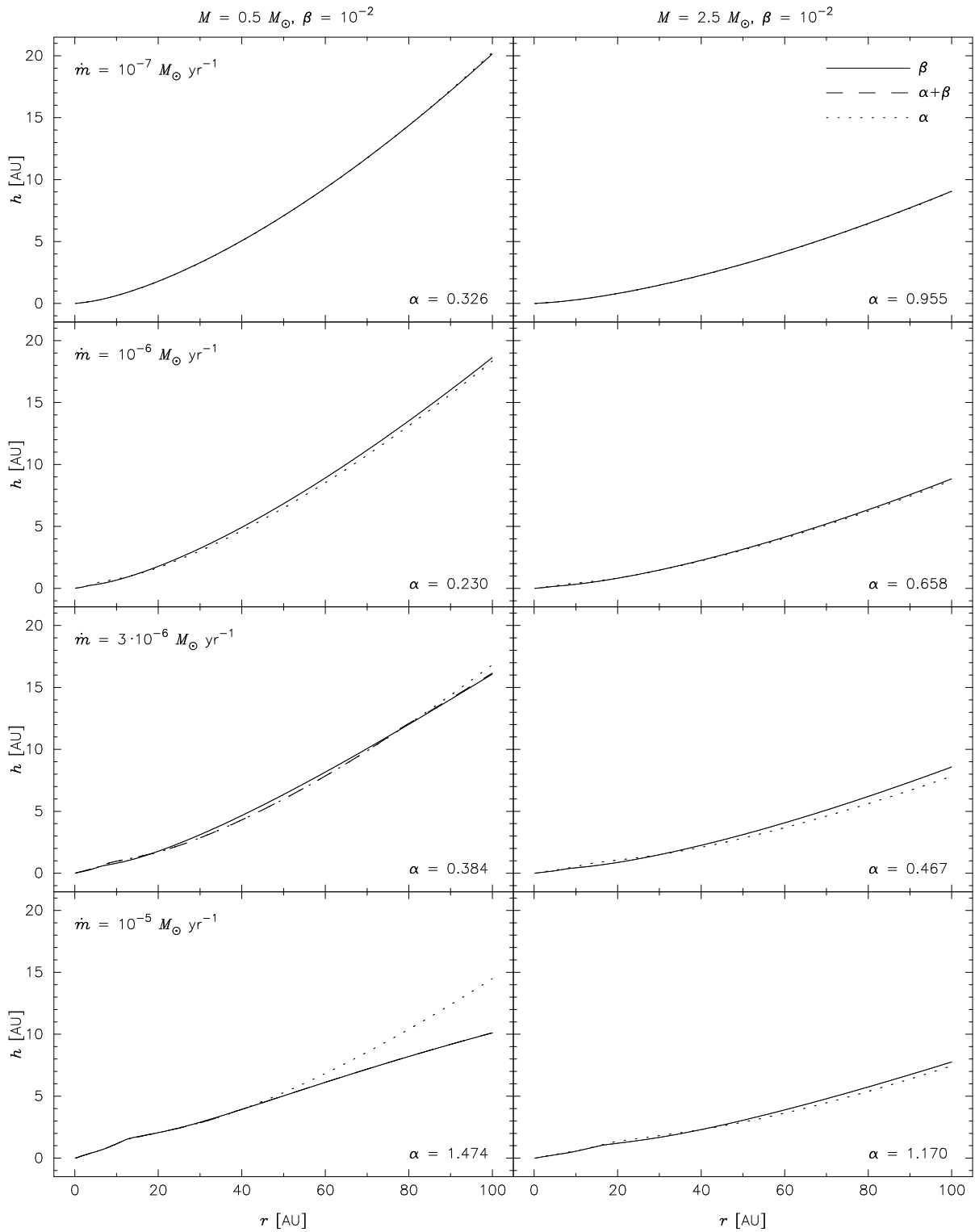


Abbildung 4.15: Die Höhe als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen 'β' (durchgezogen), 'α + β' (gestrichelt) und 'α' (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_\odot$, rechts für solche von $2.5 M_\odot$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

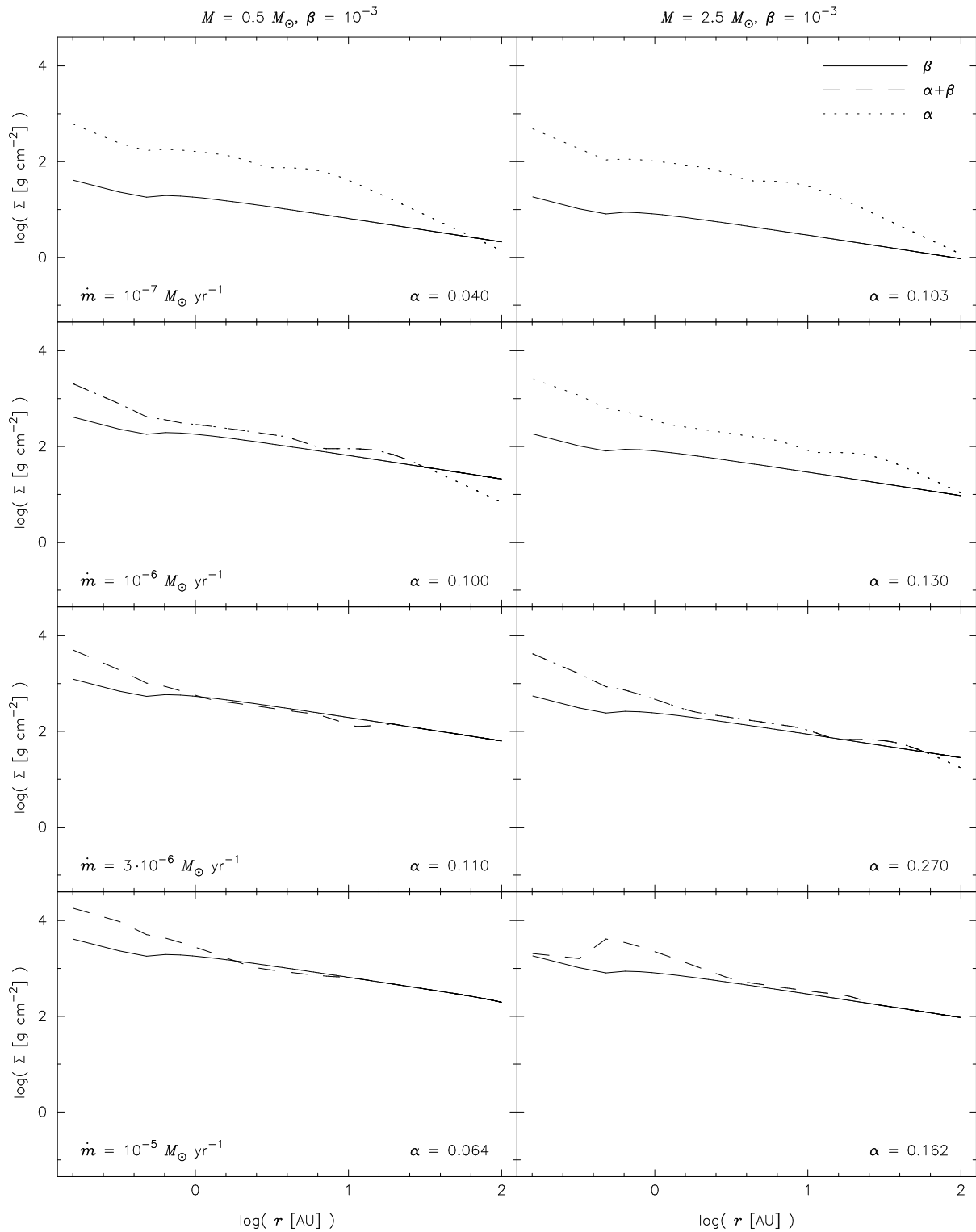


Abbildung 4.16: Die Flächendichte als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen ‘ β ’ (durchgezogen), ‘ $\alpha + \beta$ ’ (gestrichelt) und ‘ α ’ (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_{\odot}$, rechts für solche von $2.5 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

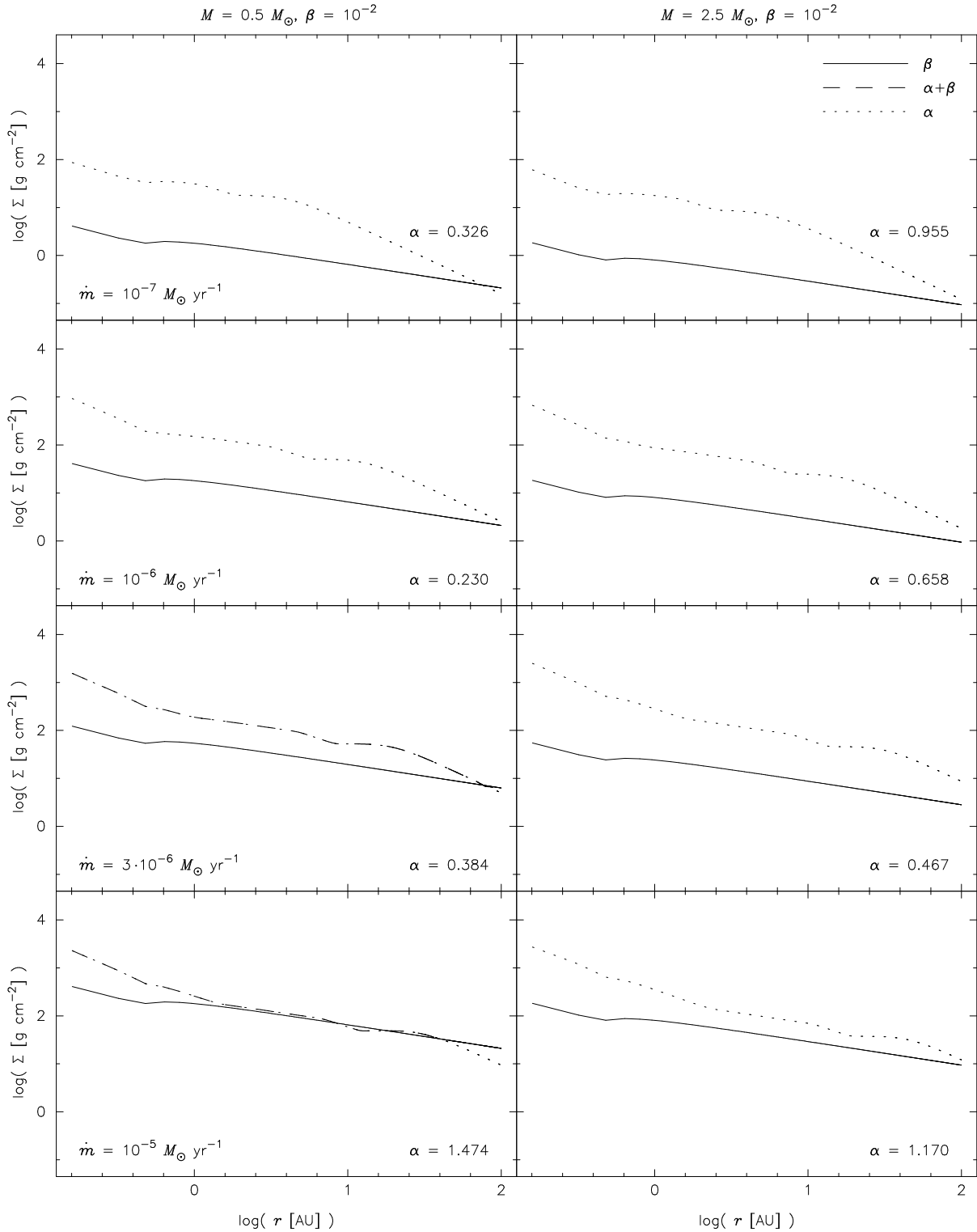


Abbildung 4.17: Die Flächendichte als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen ‘ β ’ (durchgezogen), ‘ $\alpha + \beta$ ’ (gestrichelt) und ‘ α ’ (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_\odot$, rechts für solche von $2.5 M_\odot$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

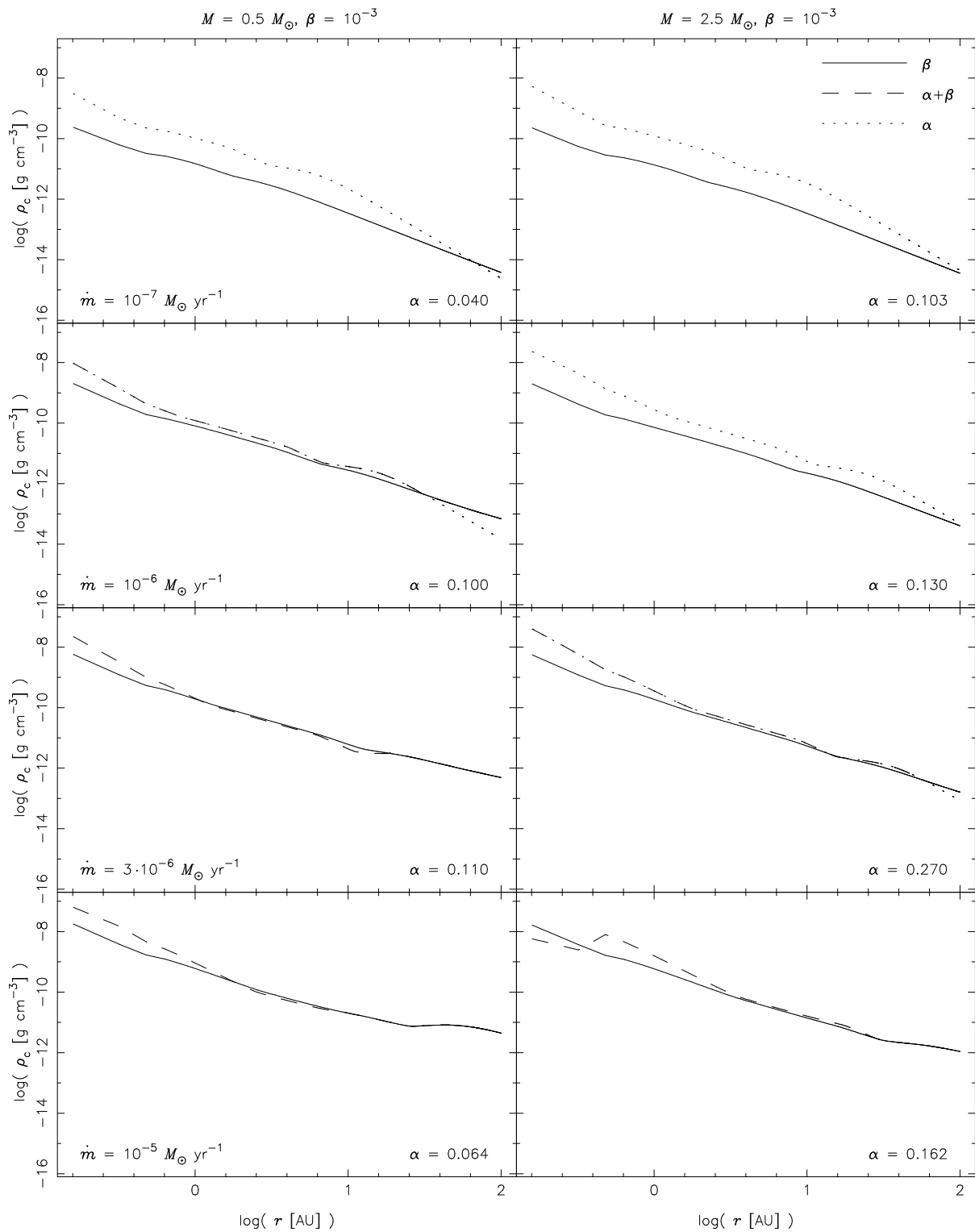


Abbildung 4.18: Die Zentraldichte als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen ‘ β ’ (durchgezogen), ‘ $\alpha + \beta$ ’ (gestrichelt) und ‘ α ’ (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_{\odot}$, rechts für solche von $2.5 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

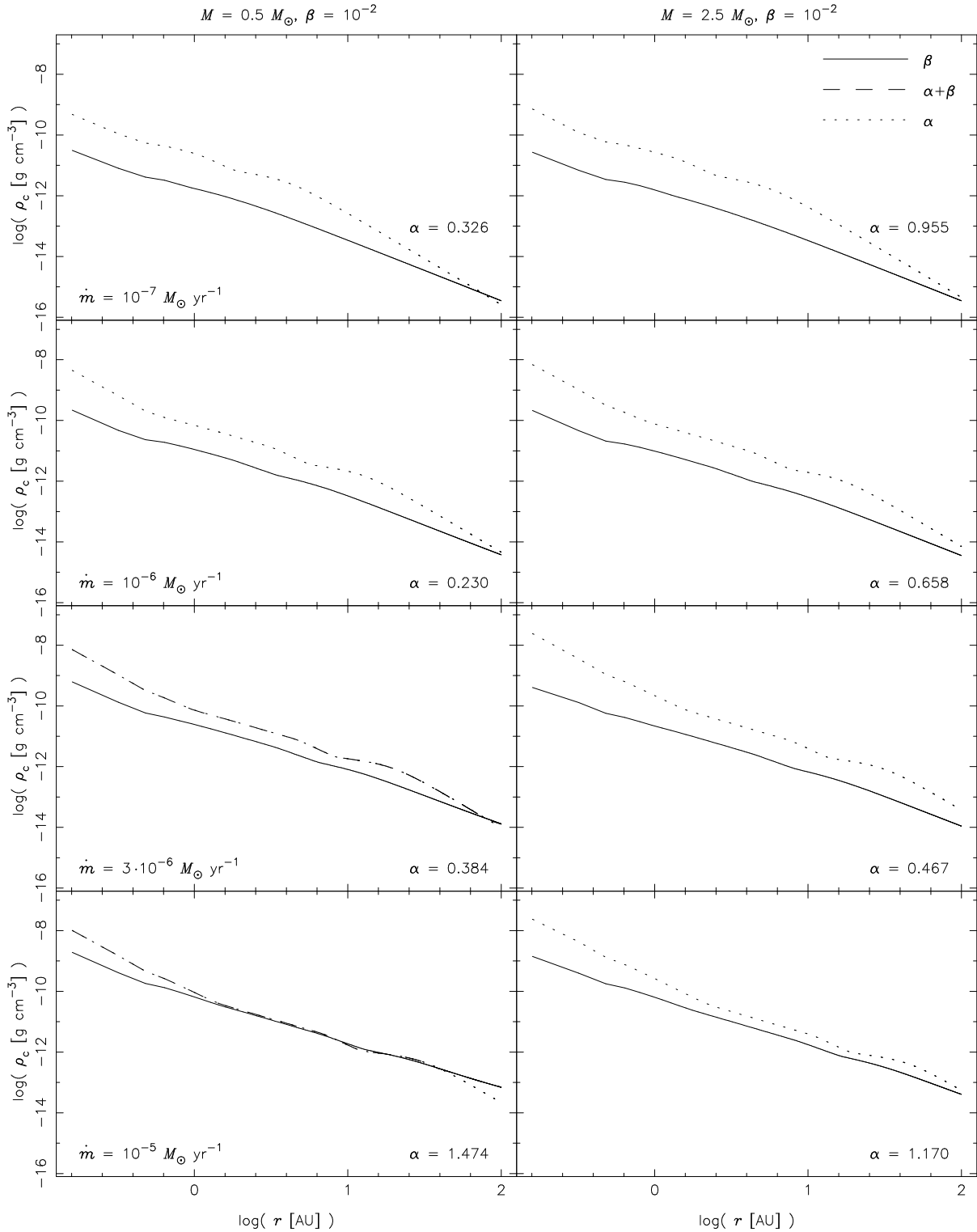


Abbildung 4.19: Die Zentraldichte als Funktion des Radius für verschiedene Massenaakretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen 'β' (durchgezogen), 'α + β' (gestrichelt) und 'α' (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_\odot$, rechts für solche von $2.5 M_\odot$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenaakretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

