

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Jochen Meyer
aus Zeven

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juni 2001

**Renormierungsgruppen-Flußgleichungen im
Heat-Kernel-Formalismus**

Gutachter: Prof. Ph. D. Hans-Jürgen Pirner

Prof. Dr. Christof Wetterich

Renormierungsgruppen-Flußgleichungen im Heat-Kernel-Formalismus

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird der chirale Phasenübergang im linearen σ -Modell mit Quarks und Mesonen untersucht. Dazu benutzen wir die Methode der Heat-Kernel-RG-Flußgleichungen. Die RG-Skala wird über einen sogenannten Heat-Kernel-cutoff eingeführt, der die effektive Wirkung in der Schwinger-Eigenzeit-Darstellung regularisiert. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, daß der Heat-Kernel-cutoff alle Symmetrien der Theorie erhält. Die Methode wird zunächst auf das Quark-Meson-Modell im Vakuum angewendet: Durch eine Ableitungsentwicklung erhält man die Flußgleichungen für das effektive Potential, die Yukawa-Kopplung und die Wellenfunktions-Renormierungs-Konstanten. Dieses System von gekoppelten Flußgleichungen wird numerisch gelöst. Zusätzlich wird die Aufspaltung von Z-Faktoren und Yukawa-Kopplung in höherer Ordnung der Ableitungsentwicklung berechnet.

Zur Untersuchung des chiralen Phasenübergangs bei endlicher Dichte stellen wir die Flußgleichung für das effektive Potential mit chemischem Potential auf. Diese wird in eine Gleichung mit laufendem chemischen Potential transformiert und numerisch gelöst. Als Ergebnis erhält man einen Phasenübergang 1. Ordnung an einer Übergangsdichte $\rho_{\chi\text{SB}} = 0.56\rho_0$. Die Konstituentenquark-Phase bei niedrigen Dichten ist instabil, d.h. in diesem Bereich bilden sich Tropfen aus chiral symmetrischer Materie, die von nicht-trivialem Vakuum umgeben sind. Des Weiteren wird zum Vergleich das Quark-Meson-Modell bei endlicher Dichte in einer Mittelfeld-Näherung gelöst.

Renormalisation group flow equations in the heat kernel formalism

Abstract

We investigate the chiral phase transition in the linear σ -model with quarks and mesons. This is done with the method of heat-kernel RG-flow equations. The RG scale is introduced via the heat-kernel-cutoff which regularizes the effective action in the Schwinger proper-time representation. As an advantage of this method the heat kernel cutoff preserves all symmetries of the theory. First the Method is applied to the quark-meson-model in vacuum: a derivative expansion yields the flow equations for the effective potential, Yukawa-coupling and the wavefunction renormalization constants. This system of coupled flow equations is solved numerically. Further on, the splitting of Z-factors and Yukawa-coupling in higher order derivative expansion is calculated.

For the investigation of the chiral phase transition at finite density, the flow equation for the effective potential with chemical potential is derived. It is transformed into an equation with running chemical potential. The numerical solution yields a first order phase transition at a density of $\rho_{\chi\text{SB}} = 0.56\rho_0$. The constituent quark phase at low densities is unstable, i.e. droplets of chiral symmetric matter surrounded by a nontrivial vacuum are formed. For comparison the quark meson model at finite density is solved in a mean field calculation.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Das lineare σ-Modell	7
2.1	Chirale Symmetrie	7
2.2	PCAC und Goldberger-Treiman-Relation	10
2.3	Pion-Quark-Streuung	12
3	Flußgleichungen im Heat-Kernel-Formalismus	17
3.1	Die effektive Wirkung	17
3.2	Die Heat-Kernel-Flußgleichung	20
3.3	Vergleich mit den exakten RG-Flußgleichungen	27
4	Flußgleichungen für das lineare σ-Modell	32
4.1	Die effektive Wirkung des linearen σ -Modell	34
4.2	Flußgleichungen für das lineare σ -Modell	39
4.3	Flußgleichungen für großes N_c	43
4.4	Evolutions Gleichungen mit Meson-Dynamik	46
4.5	Höhere Ordnung der Ableitungsentwicklung	57
5	Quark-Meson-Modell bei endlicher Dichte	65
5.1	Evolutionsgleichung bei endlicher Dichte	66
5.2	Mittelfeld-Rechnung bei endlicher Dichte	80
5.3	Vergleich der Ergebnisse und Diskussion	86
5.4	Quark-Nukleon-Modell	90
6	Zusammenfassung und Ausblick	96

A	Nützliche Formeln	100
A.1	Die Heat-Kernel-Darstellung	100
A.2	Projektionsoperatoren	102
B	Numerik	104
C	Fixpunkt-Verhalten der Flußgleichungen	106
D	Rechnungen bei endlicher Dichte	108
D.1	Die Berechnung von $\partial\Omega^F/\partial k$ und $\partial\Omega^B/\partial k$	108
D.2	Integration der Fermion-Fluktuationen	111
E	Mittelfeld-Rechnung	112

Kapitel 1

Einführung

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die fundamentale Theorie der starken Wechselwirkung der Elementarteilchen. Sie beschreibt Quarks und Gluonen als die Grundbausteine der Materie. Den Quarks wird in Analogie zur elektrischen Ladung der Quantenelektrodynamik eine Farbladung zugeschrieben, die Gluonen sind die Austausch-Bosonen der Theorie und koppeln an diese Farbladungen. Da die Gluonen selbst Farbladungen tragen, wechselwirken sie auch untereinander, was in der Theorie durch den nicht-abelschen Charakter des Eichfeldes wiedergegeben wird. Der gesamte Energiebereich, in dem die starke Wechselwirkung wirksam ist, zerfällt grob in zwei Bereiche, in denen sie durch sehr unterschiedliche Eigenschaften sichtbar wird. Diese Bereiche lassen sich anhand der skalenabhängigen Kopplungskonstante $\alpha_s(Q)$ unterscheiden.

Bei hohen Energien ist die Theorie asymptotisch frei, d.h. Quarks und Gluonen verhalten sich wie freie Teilchen. In diesem Bereich ist die Kopplungskonstante $\alpha_s(Q)$ klein und damit ist Störungstheorie anwendbar. Die Skalenabhängigkeit von $\alpha_s(Q)$, das sogenannte "laufen" der Kopplungskonstanten, läßt sich theoretisch berechnen und ist über einen Bereich von $Q = 3-100$ GeV experimentell gemessen, siehe Abbildung 1.1.

Bei kleinen Energien hingegen, unterhalb von ~ 1 GeV wird $\alpha_s(Q) \gtrsim 1$ und man kommt in den nicht störungstheoretischen Bereich. Hier spielt die Einschließung der Farbladungen (confinement) eine wichtige Rolle: Quarks und Gluonen bilden farbneutrale Objekte, die Hadronen. Sie stellen die neuen Freiheitsgrade der Theorie dar. In diesem Energiebereich ist die Störungstheorie nicht anwendbar und damit die QCD aufgrund ihrer komplizierten nicht-abelschen Struktur analytisch nicht lösbar.

Daß dennoch auch im Niederenergie-Bereich Vorhersagen möglich sind, hängt mit der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie zusammen. Vernachlässigt man die Quarkmassen und betrachtet nur zwei Quark-Flavours, dann ist die QCD invariant unter globalen $SU(2)_R \times SU(2)_L \times U(1)_A \times U(1)_V$ -Transformationen. Die $U(1)_V$ -Transformation entspricht der Erhaltung der Baryonenzahl, während die $U(1)_A$ -Symmetrie auf Quantenebene durch die chirale Anomalie

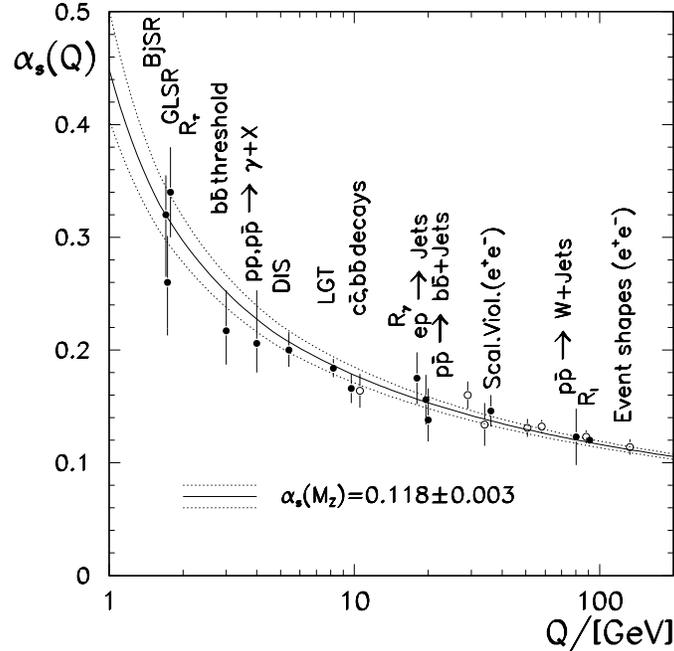


Abbildung 1.1: Die laufende Kopplungskonstante $\alpha_s(Q)$ der starken Wechselwirkung in verschiedenen Experimenten [1].

gebrochen ist. Der $SU(2)_R \times SU(2)_L$ -Anteil schließlich wird bei kleinen Energien spontan gebrochen in eine $SU(2)_V \times U(1)_V$ -Untergruppe, d.h. die Theorie bleibt zwar invariant, ihr Grundzustand jedoch ändert sich bei Symmetrietransformationen. Die spontane Symmetriebrechung ist in der Phänomenologie der Hadronmassen zu beobachten: Die drei Pionen haben eine, verglichen mit allen anderen Hadronen, sehr kleine Masse. Sie spielen die Rolle der masselosen Goldstone-Bosonen der spontanen Symmetriebrechung. Da die chirale Symmetrie bei endlichen Quarkmassen nur näherungsweise erfüllt ist, besitzen auch die Pionen eine kleine Masse. Das σ -Meson entspricht der zugehörigen massiven Goldstone-Mode.

Effektive Theorien. Der Umstand, daß Pionen die Goldstone-Bosonen der spontan gebrochenen chiralen Symmetrie sind, ist von großer Bedeutung für die Theoriebildung im Niederenergie-Bereich der QCD. Die Prozesse der starken Wechselwirkung bei niedrigen Energien werden durch die Pionen dominiert. Folglich können Meßgrößen als Entwicklungen in Pion-Massen bzw. Pion-Impulsen angegeben werden. Dies ist die grundlegende Idee der chiralen Störungsrechnung [2]. In der chiralen Störungstheorie werden im Rahmen eines nichtlinearen σ -Modells alle Wechselwirkungen zwischen Hadronen durch höhere Ableitungsoperatoren auf Pion-Felder beschrieben.

Andere effektive Modelle für die starke Wechselwirkung geben ebenfalls die chirale Struktur der QCD wieder. Das Gell-Mann-Levy Modell beschreibt Nukleonen und Pionen, die über eine Yukawa-Kopplung wechselwirken [3]. Die

spontane Symmetriebrechung wird durch das σ -Feld erzeugt, das einen endlichen Vakuum-Erwartungswert hat. Wir werden das Gell-Mann-Levy Modell in abgewandelter Form, also als lineares σ -Modell mit Quarks statt Nukleonen als Grundlage für die Berechnungen in den Kapiteln 4 und 5 benutzen. Im Kapitel 2 werden wir das Modell vorstellen und einige einfache Relationen herleiten.

Das NJL-Modell schließlich ist ein chirales Modell, das nur wechselwirkende Quarks beschreibt [4, 5]. Es beinhaltet also die chirale Symmetrie der QCD, jedoch weder Gluonen noch Mesonen. Somit ist das NJL-Modell als effektives Modell der QCD in einem mittleren Energiebereich anzusiedeln, in dem Gluonen bereits ausgefroren sind, die Quarks jedoch noch keine Hadronen gebildet haben.

QCD bei endlicher Temperatur und Dichte In den letzten Jahren ist die Erforschung der QCD bei endlicher Temperatur bzw. endlicher Dichte sehr in den Vordergrund gerückt. Endliche Temperatur und Dichte werden in Beschleuniger-Experimenten mit Schwerionen erzeugt, so sind beispielsweise die am CERN SPS in Blei-Blei-Stößen aufgetretenen Temperaturen ausreichend um den Übergang zwischen dem Niederenergie-Bereich der Hadronen-Physik und dem Hochenergie-Bereich der QCD zu erreichen [6]. Die extrem dichte und heiße Phase, die bei solch hohen Temperaturen entsteht, kann als ein Plasma von Quarks und Gluonen betrachtet werden. In ihr existieren die Quarks und Gluonen als freies Gas. Die gerade am RHIC begonnenen und die zukünftigen LHC-Experimente am CERN werden weit in den Bereich des Quark-Gluon-Plasmas vorstoßen.

Das Phasendiagramm der QCD ist schematisch in Abbildung 1.2 dargestellt. Bei endlichen Temperaturen wird der Phasenübergang bei etwa 150 MeV erwartet. Rechnungen mit zwei masselosen Quark-Flavours sagen einen Phasenübergang 2. Ordnung vorher. Bei Berücksichtigung des Strange-Quarks erhält man einen Phasenübergang 1. Ordnung oder einen Crossover.

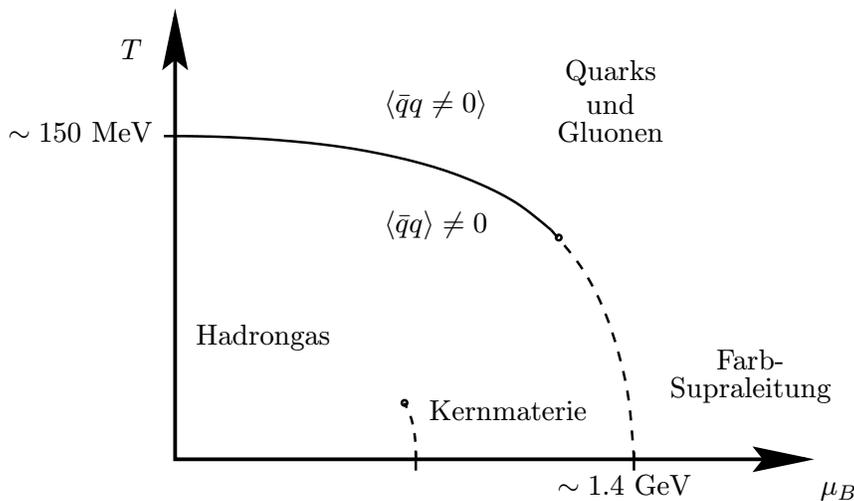


Abbildung 1.2: Das Phasendiagramm der QCD, schematisch dargestellt.

Diese Vorhersagen lassen sich sowohl mit den oben beschriebenen effektiven Modellen berechnen, wie auch mit Gitterrechnungen der QCD bestimmen. Der Vergleich der Ergebnisse beider Ansätze ermöglicht die Verbesserung der bestehenden Rechnungen.

Bei endlicher Dichte hat die QCD eine besonders reiche Phasenstruktur. Oberhalb des QCD-Phasenübergang sollten bei sehr hoher Dichte Effekte wie die Farbsupraleitung und Color-Flavour-Locking wichtig werden [7]. Anders als im Fall endlicher Temperaturen sind Gitterrechnungen hier nur schwer durchzuführen. Durch das Einführen des chemischen Potentials wird die Fermion-Determinante komplex. Damit kann man das Funktionalintegral nicht mehr in Gitter-Simulationen lösen [8, 9]. Man ist daher im Bereich der endlichen Dichte auf die Vorhersagen effektiver Modelle angewiesen.

Die meisten effektiven Modelle sagen einen Phasenübergang 1. Ordnung bei endlichen Dichten vorher [10, 11, 12, 13, 14]. Der Übergang findet jedoch in vielen Modellen bei unrealistisch niedrigen Dichten statt. Wir werden in Kapitel 5 den chiralen Phasenübergang bei endlichen Dichten und Temperatur $T = 0$ im linearen σ -Modell untersuchen. Wir werden eine Renormierungsgruppen-Rechnung vorstellen und diese mit einer Mittelfeld-Rechnung vergleichen.

Die Kenntnis des Phasenübergangs bei endlicher Dichte ist von großer Relevanz für das gesamte QCD-Phasendiagramm: In einem Szenario mit einem Phasenübergang 2. Ordnung auf der Temperatur-Achse und einem 1. Ordnung-Übergang bei endlicher Dichte, enthält das Phasendiagramm einen Trikritischen Punkt. An ihm treffen sich die Übergangslinien 1. und 2. Ordnung. Langreichweitige Korrelationen in der Nähe dieses Punktes können möglicherweise als Signatur für einen Phasenübergang dienen [15, 16].

Renormierungsgruppen-Flußgleichungen Zur Untersuchung der oben beschriebenen effektiven Modelle bieten sich Renormierungsgruppen-Methoden in besonderem Maße an. Sie können sowohl das störungstheoretische Laufen der Kopplungen bei hohen Energien, wie auch das Ausfrieren von Freiheitsgraden bei niedrigen Energien beschreiben.

Durch den variablen cutoff, der in den Flußgleichungen enthalten ist, wird der Begriff der Skala auf sehr natürliche Weise eingeführt. Renormierungsgruppen-Flußgleichungen bieten damit die Möglichkeit, die an verschiedenen Skalen gültigen effektiven Modelle durch den Renormierungsgruppen-Fluß zu verbinden. Prinzipiell sollte es so möglich sein, ausgehend von der QCD dem Renormierungs-Fluß zu folgen, alle Fluktuationen auszuintegrieren und eine effektive Niederenergie-Beschreibungen der QCD zu erhalten [17, 18]. Wegen der nicht-abelschen Eichfelder und der bestehenden Eichfreiheit, ist das jedoch bisher nicht vollständig gelungen. Zusätzlich besteht das Problem, daß sich die relevanten Freiheitsgrade beim Übergang in den nicht störungstheoretischen Bereich ändern.

Nimmt man an, die QCD sei so weit ausintegriert, daß man bei einer Skala $k \gtrsim 1$ GeV nur noch punktiert wechselwirkende Quarks vorfindet, so kann

man ausgehend vom NJL-Modell die Quantenfluktuationen schrittweise ausintegrieren. Folgt man dem Renormierungs-Fluß bis in den Infrarot-Bereich so findet man eine effektive Theorie, die die Wechselwirkung von Pionen und Konstituentenquarks beschreibt. Im Rahmen der exakten Renormierungsgruppen-Gleichungen wurde dieser Übergang in der Arbeit von Jungnickel und Wetterich [19] untersucht. Wir werden im Kapitel 4 den gleichen Weg gehen, allerdings benutzen wir dazu Renormierungsgruppen-Gleichungen in Schwinger-Eigenzeit-Darstellung mit einem sogenannten Heat-Kernel-cutoff. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß der cutoff die Symmetrien der Theorie erhält.

Renormierungsgruppen-Methoden haben sich außerdem als äußerst erfolgreich in der Anwendung auf Phasenübergänge und kritische Phänomene erwiesen. Mit ihnen kann man das universelle Verhalten der Kopplungen nahe an kritischen Punkten untersuchen und kritische Indizes bestimmen [20].

Die Anwendung von Renormierungsgruppen-Flußgleichungen auf den chiralen Phasenübergang bei endlicher Temperatur wurden z.B. in den Arbeiten [21, 22] durchgeführt. Im Kapitel 5 werden wir in Anschluß an die Untersuchungen bei endlicher Temperatur [22] die Renormierungsgruppen-Flußgleichungen für endliche Dichte aufstellen.

Übersicht Das Kapitel 2 dient zur Einleitung und Vorbereitung der nachfolgenden Kapitel. Zunächst wird das Gell-Mann-Levy Modell mit Quarks vorgestellt. Im Abschnitt 2.2 wird kurz auf die PCAC-Relation eingegangen und die Goldberger-Treiman Relation hergeleitet. Am Ende des Kapitels wird in Abschnitt 2.3 die Pion-Nukleon Streuung behandelt. Die Streulänge der s-Wellen-Streuung wird hergeleitet. Leser die mit dem linearen σ -Modell vertraut sind, können dieses Kapitel überspringen.

Im Kapitel 3 wird der Heat-Kernel Renormierungsgruppen-Formalismus am Beispiel einer skalaren Theorie vorgestellt. Dazu wird als erstes die ein-loop effektive Wirkung durch eine Sattelpunktsentwicklung berechnet. Im Abschnitt 3.2 werden dann die Schwinger-Eigenzeit-Darstellung und der Heat-Kernel-cutoff eingeführt und ausführlich diskutiert. Die Flußgleichungen für das effektive Potential und die Wellenfunktions-Renormierungskonstante werden hergeleitet. Dabei wurde Wert darauf gelegt, die Notation behutsam an den Formalismus der exakten Flußgleichungen von Wetterich anzugleichen. Im Abschnitt 3.3 schließlich wird die Wirkungsweise des Heat-Kernel cutoffs erklärt und in einer numerischen Rechnung mit der exakten Flußgleichung verglichen.

Die Anwendung des Heat-Kernel-Formalismus auf ein lineares σ -Modell wird im Kapitel 4 durchgeführt. Wir stellen als erstes die effektive Wirkung für das lineare σ -Modell auf, führen die Ableitungsentwicklung durch und geben als Ergebnis die ein-loop Korrekturen zu den Kopplungen in Schwinger-Eigenzeit-Darstellung an. Im Abschnitt 4.2 werden die Heat-Kernel-Flußgleichungen aufgestellt und anschließend die Vorgehensweise zur numerischen Lösung der Flußgleichungen diskutiert. Der Abschnitt 4.3 befaßt sich mit der Verbindung zum NJL-Modell. Dort werden die Flußgleichungen in der Näherung vieler Farbfreiheitsgrade N_c numerisch gelöst und die Ergebnisse mit NJL-Rechnungen

verglichen. Danach werden numerischen Lösungen für die vollen Flußgleichungen vorgestellt und ausführlich diskutiert. Der letzte Abschnitt dient schließlich dazu, höhere Ordnungen der Ableitungsentwicklung zu diskutieren.

Der chirale Phasenübergang im Fall endlicher Dichte wird im Kapitel 5 untersucht. Zunächst leiten wir im Abschnitt 5.1 die Flußgleichungen für das effektive Potential bei endlicher Dichte her und stellen die numerischen Lösungen vor. Danach, im Abschnitt 5.2, wird eine Mittelfeld-Rechnung aufgestellt und deren Ergebnisse werden diskutiert. Im Abschnitt 5.3 vergleichen wir die beiden Rechnungen schließlich und fassen alle Resultate zusammen. Die Rechnungen und Ergebnisse dieser Abschnitte wurden in [23, 24] veröffentlicht. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels enthält die Rechnungen und Ergebnisse eines kombinierten Quark-Nukleon-Modells, das wir in Mittelfeld-Näherung untersuchen. Das Modell wurde in [25] veröffentlicht.

Das Kapitel 6 enthält die abschließende Zusammenfassung und den Ausblick.

Anhang A enthält einige nützliche Formeln für Rechnungen in der Schwinger-Eigenzeit-Darstellung. Außerdem sind dort die Projektions-Operatoren aufgeführt, die man in der Ableitungsentwicklung benötigt. Im Anhang B werden die numerischen Methoden, die zur Lösung der Flußgleichungen benutzt wurden, beschrieben. Die analytische Herleitung der Fix-Punkt-Struktur der Flußgleichungen, die im Abschnitt 4.4 diskutiert wird, ist in Anhang C aufgeführt. Anhang D enthält einige Teile der Herleitung der Flußgleichungen bei endlicher Dichte. Der Anhang E schließlich enthält eine Ergänzung zur Mittelfeld-Rechnung in Abschnitt 5.2.

Kapitel 2

Das lineare σ -Modell

In diesem Kapitel wollen wir das lineare σ -Modell vorstellen, einige grundlegende Aspekte des Modells diskutieren und als Anwendung die s-Wellen Pion-Quark Streuung ausrechnen. Der Inhalt dieses Kapitels kann in Vorlesungen oder Lehrbüchern nachgelesen werden. Wir werden uns dementsprechend kurz halten und hauptsächlich die Notation festlegen. Verwendet wurde in diesem Kapitel das Buch von Donoghue, Golowich und Holstein [26] sowie die Vorlesung von Koch [27], die eine sehr knappe und bündige Darstellung des σ -Modell gibt. Für die Herleitung der Pion-Quark Streuung (Abschnitt 2.3) wurde außerdem das Buch von Walecka [28] benutzt, das die Streutheorie etwas ausführlicher behandelt.

2.1 Chirale Symmetrie

Das lineare σ -Modell wurde 1960 von Gell-Mann und Levy vorgeschlagen, lange bevor die QCD als die grundlegende Theorie der starken Wechselwirkung entdeckt wurde [3]. In der ursprünglichen Formulierung beschreibt es Nukleonen und Mesonen, die miteinander wechselwirken. Das Modell ist invariant unter chiralen Transformationen, also den Vektor- und Axialvektor-Transformationen des Isospins und gibt so die chirale Symmetrie der starken Wechselwirkung wieder. Unter der Annahme, daß die Symmetrie der Theorie spontan gebrochen ist, läßt sich die große Aufspaltung des Massenspektrums der Pionen und der ρ - und a_1 -Vektormesonen verstehen.

Wir wollen anstatt der Nukleonen $SU(2)_{\text{Flavor}}$ -Quarks zusammen mit den Mesonen beschreiben und das Modell als effektive Theorie für die starke Wechselwirkung verstehen. Das lineare σ -Modell beschreibt also die chirale Symmetrie der QCD. Diese ist allerdings nur näherungsweise erfüllt, da Quarks endliche Massen, die sogenannten Stromquarkmassen $m_q^{\text{current}} \sim 5 - 10$ MeV, haben. Im folgenden werden wir immer den chiralen Limes betrachten. Wir nehmen also an, die Stromquarkmassen seien vernachlässigbar: $m_q^{\text{current}} = 0$.

Die chiralen Transformationen der Quarkfelder sind gegeben durch die Vektortransformation

$$\begin{aligned}\Lambda_V : \quad q &\longrightarrow e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}} q && \simeq \left(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right) q \\ \bar{q} &\longrightarrow e^{+i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}} \bar{q} && \simeq \left(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right) \bar{q} \quad ,\end{aligned}\quad (2.1)$$

aus der sich der erhaltene Vektorstrom $V_\mu^a = \bar{q}\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} q$ ergibt und die Axialvektortransformation

$$\begin{aligned}\Lambda_A : \quad q &\longrightarrow e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}} q && \simeq \left(1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right) q \\ \bar{q} &\longrightarrow e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}} \bar{q} && \simeq \left(1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\right) \bar{q} \quad .\end{aligned}\quad (2.2)$$

Der zugehörige erhaltene Axialvektorstrom ist $A_\mu^a = \bar{q}\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} q$. Die Mesonfelder, die im σ -Modell beschrieben werden, transformieren sich wie Lorentz-Skalare: Das σ -Meson $\sigma = \bar{q}q$ ist außerdem ein Skalar bezüglich des Isospins, das Pion $\pi^a = i\bar{q}\tau^a \gamma_5 q$ ein Isovektor. Die entsprechenden Lorentz-Vektoren wären dann das ρ -Meson $\rho_\mu^a = \bar{q}\gamma_\mu \tau^a q$ und das a_1 -Meson $a_\mu^a = \bar{q}\gamma_\mu \gamma_5 \tau^a q$, diese sind jedoch nicht im linearen σ -Modell enthalten. Für die Beschreibung von Streuprozessen wären die Vektor-Mesonen natürlich wichtig, wir sind jedoch zunächst nur an den chiralen Eigenschaften der Theorie interessiert.

Zusätzlich zur schwachen expliziten Brechung der Symmetrie durch die Stromquarkmassen, ist die axiale Symmetrie spontan gebrochen. D.h. die QCD ist zwar (näherungsweise) symmetrisch unter axialen Transformationen, der Grundzustand der Theorie ist jedoch nicht chiral symmetrisch. Durch die spontane Symmetriebrechung lassen sich die, im Vergleich zu allen anderen Hadronen kleinen Massen der Pionen erklären. Die Pionen spielen die Rolle der Goldstone-Bosonen der spontan gebrochenen Theorie. Im chiralen Limes, wenn man die Stromquarkmassen vernachlässigt, sind die Pionen masselos $m_\pi = 0$. Das nach dem Goldstone-Mechanismus den Pionen zugehörige, massenbehaftete Meson ist das σ -Meson. Weil der Erwartungswert des σ -Feldes im Grundzustand endlich ist und das σ -Meson an die Quarks koppelt, erhalten auch die Quarks durch die spontane Symmetriebrechung eine endliche Masse, die wir Konstituentenquark-Masse nennen.

Die Lagrangedichte des linearen σ -Modells, ist invariant unter den chiralen Transformationen Gln. (2.1) (2.2) und lautet in euklidischer Metrik:

$$\mathcal{L} = Z_q \bar{q}\not{\partial}q + g \bar{q}(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5)q + Z_\sigma \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + Z_\pi \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + U(\sigma^2 + \vec{\pi}^2). \quad (2.3)$$

Die kinetischen Terme der Quarkfelder q und der Mesonfelder σ und $\vec{\pi}$ enthalten Z -Faktoren die zur Wellenfunktions-Renormierung nötig sind. Die Mesonen koppeln an die Quarks über eine Yukawa-Kopplung mit der Kopplungskonstanten g . Im nächsten Kapitel werden wir am Beispiel einer skalaren Theorie sehen, daß die Größen $Z_{q,\sigma,\pi}$ und $U(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$ Funktionen einer Renormierungsskala

k werden, wenn wir die Renormierung der Theorie mithilfe der Heat-Kernel-Renormierungsgruppen-Gleichung durchführen. An dieser Stelle wollen wir uns jedoch nicht weiter um die Renormierung kümmern. Die axiale Symmetrie ist spontan gebrochen, also hat das Potential der Mesonen einen endlichen Erwartungswert:

$$U(\phi^2) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \phi_0^2)^2 \quad , \quad (2.4)$$

wobei wir die $O(4)$ -Schreibweise für die Mesonfelder $\phi = (\sigma, \vec{\pi})$ benutzt haben.

Das σ -Feld trägt per definitionem den endlichen Erwartungswert, also $\phi_0 = (\sigma_0, 0)$. Wir verschieben jetzt die Meson-Felder, so daß wir im physikalischen Vakuum sitzen und betrachten kleine Fluktuationen um das Vakuum:

$$\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma} \quad (2.5)$$

$$\vec{\pi} = \vec{\tilde{\pi}} \quad . \quad (2.6)$$

Eingesetzt in das Potential $U(\phi^2)$ erhalten wir

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{\lambda}{4} (\tilde{\sigma}^2 + 2\sigma_0\tilde{\sigma} + \vec{\tilde{\pi}}^2)^2 \quad (2.7)$$

$$= \frac{\lambda}{4} (4\sigma_0^2\tilde{\sigma}^2 + 4\sigma_0\tilde{\sigma}^3 + 2\sigma_0\tilde{\sigma}\vec{\tilde{\pi}}^2 + \tilde{\sigma}^2\vec{\tilde{\pi}}^2 + \tilde{\sigma}^4 + \vec{\tilde{\pi}}^4) \quad . \quad (2.8)$$

Der Lagrangian ist dann

$$\mathcal{L} = Z_q \bar{q} \not{\partial} q + g\sigma_0 \bar{q} q + g \bar{q} (\tilde{\sigma} + i\vec{\tau}\vec{\tilde{\pi}}\gamma_5) q \quad (2.9)$$

$$+ Z_\sigma \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\sigma})^2 + Z_\pi \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\tilde{\pi}})^2 + U(\tilde{\phi}) \quad . \quad (2.10)$$

Durch das Verschieben der Meson Felder erhält die Lagrangedichte den zusätzlichen Term $g\sigma_0 \bar{q} q$. Dieser Term bricht die axiale Symmetrie explizit. Außerdem hat er die Form eines Massenterms, er gibt also den Quarks eine endliche Masse, die Konstituentenquark-Masse.

Nehmen wir an, die Lagrangedichte Gl. (2.9) sei vollständig renormiert, die Kopplungen, Massen und Z-Faktoren seien alle endlich. Um die physikalischen Masse und Kopplungen zu erhalten absorbieren wir die Z-Faktoren vor den kinetischen Termen, indem wir die Felder mit den Z-Faktoren reskalieren:

$$q = q_R Z_q^{-1/2} \quad (2.11)$$

$$\sigma = \sigma_R Z_\sigma^{-1/2} \quad (2.12)$$

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_R Z_\pi^{-1/2} \quad . \quad (2.13)$$

Nach der Reskalierung enthält die Lagrangedichte nur noch renormierte Felder und die renormierten physikalischen Massen und Kopplungen. Wir lesen die physikalischen Massen aus dem Lagrangian ab:

$$M_q = Z_q^{-1} g \sigma_0 \quad (2.14)$$

$$M_\sigma^2 = 2Z_\sigma^{-1} \lambda \sigma_0^2 \quad (2.15)$$

$$M_\pi = 0 \quad . \quad (2.16)$$

Und die physikalischen Kopplungen:

$$g_\pi = Z_q^{-1} Z_\pi^{-1/2} g \quad (2.17)$$

$$g_\sigma = Z_q^{-1} Z_\sigma^{-1/2} g \quad (2.18)$$

$$\lambda_{4\pi} = Z_\pi^{-2} \lambda \quad . \quad (2.19)$$

Im Kapitel 4 wird die hier angenommene Renormierung der Größen g , σ_0 , λ , Z_q , Z_σ , Z_π mit Hilfe von Renormierungsgruppen Flußgleichungen durchgeführt.

2.2 PCAC und Goldberger-Treiman-Relation

Wir werden uns jetzt davon überzeugen, daß das Minimum des Potentials σ_0 mit der Pion-Zerfallskonstanten F_π verknüpft ist. Dazu betrachten wir den schwachen Zerfall des Pions. Die Übergangsamplitude beispielsweise des Zerfalls $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ist proportional zu F_π . Im Matrixelement steht der Axialvektorstrom. Der Pion-Impuls q_μ ist der einzige Lorentzvektor, der im Prozeß auftritt, daher muß er auf der rechten Seite der Gleichung auftreten [26]:

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi_R^b(q) \rangle = i F_\pi q_\mu \delta^{ab} e^{-iqx} \quad . \quad (2.20)$$

Wenn wir die Divergenz dieser Gleichung bilden finden wir:

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(x) | \pi_R^b(q) \rangle = -F_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-iqx} \quad . \quad (2.21)$$

Dies ist die sogenannte PCAC-Relation. Man überzeugt sich leicht, daß der axiale Strom des Pions

$$A_{\mu, \text{Pion}}^a(x) = F_\pi \partial_\mu \pi_R^a(x) \quad (2.22)$$

die PCAC-Relation erfüllt.

Andererseits können wir jedoch den axialen Strom formal aus der Lagrange-dichte Gl. (2.3) herleiten. Die erhaltenen Noether-Ströme sind gegeben durch

$$J_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i)} T_{ij}^a \phi_j \quad . \quad (2.23)$$

Die Matrizen T_{ij}^a sind die Erzeugenden der jeweiligen Symmetrietransformation, in unserem Fall also die Erzeugenden der axialen Transformation Λ_A , Gl. 2.2. Wir finden den axialen Strom

$$A_\mu^a = Z_q \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^2}{2} q + Z_\pi \sigma \partial_\mu \pi^a + Z_\sigma \pi^a \partial_\mu \sigma \quad (2.24)$$

$$= \bar{q}_R \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^2}{2} q_R + Z_\pi^{\frac{1}{2}} \sigma_0 \partial_\mu \tilde{\pi}_R^a + Z_\pi^{\frac{1}{2}} \tilde{\sigma} \partial_\mu \tilde{\pi}_R^a + Z_\sigma^{\frac{1}{2}} \tilde{\pi}^a \partial_\mu \tilde{\sigma}_R \quad , \quad (2.25)$$

wobei wir uns in der letzten Zeile wieder ins Minimum gesetzt haben und kleine Fluktuationen um das Minimum betrachten. Durch Vergleich der Koeffizienten

des kinetischen Terms der Pionen mit der Gleichung (2.22) finden wir den Zusammenhang

$$F_\pi = Z_\pi^{\frac{1}{2}} \sigma_0 \quad . \quad (2.26)$$

Diese Relation zwischen dem Minimum des Potentials und der physikalisch meßbaren Pion-Zerfallskonstanten F_π werden wir in den Kapiteln 4 und 5 benutzen. Dort werden wir die Anfangsbedingungen der Renormierungsgruppen-Evolution so wählen, daß im Infrarot-Bereich der physikalisch beobachtete Wert $F_\pi = 93$ MeV herauskommt.