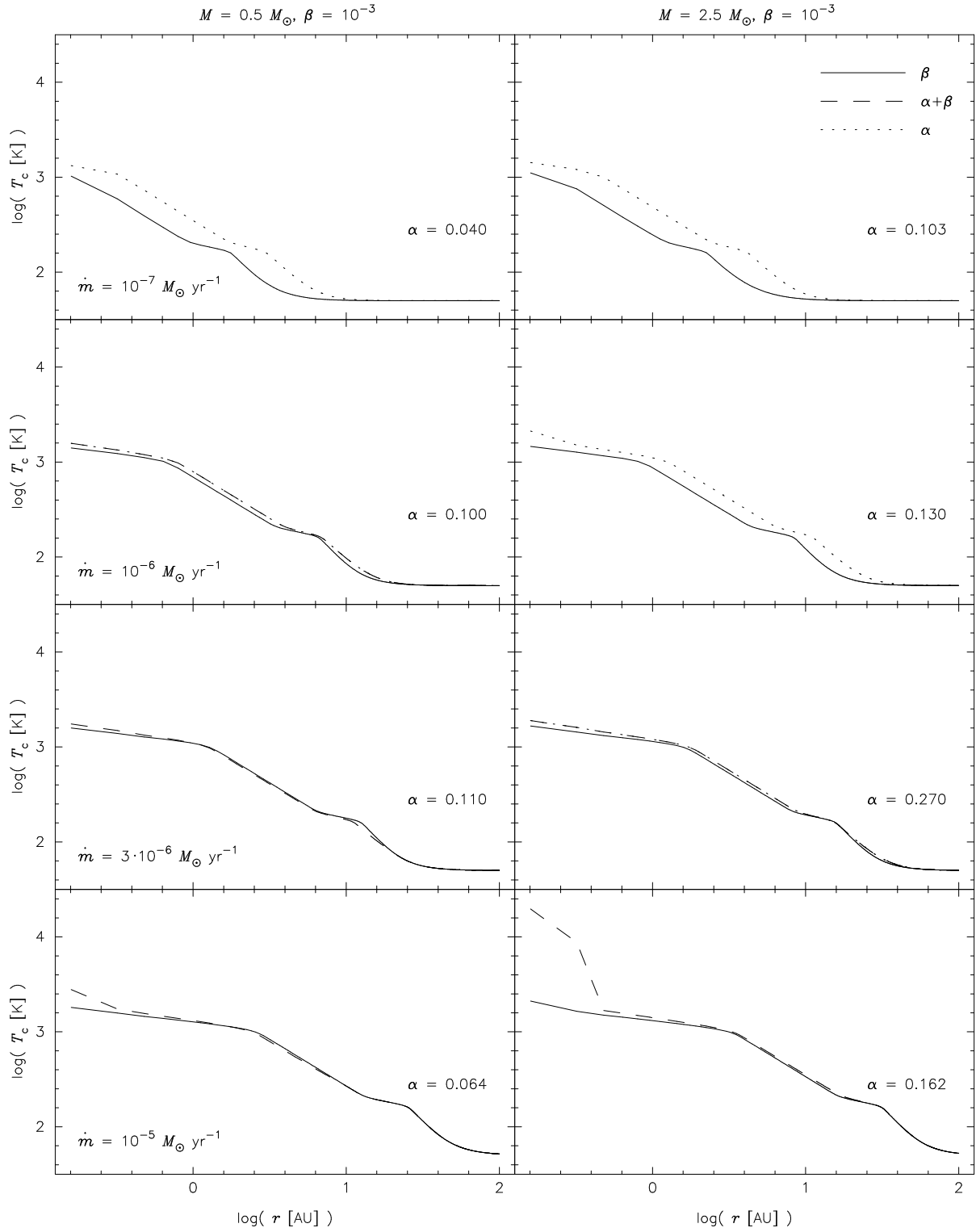


Abbildung 4.20: Die Zentraltemperatur als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen ‘ β ’ (durchgezogen), ‘ $\alpha + \beta$ ’ (gestrichelt) und ‘ α ’ (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_{\odot}$, rechts für solche von $2.5 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

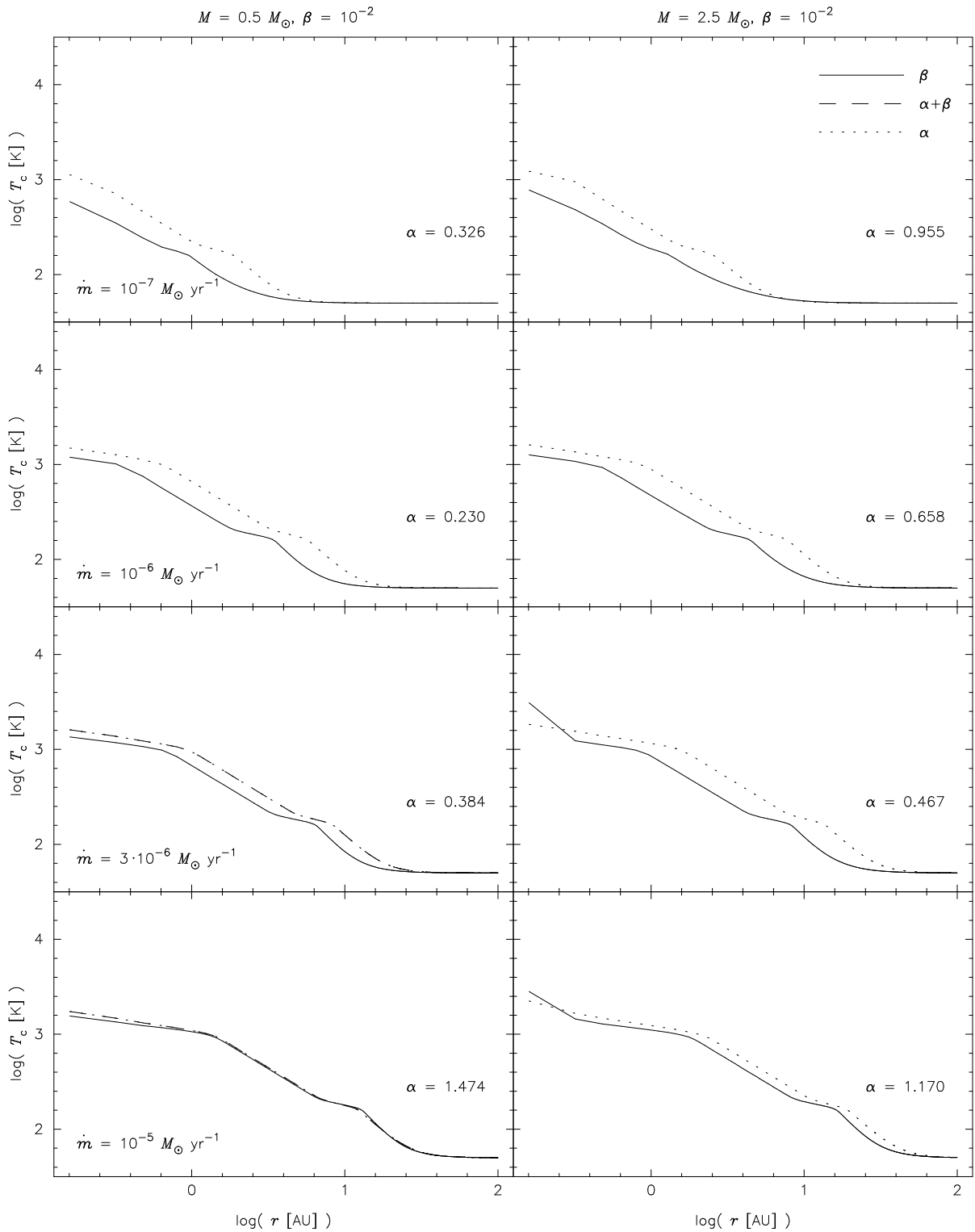


Abbildung 4.21: Die Zentraltemperatur als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen ‘ β ’ (durchgezogen), ‘ $\alpha + \beta$ ’ (gestrichelt) und ‘ α ’ (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_\odot$, rechts für solche von $2.5 M_\odot$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

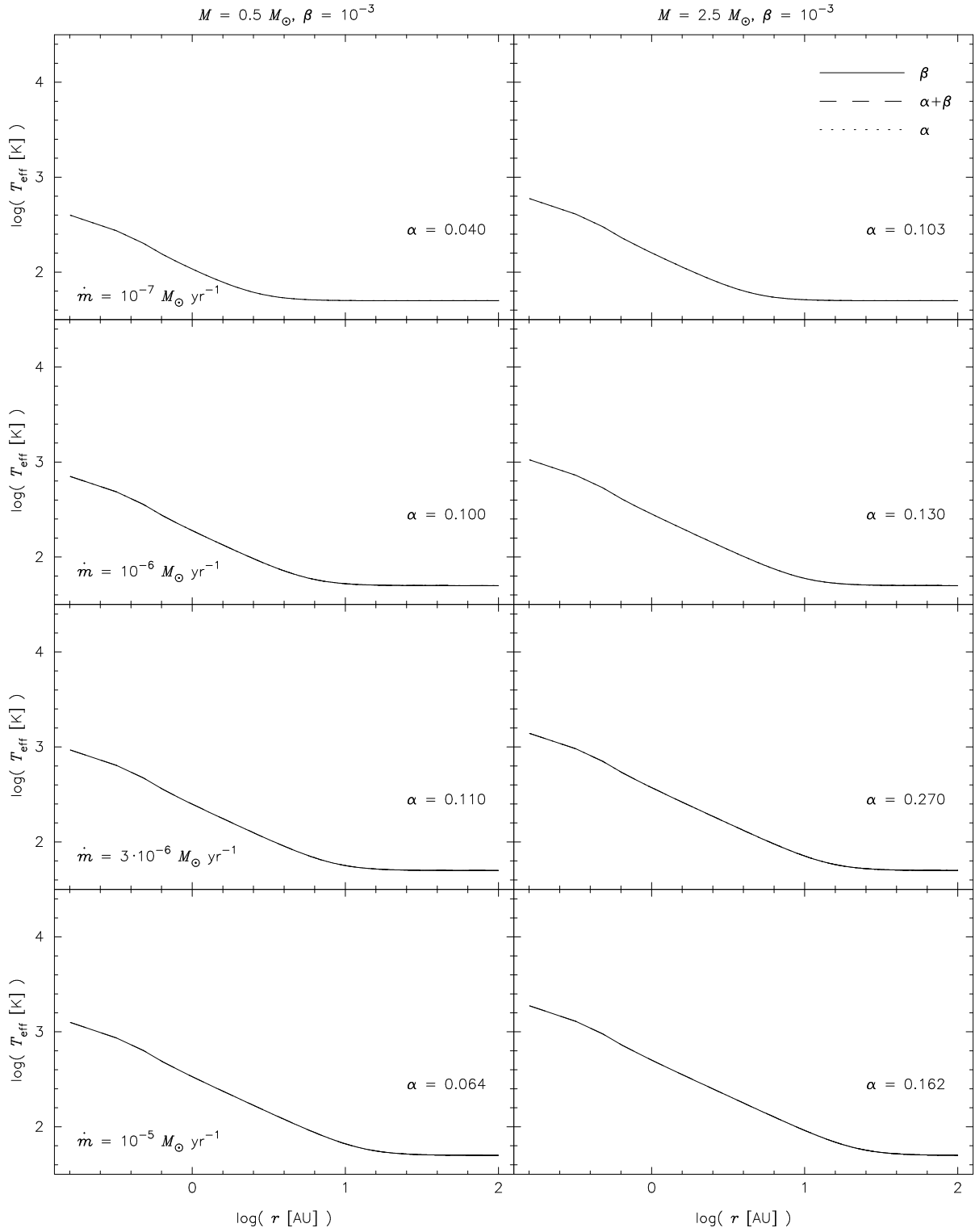


Abbildung 4.22: Die Effektivtemperatur als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen ‘ β ’ (durchgezogen), ‘ $\alpha + \beta$ ’ (gestrichelt) und ‘ α ’ (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_\odot$, rechts für solche von $2.5 M_\odot$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

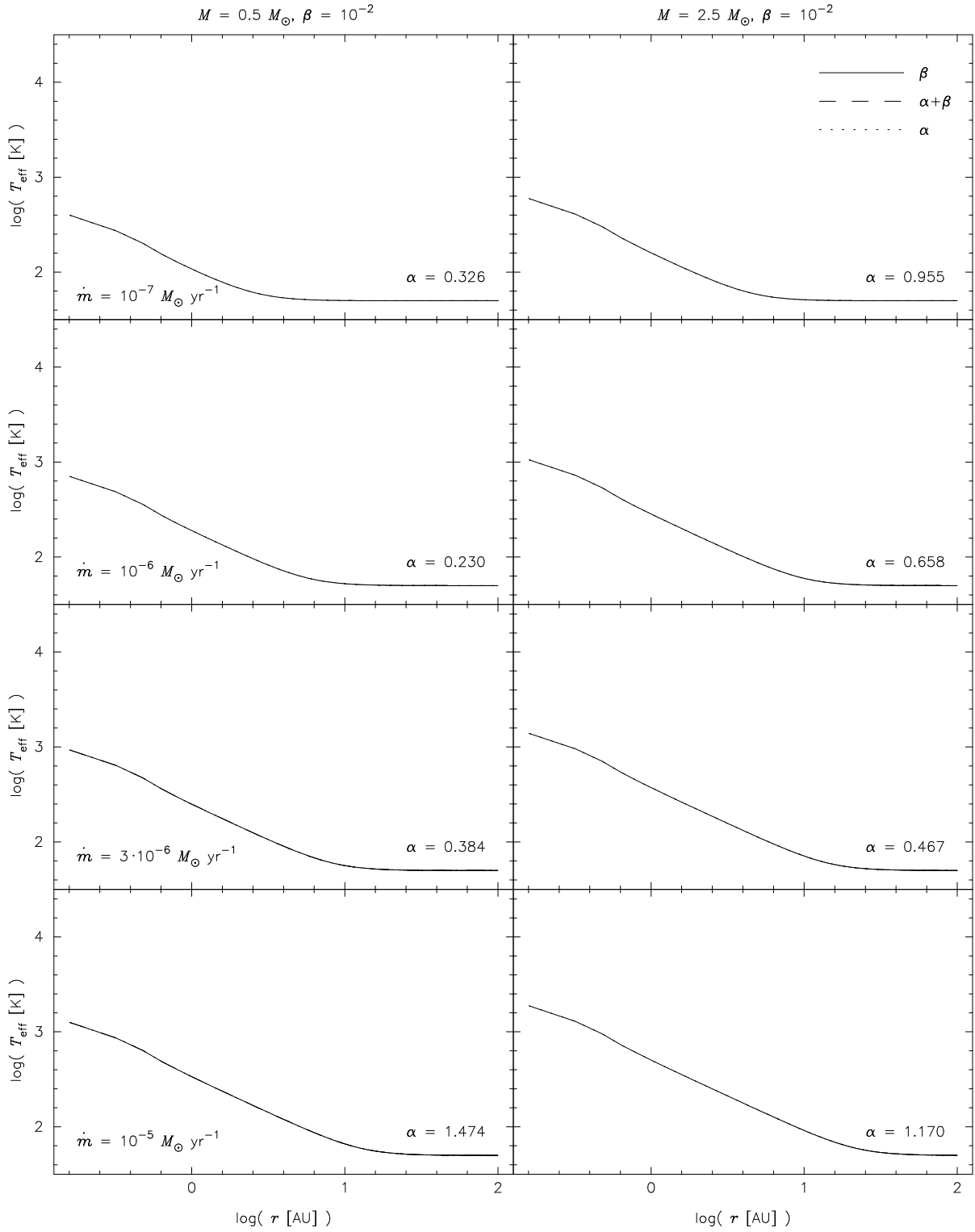


Abbildung 4.23: Die Effektivtemperatur als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen 'β' (durchgezogen), 'α + β' (gestrichelt) und 'α' (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_\odot$, rechts für solche von $2.5 M_\odot$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

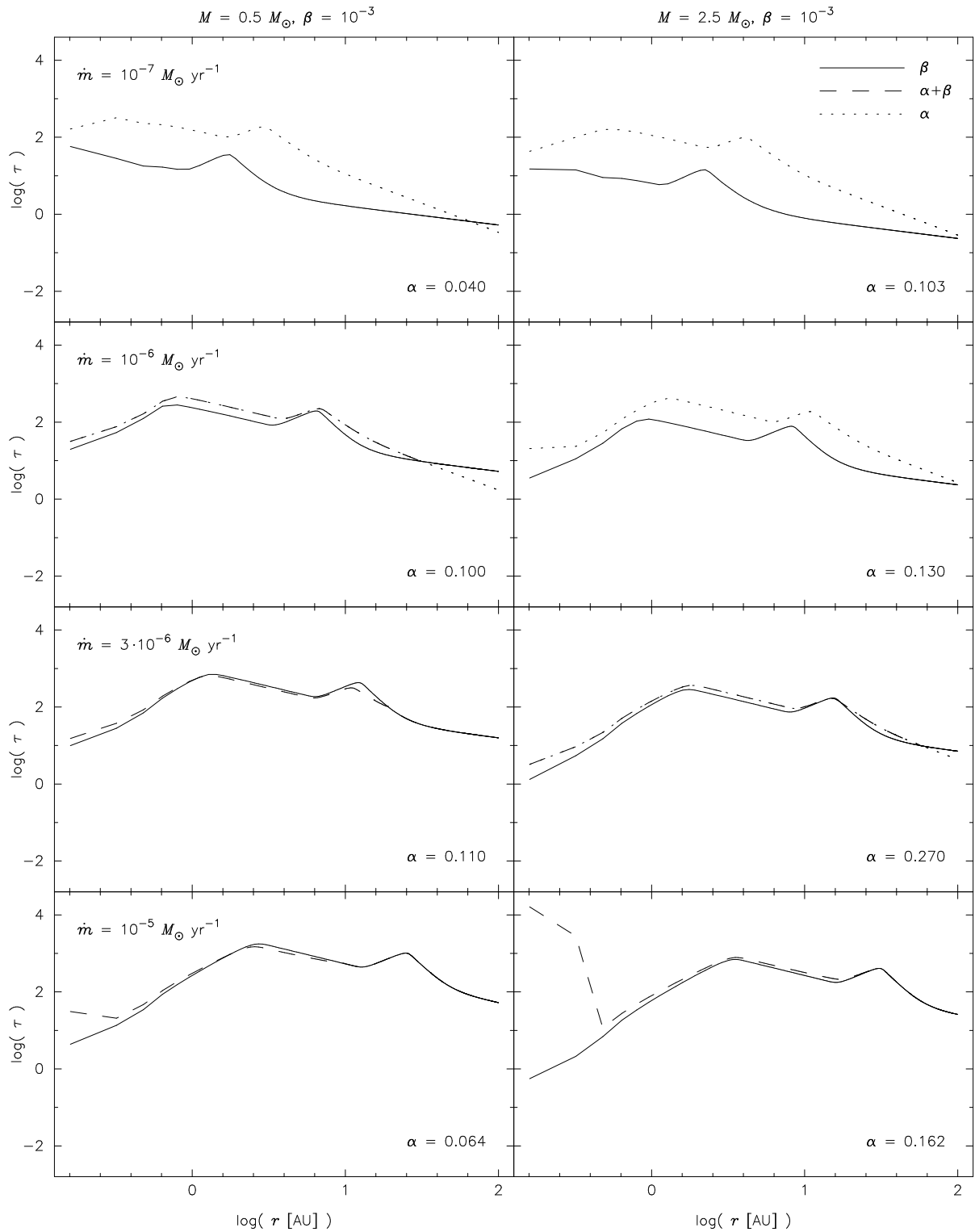


Abbildung 4.24: Die optische Tiefe als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen 'β' (durchgezogen), 'α + β' (gestrichelt) und 'α' (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_{\odot}$, rechts für solche von $2.5 M_{\odot}$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

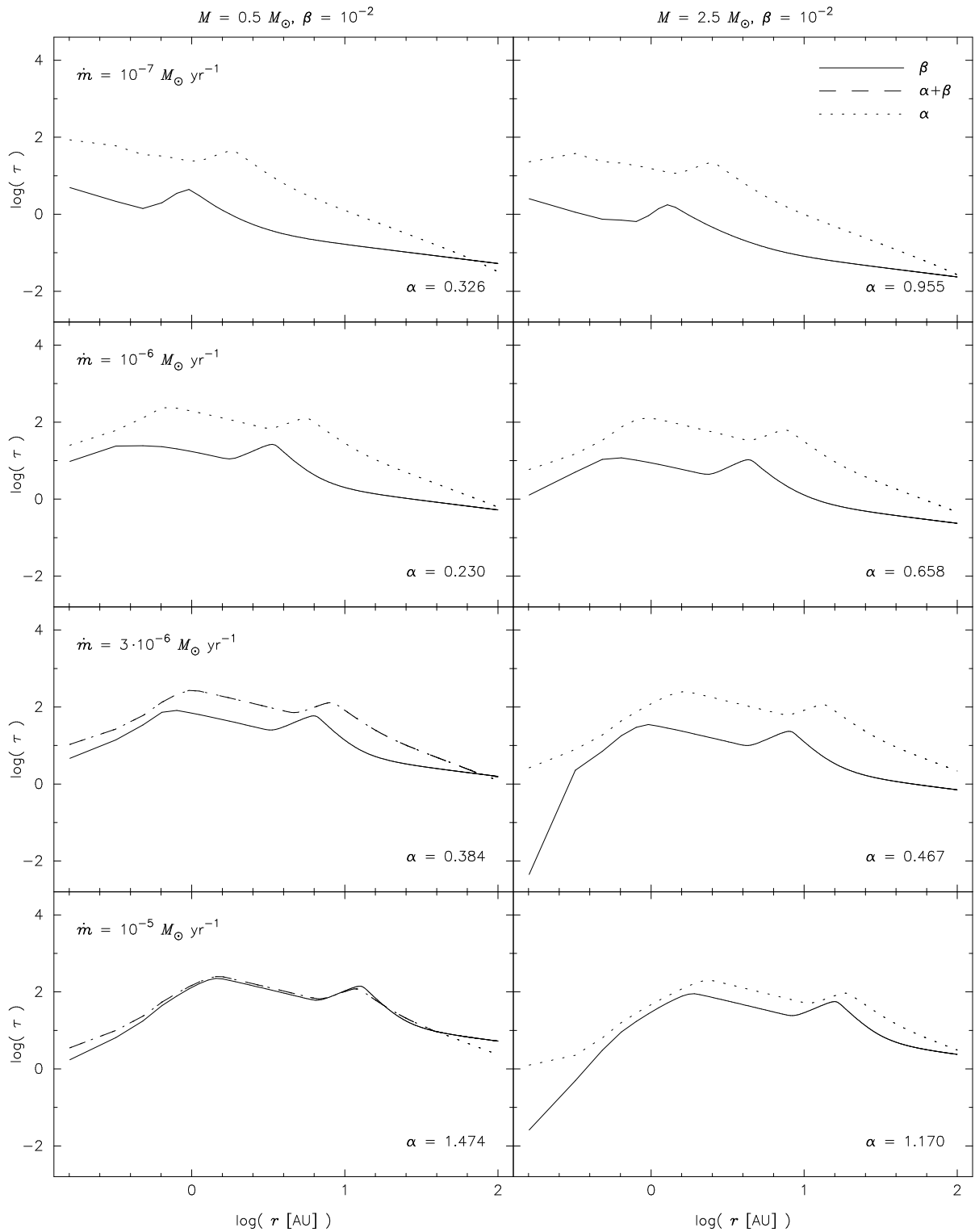


Abbildung 4.25: Die optische Tiefe als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und für verschiedene Zentralmassen. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-2}$ und $\chi = 2$. Dargestellt sind jeweils die Ergebnisse für alle drei Typen 'β' (durchgezogen), 'α + β' (gestrichelt) und 'α' (gepunktet) (sofern sie berechnet wurden, siehe Text), links für Zentralmassen von $0.5 M_\odot$, rechts für solche von $2.5 M_\odot$. Die in den linken Diagrammen angegebenen Massenakkretionsraten gelten auch für die rechten Diagramme.

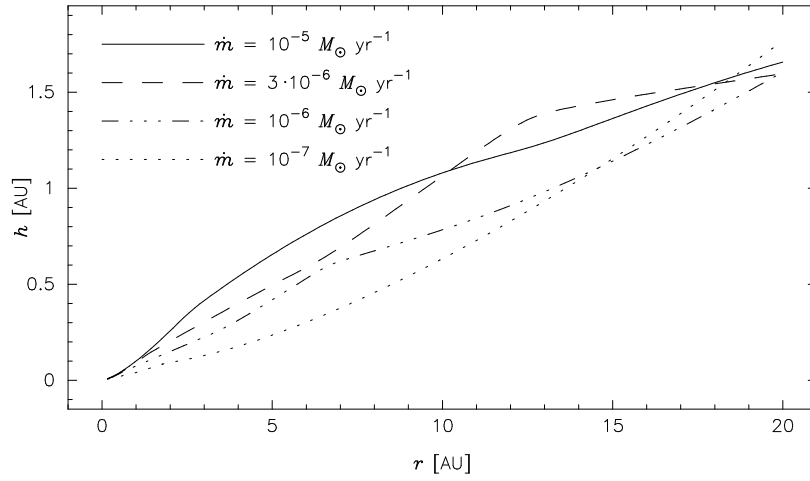


Abbildung 4.26: Die Höhe als Funktion des Radius für verschiedene Massenakkretionsraten und eine Zentralmasse von $0.5 M_{\odot}$. Dargestellt sind die inneren 20 AU der Scheibe. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$.

die Höhe bei einem gegebenen Abstand mit zunehmender Massenakkretionsrate immer stärker. Gleichzeitig verschwindet der Einfluß der Zentralmasse: ist eine Scheibe mit $\dot{m} = 10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ und einer Zentralmasse von $0.5 M_{\odot}$ noch etwa doppelt so dick wie eine Scheibe mit der gleichen Massenakkretionsrate, aber einem fünffach massereicheren Zentralobjekt, so sind die Unterschiede in den Scheibenhöhen bei einer Massenakkretionsrate von $10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ und dabei bereits eingesetzter Selbstgravitation der Scheibe nur noch sehr gering. Weiter fällt auf, daß die Höhe im wesentlichen unabhängig von β ist – zumindest wenn man Scheiben mit ähnlicher Selbstgravitation vergleicht. Dies ist besonders deutlich an der Scheibe für $\dot{m} = 10^{-6} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ und $\beta = 10^{-3}$ einerseits und der Scheibe mit $\dot{m} = 10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ und $\beta = 10^{-2}$ andererseits zu erkennen, die beide bei etwa gleichen Radien Keplersch selbstgravitierend werden. Insgesamt wird Selbstgravitation aber erst bei umso höheren Massenakkretionsraten erreicht, je größer β ist. Auch dies ist verständlich, da ein großes β verstärkte Reibung innerhalb der Scheibe bedeutet, so daß in erhöhtem Maße Drehimpuls nach außen und Masse nach innen transportiert wird. Die Höhe von Scheiben mit β -Viskosität steigt bei großen Abständen langsamer als die von α -Scheiben; bei ersteren wirkt die Selbstgravitation also in stärkerem Maße. Auch steigt für alle α -Scheiben unabhängig von der Massenakkretionsrate und damit dem Grad der Selbstgravitation das Verhältnis $h(r)/r$ mit wachsendem Abstand vom Zentrum, während dieses Verhältnis bei β -Scheiben mit dem Einsetzen Keplerscher Selbstgravitation sinkt. Die Unterschiede zwischen den Typen ‘ $\alpha + \beta$ ’ und ‘ β ’ sind sehr gering. Dies zeigt zum einen, daß die β -Parametrisierung im nicht-selbstgravitierenden Fall für subsonische Turbulenzgeschwindigkeiten, die in allen berechneten protostellaren Scheiben vorliegen, wie erwartet in die α -Parametrisierung übergeht (Duschl et al., 2000), wenn man α und β geeignet zueinander wählt. Zum anderen wird wie in 4.1 beschrieben noch einmal die β -Parametrisierung als geeignete Viskositätsbeschreibung auch in den nicht-selbstgravitierenden Bereichen einer Scheibe, solange diese subsonisch sind, bestätigt. Die innersten Bereiche der Scheibe werden mit zunehmender Selbstgravitation dicker (Abbildung 4.26). Dies ist aber nicht, wie in Shore & White (1982) behauptet, auf die Selbstgravitation der Scheibe zurückzuführen, da die innersten Bereiche vollständig vom Zentralobjekt dominiert werden. Vielmehr führt eine Erhöhung der Massenakkretionsrate auch zu einer Erhöhung der Temperatur (siehe Abbildungen 4.20 bis 4.23), und diese bewirkt eine Zunahme der Scheibendicke.

In den Abbildungen 4.16 und 4.17 ist die Flächendichte in Abhängigkeit vom Abstand zum Zentrum dargestellt. Zunächst fällt auf, daß die Massenbelegung mit steigendem β und wachsender Zentralmasse sinkt, wobei der Effekt des Viskositätsparameters größer ist. Daß die Flächendichte mit wachsendem β abnimmt ist wieder eine Folge des erhöhten Drehimpuls- und Materietransports in der Scheibe. Der Effekt aufgrund der Zentralmasse ist genauso offensichtlich: bei β -Scheiben ist die Flächendichte nach (2.35) indirekt proportional zur Ableitung der Winkelgeschwindigkeit und damit zur Masse des Zentralobjekts (gegebenenfalls einschließlich der Scheibenmasse). Bei α -Scheiben gilt zumindest im nicht-selbstgravitierenden Fall ein ähnliches Argument, da hier $c_s = h\omega$ und damit nach (2.30) $\Sigma \propto \omega'^{-1} \propto M^{-1}$ gilt. Für selbstgravitierende α -Scheiben sind solche einfachen Abschätzungen nicht mehr möglich. Die Flächendichte

Keplersch selbstgravitierender β -Scheiben ist proportional zu $r^{-1/2}$, was auch deutlich in den Abbildungen zu sehen ist. Die kleine "Delle" innerhalb von 1 AU ist die Folge der für diesen Bereich ungeeigneten, äquidistanten Stützstellenverteilung: eine Erhöhung der Zahl der Stützstellen verschiebt diese "Delle" weiter nach innen. Für die Rechnungen sind diese Ungenauigkeiten in den innersten Scheibenbereichen aber hinsichtlich des Einflusses der Selbstgravitation auf die Scheibe vernachlässigbar. Anders als die β -Scheiben zeigen die α -Scheiben kein glattes Σ -Profil, da die Flächendichte in diesem Fall über die Drehimpulserhaltung (2.30) an die Thermodynamik koppelt. Damit ist aber gerade in den inneren Bereichen eine große Variation der Massenbelegung mit dem Radius zu erwarten. Weiterhin fällt auf, daß die Flächendichte bei α -Scheiben gerade in den Außenbereichen der Scheibe deutlich stärker abfällt als in β -Scheiben. Auch dies läßt sich einfach nachvollziehen: nach (2.30) ist die Flächendichte der α -Scheibe $\Sigma_\alpha \propto h^{-2}r^{-1}\omega'^{-1}$ und die für β -Scheiben ist nach (2.35) $\Sigma_\beta \propto r^{-3}\omega'^{-1}$. Es gilt daher $\Sigma_\alpha/\Sigma_\beta \propto (\frac{r}{h})^2$. Da das Verhältnis $\frac{h}{r}$ bei α -Scheiben mit zunehmendem Abstand vom Zentrum immer schneller anwächst (s.o.), fällt Σ_α im Gegenzug relativ zu Σ_β bei zunehmendem r schneller ab. Mit wachsender Massenakkretionsrate werden die Flächendichten für die drei Typen immer ähnlicher, was auf eine zunehmend bessere Wahl von α hinweist.

Für die in den Abbildungen 4.18 und 4.19 dargestellten Zentraldichten gilt im wesentlichen das Gleiche wie für die Flächendichte. Bei hohen Massenakkretionsraten und für $\beta = 10^{-3}$ taucht aber ein recht interessantes Feature auf: die Zentraldichte wird in der Gegend, in der sich im Sonnensystem die äußeren Planeten befinden, nahezu konstant. Dies ist das Resultat der etwa konstanten Scheibenhöhe bei sehr massereichen β -Scheiben. Ob die deutlich größer als bisher vorhergesagte und nahezu konstante Dichte in den äußeren Bereichen protostellarer Akkretionsscheiben in den selbstgravitierenden, frühen Phasen ein Artefakt dieser Rechnungen aufgrund der gewählten Vereinfachungen oder aber ein zumindest qualitativ korrektes Resultat ist, werden erweiterte (z.B. zeitabhängige, zweidimensionale Simulationen mit Konvektion) zeigen müssen. Falls dieses Resultat aber qualitativ bestehen bleibt, hätte dies sicherlich Einfluß auf die Bildungsgeschichte der äußeren Gasriesen, da mit zunehmender Zentraldichte auch die Dichte des Staubes größer als erwartet wäre und sich so bereits in der Frühphase schneller größere Staubagglomerate gebildet haben könnten.

In den Abbildungen 4.20 und 4.21 ist die Zentraltemperatur in der Scheibe als Funktion des Abstandes vom Zentrum dargestellt. Die Zentraltemperatur steigt mit zunehmender Massenakkretionsrate und abnehmendem Viskositätsparameter β . Der Einfluß der Massenakkretionsrate ist wieder offensichtlich: eine Zunahme von \dot{m} bedeutet eine Erhöhung der Selbstgravitation, und das hydrostatische Gleichgewicht muß der verstärkten vertikalen Gravitationskraft aufgrund der Scheibe durch eine lokale Erhöhung der Temperatur begegnen. Der Einfluß des Viskositätsparameters ist indirekter: die Zentraltemperatur hängt neben der Massenakkretionsrate auch von der optischen Tiefe und damit der Flächendichte ab, deren Verlauf aber deutlich durch β bestimmt ist (s.o.). Auch eine Erhöhung der Zentralmasse führt zu einer Zunahme der Zentraltemperatur, hier liegt der gleiche Effekt vor wie bei Vergrößerung der Selbstgravitation: der Verstärkung der vertikalen Gravitationskraft wird durch eine Temperaturerhöhung begegnet. Weiter fällt auf, daß sich das Zentraltemperaturprofil nach außen "verschiebt" und daß sich innen bei zunehmender Selbstgravitation ein recht flacher Temperaturverlauf anschließt. Der flache Anteil ist die Folge einsetzender Staubverdampfung und der daraus resultierenden Opazitätsänderung. Der sich weiter außen anschließende stärkere Abfall wird durch die Staubopazität verursacht. Das zweite "Plateau" bestimmt die Opazität für Eisverdampfung, und der Abfall ganz außen wird von der Opazität des Eises dominiert. Die Scheibe mit $M_* = 2.5M_\odot$, $\dot{m} = 10^{-5}M_\odot \text{ yr}^{-1}$ und $\beta = 10^{-3}$ zeigt innerhalb von 1 AU einen starken Anstieg der Temperatur: hier greift dann die konstant gesetzte Opazität, die das Instabilitätsproblem mit der Opazität von Molekülen und dem H^- -Ion vermeiden soll (siehe 2.2.3.1). Auffallend ist auch, daß α -Scheiben heißer sind als β -Scheiben, daß die Unterschiede aber mit zunehmender Selbstgravitation immer geringer werden. Auch dies spricht wie schon bei der Flächendichte dafür, daß die Wahl von α immer besser wird. Schließlich ist deutlich zu erkennen, daß die Scheiben außen in einem Wärmebad liegen: ihre Zentraltemperatur kann nicht unter die der Umgebung sinken.

Gleiches gilt noch deutlicher für die Effektivtemperatur, die in den Abbildungen 4.22 und 4.23 zu sehen ist. Abgesehen davon sind aber keine Abweichungen vom $T_c \propto r^{-3/4}$ -Profil zu erkennen, selbst bei FSG-Scheiben, in denen die Winkelgeschwindigkeit schon erheblich vom Keplerschen Profil abweicht. Die aufgrund der Selbstgravitation modifizierte Winkelgeschwindigkeit hat aber dennoch keinen Einfluß auf die Effektivtemperatur, da die Scheibe sich in diesen Regionen bereits vollständig im Wärmebad der Umgebung befindet. Die einzige Abweichung vom $r^{-3/4}$ -Verlauf der Effektivtemperatur ist also auf die Umgebungstemperatur zurückzuführen. Insofern können Messungen des radialen Verlaufs der Temperatur, wie sie von Beckwith et al. (1990) durchgeführt wurden, nicht zur Bestimmung der Scheibenmassen

T_W [K]	homogene und isotrope Umgebung								sphärisch exponentielle Umgebung					
	\dot{m}	$10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}$			$10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1}$			$10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}$			$10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1}$			
	Typ	α	KSG ab r [AU]	FSG	α	KSG ab r [AU]	FSG	α	KSG ab r [AU]	FSG	α	KSG ab r [AU]	FSG	
100	β	‡	54.6	–	‡	9.4	63.7	‡	62.1	–	‡	9.6	63.7	
	$\alpha+\beta$	0.043	36.0	–	0.063	9.9	63.8	0.024	42.9	–	0.060	9.9	63.8	
	α	0.043	37.1	–	‡	‡	‡	0.024	–	–	‡	‡	‡	
50	β	‡	38.7	–	‡	9.4	63.7	‡	46.6	–	‡	9.4	63.5	
	$\alpha+\beta$	0.100	31.5	–	0.064	9.9	63.8	0.560	35.8	–	0.063	9.9	63.8	
	α	0.100	30.9	–	‡	‡	‡	‡	‡	‡	‡	‡	‡	
20	β	‡	27.0	–	‡	9.4	63.7	‡	31.7	–	‡	9.4	63.7	
	$\alpha+\beta$	0.251	29.0	–	0.064	9.9	63.8	0.161	30.4	–	0.062	9.8	63.8	
	α	0.251	29.1	–	‡	‡	‡	‡	‡	‡	‡	‡	‡	

‡ für β -Scheiben ist α nicht definiert

† solange eine Scheibe nicht selbstgravitierend wird, unterscheiden sich die Typen ' α ' und ' $\alpha+\beta$ ' nicht

‡ es existieren keine selbstkonsistenten Lösungen (siehe Text)

Tabelle 4.3: Der Parameter α und die Radien, an denen die Akkretionsscheiben Keplersch oder voll selbstgravitierend werden, als Funktion der Temperatur des umgebenden Materials, der Massenakkretionsrate und des Viskositätsparameters β , jeweils für β -Scheiben, gemischte α - und β -Scheiben und für reine α -Scheiben. Für die sphärische Verteilung von ρ_W und T_W sind die angegebenen Temperaturen diejenigen am Außenrand der Scheibe. n_W wurde (am Außenrand) gleich 10^4 cm^{-3} gesetzt. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$.

herangeführt werden. Bei noch höheren Massenakkretionsraten als den hier verwendeten ist dann natürlich schließlich doch eine Auswirkung auf das Temperaturprofil zu erwarten. Es ist aber fraglich, ob dieses einfache Modell gerade hinsichtlich der geforderten Quasistationarität eine geeignete Beschreibung für derart massive Scheiben wäre.