Die Goldberger-Treiman-Relation ergibt einen Zusammenhang zwischen der Pion-Zerfallskonstanten F_π und der Nukleonmasse. Man betrachtet zunächst den axialen Strom der Quarks:

$$A_{\mu, \text{Quark}}^a = \bar{q}_R \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} q_R \quad . \quad (2.27)$$

Wir bilden die Divergenz von $A_{\mu, \text{Quark}}^a$ und nutzen die Dirac-Gleichung $i\gamma_\mu \partial_\mu q - M_q q = 0$ aus:

$$\partial^\mu A_{\mu, \text{Quark}}^a = \gamma_\mu \partial^\mu \bar{q}_R \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} q_R + \bar{q}_R \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \partial^\mu q_R \quad (2.28)$$

$$= iM_q \bar{q}_R \gamma_5 \tau^a q_R \quad . \quad (2.29)$$

Betrachten wir nun einen Prozeß, bei dem ein Quark ein Pion abstrahlt: Aufgrund der Axialstrom-Erhaltung finden wir:

$$\partial^\mu A_{\mu, \text{Quark}}^a(x) + \partial^\mu A_{\mu, \text{Pion}}^a(x) = 0 \quad . \quad (2.30)$$

Setzen wir den Pion Axialstrom $A_{\mu, \text{Pion}}^a(x)$ Gl. (2.22) ein, so ergibt sich

$$F_\pi \partial^\mu \partial_\mu \pi_R^a(x) = -iM_q \bar{q}_R(x) \gamma_5 \tau^a q_R(x) \quad . \quad (2.31)$$

Diese Gleichung ist die Klein-Gordon-Gleichung eines Pions. Die Erhaltung des gesamten Axialstroms führt also auf die Vorhersage, daß das Pion masselos ist. Es koppelt mit der Kopplungskonstanten

$$g_{\pi qq} = \frac{M_q}{F_\pi} \quad (2.32)$$

an die Quarkfelder. Wir stellen fest, daß unsere Definition der Massen Gl. (2.14) und Kopplungen Gl. (2.17) mit dieser Relation konsistent ist. In der Hadron-Physik ist diese Relation als die Goldberger-Treiman Relation bekannt. Sie lautet dann

$$g_{\pi NN} = g_A \frac{M_N}{F_\pi} \quad (2.33)$$

Der Faktor g_A hat den Wert 1.26 und kommt dadurch zustande, daß das Nukleon kein fundamentales Objekt ist, sondern sich aus Quarks zusammensetzt (siehe auch nächster Abschnitt).

2.3 Pion-Quark-Streuung

Mit dem Gell-Mann-Levy Modell, also dem lineare σ -Modell mit Nukleonen und Mesonen, läßt sich das experimentell beobachtete Verschwinden der Streulänge a^+ an der Pion-Schwelle verstehen: Die Pion-Nukleon-Streuung ist nicht nur durch die Streuung von Pionen an Nukleonen im s- und u-Kanal zu beschreiben, sondern der σ -Meson-Austausch spielt eine wichtige Rolle. Durch diesen t-Kanal Beitrag werden die reinen Pion-Nukleon-Beiträge, im Limes verschwindender Pion-Massen, vollständig weggehoben. Das Verschwinden der Streulänge a^+ an der Pion-Schwelle ist also ein experimenteller Beleg für die chirale Symmetrie.

Wir wollen jetzt als eine Anwendung des linearen σ -Modell die s-Wellen Pion-Quark Streuung ausrechnen. Um die experimentellen Meßgrößen der Pion-Nukleon-Streuung aus der Quark-Pion-Streuung auszurechnen müßten wir natürlich auch die Wellenfunktionen des Nukleons berücksichtigen. Wir beschränken uns jedoch auf die s-Wellen Vorwärtsstreuung an der Pion-Schwelle, an der wir erwarten, daß die Pion-Nukleon-Amplitude einfach die Summe der Pion-Quark-Amplituden ist. Confinement-Effekte sind in unserem Modell nicht enthalten, werden also in dieser Beschreibung vollständig vernachlässigt.

Um die s-Wellen Pion-Quark Streuung auszurechnen schreiben wir zunächst die Lagrangedichte Gl. (2.9) in Minkowski-Metrik:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{q}_R(i\cancel{\partial} - M_q)q_R - gZ_q^{-1}Z_\sigma^{-1/2}\bar{q}_R\sigma_Rq_R - gZ_q^{-1}Z_\pi^{-1/2}\bar{q}_Ri\vec{\tau}\pi_R\gamma_5q_R \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma_R)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi_R)^2 - U_R(\phi). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Aus der Lagrangedichte und dem Potential Gl. (2.7) erhalten wir die folgenden Feynman Regeln:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \hline \end{array} = \frac{i}{\cancel{p} - M_q} \quad (2.35)$$

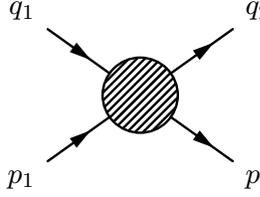
$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \hline \end{array} = \frac{i}{p^2 - M_\sigma^2} \quad (2.36)$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \pi^a \\ \longleftarrow \\ \hline \end{array} = gZ_q^{-1}Z_\pi^{-1/2}\gamma_5\tau^a = g_\pi\gamma_5\tau^a \quad (2.37)$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \sigma \\ \text{~~~~~} \\ \hline \end{array} = -igZ_q^{-1}Z_\sigma^{-1/2} = -ig_S \quad (2.38)$$

$$\begin{array}{c} \pi^b \\ \nearrow \\ \searrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \sigma \\ \text{~~~~~} \\ \hline \end{array} = -i2Z_\pi^{-1}Z_\sigma^{-1/2}\sigma_0\lambda\delta^{ab} \quad (2.39)$$

Als nächstes definieren wir kurz die nötigen Größen aus der Streutheorie. Die folgenden Formeln sind in Lehrbüchern nachzulesen [27, 28, 29]. Die Mandelstam Variablen sind gegeben durch:



$$s = (p_1 + q_1)^2 \quad (2.40)$$

$$t = (q_1 - q_2)^2 \quad (2.41)$$

$$u = (p_2 - q_1)^2 \quad (2.42)$$

Wir wollen das Pion durch den Impuls q_μ beschreiben, also $q^2 = M_\pi^2$. Im chiralen Limes verschwindet die Pion-Masse, wir werden den Übergang $M_\pi \rightarrow 0$ jedoch erst am Ende der Rechnung durchführen. Entsprechend ist $p^2 = M_q^2$ die Quark-Masse als Quadrat des Quark-Impulses p_μ gegeben.

Die S-Matrix ist definiert als

$$S_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{\Omega} \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \left(\frac{M^2}{4E_1 E_2 \omega_1 \omega_2} \right)^{\frac{1}{2}} T_{fi} \quad (2.43)$$

Die δ -Funktion garantiert die Energieerhaltung, Ω ist das Phasenraumvolumen. In der Wurzel steht der sogenannte Flußfaktor. Der Teil, der die einzelnen Übergangsamplituden des Streuprozesses enthält, ist die T-Matrix:

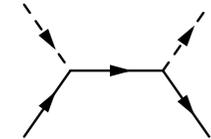
$$T_{fi} = \bar{u}(p_2) [iA(s, t, u) + i\not{q}B(s, t, u)] u(p_1) \quad (2.44)$$

$$= \bar{u}_a(p_2) T^{ab} u_b(p_1) \quad (2.45)$$

Die Matrix T_{ab} läßt sich noch weiter zerlegen, in einen Isospin-geraden und einen ungeraden Teil:

$$T^{ab} = \delta^{ab} T^+ + \frac{1}{2} [\tau^a, \tau^b] T^- \quad (2.46)$$

Damit haben wir die nötigen Formeln kurz zusammengetragen und beginnen unsere Berechnung der Übergangsamplituden mit dem s-Kanal Prozeß:



$$s) \quad (2.47)$$

Die Streuamplitude T_{fi} ergibt sich aus den Feynman Regeln

$$T_{fi} = \bar{u}_a(p_2) (g_\pi \gamma_5 \tau^a) \frac{i}{\not{p}_1 + \not{q}_1 - M_q} (g_\pi \gamma_5 \tau^b) u_b(p_1) \quad (2.48)$$

$$= \bar{u}_a(p_2) g_\pi^2 \tau^a \tau^b \gamma_5 \frac{i(\not{p}_1 + \not{q}_1 + M_q)}{(p_1 + q_1)^2 - M_q^2} \gamma_5 u_b(p_1) \quad (2.49)$$

$$= \bar{u}_a(p_2) g_\pi^2 \left(\delta^{ab} + \frac{1}{2} [\tau^a, \tau^b] \right) \frac{-i\not{q}_1}{s - M_q^2} u_b(p_1) \quad (2.50)$$

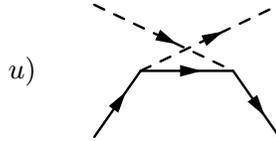
Dabei haben wir die Eigenschaften der γ -Matrizen $[\gamma_\mu, \gamma_5]_+ = 0$ und $\gamma_5^2 = 1$, sowie $\tau^a \tau^b = \delta^{ab} + \frac{1}{2}[\tau^a, \tau^b]$ benutzt. Außerdem gilt die Dirac Gleichung für die Spinoren $(\not{p}_1 - M_q) u(p_1) = 0$. Wir können jetzt die Streuamplitude ablesen und finden

$$B(s, t, u) = -\frac{g_\pi^2}{s - M_q^2} \left(\delta^{ab} + \frac{1}{2}[\tau^a, \tau^b] \right) . \quad (2.51)$$

Damit erhalten wir die Isospin gerade (+) und die ungerade (-) Amplitude für den Prozeß s):

$$B_{(s)}^\pm = -\frac{g_\pi^2}{s - M_q^2} \quad (2.52)$$

Die Amplitude des u-Kanal Prozesses



$$(2.53)$$

kann man jetzt einfach durch ausnutzen der ‘crossing’-Symmetrie hinschreiben. Wenn man vom s-Kanal zum u-Kanal übergeht muß man folgende Ersetzungen machen:

$$s \rightarrow u \quad (2.54)$$

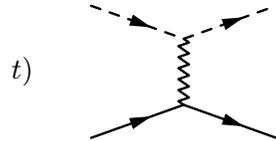
$$\tau^a \tau^b \rightarrow \tau^b \tau^a \quad (2.55)$$

$$q^\mu \rightarrow -q^\mu . \quad (2.56)$$

Damit lesen wir sofort die Amplituden für den Prozeß u) ab:

$$B_{(u)}^\pm = \pm \frac{g_\pi^2}{u - M_q^2} \quad (2.57)$$

Bleibt noch der der t-Kanal zu berechnen. Das Diagramm ist das folgende:



$$(2.58)$$

Diesmal wird ein σ -Meson zwischen dem Pion und dem Quark ausgetauscht. Die T-Matrix für diesen Prozeß ist:

$$T_{fi} = \bar{u}_a(p_2) \left(-i2Z_\pi^{-1} Z_\sigma^{-1/2} \sigma_0 \delta^{ab} \right) \frac{i}{(p_1 - p_2)^2 - M_\sigma^2} (-igs) u_b(p_1) \quad (2.59)$$

$$= \bar{u}_a(p_2) \left(-2g\lambda\sigma_0 Z_q^{-1} Z_\pi^{-1} Z_\sigma^{-1} \right) \frac{i\delta^{ab}}{(p_1 - p_2)^2 - M_\sigma^2} u_b(p_1) \quad (2.60)$$

$$= \bar{u}_a(p_2) \left(-\frac{g_\pi^2 (M_\sigma^2 - M_\pi^2)}{M_q} \frac{i\delta^{ab}}{t - M_\sigma^2} \right) u_b(p_1) . \quad (2.61)$$

Daraus lesen wir wieder die Amplitude ab, diesmal ist der Prozeß Isospin gerade und im Austauschkanal ist ein skalares Teilchen:

$$A_{(t)}^+ = -\frac{g_\pi^2}{M_q} \frac{M_\sigma^2 - M_\pi^2}{t - M_\sigma^2} . \quad (2.62)$$

Wir haben jetzt die drei Amplituden berechnet, die zur Pion-Quark-Streuung beitragen. An der Schwelle zur Pion-Erzeugung kann man die Streulänge sehr einfach aus den Streuamplituden bestimmen [28]:

$$a_{\text{Schwelle}}^\pm = \frac{1}{4\pi \left(1 + \frac{M_\pi}{M_q}\right)} (A^\pm + M_\pi B^\pm) . \quad (2.63)$$

Für die Mandelstam Variablen gilt an der Pion Schwelle:

$$s = (M_q + M_\pi)^2 \quad (2.64)$$

$$t = 0 \quad (2.65)$$

$$u = (M_q - M_\pi)^2 . \quad (2.66)$$

Wir setzen die Amplituden (2.52), (2.57) und (2.62) in die Gleichung (2.63) ein und erhalten für die Streulängen der Pion-Quark-Streuung:

$$a_{(s+t+u)}^+ = \frac{g_\pi^2}{4\pi} \frac{1}{M_q + M_\pi} \left(\left(1 - \frac{M_\pi^2}{M_\sigma^2}\right) - \frac{1}{1 - \frac{M_\pi^2}{4M_q^2}} \right) \quad (2.67)$$

$$a_{(s+u)}^- = \frac{g_\pi^2}{8\pi} \frac{1}{M_q} \frac{M_\pi}{M_q + M_\pi} \left(\frac{1}{1 - \frac{M_\pi^2}{4M_q^2}} \right) , \quad (2.68)$$

dabei trägt der t-Kanal Prozeß nur zur Isospin geraden Streulänge bei. Wir finden in für die die Streulänge a^+ :

$$a_{(s+t+u)}^+ = 0 + \mathcal{O} \left(\frac{M_\pi^2}{M_q^2} \right) , \quad (2.69)$$

die Streulänge a^+ verschwindet also in führender Ordnung in der Pion-Quark-Streuung. Damit verschwindet auch die Pion-Nukleon-Streulänge, weil wir den Spezialfall der s-Wellen Vorwärtsstreuung einfach als Summe der Pion-Quark-Streuungen verstehen können. Will man jedoch die Pion-Nukleon-Streuung allgemein auf die Pion-Quark-Wechselwirkung zurückführen, so muß man über die Wellenfunktion der Nukleonen mitteln. Matrixelemente von Baryon-Zuständen $|B\rangle$ ergeben sich dann aus den Quark-Spinoren durch

$$\int d^4x \langle B' | \mathcal{O}(x) | B \rangle = g (2\pi)^3 \int d^3p |\varphi(\vec{p})|^3 \bar{q} \Gamma \mathcal{O} q , \quad (2.70)$$

wobei $\varphi(\vec{p})$ durch eine Quarkmodell-Beschreibung des Nukleons bestimmt werden muß [26].

Wir sind stattdessen an dem chiralen symmetrischen Limes $M_\pi \rightarrow 0$ interessiert, und stellen fest, daß in diesem Fall die Streulänge a^+ identisch verschwindet. Dieses Verschwinden der Streulänge ist direkt mit der chiralen Symmetrie der Theorie verknüpft. Die Quarks wechselwirken nicht nur direkt mit den Pionen, sondern auch über das σ -Meson, dem chiralen Partner der Pionen. Erst durch die Berücksichtigung des σ -Mesons läßt sich die experimentelle Beobachtung erklären.

Am Ende des Kapitel 4 werden wir auf die Pion-Quark-Streuung zurückkommen und zeigen, daß das Verschwinden der Pion-Quark-Streulänge auch für die Infrarot-Theorie gilt, die wir mit den Flußgleichungen bestimmen. Obwohl das σ -Meson von der effektiven Niederenergie Theorie völlig entkoppelt, ist das Verschwinden der Streulänge durch einen neuen $\bar{q}q\pi^2$ -Wechselwirkungs Term gewährleistet.

Kapitel 3

Flußgleichungen im Heat-Kernel-Formalismus

In diesem Kapitel wird die Heat-Kernel-Renormierungsgruppen-Methode anhand einer skalaren Theorie vorgestellt. Wir leiten als erstes in Abschnitt 3.1 die effektive Wirkung her. Dieser Teil ist in Lehrbüchern [29, 30] nachzulesen und dementsprechend kurz gehalten. Im Abschnitt 3.2 wird die Heat-Kernel-Flußgleichung in der Schwinger-Eigenzeit-Darstellung aufgestellt und die Eigenschaften des Heat-Kernel-cutoffs werden diskutiert. Im Abschnitt 3.3 wird die Heat-Kernel-Flußgleichung mit der exakten RG-Flußgleichung von Wetterich verglichen. Die exakten Flußgleichungen sind ausführlich in dem Übersichtsartikel [20] dargestellt. Zur Einführung eignen sich ebenfalls gut die Vorlesungen [31, 32].

3.1 Die effektive Wirkung

Wir beginnen unsere Betrachtung mit einer einfachen skalaren Theorie. Die klassische Wirkung in euklidischer Metrik ist:

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} Z (\partial_\mu \phi)^2 + U(\phi^2) \right\} . \quad (3.1)$$

Das Potential $U(\phi^2)$ müssen wir zunächst nicht näher spezifizieren, wir können z.B. an ein ϕ^4 -Potential denken. Das erzeugende Funktional der Greensfunktionen ist definiert als

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J \cdot \phi} , \quad (3.2)$$

wobei wir die kurzschreibweise $J \cdot \phi = \int d^4x J(x)\phi(x)$ benutzen. $Z[J=0]$ ist die Zustandssumme, die das erzeugende Funktional normiert. Sie ist gegeben durch

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} . \quad (3.3)$$

Während man durch ableiten von $Z[J]$ nach den äußeren Quellen $J(x)$ alle Greensfunktionen der Theorie erzeugen kann, erhält man die Untermenge der verbundenen Greensfunktionen aus dem Funktional $W[J]$:

$$W[J] = \ln Z[J] \quad . \quad (3.4)$$

Wir bemerken an dieser Stelle, daß der Logarithmus der Zustandssumme bei verschwindender äußerer Quelle $J = 0$:

$$W = \ln Z \quad (3.5)$$

gerade der negativen freien Energie entspricht. $W[J]$ ist ebenso wie $Z[J]$ ein Funktional der äußeren Quellen. Um jedoch die Vakuumphysik zu beschreiben ist die effektive Wirkung nützlicher. Sie hängt nicht von den äußeren Quellen ab, sondern ist ein Funktional des gemittelten Feldes. Wir erhalten die effektive Wirkung $\Gamma[\Phi]$ aus dem erzeugenden Funktional der verbundenen Greensfunktionen $W[J]$ durch Legendre-Transformation. Dazu berechnen wir als erstes die Ableitung von $W[J]$ nach der äußeren Quelle

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J} = Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \phi(x) e^{-S[\phi]+J\cdot\phi} = \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J \quad . \quad (3.6)$$

Dies ist nach der Definition des Funktionalintegrals der Vakuumerwartungswert des Feldes $\phi(x)$ in Anwesenheit einer Quelle J . Wir nennen diesen Erwartungswert das klassische Feld Φ :

$$\Phi(x) := \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J \quad . \quad (3.7)$$

Es stellt das über alle Fluktuationen gewichtete Mittel des Feldes dar und kann als Analogon zur Magnetisierung in der Statistischen Physik verstanden werden. Mit dem gemittelten klassischen Feld Φ können wir jetzt die Legendre-Transformation durchführen:

$$\Gamma[\Phi] = -W[J] + J \cdot \Phi \quad . \quad (3.8)$$

Die effektive Wirkung $\Gamma[\Phi]$ entspricht der Gibb'schen Freien Energie in der statistischen Physik, sie ist das erzeugende Funktional der Einteilchen-irreduziablen Greensfunktionen. Das bedeutet, wenn wir die effektive Wirkung einer Theorie kennen, können wir sehr einfach durch Ableiten nach den Feldern Φ alle Einteilchen irreduziblen Greensfunktionen ausrechnen. Andererseits ist auch die äußere Quelle $J(x)$ durch die einfache Ableitung der effektiven Wirkung nach dem klassischen Feld definiert:

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\Phi]}{\delta \Phi(x)} \right|_J = J(x) \quad . \quad (3.9)$$

Wir können demnach bei Abwesenheit von äußeren Quellen ($J(x) = 0$) den Vakuumzustand direkt aus der effektiven Wirkung erhalten, indem wir Γ minimieren. Die effektive Wirkung spielt also eine herausragende Rolle in der Quantenfeldtheorie.

Das Pfadintegral Gl. (3.2) und damit auch die effektive Wirkung Gl. (3.8), läßt sich jedoch nur näherungsweise berechnen. Wir werden daher jetzt die effektive Wirkung in ein-loop Näherung für eine skalare Theorie ausrechnen, indem wir eine Sattelpunktsentwicklung durchführen. Wir entwickeln die klassische Wirkung Gl. (3.1) um das gemittelte klassische Hintergrundfeld Φ und nehmen die Aufspaltung $\phi(x) = \Phi(x) + \varphi(x)$ vor. Das Feld $\varphi(x)$ stellt also die Fluktuation um das Hintergrundfeld $\Phi(x)$ dar. Für die klassische Wirkung ergibt sich:

$$S[\phi] = S[\Phi] + \int d^4x \left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\Phi} \varphi(x) + \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\Phi} \varphi(x) \varphi(y) + \dots \quad (3.10)$$

und entsprechend für den Quellterm

$$J \cdot \phi = J \cdot \Phi + J \cdot \varphi \quad . \quad (3.11)$$

Zusammen erhalten wir:

$$\begin{aligned} -S[\phi] + J \cdot \phi = & -S[\Phi] + J \cdot \Phi + \int d^4x \left(J(x) - \left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\Phi} \right) \varphi(x) \quad (3.12) \\ & - \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\Phi} \varphi(x) \varphi(y) + \dots \end{aligned}$$

Der Koeffizient des lineare Anteils in den Fluktuationen ist gerade die klassische Feldgleichung, die natürlich in niedrigster Ordnung gültig ist:

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right|_{\Phi} - J(x) = 0 \quad . \quad (3.13)$$

Der lineare Beitrag in den Fluktuationen verschwindet also und die erste Quantenkorrektur zur klassischen Wirkung ist von quadratischer Ordnung in den Fluktuationen.

Wir setzen die Entwicklung Gl. (3.12) in das erzeugende Funktional Gl. (3.2) ein und erhalten durch formale Integration über die Felder

$$Z[J] = e^{W[J]} = \mathcal{Z}^{-1} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\Phi] + J \cdot \Phi - \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\Phi} \varphi(x) \varphi(y)} \quad (3.14)$$

$$= e^{-S[\Phi] + J \cdot \Phi} \det \left[\left. \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta \Phi \delta \Phi} \right] \right]^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.15)$$

Die Funktionaldeterminante können wir in eine Funktionalspur über den Logarithmus umschreiben: $\ln \det A = \text{Tr} \ln A$. Damit ergibt sich für die effektive Wirkung nach Gl. (3.8)

$$\Gamma^{1\text{-loop}}[\Phi] = S[\Phi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\left. \frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta \Phi \delta \Phi} \right] \right] \quad . \quad (3.16)$$

Die zweifache Ableitung der klassischen Wirkung nach dem Feld Φ im Argument des Logarithmus ist der klassische inverse Propagator. Wir finden für die skalare Theorie:

$$\frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} = \left(-Z \partial^2 + \frac{\delta^2 U(\Phi)}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \right) \delta^4(x - y) \quad . \quad (3.17)$$

Die Gl. (3.16) ist also eine ein-loop Gleichung in der im loop-Integral der klassische Propagator steht.

3.2 Die Heat-Kernel-Flußgleichung

Um die ein-loop effektive Wirkung Gl. (3.16) tatsächlich zu berechnen muß der Logarithmus zunächst regularisiert werden. Wir werden dazu die Schwinger-Eigenzeit-Darstellung benutzen. Durch Einführen eines geeigneten cutoffs leiten wir dann die Heat-Kernel-Flußgleichung her. Schreiben wir also als erstes den Logarithmus in Gleichung (3.16) als Schwinger-Eigenzeit-Integral [33]. Bis auf additive divergierende Terme gilt:

$$\ln A = - \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau A} \quad . \quad (3.18)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.16) ergibt sich:

$$\Gamma^{1\text{-loop}}[\Phi] = S[\Phi] - \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau \left[\frac{\delta^2 S}{\delta \Phi \delta \Phi} \right]} \quad . \quad (3.19)$$

Das Schwinger-Eigenzeit-Integral ist im allgemeinen ultraviolett und infrarot divergent. Wir regularisieren den Infrarot-Bereich des Integrals, indem wir eine Infrarot-cutoff-Funktion f_k einführen:

$$\Gamma_k^{1\text{-loop}}[\Phi] = S[\Phi] - \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau \left[\frac{\delta^2 S}{\delta \Phi \delta \Phi} \right]} f_k \quad . \quad (3.20)$$

Bevor wir den Heat-Kernel cutoff f_k ausführlich diskutieren, wollen wir zunächst die Flußgleichungen herleiten, ohne den cutoff näher zu spezifizieren. Für den Moment müssen wir über f_k nur soviel wissen: Der cutoff-Parameter k hat die Dimension einer Masse und stellt eine Infrarot-Abschneideskala dar; das Schwinger-Eigenzeit-Integral wird also durch f_k infrarot endlich. Wenn wir den Grenzfall $k \rightarrow 0$ ausführen verschwindet f_k und der gesamte Infrarot-Bereich wird im Schwinger-Eigenzeit-Integral integriert. Andererseits hat f_k die Eigenschaft, daß das Schwinger-Eigenzeit-Integral in führender Ordnung nur noch durch einen additiven Term $\sim \ln \Lambda^2$ vom Ultraviolett-cutoff Λ abhängt.

Wir stellen also eine Flußgleichung auf, indem wir die logarithmische Ableitung nach der cutoff Skala k bilden. Die Ableitung des Heat-Kernel cutoffs hängt dann nicht mehr von der Ultraviolett-Skala Λ ab. Wir schreiben deshalb als untere Grenze des Eigenzeitintegrals $\tau_{uv} = 0$:

$$k \frac{\partial \Gamma_k^{1\text{-loop}}[\Phi]}{\partial k} = - \frac{1}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau \left[\frac{\delta^2 S}{\delta \Phi \delta \Phi} \right]} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \quad . \quad (3.21)$$

Diese Gleichung beschreibt die störungstheoretische Skalenabhängigkeit der effektiven Wirkung in ein-loop Näherung. Man könnte jetzt durch Ableiten von

$\Gamma_k[\Phi]$ nach den Feldern beispielsweise die 4-Punkt-Funktion ausrechnen. Die resultierende Differentialgleichung würde die typische laufende 4-Punkt-Kopplung in ein-loop Näherung beschreiben. Der Renormierungspunkt wäre durch die Bestimmung der Kopplungen in der klassischen Wirkung $S[\Phi]$ bei einer festen Renormierungs-Skala k_{uv} definiert.

Wir wollen indes Gl. (3.21) nur ein infinitesimales Stück dk weit integrieren. Das resultierende $\Gamma_{k-dk}[\Phi]$ verstehen wir dann als unsere neue effektive Theorie. Aus dieser Theorie können wir wie vorher die –jetzt allerdings geänderte– klassische 2-Punkt-Funktion bestimmen. Mit der neuen 2-Punkt-Funktion machen wir den nächsten Integrationsschritt, usw. Bei infinitesimalen Schritten können wir diese Prozedur durchführen, indem wir folgende Ersetzung in Gl. (3.21) machen:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\Phi\delta\Phi} \rightarrow \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\Phi\delta\Phi} \quad (3.22)$$

Mit dieser Ersetzung des klassischen inversen Propagators der klassischen Wirkung durch den vollen inversen Propagator der gemittelten effektiven Wirkung $\Gamma_k[\Phi]$ wird aus der ein-loop Gleichung eine Renormierungsgruppen-verbesserte Evolutionsgleichung, die auch die nicht störungstheoretischen Effekte höherer Ordnung berücksichtigt [34]. Die resultierende Heat-Kernel-Renormierungsgruppen-Gleichung lautet:

$$k \frac{\partial \Gamma_k[\Phi]}{\partial k} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau \left[\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\Phi\delta\Phi} \right]} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \quad (3.23)$$

Diese nichtlineare partielle Differentialgleichung stellt für festgehaltenes k eine Schwinger-Dyson-Gleichung dar. Auf der linken Seite steht die volle effektive Wirkung $\Gamma_k[\Phi]$, auf der rechten Seite ein ein-loop Integral mit der vollen 2-Punkt-Funktion, die ebenfalls durch $\Gamma_k[\Phi]$ bestimmt ist. Anders als in der Schwinger-Dyson-Gleichung wird $\Gamma_k[\Phi]$ hier jedoch nicht selbstkonsistent bestimmt.

Die klassische Ultraviolett-Wirkung $S[\Phi]$ an der Skala k_{uv} dient als Startpunkt unserer Evolution. Ausgehend von k_{uv} integrieren wir schrittweise den Infrarotbereich aus. Das Ergebnis jedes Integrationsschrittes wird auf der rechten Seite der Gleichung (3.23) wieder eingesetzt. Indem wir so der Evolution $k \rightarrow 0$ in infinitesimalen Schritten folgen, wird die Gl. (3.23) unendlich oft iteriert. Damit werden auch Korrekturen jenseits der ein-loop Näherung berücksichtigt. Durch die Renormierungsgruppen-Ersetzung wird die ein-loop Gleichung (3.21) zur nicht-perturbativen Flußgleichung (3.23). Die skalenabhängige mittlere effektive Wirkung $\Gamma_k[\Phi]$ interpoliert den Bereich zwischen der klassischen Wirkung und der vollen effektiven Wirkung, die alle Quantenfluktuationen enthält. Die Grenzfälle sind

$$\Gamma_k[\Phi] \longrightarrow S[\Phi], \quad \text{für } k \rightarrow k_{\text{uv}} \quad (3.24)$$

$$\Gamma_k[\Phi] \longrightarrow \Gamma[\Phi], \quad \text{für } k \rightarrow 0 \quad (3.25)$$

Die Evolution für $k \rightarrow 0$ auszuführen ist also gleichbedeutend mit dem Lösen der Theorie. Bei $k = 0$ erhält man die volle effektive Wirkung $\Gamma[\Phi]$ und daraus alle Greensfunktionen und den Grundzustand der Theorie.

Die partielle Differentialgleichung (3.23) für die gemittelte effektive Wirkung kann jedoch nicht exakt gelöst werden. Um die Evolution beispielsweise von Massen zu berechnen, muß man zunächst eine geeignete Parametrisierung von Γ_k finden. Da Γ_k prinzipiell höhere Operatoren jeder Ordnung enthalten kann, stellt solch eine Parametrisierung immer eine Trunkierung auf einen endlichen Satz von Operatoren dar. Wir können die mittlere effektive Wirkung in Form einer Entwicklung nach lokalen Feldoperatoren, der sogenannten Gradientenentwicklung oder Ableitungsentwicklung, parametrisieren:

$$\Gamma_k[\Phi] = \int d^4x \left\{ U_k(\Phi^2) + \frac{1}{2} Z_k (\partial_\mu \Phi)^2 + \dots \right\} . \quad (3.26)$$

Die Koeffizienten der Ableitungsentwicklung hängen jetzt von der Renormierungsgruppen Skala k ab. Wir wollen die Flußgleichungen für das effektive Potential $U_k(\Phi)$ und die Wellenfunktions-Renormierung Z_k noch kurz herleiten, bevor wir dann den Heat-Kernel-cutoff diskutieren. Wir setzen also die Trunkierung für Γ_k in die rechte Seite der Gl. (3.23) ein und erhalten:

$$k \frac{\partial \Gamma_k[\Phi]}{\partial k} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau \left[-Z_k \partial^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} \right]} k \frac{\partial f_k}{\partial k} . \quad (3.27)$$

Die Funktional-Spur ist definiert als

$$\text{Tr} A = \int d^4x \langle x | A | x \rangle \quad (3.28)$$

und es ergibt sich:¹

$$k \frac{\partial \Gamma_k[\Phi]}{\partial k} = -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \langle x | e^{-\tau \left[-Z_k \partial^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} \right]} | x \rangle k \frac{\partial f_k}{\partial k} . \quad (3.29)$$

Durch Einschleiben von ebenen Wellen können wir den Heat Kernel weiter auswerten [35], vgl. Anhang (A.1):

$$k \frac{\partial \Gamma_k[\Phi]}{\partial k} = -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau \left(Z_k q^2 - 2i Z_k q \cdot \partial - Z_k \partial^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} \right)} \mathbb{1} k \frac{\partial f_k}{\partial k} . \quad (3.30)$$

Die ∂ -Operatoren im Exponenten wirken auf alle rechts stehenden Felder, in der Exponentialfunktion sind also Ableitungsterme beliebiger Ordnung vorhanden. Wir können die rechte Seite nach Ableitungen entwickeln, indem wir die

¹Die Spur über innere Dimensionen ist im Fall einer skalaren Theorie natürlich eins. Wir schreiben die Spur tr trotzdem in den Formeln, um diese später leichter zu verallgemeinern.

Exponentialfunktion als Potenzreihe in τ schreiben, alle höheren Ordnungen in den Ableitungen wegstreichen und dann die Reihen wieder aufsummieren. Als Ergebnis erhalten wir in zweiter Ordnung in den Ableitungen [36, 37]:

$$\begin{aligned}
k \frac{\partial \Gamma_k[\Phi]}{\partial k} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau \left(Z_k q^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} \right)} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \\
&+ \left\{ \frac{1}{6} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \tau^2 d\tau Z_k \lambda^2 \Phi^2 e^{-\tau \left(Z_k q^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} \right)} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \right. \\
&\left. - \frac{1}{24} \text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \tau^3 d\tau Z_k^2 \lambda^2 \Phi^2 q^2 e^{-\tau \left(Z_k q^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} \right)} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \right\} \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

mit der Abkürzung

$$\lambda := \frac{\delta}{\delta \Phi^2} \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} . \tag{3.32}$$

Die Impuls Integrale können ausgeführt werden und wir finden durch Koeffizientenvergleich mit der Parametrisierung Gl. (3.26) die Flußgleichungen für Z_k und U_k :

$$k \frac{\partial U_k(\Phi^2)}{\partial k} = -\frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^3} Z_k^{-2} e^{-\tau \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi}} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \tag{3.33}$$

$$k \frac{\partial Z_k}{\partial k} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{6} \text{tr} \int_0^\infty d\tau Z_k^{-1} \lambda \Phi_0^2 e^{-\tau \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi}} k \frac{\partial f_k}{\partial k} . \tag{3.34}$$

Als letzten Schritt werden wir jetzt noch das τ -Integral ausführen. Dazu müssen wir die Eigenschaften des Heat-Kernel-cutoffs f_k genauer definieren. Wir diskutieren daher im folgenden kurz die Bedingungen, die an den Heat-Kernel-cutoff zu stellen sind. Betrachten wir nocheinmal das Schwinger-Eigenzeit-Integral, wie es bereits in Gl. (3.19) aufgetreten ist. Wir untersuchen zuerst den Ultraviolett-Bereich und nehmen für den Moment an, die Theorie sei infrarot endlich. Das Eigenzeit-Integral definiert die unvollständige generalisierte Γ -Funktion:

$$\int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau A[\Phi]} = \Gamma \left[0, \frac{A[\Phi]}{\Lambda^2} \right] . \tag{3.35}$$

Wir können die Γ -Funktion als Reihenentwicklung angeben

$$-\int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau A[\Phi]} = C + \ln(A[\Phi]) - \ln(-\Lambda^2) + \frac{1}{1 \cdot 1!} \frac{A[\Phi]}{\Lambda^2} + \frac{1}{2 \cdot 2!} \left(\frac{A[\Phi]}{\Lambda^2} \right)^2 + \dots \tag{3.36}$$

wobei C die Euler Konstante ist. Durch diese Reihenentwicklung ist es möglich den uns interessierenden, feldabhängigen –physikalischen– Anteil des Integrals $\ln(A[\Phi])$ von dem an der Stelle $\tau = 0$ divergierenden Term $\ln(-\Lambda^2)$ zu separieren. Im Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ verschwinden alle höheren Terme der Potenzreihe und wir können das Integral ultraviolett regularisieren, indem wir den divergenten Term $-\ln(-\Lambda^2)$ einfach subtrahieren. Wir lassen auch gleich die Eulerkonstante weg, weil konstante Terme für die Flußgleichungen keine Rolle spielen. Wir erhalten also die Gleichung (3.18):

$$\left(- \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau A[\Phi]} \right)_{\text{regularisiert}} = \ln(A[\Phi]) \quad (3.37)$$

Man überzeugt sich dagegen leicht durch partielle Integration, daß das folgende Integral wie

$$\int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2} e^{-\tau A[\Phi]} \sim A[\Phi] \ln(A[\Phi]) - A[\Phi] \ln(-\Lambda^2) \quad (3.38)$$

divergiert. Hier ist der divergierende Term $A[\Phi] \ln(-\Lambda^2)$ nicht mehr konstant in Φ . D.h. in diesem Fall können wir das Eigenzeitintegral nicht mehr durch Subtraktion der Unendlichkeit ultraviolett regularisieren. Übertragen auf die Flußgleichungen heißt das: der Fluß der effektiven Wirkung ist nicht mehr unabhängig von der Ultraviolett-Abschneideskala Λ .

Aus dieser Überlegung erhalten wir die erste Bedingung, die der Heat-Kernelcutoff erfüllen muß: Die in den Flußgleichungen auftretenden Integranden dürfen für $\tau \rightarrow 0$ höchstens wie $1/\tau$ divergieren. Betrachten wir die Flußgleichung für das effektive Potential Gl. (3.33), so muß gelten

$$k \frac{\partial}{\partial k} f_k = c \cdot \tau^n \quad \text{mit } n \geq 2. \quad (3.39)$$

Damit bleibt die Gleichung für $\Lambda \rightarrow \infty$ regularisierbar und wir können das τ -Integral ausführen. Alle höheren Ordnungen in der Ableitungs Entwicklung enthalten im Zähler höhere Potenzen von τ (vgl. Gl. 3.31). Sie sind mit dieser Wahl also ebenfalls ultraviolett regularisierbar.

Betrachten wir jetzt das Infrarot-Verhalten. Damit f_k als cutoff für Renormierungsgruppen-Flußgleichungen geeignet ist, muß der cutoff-Parameter k eine Infrarot-Abschneideskala bilden. Das erreichen wir am einfachsten durch Addition eines massenartigen Terms $\sim k^2$ im Exponenten der Flußgleichung Gl. (3.23). Also:

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi \delta \Phi} \rightarrow \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi \delta \Phi} + k^2 \quad , \quad (3.40)$$

oder auf den cutoff übertragen

$$k \frac{\partial}{\partial k} f_k = b \cdot e^{-\tau k^2} \quad . \quad (3.41)$$

Der Heat-Kernel-cutoff stellt also einen massenartigen Infrarot-cutoff dar.

Die Schwinger-Eigenzeit τ hat die Dimension $[\tau] = \text{Masse}^{-2}$. Durch die Überlegung, daß der cutoff f_k einheitenlos sein sollte, finden wir aus den beiden Bedingungen (3.39) und (3.41) die allgemeine Form der Ableitung von f_k :

$$k \frac{\partial}{\partial k} f_k^{(M)} = -\frac{2}{M!} (\tau k^2)^{M+1} e^{-\tau k^2} \quad \text{mit } M \geq 1. \quad (3.42)$$

Der Koeffizient $2/M!$ und der Exponent wurde so gewählt, daß der cutoff die einfache Form:

$$f_k^{(M)} = \sum_{i=0}^M \frac{(\tau k^2)^i}{i!} e^{-\tau k^2} \quad \text{mit } M \geq 1 \quad (3.43)$$

erhält. In [37] wurde der Heat Kernel cutoff für $M = 1$ systematisch mit einem Pauli-Villars-cutoff verglichen. Für das effektive Potential entspricht der Fall $M = 1$ gerade einem Pauli-Villars-cutoff. In der Arbeit [22] wurden die Heat-Kernel-RG-Gleichungen mit dem cutoff $M = 2$ auf das lineare σ -Modell mit Quarks angewendet und der chirale Phasenübergang bei endlicher Temperatur untersucht. In [38] wurde der Fluß des effektiven Potentials in einem linearen σ -Modell mit Quarks für verschiedene M numerisch verglichen. Dort hat sich gezeigt, daß mit höheren M die Konvergenz der Renormierungsgruppen-Evolution steigt. Cutoffs mit $M \geq 2$ zeigen bei einer Parametrisierung des effektiven Potentials $U_k(\Phi)$ als Potenzreihe bis Ordnung Φ^8 gute Konvergenzeigenschaften.

Wir werden am Ende des Abschnitts 3.3 noch kurz die Heat-Kernel-cutoffs mit verschiedenem M untersuchen. Ansonsten verwenden wir jedoch in dieser Arbeit ausschließlich den Heat-Kernel-cutoff im Fall $M = 2$, also

$$f_k = \left(1 + \tau k^2 + \frac{1}{2} \tau^2 k^4 \right) e^{-\tau k^2} \quad (3.44)$$

$$k \frac{\partial}{\partial k} f_k = -\tau^3 k^6 e^{-\tau k^2} \quad (3.45)$$

Gegenüber anderen Renormierungsgruppen cutoffs bietet der Heat-Kernel-cutoff den Vorteil, daß über die Schwinger-Darstellung eine weiche cutoff Skala k eingeführt werden kann, ohne das die Symmetrien der ursprünglichen Theorie verletzt werden. Dafür ist es wichtig, daß bei der Herleitung (vgl. Gl. 3.31, 3.33) das Impulsintegral jeweils vor dem Schwinger-Eigenzeit-Integral ausgeführt werden. Die resultierenden Flußgleichungen enthalten dann alle Symmetrien der Theorie [37]. Wegen dieser Erhaltung der Symmetrien sind die Heat-Kernel-Flußgleichungen möglicherweise auch ein geeignetes Werkzeug um Flußgleichungen für Eichtheorien aufzustellen.

Der Heat-Kernel-cutoff Gl. (3.44) ist als Funktion der Schwinger-Eigenzeit in Abb. 3.1 dargestellt. Die Kurven entsprechen der k -Werten $k = 1.2, 1.0, 0.8$ GeV. Man erkennt deutlich wie für kleiner werdendes k das τ -Intervall, über das das Eigenzeit-Integral integriert, immer größer wird. Für $k \rightarrow 0$ wird $f_k = 1$ und der cutoff verschwindet. Die oben diskutierten Ultraviolett-Eigenschaften

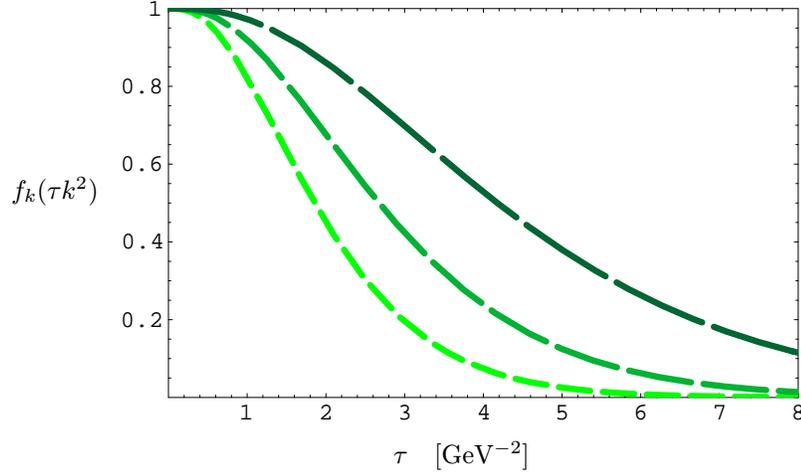


Abbildung 3.1: Der Heat Kernel cutoff f_k als Funktion der Schwinger Eigenzeit τ für verschiedene cutoff Skalen k . Die k -Werte sind 1.2, 1.0, 0.8 GeV (von links nach rechts).

spiegeln sich in Abb. 3.1 an der Stelle $\tau = 0$ wieder. Hier ist $f_k(0) = 1$ und zusätzlich $f'(\tau)|_{\tau=0} = 0$. Die waagerechte Tangente an diesem Punkt führt auf das gewünschte Ultraviolett-Verhalten.

Wir wollen jetzt den Heat-Kernel-cuttoff Gl. (3.44) in die Flußgleichungen (3.33) einsetzen, müssen aber noch kurz die Rolle der Wellenfunktions-Renormierungs-Konstanten Z diskutieren: Die Skala k soll als massenartiger cutoff im Exponenten der Gl. (3.33) auftreten. Dort stehen jedoch die Koeffizienten $\frac{\delta^2 U}{\delta\Phi\delta\Phi}$ der 'bare' Felder Φ . Wir haben bisher keine Reskalierung $\Phi_R = Z^{1/2}\Phi$ durchgeführt um die Z -Faktoren in der Gl. (3.26) zu absorbieren und werden das auf der Ebene der Flußgleichungen auch nicht tun. Um also in den Flußgleichungen (3.33) nicht "Äpfel mit Birnen" zu vergleichen, müssen wir eine 'bare' Abschneide-Skala $k_B = Z^{1/2}k$ definieren, also

$$\begin{aligned} f_k &= \left(1 + \tau k_B^2 + \frac{1}{2}\tau^2 k_B^4 \right) e^{-\tau k_B^2} \\ &= \left(1 + \tau Z k^2 + \frac{1}{2}\tau^2 Z^2 k^4 \right) e^{-\tau Z k^2} . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Der Z -Faktor im cutoff tritt beispielsweise auch in den Formulierungen von [19, 39, 40] auf. Alternativ können wir allerdings auch das τ -Integral in den Flußgleichungen durch $Z\tau \rightarrow \tau$ reskalieren. Wir erhalten dann anstatt der Flußgleichungen (3.33):

$$k \frac{\partial U_k(\Phi^2)}{\partial k} = -\frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^3} e^{-\tau Z^{-1} \frac{\delta^2 U_k}{\delta\Phi\delta\Phi}} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \quad (3.47)$$

$$k \frac{\partial Z_k}{\partial k} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{6} \text{tr} \int_0^\infty d\tau Z_k^{-2} \lambda \Phi_0^2 e^{-\tau Z^{-1} \frac{\delta^2 U_k}{\delta\Phi\delta\Phi}} k \frac{\partial f_k}{\partial k} . \quad (3.48)$$

Entsprechend müssen wir dann auch im Heat Kernel cutoff Gl. (3.46) die Eigenzeit τ reskalieren und wir erhalten wieder den cutoff ohne Z -Faktoren Gl. (3.44). Beide Möglichkeiten sind völlig äquivalent. Wir werden im folgenden immer mit dieser Reskalierung arbeiten. Sie ist völlig konsistent mit den Formulierungen mit Z -Faktoren.

Wir setzen also den Heat-Kernel-cutoff Gl. (3.44) in die Flußgleichungen ein und erhalten:

$$k \frac{\partial U_k}{\partial k} = - \frac{k^6}{32\pi^2} \frac{1}{\left(k^2 + Z_k^{-1} \frac{\delta^2 U_k}{\delta\Phi\delta\Phi}\right)} \quad (3.49)$$

$$k \frac{\partial Z_k}{\partial k} = - \frac{k^6}{32\pi^2} \frac{Z_k^{-2} \lambda^2 \Phi_0^2}{\left(k^2 + Z_k^{-1} \frac{\delta^2 U_k}{\delta\Phi\delta\Phi}\right)^4} \quad (3.50)$$

Die Flußgleichung für das effektive Potential $U_k(\Phi)$ ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, die numerisch gelöst werden muß. Die Gleichung für Z_k ist hier eine gewöhnliche Differentialgleichung, weil wir Z_k in der effektiven Wirkung Gl. (3.26) als konstant in den Feldern Φ angenommen haben. Im allgemeinen ist auch der Koeffizient des kinetischen Terms eine Funktion der Felder $Z_k = Z_k(\Phi)$ wie man auch leicht in der Gleichung (3.31) sieht.

Zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen bieten sich zwei Methoden an: Zum einen kann man $U_k(\Phi)$ und $Z_k(\Phi)$ auf einem Gitter diskretisieren. Man erhält dann für jeden Gitterpunkt Φ_i eine gewöhnliche Differentialgleichung, die mit den Gleichungen der benachbarten Gitterplätze gekoppelt ist. Wir werden diese Methode im Kapitel 5 verwenden, wenn wir das lineare σ -Modell bei endlicher Dichte untersuchen. Andererseits kann man die Funktionen $U_k(\Phi)$ und $Z_k(\Phi)$ auch als Potenzreihen in Φ entwickeln, deren Koeffizienten k abhängig sind. So erhält man aus der partiellen Differentialgleichung (3.49) einen Satz gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Koeffizienten der Potenzreihe. Diese Methode werden wir im Kapitel 4 benutzen.

3.3 Vergleich mit den exakten RG-Flußgleichungen

Wir wollen jetzt die Heat-Kernel-Flußgleichungen mit der exakten Renormierungsgruppen (RG) Gleichung von Wetterich [40] vergleichen. Die exakte RG-Flußgleichung kann ganz analog zur –am Beginn dieses Kapitels beschriebenen– Heat-Kernel-Flußgleichung aufgestellt werden. Man geht aus von der ein-loop effektiven Wirkung $\Gamma[\Phi]$ und regularisiert diese nicht in der Schwinger-Darstellung, sondern indem man direkt eine geeignete Regulatorfunktion $R_k(q^2)$ in den Logarithmus einfügt. Ausgehend von der ein-loop effektiven Wirkung (3.16) erhält man

$$\Gamma_k[\Phi] = S[\Phi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\Phi\delta\Phi} + R_k(q^2) \right] \quad (3.51)$$

Eine mögliche Abschneidefunktion ist

$$R_k(q^2) = \frac{q^2 e^{-q^2/k^2}}{1 - e^{-q^2/k^2}} \quad . \quad (3.52)$$

Diese Abschneide-Funktion macht Γ_k ultraviolett und infrarot endlich und der Parameter k stellt wie zuvor eine Renormierungsgruppen-Skala dar. Jetzt bildet man die logarithmische Ableitung nach der cutoff-Skala und führt wieder die Renormierungsgruppen-Verbesserung (3.22) durch. Das Ergebnis ist die Flußgleichung:

$$k \frac{\partial \Gamma_k[\Phi]}{\partial k} = \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{1}{\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi \delta \Phi} + R_k(q^2)} k \frac{\partial R_k}{\partial k} \quad . \quad (3.53)$$

Der entscheidende Unterschied zur Heat-Kernel-Flußgleichung besteht darin, daß man die Gl. (3.53) direkt aus dem Erzeugenden Funktional Gl. (3.2) herleiten kann, ohne eine Sattelpunktsentwicklung vorzunehmen. Die Flußgleichung (3.53) ist also eine exakte Gleichung. Für die Herleitung spielt eine Eigenschaft der cutoff-Funktion R_k eine entscheidende Rolle: Dadurch, daß man R_k bilinear in den Feldern schreiben kann und damit auch auf der Ebene der Wirkung direkt einführen kann

$$\Delta S_k[\Phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} R_k(q) \Phi(-q) \Phi(q) \quad , \quad (3.54)$$

wird der Beweis der Exaktheit von Gleichung (3.53) möglich [40].

Ganz anders bei der Heat-Kernel-Darstellung. Hier kann der Heat-Kernel-cutoff immer nur eingeführt werden, indem der nach der Sattelpunktsentwicklung auftretende Logarithmus in Schwinger-Darstellung geschrieben wird. Direkt in die Wirkung kann man f_k nicht einführen, die Schwinger-Eigenzeit τ hätte auch auf der Ebene der Wirkung gar keine Bedeutung. Ein direkter Exaktheitsbeweis wie bei Wetterich [40] ist hier aufgrund der Form des cutoff f_k also nicht möglich.

Der tiefere formale Zusammenhang zwischen der Heat-Kernel-Renormierungsgruppen-Gleichung und der exakten Renormierungsgruppen-Gleichung bleibt demnach unklar, wir müssen uns deshalb darauf beschränken numerische Ergebnisse zu vergleichen (siehe auch [41]). Wir werden uns also nun davon überzeugen, daß die Heat-Kernel-Flußgleichung ganz ähnlich wie die exakte Renormierungsgruppen-Flußgleichung funktioniert. Wir vergleichen dazu die Wirkung der cutoff-Funktionen auf das Impulsintegral in beiden Formulierungen. Wir setzen den inversen Propagator in niedrigster Ordnung der Ableitungsentwicklung ($Z = 1$):

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi \delta \Phi} = q^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} \quad (3.55)$$

in die exakten Flußgleichungen ein:

$$k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} = \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} + R_k(q^2)} k \frac{\partial R_k}{\partial k} \quad (3.56)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \int dq \frac{q^3}{q^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} + R_k(q^2)} k \frac{\partial R_k}{\partial k} \quad (3.57)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \int dq I_W(q) \quad (3.58)$$

Der Integrand der Gleichung (3.56), $I_W(q)$ mit der cutoff Funktion (3.52) ist für

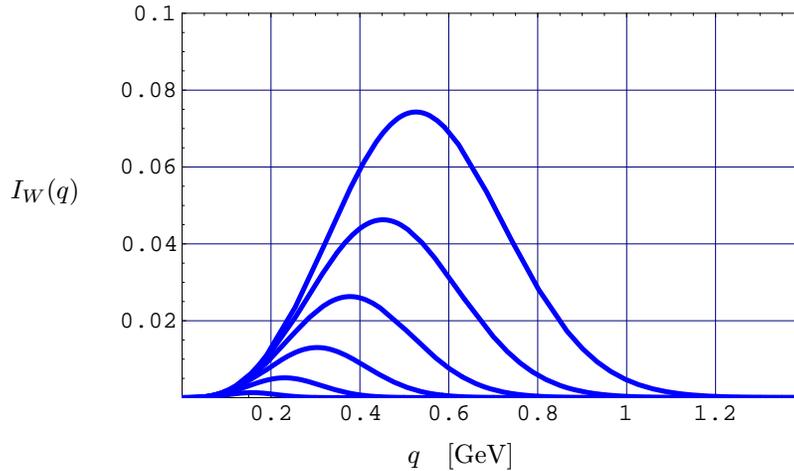


Abbildung 3.2: Die Wirkungsweise des cutoffs $R_k(q^2)$ der exakten Flußgleichungen auf das Impulsintegral. Die cutoff-Skalen sind $k = 0.35, 0.3, 0.25, \dots, 0.1$ GeV.

verschiedene cutoff Skalen k in Abbildung 3.2 dargestellt. Die Ableitung $m^2 := \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi}$ spielt die Rolle einer Masse, die wir willkürlich auf $m = 100$ MeV festgelegt haben. Für die Renormierungsgruppen Flußgleichungen ist es natürlich von entscheidender Bedeutung, das sich diese Masse mit der Skala k ändert; dadurch werden die Flußgleichungen zu nicht perturbativen Gleichungen. Wir werden die Rolle der laufenden Massen im Abschnitt 4.4 diskutieren, für den Vergleich der cutoff Funktionen nehmen wir hier jedoch an, m sei konstant.

Man erkennt deutlich in Abbildung 3.2, daß der Integrand ultraviolett und infrarot endlich ist. Die verschiedenen cutoff Skalen, für die der Integrand geplottet wurde, sind $k = 0.35, 0.30, 0.25, \dots, 0.10$ GeV. Mit kleiner werdender Skala verschiebt sich das Maximum des Integranden zu kleineren Impulsen. Die hohen Impulse werden also kontinuierlich ausintegriert.

Um jetzt den Vergleich zur Heat-Kernel-Flußgleichung herzustellen, müssen wir die Heat-Kernel-Flußgleichung als Impulsintegral schreiben. Wir gehen also zurück zu Gleichung (3.31) und führen die τ -Integration vor der Impulsintegration aus. Wir betrachten nur die Gleichung für das effektive Potential, also die

nullte Ordnung der Ableitungsentwicklung und finden:

$$k \frac{\partial \Gamma_k[\Phi]}{\partial k} = \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2k^6}{\left(q^2 + k^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta\Phi\delta\Phi}\right)^3} \quad (3.59)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \int dq \frac{2q^3 k^6}{\left(q^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta\Phi\delta\Phi} + k^2\right)^3} \quad (3.60)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \int dq I_{\text{HK}}(q) \quad . \quad (3.61)$$

Der Integrand der Heat-Kernel-Flußgleichungen ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Der Massenterm im Nenner wurde wieder auf $m = 100$ MeV festgelegt, gezeigt sind die Skalen $k = 0.7, 0.6, 0.5, \dots, 0.2$ GeV. Im Infrarot-Bereich fällt der Integrand $I_{\text{HK}}(q)$ genau wie auch $I_W(q)$ aufgrund des Phasenraums wie q^3 ab. Im Ultraviolett-Bereich wird jedoch ein Unterschied deutlich. Während $I_W(q)$ für große Impulse q exponentiell abfällt, verhält sich der Integrand $I_{\text{HK}}(q)$ wie $k^6 q^{-3}$ für $q^2 \gg k^2$. Der Heat-Kernel-cutoff schneidet also die Ultraviolett-Impulse nur vergleichsweise schwach ab.

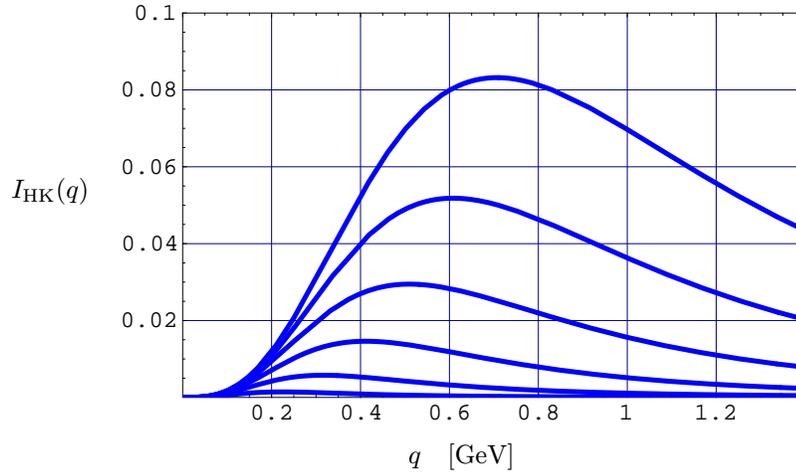


Abbildung 3.3: Die Wirkungsweise des Heat-Kernel-cutoffs auf das Impulsintegral. Die cutoff-Skalen sind $k = 0.7, 0.6, 0.5, \dots, 0.2$ GeV.

Die verschiedenen cutoff Skalen k , die in Abbildung 3.3 gewählt wurden, sind jeweils doppelt so groß wie die in Abbildung 3.2. Der Integrationsbereich, insbesondere die Lage der Maxima auf der q -Achse ist jedoch sehr ähnlich. Aus diesem Vergleich der Kurven beider Abbildungen wird deutlich, daß die Skalen k des cutoffs von Wetterich und des Heat-Kernel-cutoffs nicht gleich sind. Im Fall des cutoffs R_k liegt das Maximum von $I_W(q)$ deutlich oberhalb der Skala k_W . Beim Heat-Kernel-cutoff liegt das Maximum des Integranden tatsächlich ungefähr bei $q \approx k_{\text{HK}}$. Wenn mit beiden cutoffs das gleiche Impulsintervall integriert werden soll, so gilt $k_{\text{HK}} \approx 2 \cdot k_W$. Diesen Zusammenhang, daß die cutoff-Skalen der Rechnungen mit dem cutoff R_k immer etwa halb so groß sind wie die Skalen im Heat-Kernel-Formalismus, werden wir auch im Kapitel 4 noch

sehen, wenn wir beispielsweise die Ultraviolett-Skalen k_{uv} bzw. k_φ miteinander vergleichen.

Das Ultraviolett-Verhalten des Heat-Kernel cutoffs Gl. (3.43) wird durch M bestimmt. Wir wollen deshalb den Integrand des Impulsintegrals noch für verschiedene cutoff Funktionen untersuchen. Wenn wir den allgemeinen Heat-Kernel-cutoff Gl. (3.43) in Gleichung (3.59) einfügen, so erhalten wir

$$k \frac{\partial \Gamma_k[\Phi]}{\partial k} = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \int dq 2q^3 \left(\frac{k^2}{q^2 + \frac{\delta^2 U_k}{\delta \Phi \delta \Phi} + k^2} \right)^{M+1} \quad (3.62)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \int dq I_{HK}^M(q) \quad . \quad (3.63)$$

Der Integrand $I_{HK}^M(q)$ ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Mit dem cutoff $M = 1$ fällt der Integrand für große Impulse sehr langsam ab. Der cutoff $M = 2$, den wir im folgenden benutzen wollen, zeigt schon ein deutlich besseres ultraviolett Verhalten. Das langsame Abfallen im Vergleich zur exakten Flußgleichung Abbildung 3.2 kann also behoben werden, indem man einen Heat-Kernel-cutoff mit hohem M wählt. (vgl. auch [41]).

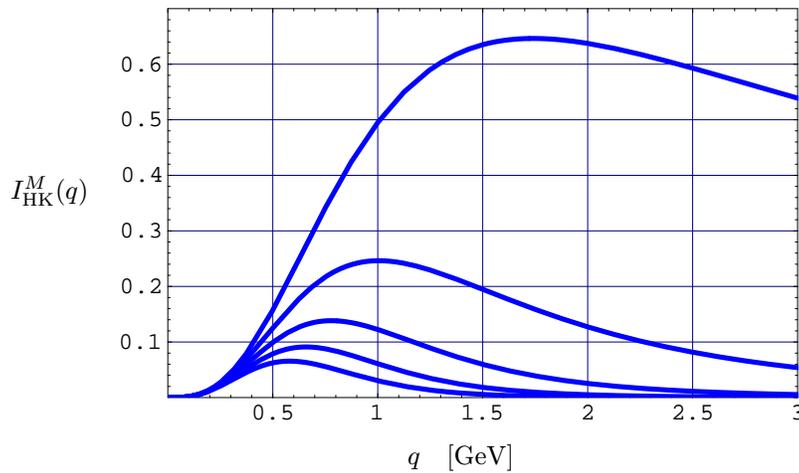


Abbildung 3.4: Die Wirkungsweise des Heat-Kernel-cutoffs mit verschiedenem M . Die Werte sind $M = 1, 2, 3, 4, 5$ (von oben nach unten).

Kapitel 4

Flußgleichungen für das lineare σ -Modell

In diesem Kapitel wird die Technik der Heat-Kernel-Renormierungsgruppen-Flußgleichung, die wir im vorherigen Kapitel vorgestellt haben, auf das lineare σ -Modell angewendet. Die Vorgehensweise ist dabei analog zum vorangehenden Kapitel, in der Darstellung jedoch etwas anders: Um den Überblick über die Korrekturterme zu wahren, führen wir erst die Ableitungsentwicklung für die ein-loop effektive Wirkung im Abschnitt 4.1 durch. Wir geben als Ergebnis die ein-loop Korrekturen zu den Kopplungen g , Z_q und dem Meson Z -Faktor Z_Φ in Schwinger-Eigenzeit-Darstellung an. Im Abschnitt 4.2 setzen wir dann wieder den Heat-Kernel-cutoff in die effektive Wirkung ein und führen die Renormierungsgruppen-Ersetzung durch. Wir erhalten die Flußgleichungen für das effektive Potential $U(\Phi^2)$, für die Yukawa Kopplung g und die Wellenfunktions-Renormierungskonstanten Z_q , Z_Φ .

Neben der Herleitung der Flußgleichungen ist die phänomenologischen Anwendung des Modells auf die starke Wechselwirkung bei niedrigen Energien ein wichtiger Aspekt dieses Kapitels. Im Abschnitt 4.3 stellen wir die Verbindung zum NJL-Modell her. Das NJL-Modell wurde in den letzten zehn Jahren ausführlich in der Näherung vieler Farbfreiheitsgrade N_c untersucht. Mesonische Korrekturen wurden dabei jedoch erst in letzter Zeit berücksichtigt [5, 11, 42, 43, 44]. In erweiterten NJL-Modellen benötigt man zur Regularisierung der Meson-Fluktuationen einen zusätzlichen cutoff, weil das NJL-Modell eine nicht renormierbare Theorie ist.

Ein Vorteil der Renormierungsgruppen-Flußgleichungen besteht darin, daß *ein* cutoff für alle Fluktuationen auf sehr natürliche Weise eingeführt wird. Da wir gleichzeitig durch das Festlegen der Anfangsbedingungen des Flusses das NJL-Modell quasi als Anfangspunkt unserer Renormierungsgruppen-Evolution wählen können, erhalten wir so Vorhersagen für das NJL-Modell mit Mesonfluktuationen. Wir werden im Abschnitt 4.3 auch die Flußgleichungen in der Näherung vieler Farbfreiheitsgrade N_c angeben und die numerischen Ergebnisse mit den NJL-Ergebnissen vergleichen.

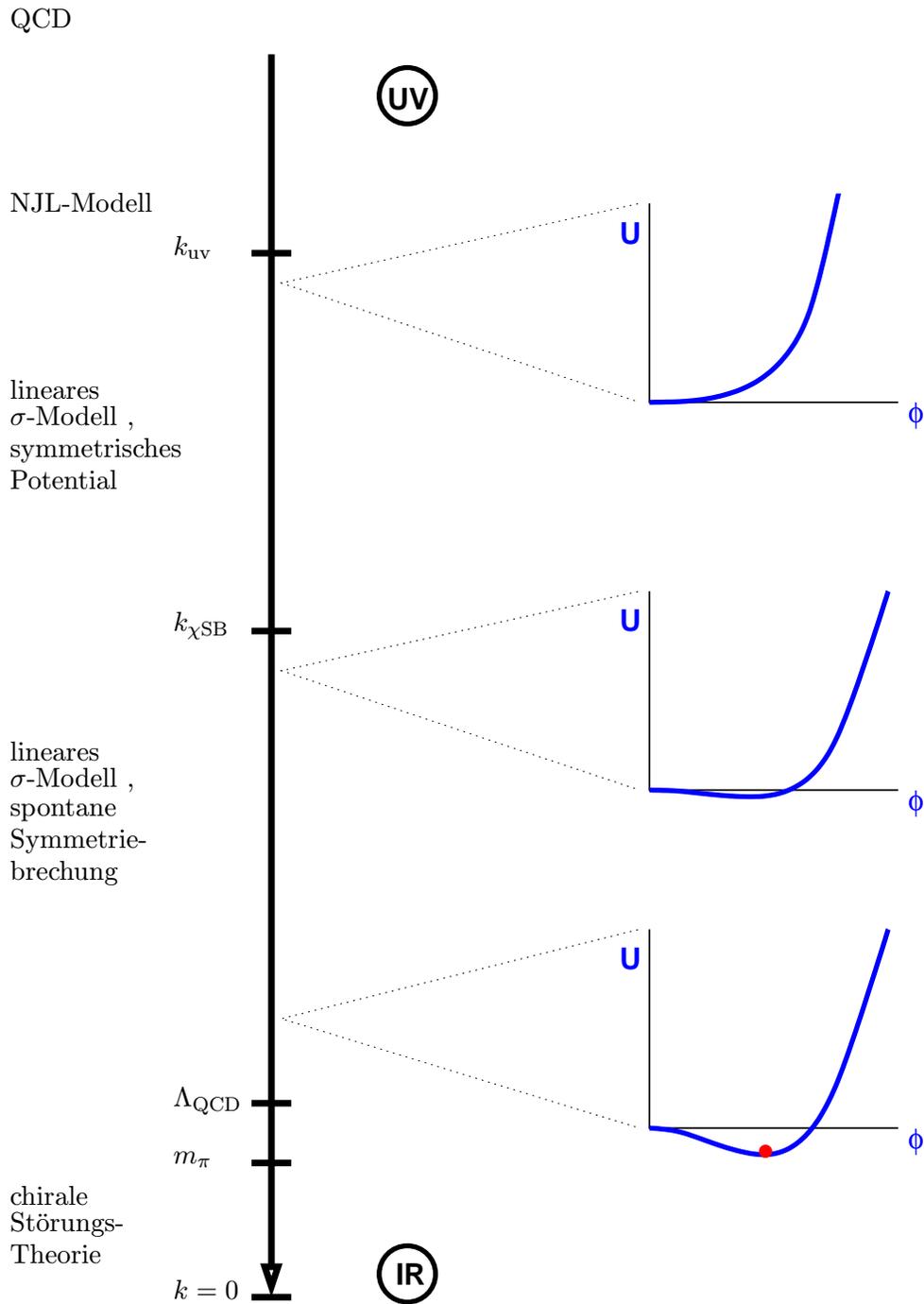


Abbildung 4.1: Die Skalenverhältnisse im Bereich der Niederenergie-QCD

Im Abschnitt 4.4 werden wir dann die numerischen Lösungen des gesamten Systems von Flußgleichungen einschließlich Meson-Fluktuationen vorstellen und die Ergebnisse diskutieren. Am Ende dieses Kapitels werden wie dann im Abschnitt 4.5 die Ableitungsentwicklung noch etwas weiter treiben und die Aufspaltung der Z-Faktoren bzw. der Yukawa-Kopplung bei spontaner Symmetriebrechung berücksichtigen.

4.1 Die effektive Wirkung des linearen σ -Modell

Das physikalische Bild, das diesem Kapitel zugrunde liegt ist das folgende: Wir nehmen an, das lineare σ -Modell sei eine gültige Beschreibung der Natur bei Skalen von $0.2 \lesssim k \lesssim 1.3$ GeV. Oberhalb von 1.3 GeV sind die gluonischen Freiheitsgrade wichtig und die volle QCD ist zur Beschreibung der Physik der starken Wechselwirkung nötig. Bei Skalen um $k \sim 1.3$ GeV frieren die Gluonen aus und übrig bleiben Quarks, die über einen lokalen Vier-Fermion-Vertex wechselwirken. Das Ausfrieren der Gluonen passiert beispielsweise im Farbaustausch-Bild durch den Austausch eines schweren Gluons, das von der weiteren Evolution entkoppelt. Eine andere Möglichkeit ist, daß Instantonen die Vier-Fermion-Wechselwirkung vermitteln. Die reine Quark-Quark-Streuung an der Skala $k \sim 1.3$ GeV wird durch das NJL-Modell beschrieben.

Im Prinzip sollte der Übergang von der vollen QCD zum NJL-Modell durch Renormierungsgruppen-Flußgleichungen beschreibbar sein [17]. Möglicherweise sind jedoch auch noch an der NJL-Skala Quark-Wechselwirkungen durch Gluon-Austausch oder auch Glueballs wichtig [18].