Die Abbildungen 4.24 und 4.25 zeigen schließlich die Variation der optischen Tiefe mit dem Radius. Wie schon bei den Temperaturen lassen sich einzelne Bereiche den entsprechenden Opazitäten zuordnen. Der Anstieg der optischen Tiefe – sofern vorhanden – ganz innen ist auf die Staubverdampfung zurückzuführen. Die weiter außen anschließende Abnahme der optischen Tiefe wird durch den Staub selbst verursacht, bis noch weiter außen die Eisverdampfung für einen erneuten Anstieg der optischen Tiefe verantwortlich ist. Der nachfolgende Abfall bei großen Abständen vom Zentralobjekt schließlich ist eine Folge der Opazität für Eis. Aus den Abbildungen ist ersichtlich, daß die optische Tiefe mit zunehmender Massenakkretionsrate und damit Selbstgravitation der Scheibe im wesentlichen steigt (lokal kann sie durchaus sinken) und daß sich die einzelnen, durch verschiedene Opazitäten verursachten Bereiche zu größeren Radien verschieben, wie es ja aufgrund der zunehmenden Temperatur sein muß. Gleichzeitig ist die optische Tiefe ausgesprochen unabhängig von β und sinkt leicht mit zunehmender Masse des Zentralobjekts.

Für alle vorgestellten Rechnungen wurden auch solche mit $\chi = 1$ durchgeführt, um den Einfluß dieses Parameters auf die Ergebnisse abschätzen zu können. Modifikationen sind nur in dem Fall zu erwarten, in dem die Scheibe optisch dünn wird, da nur das Planck-Mittel durch eine neue Wahl von χ beeinflusst wird. Alle hier durchgeführten Rechnungen sind aber im wesentlichen zumindest marginal optisch dick. Die Scheibe mit der geringsten optischen Dicke ist diejenige mit den Parametern $M_* = 2.5M_\odot$, $\dot{m} = 10^{-7}M_* = 2.5M_\odot \text{ yr}^{-1}$ und $\beta = 10^{-2}$. Selbst für diese Scheibe konnten aber bei Änderung des Wertes für χ keinerlei Unterschiede in den Resultaten festgestellt werden. Die genaue Wahl von χ ist also für protoplanetare Scheiben ohne Bedeutung, genau genommen kann man sogar den Summanden mit dem Planck-Mittel in der Strahlungstransportgleichung (2.23) zumindest bei selbstgravitierenden Akkretionsscheiben völlig vernachlässigen.

Ganz analog hat eine Variation der Dichte des umgebenden Materials zwischen 10^3 und 10^6 Atomen/Molekülen pro cm^{-3} keinen Einfluß auf die Ergebnisse, da die Dichte in der Scheibe diejenige der Umgebung in jedem Abstand bei weitem übersteigt. Die Umgebungstemperatur dagegen modifiziert sehr wohl die Scheibengrößen. Die Resultate für protostellare Scheiben um einen Stern der Masse $0.5M_\odot$ und mit $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$, $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$ sind für verschiedene Umgebungstemperaturen in Tabel-

le 4.3 angegeben. In Abbildung 4.27 sind die Ergebnisse für reine β -Scheiben dargestellt. Deutlich ist der Einfluß der Umgebungstemperatur zu erkennen: mit zunehmendem T_W wachsen auch die Höhe, die Zentral- und Effektivtemperatur sowie die optische Tiefe, sobald die Scheibentemperatur in die Nähe der Umgebungstemperatur kommt. Die Flächendichte selbst ist natürlich nach der Drehimpulserhaltung (2.35) unabhängig von thermodynamischen Größen und ist daher für alle Scheiben gleich. Das Anwachsen der Höhe mit zunehmender Umgebungstemperatur läßt sich leicht nachvollziehen: aufgrund der von der Thermodynamik unbeeinflussten und damit nicht modifizierten Flächendichte ändert sich auch die Gravitationskraft zur Mittelebene hin nicht, und damit ändert sich auch die Druckgradientkraft im hydrostatischen Gleichgewicht nicht. In der 1-Zonen-Näherung bedeutet dies aber, daß das Verhältnis P/h und damit auch $\rho T/h$ konstant ist (der Strahlungsdruck spielt dort keine Rolle). Mit zunehmender Temperatur muß also ρ/h sinken. Bei einer konstanten Flächendichte $\Sigma \propto \rho h$ heißt das aber gerade, daß die Höhe mit der Umgebungstemperatur steigt. Für die Zentral- und die Effektivtemperatur bedeutet die Erhöhung von T_W natürlich zwangsläufig eine Zunahme, da die Scheibe einfach deutlich weiter innen das Wärmebad spürt. Die optische Tiefe schließlich steigt, weil die Opazität für Eis mit zunehmender Temperatur wächst. Zusätzlich werden die Radien, an denen die Scheiben Keplersch selbstgravitierend werden, nach außen geschoben, wenn die Umgebung heißer wird. Dies gilt auch für β -Scheiben. Zwar ist die Flächendichte unabhängig von T_W , und das gleiche gilt für den Abstand, an dem die Scheiben voll selbstgravitierend werden, aber das Einsetzen von Keplerscher Selbstgravitation wird vom Verhältnis h/r mitbestimmt, und die Höhe ändert sich wie beschrieben mit T_W .

Bisher wurde für die umgebende Molekülwolke im Bereich der Scheibe immer ein homogenes und isotropes Dichte- und Temperaturprofil angenommen. Um den Einfluß dieser Näherung zu untersuchen, soll nun ein sphärischer Dichte- und Temperaturverlauf für die Umgebung angesetzt werden, der beim äußeren Rand r_a der Scheibe die hier verwendeten Werte für die homogene Verteilung annimmt, also $\rho_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und $T_W = 50 \text{ K}$. Innen, bei $r = 0$, soll das Doppelte dieser Werte erreicht werden, der Abfall dazwischen sei exponentiell. Die genaue Wahl einer funktionalen Abhängigkeit der Dichte und der Temperatur innerhalb der Molekülwolke selbst ist unbekannt, und man kann hier auch nicht das $\rho \propto r^{-3/2}$ -Profil für frei fallende Materie verwenden, da bei Ausbildung der Scheibe bereits andere physikalische Effekte den Einfall dominieren. Zudem soll hier nur die qualitative Änderung untersucht werden, die eine andere Verteilung der physikalischen Größen in der Molekülwolke bewirkt. Es werden daher die folgenden Dichte- und Temperaturprofile verwendet:

$$\begin{aligned}\rho_W(r) &= 2\rho_W(r_a)e^{-\frac{r}{r_a} \ln 2} , \\ T_W(r) &= 2T_W(r_a)e^{-\frac{r}{r_a} \ln 2} .\end{aligned}$$

In diesem Fall ist die effektive Zentralmasse von der Masse des Protosterns verschieden. In diese muß, wie in 2.1 beschrieben, auch die innerhalb des Radius r liegende Materie des Wolkenmaterials mit einbezogen werden:

$$\begin{aligned}M_{\text{eff}}(r) &= M_* + \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho_W(r)r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = M_* + 4\pi \int_0^r \rho_W(r)r^2 dr \\ &= M_* + 8\pi\rho_W(r_a) \int_0^r e^{-\frac{r}{r_a} \ln 2} r^2 dr \\ &\stackrel{[2.322.2]}{=} M_* - \frac{8\pi\rho_W(r_a)r_a}{\ln^3 2} \left[(r^2 \ln^2 2 + 2rr_a \ln 2 + 2r_a^2) e^{-\frac{r}{r_a} \ln 2} - 2r_a^2 \right] .\end{aligned}$$

Die in eckigen Klammern angegebene Nummer ist dabei wieder die entsprechende Nummer in Gradsh-teyn & Ryzhik (1994). Für die Scheiben mit einer derartigen sphärischen Umgebung sind die Resultate in Tabelle 4.3 angegeben. Abbildung 4.28 zeigt die Ergebnisse für reine β -Scheiben, es wurden wieder die Parameter $M = 0.5M_\odot$, $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$ verwendet. Dargestellt sind die Ergebnisse für die beiden Massenakkretionsraten $\dot{m} = 10^{-6}M_\odot \text{ yr}^{-1}$ und $\dot{m} = 10^{-5}M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Zum besseren Vergleich sind zusätzlich die Resultate für die gleichen Scheiben in einer homogenen und isotropen Umgebung eingetragen, wobei die Dichte und Temperatur bei beiden Scheibentypen am Außenrand $r_a = 100 \text{ AU}$ jeweils identisch sind. Wie schon in Abbildung 4.27 erkennt man, daß eine Erhöhung der Umgebungstemperatur auch zu

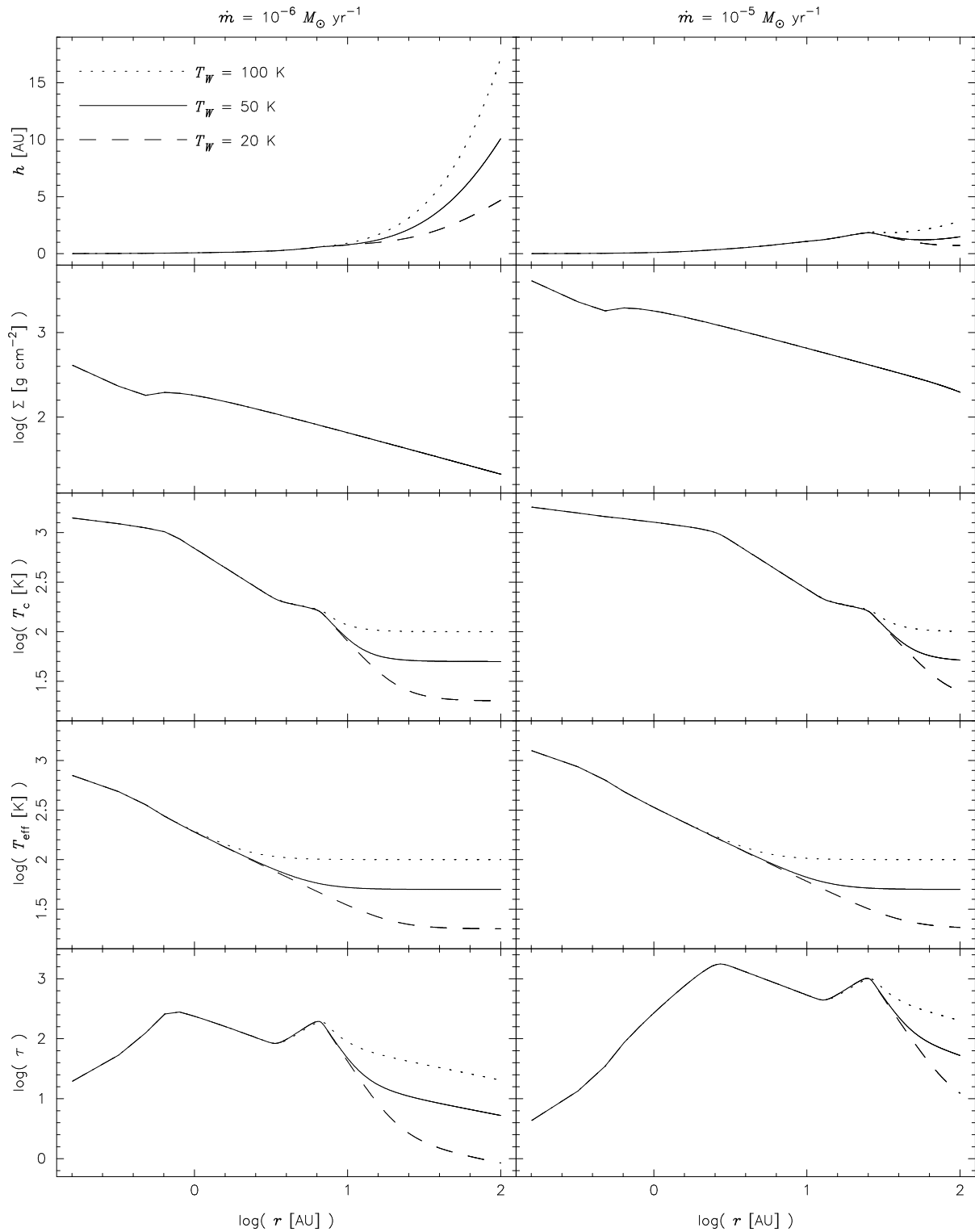


Abbildung 4.27: Höhe, Flächendichte, Zentral- und Effektivtemperatur sowie optische Tiefe als Funktion des Abstands vom Stern für verschiedene Massenakkretionsraten und für unterschiedliche Umgebungstemperaturen. Das Zentralobjekt hat eine Masse von $0.5 M_{\odot}$. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$.

einer Zunahme von h , T_c , T_{eff} und τ führt. Da die Temperatur der Umgebung aber mit zunehmendem Abstand zum Zentralobjekt fällt, sind die Unterschiede kleiner und verschwinden am Außenrand der Scheibe völlig. Das Profil der Effektivtemperatur ist aber erheblich flacher als dasjenige für eine homogene Umgebung. Geeignete Profile vorausgesetzt, kann man hier beliebige radiale Abhängigkeiten der

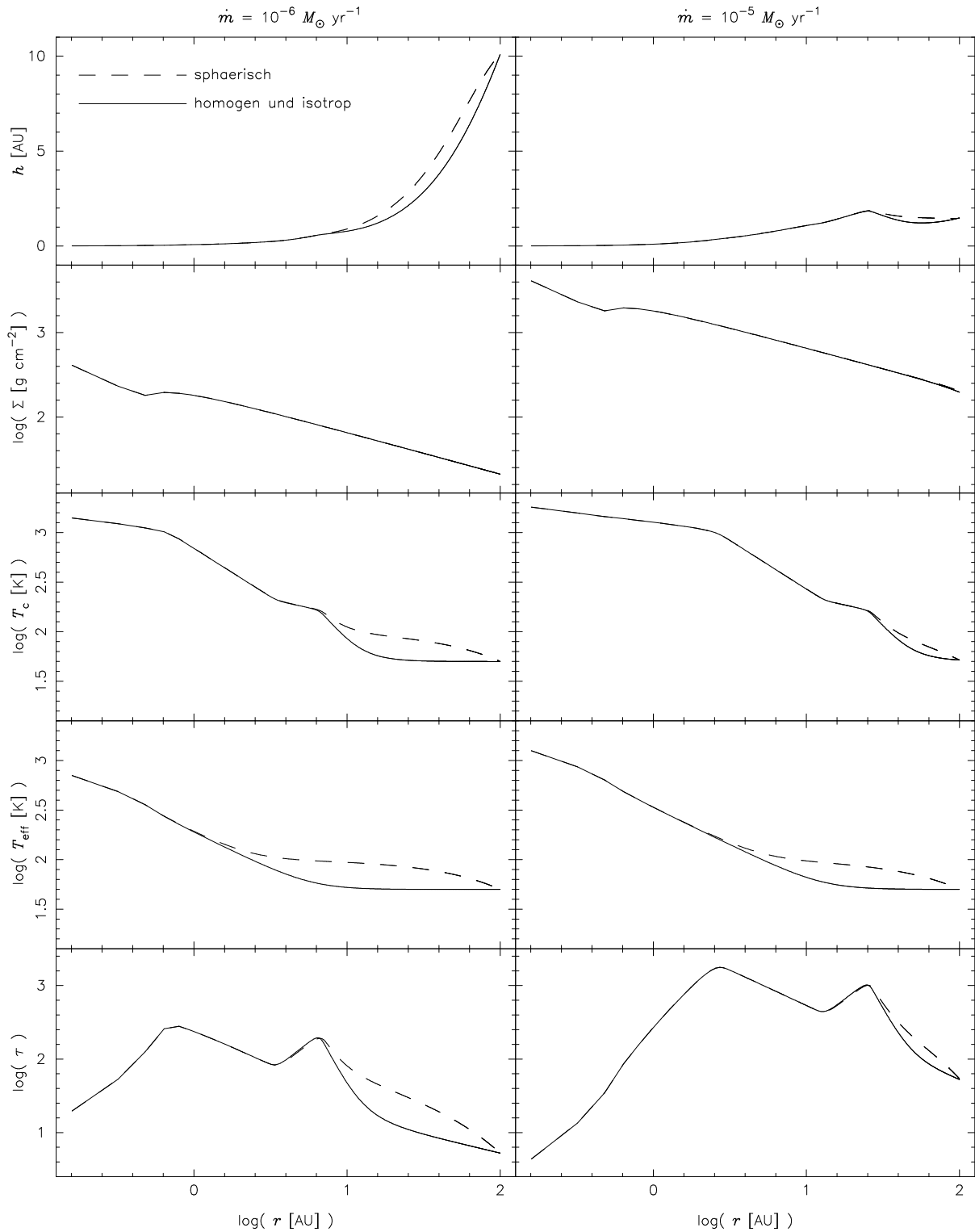


Abbildung 4.28: Höhe, Flächendichte, Zentral- und Effektivtemperatur sowie optische Tiefe als Funktion des Abstands vom Stern für verschiedene Massenakkretionsraten und für unterschiedliche Umgebungsprofile. Das Zentralobjekt hat eine Masse von $0.5 M_{\odot}$. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$.

Effektivtemperatur erzeugen und so zumindest im Prinzip die von Beckwith et al. (1990) enthaltenen Abweichungen von $T \propto r^{-3/4}$ -Verlauf erklären. Natürlich müssten in einer korrekten Behandlung auch noch die Strahlung des Protosterns, die die Scheibe zumindest in den inneren Bereichen aufheizt, und andere physikalische Prozesse wie z.B. Konvektion berücksichtigt werden, um eindeutigere Aussagen über die Gründe für die modifizierten radialen Temperaturabhängigkeiten machen zu können. Diese Rechnun-

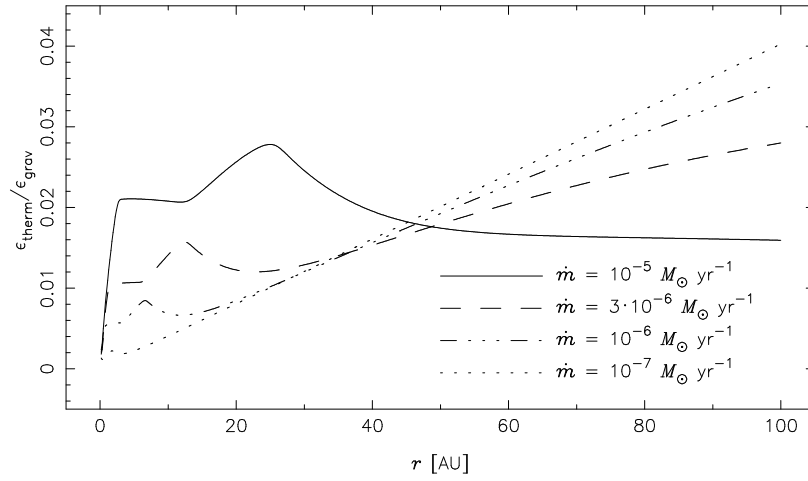


Abbildung 4.29: Das Verhältnis von thermischer zu gravitativer Energiedichte für verschiedene Massenakkretionsraten und eine Zentralmasse von $0.5 M_{\odot}$. Die Scheiben wurden in eine homogene und isotrope Molekülwolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet. Feste Parameter sind $\beta = 10^{-3}$ und $\chi = 2$.

gen zeigen aber, daß die Umgebung, in der sich die Scheibe befindet, einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf die Scheibenphysik haben kann. Weiter ist erneut der Einfluß der Temperatur auf den Ort des Einsetzens Keplerscher Selbstgravitation zu erkennen. Wie schon weiter oben beschrieben, wird er durch die Erhöhung der Temperatur weiter nach außen verschoben.