Bei Skalen unterhalb von 1.3 GeV bilden sich Mesonen und die Physik wird durch die chirale Symmetrie dominiert. In diesem Bereich wird die Wechselwirkung zwischen Quarks und Mesonen durch das lineare σ -Modell beschrieben. Wir finden durch die numerische Lösung des Renormierungsgruppen-Flusses, daß sich der Bereich von $0.2 \lesssim k \lesssim 1.3$ GeV weiter unterteilt: Bei Skalen von 1.3 GeV bis etwa 0.5 GeV ist die Theorie zunächst chiral symmetrisch, d.h. das Meson-Potential des linearen σ -Modells hat sein Minimum am Ursprung (siehe Abbildung 4.1). Durch die Integration der Fluktuationen mit hohen Impulsen läuft die massenartige Kopplung $m(k) \rightarrow 0$. Wenn $m(k)$ negativ wird, ändert das effektive Potential seine Form und erhält einen endlichen Erwartungswert Φ_0 . In diesem Skalenbereich durchläuft die Theorie einen partiellen Infrarot-Fixpunkt. Durch dieses Fixpunkt-Verhalten werden einige Kopplungen der effektiven Theorie bei niedrigen Skalen unabhängig von den Parametern im Ultraviolett-Bereich und man erhält so die Möglichkeit im Rahmen einer effektiven Theorie vorhersagen zu machen. Unterhalb der Symmetriebrechungs-Skala $k_{\chi\text{SB}}$ ist die Theorie spontan gebrochen, der Grundzustand ist nicht mehr symmetrisch unter chiralen Transformationen.

Ab einer Skala $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200$ MeV schließlich spielt die Farbeinschließung der starken Wechselwirkung eine entscheidende Rolle. Diese wird im linearen σ -Modell nicht wiedergegeben. Wir werden jedoch feststellen, daß die Infrarot-Eigenschaften des linearen σ -Modells durch Fluktuationen bei Skalen $k > \Lambda_{\text{QCD}}$

bestimmt werden. Die Meson-Kopplung $\lambda(k)$ und die Yukawa-Kopplung $g(k)$ ändern sich unterhalb von $k \sim 300$ MeV nur noch sehr wenig. Man kann also erwarten, daß durch das confinement die Quarks zu Nukleonen zusammengefaßt werden, sich dabei jedoch $\lambda(k)$, $g(k)$ oder die Quark-Masse nicht mehr ändern.

Wichtig ist noch eine weitere Skala knapp unterhalb von Λ_{QCD} : die Pion-Masse $m_\pi \sim 130$ MeV. Wenn die Fluktuationen in den Bereich der Pion-Masse kommen, ist der chirale Limes im linearen σ -Modell nicht mehr gerechtfertigt. Ein nichtlineares σ -Modell, wie es in der chiralen Störungstheorie benutzt wird, wäre hier die richtige Beschreibung. Wir werden diesen Bereich sehr kleiner Fluktuationen im Abschnitt 4.5 noch genauer diskutieren.

Wir beginnen also unsere Rechnung mit dem linearen σ -Modell Gl. (2.3). Die euklidische Wirkung ist gegeben durch:

$$S[\Phi, \bar{q}, q] = \int d^4x \{ \mathcal{L} \} \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L} = Z_q \bar{q} \not{\partial} q + g \bar{q} (\sigma + i \vec{\tau} \vec{\pi} \gamma_5) q + \frac{1}{2} Z_\Phi (\partial_\mu \Phi)^2 + U(\Phi^2) \quad , \quad (4.2)$$

wobei wieder die $O(4)$ schreibweise $\Phi = (\sigma, \vec{\pi})$ benutzt wurde und wir die Wellenfunktions-Renormierungs-Konstanten für σ - und π -Mesonen als identisch $Z_\Phi = Z_\sigma = Z_\pi$ annehmen. Unterschiedliche Z-Faktoren Z_σ und Z_π erhält man erst in höherer Ordnung der Ableitungsentwicklung, wenn man die Feldabhängigkeit von Z_Φ berücksichtigt. Der Z-Faktor erhält dann außerdem eine $O(4)$ Struktur $Z(\Phi)_{ij}$, wie wir in Abschnitt 4.5 sehen werden.

Betrachten wir nun also wie in Abschnitt 3.1 zunächst die effektive Wirkung. Das erzeugende Funktional ist gegeben durch:

$$Z[J, \bar{\eta}, \eta] = e^{-W[J, \bar{\eta}, \eta]} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}\Phi e^{-S[\bar{q}, q, \Phi] + \int d^4x (J\Phi + \bar{\eta}q + \bar{q}\eta)} \quad . \quad (4.3)$$

Die effektive Wirkung enthält jetzt nicht nur die Meson-Felder Φ , sondern zusätzlich die Quarkfelder \bar{q}, q . Entsprechend treten in der Legendre-Transformation die Quellen der Quarkfelder $\bar{\eta}, \eta$ auf:

$$\Gamma[\bar{q}, q, \Phi] = -W[J, \bar{\eta}, \eta] + \int d^4x \{ J\Phi + \bar{\eta}q + \bar{q}\eta \} \quad . \quad (4.4)$$

Wie in Abschnitt 3.1 berechnen wir $W[J, \bar{\eta}, \eta]$ durch eine Sattelpunktsentwicklung, allerdings ist die Rechnung hier etwas komplizierter als im Fall der skalaren Theorie, denn der Yukawa-Term in der Lagrangedichte Gl. (4.2) enthält sowohl Quarkfelder als auch Mesonfelder. D.h. man muß eine quadratische Ergänzung durchführen, um die Quarkfelder formal auszuintegrieren [30]. Als Ergebnis erhält man einen zusätzlichen Term in der Meson-Determinante, der Korrekturen zur Yukawa-Kopplung und zur Wellenfunktions-Renormierung Z_q erzeugt. Die ein-loop effektive Wirkung lautet dann (vgl. Gl. 3.16):

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{1-loop}}[\Phi, \bar{q}, q] &= S[\Phi, \bar{q}, q] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q} \delta q} \right) \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q} \delta q} \right)^\dagger \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} - 2 \left(\frac{\delta^2 S}{\delta q \delta \Phi^i} \right) \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q} \delta q} \right)^{-1} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q} \delta \Phi^j} \right) \right) . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Der erste Logarithmus enthält die Fermion-Fluktuationen. Weil der Fermion-Operator D nicht positiv definit ist, haben wir die Ersetzung $\log D \rightarrow \frac{1}{2} \log DD^\dagger$ durchgeführt, wir betrachten also nur den Realteil der effektiven Wirkung [35]. Die beiden Terme im zweiten Logarithmus erzeugen die bosonischen und gemischten Korrekturen. In den Logarithmen treten jeweils die inversen klassischen Propagatoren auf:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q} \delta q} = Z_q \not{\partial} + gM \quad (4.6)$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} = -Z_\Phi \partial^2 \delta^{ij} + (U'')^{ij} \quad , \quad (4.7)$$

und die Kopplungs-Terme, die durch die quadratische Ergänzung im Logarithmus erscheinen:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta q \delta \Phi^i} = g \bar{q} A^i \quad (4.8)$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q} \delta \Phi^j} = g A^j q \quad . \quad (4.9)$$

Wir benutzen einige Abkürzungen um die Formeln übersichtlich zu halten:

$$\begin{aligned} D &= Z_q \not{\partial} + gM \\ M &= \sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5 \\ (U'')^{ij} &= \frac{\delta^2 U(\Phi^2)}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} \\ A^i &= \frac{\partial M}{\partial \Phi^i} = (1, i\vec{\tau}\gamma_5) \quad . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Genauso wie in Abschnitt 3.2 schreiben wir auch hier wieder die Logarithmen in Schwinger-Eigenzeit-Darstellung um. Setzen wir die Propagatoren und Kopplungs-Terme sowie die Abkürzungen in Gleichung (4.5) ein, so erhalten wir:

$$\Gamma^{1\text{-loop}} = S_{UV} + \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(-Z_q^2 \partial^2 + g^2 \Phi^2 + g Z_q \gamma \cdot (\partial M^\dagger))} \quad (4.11)$$

$$- \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(-Z_\Phi \partial^2 \delta^{ij} + (U'')^{ij} - 2g^2 \bar{q} A^i D^{-1} A^j q)} \quad . \quad (4.12)$$

Die Funktional-Spur (Tr) wird wie zuvor durch Einschieben von ebenen Wellen ausgewertet (vgl. Gl. 3.28), was zu der Ersetzung $\partial \rightarrow \partial + iq$ führt. Es bleibt nur eine Spur über innere Dimensionen übrig:

$$\begin{aligned} \Gamma^{1\text{-loop}} &= S_{UV} \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4 x \int \frac{d\tau}{\tau} \text{tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-\tau(Z_q^2 q^2 - 2iZ_q^2 q \cdot \partial - Z_q^2 \partial^2 + g^2 \Phi^2 + g Z_q \gamma \cdot (\partial M^\dagger))} \\ &- \frac{1}{2} \int d^4 x \int \frac{d\tau}{\tau} \text{tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-\tau(Z_\Phi q^2 - 2iZ_\Phi q \cdot \partial - Z_\Phi \partial^2 + (U'')^{ij} - 2g^2 \bar{q} A^i D^{-1} A^j q)} \quad . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Anders als im Abschnitt 3.2 führen wir bereits an dieser Stelle die Ableitungsentwicklung durch und leiten die Flußgleichungen erst im nächsten Abschnitt her. Wir schreiben also wieder die Exponentialfunktion als Potenzreihe in τ und erhalten aus der Entwicklung der Gleichung (4.13) die folgende Formel:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{1\text{-loop}} = & S_{UV} + \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d\tau}{\tau} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-\tau Z_q^2 q^2} \cdot \text{tr} \left[\right. \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} (g^2 \Phi^2)^n \\
& + Z_q^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \left(\binom{n}{2} (g^2 \Phi^2)^{n-2} g(\not{\partial} M^\dagger) g(\not{\partial} M^\dagger) \right) \\
& - Z_q^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} (g^2 \Phi^2)^k \partial^2 (g^2 \Phi^2)^{n-k-1} \\
& \left. - 4Z_q^4 q_\mu q_\nu \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-3} (g^2 \Phi^2)^k \partial_\mu \sum_{l=0}^{n-3-k} (g^2 \Phi^2)^l \partial_\nu (g^2 \Phi^2)^{n-k-l-2} \right] \\
& - \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d\tau}{\tau} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-\tau Z_\Phi q^2} \cdot \text{tr} \left[\right. \\
& - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} (U'')^n \\
& - Z_\Phi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} (U'')^k \partial^2 (U'')^{n-k-1} \\
& - 4Z_\Phi^2 q_\mu q_\nu \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-3} (U'')^k \partial_\mu \sum_{l=0}^{n-k-3} (U'')^l \partial_\nu (U'')^{n-k-l-2} \\
& \left. - 2g^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} n (U'')^{n-1} \bar{q} A^T D^{-1} A q \right] .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Alle Terme mit mehr als zwei Ableitungen und solche, die wegen einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen oder Impulsen q^μ verschwinden, sind bereits weggelassen. Die Anteile in der 2. und 7. Zeile der Gleichung enthalten keine Ableitungen, sie tragen also zur Renormierung des effektiven Potentials bei. Der Beitrag in der 3. Zeile kommt aus dem Term $gZ_q \gamma \cdot (\not{\partial} M^\dagger)$ in Gleichung (4.13). Dieser Anteil tritt auf, wenn man den Fermion-Operator quadriert (DD^\dagger), er trägt zur Wellenfunktions-Renormierung der Mesonen bei. Auch die 4. und 5. Zeile ergeben Beiträge zu Z_Φ aus der Fermion-Determinante. Man erhält die Terme, indem man die Operatoren ∂^2 und $q \cdot \partial$ im ersten Exponenten von Gl. (4.13) nach rechts auf $(g^2 \Phi^2)^n$ wirken läßt.

Die Anteile 2. Ordnung in $(\partial\Phi)$ aus der Meson-Determinante, also dem zweiten Exponenten in Gl. (4.13), stehen in den Zeilen 8 und 9. Analog zum Fermion-Teil erhält man diese Terme, wenn die Operatoren ∂^2 und $q \cdot \partial$ auf $(U'')^n$ wirken. Die letzte Zeile schließlich erhält man aus dem zusätzlichen gemischten Term in

der Meson-Determinante. Er enthält Operatoren der Form $\bar{q}\not{\partial}q$ und $\bar{q}Mq$ und trägt zur Renormierung von Z_q und g bei.

Der Anteil aus der Fermion-Determinante (Zeilen 1-5) läßt sich relativ leicht wieder aufsummieren. Schwieriger ist der Meson-Anteil. Der Grund liegt darin, daß wegen der $O(4)$ -Struktur die Matrizen $\partial_\mu U''$ und U'' nicht mehr vertauschen. Um die Zeilen 8 und 9 der obigen Gleichung auszuwerten muß man die $O(4)$ -Matrix U'' durch Projektoren ausdrücken und deren Orthogonalitätseigenschaften ausnutzen:

$$Z_\Phi^{-1}(U''(\phi^2))^{ij} = M_\sigma^2(\Phi^2) X_1^{ij} + M_\pi^2(\Phi^2) X_2^{ij} \quad . \quad (4.15)$$

Die Projektoren und die Spuren über die Projektoren sind in Anhang A.2 aufgeführt. Die Massen $M_\sigma^2(\Phi^2)$ und $M_\pi^2(\Phi^2)$ sind die Eigenwerte der Massenmatrix. Zusammen mit der Quarkmasse M_q sind sie gegeben durch

$$\begin{aligned} M_q^2(\Phi^2) &= Z_q^{-2} g^2 \Phi^2 \\ M_\sigma^2(\Phi^2) &= Z_\Phi^{-1} \left(2 \frac{\partial U(\Phi^2)}{\partial \Phi^2} + 4 \frac{\partial U(\Phi^2)}{(\partial \Phi^2)^2} \Phi^2 \right) \\ M_\pi^2(\Phi^2) &= Z_\Phi^{-1} 2 \frac{\partial U(\Phi^2)}{\partial \Phi^2} . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Diese Massen stellen die Verallgemeinerung der Massen in Gleichung (2.14) für ein allgemeines Potential $U(\Phi)$ dar. Wenn $\Phi = \Phi_0$ der Vakuumzustand der Theorie ist, dann sind sie die physikalischen Massen.

Führen wir jetzt also die oben beschriebene Resummierung von Gleichung (4.14) durch, so läßt sich das Ergebnis wieder in der Form

$$\Gamma^{1\text{-loop}} = \int d^4x \left\{ U(\Phi^2) + g(\Phi^2) \bar{q}Mq + Z_q(\Phi^2) \bar{q}\not{\partial}q + \frac{1}{2} Z_\Phi(\Phi^2) (\partial_\mu \Phi)^2 \right\} \quad (4.17)$$

zusammenfassen (vgl. Gl. 3.26). Die Koeffizienten sind dann die folgenden ein-loop Gleichungen für das effektive Potential $U(\Phi^2)$, die Yukawa Kopplung $g(\Phi^2)$ und die Wellenfunktions-Renormierungs-Konstanten $Z_q(\Phi^2)$, $Z_\Phi(\Phi^2)$:

$$U(\Phi^2) = U^{UV} + \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d\tau}{\tau^3} \left(4N_f N_c e^{-\tau M_q^2} - \left(e^{-\tau M_\sigma^2} + 3e^{-\tau M_\pi^2} \right) \right) \quad (4.18)$$

$$g(\Phi^2) = g^{UV} + \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d\tau}{\tau^2} 2Z_q^{-2} Z_\Phi^{-1} g^3 \left(\frac{e^{-\tau M_\sigma^2} - e^{-\tau M_q^2}}{M_\sigma^2 - M_q^2} - 3 \frac{e^{-\tau M_\pi^2} - e^{-\tau M_q^2}}{M_\pi^2 - M_q^2} \right) \quad (4.19)$$

$$Z_q(\Phi^2) = Z_q^{UV} - \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d\tau}{\tau^2} 2Z_q^{-1} Z_\Phi^{-1} g^2 \left(\frac{e^{-\tau M_\sigma^2} - e^{-\tau M_q^2}}{M_\sigma^2 - M_q^2} + 3 \frac{e^{-\tau M_\pi^2} - e^{-\tau M_q^2}}{M_\pi^2 - M_q^2} \right) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} Z_\Phi(\Phi^2) &= Z_\Phi^{UV} + \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d\tau}{\tau} \left\{ 4N_f N_c Z_q^{-2} g^2 e^{-\tau M_q^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tau^2} \frac{2}{\Phi^2} \left(\tau \left(e^{-\tau M_\sigma^2} + e^{-\tau M_\pi^2} \right) + \frac{2}{M_\sigma^2 - M_\pi^2} \left(e^{-\tau M_\sigma^2} - e^{-\tau M_\pi^2} \right) \right) \right\} . \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.2 Flußgleichungen für das lineare σ -Modell

Wie im Abschnitt 3.2 für die skalare Theorie vorgestellt, kann man auch hier wieder die Renormierungsgruppen-Gleichungen herleiten, indem man die ein-loop effektive Wirkung Gl. (4.5) in Schwinger-Eigenzeit-Darstellung schreibt und den Heat-Kernel-cutoff einfügt. Die Renormierungsgruppen-Ersetzung, die aus der ein-loop Gleichung (4.5) eine nicht-perturbative Flußgleichung macht, ist diesmal etwas komplizierter: Wir müssen nicht nur die inversen Propagatoren ersetzen, sondern zusätzlich die Kopplungsterme, die durch das formale Ausintegrieren der Quarkfelder in der Meson-Determinante erscheinen, also

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q} \delta q} \longrightarrow \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta q} \quad (4.22)$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} \longrightarrow \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} \quad (4.23)$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta q \delta \Phi^i} \longrightarrow \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta q \delta \Phi^i} \quad (4.24)$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q} \delta \Phi^j} \longrightarrow \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta \Phi^j} \quad (4.25)$$

Die Renormierungsgruppen-Flußgleichung für das lineare σ -Modell, die man erhält ist

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} = & + \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d\tau}{\tau} \exp \left\{ \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta q} \right) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta q \delta q} \right)^\dagger \right\} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \\ & - \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d\tau}{\tau} \exp \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} - 2 \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta q \delta \Phi^i} \right) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta q} \right)^{-1} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta \Phi^j} \right) \right\} k \frac{\partial f_k}{\partial k}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Hier werden sowohl der Fermion-Anteil, wie auch die Boson-Fluktuationen mit dem Heat-Kernel-cutoff Gl. (3.44) regularisiert. Dies ist möglich, weil wir, wie auf Seite 26 diskutiert, die Schwinger-Eigenzeit τ jeweils mit den Z-Faktoren reskalieren. Dadurch enthält der Heat-Kernel-cutoff keine Wellenfunktions-Renormierungs-Konstante mehr. Man könnte diese Reskalierung auch unterlassen, müßte dann allerdings zwei cutoff-Funktionen f_k^F und f_k^B mit den jeweiligen Z-Faktoren für den Fermion- und Boson-Teil der Flußgleichungen einführen. Das Ergebnis ist in jedem Fall identisch.

Für die gemittelte effektive Wirkung Γ_k muß man jetzt wieder eine Trunkierung in Form einer Ableitungsentwicklung ansetzen. Die Koeffizienten dieser Ableitungsentwicklung sind Funktionen der Skala k und im allgemeinen auch der Feldoperatoren Φ . Wir wollen jedoch annehmen, nur das effektive Potential sei Φ^2 -abhängig. Als Trunkierung wählen wir also:

$$\Gamma_k = \int d^4x \left\{ U(\Phi^2, k) + g(k) \bar{q} M q + Z_q(k) \bar{q} \not{\partial} q + \frac{1}{2} Z_\Phi(k) (\partial_\mu \Phi)^2 \right\} \quad (4.27)$$

Die Flußgleichungen für die Koeffizienten erhält man analog wie in Abschnitt 3.2: Man setzt die Trunkierung auf der rechten Seite der Flußgleichung (4.26) ein

und führt die Ableitungsentwicklung, wie im vorigen Abschnitt für die klassische Wirkung skizziert, explizit durch.

Für den inversen Meson-Propagator erhält man beispielsweise:

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} = -Z_\Phi(k) \partial^2 \delta^{ij} + (U''(\Phi^2, k))^{ij} \quad . \quad (4.28)$$

Diesen Propagator setzt man in die Gleichung (4.26) ein und vereinfacht die Funktionalspur durch Einführen von ebenen Wellen, wodurch der ∂ -Operator wie zuvor in $\partial \rightarrow \partial + iq$ übergeht. Der mesonische Beitrag zum effektiven Potential, den man als Term der Ordnung ∂^0 in der Ableitungsentwicklung findet ist:

$$k \frac{\partial U(\Phi^2, k)}{\partial k} = \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d\tau}{\tau} \text{tr} \left[e^{-\tau(q^2 + Z_\Phi^{-1}(U''(\Phi^2, k))^{ij})} \right] k \frac{\partial f(k^2 \tau)}{\partial k} \quad . \quad (4.29)$$

Die Spur kann man wie zuvor bei der klassischen Wirkung auch hier wieder mit den Projektoren auswerten:

$$k \frac{\partial U(\Phi^2, k)}{\partial k} = \frac{1}{32\pi^2} \int \frac{d\tau}{\tau^3} \left(e^{-\tau M_\sigma^2(\Phi^2)} + 3e^{-\tau M_\pi^2(\Phi^2)} \right) k \frac{\partial f(k^2 \tau)}{\partial k} \quad . \quad (4.30)$$

Am Ende bleibt noch der Heat-Kernel-cutoff einzusetzen und das τ -Integral auszuwerten.

Führen wir, wie im vorigen Abschnitt bereits für die klassische Wirkung angegeben, die Ableitungsentwicklung der Gleichung (4.26) vollständig durch und sortieren die Terme nach den Operatoren $\bar{q}Mq$, $\bar{q}\not{\partial}q$ und $(\partial_\mu \Phi)^2$, so erhalten wir die Flußgleichungen für die restlichen Kopplungen g , Z_q und Z_Φ . Sie bilden ein geschlossenes System von vier gekoppelten Differentialgleichungen. Durch den Heat-Kernel-Formalismus und den speziellen Heat-Kernel-cutoff sind diese Gleichungen analytisch berechenbar und haben eine sehr einfache Form:

$$k \frac{\partial U}{\partial k} = \frac{k^6}{32\pi^2} \left\{ \frac{3}{k^2 + M_\pi^2} + \frac{1}{k^2 + M_\sigma^2} - \frac{4N_f N_c}{k^2 + M_q} \right\} \quad (4.31)$$

$$k \frac{\partial g}{\partial k} = \frac{k^6}{16\pi^2} g^3 Z_q^{-2} Z_\Phi^{-1} \left(\frac{2k^2 + M_q^2 + M_\sigma^2}{(k^2 + M_q^2)^2 (k^2 + M_\sigma^2)^2} - 3 \frac{2k^2 + M_q^2 + M_\pi^2}{(k^2 + M_q^2)^2 (k^2 + M_\pi^2)^2} \right) \quad (4.32)$$

$$k \frac{\partial Z_q}{\partial k} = - \frac{k^6}{16\pi^2} g^2 Z_q^{-1} Z_\Phi^{-1} \left(\frac{2k^2 + M_q^2 + M_\sigma^2}{(k^2 + M_q^2)^2 (k^2 + M_\sigma^2)^2} + 3 \frac{2k^2 + M_q^2 + M_\pi^2}{(k^2 + M_q^2)^2 (k^2 + M_\pi^2)^2} \right) \quad (4.33)$$

$$k \frac{\partial Z_\Phi}{\partial k} = - \frac{k^6}{4\pi^2} g^2 Z_q^{-2} \frac{N_c N_f}{(k^2 + M_q^2)^3} - \frac{k^6}{16\pi^2} \frac{1}{\Phi_0^2} \left(\frac{1}{(k^2 + M_\sigma^2)^2} + \frac{1}{(k^2 + M_\pi^2)^2} - \frac{2}{(k^2 + M_\sigma^2)(k^2 + M_\pi^2)} \right) \quad . \quad (4.34)$$

Die Massen, die in diesen Gleichungen auftreten sind generell aus dem effektiven Potential nach Gleichung (4.16) zu bestimmen. D.h. das effektive Potential $U = U(\Phi^2, k)$ ist eine Funktion der Skala k und der Felder Φ^2 , die Gleichung (4.31) ist also eine partielle Differentialgleichung. Für g, Z_q und Z_Φ haben wir bereits die Einschränkung gemacht, daß sie nicht von den Feldern abhängen sollen. Die Massen in den Flußgleichungen für g, Z_q und Z_Φ sind entsprechend am Minimum des Potentials $\Phi = \Phi_0$ auszuwerten und die Gleichungen (4.32) (4.33) und (4.34) sind demnach gewöhnliche Differentialgleichungen.

Das System der gekoppelten Differentialgleichungen (4.31)-(4.34) kann, wie schon am Ende des Abschnitts 3.2 beschrieben, auf zwei unterschiedliche Weisen numerisch gelöst werden: Indem man das effektive Potential $U(\Phi^2, k)$ auf einem Φ -Gitter diskretisiert, oder indem man $U(\Phi^2, k)$ als Potenzreihen in Φ^2 schreibt und dann ein Gleichungssystem für die k -abhängigen Koeffizienten erhält. Wir wählen hier die zweite Methode und machen einen Potenzreihen-Ansatz für $U(\Phi^2, k)$.

Der Renormierungsgruppen-Fluß wird im Infrarot-Bereich hauptsächlich durch die renormierbaren Operatoren beeinflusst. Allerdings tragen im Fall der spontanen Symmetriebrechung auch die Operatoren Φ^8 und Φ^6 zur Renormierung der quartischen Kopplung bei [38]. Um das zu sehen muß man die Felder $\Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi}$ in den Vakuum-Erwartungswert Φ_0 und die Fluktuationen um den Erwartungswert $\tilde{\Phi}$ aufspalten. Man findet in der Entwicklung um den Vakuumwert Φ_0^2 für einen Operator n-ter Ordnung

$$(\Phi^2 - \Phi_0^2)^n = (\tilde{\Phi}^2 + 2\tilde{\Phi}\Phi_0)^n = (\tilde{\Phi}^2)^n + \dots + (2\tilde{\Phi}\Phi_0)^n \quad . \quad (4.35)$$

D.h. beispielsweise die achte Ordnung in der Potenzreihen-Entwicklung des effektiven Potentials trägt zur Renormierung des $\tilde{\Phi}^4$ Koeffizienten bei. Um also die relevanten Terme mitzunehmen, sollten die Potenzreihen für U folgendermaßen um das jeweilige Minimum Φ_0 entwickelt werden: bei spontan gebrochenem Potential $\Phi_0 \neq 0$

$$U(\Phi^2, k) = \frac{\lambda(k)}{4}(\Phi^2 - \Phi_0^2(k))^2 + \frac{b_6(k)}{6}(\Phi^2 - \Phi_0^2(k))^3 + \frac{b_8(k)}{8}(\Phi^2 - \Phi_0^2(k))^4 \quad (4.36)$$

und bei symmetrischen Potential $\Phi_0 = 0$

$$U(\Phi^2, k) = \frac{m^2(k)}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda(k)}{4}(\Phi^2)^2 + \frac{a_6(k)}{6}(\Phi^2)^3 + \frac{a_8(k)}{8}(\Phi^2)^4 \quad . \quad (4.37)$$

Die Z-Faktoren und die Yukawa-Kopplung sind, wie schon in Gleichung (4.27) angesetzt, Potenzreihen nullter Ordnung, also Konstanten in Φ . Geht man darüber hinaus und betrachtet die Wellenfunktions-Renormierungs-Konstanten und die Yukawa-Kopplung als Funktionen der Felder, so wird die Ableitungsentwicklung wesentlich umfangreicher. Diesen Fall diskutieren wir im Abschnitt 4.5. Hier nehmen wir an:

$$Z_\Phi(\Phi^2, k) = Z_\Phi(k), \quad Z_q(\Phi^2, k) = Z_q(k) \quad \text{und} \quad g(\Phi^2, k) = g(k) \quad . \quad (4.38)$$

Setzt man diese Potenzreihen-Ansätze in die Flußgleichungen (4.31)-(4.34) ein so erhält man ein System von sieben gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Kopplungen $\Phi_0(k)$, $\lambda(k)$, $b_6(k)$, $b_8(k)$, $Z_\Phi(k)$, $Z_q(k)$, $g(k)$ im spontan gebrochenen Fall und $m(k)$, $\lambda(k)$, $a_6(k)$, $a_8(k)$, $Z_\Phi(k)$, $Z_q(k)$, $g(k)$ bei chiral symmetrischem Potential. Dieser Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen kann durch Standardverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen gelöst werden (siehe Anhang B).

Die Gültigkeit der Trunkierung wird durch die systematische Beobachtung von Beiträgen höherer Ordnung bestätigt. In [38] wurde der Fluß des effektiven Potentials für unterschiedliche Trunkierungen untersucht. Operatoren mit Mas-sendimension > 8 hatten für den Heat-Kernel cutoff ($M=2$), den wir benutzen keinen Einfluß auf das Infrarot-Verhalten.

Wir werden die numerischen Resultate der Evolutionsgleichungen in den nächsten beiden Abschnitten diskutieren. An dieser Stelle ist es jedoch instruktiv, die Flußgleichungen für die ersten beiden Kopplungen $\lambda(k)$ und $\Phi_0(k)$ bzw. $m^2(k)$ der Potenzreihen-Entwicklung des effektiven Potentials explizit anzugeben. Durch sie wird das wesentliche Verhalten des Flusses bereits beschrieben. Die Gleichungen folgen aus (4.31) indem man die Entwicklungen (4.35) und (4.36) einsetzt, bei spontan gebrochener Symmetrie:

$$k \frac{\partial \Phi_0^2}{\partial k} = \frac{k^6}{16\pi^2} 3Z_\Phi^{-1} \left[\frac{1}{k^4} + \frac{1}{(k^2 + M_\sigma^2(\Phi^2))^2} \right] - \frac{k^6}{4\pi^2} \frac{Z_q^{-2} g^2}{\lambda} \left[\frac{N_c N_f}{(k^2 + M_q^2)^2} \right] \quad (4.39)$$

$$k \frac{\partial \lambda}{\partial k} = \frac{k^6}{8\pi^2} 3Z_\Phi^{-2} \left[\frac{\lambda^2}{k^6} + \frac{3\lambda^2}{(k^2 + M_\sigma^2(\Phi^2))^3} \right] - \frac{k^6}{2\pi^2} Z_q^{-4} g^4 \left[\frac{N_c N_f}{(k^2 + M_q^2)^3} \right] \quad (4.40)$$

Und bei symmetrischem Potential

$$k \frac{\partial m^2}{\partial k} = -\frac{k^6}{8\pi^2} \frac{3Z_\Phi^{-1} \lambda}{(k^2 + M_\pi^2(\Phi^2))^2} + \frac{k^2}{4\pi^2} N_f N_c Z_q^{-2} g^2 \quad (4.41)$$

$$k \frac{\partial \lambda}{\partial k} = \frac{k^6}{2\pi^2} \frac{3Z_\Phi^{-2} \lambda^2}{(k^2 + M_\pi^2(\Phi^2))^3} - \frac{1}{2\pi^2} N_f N_c Z_q^{-4} g^4 \quad (4.42)$$

Wir werden diese Gleichungen im nächsten Abschnitt diskutieren, wenn wir den Grenzfall $N_c \rightarrow \infty$ betrachten.

Die Flußgleichungen für das lineare σ -Modell wurde mit Hilfe der exakten Flußgleichungen zuerst in [19] aufgestellt. In [21] wurden die Rechnungen auf endliche Temperatur erweitert. Im Formalismus der Heat-Kernel Flußgleichungen wurde das lineare σ -Modells zuerst in [22] untersucht. Dort wurden auch die Gleichungen (4.39)-(4.42) aufgestellt und zusätzlich die Flußgleichungen für endliche Temperaturen berechnet.

Die Ableitungsentwicklung im Zusammenhang mit RG-Flußgleichungen in der Schwinger-Eigenzeit-Darstellung wurden für ein skalare ϕ^4 -Theorie in [36, 37] ausgeführt. Für ein reines $O(N)$ -Modell ohne Quarks in [39].

4.3 Flußgleichungen für großes N_c

Um den Satz gekoppelter Differentialgleichungen (4.31)-(4.34), zu lösen müssen wir zunächst die Anfangsbedingungen an der Ultraviolett-Skala k_{uv} spezifizieren und damit die Ultraviolett-Theorie festlegen. Wählen wir eine verschwindende Vier-Meson-Kopplung $\lambda = 0$, eine sehr kleine Meson-Wellenfunktions Renormierungs-Konstante Z_Φ und einen Quark Z-Faktor $Z_q = 1$, so hat die Lagrangedichte Gl. (4.2) näherungsweise die Form

$$\mathcal{L}_{ini} = \bar{q} \not{\partial} q + g \bar{q} (\sigma + i \vec{\tau} \vec{\pi} \gamma_5) q + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \quad . \quad (4.43)$$

Eine triviale Gauß'sche Integration über die Meson-Felder transformiert das so trunkierte lineare σ -Modell in eine reine Quark-Lagrangedichte mit einer Vier-Fermion-Wechselwirkung:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{q} \not{\partial} q - G \{ (\bar{q} q)^2 + (\bar{q} i \vec{\tau} \gamma_5 q)^2 \} \quad . \quad (4.44)$$

Dies ist die Lagrangedichte des NJL-Modells [4], wir vergleichen die Kopplungen und finden für die NJL-Kopplung G :

$$2G = \frac{g^2}{m^2} \quad . \quad (4.45)$$

Um den physikalisch relevanten Bereich der Kopplungen im linearen σ -Modell abzuschätzen, berechnen wir die Ultraviolett-Skala, die dem dreidimensionalen cutoff der NJL-Theorie entspricht, mit dem Heat-Kernel-cutoff. Wir nehmen die Parameter aus dem Übersichtsartikel von Klevansky [5]: $G = 5.02 \text{ GeV}^{-2}$, $M_q = 0.313 \text{ GeV}$ und $\Lambda = 0.653 \text{ GeV}$. Für die Heat Kernel cutoff Funktion (3.44) finden wir die Gap-Gleichung:

$$\frac{1}{8GN_c N_f} = \int_0^\infty d\tau \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-\tau(p^2 + M_q^2)} (1 - f(k_{uv}^2 \tau)) \quad (4.46)$$

Adjustieren wir k_{uv} auf $k_{uv} = 1.341 \text{ GeV}$, so finden wir Konsistenz mit den NJL-Parametern. Wir werden diese Skala k_{uv} in allen folgenden Rechnungen als Ultraviolett-Skala benutzen.

Für die Heat-Kernel-Flußgleichungen des effektiven Potentials bei endlicher Temperatur wurde ein vergleichbarer Wert $k_{uv} = 1.2 \text{ GeV}$ benutzt [22]. Er ist in etwa doppelt so groß wie der dreidimensionale cutoff im NJL-Modell $\Lambda = 0.653 \text{ GeV}$. Auch verglichen mit dem Ultraviolett-cutoff der exakten Renormierungsgruppen Gleichungen $k_\varphi = 0.63 \text{ GeV}$ aus [19] ist der Heat-Kernel-cutoff etwa doppelt so groß, wie wir bereits in Abschnitt 3.3 diskutiert haben.

Im Grenzfall einer großen Anzahl von Farbfreiheitsgraden sind nur die Fermion-Fluktuationen relevant, denn die NJL Kopplung G ist proportional zu $1/N_c$. Nehmen wir weiter an die Meson-Massen seien unabhängig von N_c , dann erhält man für die Yukawa-Kopplung $g \propto 1/\sqrt{N_c}$, ähnlich wie bei der QCD-Kopplungskonstanten. Aus Gleichung (4.46) sieht man leicht, daß die Konstituentenquark-Masse unabhängig von N_c sein muß. Das bedeutet aber, daß die

Meson-Felder Φ wie $\mathcal{O}(\sqrt{N_c})$ skalieren müssen um die N_c -Abhängigkeit von g zu kompensieren. Folglich muß, wenn die Meson-Massen unabhängig von N_c sein sollen, die Vier-Meson-Kopplung λ wie $1/N_c$ skalieren.

Wir erhalten die Evolutions-Gleichungen des effektiven Potentials für großes N_c aus den Gleichungen (4.39-4.42), indem wir die N_c -Abhängigkeit einsetzen; z.B in Gleichung (4.41): Die linke Seite der Gleichung ist konstant in N_c . Der Meson-Anteil der rechten Seite skaliert mit $\lambda \propto 1/N_c$ und der Quark-Anteil wie $N_c g = \text{const}$. Die Meson-Fluktuationen sind also Korrekturen höherer Ordnung verglichen mit den Quark-Beiträgen. Für die anderen Flußgleichungen ist die Argumentation analog. Wir finden also die Flußgleichungen für großes N_c einfach, wenn wir die Meson-Terme auf Null setzen.

Die Evolutions-Gleichungen für großes N_c bei spontan gebrochenem Potential haben die folgende Form:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \Phi_0^2}{\partial k} &= -\frac{k^2}{4\pi^2} N_c N_f \frac{g^2}{\lambda} \frac{1}{(1 + g^2 \Phi_0^2/k^2)^2} \\ k \frac{\partial \lambda}{\partial k} &= -\frac{1}{2\pi^2} N_c N_f g^4 \frac{1}{(1 + g^2 \Phi_0^2/k^2)^3} \\ k \frac{\partial Z_\Phi}{\partial k} &= -\frac{1}{4\pi^2} N_c N_f g^2 \frac{1}{(1 + g^2 \Phi_0^2/k^2)^3} \quad . \end{aligned} \quad (4.47)$$

und bei symmetrischem Potential:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial m^2}{\partial k} &= +\frac{k^2}{4\pi^2} N_c N_f g^2 \\ k \frac{\partial \lambda}{\partial k} &= -\frac{1}{2\pi^2} N_c N_f g^4 \\ k \frac{\partial Z_\Phi}{\partial k} &= -\frac{1}{4\pi^2} N_c N_f g^2 \quad , \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die Wellenfunktions-Renormierungs-Konstante $Z_q = 1$ Gleichung (4.33) und die Yukawa-Kopplung g Gleichung (4.32) evolvieren nicht, weil jeweils die rechte Seite der Flußgleichungen von höherer Ordnung in $1/N_c$ ist als die linke Seite. Die Wellenfunktions-Renormierung Z_Φ , Gl. (4.34) wird logarithmisch kleiner mit der Skala k und entkoppelt von der Evolution des effektiven Potentials.

Die Evolutionsgleichungen (4.47) und (4.48) ergeben dieselbe Phänomenologie wie das NJL-Modell: Für die Diskussion der numerischen Ergebnisse wählen wir $g = 3.37$ und finden so die Pion-Zerfallskonstante $F_\pi = 93$ MeV, der Massen-Parameter m ist dann durch Gleichung (4.45) festgelegt. Der gesamte Satz der Anfangs-Parameter ist

$$\begin{aligned} m &= 1.062 \text{ GeV} \\ \lambda &= 0 \\ Z_\Phi &= 0.01 \\ Z_q &= 1 \\ g &= 3.37 \quad . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dieser Satz von Parametern wird uns als Orientierungspunkt dienen, von dem aus wir die vollen Evolutionsgleichungen im nächsten Abschnitt untersuchen werden.

Lösen wir die Differentialgleichungen (4.48) und (4.47) numerisch und evolviere, ausgehend von den Anfangsbedingungen (4.49), die Kopplungen nach $k=0$, so finden wir eine Quarkmasse $M_q = 296.62$ MeV und die Pion-Zerfallskonstante $F_\pi = 88.1$ MeV. Für die Masse des σ -Mesons ergibt sich einen Wert von $M_\sigma = 591.64$ MeV, der ungefähr der zweifachen Quark-Masse entspricht. Diese Ergebnisse liegen sehr nahe an den Resultaten von Standard-NJL-Rechnungen, was darauf hinweist, daß die Lösung der Flußgleichungen bei großem N_c äquivalent zur Lösung der NJL Gap-Gleichung ist.

Der Fluß des Massenparameters $m(k)$ bzw. des Erwartungswertes des Potentials $\Phi_0(k)$ ist in Abbildung 4.2 gezeigt (gestrichelte Linie): Von großen Skalen k kommend fällt der Massenparameter $m_R(k) = Z_\Phi(k)^{-1}m(k)$ sehr schnell ab. An der Skala $k_{\chi\text{SB}} = 700$ MeV wird er Null und wir kommen in den spontan gebrochenen Bereich des Flusses. Unterhalb von $k_{\chi\text{SB}}$ ist der Erwartungswert des Potentials $F_\pi(k) = Z_\Phi(k)\Phi_0(k)$ aufgetragen, der schnell ansteigt, dann aber konstant bleibt und im Infrarot-Bereich den Wert $F_\pi = 88.1$ MeV annimmt.

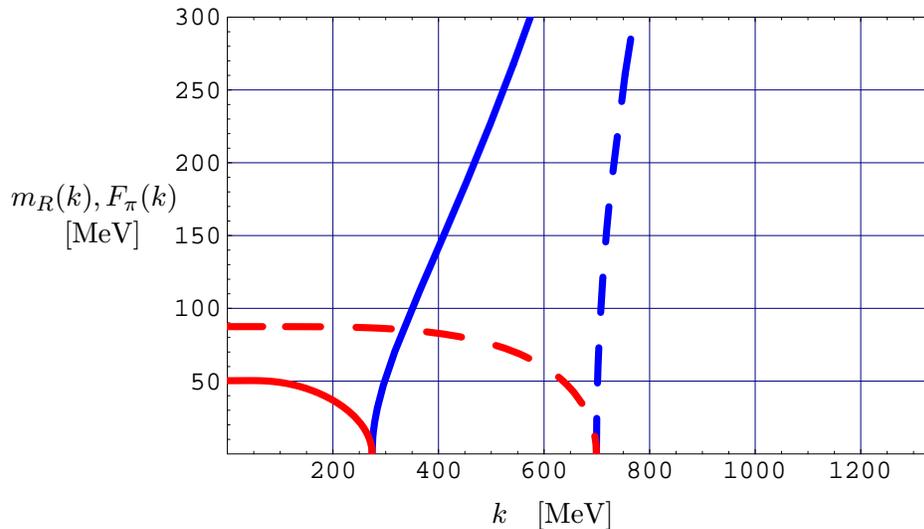


Abbildung 4.2: Die renormierte quadratische Kopplung des effektiven Potentials m_R im symmetrischen Fall und der renormierte Vakuumerwartungswert $F_\pi(k)$ bei gebrochener Symmetrie als Funktion der Skala k . Die gestrichelte Kurve wurde mit den Flußgleichungen für großes N_c berechnet. Die durchgezogene Kurve zeigt die Lösung der vollen Gleichungen mit den NJL-Anfangsbedingungen Gln. (4.49).

Weiterhin finden wir numerisch, daß die Quarkmasse M_q nur von dem Verhältnis $2G = g^2/m^2$ der Anfangswerte abhängt, nicht von den Absolutwerten von g oder m^2 . Das gleiche gilt für die NJL Gap-Gleichung, wenn man F_π nicht fixiert. Die σ -Meson-Masse variiert bei festem Verhältnis G , über einen weiten

Wertebereich nur schwach mit den absoluten Anfangswerten.

Im nächsten Abschnitt werden wir die vollen Flußgleichungen diskutieren. Bevor wir damit anfangen, wollen wir noch kurz eine Relation herleiten: In Gleichung (4.48) bewirkt das positive Vorzeichen, daß das System in den spontan gebrochenen Zustand strebt ($m^2(k) < 0$). Ob $m^2(k)$ tatsächlich negativ wird hängt von den Anfangswerten k_{uv}, m_{uv} und $g_{uv} = g = \text{const.}$ ab, aber auch von der Anzahl der Farbfreiheitsgrade N_c . Wir können eine Relation herleiten, die angibt wie groß N_c sein muß, um die gebrochene Symmetrie zu erreichen, vorausgesetzt die Entwicklung für großes N_c ist gültig.

Die Evolutionsgleichungen in der symmetrischen Phase kann man einfach analytisch lösen:

$$m^2(k) = \frac{k^2}{8\pi^2} N_c N_f g^2 + m_{uv} - \frac{k_{uv}^2}{8\pi^2} N_c N_f g^2 \quad (4.50)$$

$$\lambda(k) = -\frac{\log k}{2\pi^2} N_c N_f g^4 + \lambda_{uv} + \frac{\log k_{uv}}{2\pi^2} N_c N_f g^4 \quad (4.51)$$

$$Z_\Phi(k) = -\frac{\log k}{4\pi^2} N_c N_f g^2 + Z_\Phi^{uv} + \frac{\log k_{uv}}{4\pi^2} N_c N_f g^2 \quad , \quad (4.52)$$

Um die chiral gebrochenen Symmetrie zu erreichen, muß $m(k)$ negativ werden für $k > 0$. Also ist die kritische Anzahl der Farben N_c , bei der gerade noch Kondensation auftritt, festgelegt durch die Bedingung $m^2(k=0) = 0$. Wir erhalten

$$N_c(\text{crit}) = \frac{4\pi^2 m^2(k_{uv})}{g^2 k_{uv}^2} = \frac{2\pi^2}{G k_{uv}^2} . \quad (4.53)$$

Das bedeutet wenn $N_c > N_c(\text{crit})$ ist, läuft das System in die spontan gebrochene Symmetrie und das Potential entwickelt einen endlichen Erwartungswert. Wir werden diese Relation im nächsten Abschnitt mit den Resultaten der vollen Flußgleichungen vergleichen.

4.4 Evolutions Gleichungen mit Meson-Dynamik

Untersuchen wir nun also die numerischen Lösungen der vollen Flußgleichungen (4.31-4.34) in der im Abschnitt 4.2 angegebenen Trunkierung.

Wir benutzen zunächst die Anfangsbedingungen Gl. (4.49) und vergleichen den Fluß der quadratischen Kopplung $m^2(k)$ bzw. $\Phi_0(k)$ mit dem Ergebnis des vorhergehenden Abschnitts. Danach werden wir für modifizierte Anfangsbedingungen den Renormierungs-Fluß der vollen Gleichungen im Detail analysieren.

NJL Anfangsbedingungen Wie wir bereits zu Beginn dieses Kapitels diskutiert haben, wird in den meisten NJL-Rechnungen eine $1/N_c$ -Entwicklung der höheren Korrekturterme benutzt und die Impulsintegrale werden durch einen

harten cutoff Λ regularisiert. Um Fluktuationen im Quark-Kondensat zu beschreiben benötigt man zusätzliche cutoffs, da das NJL-Modell eine nicht renormierbare Theorie ist [45].

Die vollen Flußgleichungen enthalten diese höheren $1/N_c$ -Korrekturen, die gewöhnlich in den phänomenologischen Anwendungen des NJL-Modells vernachlässigt werden. Durch den Formalismus der Renormierungsgruppen-Flußgleichungen gibt es nur *eine* Ultraviolett-Skala k_{uv} , an der die Ultraviolett-Lagrange-dichte festgelegt wird. Alle Fluktuationen werden dann schrittweise berücksichtigt durch das Absenken *eines* Infrarot cutoffs k .

Wenn wir die Kopplungen mit den vollen Flußgleichungen (4.31-4.34) ausgehend von den Anfangsbedingungen Gln. (4.49) evolvieren, so finden wir, daß $m^2(k)$ erst bei einer Skala $k_{\chi SB} = 274$ MeV Null wird. Das bedeutet der Fluß bleibt bei den gegebenen Anfangsbedingungen bis hinunter zur sehr kleinen Skalen k im symmetrischen Bereich der Theorie. Deshalb ist auch die resultierende Pion-Zerfallskonstante $F_\pi = 50$ MeV zu klein. Der physikalische Grund für diesen Effekt besteht darin, daß die Quark-Antiquark-Wechselwirkung, die das System in die gebrochene Symmetrie treibt, nicht stark genug ist verglichen mit den Meson-Fluktuationen (siehe auch Gl. 4.41). Meson-Fluktuationen wirken also der spontanen Symmetriebrechung entgegen. Die Evolution der Kopplungen $m^2(k)$ bzw. $F_\pi(k)$ ist in Abbildung 4.2 dargestellt (durchgezogene Kurve).

Ähnliche Effekte wurden in einer Arbeit von Kleinert und van der Bosche beobachtet [42]. Dort wurden Meson-Fluktuationen betrachtet, nachdem die NJL-Gap-Gleichung gelöst wurde. Die Autoren schreiben “If chiral fluctuations are properly taken into account, the spontaneous symmetry breakdown disappears and the pions acquire a nonzero mass equal to the σ -mesons.” Quantenfluktuationen des Quark-Kondensats erzeugen ebenfalls Instabilitäten in einem Modell mit scharfem Vierer-Impuls-cutoff, das von Ripka untersucht wurde [43]. Der Autor führt diesen Effekt auf die Benutzung eines scharfen cutoffs zurück. Oertel und Buballa beobachten Instabilitäten im Pion-Propagator bei Berücksichtigung von Meson-Effekten [45].

In unserer Methode wird die Evolution der Meson-Fluktuationen *zusammen* mit der Quark-Evolution durchgeführt. Wir benutzen einen sehr weichen cutoff für die Rechnung, wir haben also weder verschiedene cutoffs, noch das Problem scharfer cutoffs. Anders als Kleinert [42] finden wir bei $k = 0$ spontan gebrochene Symmetrie, allerdings ist der Wert der Pion-Zerfallskonstanten $F_\pi = 50$ MeV in der Tat zu klein. Für realistische Werte von F_π müssen wir die Anfangsbedingungen der Flußgleichungen neu adjustieren.

Untersuchen wir also mögliche Anfangsbedingungen, die zu einer spontanen Symmetriebrechung im Ultraviolett-Bereich führen: Die vollen Evolutionsgleichungen erlauben uns, die kritische Anzahl der Farben N_c , für die gerade noch Kondensation auftritt, numerisch zu berechnen. So können wir den Bereich der möglichen Anfangsbedingungen einschränken und mit den Ergebnissen der Näherung für großes N_c vergleichen (Gl. 4.53). Wir haben dies für einige Anfangsbedingungen getan, ausgehend von den Anfangsbedingungen Gln. (4.49).

Um nur zwei Parameter k_{uv} und $m(k_{\text{uv}})$ variieren zu müssen, wurde an der Ultraviolett-Skala die Yukawa-Kopplung auf $g = 1.0$ normiert.

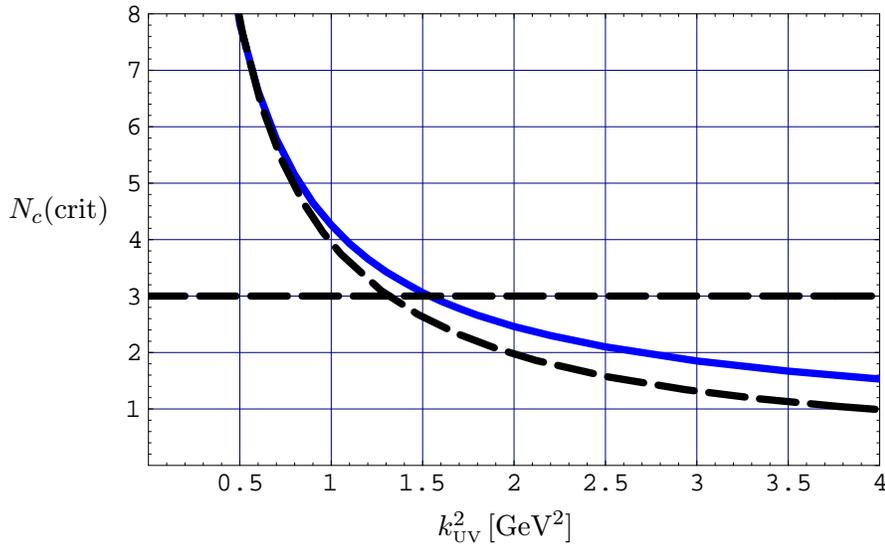


Abbildung 4.3: Die kritische Anzahl von Farben N_{crit} die nötig ist um die gebrochene Symmetrie in der Evolution zu erreichen als Funktion der UV cutoffs k_{UV} . Die gestrichelte Kurve zeigt die analytische Lösung für $N_c(\text{crit})$ aus Gl. (4.53). Die durchgezogene Linie zeigt das numerisch aus den vollen Flußgleichungen berechnete $N_c(\text{crit})$.

In Abbildung 4.3 ist die kritische Anzahl der Farben dargestellt, für die gerade noch Kondensation stattfindet. Die Anzahl der Farben $N_c(\text{crit})$ ist als Funktion des Quadrates des Ultraviolett cutoffs k_{uv}^2 angegeben. Die Kurven entsprechen der Rechnung für großes N_c (Gl. 4.53, gestrichelte Kurve) und der numerischen Lösung der vollen Flußgleichungen mit den NJL-Anfangsbedingungen. Liegt die Anzahl der Farben bei gegebener Skala oberhalb der Kurven, so findet man spontane Symmetriebrechung. Bei einer Ultraviolett-Skala $k_{\text{uv}} = 1.34$ GeV, $k_{\text{uv}}^2 = 1.8$ GeV² die wir benutzen wollen, liegt die kritische Anzahl der Farben für die Flußgleichungen bei großem N_c Gl. (4.47) deutlich unterhalb der Grenze $N_c = 3$ (gestrichelte Linie). Im vorherigen Abschnitt in Abbildung 4.2 (gestrichelte Linie) haben wir entsprechend gefunden, daß das System bei $k_{\chi\text{SB}} = 700$ MeV in den Bereich der spontan gebrochenen Symmetrie übergeht. Nicht so im Fall der vollen Evolutionsgleichungen, hier erreicht der Fluß bei $k_{\chi\text{SB}} = 274$ MeV gerade noch die gebrochene Phase. Die Abbildung 4.3 zeigt, daß die vollen Flußgleichungen mit der NJL-Anfangsbedingung $m(k_{\text{uv}}) = 316$, $g(k_{\text{uv}}) = 1$ und $k_{\text{uv}} = 1.34$ relativ knapp unter der Schwelle $N_c = 3$ liegen. Bei fester UV-Skala, beispielsweise $k_{\text{uv}} = 1.34$ GeV führen Anfangswerte $m(k_{\text{uv}}) > 324$ MeV nicht mehr zur Kondensation des Systems im Infrarot-Bereich.

Wir stellen also fest, daß der Fluß der massenartigen Kopplung sowohl durch das Verhältnis $2G = g^2/m^2$, als auch durch k_{uv} bestimmt wird. Die Physik bei großem N_c wird durch das Produkt Gk_{uv}^2 festgelegt (vgl. Gl. 4.53), es ist mit $G\Lambda^2$ zu vergleichen, der entscheidenden Größe im NJL-Modell. In der Arbeit

von Jungnickel und Wetterich [19] wird diese Größe $1/(4\tilde{\varepsilon})$ genannt. Bei fester Ultraviolett-Skala $k_{\text{uv}} = 1.34 \text{ GeV}$ erhalten wir für Werte von $G > 4.76 \text{ GeV}^{-2}$ Kondensation bei $N_c = 3$.

Modifizierte Anfangsbedingungen Unabhängig vom phänomenologischen NJL-Wert kann man jetzt G verändern und die Evolution mit modifizierten Anfangsbedingungen durchführen. Die Vorhersagen für die Infrarot-Theorie müssen dann mit der Phänomenologie verglichen werden. Wir wählen als Anfangswert eine Meson-Masse m kleiner als $m = 324 \text{ MeV}$ an der Ultraviolett-Skala $k_{\text{uv}} = 1.34 \text{ GeV}$ um sicher in den chiral gebrochenen Bereich zu kommen. Alle anderen Parameter bleiben identisch:

$$\begin{aligned} m &= 300 \text{ MeV} \\ \lambda &= 0 \\ Z_\Phi &= 0.01 \\ Z_q &= 1 \\ g_B &= 1 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Dabei wurde der Wert $m = 300 \text{ MeV}$ so angepaßt, daß wir im Infrarot-Bereich $k = 0$ die Pion-Zerfallskonstante $F_\pi = 93 \text{ MeV}$ finden.¹ Die effektive Quark-Quark-Kopplung ist dann $G = 5.56 \text{ GeV}^{-2}$, ein wenig größer als der normale NJL-Wert. Verglichen mit den Anfangsbedingungen der Arbeit von Jungnickel und Wetterich [19] ($\tilde{\varepsilon} = 1/(4Gk_\phi^2) = 0.02$) ergibt sich für unsere Anfangsbedingungen $\tilde{\varepsilon} = 0.025$.

Mit diesen Anfangsbedingungen finden wir für die Skala, bei der das Potential einen endlichen Erwartungswert entwickelt $k_{\chi_{SB}} = 501.55 \text{ MeV}$ (Abb. 4.4). Dieser Wert liegt unterhalb der Skala von $\sim 1 \text{ GeV}$, die man in Berechnungen des effektiven Potentials ohne Wellenfunktions-Renormierung mit dem Heat-Kernel-cutoff findet [22, 38].

Wir wollen nun die Evolution der einzelnen Parameter in der effektiven Wirkung diskutieren. Wir betrachten jeweils den Fluß der Kopplungen von der Ultraviolett-Skala $k = k_{\text{uv}}$ hinunter bis zum Infrarot-Bereich $k = 0$.

Die Evolution der renormierten Meson-Masse $m_R(k) = Z_\Phi(k)^{-1/2}m(k)$ ist in der Abbildung 4.4 dargestellt. Die Masse $m_R(k)$ wird kontinuierlich kleiner wegen des Einflusses des Fermion-loops. Sie fällt von ihrem Anfangswert $m_R^{\text{uv}} = 3 \text{ GeV}$ auf Null bei einer Skala von $k_{\chi_{SB}} = 501 \text{ MeV}$. An diesem Punkt wechseln wir die Parametrisierung. Wir folgen der Evolution weiterhin und plotten jetzt den renormierten Vakuum-Erwartungswert des σ -Feldes $F_\pi(k) = Z_\Phi(k)^{1/2}\Phi_0(k)$ als den Parameter, der das effektive Potential charakterisiert. F_π wächst zunächst stark, dann immer schwächer in der Evolution $k \rightarrow 0$. Dieses Verhalten ist leicht anhand der Flußgleichung (4.39) zu erklären.

¹In dieser Arbeit wird der Unterschied zwischen den Pion-Zerfallskonstanten bei endlicher und verschwindender Quark-Masse vernachlässigt. Wir wählen immer $F_\pi = 93 \text{ MeV}$. Ein für den chiralen Limes korrigierten Wert wäre $F_\pi = 88 \text{ MeV}$ (vgl. [46]).

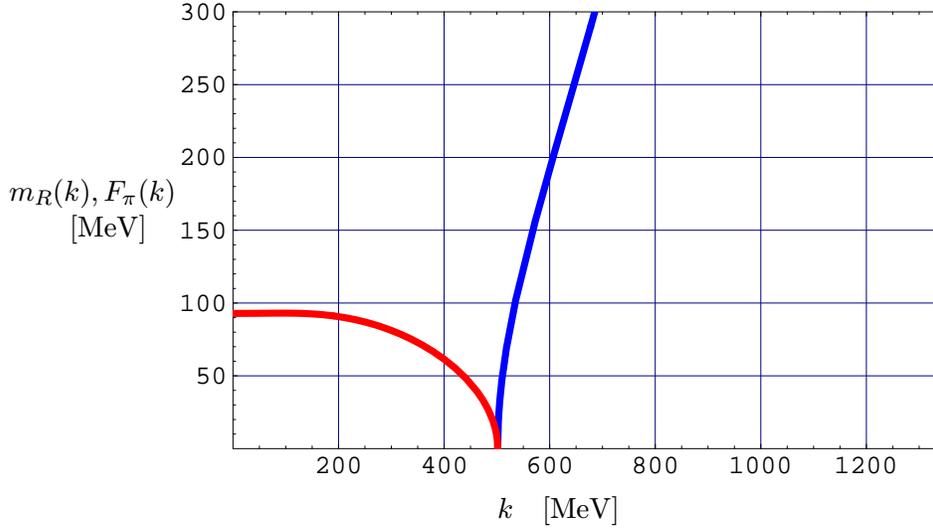


Abbildung 4.4: Die renormierte quadratische Kopplung $m_R(k) = Z_\Phi(k)^{-1/2}m(k)$ und der renormierte Vakuum-Erwartungswert $F_\pi(k) = Z_\Phi(k)^{1/2}\Phi_0(k)$ des effektiven Potentials. Die Anfangsbedingungen der Flußgleichungen wurden so gewählt, daß sich $F_\pi = 93 \text{ MeV}$ bei $k = 0$ ergibt.

Bei spontan gebrochenem Potential erhalten die Quarks und das σ -Meson eine endliche Masse. Wie diese Massen in die Flußgleichung für Φ_0 eingehen, können wir am besten verstehen wenn wir die Gleichung (4.39) folgendermaßen schreiben:

$$k \frac{\partial \Phi_0^2}{\partial k} = C_1 Z_\Phi^{-1} k^2 + C_2 Z_\Phi^{-1} \left[\frac{k^2}{(1 + M_\sigma^2/k^2)^2} \right] - C_3 Z_q^{-2} g^2 \left[\frac{k^2}{(1 + M_q^2/k^2)^2} \right]. \quad (4.55)$$

Die drei Summanden entsprechen den Beiträgen der Pionen, des σ -Mesons und der Quarks zum Fluß von Φ_0 . Wenn jetzt die Skala k kleiner wird als die jeweiligen Massen $k \ll M_\sigma, M_q$, so tragen der zweite und dritte Term nicht mehr zur Evolution bei. Die Quarks und σ -Mesonen entkoppeln also aufgrund ihrer Masse von der Evolution und nur die masselosen Goldstone-Bosonen tragen bis zuletzt zum Fluß bei. Die Funktionen in den eckigen Klammern spielen deshalb die Rollen von Schwellenfunktionen. Bei $k = 0$ finden wir den Infrarotwert $Z_\Phi^{1/2}\Phi_0 = F_\pi = 93 \text{ MeV}$, wie gefordert.

In Abbildung 4.5 zeigen wir die Evolution der renormierten quartischen Kopplung $\lambda_R = Z_\Phi(k)^{-2}\lambda(k)$. Der starke Anstieg von λ_R ist hauptsächlich auf den großen Wert von Z_Φ bei großen Skalen k zurückzuführen. Die reine Quark-Theorie mit Vier-Fermionen-Kopplung generiert also bei großen Skalen sofort eine starke Wechselwirkung zwischen den entstehenden Bosonen.

Die Meson-Fluktuationen in den Flußgleichungen (4.42) sind proportional zu λ , wenn also λ groß genug geworden ist, überwiegen sie die Quark-Fluktuationen und das Ansteigen von λ wird umgekehrt. Der Abfall von λ_R beginnt etwa bei

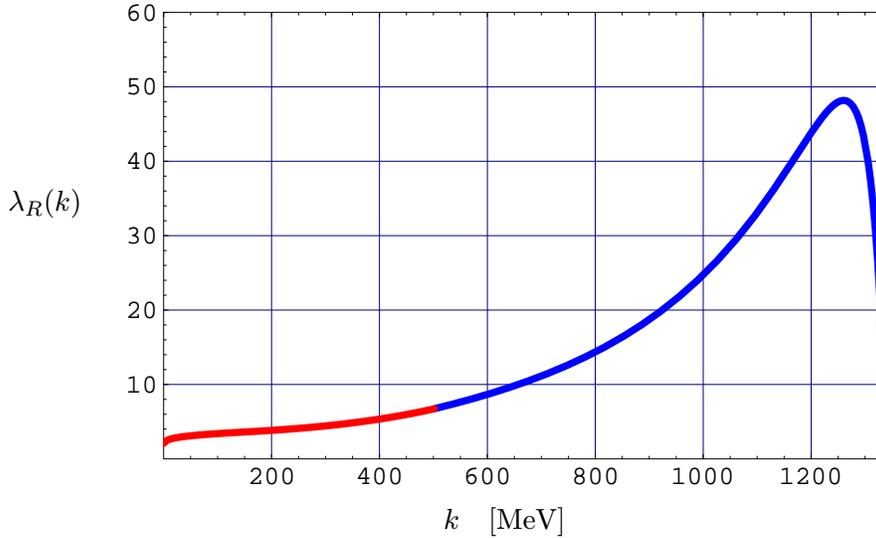


Abbildung 4.5: Die renormierte quartische Kopplung $\lambda_R(k) = Z_\Phi^{-2}(k)\lambda(k)$ als Funktion von k .

$\lambda_R = 50$ und wird durch das kleiner werden von Z_Φ^{-2} noch verstärkt. Auch in der Flußgleichung für λ entkoppeln die Quarks und σ -Mesonen wegen der Schwellenfunktionen von der Evolution. Im Grenzfall $k \rightarrow 0$ tragen wieder nur die Goldstone-Bosonen zur Evolution bei und die Gleichung (4.40) hat Form

$$k \frac{\partial \lambda}{\partial k} = C Z_\Phi^{-2} \lambda^2 \quad , \quad (4.56)$$

die Meson-Kopplung verschwindet also wie $\lambda(k) \sim [A - B \ln k/k_{uv}]^{-1}$. Bei $k=0$ schließlich finden wir eine asymptotisch freie Theorie.

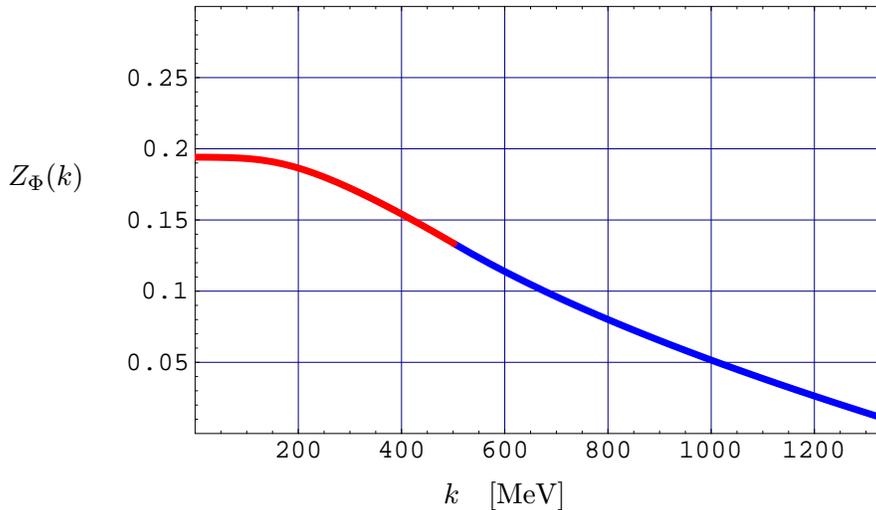


Abbildung 4.6: Die Wellenfunktionsrenormierungs-Konstante $Z_\Phi(k)$ der Meson-Felder.

Die Wellenfunktions-Renormierung Z_Φ ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Sie steigt von ihrem Anfangswert $Z_\Phi^{uv} = 0.01$ stark an und wird erst relativ spät

bei $k \sim 200$ MeV flach. Für großes k oberhalb der Symmetriebrechungs-Skala wird Z_Φ ausschließlich von den Fermion-Korrekturen getrieben, wie man in Gleichung (4.34) sieht: Bei symmetrischem Potential sind die Meson-Massen M_π und M_σ gleich, d.h die Meson-Korrekturen verschwinden identisch und wir finden

$$k \frac{\partial Z_\Phi}{\partial k} = C Z_q^{-2} g \left[\frac{1}{(1 + M_q^2/k^2)^3} \right] . \quad (4.57)$$

Z_Φ steigt dann näherungsweise logarithmisch, weil g sich nur minimal mit k ändert, Z_q vergleichsweise langsam steigt und die Quark-Masse bei symmetrischem Potential Null ist. Wenn das Potential einen endlichen Erwartungswert annimmt, schaltet die Quark-Masse die Quark-Fluktuationen ab und die Evolution von Z_Φ wird nur noch durch die Meson-Fluktuationen bestimmt.

In Abbildung 4.7 ist die Quark-Wellenfunktions-Renormierung Z_q dargestellt. Der Ultraviolett-Anfangswert ist $Z_q^{\text{uv}} = 1$, weil wir annehmen, daß an der Skala $k_{\text{uv}} = 1.34$ GeV noch ein reines Quark-System vorliegt. Folgt man der Evolution $k \rightarrow 0$ so steigt Z_q , die Quarks erhalten also eine Meson-Wolke. Dabei läuft Z_q bis hinunter zu sehr kleinen Skalen und wird erst ab $k \approx 50$ MeV flach.

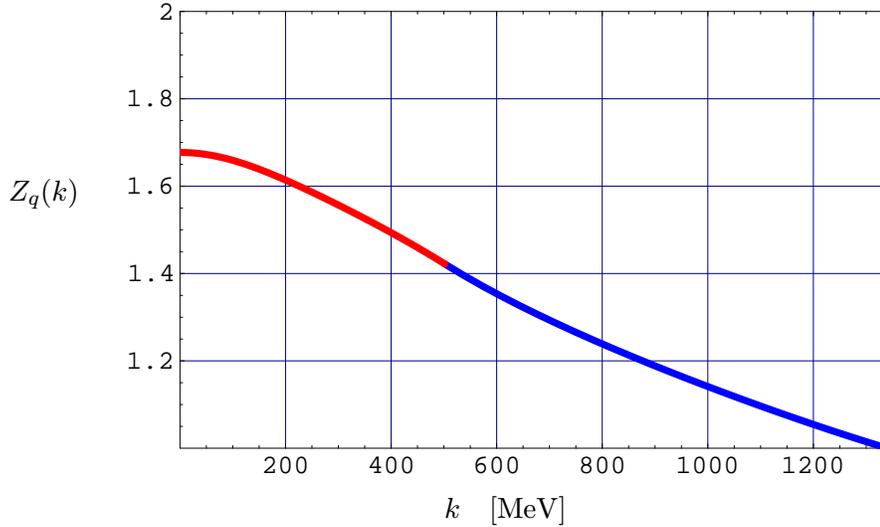


Abbildung 4.7: Die Wellenfunktions-Renormierungskonstante Z_q der Quark-Felder als Funktion von k .

Die renormierte Yukawa-Kopplung besitzt im Ultraviolett-Bereich, jenseits von k_{uv} einen Landau-Pol. Entsprechend finden wir ausgehend vom Anfangswert $g_R^{\text{uv}} = 10$ ein starkes Abfallen, das durch das schnelle kleiner werden von $Z_\Phi^{-1/2}$ verursacht wird. Die Yukawa-Kopplung ist gegeben durch

$$g_R(k) = Z_\Phi(k)^{-1/2} Z_q(k)^{-1} g(k) , \quad (4.58)$$

sie ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Das Laufen der ‘bare’-Kopplung g ohne Z -Faktoren ist durch Gleichung (4.32) gegeben. Sie steigt von ihrem Anfangswert

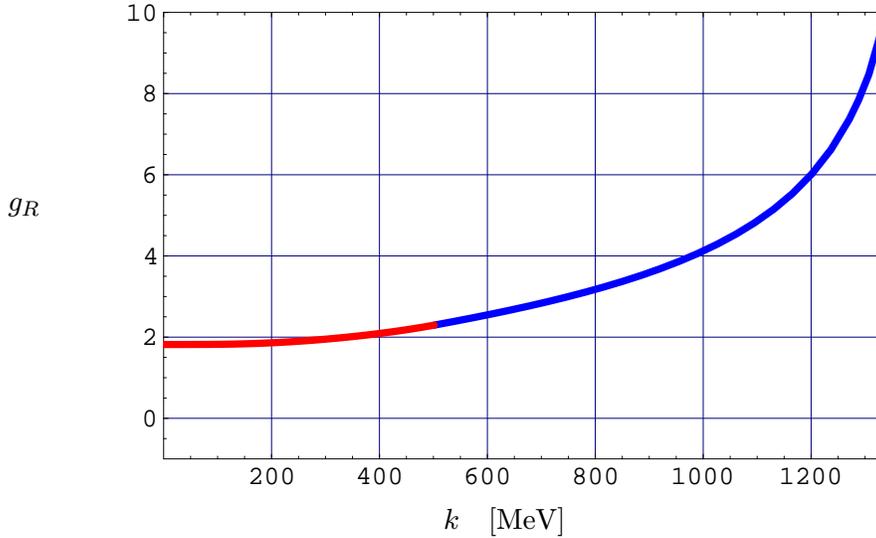


Abbildung 4.8: Die renormierte Yukawa-Kopplung $g_R(k) = Z_\Phi(k)^{-1/2} Z_q(k)^{-1} g(k)$ als Funktion der Renormierungs-Skala k .