Abschließend sollen noch die Annahmen überprüft werden, die sich nur im Rahmen selbstkonsistenter Rechnungen a posteriori überprüfen lassen. Dies sind die beiden Annahmen der geometrischen Dünne (siehe 2.1) und der möglichen Vernachlässigung der thermischen gegenüber der gravitativen Energiedichte (siehe 2.2.2.4). Aus den Abbildungen 4.14 und 4.15 ist ersichtlich, daß die erste Annahme mit zunehmender Selbstgravitation immer besser erfüllt ist. Das Verhältnis von thermischer zu gravitativer Energiedichte ist stellvertretend für alle anderen Scheiben, die berechnet wurden, für den Fall einer Scheibe um ein Zentralobjekt der Masse $M = 0.5 M_{\odot}$, die in einer homogenen und isotropen Wolke der Dichte $n_W = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und der Temperatur $T_W = 50 \text{ K}$ eingebettet ist, für $\chi = 2$ und für $\beta = 10^{-3}$ in Abbildung 4.29 gezeigt. Die maximale Energiedeposition von 4% in thermische Energie wird auch von anderen Scheiben nicht überschritten, so daß diese Annahme ebenfalls hervorragend erfüllt ist.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden stationäre Scheibenmodelle mit einer verallgemeinerten, Reynolds-kritischen, turbulenten Viskosität, die als β -Viskosität bezeichnet wird (Duschl et al., 2000), behandelt. Untersucht werden Akkretionsscheiben in AGN und protostellare Scheiben unter Berücksichtigung ihrer Selbstgravitation. Zusätzlich wurden alle relevanten Beiträge zur Opazität, beginnend mit der Opazität für Eis bis hin zu derjenigen für Elektronenstreuung bei höchsten Temperaturen, berücksichtigt.

Sowohl für Scheiben in AGN als auch für protostellare Scheiben konnte erstmals gezeigt werden, daß die Turbulenzgeschwindigkeiten in β -Scheiben auch in nicht-selbstgravitierenden Bereichen subsonisch bleiben können. Damit ist die β -Viskosität für diese Scheiben eine alternative Parametrisierung der Viskosität, zumal sie im stoßdissipationsbegrenzten Limes in die α -Parametrisierung übergeht.

Im Gegensatz dazu ist die α -Viskosität aber keine geeignete Parametrisierung für voll selbstgravitierende Scheiben. Für alle derartigen Scheiben, deren Masse diejenige des Zentralobjekts erreicht oder überschreitet, ist die die Selbstgravitation der Scheibe berücksichtigende Gravitationskraft des Gesamtsystems nach außen gerichtet und kann daher durch kein Winkelgeschwindigkeitsprofil ausbalanciert werden: für solche Scheiben existieren keine selbst-konsistenten (stationären) Lösungen.

Für *Akkretionsscheiben in aktiven galaktischen Kernen* liefert das in dieser Arbeit verwendete Modell für die inneren Bereiche keine mit den in die Theorie eingehenden Näherungen konsistenten Lösungen. Der Grund hierfür liegt in der Verletzung der Annahme, daß die thermische Energiedichte in der Scheibe gegenüber der gravitativen (oder kinetischen) Energiedichte vernachlässigt werden darf. Diese Annahme ist mitunter massiv verletzt. Scheiben, in denen die thermische Energiedichte die gravitative übersteigt, werden als ADAF-Scheiben bezeichnet und sind sowohl aus der Theorie als auch aus der Beobachtung her bekannt. Die hohe thermische Energiedichte in diesen Scheiben resultiert entweder aus einer hohen optische Dicke, die es der Strahlung nicht gestattet zu entweichen, oder die Kühlung läuft wegen zu geringer Dichten zu ineffektiv ab. Die Ausdehnung dieser ADAF-Bereiche wächst mit steigender Massenakkretionsrate und damit zunehmender Selbstgravitation.

Für Scheiben in AGN konnten unter Verwendung der β -Viskosität eindeutige Indikatoren für thermische Scheibeninstabilitäten gefunden werden, die auf starke Änderungen in der Opazität als Folge der einsetzenden H^- -Absorption zurückgehen. Diese Instabilitäten treten typischerweise bei einigen 10^4 Schwarzschildradien auf. Konkrete Aussagen über die Auswirkungen können nur zeitabhängige Modelle liefern, die die in den hier vorgestellten Rechnungen mit 10 Schwarzschildradien sehr kleinen Instabilitätszonen auflösen können. Dabei ist nicht zu befürchten, daß aufwendigere Simulationen diese Instabilität nicht bestätigen werden, da die Opazität sich in diesem engen Bereich mit der zehnten Potenz der Temperatur ändert. Da die Flächendichte außerhalb der Instabilitätszone deutlich geringer als diejenige innerhalb ist, wird die Instabilität zunächst zu einem Massenfluß nach außen führen. Langfristig wird das Material dann aber schließlich doch nach innen fallen und auf das zentrale Schwarze Loch einströmen. Diese thermische Scheibeninstabilität ist grundsätzlich in allen AGN anzutreffen (und ist analog die, die auch für die FU Orionis-Ausbrüche junger Sterne verantwortlich gemacht wird), sobald die Temperatur in der Scheibe unter 10^4 K fällt, da dann die H^- -Absorption im Opazitätsgebirge dominiert. Solange die Gesamtmasse der Scheibe eher klein gegen die Masse des zentralen Schwarzen Lochs ist, werden die Auswirkungen auf das Zentralobjekt ebenfalls vernachlässigbar sein. Sobald die Scheibenmasse aber der Zentralmasse vergleichbar wird oder diese übersteigt, können über solche Instabilitäten eventuell große Mengen an Materie auf sehr kurzen Zeitskalen nach innen akkretiert werden (genauere Aussagen sind wie gesagt zeitabhängigen Modellen vorbehalten). Dies kann aber die enormen Massen der Schwarzen Löcher in Quasaren erklären, die – so sie nicht bereits primordial vorhanden gewesen sein sollten – auf diese Weise in kurzer Zeit den Großteil ihrer Masse aufsammeln könnten. Berücksichtigt man noch die gegenüber der Standardtheorie für Akkretionsscheiben größere radiale Drift bei β -Scheiben, so erscheint die Bildung der massereichsten Schwarzen Löcher im frühen Universum sehr plausibel, zumal in den frühen Phasen Merging-Prozesse die Regel waren, die große Mengen Gas in das Zentrum der Galaxie brachten.

Die Zeitspanne, innerhalb derer Schwarze Löcher tatsächlich auf die heute beobachtbaren Massen anwachsen können, läßt sich nur mit aufwendigeren Modellen berechnen. Um ein möglichst schnelles Wachstum zu ermöglichen, müssen die Massenakkretionsraten entsprechend hoch sein. Dann aber werden die Scheiben innen nur als ADAF-Scheiben beschreibbar sein. Zusätzlich wird von weiter außen einfallendes Gas durch die Instabilitätszone geführt werden müssen. Es werden daher zeitabhängige, zweidimensionale Modelle notwendig sein, die von β -Scheiben (oder Scheiben mit anderer Viskositätsparametrisierung) auf ADAF-Scheiben umschalten können. Die Rechnungen sollten zweidimensional sein, da die ADAF-Scheiben nicht nur optisch, sondern auch geometrisch dick sind, und weil die Höhe sich an der Instabilitätszone stark ändert. Derartige Modelle sollten über die Zeitskala des Anwachsens der Massen Schwarzer Löcher Auskunft geben können.

Bei *protostellaren Scheiben* wachsen die Flächendichte, die Zentraldichte und die Temperatur mit zunehmender Selbstgravitation der Scheibe, während die Höhe absinkt. Insbesondere fällt die Flächendichte in β -Scheiben erheblich langsamer mit dem Radius ab als in α -Scheiben. In ersteren steht damit mehr Material zur Bildung von Planeten zur Verfügung. Das Anwachsen der Dichten in den frühen Phasen der protostellaren Entwicklung wird einen deutlichen Einfluß auf das Wachstum von Staubpartikeln haben. Aufgrund der höheren Zentraldichte können diese schon in größeren Entfernungen vom Zentralobjekt häufiger stoßen und größere Staubagglomerate bilden, die sich von der Gasbewegung abkoppeln. Lösungen für β -Scheiben legen also nahe, daß die Entwicklung größerer Staubkörner viel effektiver erfolgen könnte und die "Saat" für Planetesimale somit schneller gelegt würde. Sobald die Staubteilchen aufgrund einer hinreichenden Größe (\approx dm) von den Stößen der Gasteilchen nicht mehr beeinflusst werden, sie also ihre eigene Aerodynamik aufweisen, sind die Staubteilchen völlig vom Gas entkoppelt und bewegen sich auf eigenen Bahnen. Der Staub hat dann mehr Zeit anzuwachsen, bevor er eventuell im Protostern landet. Eine frühzeitige Entkopplung des Staubes ist nach den hier vorliegenden Ergebnisse wahrscheinlich, aber auch hier werden aufwendigere Modelle zur Klärung dieser Frage benötigt. Gerade in den sehr frühen Phasen mit extrem hohen Massenakkretionsraten muß man das Anwachsen der Zentralmasse durch akkretiertes Material berücksichtigen. Auch wird der Einfall von Materie auf die Scheibe bei der Energiebilanz nicht zu vernachlässigen sein.

Die Abweichungen vom $r^{-3/4}$ -Profil für die Effektivtemperatur, die man bei fast allen Scheiben um junge Sterne in Sternentstehungsgebieten findet, lassen sich nach den Ergebnissen der hier berechneten Scheiben aber nicht auf die Selbstgravitation der Akkretionsscheiben zurückführen. Vielmehr ist die umgebende Molekülwolke für eine nicht-verschwindende Umgebungstemperatur verantwortlich. Dieses Wärmebad, in das die Scheibe eintaucht, überdeckt dabei den Effekt der Selbstgravitation völlig. Dies gilt nicht für Scheiben, die deutlich massereicher sind als die hier gezeigten; für diese Scheiben kann die Annahme der Stationarität aber nur noch schwerlich aufrecht erhalten werden.

Zukünftige Rechnungen müssen daher die zeitliche Entwicklung der Scheibe berücksichtigen, sollten aber im Fall von Akkretionsscheiben in AGN zusätzlich zweidimensional sein. Die vorliegende Arbeit konnte zeigen, daß die β -Viskosität im Gegensatz zur α -Parametrisierung über einen weiten Parameterbereich selbstkonsistente Lösungen bereitstellt. Diese können als Startwerte für zeitabhängige Probleme verwendet werden, zeigen aber auch bereits wichtige und grundlegende Eigenschaften selbstgravitierender Akkretionsscheiben.

Anhang A Berechnung der Planck-gemittelten Opazität

Die Temperaturen in optisch dünnen Scheiben liegen bei etwa 100 K und darunter, so daß hier bei der Berechnung der Opazität nur diejenige für Staub geringer Temperatur berücksichtigt werden muß. Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz besitzt die Kirchhoff-Planck-Funktion dann unterhalb von 10^{13} Hz ein Maximum, und sowohl $B_\nu(T)$ als auch $\partial B_\nu(T)/\partial T$ können für Frequenzen oberhalb von 10^{14} Hz vernachlässigt werden. Sei nun $\nu_0 < 10^{13}$ Hz (die genaue Wahl von ν_0 ist für die hier durchgeführten Rechnungen ohne Bedeutung, solange obige Relation erfüllt ist). Für Frequenzen unterhalb von 10^{13} Hz läßt sich die Opazität dann aus einem Potenzgesetz der Form

$$\kappa_\nu = \kappa_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^\chi \quad (\text{A.1})$$

berechnen, wenn die absorbierenden Staubpartikel Radien unterhalb von $10 \mu\text{m}$ haben (Draine & Lee, 1984). Die Autoren finden $\chi = 2$ für typische, astronomische Silikate, neuere Untersuchungen weisen auf Werte um oder unterhalb von 1 hin (Beckwith & Sargent, 1991). Mit (A.1) findet man für das Planck-Mittel der Opazität

$$\begin{aligned} \kappa_P &= \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T) d\nu}{\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu} = \frac{\kappa_0}{\nu_0^\chi} \frac{\int_0^\infty \nu^\chi B_\nu(T) d\nu}{\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu} \stackrel{(2.15)}{=} \frac{\kappa_0}{\nu_0^\chi} \frac{\int_0^\infty \frac{\nu^{\chi+3}}{e^{h\nu/kT}-1} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1} d\nu} \\ &\stackrel{[3.411.1]}{=} \frac{\kappa_0}{\nu_0^\chi} \frac{\left(\frac{kT}{h}\right)^{4+\chi} \Gamma(4+\chi) \zeta(4+\chi)}{\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \Gamma(4) \zeta(4)} = \kappa_0 \frac{\Gamma(4+\chi) \zeta(4+\chi)}{\Gamma(4) \zeta(4)} \left(\frac{kT}{h\nu_0}\right)^\chi. \end{aligned}$$

Die in eckigen Klammern angegebene Nummer gibt die entsprechende Nummer in Gradshteyn & Ryzhik (1994) an, unter der dieses Integral zu finden ist.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

für $\text{Re}(z > 0)$ ist dabei die Gamma-Funktion und

$$\zeta(z) = \frac{2^{z-1}}{z-1} - 2^z \int_0^\infty \frac{(1+t^2)^{-z/2}}{e^{\pi t} + 1} \sin(z \arctan t) dt$$

die Riemannsche Zeta-Funktion. Für das Rosseland-Mittel der Opazität erhält man

$$\begin{aligned} \kappa_R &= \frac{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu} = \frac{\kappa_0}{\nu_0^\chi} \frac{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \nu^{-\chi} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu} \stackrel{(2.15)}{=} \frac{\kappa_0}{\nu_0^\chi} \frac{\int_0^\infty \nu^4 \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\nu^{4-\chi} e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2} d\nu} \\ &= \frac{\kappa_0}{\nu_0^\chi} \left(\frac{kT}{h}\right)^\chi \frac{\int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x-1)^2} dx}{\int_0^\infty \frac{x^{4-\chi} e^x}{(e^x-1)^2} dx} = \kappa_0 \frac{Z(4)}{Z(4-\chi)} \left(\frac{kT}{h\nu_0}\right)^\chi \end{aligned}$$

mit

$$Z(y) := \int_0^{\infty} \frac{x^y e^x}{(e^x - 1)^2} dx . \quad (\text{A.2})$$

Zusammen findet man daher die folgende Beziehung zwischen den beiden gemittelten Opazitäten:

$$\kappa_P = \frac{Z(4 - \chi)\Gamma(4 + \chi)\zeta(4 + \chi)}{Z(4)\Gamma(4)\zeta(4)} \kappa_R . \quad (\text{A.3})$$

Anhang B Lösungen spezieller algebraischer Gleichungen der Ordnung n

B.1 Lösung der Gleichung (2.31)

Gegeben sei eine Gleichung der Form

$$x^6 + A_1 x^4 + A_2 = 0 \tag{B.1}$$

mit $A_1 > 0$ und $A_2 < 0$. Offensichtlich bietet es sich an, zunächst die Gleichung

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 = 0 \tag{B.2}$$

mit $y := x^2$ zu betrachten. Durch die Substitution

$$z := y + \frac{1}{3}A_1 = x^2 + \frac{1}{3}A_1$$

gelangt man zu der reduzierten Gleichung

$$z^3 + pz + q = 0$$

mit

$$p := -\frac{1}{3}A_1^2, \\ q := \frac{2}{27}A_1^3 + A_2 .$$

Für diese Gleichung existiert die Cardanosche Lösungsformel

$$z_1 = u + v, \\ z_2 = \frac{u + v}{2} + i\sqrt{3}\frac{u - v}{2}, \\ z_3 = \frac{u + v}{2} - i\sqrt{3}\frac{u - v}{2}$$

mit

$$u := \sqrt[3]{-\frac{1}{27}A_1^3 + \frac{1}{2}A_2 + \sqrt{D}}, \\ v := -\frac{1}{9}\frac{A_1^2}{u}$$

und der Diskriminante

$$D := \left(\frac{1}{3}p\right)^3 + \left(\frac{1}{2}q\right)^2 = \left(-\frac{1}{9}A_1^2\right)^3 + \left(-\frac{1}{27}A_1^3 + \frac{1}{2}A_2\right)^2 = \frac{1}{27}A_1^3A_2 + \frac{1}{4}A_2^2.$$

Die Lösungen von (B.2) lauten daher

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{6}C_1 + \frac{2}{3}\frac{A_1^2}{C_1} - \frac{1}{3}A_1, \\ y_2 &= -\frac{1}{12}C_1 - \frac{1}{3}\frac{A_1^2}{C_1} - \frac{1}{3}A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\frac{1}{6}C_1 - \frac{2}{3}\frac{A_1^2}{C_1}\right), \\ y_3 &= -\frac{1}{12}C_1 - \frac{1}{3}\frac{A_1^2}{C_1} - \frac{1}{3}A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\left(\frac{1}{6}C_1 - \frac{2}{3}\frac{A_1^2}{C_1}\right) \end{aligned}$$

mit

$$C_1 := \sqrt[3]{-108A_2 - 8A_1^3 + 12\sqrt{81A_2^2 + 12A_1^3A_2}}.$$

Abhängig vom Vorzeichen der Diskriminante ergibt sich jeweils ein unterschiedliches Lösungsverhalten: Ist $D > 0$, so existiert nur eine reelle Lösung, für $D < 0$ gibt es drei reelle Lösungen, und für $D = 0$ erhält man eine reelle Lösung und eine reelle Doppellösung. Da die Lösungen von (B.1) aber gleich den Wurzeln der Lösungen y_i für (B.2) sind und diese Lösungen reell sein sollen, ist man nur an positiven Lösungen y_i interessiert. Es bleibt also zu zeigen, daß es mit den Bedingungen $A_1 > 0$ und $A_2 < 0$ solche positiven Lösungen gibt. Dazu betrachtet man die drei verschiedenen, durch das Vorzeichen der Diskriminante bestimmten Lösungsvarianten:

1. $D > 0$, d.h. $A_2 < -\frac{4}{27}A_1^3$

Wenn es nur eine reelle Lösung gibt, dann existieren zwei komplexe Lösungen, die komplex konjugiert zueinander sind. Seien ς die reelle Lösung und $\varrho \pm i\varpi$ die komplexen Lösungen. Die Zerlegung in die Linearfaktoren ergibt dann

$$\begin{aligned} (y - \varsigma)(y - \varrho - i\varpi)(y - \varrho + i\varpi) &= y^3 - (2\varrho + \varsigma)y^2 + (2\varsigma\varrho + \varrho^2 + \varpi^2)y - (\varsigma\varrho^2 + \varsigma\varpi^2) \\ &= y^3 + A_1 y^2 + A_2. \end{aligned}$$

Aus $A_2 < 0$ folgt daher

$$\begin{aligned} \varsigma(\varrho^2 + \varpi^2) &> 0 \\ \Rightarrow \varsigma &> 0 \end{aligned}$$

und die einzige reelle Lösung ς ist positiv.