$g^{\text{uv}} = 1.0$ bei $k = k_{\text{uv}}$ nur sehr langsam an und hat im Infrarotbereich einen Wert von $g = 1.3$. Die Evolution der renormierten Yukawa-Kopplung ist also stark durch Z_Φ und Z_q dominiert.

Die Evolution der Quarkmasse ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Solange die Theorie während der Evolution symmetrisch bleibt, also für $k > 501$ MeV ist die Quark-Masse Null. Unterhalb von $k_{\chi\text{SB}} = 501$ MeV entwickelt das effektive Potential einen endlichen Erwartungswert und die Quarks erhalten ihre Masse

$$M_q(k) = Z_q(k)^{-1} g(k) \Phi_0(k) \quad (4.59)$$

$$= g_R(k) F_\pi(k) \quad , \quad (4.60)$$

indem sie an das Kondensat koppeln. Ab einer Skala von $k \approx 200$ MeV evolviert die Quarkmasse nicht mehr. Im Infrarot-Bereich finden wir einen Wert von 169 MeV.

In Abbildung 4.10 ist die Masse des σ -Mesons als Funktion von k aufgetragen. Der Startwert an der UV-Skala beträgt $m_R^{\text{uv}} = 3.0$ GeV. Im symmetrischen Bereich entspricht die σ -Meson-Masse der quadratischen Kopplung im effektiven Potential m_R . Sie fällt schnell ab und wird an der Skala $k = k_{\chi\text{SB}}$ Null. Im Bereich spontan gebrochener Symmetrie sind die Pionen die masselosen Goldstone-Bosonen der Theorie und die σ -Masse ist gegeben durch

$$M_\sigma = \sqrt{2 Z_\Phi^{-1}(k) \lambda(k) \Phi_0^2(k)} \quad (4.61)$$

$$= \sqrt{2 \lambda_R(k) F_\pi^2(k)} \quad . \quad (4.62)$$

Die Masse des σ -Mesons steigt mit dem Vakuum-Erwartungswert des Potentials. Am Maximum beträgt ihr Wert etwa 250 MeV. Für kleinere k -Werte fällt M_σ wieder ab, weil $\lambda(k)$ logarithmisch gegen Null geht.

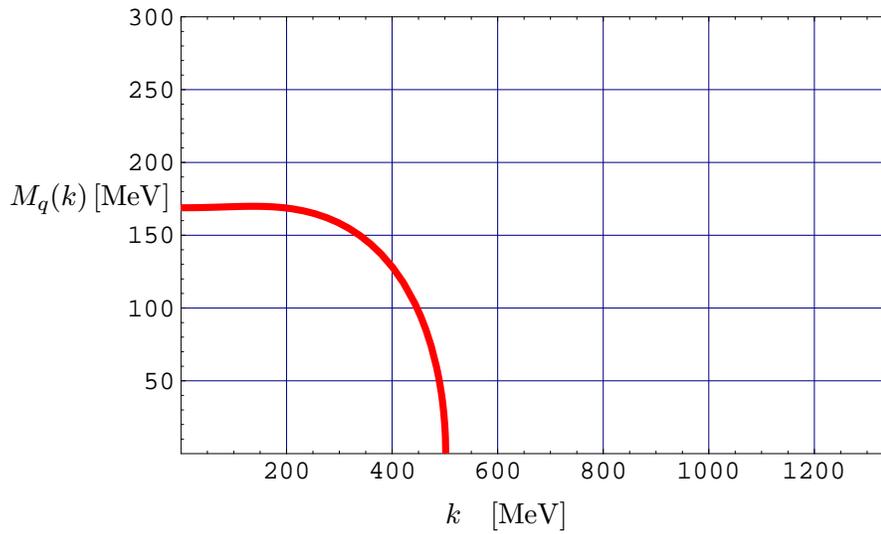


Abbildung 4.9: Die Quarkmasse $M_q(k) = g(k) \cdot Z_q^{-1}(k) \Phi_0(k)$ als Funktion von k .

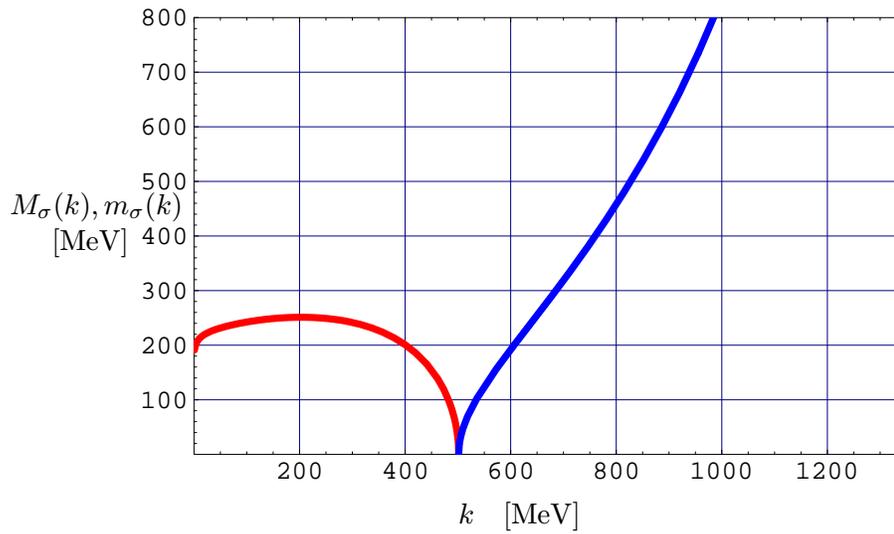


Abbildung 4.10: Die Masse des σ -Mesons als Funktion der Skala k .

Schließlich diskutieren wir noch das Fixpunktverhalten und die Unabhängigkeit des Renormierungsflusses von den Anfangsbedingungen. Betrachtet man die Flußgleichungen nahe der Ultraviolett-Skala, so stellt man fest, daß die Meson-Fluktuationen aufgrund der hohen Meson-Massen unterdrückt sind. In diesem Bereich sind nur die Quark-Korrekturen wichtig und man kann aus den Flußgleichungen die folgende Relation ableiten [19]:

$$k \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\lambda_R}{g_R^2} \right) = \frac{N_c}{2\pi} g_R^2 \left(\frac{\lambda_R}{g_R^2} - 2 \right) \quad . \quad (4.63)$$

Die Herleitung dieser Gleichung ist in Anhang C angegeben. Aus ihr liest man ab, daß das Verhältnis λ_R/g_R^2 den Fixpunkt $(\lambda_R/g_R^2)_* = 2$ besitzt, solange die Meson-Fluktuationen zu vernachlässigen sind.

Bei niedrigeren Skalen, wenn die Meson-Fluktuationen wichtig werden, bleibt das Fixpunkt-Verhalten weiterhin bestehen, der Fixpunkt ist jedoch nicht mehr $(\lambda_R/g_R^2)_* = 2$. In Abbildung 4.11 ist der Fluß von $\lambda_R(k)/g_R(k)^2$ als Funktion der Skala k aufgetragen. Die Evolution wurde jeweils mit unterschiedlichen Ultraviolett-Anfangswerten λ_{uv} durchgeführt. Für große Skalen $k > 1100$ MeV streben die Lösungen auf den Fixpunkt $(\lambda_R/g_R^2)_* = 2$ zu. Unterhalb dieser Skala sind die Massen der Mesonen so weit abgefallen, daß die Meson-Terme in den Flußgleichungen wichtig werden. In diesem Bereich durchlaufen die Kopplungen den partiellen Fixpunkt und “vergessen” ihre Anfangsbedingungen. Für sehr kleine Skalen unterhalb von 50 MeV verschwindet die Vier-Meson-Kopplung λ und wir finden eine asymptotisch freie Theorie.

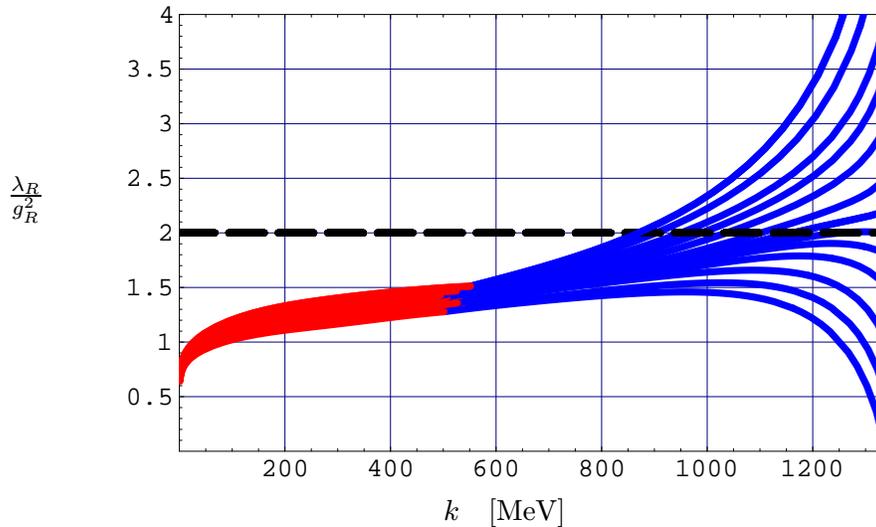


Abbildung 4.11: Das Fixpunkt-Verhalten von $\lambda_R(k)/g_R(k)^2$, aufgetragen als Funktion der Skala k . An der Ultraviolett-Skala wurden verschiedene Anfangswerte λ_{uv} gewählt.

Diskussion der Ergebnisse Fassen wir nun die Ergebnisse des gesamten Modells zusammen: Der Fluß der Kopplungen durchläuft einen partiellen Infrarot-Fixpunkt. Dabei stellt sich die Größe Gk_{uv}^2 als der entscheidende Parameter

des Systems von Flußgleichungen heraus, wie wir es in der Diskussion der Anfangsbedingungen zu Beginn dieses Abschnittes schon festgestellt hatten. Wenn die Ultraviolett-Skala k_{uv} fixiert ist, so hängt der Infrarot-Wert der dimensionsbehafteten Kopplung $F_\pi(k)$ nur noch von dem Verhältnis $G = \frac{g_{\text{uv}}^2}{2m_{\text{uv}}^2}$ ab. G ist also der relevante Parameter der Theorie.

Die marginalen Kopplungen sind $\lambda(k)$, $Z_q(k)$ und $Z_\Phi(k)$. Sie zeigen ein starkes Fixpunkt-Verhalten und verlieren so während der Evolution das Gedächtnis an die Anfangsbedingungen. Fixiert man also neben k_{uv}^2 auch die Pion-Zerfallskonstante $F_\pi = 93$ MeV bei $k = 0$ durch die Wahl von G , so sind die Anfangswerte λ^{uv} , Z_q^{uv} , Z_Φ^{uv} und m^{uv} oder g^{uv} frei wählbar.

Die effektive Infrarot-Theorie, die wir bei $k = 0$ erhalten, macht also Vorhersagen für die Größen g_R und λ_R , wenn wir m^{uv} benutzen um die Pion-Zerfallskonstante F_π festzulegen. Daraus ergeben sich die Infrarot-Massen:

$$\begin{aligned} M_q &= M_q(g_R, F_\pi) \\ M_\sigma &= M_\sigma(\lambda_R, F_\pi) \quad . \end{aligned}$$

Betrachten wir den Fluß aller Kopplungen, so finden wir die Symmetriebrechungs-Skala $k_{\chi\text{SB}} = 501$ MeV. Oberhalb ist das effektive Potential symmetrisch, unterhalb dieser Skala liegt spontane Symmetriebrechung vor. Der Übergangspunkt liegt mit 501 MeV recht niedrig, verglichen mit Rechnungen des effektiven Potentials ohne Wellefunktions-Renormierung, wo man Werte von $k_{\chi\text{SB}} = 0.8 - 1.0$ GeV findet [22, 38].

Weiterhin stellen wir fest, daß die Größen $F_\pi(k)$, $\lambda_R(k)$ und $g_R(k)$, wie auch die Quark-Masse und die σ -Meson-Masse ab Skalen von $k = 200$ MeV nur noch wenig evolvieren. Der am Beginn dieses Kapitels diskutierte Abstand zu den Skalen Λ_{QCD} und der Skala der Pion-Masse ist gerade noch gegeben. Bei sehr kleinen Skalen verschwindet $\lambda_R(k)$ logarithmisch und wir erhalten eine asymptotisch freie Theorie. Damit verbunden verringert sich auch die σ -Meson-Masse unterhalb von $k \approx 200$ MeV.

Betrachten wir die Pion-Skala $k \approx 138$ MeV als die Infrarot-Skala des linearen σ -Modells so finden wir die folgenden Infrarot-Werte:

Die Yukawa-Kopplung nimmt einen sehr kleinen Wert $g_R = 1.82$ an. Dieser Wert liegt um etwa einen Faktor 2 zu niedrig, verglichen mit realistischen Werten $g_R = 3.3$, die man aus der Goldberger-Treiman-Relation für realistische Quark-Massen folgern würde [47]. Dies kommt hauptsächlich durch den großen Wert von Z_q zustande.

Der Infrarot-Wert der Quark-Masse ist mit $M_q = 169$ MeV sehr klein, eben aufgrund der kleinen Yukawa-Kopplung. Auch hier kommt also die kleine Quark-Masse ebenfalls durch den Wert von Z_q zustande. Wenn wir in den Evolutions-Gleichungen die Flußgleichung für Z_q nicht mitnehmen, d.h. $Z_q = 1$ konstant annehmen und F_π wieder auf 93 MeV justieren so finden wir eine Quarkmasse von 240 MeV.

Solch kleine Quarkmassen sind durchaus konsistent mit relativistischen Quark-Modellen und Parametern aus dem Dipol-Modell für Photon-Proton Streuung [48]. Dort findet man jedoch für die Skala an der die Quarkmasse verschwindet $Q^2 \approx 0.8 \text{ GeV}^2$, ein Wert der deutlich über unserer Symmetriebrechungs-Skala liegt.

Die renormierte Vier-Meson-Kopplung λ_R nimmt einen Wert von 3.56 an. Damit liegt die Masse des σ -Mesons bei etwa 250 MeV, was deutlich unterhalb von realistischen Massen von etwa 800 MeV liegt. Um eine realistische Masse des σ -Mesons zu berechnen sind auch die Effekte der endlichen Stromquark-Massen zu berücksichtigen. So findet man in einer Rechnung ohne Z-Faktoren, aber mit expliziter Symmetriebrechung eine σ -Meson-Masse von 550 MeV [22].

Des weiteren können wir die Ergebnisse mit der Arbeit von Jungnickel und Wetterich [19] vergleichen, in der das lineare σ -Modell mithilfe der exakten Flußgleichungen untersucht wurde. Wir finden zunächst qualitativ das gleiche Skalen-Verhalten der Kopplungen. Die einzelnen Infrarot-Werte der Kopplungen sind jedoch etwas unterschiedlich.

Die Yukawa-Kopplung h aus [19] ist etwa 7.2 bei einem Anfangswert $Z_\Phi^{\text{UV}} = 0.01$ an der Ultraviolett-Skala $k_\varphi = 630 \text{ MeV}$ ([19], Tabelle 1). Dem entspricht in unserer Konvention $g = h/2$ einem Wert von 3.59, der also deutlich über dem Wert den wir finden liegt. Jungnickel und Wetterich finden für F_π etwa 84 MeV und erhalten damit eine Quarkmasse von 300 MeV.

Die Wellenfunktions-Renormierung Z_Φ liegt bei uns wegen der unterschiedlichen Definition von λ, m, g bei Werten von 0.2 statt 0.012 in [19], passen wir unsere Anfangsbedingungen jedoch entsprechend an, so finden wir $Z_\Phi \approx 0.045$ im Infrarot-Bereich. Für die Quark-Wellenfunktions-Renormierung Z_q finden wir Werte um 1.7, verglichen mit 1.5.

Vergleicht man die Symmetriebrechungs-Skalen $k_{\chi_{\text{SB}}}$ so finden Jungnickel und Wetterich 450 MeV, was bedeutend höher liegt als $k_{\chi_{\text{SB}}} = 501 \text{ MeV}$, wenn man den im Abschnitt 3.3 gefundenen Zusammenhang $2 \cdot k_W \approx k_{HK}$ berücksichtigt.

Insgesamt fällt auf, daß die Evolution der Kopplungen in [19] bei vergleichsweise höheren Skalen flach wird. In den Heat-Kernel-Flußgleichungen werden die einzelnen Korrekturen also erst später in der Evolution durch die Schwellenfunktionen abgeschaltet. Das können wir natürlich mit dem im Abschnitt 3.3 beobachteten schwachen Ultraviolett-Abschneide-Verhalten des Heat-Kernel-cutoffs verstehen. Durch den Heat-Kernel-cutoff $M = 2$ werden die Fluktuationen mit hohen Impulsen erst bei sehr niedrigen Skalen in der k -Evolution völlig ausintegriert. Damit "laufen" die Kopplungen auch länger.

4.5 Höhere Ordnung der Ableitungsentwicklung

In diesem Abschnitt wollen wir jetzt noch, wie schon im Abschnitt 4.1 angedeutet, zusätzlich eine mögliche Feldabhängigkeit der Kopplungen g, Z_q und

Z_Φ diskutieren und so auch die Aufspaltung des Meson-Z-Faktors in Z_π und Z_σ berücksichtigen. Wir wählen also jetzt für die effektive Wirkung die allgemeinere Trunkierung

$$\Gamma_k = \int d^4x \left\{ U(\Phi^2, k) + g(\Phi^2, k) \bar{q} M q + Z_q(\Phi^2, k) \bar{q} \not{\partial} q + \frac{1}{2} Z_\Phi^{ij}(\Phi^2, k) (\partial_\mu \Phi^i) (\partial_\mu \Phi^j) \right\} . \quad (4.64)$$

Die Yukawa-Kopplung $g = g(\Phi^2, k)$ ist anders als in den vorigen Abschnitten jetzt auch eine Funktion der Mesonfelder Φ . Die Wellenfunktions-Renormierungs-Konstanten Z_Φ^{ij} erhält eine $O(4)$ -Struktur, die wir wieder durch die Projektoren X_1 und X_2 ausdrücken können:

$$Z_\Phi^{ij} = Z_\sigma(\Phi^2) X_1^{ij} + Z_\pi(\Phi^2) X_2^{ij} . \quad (4.65)$$

Die Operatoren X_1 und X_2 sind im Anhang A.2 angegeben. Um Z_σ und Z_π zu bestimmen müssen wir jetzt zusätzlich zu $(\partial_\mu \Phi)^2$ die Operatoren $(\Phi \partial_\mu \Phi)^2$ in der Ableitungsentwicklung berücksichtigen. Wir finden die Meson Z-Faktoren dann als Koeffizienten der folgenden Operatoren:

$$Z^{ij}(\partial_\mu \Phi^i)(\partial_\mu \Phi^j) = Z_\sigma(\Phi^2) \frac{(\Phi \partial_\mu \Phi)^2}{\Phi^2} + Z_\pi(\Phi^2) \left((\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{(\Phi \partial_\mu \Phi)^2}{\Phi^2} \right) \quad (4.66)$$

Diese Operatoren waren teilweise auch schon in der Entwicklung (4.14) enthalten, wir hatten sie dann jedoch durch die Trunkierung (4.27) vernachlässigt.

Die Renormierungsgruppen Flußgleichung, in die die Trunkierung Gl. (4.64) eingesetzt werden muß, lautet wie zuvor

$$k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} = + \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d\tau}{\tau} \exp \left\{ \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta q} \right) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta q} \right)^\dagger \right\} k \frac{\partial f_k}{\partial k} - \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d\tau}{\tau} \exp \left\{ \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} - 2 \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta q \delta \Phi^i} \right) \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta q} \right)^{-1} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta \Phi^j} \right) \right\} k \frac{\partial f_k}{\partial k} . \quad (4.67)$$

Allerdings sind die inversen Propagatoren und die Kopplungsterme jetzt wesentlich komplizierter, weil die Koeffizienten der kinetische Terme und die Yukawa-Kopplung diesmal Funktionen der Felder sind. Der inverse Meson-Propagator lautet beispielsweise in allgemeiner Form (vgl. auch [49])

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} &= - Z_\Phi^{ij} \partial^2 + (U''(\Phi^2, k))^{ij} + \frac{1}{2} \frac{\delta Z_\Phi^{ab}}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} (\partial^\mu \Phi^a) (\partial_\mu \Phi^b) \\ &\quad - i Y_a^{ij} (\partial^\mu \Phi^a) \partial_\mu - \partial_\mu \left(\frac{\delta Z_\Phi^{ia}}{\delta \Phi^j} \partial^\mu \Phi^a \right) \\ &\quad + \frac{\delta g(\Phi^2)}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} \bar{q} M q + \frac{\delta g(\Phi^2)}{\delta \Phi^i} \bar{q} A^j q + \frac{\delta g(\Phi^2)}{\delta \Phi^j} \bar{q} A^i q \\ &\quad + \frac{\delta Z_q(\Phi^2)}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} \bar{q} \not{\partial} q \quad , \end{aligned} \quad (4.68)$$

mit der Abkürzung

$$Y_a^{ij} = \frac{\delta Z_{\Phi}^{ia}}{\delta \Phi^j} - \frac{\delta Z_{\Phi}^{ja}}{\delta \Phi^i} + \frac{\delta Z_{\Phi}^{ij}}{\delta \Phi^a} \quad , \quad (4.69)$$

wobei über die Indizes a und b zu summieren ist.

Der inverse Quark-Propagator sieht wie zuvor aus, weil bei der Ableitung nach den Quarkfeldern keine zusätzlichen Terme auftreten. Die Kopplungsterme sind jedoch wegen der Φ -Abhängigkeit der Yukawa-Kopplung wieder komplizierter:

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta q \delta \Phi^i} = g(\Phi^2) \bar{q} A^i + \frac{\delta g(\Phi^2)}{\delta \Phi^i} \bar{q} M + \frac{\delta Z_q(\Phi^2)}{\delta \Phi^i} \bar{q} \not{\partial} \quad (4.70)$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta \Phi^j} = g(\Phi^2) A^j q + \frac{\delta g(\Phi^2)}{\delta \Phi^j} M q + \frac{\delta Z_q(\Phi^2)}{\delta \Phi^j} \not{\partial} q \quad . \quad (4.71)$$

Man kann sich leicht ausmalen, daß eine Ableitungsentwicklung, wie wir sie auf Seite 37 skizziert haben, in dieser allgemeinen Form kaum noch durchführbar ist. Wir schränken also die Z -Faktoren wieder ein und nehmen nur die niedrigste Ordnung in der Ableitungsentwicklung mit, in der die Aufspaltung von Z_{σ} und Z_{π} sichtbar wird:

$$Z_{\sigma}(\Phi^2, k) = Z_{\sigma}(k) \quad , \quad Z_{\pi}(\Phi^2, k) = Z_{\pi}(k) \quad , \quad Z_q(\Phi^2, k) = Z_q(k) \quad . \quad (4.72)$$

Setzen wir jetzt die $O(4)$ -Matrix mit konstanten Koeffizienten

$$Z_{\Phi}^{ab} = Z_{\sigma} X_1^{ab} + Z_{\pi} X_2^{ab} \quad (4.73)$$

in den allgemeinen inversen Propagator Gl. (4.68) ein, so vereinfacht er sich beträchtlich und wir können wieder unsere Standardprozedur zur Ableitungsentwicklung durchführen: Logarithmen in Schwinger-Eigenzeit-Darstellung angeben, Exponential-Funktion als Potenzreihe schreiben und nur die Terme bis Ordnung ∂^2 wieder aufsummieren.

Die Flußgleichungen für das effektive Potential und den Quark- Z -Faktor sind wieder durch die Gleichungen (4.31) und (4.33) gegeben. Für die Wellenfunktions-Renormierungs-Konstanten der Mesonen erhalten wir jetzt unterschiedliche Gleichungen für Z_{π} :

$$\begin{aligned} k \frac{\partial Z_{\pi}}{\partial k} = & - \frac{k^6}{4\pi^2} g^2 Z_q^{-2} \frac{N_c N_f}{(k^2 + M_q^2)^3} \\ & - \frac{k^6}{16\pi^2} \frac{1}{\Phi^2} \left(\frac{1}{(k^2 + M_{\sigma}^2)^2} + \frac{1}{(k^2 + M_{\pi}^2)^2} - \frac{2}{(k^2 + M_{\sigma}^2)(k^2 + M_{\pi}^2)} \right) \\ & + \frac{k^6}{32\pi^2} \frac{(Z_{\sigma} - Z_{\pi})}{\Phi^2} \left(\frac{Z_{\sigma}^{-1}}{(k^2 + M_{\sigma}^2)^2} + \frac{2Z_{\sigma}^{-1}}{M_{\sigma}^2 - M_{\pi}^2} \left(\frac{1}{(k^2 + M_{\sigma}^2)^2} - \frac{1}{(k^2 + M_{\pi}^2)^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

und für die Wellenfunktions-Renormierung des σ -Feldes Z_σ :

$$\begin{aligned}
k \frac{\partial Z_\sigma}{\partial k} = & -\frac{k^6}{4\pi^2} g^2 Z_q^{-2} \frac{N_c N_f}{(k^2 + M_q^2)^3} \\
& + \frac{k^6}{2\pi^2} g^4 Z_q^{-4} \Phi^2 \frac{N_c N_f}{(k^2 + M_q^2)^4} \\
& - \frac{k^6}{32\pi^2} (Z_\sigma - Z_\pi) \left(\frac{12 Z_\pi^{-1}}{(k^2 + M_\pi^2)^3} \left(\frac{\delta M_\pi^2}{\delta \Phi^2} \right) + \frac{1}{\Phi^2} \frac{3 Z_\pi^{-1}}{(k^2 + M_\pi^2)^2} \right) \\
& - \frac{k^6}{8\pi^2} \Phi^2 \left(\left(\frac{\partial M_\sigma^2}{\partial \Phi^2} \right)^2 \frac{1}{(k^2 + M_\sigma^2)^4} + \left(\frac{\delta M_\pi^2}{\delta \Phi^2} \right)^2 \frac{3}{(k^2 + M_\pi^2)^4} \right) .
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Die Flußgleichung der Yukawa-Kopplung erhält ebenfalls zusätzliche Terme, die sich aufgrund der Φ^2 -Abhängigkeit der Yukawa-Kopplung ergeben:

$$\begin{aligned}
k \frac{\partial g}{\partial k} = & \frac{k^6}{16\pi^2} g^3 Z_q^{-2} \left(Z_\sigma^{-1} \frac{2k^2 + M_q^2 + M_\sigma^2}{(k^2 + M_q^2)^2 (k^2 + M_\sigma^2)^2} - 3 Z_\pi^{-1} \frac{2k^2 + M_q^2 + M_\pi^2}{(k^2 + M_q^2)^2 (k^2 + M_\pi^2)^2} \right) \\
& + \frac{k^6}{4\pi^2} Z_q^{-2} Z_\sigma^{-1} \left(g^2 \Phi^2 \left(\frac{\delta g}{\delta \Phi^2} \right) + g \Phi^4 \left(\frac{\delta^2 g}{\delta \Phi^2 \delta \Phi^2} \right) \right) \left(\frac{2k^2 + M_q^2 + M_\sigma^2}{(k^2 + M_q^2)^2 (k^2 + M_\sigma^2)^2} \right) \\
& - \frac{3k^6}{32\pi^2} \left(\frac{\delta g}{\delta \Phi^2} \right) \left(\frac{Z_\sigma^{-1}}{(k^2 + M_\sigma^2)^2} + \frac{Z_\pi^{-1}}{(k^2 + M_\pi^2)^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

In diesen Gleichungen sind wieder alle Massen Funktionen der Skala k und der Felder Φ^2 . Die Flußgleichung für die Yukawa-Kopplung ist analog zur Gleichung für das effektive Potential eine partielle Differentialgleichung, weil $g = g(\Phi^2, k)$ jetzt eine Funktion von k und Φ^2 ist. Die Z -Faktoren hängen nur von der Skala k ab, entsprechend sind die Gleichungen (4.74) und (4.75) am Minimum des effektiven Potentials $\Phi = \Phi_0$ auszuwerten.

Zur numerischen Lösung der partiellen Differentialgleichungen entwickeln wir $U(\Phi^2, k)$ wieder in eine Potenzreihe, wie auf Seite 41 beschrieben (siehe auch Anhang B). Die Yukawa-Kopplung g müssen wir nun ebenfalls als Potenzreihe ansetzen, um die Gleichung (4.76) numerisch zu lösen. Wir wählen als Potenzreihe die erste Ordnung in Φ^2 , bei spontaner Symmetriebrechung:

$$g(\Phi^2, k) = g_1(k) + g_2(k)(\Phi^2 - \Phi_0^2(k)) \tag{4.77}$$

und bei symmetrischem Potential

$$g(\Phi^2, k) = g_1(k) + g_2(k)\Phi^2 \quad . \tag{4.78}$$

Untersuchen wir das Verhalten der Yukawa-Kopplung $g(\Phi^2)$ bei spontaner Symmetriebrechung, wenn das Φ -Feld einen endlichen Erwartungswert annimmt: Wir splitten die Felder in Erwartungswert und Fluktuationen auf

$$\Phi = (\sigma_0 + \tilde{\sigma}, \tilde{\pi}) \quad . \tag{4.79}$$

Setzen wir dies in die Potenzreihen-Entwicklung für $g(\Phi)$ Gl. (4.77) und dann in den Yukawa-Term der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = g(\Phi) \bar{q} (\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5) q \quad (4.80)$$

ein, so erhalten wir die folgende Form

$$\begin{aligned} & (g_1 + g_2 (\vec{\sigma}^2 + \vec{\pi}^2 + 2\sigma_0\vec{\sigma})) \bar{q} (\sigma_0 + \vec{\sigma} + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5) q \\ &= g_1\sigma_0\bar{q}q + g_1\bar{q}i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5q + (g_1 + 2\sigma_0^2g_2) \bar{q}\vec{\sigma}q + \dots \end{aligned} \quad (4.81)$$

Wenn wir jetzt wieder wie in Abschnitt 2.1 die Reskalierung der Felder durchführen, so finden wir für die physikalische Quarkmasse bzw. die Yukawa-Kopplungen

$$M_q = Z_q^{-1} g_1 \sigma_0 \quad (4.82)$$

$$g_\pi = Z_q^{-1} Z_\pi^{-\frac{1}{2}} g_1 \quad (4.83)$$

$$g_\sigma = Z_q^{-1} Z_\sigma^{-\frac{1}{2}} (g_1 + 2\sigma_0^2 g_2) \quad , \quad (4.84)$$

siehe auch Gleichungen (2.14) und (2.17).

Wegen der unterschiedlichen Z-Faktoren Z_σ und Z_π und den höheren Termen in $g(\Phi^2)$ manifestiert sich die chirale Symmetriebrechung also nicht nur im endlichen Erwartungswert des σ -Feldes, sondern auch in unterschiedlichen Yukawa-Kopplungen für das σ -Meson und die Pionen. Im Infrarot-Bereich wird dieser Unterschied sehr wichtig.

Lösen wir die erweiterten Flußgleichungen numerisch mit den Anfangsbedingungen (4.54) so finden wir zunächst, daß die Evolution aller Kopplungen für Skalen $k > 200$ MeV durch die zusätzlichen Korrekturen nur minimal beeinflusst wird. D.h. auch in einer höheren Ordnung der Trunkierung ändert sich der Fluß der Kopplungen kaum, wodurch die Ableitungsentwicklung gerechtfertigt wird.

Betrachten wir jetzt also den Bereich unterhalb von 200 MeV, in die Nähe der Pion-Skala. Unterhalb von $k = 138$ MeV erwarten wir nicht mehr, daß ein Modell im chiralen Limes die Physik korrekt beschreibt. Dennoch ist es legitim zu untersuchen, wie das Modell sich für $k \rightarrow 0$ verhält. Wir führen die folgende Diskussion also allein auf der Grundlage des Modells.

Die Wellenfunktions Renormierung der Mesonen (siehe Abbildung 4.12) spaltet an der Symmetriebrechungs-Skala in zwei unterschiedliche Kopplungen $Z_\sigma(k)$ und $Z_\pi(k)$ auf. Bis zu einer Skala $k = 200$ liegt der Wert von $Z_\sigma(k)$ (helle Linie) leicht unterhalb von $Z_\pi(k)$. Dann schließlich divergiert $Z_\sigma(k)$ gegen unendlich, für $k \rightarrow 0$.

Untersucht man die Flußgleichungen genauer, so findet man, daß der Term

$$k^6 \left(\left(\frac{\partial M_\pi^2}{\partial \Phi^2} \right)^2 \frac{3}{(k^2 + M_\pi^2)^4} \right) \propto \text{Diagramm} \quad (4.85)$$



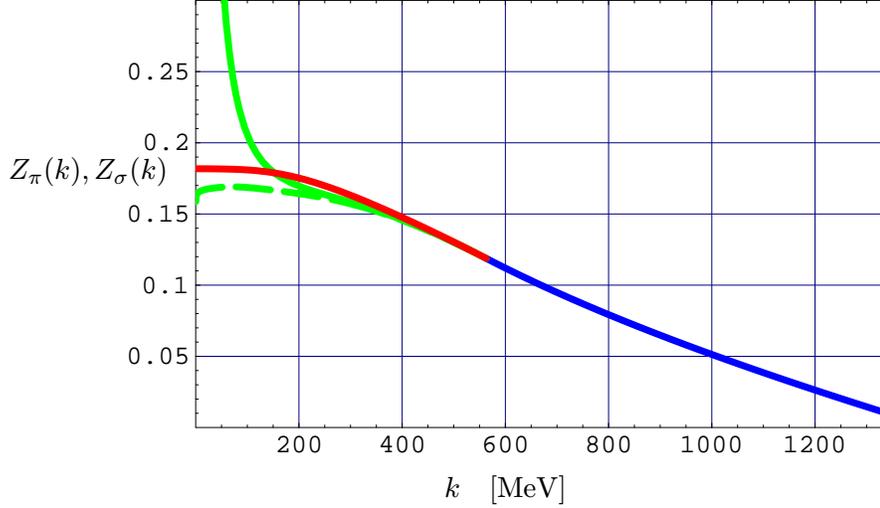


Abbildung 4.12: Die Wellenfunktionsrenormierungs-Konstante $Z_\Phi(k)$ der Meson-Felder. Im Bereich der gebrochenen Symmetrie finden wir eine Aufspaltung zwischen $Z_\sigma(k)$ (helle Kurve) und $Z_\pi(k)$ (dunkle Kurve). Bei symmetrischem Potential sind beide Z-Faktoren identisch. Die gestrichelte Kurve zeigt die Evolution von $Z_\sigma(k)$ mit endlicher Pion-Masse (siehe Text).

in der Flußgleichung von $Z_\sigma(k)$ der divergierende Term ist. Dieser Term entspricht dem Pion-loop, der zur Wellenfunktions-Renormierung von $Z_\sigma(k)$ beiträgt. Da wir uns im chiralen Limes befinden, hat das Pion die Masse Null und der loop wird nicht ausreichend regularisiert.