2. $D = 0$, d.h. $A_2 = -\frac{4}{27}A_1^3$

In diesem Fall gibt es eine reelle Lösung ϱ und eine reelle Doppellösung ϖ . Die Zerlegung in Linearfaktoren liefert dann

$$\begin{aligned} (y - \varrho)(y - \varpi)^2 &= y^3 + (\varrho - 2\varpi)y^2 + (2\varrho\varpi + \varpi^2)y - \varrho\varpi^2 \\ &= y^3 + A_1 y^2 + A_2. \end{aligned}$$

Aus $A_2 < 0$ folgt sofort

$$\begin{aligned} \varrho\varpi^2 &> 0 \\ \Rightarrow \varrho &> 0. \end{aligned}$$

Mit $2\rho\varpi + \varpi^2 = 0$ findet man dann

$$\begin{aligned}\varpi(2\rho + \varpi) &= 0 \\ \Rightarrow 2\rho + \varpi &= 0 \\ \Rightarrow \varpi &= -2\rho < 0.\end{aligned}$$

Der Fall $\varpi = 0$ braucht nicht betrachtet zu werden, da er wegen $A_2 < 0$ entfällt. Die Doppellösung ist daher negativ und es existiert genau eine positive Lösung.

3. $D < 0$, d.h. $A_2 > -\frac{4}{27}A_1^3$

In diesem Fall existieren drei reelle Lösungen ς , ρ und ϖ , und es gilt für die Zerlegung in Linearfaktoren

$$\begin{aligned}(y - \varsigma)(y - \rho)(y - \varpi) &= y^3 - (\varsigma + \rho + \varpi)y^2 + (\varsigma\rho + \varsigma\varpi + \rho\varpi)y - \varsigma\rho\varpi \\ &= y^3 + A_1 y^2 + A_2.\end{aligned}$$

Aus $A_2 < 0$ folgt $\varsigma\rho\varpi > 0$. O.B.d.A. kann man daher $\varsigma > 0$ setzen. ρ und ϖ sind dann entweder beide positiv oder beide negativ. Wegen $A_1 > 0$ folgt aber

$$\varsigma + \rho + \varpi < 0$$

und daher können ρ und ϖ nicht positiv sein. Auch in diesem Fall gibt es also nur eine positive Lösung.

Insgesamt existiert also in jedem Fall genau eine positive Lösung y_i der Gleichung (B.2). Daher hat auch die Gleichung (B.1) genau eine positive und damit physikalisch sinnvolle Lösung, nämlich die positive Quadratwurzel der positiven Lösung von (B.2). Die gesuchte Lösung von (B.1) ist daher

$$x = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{6}C_1 + \frac{2}{3}\frac{A_1^2}{C_1} - \frac{1}{3}A_1} & A_2 < -\frac{4}{27}A_1^3 \\ \sqrt{\frac{1}{3}A_1} & A_2 = -\frac{4}{27}A_1^3 \\ \sqrt{\max(y_1, y_2, y_3)} & A_2 > -\frac{4}{27}A_1^3 \end{cases}$$

B.2 Lösung der Gleichung (2.33)

Gegeben sei eine Gleichung vierten Grades der Form

$$x^4 + A_3x + A_4 = 0 \tag{B.3}$$

mit $A_3 > 0$ und $A_4 < 0$. Das Lösungsverfahren soll hier nur kurz skizziert werden. Man stellt für (B.3) die sogenannte kubische Resolvente

$$z^3 - 4A_4z - A_3^2 = 0$$

auf und bestimmt für diese bereits in reduzierter Form vorliegende Gleichung dritten Grades, wie in B.1 beschrieben, die Lösungen z_1 , z_2 und z_3 . Aus diesen erhält man die Lösungen für (B.3) gemäß

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}), \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}), \\ x_3 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}), \\ x_4 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}).\end{aligned}$$

Folgt man diesem Weg, so lauten die Lösungen der Gleichung (B.3):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{12^{2/3} C_3^{1/6} C_4^{1/4}} \left[C_4^{3/4} + i \sqrt{C_4^{3/2} + 36 A_3 \sqrt{C_3}} \right], \\ x_2 &= \frac{1}{12^{2/3} C_3^{1/6} C_4^{1/4}} \left[C_4^{3/4} - i \sqrt{C_4^{3/2} + 36 A_3 \sqrt{C_3}} \right], \\ x_3 &= -\frac{1}{12^{2/3} C_3^{1/6} C_4^{1/4}} \left[C_4^{3/4} - \sqrt{-C_4^{3/2} + 36 A_3 \sqrt{C_3}} \right], \\ x_4 &= -\frac{1}{12^{2/3} C_3^{1/6} C_4^{1/4}} \left[C_4^{3/4} + \sqrt{-C_4^{3/2} + 36 A_3 \sqrt{C_3}} \right] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} C_3 &:= 9A_3^2 + \sqrt{81A_3^4 - 768A_4^3} > \sqrt{-768A_4^3} > 0, \\ C_4 &:= \sqrt[3]{18C_3^2} + 24A_4 > 0. \end{aligned}$$

Wegen $C_4^{3/2} + 36A_3\sqrt{C_3} > 0$ sind die beiden ersten Lösungen komplex. Die letzten beiden Lösungen sind reell, wie man leicht zeigen kann. Dazu ist nur zu beweisen, daß

$$-C_4^{3/2} + 36A_3\sqrt{C_3} > 0$$

gilt. Kann man gar

$$-2C_4^{3/2} + 36A_3\sqrt{C_3} = 2 \left(-C_4^{3/2} + 18A_3\sqrt{C_3} \right) > 0$$

zeigen, so folgt zusätzlich wegen

$$\begin{aligned} &-2C_4^{3/2} + 36A_3\sqrt{C_3} > 0 \\ \Rightarrow &C_4^{3/2} < -C_4^{3/2} + 36A_3\sqrt{C_3} \\ \Rightarrow &C_4^{3/4} < \sqrt{-C_4^{3/2} + 36A_3\sqrt{C_3}}, \end{aligned}$$

daß x_3 positiv, x_4 aber negativ ist. Zu zeigen ist also

$$-2C_4^{3/2} + 36A_3\sqrt{C_3} > 0.$$

Beim Beweis muß man zwei Fälle unterscheiden:

$$1. \quad 81A_3^4 \geq -768A_4^3$$

In diesem Fall gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} C_3^2 &\leq 4 \max(81A_3^4, 81A_3^4 - 768A_4^3) \\ &\leq 4(81A_3^4 - 768A_4^3) \\ &\leq 8 \cdot 81A_3^4, \\ C_3 &> 18A_3^2, \end{aligned}$$

$$C_4 < \sqrt[3]{18C_3^2} < \sqrt[3]{18 \cdot 8 \cdot 81A_3^4},$$

$$-A_4 \leq \sqrt[3]{\frac{81}{768}A_3^4}.$$

Hiermit findet man:

$$\begin{aligned} C_4^3 &= 18C_3^2 + 3(18C_3^2)^{2/3}24A_3 + 3(18C_3^2)^{1/3}24^2A_4^2 + 24^3A_4^3 \\ &= 18C_3^2 + 24^3A_4^3 + 3\sqrt[3]{18C_3^2}24A_4 \left(\sqrt[3]{18C_3^2} + 24A_4 \right) \\ &= 18C_3^2 + 24^3A_4^3 + 3\sqrt[3]{18C_3^2}24A_4C_4 \\ &< 8 \cdot 18 \cdot 81A_3^4 - 24^3 \frac{81}{768}A_3^4 - 3\sqrt[3]{8 \cdot 18 \cdot 81A_3^4}24\sqrt[3]{\frac{81}{768}A_3^4}\sqrt[3]{8 \cdot 18 \cdot 81A_3^4} \\ &= 7 \cdot 18 \cdot 81A_3^4 - 3\sqrt[3]{64}18 \cdot 81A_3^4 \\ &< 4 \cdot 18 \cdot 81A_3^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_4^{3/2} < 18^{3/2}A_3^2 < 18A_3\sqrt{18A_3^2} < 18A_3\sqrt{C_3}$$

$$\Rightarrow -2C_4^{3/2} + 36A_3\sqrt{C_3} > 0.$$

2. $81A_3^4 < -768A_4^3$

Diesmal gelten die folgenden Abschätzungen:

$$C_3^2 < 8 \cdot (-768A_4^3)$$

$$C_3 > \sqrt{-768A_4^3}$$

$$C_4 < \sqrt[3]{18C_3^2} < \sqrt[3]{18 \cdot 8 \cdot (-768A_4^3)}$$

$$A_3 < \sqrt[4]{-\frac{768}{81}A_4^3}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} C_4^3 &= 18C_3^2 + 24^3A_4^3 + 3\sqrt[3]{18C_3^2}24A_4C_4 \\ &< 18 \left(81A_3^4 + 81A_3^4 - 768A_4^3 + 2\sqrt{81A_3^4 - 768A_4^3}9A_3^2 \right) + 24^3A_4^3 + 3(18C_3^2)^{2/3}24A_4 \\ &< 36 \left(81A_3^4 + \sqrt{2}(-768A_4^3) \right) + 3\sqrt[3]{8^218^2(-768A_4^3)^2}24A_4 \\ &= 36 \cdot 81A_3^4 + 36\sqrt{2}(-768A_4^3) + 3\sqrt[3]{8^218^3768^3A_4^6}A_4 \\ &= 36 \cdot 81A_3^4 + 36\sqrt{2}(-768A_4^3) - 54\sqrt[3]{64}(-768A_4^3) \\ &< 36 \cdot 81A_3^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_4^{3/2} < 54A_3^2 = 18A_3 \cdot 3A_3 < 18A_3\sqrt[4]{-768A_4^3} < 18A_3\sqrt{C_3}$$

$$\Rightarrow -2C_4^{3/2} + 36A_3\sqrt{C_3} > 0$$

q.e.d.

Die einzige physikalisch sinnvolle Lösung ist daher $x = x_3$.

B.3 Lösung der Gleichung (2.39)

Gegeben sei eine Gleichung dritten Grades der Form

$$x^3 + B_1x + B_2 = 0 \quad (\text{B.4})$$

mit $B_1 > 0$ und $B_2 < 0$, die bereits in reduzierter Form vorliegt. Wie in B.1 beschrieben, erhält man auch hier die drei Lösungen dieser Gleichung; diese sind

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6}C_5 - \frac{2B_1}{C_5}, \\ x_2 &= -\frac{1}{12}C_5 + \frac{B_1}{C_5} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(\frac{1}{6}C_5 + \frac{2B_1}{C_5} \right), \\ x_3 &= -\frac{1}{12}C_5 + \frac{B_1}{C_5} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(\frac{1}{6}C_5 + \frac{2B_1}{C_5} \right) \end{aligned}$$

mit

$$C_5 := \sqrt[3]{-108B_2 + 12\sqrt{12B_1^3 + 81B_2^2}}.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$D = \left(\frac{1}{3}B_1\right)^3 + \left(\frac{1}{2}B_2\right)^2 > 0,$$

damit hat (B.4) genau eine reelle Lösung. Sei ς diese reelle Lösung und seien $\varrho \pm i\varpi$ die beiden komplex konjugierten Lösungen der Gleichung. Die Zerlegung in Linearfaktoren ergibt

$$\begin{aligned} (y - \varsigma)(y - \varrho - i\varpi)(y - \varrho + i\varpi) &= y^3 - (2\varrho + \varsigma)y^2 + (2\varsigma\varrho + \varrho^2 + \varpi^2)y - (\varsigma\varrho^2 + \varsigma\varpi^2) \\ &= y^3 + B_1 y + B_2. \end{aligned}$$

Aus $B_2 < 0$ folgt

$$\varsigma(\varrho^2 + \varpi^2) > 0$$

$$\Rightarrow \varsigma > 0$$

und die einzige reelle Lösung ist positiv und damit eine physikalisch sinnvolle Lösung.

B.4 Lösung der Gleichung (2.44)

Gegeben sei eine Gleichung

$$x^6 + B_3x^4 + B_4x^2 + B_5 = 0 \quad (\text{B.5})$$

mit $B_3, B_4, B_5 < 0$. Mit der Substitution $y = x^2$ erhält man daraus eine Gleichung dritten Grades

$$y^3 + B_3y^2 + B_4y + B_5 = 0. \quad (\text{B.6})$$

Die reduzierte Form dieser Gleichung ist

$$y^3 + py + q = 0$$

mit

$$p := B_4 - \frac{1}{3}B_3^2 ,$$

$$q := \frac{2}{27}B_3^3 - \frac{1}{3}B_3B_4 + B_5 .$$

Wie in B.1 beschrieben, erhält man für die drei Lösungen dieser Gleichung

$$y_1 = \frac{1}{6}C_6 - 6C_7 - \frac{1}{3}B_3 ,$$

$$y_2 = -\frac{1}{12}C_6 + 3C_7 - \frac{1}{3}B_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(\frac{1}{6}C_6 + 6C_7 \right) ,$$

$$y_3 = -\frac{1}{12}C_6 + 3C_7 - \frac{1}{3}B_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}i \left(\frac{1}{6}C_6 + 6C_7 \right)$$

mit

$$C_6 := \sqrt[3]{36B_3B_4 - 108B_5 - 8B_3^3 - 12\sqrt{12B_4^3 - 3B_3^2B_4^2 - 54B_3B_4B_5 + 81B_5^2 + 12B_3^3B_5}}$$

$$C_7 := \frac{\frac{1}{3}B_4 - \frac{1}{9}B_3^2}{C_6} .$$

Die Diskriminante von (B.6) ist

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{1}{3}p\right)^3 + \left(\frac{1}{3}q\right)^2 = \left(\frac{1}{3}B_4 - \frac{1}{9}B_3^2\right)^3 + \left(\frac{1}{27}B_3^3 - \frac{1}{6}B_3B_4 + \frac{1}{2}B_5\right)^2 \\ &= \frac{1}{27}B_4^3 - \frac{1}{108}B_3^2B_4^2 - \frac{1}{6}B_3B_4B_5 + \frac{1}{4}B_5^2 + \frac{1}{27}B_3^3B_5 . \end{aligned}$$

Das Lösungsverhalten von (B.6) hängt wieder vom Vorzeichen der Diskriminante ab. Wie in B.1 beschrieben, existieren drei Fälle:

1. $D > 0$, d.h. es existiert nur eine reelle Lösung

Sei ς diese reelle Lösung und seien $\varrho \pm i\varpi$ die beiden komplex konjugierten Lösungen. Dann folgt aus der Zerlegung in die Linearfaktoren

$$\varsigma(\varrho^2 + \varpi^2) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \varsigma > 0 ,$$

d.h. die einzige reelle Lösung ist positiv.

2. $D = 0$, d.h. es existiert eine reelle Lösung und eine reelle Doppellösung

Sei ϱ die Einzel- und ϖ die Doppellösung. Durch die Zerlegung in Linearfaktoren weiß man

$$\varrho\varpi^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \varrho > 0 .$$

Aus

$$2\rho\varpi + \varpi^2 < 0$$

folgt daraus

$$\varpi < 0$$

und es gibt wieder nur eine positive Lösung.

3. $D > 0$, d.h. es gibt drei reelle Lösungen

Seien ς , ρ und ϖ diese Lösungen. Aus der Zerlegung in Linearfaktoren erhält man die Beziehungen

$$\varsigma\rho\varpi > 0 \quad \text{und} \quad \varsigma\rho + \varsigma\varpi + \rho\varpi < 0.$$

Aus der ersten Ungleichung folgt, daß mindestens eine Lösung positiv ist und daß die beiden anderen Lösungen entweder beide positiv oder beide negativ sind. Aufgrund der zweiten Ungleichung können aber nicht alle Lösungen positiv sein, d.h. die beiden anderen müssen negativ sein. Auch in diesem Fall existiert also nur eine positive Lösung

Insgesamt ist man nur an positiven Lösungen interessiert, aus denen man die Quadratwurzel ziehen kann, um zu Lösungen für (B.5) zu kommen. Die physikalisch sinnvollen Lösungen von (B.5) sind daher

$$x = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{8}C_6 - 6C_7 - \frac{1}{3}B_3} & D \geq 0 \\ \sqrt{\max(y_1, y_2, y_3)} & D < 0 \end{cases}$$

Anhang C Das Potential einer unendlich dünnen Scheibe mit $\Sigma = const$

Das Potential einer Scheibe mit konstanter Flächendichte $\Sigma(r) = \Sigma_0 = const$, mit einem nicht verschwindenden inneren Rand r_i und einem äußeren Rand r_a kann analytisch berechnet werden. Die Dichte ist in diesem Fall durch $\rho(\vec{r}') = \Sigma(r')\delta(z') = \Sigma_0\delta(z')$, und das Volumenelement ist durch $d^3r' = r' dr' d\varphi' dz'$ gegeben. Für das Potential der Scheibe gilt daher bei zunächst nur von φ' unabhängiger, ansonsten aber beliebiger Flächendichte

$$\begin{aligned}
\Phi_D(r) &= -G \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Sigma(r')r'\delta(z')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi' + z'^2}} dz' d\varphi' dr' \\
&= -G \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma(r')r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'}} d\varphi' dr' \\
&= -2G \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{\pi} \frac{\Sigma(r')r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'}} d\varphi' dr' \\
&= -2G \left[\int_{r_i}^r \int_0^{\pi} \frac{\Sigma(r')r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'}} d\varphi' dr' + \int_r^{r_a} \int_0^{\pi} \frac{\Sigma(r')r'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'}} d\varphi' dr' \right] \\
&= -2G \left[\int_{r_i}^r \frac{r'}{r} \Sigma(r') \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\varphi' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} d\varphi' dr' \right. \\
&\quad \left. + \int_r^{r_a} \Sigma(r') \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r'}\cos\varphi' + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}} d\varphi' dr' \right] \\
&\stackrel{[3.674.1]}{=} -4G \left[\int_{r_i}^r \frac{r'}{r} \Sigma(r') K\left(\frac{r'}{r}\right) dr' + \int_r^{r_a} \Sigma(r') K\left(\frac{r}{r'}\right) dr' \right].
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet die Zahl in eckigen Klammern über dem letzten Gleichheitszeichen die entsprechende Nummer der Gleichung in Gradshteyn & Ryzhik (1994), und $K(x)$ ist das vollständige elliptische Integral erster Art. Für $\Sigma(r') = \Sigma_0 = const$ vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned}
\Phi_D(r) &= -4G\Sigma_0 \left[\int_{r_i}^r \frac{r'}{r} K\left(\frac{r'}{r}\right) dr' + \int_r^{r_a} K\left(\frac{r}{r'}\right) dr' \right] \\
&= -4G\Sigma_0 \left[r \int_{r_i/r}^1 x K(x) dx - r \int_1^{r/r_a} \frac{1}{x^2} K(x) dx \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{[5.112.3\&9]}{=} -4G\Sigma_0 r \left[\left(E(x) - \sqrt{1-x^2} K(x) \right) \Big|_{r_i/r}^1 + \frac{E(x)}{x} \Big|_1^{r/r_a} \right] \\
& = -4G\Sigma_0 r \left[E(1) - E\left(\frac{r_i}{r}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} K\left(\frac{r_i}{r}\right) + \frac{r_a}{r} E\left(\frac{r}{r_a}\right) - E(1) \right] \\
& = -4G\Sigma_0 r_a E\left(\frac{r}{r_a}\right) + 4G\Sigma_0 r \left[E\left(\frac{r_i}{r}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right].
\end{aligned}$$

$E(x)$ ist hierbei das vollständige elliptische Integral zweiter Art. Ist man wie in 3.1.1 an dem Potential für $r_i \rightarrow 0$ interessiert, so verschwindet der zweite Summand wegen $E(0) = K(0) = \frac{\pi}{2}$ und man erhält

$$\Phi_D(r) = -4G\Sigma_0 r_a E\left(\frac{r}{r_a}\right). \quad (\text{C.1})$$

Mit

$$K'(x) = \frac{1}{x} \left[\frac{E(x)}{1-x^2} - K(x) \right] = K(\sqrt{1-x^2})$$

und

$$E'(x) = \frac{1}{x} [E(x) - K(x)] = E(\sqrt{1-x^2})$$

(Gleichungen (8.112.1) – (8.112.4) in Gradshteyn & Ryzhik (1994)) erhält man für die erste Ableitung des Potentials

$$\begin{aligned}
\Phi_D'(r) & = -4G\Sigma_0 E\left(\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2}\right) + 4G\Sigma_0 \left[E\left(\frac{r_i}{r}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right] \\
& \quad + 4G\Sigma_0 r \left[-\frac{1}{r} \left(E\left(\frac{r_i}{r}\right) - K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}} \frac{r_i^2}{r^3} K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} \frac{1}{r} \left(\frac{E\left(\frac{r_i}{r}\right)}{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} - K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right) \right] \\
& = -4G\Sigma_0 E\left(\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2}\right) \\
& \quad - 4G\Sigma_0 \left[\left(2\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} - 1 \right) K\left(\frac{r_i}{r}\right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}} \left(E\left(\frac{r_i}{r}\right) - \frac{r_i^2}{r^2} K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung des Potentials einer Scheibe mit konstanter Massenbelegung erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\Phi_D''(r) & = -4G\Sigma_0 \frac{r}{r_a \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2}} E\left(\frac{r}{r_a}\right) \\
& \quad - 4G\Sigma_0 \left[2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}} \frac{r_i^2}{r^3} K\left(\frac{r_i}{r}\right) - \left(2\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} - 1 \right) \frac{1}{r} \left(\frac{E\left(\frac{r_i}{r}\right)}{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} - K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}} \left(E\left(\frac{r_i}{r}\right) - \frac{r_i^2}{r^2} K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right) \frac{r_i^2}{r^3} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}} \\
& \cdot \left(-\frac{1}{r} \left(E\left(\frac{r_i}{r}\right) - K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right) + 2 \frac{r_i^2}{r^3} K\left(\frac{r_i}{r}\right) + \frac{r_i^2}{r^3} \left(\frac{E\left(\frac{r_i}{r}\right)}{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} - K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right) \right) \Big] \\
& = -4G\Sigma_0 \frac{r}{r_a \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_a}\right)^2}} E\left(\frac{r}{r_a}\right) - \frac{4G\Sigma_0}{r} \left[\left(2\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} - 1 \right) K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right. \\
& \quad - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}} \left(E\left(\frac{r_i}{r}\right) + K\left(\frac{r_i}{r}\right) - \frac{r_i^2}{r^2} K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right) \\
& \quad \left. + \frac{1}{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2} E\left(\frac{r_i}{r}\right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}} \frac{r_i^4}{r^4} K\left(\frac{r_i}{r}\right) \right].
\end{aligned}$$

Wieder erhält man wegen $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$ für $r_i \rightarrow 0$ bei beiden Ableitungen die in 3.1.1 angegebenen einfacheren Lösungen.

Anhang D Ein Verfahren zur Potentialberechnung nach Gauss

Ein Verfahren zur Berechnung 3-dimensionaler Potentiale mit Azimutalsymmetrie geht auf Gauss zurück und ist z.B. in MacMillan (1958) nachzulesen. An dieser Stelle soll das Verfahren unter der Vereinfachung einer unendlich dünnen, azimutal-symmetrischen Scheibe kurz angegeben werden. Dabei kann man sich, wie Gauss, auf die Berechnung des Potentials eines Massenrings an einer bestimmten Stelle beschränken.

Das Potential eines Rings mit Radius r' an einem Punkt $P = (r, 0, 0)$, $r \neq r'$, ist gegeben durch

$$\Phi(r) = -2Gr'\lambda \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi'}} d\varphi' ,$$

wenn λ die konstante Masse des Rings pro Einheitslänge ist. Man definiert nun den maximalen Abstand p des Punktes P vom Ring und den minimalen Abstand q zu ihm:

$$\begin{aligned} p &:= r + r' , \\ q &:= |r - r'| . \end{aligned}$$

Damit gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \varrho &:= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi' = \frac{p^2 + q^2}{2} - \frac{p^2 - q^2}{2} \cos \varphi' = p^2 \sin^2 \frac{\varphi'}{2} + q^2 \cos^2 \frac{\varphi'}{2} \\ \Rightarrow \Phi(r) &= -2Gr'\lambda \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{p^2 \sin^2 \frac{\varphi'}{2} + q^2 \cos^2 \frac{\varphi'}{2}}} d\varphi' \\ &\stackrel{\varphi' = \pi - 2\vartheta}{=} -4Gr'\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{p^2 \cos^2 \vartheta + q^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta \\ &= -\frac{4Gr'\lambda}{p} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \vartheta + \frac{q^2}{p^2} \sin^2 \vartheta}} d\vartheta . \end{aligned} \tag{D.1}$$

Das Integral hängt nur von dem Verhältnis $\frac{q}{p}$ ab, d.h. an jedem Punkt in der rz -Ebene (wenn der Ring in der $r\varphi$ -Ebene liegt) mit dem gleichen Verhältnis ist das Potential identisch. Sei P_1 der Punkt innerhalb des Massenrings, für den das Verhältnis von minimalem Abstand q_1 und maximalem Abstand p_1 zum Ring gleich $\frac{q}{p}$ ist. Es gilt dann

$$p\Phi(r) = p_1\Phi(P_1) . \tag{D.2}$$

Zu jedem Punkt P existiert ein solcher Punkt P_1 : entweder liegt P bereits innerhalb des betrachteten Massenrings und es gilt $p_1 = p$ und $q_1 = q$, oder aber der Punkt P liegt außerhalb des Rings, dann

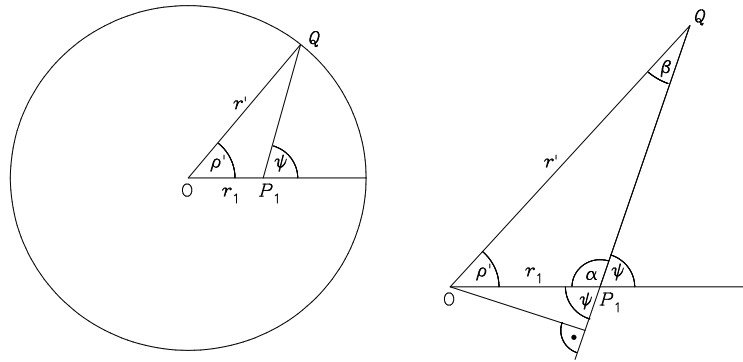


Abbildung D.1: Skizze zur Erklärung der im Text verwendeten Winkel, Längen und Punkte.

bestimmt man p_1 und q_1 über die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 + q_1 &= 2r' , \\ \frac{p_1}{q_1} &= \frac{p}{q} \\ \Rightarrow \quad p_1 &= \frac{2r'p}{p+q} \quad , \quad q_1 = \frac{2r'q}{p+q} . \end{aligned}$$

Das Problem der Potentialberechnung eines Massenrings an einem Punkt reduziert sich also auf solche Punkte, die innerhalb des Ringes liegen. Um $\Phi(P_1)$ zu bestimmen, führt man erneut eine Koordinatentransformation durch. Sei Q ein Punkt auf dem Massenring mit den Koordinaten $(r', \varphi', 0)$ und ψ der Winkel zwischen der r -Achse durch $P_1 = (r_1, 0, 0)$ und der Strecke $\overline{P_1Q}$ (siehe Abbildung D.1). Nach dem Sinussatz der Trigonometrie ist das Verhältnis einer Seite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels in einem Dreieck für alle drei Seiten (bzw. Winkel) gleich, also

$$\frac{r'}{\sin \alpha} = \frac{r_1}{\sin \beta} .$$

Offensichtlich ist aber per Konstruktion (siehe Abbildung D.1) $\alpha = 180^\circ - \psi$. Daher findet man $\beta = 180^\circ - \varphi' - \alpha = \psi - \varphi'$ und erhält

$$r' \sin(\psi - \varphi') = r_1 \sin(180^\circ - \psi) = r_1 \sin \psi . \quad (\text{D.3})$$

Differenziert man diesen Ausdruck, so findet man

$$\begin{aligned} r' \cos(\psi - \varphi')(d\psi - d\varphi') &= r_1 \cos \psi d\psi \\ \Rightarrow \quad [r' \cos(\psi - \varphi') - r_1 \cos \psi] d\psi &= r' \cos(\psi - \varphi') d\varphi' . \end{aligned}$$

Der Koeffizient von $d\psi$ ist aber gerade die Länge der Strecke $\overline{P_1Q}$ und damit gleich ϱ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi'}{\varrho} &= \frac{d\psi}{r' \cos(\psi - \varphi')} = \frac{d\psi}{\sqrt{r'^2 - r_1^2 \sin^2(\psi - \varphi')}} \stackrel{(\text{D.3})}{=} \frac{d\psi}{\sqrt{r'^2 - r_1^2 \sin^2 \psi}} \\ &= \frac{d\psi}{\sqrt{r'^2 \cos^2 \psi + (r'^2 - r_1^2) \sin^2 \psi}} . \end{aligned}$$

Die Integration über ψ erstreckt sich von 0 bis 2π , nach der Substitution $\psi \rightarrow \pi - \psi$ sieht man aber leicht, daß das Potential durch

$$\begin{aligned}\Phi(P_1) &= -Gr'\lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varrho} d\varphi' = -Gr'\lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r'^2 \cos^2 \psi + (r'^2 - r_1^2) \sin^2 \psi}} d\psi \\ &= -4Gr'\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{r'^2 \cos^2 \psi + (r'^2 - r_1^2) \sin^2 \psi}} d\psi\end{aligned}$$

gegeben ist. Da p_1 und q_1 der maximale bzw. minimale Abstand zwischen P_1 und dem Massenring sind, gilt $p_1 = r' + r_1$ und $q_1 = r' - r_1$, so daß

$$p_2 := \frac{p_1 + q_1}{2} = r'$$

und

$$q_2 := \sqrt{p_1 q_1} = \sqrt{r'^2 - r_1^2}.$$

p_2 und q_2 sind das arithmetische und das geometrische Mittel von p_1 und q_1 . Für das Potential im Punkt P_1 erhält man so

$$\Phi(P_1) = -4Gr'\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{p_2^2 \cos^2 \psi + q_2^2 \sin^2 \psi}} d\psi. \quad (\text{D.4})$$

Dies ist exakt das gleiche Resultat wie (D.1), wenn die Punkte P_1 und P übereinstimmen, also $p_1 = p$ und $q_1 = q$ ist. Das Integral ändert also seinen Wert nicht, wenn man p_1 durch das arithmetische Mittel p_2 von p_1 und q_1 ersetzt und gleichzeitig q_1 durch das geometrische Mittel q_2 von p_1 und q_1 ersetzt. Man kann diese Substitution also wiederholen und allgemein p_n und q_n durch

$$p_{n+1} := \frac{p_n + q_n}{2}, \quad (\text{D.5})$$

$$q_{n+1} := \sqrt{p_n q_n}$$

ersetzen, ohne den Wert des Potentials $\Phi(P_1)$ zu ändern. Die Reihen (p_n) und (q_n) haben aber einen gemeinsamen Grenzwert \mathcal{L} , wenn n gegen Unendlich strebt. Dies soll nun gezeigt werden. Zunächst sieht man, daß p_{n+1} nach (D.5) zwischen p_n und q_n liegt. Außerdem liegt q_{n+1} zwischen q_n und p_{n+1} , denn

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \sqrt{\frac{p_n}{q_n}} > 1$$

und

$$p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{p_n + q_n - 2\sqrt{p_n q_n}}{2} = \frac{(\sqrt{p_n} - \sqrt{q_n})^2}{2} > 0.$$

q_{n+1} liegt daher im Intervall (q_n, p_{n+1}) , das nur halb so groß ist wie das Intervall (q_n, p_n) . Es gilt daher

$$0 < p_{n+1} - q_{n+1} < \frac{p_n - q_n}{2} < \frac{p_1 - q_1}{2^n}. \quad (\text{D.6})$$

Die Reihe (p_n) fällt also immer weiter, ist aber durch q_1 nach unten beschränkt. (q_n) dagegen wächst monoton, ist aber durch p_1 nach oben beschränkt. Beide Reihen konvergieren also, und (D.6) zeigt, daß beide Grenzwerte übereinstimmen. Man kann also in (D.4) p_2 und q_2 durch den Grenzwert $\mathcal{L}_{rr'}$ ersetzen, ohne das Integral zu ändern, und erhält so

$$\Phi(P_1) = -4Gr'\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}_{rr'}^2 \cos^2 \psi + \mathcal{L}_{rr'}^2 \sin^2 \psi}} d\psi = -\frac{4Gr'\lambda}{\mathcal{L}_{rr'}} \frac{\pi}{2} = -\frac{Gm_c}{\mathcal{L}_{rr'}},$$

wenn m_c die Masse des Rings ist.

Man muß nun noch den Fall $r = r'$ behandeln, bei dem das Potential eines Massenrings an einer Stelle des Rings berechnet werden soll. In diesem Fall wäre $\mathcal{L}_{rr} = 0$, und das Potential würde divergieren. Das Potential berechnet sich aus

$$\Phi_D(r) = -2Gr\lambda \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{r^2 + r^2 - 2rr \cos \varphi'}} d\varphi' = -\sqrt{2}G\lambda \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \varphi'}} d\varphi'.$$

λ ist dabei die Masse des Rings pro Einheitsfläche. Auch dieses Integral divergiert. Allerdings kann man die untere Grenze, die für diese Divergenz verantwortlich ist, durch $\epsilon \neq 0$ ersetzen. Um dies zu verstehen und um einen geeigneten Wert für ϵ zu erhalten, betrachtet man das numerische Verfahren genauer. Der Ring hat – anders, als die Integraldarstellung des Potentials dies suggeriert – eine endliche Breite Δr . Überall im Ring sind aufgrund der Konstruktion Flächendichte und Höhe konstant. Ein Zylinder mit dem Radius $\frac{\Delta r}{2}$ um den Ort \vec{r} auf dem Ring, an dem das Potential bestimmt werden soll, übt daher aus Symmetriegründen keinen Einfluß auf \vec{r} aus. Nur die weiter außen liegende Masse des Rings geht in die Potentialberechnung ein. Es gilt daher, das Bogenmaß des Halbzylinders mit dem Radius Δr im Abstand r vom Zentrum zu bestimmen¹. Man muß also das Bogenmaß der Strecke $\frac{\Delta r}{2}$ im Abstand r vom Zentralobjekt bestimmen. Dies ist aber offensichtlich

$$\epsilon = \frac{\Delta r}{4\pi r}.$$

Mit dieser unteren Grenze umgeht man die Divergenz in der Potentialberechnung. Zwar schneidet man statt des Zylinders nun ein Kreissegment und damit etwas zuviel Masse ab, dieser Effekt ist aber eher gering und kann hier vernachlässigt werden. Das Integral lautet nun

$$\begin{aligned} \Phi_D(r) &= -\sqrt{2}G\lambda \int_\epsilon^\pi \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \varphi'}} d\varphi' \stackrel{v=\sqrt{1+\cos \varphi'}}{=} 2\sqrt{2}G\lambda \int_{\sqrt{1+\cos \epsilon}}^0 \frac{1}{2-v^2} dv \\ &\stackrel{[2.172]}{=} -2G\lambda \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \cos \epsilon} \right) = -\frac{Gm_c}{\pi r} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \cos \frac{\Delta r}{4\pi r}} \right). \end{aligned}$$

Die Zahl in eckigen Klammern bedeutet wie immer die entsprechende Nummer der Gleichung in Gradshteyn & Ryzhik (1994), und m_c ist die Masse des Rings. Man definiert nun

$$\mathcal{L}_{rr} := \frac{\pi}{\operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \cos \frac{\Delta r}{4\pi r}} \right)} r \quad (\text{D.7})$$

und kennt so den Radialanteil des Potentials an allen Stellen der Scheibe.

¹Man benötigt nur das Bogenmaß des halben Zylinders, da die Integration beim Potential nur über einen Halbkreis erfolgt.

Das Potential des Rings mit dem Radius r' am Ort \vec{r} ist dann – auch für $r = r'$ – nach (D.2) gegeben durch

$$\Phi_D(r) = \frac{p_1}{p} \Phi(P_1) = -\frac{p_1}{p} \frac{Gm_c}{\mathcal{L}_{rr'}} = -\frac{2Gr'}{p+q} \frac{m_c}{\mathcal{L}_{rr'}}.$$

Literaturverzeichnis

- Abramowicz, M.A., Chen, X., Kato, S., Lasota, J.-P., Regev, O.; 1995**
Thermal Equilibria of Accretion Disks
ApJ 438, L 37
- Abramowicz, M.A., Curir, A., Schwarzenberg-Czerny, A., Wilson, R.E.; 1984**
Self-Gravity and the Global Structure of Accretion Disks
MNRAS 208, p. 279
- Abramowicz, M.A., Czerny, B., Lasota, J.P., Szuszkiewicz, E.; 1988**
Slim Accretion Disks
ApJ 332, p. 646
- Adams, F.C., Lada, C.J., Shu, F.H.; 1987**
Spectral Evolution of Young Stellar Objects
ApJ 312, p. 788
- Anthony, D.M., Carlberg, R.G.; 1988**
Spiral Wave Viscosity in Self-Gravitating Accretion Disks
ApJ 332, p. 637
- Bally, J.; Leventhal, M.; 1991**
Is the Galactic Centre Gamma-Ray Source 1E1740.7 - 2942 Accreting from a Molecular Cloud?
Nature 353, p. 234
- Barnes, J.E.; Hernquist, L.E.**
Fueling starburst galaxies with gas-rich mergers
ApJ 370, L 65
- Basri, G., Bertout, C.; 1989**
Accretion disks around T Tauri stars. II - Balmer emission
ApJ 341, p. 340
- Beckwith, S.V.W., Sargent, A.I.; 1991**
Particle Emissivity in Circumstellar Disks
ApJ 381, p. 250
- Beckwith, S.V.W., Sargent, A.I., Chini, R.S., Guesten, R.; 1990**
A Survey for Circumstellar Disks around Young Stellar Objects
AJ 99, p. 924
- Beckwith, S., Sargent, A.I., Scoville, N.Z., Masson, C.R., Zuckerman, B., Phillips, T.G.; 1986**
Small-Scale Structure of the Circumstellar Gas of HL Tauri and R Monocerotis
ApJ 309, p. 755
- Begelman, M.C.; 1978**
Black Holes in Radiation-Dominated Gas - an Analogue of the Bondi Accretion Problem
MNRAS 184, p. 53
- Bell, K.R., Lin, D.N.C.; 1994**
Using FU Orionis Outbursts to Constrain Self-regulated Protostellar Disk Models
ApJ 427, p. 987
- Benson, P.J., Myers, P.C.; 1989**
A Survey for Dense Cores in Dark Clouds
ApJS 71, p. 89

Bertout, C.; 1989

T Tauri Stars: Wild as Dust
Ann. Rev. Astr. Ap. 27, p. 351

Binney, J., Tremaine, S.; 1987

Galactic Dynamics
Princeton University Press

Blanford, R.D.; 1992

The Black Hole Model of Active Galactic Nuclei
in W.J. Duschl, S.J. Wagner (ed.): “*Physics of Active Galactic Nuclei*”, Springer Verlag, p. 3

Blanford, R.D. Netzer, H., Woltjer, L.; 1990

Active Galactic Nuclei
Springer Verlag

Bodo, G., Curir, A.; 1992

Models of Self-Gravitating Accretion Disks
A&A 253, p. 318

Bregman, J.N.; 1990

Continuum Radiation from Active Galactic Nuclei
Astron. Astrophys. Rev. 2, p. 125

Calvet, N., Hartmann, L., Strom, S.E.; 1999

Evolution of Disk Accretion
in V. Mannings, A.P. Boss, S.S. Russel (ed.): “*Protostars and Planets IV*”, University of Arizona Press, p. 377