Setzen wir in den divergierenden Term “von Hand” eine Pion-Masse $m_\pi = 138$ MeV ein, also

$$k^6 \left(\left(\frac{\partial M_\pi^2}{\partial \Phi^2} \right)^2 \frac{3}{(k^2 + M_\pi^2 + m_\pi^2)^4} \right), \quad (4.86)$$

so finden wir, daß Z_σ nicht mehr divergiert, sondern für $k \rightarrow 0$ flach wird (Abbildung 4.12, gestrichelte Linie) Die Aufspaltung von Z_σ und Z_π im Rahmen von Flußgleichungen wurde auch von Bonanno und Zappala untersucht [50]. Sie finden in einem anderen Renormierungsgruppen-Schema eine Aufspaltung, die etwas größer ist. $Z_\sigma(k)$ liegt ebenfalls unterhalb von $Z_\pi(k)$, wie in unserer “von Hand”-Regularisierung. In [50] sind jedoch weder die Flußgleichungen angegeben, noch ist der Bereich für $k \rightarrow 0$ in den Abbildungen dargestellt, so daß ein genauerer Vergleich nicht möglich ist.

Betrachtet man Yukawa-Kopplung (Abbildung 4.13), so findet man, daß im Bereich der gebrochenen Symmetrie $g(k)$ in unterschiedliche Werte $g_\sigma(k)$ und $g_\pi(k)$ aufspaltet, ähnlich zu den Z-Faktoren $Z_\sigma(k)$ und $Z_\pi(k)$. Während die Yukawa-Kopplung für die Pionen wie im Fall ohne Aufspaltung evolviert, verschwindet die Kopplung des σ -Mesons an die Quarks für $k \rightarrow 0$. Dies passiert nicht nur durch das Divergieren von $Z_\sigma(k)$, sondern $g_\sigma^{\text{bare}}(k) = g_1(k) + 2g_2(k)\sigma_0^2(k)$ selbst geht gegen Null, wie in Abbildung 4.14 dargestellt. Um den Wert Null für sehr

kleine Skalen k genau zu erreichen, müßte man in den Flußgleichungen für $g(k)$ noch höhere Ordnungen der Potenzreihe Gl. (4.77) berücksichtigen. Da wir diese höheren Ordnungen trunziert haben, wird $g_{\sigma}^{\text{bare}}(k)$ für $k < 4$ MeV negativ.

Wir stellen also fest, daß das σ -Meson nicht nur durch die Schwellenfunktionen aus Evolution der Kopplungen abschaltet, sondern im Infrarot-Bereich von der gesamten Theorie entkoppelt. Das effektive Infrarot-Modell das wir finden enthält als Freiheitsgrade nur noch Pionen und Konstituentenquarks mit endlicher Masse.

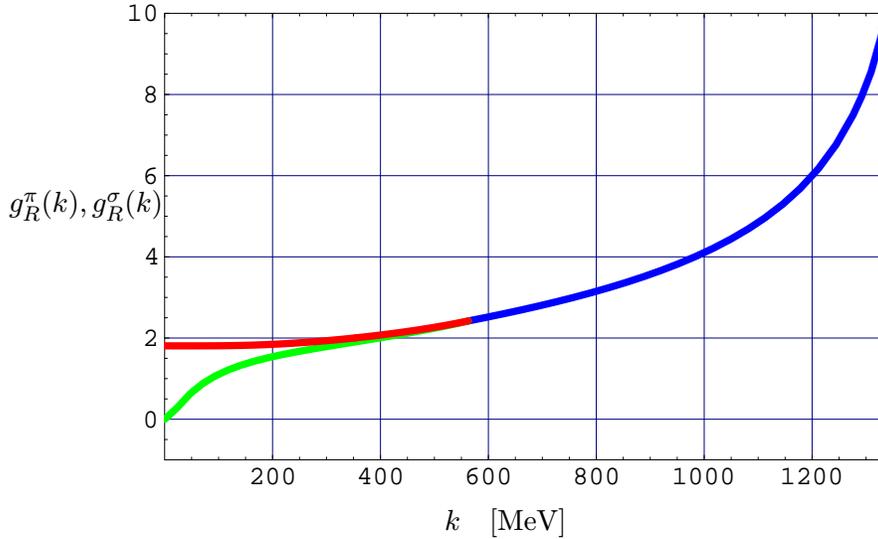


Abbildung 4.13: Die renormierte Yukawa-Kopplung als eine Funktion der Renormierungs-Skala k .

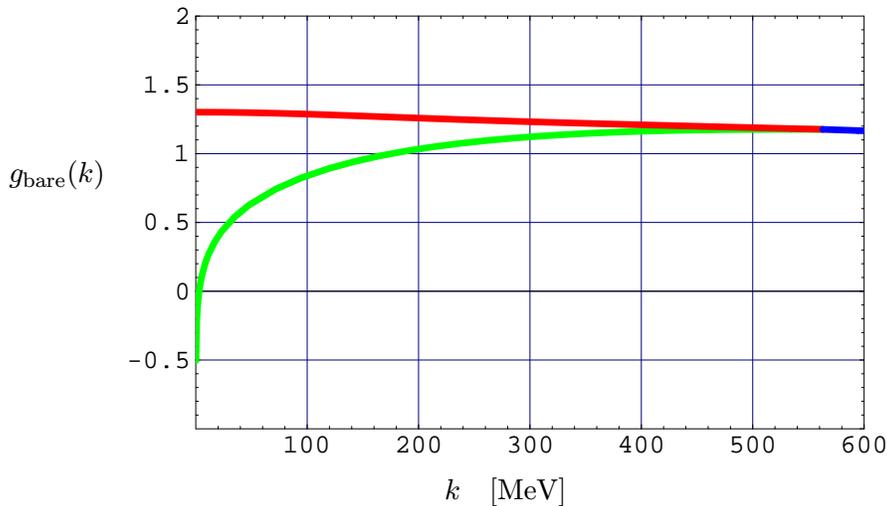


Abbildung 4.14: Die bare Yukawa-Kopplung als eine Funktion der Renormierungs-Skala k .

Da bei $k = 0$ auch die Vier-Meson-Kopplung λ verschwindet, finden wir als effektive Theorie im Infrarot-Bereich die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \bar{q}_R(\not{\partial} + M_q)q_R + \bar{q}_R(i g_\pi^R \vec{\tau} \vec{\pi}_R \gamma_5)q_R + \frac{1}{2}(\partial \vec{\pi}_R)^2 \quad (4.87)$$

$$+ (g_2 \Phi_0 Z_q^{-1} Z_\pi^{-1}) \bar{q}_R q_R \vec{\pi}_R^2 + \dots \quad (4.88)$$

Die Quarkmasse ist durch $M_q = g_\pi Z_q^{-1} \Phi_0$ gegeben. Trotz des Verschwindens der σ -Kopplung an die Quarks, ergibt sich die Niederenergie s-Wellen-Streuung immer noch richtig, der σ -Austausch-Graph wird jetzt durch den $\bar{q}q\pi^2$ -Term ersetzt:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = -2g_2 Z_q^{-1} Z_\pi^{-1} \sigma_0 \quad . \quad (4.89)$$

Wenn wir mit dem Verschwinden der ‘bare’ Yukawa-Kopplung:

$$g_\sigma^{\text{bare}} = g_1 + 2\sigma_0^2 g_2 = 0 \quad (4.90)$$

die Kopplung g_2 durch $-g_1/2\sigma_0^2$ ersetzen so finden wir für die Amplitude der Streuung durch den Kontakt-Term

$$A^{(+)} = -\frac{g_1 Z_q^{-1} Z_\pi^{-1}}{\sigma_0} = -g_\pi^2 \frac{1}{M_q} \quad . \quad (4.91)$$

Dieses Ergebnis ist in führender Ordnung an der Pion-Schwelle identisch mit der Amplitude (2.62). Damit verschwindet die Amplitude der s-Welle-Pion-Streuung bei $k = 0$ aufgrund des Pion-Quark-Kontaktterms. Diese chirale Bedingung wird also auch von der effektiven Niederenergie-Theorie erfüllt.

Kapitel 5

Quark-Meson-Modell bei endlicher Dichte

In diesem Kapitel soll die Methode der Heat-Kernel-Flußgleichungen auf das lineare σ -Modell bei endlicher Dichte angewendet werden. Die starke Wechselwirkung in Anwesenheit von Baryon-Materie unterteilt sich, ähnlich zu den am Anfang des letzten Kapitels diskutierten Skalen-Bereichen, ebenfalls in sehr unterschiedliche Gebiete: Die QCD bei hohen Dichten, in der Quarks und Gluonen die relevanten Freiheitsgrade sind, auf der einen Seite, der Bereich der “klassischen” Kernphysik bei Kern-Dichte, beschrieben durch Nukleonen und Pionen andererseits.

Der Bereich der QCD bei sehr hohen Dichten ist in den letzten Jahren verstärkt in den Blickpunkt der Forschung gerückt. Dies liegt zum einen daran, daß mit den Schwerionen-Experimenten am SIS und AGS hohe Baryon-Dichten in Kern-Stößen erreicht werden. Des weiteren erhält man mit der Beobachtung von Neutronen-Sternen immer mehr zusätzliche Informationen über die Zustandsgleichung der Materie bei extremen Dichten [51].

Auf der theoretischen Seite hat sich mit der Vorhersage der Farbsupraleitung bei hohen Baryon-Dichten ein Bereich der QCD eröffnet, der eine reiche Phasenstruktur und neue Phänomene besitzt und so zusätzliche Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat [7, 13, 14, 52].

Während in der QCD bei endlicher Temperatur die Vorhersagen von Gitter-Rechnungen in zunehmendem Maße einen Referenzpunkt für phänomenologische Beschreibungen bilden, sind im Fall der endlichen Dichte Gittersimulationen bisher nur in einigen sehr speziellen Grenzfällen durchführbar, z.B. $N_c = 2$ [8, 9]. Die Probleme liegen darin, daß die euklidische Wirkung durch Einführen des effektiven Potentials komplex wird und somit die Analogie zum Boltzmann-Faktor der statistischen Physik nicht mehr gegeben ist. Zusätzlich ist bekannt, daß die sogenannten “Quenched”-Simulationen unphysikalische Ergebnisse bei endlicher Dichte liefern [8, 53, 54]. Effektive Modelle sind daher bei endlicher Dichte zurzeit die einzige Möglichkeit Vorhersagen zu treffen.

Verläßt man den Bereich extrem hoher Dichten, so wird unterhalb einer Übergangsdichte $\rho_{\chi\text{SB}}$ die chirale Symmetrie spontan gebrochen und man findet wieder eine Phase von Konstituenten-Quarks. Wir wollen in dem ersten Teil dieses Kapitels den Übergangsbereich bei endlicher Dichte im Rahmen des Quark-Meson-Modells untersuchen. Wir betrachten also reine Quark-Materie, die über Meson-Austausch wechselwirkt. Wie zuvor vernachlässigen wir die Farbschließung. Der Inhalt der Abschnitte 5.1 - 5.3 ist in [23, 24] veröffentlicht. Diese Arbeit schließt sich an die Untersuchungen des linearen σ -Modells im Heat-Kernel-Formalismus bei endlicher Temperatur an [22].

Die "klassische" Kernphysik schließlich findet bei normaler Kerndichte statt. Dieser Bereich ist experimentell bereits seit langer Zeit zugänglich und es wurde in den 70er und 80er Jahren beträchtliche Arbeit darauf verwendet die Zustandsgleichung der Kernmaterie aus den phänomenologischen Nukleon-Nukleon-Potentialen abzuleiten [28, 55]. Wir werden im Abschnitt 5.4 ein kombiniertes Quark-Nukleon-Modell vorstellen, daß diesen Bereich mit dem Quark-Meson-Modell verbindet. Dieses Modell ist in [25] veröffentlicht. Es wurde in [56] zusätzlich auf die quasielastische Elektron-Streuung angewendet.

5.1 Evolutionsgleichung bei endlicher Dichte

Wir wollen jetzt die Flußgleichung für das effektive Potential bei endlicher Dichte berechnen. Die Skalen-Verhältnisse sind die gleichen wie im vorigen Kapitel: Wir beginnen die Evolution des Quark-Meson-Modells an der Ultraviolett-Skala k_{uv} , für die wir $k_{\text{uv}} = 1.2 \text{ GeV}$ wählen, wie bei den Berechnungen zur endlichen Temperatur [22]. Beim Ausintegrieren der hohen Impulse finden wir wieder eine Skala $k_{\chi\text{SB}}$ an der das System in den spontan gebrochenen Bereich der Theorie übergeht.

Für niedrige Impulse k kommt diesmal jedoch eine zusätzliche Skala $k = k_F$ ins Spiel. Der Fermi-Impuls k_F hängt von der Anzahl der Fermionen im System, also der Quark-Dichte ρ ab, bei der wir die Evolution durchführen. Bei Skalen unterhalb von k_F erwarten wir, daß die Quark-Fluktuationen durch die Pauli-Abstoßung des Fermi-Sees maßgeblich beeinflußt werden.

Obwohl wir später die Ergebnisse nur bei endlicher Dichte analysieren werden, wollen wir zunächst in der Herleitung endliche Dichte *und* endliche Temperatur berücksichtigen, um dann den Grenzfall $T \rightarrow 0$ zu betrachten. Wir beginnen die Herleitung mit der gemittelten effektiven Wirkung und berücksichtigen im folgenden nur die Skalenabhängigkeit des effektiven Potentials $U(\Phi^2, k)$. Sowohl die Yukawa-Kopplung g wie auch die Wellenfunktions-Renormierungskonstanten betrachten wir als konstant, wir setzen also die Z-Faktoren $Z_q = Z_\Phi = 1$:

$$\Gamma_k = \int d^4x \left\{ U(\Phi^2, k) + g \bar{q} M q + \bar{q} \not{\partial} q + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 \right\} . \quad (5.1)$$

Für die Yukawa Kopplung wählen wir $g = 3.23$, so daß sich bei einer Pion-Zerfallskonstanten $F_\pi = 93 \text{ MeV}$ eine Quark-Masse von 300 MeV ergibt. Durch

die einfache Form der Trunkierung (5.1) können wir die inversen Propagatoren leicht berechnen:

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \bar{q} \delta q} = -\not{\partial} + gM \quad (5.2)$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \Phi^i \delta \Phi^j} = -\partial^2 \delta^{ij} + (U''(\Phi^2, k))^{ij} \quad . \quad (5.3)$$

Diese Propagatoren setzen wir in die Heat-Kernel-Flußgleichungen (4.26) ein, werten die Funktionalspur mit ebenen Wellen aus und führen die Ableitungsentwicklung durch. Weil wir nur die Terme nullter Ordnung berücksichtigen und auch die Korrekturen zur Yukawa-Kopplung vernachlässigen, fallen die Kopplungsterme in der Boson-Determinante (vgl. Gl. 4.26) sowie alle Ableitungsterme weg. Die Gleichung für die effektive Wirkung vereinfacht sich also beträchtlich:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} = & + \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d\tau}{\tau} \operatorname{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-\tau(q^2 + g^2 \Phi^2)} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \\ & - \frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d\tau}{\tau} \operatorname{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-\tau(q^2 + (U'')^{ij})} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \quad . \end{aligned} \quad (5.4)$$

In der nullten Ordnung der Ableitungsentwicklung ist die effektive Wirkung einfach das Integral über das effektive Potential:

$$\Gamma_k[\Phi] = \int d^4x \{ \Omega(\Phi^2) \} \quad (5.5)$$

$$= \int d^4x \{ \Omega^B(\Phi^2) + \Omega^F(\Phi^2) \} \quad (5.6)$$

Wir schreiben für das effektive Potential bei endlicher Temperatur und Dichte $\Omega(\Phi^2)$, um Verwechslungen mit dem Spezialfall $\mu = 0$ und $T = 0$ der vorigen Kapitel auszuschließen. Ω wird im folgenden eine Funktion von Φ , T und μ sein, es ist also das Analogon zum großkanonischen Potential. Ω^B bezeichnet den Beitrag zum effektiven Potential aus der Meson-Determinante, Ω^F entsprechend den fermionischen Teil.

In Gleichung (5.4) haben wir das Integral über den Impuls q_μ noch nicht ausgeführt, weil wir jetzt mit Hilfe des Matsubara-Formalismus die Temperatur T und das chemische Potential μ durch die Ersetzung:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-\tau q^2} \longrightarrow \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-\tau[(\nu_n + i\mu)^2 + \bar{q}^2]} \quad \text{für Fermionen} \quad (5.7)$$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-\tau q^2} \longrightarrow \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-\tau(\omega_n^2 + \bar{q}^2)} \quad \text{für Bosonen,} \quad (5.8)$$

einführen. Die Matsubara-Frequenzen für Fermionen und Bosonen ν_n und ω_n sind:

$$\nu_n = (2n + 1)\pi T \quad (5.9)$$

$$\omega_n = 2n\pi T \quad . \quad (5.10)$$

Alternativ zu dieser Ersetzung kann man das chemische Potential direkt in die Lagragedichte schreiben, indem man einen Term

$$\mathcal{L}_\mu = \mu q^\dagger q = \mu \bar{q} \gamma_0 q \quad (5.11)$$

addiert. Das chemische Potential μ wird als Koeffizient des Teilchenzahl-Operators $q^\dagger q$ genau wie in der statistischen Physik eingeführt [57]. Wegen der γ_0 -Matrix im letzten Teil dieser Gleichung tritt im Exponent der Gleichung (5.7) das chemische Potential nur in der nullten Komponente des Impulses auf.

Den fermionischen Anteil des effektiven Potentials generalisiert auf endliche Dichte und Temperatur erhalten wir also, indem wir die Ersetzung (5.7,5.8) in Gleichung (5.4) durchführen:

$$k \frac{\partial \Omega_k^F}{\partial k} = \frac{T}{2} 4N_c N_f \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-\tau[(\nu_n + i\mu)^2 + \vec{q}^2 + g^2 \Phi^2]} k \frac{\partial f_k}{\partial k} \quad , \quad (5.12)$$

der bosonische Teil ergibt sich entsprechend:

$$k \frac{\partial \Omega_k^B}{\partial k} = -\frac{T}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-\tau(\omega_n^2 + \vec{q}^2)} \left[3e^{-\tau 2\Omega'} + e^{-\tau(2\Omega' + 4\Omega'' \Phi^2)} \right] k \frac{\partial f_k}{\partial k} \quad , \quad (5.13)$$

die Spuren über die inneren Dimensionen haben wir dabei bereits ausgeführt.

In den Exponenten der Gleichungen (5.12) und (5.13) stehen die feldabhängige Quark-Masse

$$M_q^2(\Phi^2) = g^2 \Phi^2 \quad , \quad (5.14)$$

bzw. die Eigenwerte der Massen-Matrix der Mesonen (vgl. Gl. 4.16):

$$M_\sigma^2(\Phi^2) = 2\Omega' + 4\Omega'' \Phi^2 \quad (5.15)$$

$$M_\pi^2(\Phi^2) = 2\Omega' \quad , \quad (5.16)$$

wobei die Ableitungen Ω' als Ableitung des effektiven Potentials Ω nach Φ^2 definiert ist.

Wegen der einfachen Form des Heat-Kernel-cutoffs kann man die Eigenzeit-Integrale und Summen in den Flußgleichungen (5.12) und (5.13) auch bei endlicher Temperatur und Dichte analytisch berechnen. Diese Rechnung ist etwas technisch und wird daher im Anhang D.1 ausgeführt. Als Ergebnis erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_k^F}{\partial k^2} &= -\frac{N_c N_f}{32\pi^2} k^4 \int_0^\infty dq \left[\frac{1}{E_{q,k}^3} (1 - n(E_{q,k}) - \bar{n}(E_{q,k})) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{TE_{q,k}^2} \{n(E_{q,k})(1 - n(E_{q,k})) + \bar{n}(E_{q,k})(1 - \bar{n}(E_{q,k}))\} \right] \quad , \end{aligned} \quad (5.17)$$

wobei $E_{q,k} = \sqrt{q^2 + k^2 + g^2\Phi^2}$. Die Funktionen $n(x)$ und $\bar{n}(x)$ sind die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktionen für Teilchen und Anti-Teilchen, sie sind ebenfalls im Anhang angegeben. In dieser Gleichung zeigen die Verteilungsfunktionen explizit, wie die $T = 0$ und $\rho_B = 0$ Flußgleichungen bei endlicher Temperatur und Dichte modifiziert wird: Die rechte Seite der Vakuum-Flußgleichungen wird vermindert durch 1. die Pauli Abstoßung, der erste Term in der Klammer, und 2. die thermisch angeregten Zustände, die durch die Fermi-Funktionen im zweiten Term beschrieben werden.

Die Gleichung (5.17) ist generell für $T \neq 0$ und $\rho_B \neq 0$ gültig. Den Grenzfall $T = 0$ dieser Gleichung erhalten wir am einfachsten, indem wir in Gleichung (D.13) aus dem Anhang die Fermi-Funktionen durch Theta-Funktionen ersetzen: $n(E_{q,k}) \rightarrow \theta(\mu - E_{q,k})$ für Quarks und $\bar{n}(E_{q,k}) \rightarrow \theta(-(\mu + E_{q,k})) = 0$ für Anti-Quarks. Dann führen wir die Differentiation nach k^2 durch und finden:

$$k \frac{\partial \Omega_k^F}{\partial k} \Big|_{\mu} = -\frac{N_c N_f}{8\pi^2} \frac{k^6}{k^2 + g^2\Phi^2} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - k^2 - g^2\Phi^2}} \Theta(\mu - \sqrt{k^2 + g^2\Phi^2}) \right] , \quad (5.18)$$

Hier sehen wir nun, wie die Evolutionsgleichung bei endlicher Dichte und $T = 0$ nur noch durch die Pauli-Abstoßung der Fermionen beeinflusst wird, die sich in dem Term mit der Θ -Funktion manifestiert. Wir betonen, daß die einfache, anschauliche Form dieser Gleichung durch die Verwendung des Heat-Kernel-Formalismus zustande kommt und einen Vorteil dieser Methode darstellt. Den Nenner $\sqrt{\mu^2 - k^2 - g^2\Phi^2}$ erhält man durch die zusätzlichen τ -Potenzen, mit denen der Heat-Kernel-cutoff Gl. (3.44) den Ultraviolett-Bereich regularisiert.

Wenn wir annehmen die Quarkmasse sei eine Konstante

$$M_q^2 = M_q^2(\Phi^2) \Big|_{\Phi=\Phi_0} = g^2\Phi_0^2 , \quad (5.19)$$

so können wir die Gleichung (5.18) direkt integrieren und erhalten so die Verbindung zur Mittelfeld-Rechnung, die wir im nächsten Abschnitt behandeln. Diese Integration ist explizit im Anhang D.2 durchgeführt. Im allgemeinen ist das Minimum des effektiven Potentials $\Phi_0 = \Phi_0(k)$ und damit auch die Quark-Masse eine Funktion der Renormierungsgruppen-Skala, wie wir es auch schon in den letzten Kapiteln gesehen haben. Folglich müssen wir die Gleichung (5.18) zusammen mit den Meson-Fluktuationen numerisch lösen.

Den bosonischen Anteil der Flußgleichungen für $T \neq 0$ leiten wir analog zur Berechnung des Fermion-Anteils ausgehend von Gleichung (5.13) her. Die Rechnung ist ebenfalls im Anhang D.1 aufgeführt. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_k^B}{\partial k^2} &= \frac{k^4}{64\pi^2} \left[\frac{3}{k^2 + 2\Omega'} + \frac{1}{k^2 + 2\Omega' + 4\Omega''\Phi^2} \right] \\ &+ 6 \int_0^\infty dq \left\{ \frac{1}{(E_{q,k}^\pi)^3} n_B(E_{q,k}^\pi) + \frac{1}{T(E_{q,k}^\pi)^2} n_B(E_{q,k}^\pi) (1 + n_B(E_{q,k}^\pi)) \right\} \\ &+ 2 \int_0^\infty dq \left\{ \frac{1}{(E_{q,k}^\sigma)^3} n_B(E_{q,k}^\sigma) + \frac{1}{T(E_{q,k}^\sigma)^2} n_B(E_{q,k}^\sigma) (1 + n_B(E_{q,k}^\sigma)) \right\} , \end{aligned} \quad (5.20)$$

wobei $n_B(x)$ die Bose-Einstein-Verteilung ist, und $E_{q,k}^\pi$ und $E_{q,k}^\sigma$ durch

$$E_{q,k}^\pi = \sqrt{q^2 + k^2 + 2\Omega'} \quad (5.21)$$

$$E_{q,k}^\sigma = \sqrt{q^2 + k^2 + 2\Omega' + 4\Omega'\Phi^2} \quad (5.22)$$

gegeben sind. Für die Bosonen gibt es natürlich keine Pauli-Abstoßung und entsprechend enthalten die geschweiften Klammern die thermischen Anregungen der Pionen und des σ -Mesons. Im Limes $T \rightarrow 0$ verschwinden die Bose-Verteilungen und die beiden letzten Zeilen dieser Gleichung fallen weg (vgl. D.17). Wir erhalten zusammen mit dem Fermion-Anteil Gl. (5.18) schließlich die Flußgleichung:

$$k \frac{\partial \Omega_k}{\partial k} \Big|_\mu = \frac{k^6}{32\pi^2} \left\{ \frac{3}{k^2 + 2\Omega'_k} + \frac{1}{k^2 + 2\Omega'_k + 4\Omega'_k \Phi^2} - \frac{4N_c N_f}{k^2 + g^2 \Phi^2} \left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - k^2 - g^2 \Phi^2}} \Theta(\mu - \sqrt{k^2 + g^2 \Phi^2}) \right) \right\}. \quad (5.23)$$

Diese Gleichung beschreibt die Evolution des skalenabhängigen effektiven Potentials in Anwesenheit eines endlichen chemischen Potentials μ . Sie stellt die Erweiterung der Flußgleichung (4.31) aus Kapitel 4 dar. An dieser Stelle können wir bereits feststellen, daß der zusätzliche Dichte-Term ein entgegengesetztes Vorzeichen zu den Vakuum-Fermion-Fluktuationen hat. Dieser treibt, wie wir im letzten Kapitel gesehen hatten das System in den Bereich spontan gebrochener Symmetrie. Eine endliche Dichte wird der spontanen Symmetriebrechung also entgegenwirken.

Um den Grundzustand des Systems bei endlichem μ zu finden ist die Gleichung (5.23) numerisch zu lösen. Allerdings wird die numerische Auswertung durch die Theta-Funktion schwierig: Insbesondere Ableitungen des effektive Potentials, die man beispielsweise zur Ermittlung der Meson-Massen $M_\pi(\Phi^2)$ und $M_\sigma(\Phi^2)$ in jedem Integrationsschritt berechnen muß, oder aber die Dichte im Grundzustand

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -\rho \quad (5.24)$$

enthalten dann δ -Funktionen. Außerdem ist der Koeffizient der Θ -Funktion an der Sprungstelle singularär. Diese Singularität kommt –wie bereits oben erwähnt– durch die zusätzlichen τ -Potenzen in Heat-Kernel-cutoff Gl. (3.44) zustande. Diese sind nötig um den Ultraviolett-Bereich der effektiven Wirkung zu regularisieren. Nun ist der Fermi-See natürlich nicht ultraviolett divergent, sondern durch den Fermi-Impuls k_F begrenzt. Man könnte hier also alternativ den Fermi-See mit einem zweiten, beispielsweise rein massenartigen cutoff behandeln und würde so die Singularität umgehen.

Wir werden hier das Problem jedoch auf einem anderen Weg angehen und die Gleichung (5.23) in eine Gleichung mit skalenabhängigem chemischen Potential umformen. Das chemische Potential $\mu = \mu(\Phi, k)$ wird eine Funktion von Φ und

k , wie es auch von Shankar vorgeschlagen wurde [58]. Damit spielt es die gleiche Rolle wie alle anderen Kopplungen in der Ableitungsentwicklung: Es wird durch den Renormierungsfluß ein skalen- und feldabhängiger Koeffizient des Operators $\bar{q}\gamma_0 q$ in der effektiven Wirkung (vgl. Gleichung 5.11). Wir werden sehen, daß durch diese Transformation das Problem mit der Θ -Funktion im Fermion-Teil der Flußgleichung behoben wird.

Die Methode läßt sich am leichtesten ausgehend von $k = 0$ erklären: Wie wir bereits zu Beginn dieses Abschnittes angedeutet haben ist $\Omega(k, \Phi^2, \mu)$ das Analogon zum Großkanonischen Potential. Wählen wir die Dichte ρ statt des chemischen Potentials als unabhängigen Parameter, so müssen wir eine Legendetransformation durchführen:

$$F(k=0, \Phi^2) = \Omega(k=0, \Phi^2) + \rho\mu(k=0, \Phi^2) \quad (5.25)$$

Das Potential $F = F(k, \Phi^2, \rho)$ ist eine Funktion der Baryonen-Dichte ρ und entspricht somit der Freien Energie. Das chemische Potential $\mu(k)$ muß dann in Gleichung (5.25) durch die Bestimmungsgleichung für $\mu(k)$ eliminiert werden:

$$\frac{\partial\Omega(k=0)}{\partial\mu(k=0)} = -\rho. \quad (5.26)$$

Wir verallgemeinern jetzt diesen Zusammenhang auf eine endliche Skala k und betrachten zunächst die Bestimmungsgleichung mit dem Ziel eine explizite Gleichung für $\mu(k)$ bei vorgegebenem ρ zu finden. Wir führen also einen Integrations-schritt in der k -Evolution aus und adjustieren $\mu(k)$ in der Art und Weise, daß die Dichte konstant bleibt:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mu(k)} = -\rho = \text{const} \quad . \quad (5.27)$$

Die gleiche Prozedur wiederholen wir für jeden weiteren Schritt in der k -Evolution. Wir können die linke Seite der Gleichung (5.27) explizit ausrechnen, indem wir die Gleichung für das effektive Potential der Fermionen einsetzen (vgl. Gleichung 5.12)

$$\Omega_k^F = \frac{T}{2} 4N_c N_f \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-\tau[(\nu_n + i\mu)^2 + q^2 + g^2\Phi^2]} f_k \quad , \quad (5.28)$$

und den Heat-Kernel-cutoff Gleichung (3.44) benutzen. Als Ergebnis erhalten wir die gesuchte Gleichung, die $\mu(k)$ festlegt:

$$\rho = \frac{2N_c}{3\pi^2} \left(x_F^3 + \frac{3}{2} k^2 x_F + \frac{3}{8} \frac{k^4}{x_F} \right), \quad (5.29)$$

mit

$$x_F = \sqrt{\mu^2 - k^2 - g^2\Phi^2}. \quad (5.30)$$

Die drei Terme in Gleichung (5.29) kommen dabei durch die Form des Heat-Kernel-cutoffs zustande. Eine Analyse der Lösungen $\mu(x_F)$ von Gleichung (5.29)

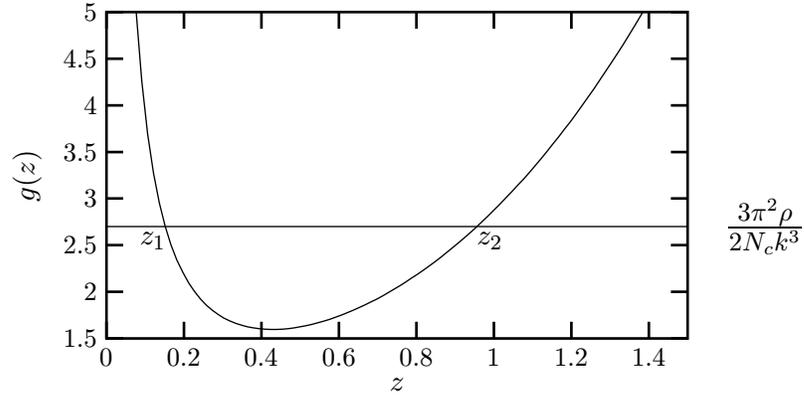


Abbildung 5.1: Die Funktion $g(z)$ mit $z = x_F/k$. Die Schnittpunkte mit der Geraden sind die Lösungen zur Gl. (5.32) bei vorgegebener Dichte ρ .

zeigt, daß bei $k = 0$ eine eindeutige Lösung $\mu = \sqrt{g^2\Phi^2 + k_F^2}$ existiert. Der Fermi-Impuls k_F ist wie üblich durch $\rho = 2N_c k_F^3/3\pi^2$ definiert.

Um den Zusammenhang zwischen ρ und x für endliche Skalen $k \neq 0$ zu diskutieren schreiben wir Gleichung (5.29) als Funktion von $z = x_F/k$ und finden

$$\rho = \frac{2N_c}{3\pi^2} k^3 \cdot g(z), \quad (5.31)$$

mit

$$g(z) = z^3 + \frac{3}{2}z + \frac{3}{8}. \quad (5.32)$$

Die Funktion $g(z)$ ist in Abbildung 5.1 dargestellt, sie hat das Minimum

$$g_{\min} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{\sqrt{3} - 1}} \quad (5.33)$$

an der Stelle $z = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3} - 1} \equiv z_m$. Bei endlichem k schneidet die Linie konstanter Dichte $\frac{3\pi^2\rho}{2N_c k^3}$ die Funktion (5.32) im allgemeinen in zwei Punkten z_1 und z_2 . Damit die Lösungen reell sind muß gelten:

$$k \leq \left(\frac{3\pi^2\rho}{N_c} \frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1} \right)^{1/3} \equiv k_{\text{th}}. \quad (5.34)$$

An der Stelle $k = k_{\text{th}}$ liegt die Linie konstanter Dichte $\frac{3\pi^2\rho}{2N_c k^3}$ gerade tangential an $g(z)$ im Punkt $z = z_m$. Entsprechend den zwei Lösungen z_1 und z_2 hat bei endlichem k auch das chemischen Potential bei fester Dichte zwei Werte

$$\mu_i(k) = \sqrt{k^2 z_i(k)^2 + k^2 + g^2\Phi^2} \quad (i = 1, 2), \quad (5.35)$$

die wir verstehen werden, wenn die Flußgleichungen aufgestellt sind. Um das also zu tun benötigen wir noch die Ableitungen $\partial\mu_i/\partial k$, die berechnet werden, indem man verlangt, daß die Baryon-Dichte unabhängig von der Evolution

gleich bleibt. Also ist die Ableitung der linken Seite von Gleichung (5.29) nach der Skala k Null und wir erhalten:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial k} = -\frac{1}{\mu_i} \frac{k}{8z_i^4 + 4z_i^2 - 1}. \quad (5.36)$$

Damit können wir jetzt durch Anwenden der Kettenregel die k -Ableitung von Ω für ein skalenabhängiges chemisches Potential berechnen:

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{\mu(k)} = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{\mu=\text{const.}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \mu(k)}{\partial k} \quad (5.37)$$

$$= \left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{\mu=\text{const.}} - \rho \frac{\partial \mu(k)}{\partial k}. \quad (5.38)$$

Es bleibt also noch das chemische Potential auf der rechten Seite dieser Gleichung durch die Dichte ρ auszudrücken. Wir eliminieren μ , indem wir eine δ -Funktion einführen:

$$1 = \int df \delta[f(z)] \quad , \quad (5.39)$$

deren Argument die Bestimmungsgleichung (5.29) enthält:

$$f(z) = \frac{2N_c}{3\pi^2} k^3 g(z) - \rho \quad . \quad (5.40)$$

Auf diese Weise fixieren wir in jedem Integrationsschritt die Dichte ρ . Setzen wir dies nun in Gleichung (5.37) ein, so erhalten wir die Evolutionsgleichung mit skalenabhängigem chemischem Potential. Sie hat zwei Beiträge, die die endliche Dichte enthalten $i = 1, 2$, entsprechend den zwei Nullstellen der Gleichung (5.32).