Camenzind, M.; 1990

Magnetized Disk-Winds and the Origin of Bipolar Outflows
Rev. Mod. Astron. 3, p. 234

Chini, R., Henning, T., Pfau, W.; 1991

Submillimetre/millimetre observations of AFGL 490
A&A 252, p. 801

Chandler, C.J., Richter, R.S.; 1999

Observations of Circumstellar Discs and Jets
in J.A. Sellwood, J. Goodman (ed.): “*Astrophysical Disks*”, A.S.P. Conf. Ser. 160, p. 91

Collin-Souffrin, S.; 1989

Line and Continuum Radiation from the Outer Region of Accretion Discs in Active Galactic Nuclei
A&A 179, p. 60

Draine, B.T., Lee, H.M.; 1984

Optical Properties of Interstellar Graphite and Silicate Grains
ApJ 285, p. 89

Duschl, W.J.; 2001

The Formation of the Most Massive Black Holes in the Early Universe
in I. Marquez (ed.): “*QSO hosts and their environment*”, Kluwer Academic/Plenum Publishers, London, UK (im Druck)

Duschl, W.J.; 1993

Physics and Chemistry of Protoplanetary Accretion Disks
in J.M. Greenberg, C.X. Mendoza-Gómez, V., Pirronello (ed.): “*The Chemistry of Life's Origins*”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands

Duschl, W.J., Strittmatter, P.A., Biermann, P.L.; 2000

A Note on Hydrodynamic Viscosity and Selfgravitation in Accretion Disks
A&A 357, p. 1123

- Duschl, W.J., Tscharnuter, W.M.; 1991**
On the inner Boundary Condition of thin Keplerian Accretion Disks
 A&A 241, p. 153
- Dutrey, A., Guilloteau, S., Duvert, G., Prato, L., Simon, M., Schuster, K., Ménard, F.; 1996**
Dust and Gas Distribution Around T Tauri Stars in Taurus-Auriga. I. Interferometric 2.7mm Continuum and ^{13}CO $J=1-0$ Observations
 A&A 309, p. 493
- Earn, D.J.D.; 1996**
Potential-Density Basis Sets for Galactic Discs
 ApJ 465, p. 91
- Ford, H.C., Harms, R.J., Tsvetanov, Z.I., Hartig, G.F., Dressel, L.L., Kriss, G.A., Bohlin, R.; Davidsen, A.F.; Margon, B.; Kochhar, A.K.; 1994**
Narrowband HST Images of M87: Evidence for a Disk of Ionized Gas around a Massive Black Hole
 ApJ 435, L 27
- Frank, J., King, A., Raine, D.; 1992**
Accretion Power in Astrophysics
 Second edition, Cambridge Astrophysics Series
- Gail, H.-P.; 2000**
 priv. comm.
- Genzel, R., Eckart, A., Ott, T., Eisenhauer, F.; 1997**
On the Nature of the Dark Mass in the Centre of the Milky Way
 MNRAS 291, p. 219
- Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M.; 1994**
Table of Integrals, Series and Products
 5th edition, Academic Press
- Grossmann, S.; 2000**
The Onset of Shear Flow Turbulence
 Reviews of Modern Physics 82, p. 603
- Hachisu, I., Eriguchi, Y., Nomoto, K.; 1986a**
Fate of Merging Double White Dwarfs
 ApJ 308, p. 161
- Hachisu, I., Eriguchi, Y., Nomoto, K.; 1986b**
Fate of Merging Double White Dwarfs II. Numerical Method
 ApJ 311, p. 241
- Hachisu, I.; 1986a**
A Versatile Method for Obtaining Structures of Rapidly Rotating Stars
 ApJS 61, p. 479
- Hachisu, I.; 1986b**
A Versatile Method for Obtaining Structures of Rapidly Rotating Stars II. Three-Dimensional Self-Consistent Field Method
 ApJS 62, p. 461
- Harms, R.J., Ford, H.C., Tsvetanov, Z.I., Hartig, G.F., Dressel, L.L., Kriss, G.A., Bohlin, R.; Davidsen, A.F.; Margon, B.; Kochhar, A.K.; 1994**
HST FOS Spectroscopy of M87: Evidence for a Disk of Ionized Gas around a Massive Black Hole
 ApJ 435, L 35
- Hartigan, P., Edwards, S., Ghandour, L.; 1995**
Disk Accretion and Mass Loss from Young Stars
 ApJ 452, p. 736

- Hartigan, P., Kenyon, S., Hartmann, L., Strom, S., Edwards, S., Welty, A., Stauffer, J.; 1991**
Optical Excess Emission in T Tauri Stars
ApJ 3782, p. 617
- Hartmann, L.; 1998**
Accretion Processes in Star Formation
Cambridge Astrophysics Series 32
- Hartmann, L., Calvet, N.; 1995**
Observational Constraints on FU ORI Winds
AJ 109, p. 1846
- Hartmann, L., Kenyon, S.J.; 1996**
The FU Orionis Phenomenon
Annual Review of Astronomy and Astrophysics 34, p. 207
- Henning, T., Pfau, W., Zinnecker, H., Prusti, T.; 1993**
1.3-MILLIMETER Survey of Circumstellar Dust around Young Chamaeleon Objects
A&A 276, p. 129
- Herbig, G.H.; 1962**
The Properties and Problems of T Tauri Stars and Related Objects
Adv. Astr. Astrophys. 1, p. 47
- Herbig, G.H.; 1960**
The Spectra of Be- and Ae-TYPE Stars Associated with Nebulosity
ApJS 4, p. 337
- Hillenbrand, L.A., Strom, S.E., Vrba, F.J., Keene, J.; 1992**
Herbig Ae/Be Stars - Intermediate-mass Stars Surrounded by Massive Circumstellar Accretion Disks
ApJ 397, p. 613
- Hur , J.-M.; 1998**
Properties of Self-Gravitating α -discs in AGN Revisited: General Scaling Laws
A&A 337, p. 625
- Hur , J.-M., Galliano, F.; 2001**
The Global Structure of Thin, Stratified alpha-Discs and the Reliability of the One Layer Approximation
A&A 366, p. 359
- Ichimaru, S.; 1977**
Bimodal Behavior of Accretion Disks - Theory and Application to Cygnus X-1 Transitions
ApJ 214, p. 840
- Joy, A.H.; 1945**
T Tauri Variable Stars
ApJ 102, p. 168
- Katz, J.I.; 1977**
X-Rays from Spherical Accretion onto Degenerate Dwarfs
ApJ 215, p. 265
- Kenyon, S.J., Hartmann, L.; 1987**
Spectral Energy Distributions of T Tauri Stars - Disk Flaring and Limits on Accretion
ApJ 323, p. 714
- Kippenhahn, R., Thomas, H.-C.; 1982**
On the Compatibility of Thermal and Hydrostatic Equilibrium in Thin Radiative Accretion Disks
A&A 114, p. 77
- Kippenhahn, R., Weigert, A.; 1994**
Stellar Structure and Evolution
Corrected 3rd edition, Springer-Verlag

- Kitamura, Y., Kawabe, R., Saito, M.; 1996**
Imaging of the Compact Dust Disk around DG Tauri with 1" Resolution
 ApJ 465, L 137
- Köhler, R.; 1995**
On the Fate of Self-Gravitating Accretion Disks
 A&A 294, p. 690
- Koenigl, A.; 1991**
Disk accretion onto magnetic T Tauri stars
 ApJ 370, L 39
- Lada, E.A., Evans, N.J., Falgarone, E.; 1997**
Physical Properties of Molecular Cloud Cores in L1630 and Implications for Star Formation
 ApJ 488, p. 286
- Lagrange, A.-M., Backman, D.E., Artymowicz, P.; 2000**
Planetary Material Around Main-sequence Stars
 in D.C. Black and M.S. Matthews (ed.): "Protostars and Planets II", University of Arizona Press,
 p. 59
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M.; 1991**
Lehrbuch der theoretischen Physik VI: Hydrodynamik
 5. Auflage, Akademischer Verlag
- Larson, R.B.; 1984**
Gravitational Torques and Star Formation
 MNRAS 206, p. 197
- Lattimer, J.M., Schramm, D.N., Grossmann, L.; 1978**
Condensation in Supernova Ejecta and Isotropic Anomalies in Meteorites
 ApJ 219, p. 230
- Lay, O.P., Carlstrom, J.E., Hills, R.E.; 1995**
GC 1333 IRAS 4: Further Multiplicity Revealed with the CSO-JCMT Interferometer
 ApJ 452, L 73
- Leahy, J.P.; 1999**
Phenomenology of Active Galactic Nuclei
 in J.A. Sellwood, J. Goodman (ed.): "Astrophysical Disks", A.S.P. Conf. Ser. 160, p. 246
- Lin, D.N.C., Papaloizou, J.; 1980**
On the Structure and Evolution of the Primordial Solar Nebula
 MNRAS 191, p. 37
- Lin, D.N.C., Pringle, J.E.; 1990**
The Formation and Initial Evolution of Protostellar Disks
 ApJ 358, p. 515
- Lin, D.N.C., Pringle, J.E.; 1987**
A Viscosity Prescription for a Self-Gravitating Accretion Disc
 MNRAS 225, p. 607
- Lüst, R.; 1952**
Die Entwicklung einer um einen Zentralkörper rotierenden Gasmasse
 Zeitschrift für Naturforschung 7a, p. 87
- MacMillan, W.D.; 1958**
The Theory of the Potential
 Dover Publications
- Di Matteo, T., Reynolds, C.S., Fabian, A.C., Hwang, U., Canizares, C.R.; 1997**
An Advection-Dominated Flow in the Nucleus of M87
 in E. Meyer-Hofmeister, H. Spruit (ed.): "Accretion Disks – New Aspects", Lecture Notes in Physics
 Vol. 487, Springer Verlag, p. 240

- Mirabel, I.F., Paul, J., Cordier, B., Morris, M., Wink, J.; 1991**
1E 1740.7 - 2942 - A black hole in a molecular cloud?
A&A 251, L 43
- Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A.; 1973**
Gravitation
Freeman and Co., San Francisco
- Nakamoto, T., Nakagawa, Y.; 1995**
Growth of Protoplanetary Disks around Young Stellar Objects
ApJ 445, p. 330
- Nakamoto, T., Nakagawa, Y.; 1994**
Formation, Early Evolution, and Gravitational Stability of Protoplanetary Disks
ApJ 421, p. 640
- Narayan, R., Yi, I.; 1995a**
Advection-dominated Accretion: Underfed Black Holes and Neutron Stars
ApJ 452, p. 710
- Narayan, R., Yi, I.; 1995b**
Advection-dominated Accretion: Self-similarity and Bipolar Outflows
ApJ 444, p. 231
- Narayan, R., Yi, I.; 1994**
Advection-dominated Accretion: A Self-similar Solution
ApJ 428, L 13
- Osterloh, M., Beckwith, S.V.W.; 1995**
Millimeter-wave continuum measurements of young stars
ApJ 439, p. 288
- Ostriker, E.C.; Shu, F.H.; 1995**
Magnetocentrifugally Driven Flows from Young Stars and Disks. IV. The Accretion Funnel and Dead Zone
ApJ 447, p. 813
- Paczynski, B.; 1978**
A Model of Selfgravitating Accretion Disk
AcA 28, p. 91
- Papaloizou, J.C.B., Terquem, C., Nelson, R.P.; 1999**
Discs and Planetary Formation
in J.A. Sellwood, J. Goodman (ed.): "Astrophysical Disks", A.S.P. Conf. Ser. 160, p. 186
- Perryman, M.A.C.; 2000**
Extra-Solar Planets
Rep. Prog. Phys. 63, p. 1209
- Plume, R., Jaffe, D.T., Evans, N.J., Martín-Pintado, J., Gómez-González, J.; 1997**
Dense Gas and Star Formation: Characteristics of Cloud Cores Associated with Water Masers
ApJ 476, p. 730
- Pratap, P., Dickens, J.E., Snell, R.L., Miralles, M.P., Bergin, E.A., Irvine, W.M., Schloerb, F.P.; 1997**
A Study of the Physics and Chemistry of TMC-1
ApJ 486, p. 862
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.I.; 1996**
Numerical Recipes in Fortran 90
Cambridge University Press
- Pudritz, R.E., Norman, C.A.; 1986**
Hydromagnetic Winds from Accretion Disks
ApJ 301, p. 571

- Pringle, J.E., Verbunt, F., Wade, R.A.; 1986**
Dwarf Novae in Outburst – Modelling the Observations
MNRAS 221, p. 169
- Rees, M.J.; 1984**
Black Hole Models for Active Galactic Nuclei
Annual Review of Astronomy and Astrophysics 22, p. 471
- Rees, M.J., Phinney, E. S., Begelman, M. C., Blandford, R. D.; 1982**
Ion-supported Tori and the Origin of Radio Jets
Nature 295, p. 17
- Robijn, F. H. A., Earn, David J. D.; 1996**
Potential-density basis sets in axisymmetric coordinates
MNRAS 282, p. 1129
- Rodríguez-Fernández, N.J., Martín-Pintado, J., Fuente, A., de Vicente, P., Wilson, T.L., Hüttemeister, S.; 2000**
Warm H₂ in the Galactic center region
A&A 365, p. 174
- Ruden, S.P., Lin, D.N.C.; 1986**
The Global Evolution of the Primordial Solar Nebula
ApJ 308, p. 883
- Ruden, S.P., Pollack, J.B.; 1991**
The Dynamical Evolution of the Protosolar Nebula
ApJ 375, p. 740
- Sargent, A.I., Beckwith, S.; 1987**
Kinematics of the Circumstellar Gas of HL Tauri and R Monocerotis
ApJ 323, p. 294
- Sanders, D.B., Phinney, E.S., Neugebauer, G., Soifer, B.T. Matthews, K.; 1989**
Continuum Energy Distributions of Quasars: Shapes And Origins: Observational Appearance
ApJ 347, p. 29
- Schmit, U., Tscharnuter, W.M.; 1999**
On the Formation of the Fine-Scale Structure in Saturn's B Ring
Icar 138, p. 173
- Scoville, N.Z.; 1999**
Massive Accretion Disks
Ap&SS 266, p. 149
- Shakura, N.I., Sunyaev, R.A.; 1973**
Black Holes in Binary Systems. Observational Appearance
A&A 24, p. 337
- Shore, S.N., White, R.L.; 1982**
Self-Gravitating Accretion Disk Models for Active Galactic Nuclei: Self-Consistent α -Models for the Broad Emission-Line-Region
ApJ 256, p. 390
- Smith, B.A., Terrile, R.J.; 1984**
A Circumstellar Disk around beta Pictoris
Sci 226, p. 1421
- Solomon, P.M., Sanders, D.B.; 1985**
Star Formation in a Galactic Context: The Location and Properties of Molecular Clouds
in D.C. Black and M.S. Matthews (ed.): "Protostars and Planets II", University of Arizona Press, p. 59

Stepinski, T.F.; 1998

New Approach to Diagnosing Properties of Protoplanetary Disks
ApJ 507, p. 361

Terebey, S., Shu, F.H., Cassen, P.; 1984

The Collapse of the Cores of Slowly Rotating Isothermal Clouds
ApJ 286, p. 529

Torrelles, J.M., Rodríguez, L.F., Cantó, J., Marcaide, J., Cyulbadaghain, A.L.; 1983

A Search for Molecular Outflows associated with Peculiar Nebulosities and Regions of Star Formation
Rev. Mex. Astron. Astrofis. 8, p. 147

Weintraub, D.A., Sandell, G., Duncan, W.D.; 1991

Are FU Orionis Stars Younger than T Tauri Stars? Submillimeter Constraints on Circumstellar Disks
ApJ 382, p. 270

von Weizsäcker, C.F.; 1943

Über die Entstehung des Planetensystems
Zeitschrift für Astrophysik 22, p. 319

Wilson, R.E.; 1981

Equilibrium Figures for Beta Lyrae Type Disks
ApJ 251, p. 246

Wilson, T.L., Walmsley, C.M.; 1989

Small-Scale Clumping in Molecular Clouds
Astron. Astrophys. Rev. 1, p. 141

Yu, L., Yang, L. Wu, S.; 1997

Analytical Calculations of the Radial Structure of Self-Gravitating and Magnetized Accretion Disk Models in AGN
A&A 327, p. 57

Danksagung

Zuerst möchte ich mich ganz besonders herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Wolfgang Duschl bedanken, für die vielen fröhlichen und interessanten Stunden in der Kaffeepause, in denen man so sehr von seinem lebendigen Interesse an der Astronomie profitieren konnte, und für das offene Ohr, das er immer für Probleme hatte, ohne durch seine Ratschläge meine Freiheit und Vorlieben einzuengen.

Ganz besonders möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Werner Tscharnuter bedanken, für sein Interesse an meiner Arbeit und die Hilfe, die er mir immer zukommen ließ, vor allem aber auch dafür, alle Mitglieder – auch die jüngsten – als Kollegen in das Institut einzubinden.

Herrn Priv.-Doz. Dr. Martin Schmid gilt mein Dank für die Bereitschaft, das Zweitgutachten meiner Arbeit zu erstellen.

Ein großer Dank geht an Dr. Kerstin Weis, ohne die viele Feiern des Instituts sicherlich nicht so angenehm ausgefallen wären, die die Kaffeerunde der WJD-Gruppe immer am Leben gehalten hat (bzw. immer wieder ins Leben gerufen hat) und mit der ich so viele lustige Stunden verbracht habe. Ich hoffe, daß sie mir meine 'gezielten Anspielungen' nicht zu übel genommen hat! Auch ihrem Mann Dr. Dominik Bomans danke ich für viele schöne Stunden und interessante Gespräche über astronomische Themen, auf denen ich nicht zuhause bin.

Christian Straka bin ich zu großem Dank verpflichtet für die vielen, langen Diskussionen und dafür, daß er sich mit meinen Problemen beschäftigt hat, obwohl er sicherlich selbst genug zu tun hatte.

Ein großer Dank geht an Rainer Kürschner, für seine intensive und unermüdliche Beschäftigung mit der Hard- und Software des Instituts, dafür daß die Rechner immer liefen und für die vielen Windofs-Sticheleien.

Danken möchte ich auch Sebastian Els, meinem Zimmergenossen, für die vielen aufmunternden und zerstreuenden Abschweifungen gerade in der Endphase meiner Arbeit, aber auch für das Interesse an meiner Arbeit. Ihm und allen anderen Mitgliedern des ITA danke ich für die angenehme Atmosphäre, die das Arbeiten so leicht gemacht hat.

Ich danke den Sonderforschungsbereichen 328 und 439 für die Finanzierung meiner Arbeit.

Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Dr. Rainer Liebisch, mit dem ich viele entspannende Abende in Heidelberg und Schwetzingen verbringen konnte und der so erheblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Danken muß ich ihm auch für die viele Literatur zu nicht-astronomischen Themen, die ich nicht mehr missen möchte, und natürlich für die Korrektur dieser Arbeit.

Im gleichen Maße geht mein herzlicher Dank an Herrn Dr. Heiko Reffert für die vielen Abende im 'Mohren' bei ungezählten Chilis und noch mehr Alt, dafür, daß ich meinen Frust bei ihm abladen konnte, und für die nicht minder harte, aber ebenso faire Korrektur meiner Arbeit.

Auch Dr. Sabine Frink und meiner Mutter schulde ich Dank für die Korrektur meiner Arbeit.

Schließlich geht mein ganz besonders tiefer Dank an meine Familie, die nie Zweifel an meiner Arbeit aufkommen lassen hat, obwohl es immer schwerer wird, ihnen zu erklären, was genau mich eigentlich interessiert und woran ich arbeite. Ohne ihre finanzielle, vor allem aber moralische Unterstützung wäre diese Arbeit nicht zustande gekommen. Hierfür meinen herzlichen Dank.