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{\mu(k)} &= \int df \delta[f(z)] \left[\left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{\mu=\text{const.}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \frac{\partial \mu(k)}{\partial k} \right] \quad (5.41) \\ &= \sum_{i=1,2} \int \frac{\partial f}{\partial z} dz \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^{-1} \delta(z - z_i) \left[\left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{\mu=\text{const.}} - \rho \frac{\partial \mu(k)}{\partial k} \right]. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile diese Gleichung erhält man die Jacobi-Determinante $\partial f / \partial z$ einmal aus der Transformation der Integrationsvariablen und ein zweites mal aus der δ -Funktion. Dabei ist zu beachten, daß an den beiden Nullstellen z_1 und z_2 der Funktion $f(z)$ die Jacobi-Determinanten ein unterschiedliches Vorzeichen haben (vergleiche Abbildung 5.1). So kürzen sich zwar die Beträge der Jacobi-Determinanten, ein Vorzeichen bleibt jedoch übrig. Wir finden die endgültige Flußgleichung:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial k} \right|_{\mu(k)} &= \frac{k^5}{32\pi^2} \left\{ \frac{3}{k^2 + 2\Omega'} + \frac{1}{k^2 + 2\Omega' + 4\Omega''\Phi^2} - \frac{8N_c}{k^2 + g^2\Phi^2} \right\} \quad (5.42) \\ &+ \sum_{i=1,2} (-1)^i \left\{ \frac{N_c}{4\pi^2} \frac{k^4}{k^2 + g^2\Phi^2} \frac{\mu_i}{z_i} + \frac{\rho}{\mu_i} \frac{k}{8z_i^4 + 4z_i^2 - 1} \right\} \Theta(k_{\text{th}} - k). \end{aligned}$$

Die Theta-Funktion erscheint in der zweiten Zeile, weil die Gleichung (5.40) für $k > k_{\text{th}}$ keine reelle Nullstelle hat und somit oberhalb von k_{th} der Endliche-Dichte-Beitrag zu den Flußgleichungen aufgrund der δ -Funktion verschwindet. An der Skala $k = k_{\text{th}}$, ist der Term $1/(8z_i^4 + 4z_i^2 - 1)$ singulär, er läßt sich jedoch analytisch integrieren.

Die Gleichung (5.42) ist die Evolutions-Gleichung mit laufendem chemischen Potential $\mu(k)$ für die Energiedichte des thermodynamischen Potentials. Der Ordnungsparameter Φ_0 bei festgehaltener Dichte ρ wird jedoch durch die Freie Energie(-Dichte) F bestimmt. Wir erinnern uns, daß bei $k = 0$ die Bestimmungsgleichung (5.29) für das chemische Potential nur eine Lösung hat und wir können F an der Stelle $k = 0$ aus dem großkanonischen Potential $\Omega(k = 0)$ und dem chemischen Potential $\mu(k = 0)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} F(k=0, \Phi^2) &= \Omega(k=0, \Phi^2) + \rho\mu(k=0, \Phi^2) \\ \mu(k=0, \Phi^2) &= \sqrt{k_F^2 + g^2\Phi^2} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Wir erhalten somit den Grundzustand Φ_0 des Systems bei endlicher Dichte als Minimum der freien Energiedichte $F(k=0, \Phi^2)$.

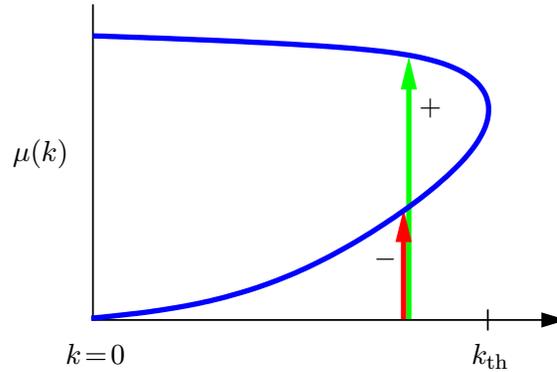


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der Funktion $\mu(k)$.

Die Funktionsweise der Endlichen-Dichte-Terme in Gleichung (5.42) ist in der Abbildung 5.2 schematisch dargestellt: Bei hohen Skalen $k > k_{\text{th}}$ hat die endliche Dichte keinen Einfluß auf die Renormierung des effektiven Potentials. Dieser setzt an der Schwelle $k = k_{\text{th}}$ ein, wo sich jedoch die beiden Beiträge $i = 1, 2$

$$\sum_{i=1,2} (-1)^i \left\{ \frac{N_c}{4\pi^2} \frac{k^4}{k^2 + g^2\Phi^2} \frac{\mu_i}{z_i} + \frac{\rho}{\mu_i} \frac{k}{8z_i^4 + 4z_i^2 - 1} \right\} \quad (5.44)$$

noch gegeneinander wegheben. Unterhalb von $k = k_{\text{th}}$ nimmt der Beitrag $i = 2$ mit positivem Vorzeichen zu, während der zu subtrahierende Beitrag $i = 1$ kleiner wird. Dies ist in Abbildung 5.2 durch die Pfeile angedeutet. Im Grenzfall $k \rightarrow 0$ verschwindet der Beitrag $i = 1$ und $\mu(k)$ hat nur eine Lösung

$$\mu(k=0, \Phi^2) = \sqrt{k_F^2 + g^2\Phi^2} \quad .$$

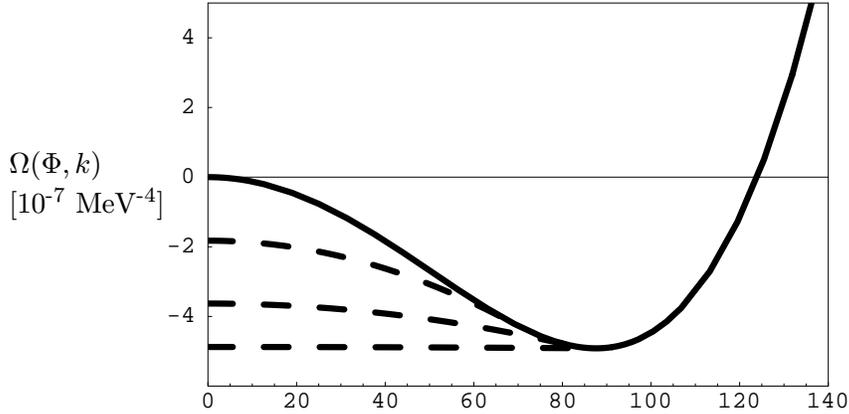


Abbildung 5.3: Die Evolution des effektiven Potentials für kleine Skalen k . Dargestellt sind ein Beispiel-Potential (durchgezogene Linie) und die Lösungen der klassischen Wirkung für $k = 100, 60, 10$ MeV im instabilen Bereich (gestrichelte Linien). Diese dargestellten Lösungen ergeben sich mit einem scharfen cutoff. [61]. Im Grenzfall $k \rightarrow 0$ wird das effektive Potential konvex.

Wir integrieren die Beiträge endlicher Dichte also schrittweise in Schalen aus, bis wir bei $k = 0$ den vollen Fermisee berücksichtigt haben.

Instabilitäten Wenn wir die Flußgleichung (5.42) numerisch lösen, so stellen wir fest, daß die Meson-Terme für kleine Feldstärken Φ und Skalen k Singularitäten entwickeln. Dadurch werden die Flußgleichungen in diesem Bereich instabil. Das Problem ist in der Literatur bereits lange bekannt: das mesonische effektive Potential in ein-loop Näherung entwickelt tachionische Meson-Massen [59, 60].

In diesem Bereich kleiner Feldstärken und kleiner Skalen k sind zwei Effekte wichtig, die die Form des effektiven Potentials beeinflussen: Einerseits garantiert der Renormierungsgruppen-Fluß die Konvexität des effektiven Potentials im Infrarot-Bereich $k = 0$. Dabei treten jedoch prinzipiell, bereits im Fall $T = 0, \mu = 0$ Instabilitäten in der Evolution auf: Die Massen $M_\pi(\Phi)$ und $M_\sigma(\Phi)$ sind im Bereich kleiner Feldstärken, in dem das Potential rechtsgekrümmt ist, negativ (vgl. Abbildung 5.3). D.h. bei kleinen Skalen k wird beispielsweise der Pion-Term singulär

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k} \sim \frac{1}{k^2 + 2\Omega'} \quad . \quad (5.45)$$

Der Grund dafür ist, daß im Bereich $\Phi < \Phi_c$, in dem

$$k^2 + 2\Omega'(\Phi^2) \leq 0 \quad (5.46)$$

gilt, der Gaußsche-Fixpunkt nicht länger stabil ist [61, 62]. Genau dadurch wird das effektive Potential konvex. Wir können diesen Prozeß verstehen, durch die

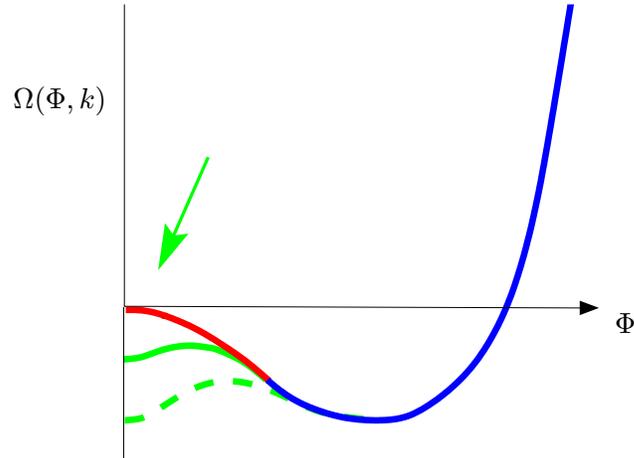


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung des Einflusses endlicher Dichte auf das effektive Potential.

Annahme, daß sich das System in diesem Bereich klassisch verhält. Man findet dann im Fall von Flußgleichungen mit scharfem cutoff als Lösung der klassischen Wirkung für den Bereich $\Phi < \Phi_c$ [20, 61]:

$$\Omega(\Phi^2, k) = -\frac{1}{2}k^2\Phi^2 + \text{const.} \quad (5.47)$$

In der Abbildung 5.3 sind diese klassischen Lösungen des instabilen Bereichs für ein Beispielpotential mit $m=160$ MeV, $\lambda=20$ dargestellt. Die gestrichelten Linien zeigen wie das effektive Potential für $k \rightarrow 0$ konvex wird [61].

Benutzt man einen weichen cutoff so zeigt das effektive Potential qualitativ das gleiche Verhalten wie in Abbildung 5.3, die Lösung im instabilen Bereich Gl. (5.47) wird jedoch aufgrund des cutoffs komplizierter. In einer Gitter-Rechnung mit weichem cutoff kann das flache, konvexe Potential jedoch erzeugt werden, ohne daß die Instabilitäten auftreten. Dies passiert, wenn das Potential sehr schnell flach wird. Die Meson-Massen $2\Omega'$ werden dann zwar auch negativ für kleine Φ , ihr Betrag bleibt jedoch immer kleiner als k^2 . Dieses Verhalten hängt natürlich stark von den Konvergenz-Eigenschaften des cutoffs ab. Lösen wir unsere Flußgleichungen (5.42) numerisch bei verschwindender Dichte $\rho=0$, so finden wir die Instabilitäten erst bei sehr kleinen Skalen $k < 50$ MeV. Die Konvexität des effektiven Potentials wird also durch die numerische Lösung der Gleichung (5.42) fast vollständig reproduziert.

Damit kommen wir zum zweiten Effekt, der für den Bereich kleiner Felder Φ wichtig ist. Aus Gleichung (5.23) ist ersichtlich, daß die Beiträge endlicher Dichte in der k -Evolution zuerst an der Stelle $\Phi=0$ auftreten und dort zu einer Absenkung des effektiven Potentials führen. Die Situation ist schematisch in Abbildung 5.4 dargestellt.

Durch die Absenkung des effektiven Potentials wird jedoch die Krümmung des Potentials größer, d.h. die negativen Meson-Massen im Bereich zwischen den

beiden Minima des effektiven Potentials werden vom Betrag her größer und damit treten die Instabilitäten wesentlich früher in der k -Evolution auf. Bei normaler Kerndichte finden wir instabiles Verhalten der Meson-Terme bereits für $k < k_{\text{inst.}} \approx 200$ MeV.

Eine exakte Lösung dieses Problems lassen wir offen. Aufgrund der Tatsache, daß man den Heat-Kernel-cutoff nicht direkt in die Wirkung einsetzen kann, ist es schwierig eine Vorschrift für den instabilen Bereich $\Phi < \Phi_c$ wie in Gleichung (5.47) abzuleiten. Für die numerische Lösung ließe sich das Problem möglicherweise durch die Benutzung eines anderen cutoffs umgehen.

Wir werden hingegen in dieser Arbeit pragmatisch vorgehen: Bei kleinen Dichten ρ evolvieren wir die vollen Flußgleichungen bis zur Skala $k_{\text{inst.}}$, an der die Instabilitäten auftreten. Ab dort vernachlässigen wir die Meson-Fluktuationen und evolvieren nur den Fermion-Anteil der Flußgleichung (5.42) nach $k = 0$. Für Dichten oberhalb von $\rho \gtrsim 0.45\rho_0$ finden wir $k_{\text{inst.}} < k_{\text{th.}}$. D.h. die Instabilitäten treten erst unterhalb der Skala $k_{\text{th.}}$ auf, ab der das Potential durch die endliche Dichte beeinflusst wird. In diesem Fall evolvieren wir die vollen Flußgleichungen bis $k_{\text{th.}}$ und vernachlässigen die Meson-Fluktuationen für $k < k_{\text{th.}}$.

Die Näherung, die Meson-Terme nur bis $k_{\text{th.}}$ zu integrieren wird durch die Tatsache, daß die Effekte des Fermi-Sees klassisch, von Ordnung $\mathcal{O}(\hbar^0)$ sind und somit die Meson-Fluktuationen $\mathcal{O}(\hbar)$ dominieren, gerechtfertigt. Letztlich sollten jedoch auch die Meson-Effekte voll berücksichtigt werden.

Numerische Lösung und Ultraviolett-Anfangswerte Das effektive Potential ist wie im vorigen Kapitel eine Funktion der Felder Φ und der Renormierungsgruppen-Skala k , d.h. die Flußgleichung (5.42) ist eine partielle Differentialgleichung, die man nur näherungsweise numerisch lösen kann. Anders als im Abschnitt 4.2 beschrieben, werden wir diesmal $\Omega(\Phi^2, k)$ nicht in eine Potenzreihe entwickeln, sondern das Potential auf einem eindimensionalen Gitter diskretisieren: Dazu unterteilen wir den Bereich $0 < \Phi^2 < 0.05$ GeV² in hundert Gitterpunkte Φ_i^2 und erhalten so für jeden Gitterpunkt eine gewöhnliche Differentialgleichung. Die Massenterme in den Flußgleichungen, die Ableitungen nach Φ enthalten, koppeln dann die Differentialgleichungen benachbarter Gitterplätze. Das gesamte Differentialgleichungs-System läßt sich wieder mit Standard-Runge-Kutta-Methoden integrieren und wir erhalten so bei $k = 0$ das volle effektive Potential $\Omega(\Phi^2)$ in dem oben angegebenen Φ -Intervall (vgl. Anhang B).

Als Ultraviolett-Skala k_{uv} , von der aus wir die Evolution starten wählen wir $k_{\text{uv}} = 1.2$ GeV. Dieser Wert liegt etwas unter der Skala von 1.34 GeV, die wir im Abschnitt 4.3 durch Vergleich zum NJL-Modell gefunden hatten. In diesem Kapitel wollen wir jedoch die Anfangsbedingungen identisch zu den Werten wählen, die zur Berechnung des effektiven Potentials bei endlicher Temperatur benutzt wurden [22], um so die Vergleichbarkeit herzustellen. Entsprechend legen wir also auch das symmetrische effektive Potential

$$\Omega(\Phi^2, k = k_{\text{uv}}) = \frac{m_{\text{uv}}^2}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda_{\text{uv}}}{4} \Phi^4 \quad , \quad (5.48)$$

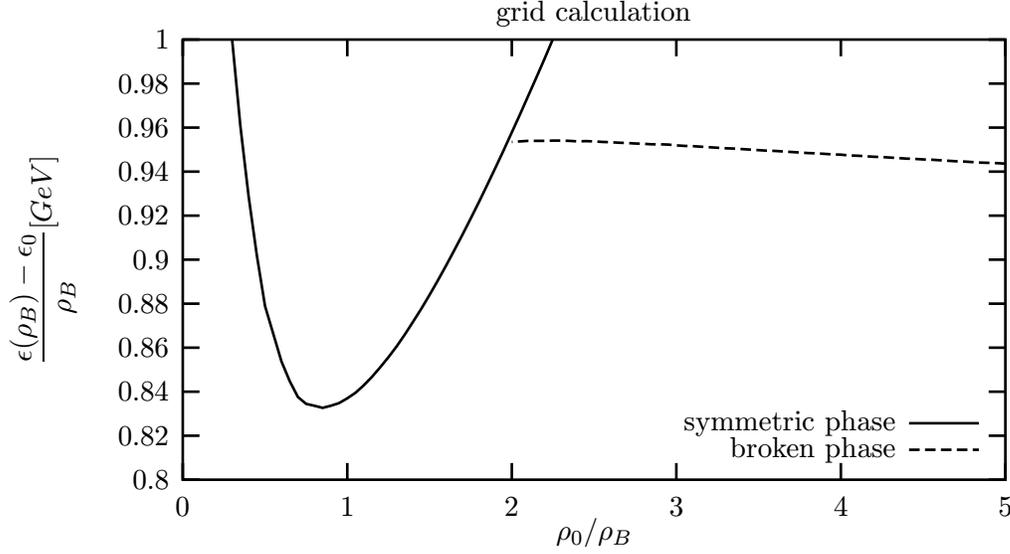


Abbildung 5.5: Normierte Energiedichte pro Baryon, aufgetragen gegen die inverse Dichte ρ_B^{-1} . Die inverse Dichte ist in Einheiten der normalen Kerndichte $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ angegeben. Die chiral symmetrische Phase (durchgezogene Linie) und die spontan gebrochenen Phase (gestrichelte Linie) sind dargestellt. Die Evolutions Gleichung (5.42) wurde auf dem Gitter gelöst. Die Energie in den gebrochenen Phase bei verschwindender Dichte ist ϵ_0 .

an der Ultraviolett-Skala $k = k_{\text{uv}}$, mit den Anfangswerten $m_{\text{uv}}^2 = 0.4^2 \text{ GeV}^2$ und $\lambda_{\text{uv}} = 30$ fest. Diese Werte ergeben eine kritische Temperatur $T_c \approx 150 \text{ MeV}$ und eine Symmetriebrechungs-Skala $k_{\chi\text{SB}} \approx 1 \text{ GeV}$ [22, 38].

Die Ergebnisse der Renormierungsgruppen-Rechnung sind in den Abbildungen 5.5 und 5.6 dargestellt. In Abbildung 5.5 ist die Energie pro Baryon aufgetragen über der inversen Dichte. Die Dichte ist angegeben in Einheiten der normalen Kerndichte $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$. Auf der rechten Seite der Abbildung, bei niedrigen Dichten finden wir die spontan gebrochene Konstituentenquark-Phase. Im Grenzfall $\rho_B \rightarrow 0$ nimmt die Energie pro Baryon einen Wert von 906 MeV an. Dies entspricht gerade der Masse von drei freien Konstituentenquarks.

Als Funktion der Dichte findet man einen 1. Ordnung Phasenübergang bei einer kritischen Dichte von $\rho_{\chi\text{SB}} = 0.56 \rho_0$. Bei höheren Dichten liegt eine chiral symmetrische Phase von Partonen vor. Diese hat eine Minimum bei einer Dichte von $\rho_B = 1.17 \rho_0$.

Da die Energie pro Baryon in der spontan gebrochenen Phase oberhalb des Minimums in der partonischen Phase liegt (Abbildung 5.5), existieren in diesem Szenario keine stabilen Konstituentenquarks. Die spontan gebrochenen Phase ist instabil und bei niedrigen Dichten bilden sich Tropfen aus partonischer Materie mit Dichte $\rho_B = 1.17 \rho_0$ und darum herum spontan gebrochenes Vakuum.

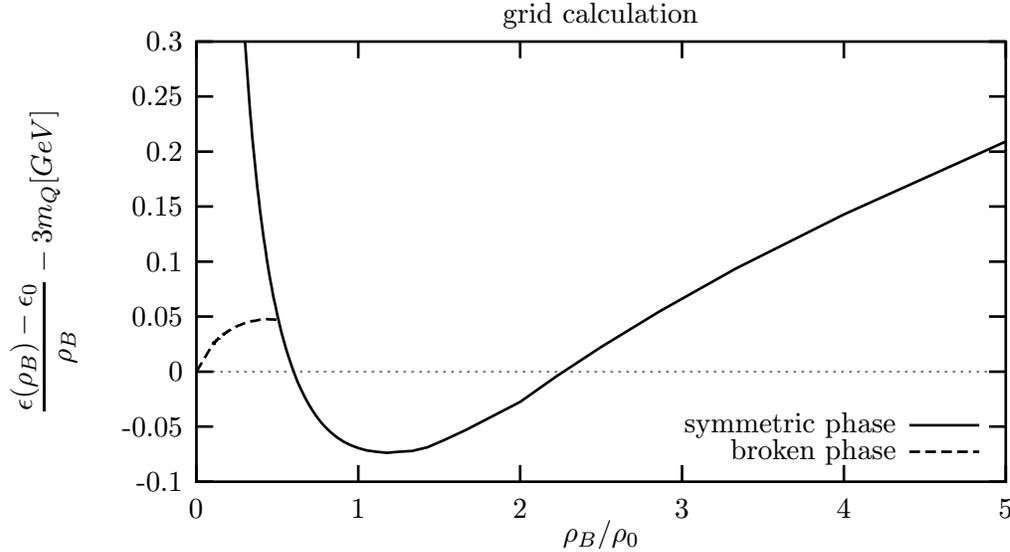


Abbildung 5.6: Die Bindungsenergie pro Baryon berechnet aus Evolutionsgleichungen auf dem Gitter. Die Bindungsenergie ist aufgetragen als Funktion der Dichte ρ_B . Die Dichte ist angegeben in Einheiten der normalen Kerndichte ρ_0 .

In Abbildung 5.6 schließlich ist die Bindungsenergie aufgetragen als Funktion der Dichte. Am Minimum bei $\rho_B = 1.17 \rho_0$ sind Quarks mit etwa 74 MeV gebunden und befinden sich bereits in der chiralen symmetrischen Phase. Wir werden diese Ergebnisse auch im Abschnitt 5.3 noch einmal diskutieren und sie dort mit einer Mittelfeld-Rechnung, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird vergleichen.

Der chirale Phasenübergang im Quark-Meson-Modell bei endlicher Dichte wurde ebenfalls, von Berges, Jungnickel und Wetterich untersucht. Sie finden mit Hilfe der exakten Renormierungsgruppen-Flußgleichungen auch einen Übergang erster Ordnung. Die Übergangsdichte liegt knapp oberhalb der normalen Kerndichte [12], der Wert ist also etwa doppelt so hoch wie unsere Übergangsdichte. Die selben Autoren stellen in [63] eine Rechnung vor, die neben den Quarks auch nukleonische Freiheitsgrade enthält.

Die Renormierungsgruppen-Beschreibung für den Bereich der endlichen Dichte, die wir hier vorgestellt haben, hat noch einige prinzipielle Mängel: 1. Der Heat-Kernel-cutoff ist ein Lorentz-invarianter cutoff. Als solcher kann er in der Evolution nicht auf die Fermi-Oberfläche zoomen. Prinzipiell ist es ein Ziel der Renormierungsgruppen-Methode die kritischen langwelligen Teilchen-Loch-Anregungen des Fermisystems erst am Schluß der Evolution zu integrieren [64]. Solche Teilchen-Loch-Anregungen werden gerade an der Fermioberfläche generiert. Im relativistischen Fall mit Goldstone-Bosonen sollten mit den letzten Evolutionsschritten die masselosen Bosonen ausintegriert werden. 2. Das instabile Verhalten der Meson-Propagatoren verhindert für kleine Skalen

eine komplette Evolution des effektiven Potentials einschließlich der Meson-Fluktuationen. Möglicherweise läßt sich dieses Problem jedoch durch einen geeigneten cutoff mit besserem Konvergenz-Verhalten umgehen. 3. Des weiteren wurde der Renormierungsgruppen-Fluß nur in niedrigster Ordnung betrachtet. Die Evolution der Yukawa-Kopplung könnte jedoch durch die endliche Dichte durchaus geändert werden und müßte eigentlich berücksichtigt werden. Das grundsätzliche Problem der niedrigen Übergangsdichten läßt sich jedoch damit wahrscheinlich nicht lösen [12].

5.2 Mittelfeld-Rechnung bei endlicher Dichte

Wir wollen in diesem Abschnitt für den Bereich $k < k_F$ einen Mittelfeld-Rechnung aufstellen. Die Ergebnisse können wir dann den Resultate des vorhergehenden Abschnitts vergleichen. Wir werden im Abschnitt 5.3 die Resultate beider Rechnungen diskutieren.

Um in einer Mittelfeld-Rechnung den Fermisee auszuintegrieren beschaffen wir uns zunächst die nötigen Parameter, also die Kopplungen des effektiven Potentials an der Skala des Fermi-Sees. Dazu evolvieren wir die Flußgleichungen (5.23) bei $T = 0$ und $\mu = 0$ bis zur Fermikante $k = k_F$. Wir wählen für k_F den Wert, der der normalen Kern-Dichte entspricht $\rho_B = \rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$. Das effektive Potential, das wir so berechnen, enthält die gesamten Vakuum loop-Effekte der Quarks und Mesonen oberhalb der Skala k_F . Mit diesem effektiven Potential lösen wir das lineare σ -Modell in Mittelfeld-Näherung und integrieren damit die Einteilchen-Energien der Quarks im Fermisee aus.

Um die Näherung transparent zu halten fitten wir das effektive Potential an der Skala $k = k_F$ durch eine Potenzreihe der Form (5.48):

$$\Omega_{MF}(\Phi^2, k_F) = \frac{m_{MF}^2}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda_{MF}}{4} \Phi^4 \quad , \quad (5.49)$$

wir erhalten also eine massenartige Kopplung m_{MF}^2 und die quartische Kopplung λ_{MF} .

Die Parameter, die wir finden hängen von dem Fit-Intervall ab, wir wählen deshalb zwei Mögliche Bereiche, deren Parameter in Tabelle 5.1 aufgeführt sind. Das effektive Potential und die beiden Fits sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Der Bereich (X) geht von $\Phi = 0$ bis $\Phi = 0.22 \text{ GeV}$. Die resultierenden Parameter (X) spiegeln also im besonderen die Form des Potentials bei großen Feldern $\Phi \gtrsim 0.1 \text{ GeV}$ wider. Der Parametersatz (Y) berücksichtigt hingegen besonders den Bereich kleiner Felder $\Phi \lesssim 0.1 \text{ GeV}$. Diese Parameter-Sätze bilden die beiden extremen Möglichkeiten das Potential zu fitten. Wir erwarten also, daß die Ergebnisse, die wir erhalten werden, jeweils die Grenzfälle für das mögliche Verhalten des Systems bilden. Es ist natürlich genauso möglich das Potential durch eine Potenzreihe höherer Ordnung darzustellen und so das effektive Potential an der Skala k_F noch genauer zu bestimmen. Die Ergebnisse die man erhält

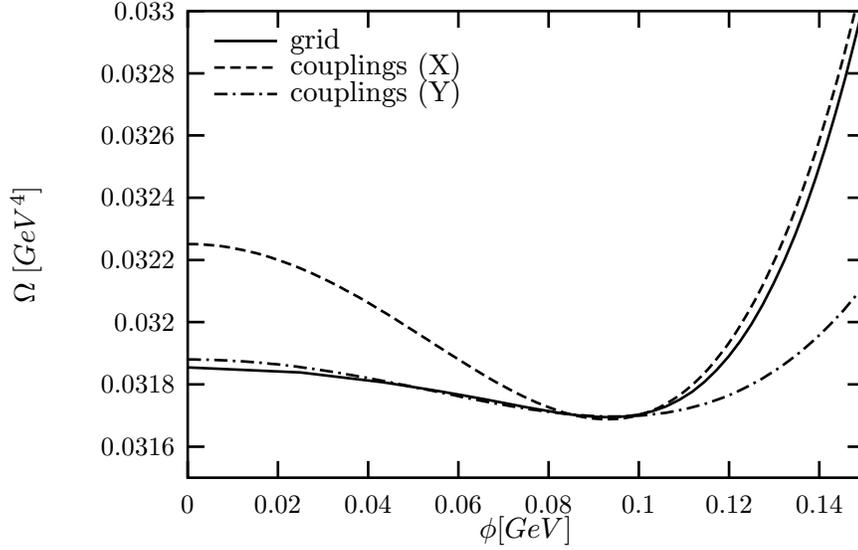


Abbildung 5.7: Das Potential $\Omega(\Phi)$ an der Skala $k = k_F$, numerisch berechnet aus der Gleichung (5.42) (durchgezogene Linie) und als Fit mit den mean field Parametern X (gestrichelte Linie) und Y (Strich Punkt Linie). Vergleiche Tabelle 5.1.

werden jedoch im wesentlichen durch die Ergebnisse der Parametrisierung (Y) wiedergegeben (siehe Anhang E).

Die negativen Massenparameter in Tabelle 5.1 zeigen an, daß an der Skala k_F das effektive Potential spontan gebrochen ist, wie man aus der Abbildung 5.7 unschwer erkennt. Das Φ -Feld besitzt also einen endlichen Erwartungswert $\bar{\sigma}$. Die Mittelfeld-Rechnung mit diesen effektiven Potentialen ist relativ einfach: Man berechnet die Hamiltonfunktion H in der Anwesenheit des Fermi-Sees und minimiert dann H als Funktion von $\bar{\sigma}$. Weil die Quantenfluktuationen oberhalb von $k = k_F$ schon im effektiven Potential enthalten sind, berücksichtigen wir hier nur klassische Lösungen. Dabei vernachlässigen wir natürlich typische Vielteilchen-Fluktuation, die in der Mittelfeld-Näherung für ein Vielteilchensystem nicht enthalten sind.

Typ	Fit Intervall Φ^2	m_{MF}^2	λ_{MF}	$\bar{\sigma}_0$	$3g\bar{\sigma}_0$	$B^{1/4}$	M_σ
X	[0, 0.05]	-0.260	30.0	0.0940	0.902	0.15554	0.720
Y	[0, 0.01]	-0.082	9.18	0.0945	0.906	0.11633	0.405
Gitter	-	-	-	0.0944	0.906	-	-

Tabelle 5.1: Die Parameter des effektiven Meson-Potentials. Das Fit-Intervall und die Massen-Parameter m_{MF}^2 sind in GeV^2 , $\bar{\sigma}_0$, $B^{1/4}$ und die Masse des σ -Mesons sind in GeV angegeben.

Die Hamiltonfunktion des Systems lautet:

$$H = \int d^3x \left[q^\dagger (\vec{\alpha}\vec{p} + g\beta\bar{q}\sigma) q + \frac{m_{MF}^2}{2}\bar{\sigma}^2 + \frac{\lambda_{MF}}{4}\bar{\sigma}^4 \right]. \quad (5.50)$$

Durch Einführen einer Basis von ebenen Wellen für die Quarks können wir die Hamiltonfunktion als Impulsintegral schreiben. Im Grundzustand $T = 0$, ist die Fermikugel vollständig bis zum Fermi-Impuls k_F gefüllt. Die Energiedichte ist daher durch das folgende Impuls-Integral gegeben:

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{E}{V} &= \frac{4N_c}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \sqrt{k^2 + g^2\bar{\sigma}^2} + \frac{1}{2}m_{MF}^2\bar{\sigma}^2 + \frac{\lambda_{MF}}{4}\bar{\sigma}^4 \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \left(2k_F \sqrt{k_F^2 + g^2\bar{\sigma}^2}^3 - g^2\bar{\sigma}^2 k_F \sqrt{k_F^2 + g^2\bar{\sigma}^2} \right. \\ &\quad \left. - g^4\bar{\sigma}^4 \log \frac{\sqrt{k_F^2 + g^2\bar{\sigma}^2} + k_F}{g\bar{\sigma}} \right) + \frac{1}{2}m_{MF}^2\bar{\sigma}^2 + \frac{\lambda_{MF}}{4}\bar{\sigma}^4. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Der Fermi-Impuls der Quarks ist festgelegt durch die Quarkdichte $\rho = 3\rho_B$:

$$k_F = \sqrt[3]{\frac{3\pi^2\rho}{2N_C}}. \quad (5.52)$$

Die mittlere $\bar{\sigma}$ -Feld Konfiguration berechnet sich durch minimieren der Gleichung (5.51) bezüglich des $\bar{\sigma}$ -Feldes. Man erhält eine selbstkonsistente Gleichung für das mittlere Feld $\bar{\sigma}$:

$$\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\bar{\sigma}} \right)_V = \frac{4N_c}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{g^2\bar{\sigma}}{\sqrt{k^2 + g^2\bar{\sigma}^2}} + m_{MF}^2\bar{\sigma} + \lambda_{MF}\bar{\sigma}^3 \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.53)$$

Diese Gleichung hat immer die triviale Lösung $\bar{\sigma} = 0$, die der symmetrischen Phase entspricht. Bei verschwindender Dichte hat die nichttriviale Lösung $\bar{\sigma}_0 = \sqrt{-m^2/\lambda}$ eine niedrigere Energie als die $\bar{\sigma} = 0$ Lösung. Das Potential besitzt also spontan gebrochene Symmetrie. Erhöhen wir nun die Dichte ρ_B , so wird die Energie der chiralen symmetrischen Lösung $\bar{\sigma} = 0$ abgesenkt. Fällt sie bei hohen Dichten $\rho_B > \rho_{\chi SB}$ unter die Energie der spontan gebrochenen Lösung, so wird die chirale Symmetrie wieder hergestellt.

Die Energiedichte der gebrochenen Phase relativ zur symmetrischen Phase, im Fall $\rho_B = 0$ ist

$$\epsilon_0 \equiv \epsilon_{br}(\rho_B = 0) = -\frac{m^4}{4\lambda} = -B. \quad (5.54)$$

B stellt eine Art Bag-Konstante dar. Sie gibt an, um welchen Betrag der Energiedichte das chirale symmetrische Vakuum über dem Vakuum der spontan gebrochenen Phase liegt.

Wir werden im folgenden zwei unterschiedliche Szenarien finden: Entweder liegt die Energie pro Teilchen als Funktion der Dichte in der gebrochenen Phase bei $\rho_B = 0$ unterhalb des Minimums der partonischen Phase, oder aber die niedrigste Energie pro Teilchen wird bei endlichen Dichten in der partonischen Phase erreicht. Wir können eine Relation angeben, die die Minima der Energie pro Baryon in beiden Phasen vergleicht. Die massenlose partonische (symmetrische) Phase hat eine Energiedichte

$$\epsilon_{\text{sym}} = \frac{9}{4} \left(\frac{9\pi^2}{2N_c} \right)^{1/3} \rho_B^{4/3} . \quad (5.55)$$

Betrachten wir die Energie pro Baryon, so hat diese Funktion ein Minimum:

$$\left. \frac{E}{N_B} \right|_{\min} = \left. \frac{\epsilon_{\text{sym}}(\rho_B) - \epsilon_0}{\rho_B} \right|_{\min} = 3 \left(\frac{3\pi^2}{2N_c} \right)^{1/4} \left(\frac{m^4}{\lambda} \right)^{1/4} \quad (5.56)$$

bei der Dichte

$$\rho_{B,\text{sym}}^{\min} = \frac{1}{3} \left(\frac{2N_c}{3\pi^2} \right)^{1/4} \left(\frac{m^4}{\lambda} \right)^{3/4} . \quad (5.57)$$

In der Konstituentenquark-Phase hingegen ist der asymptotische Wert der Energie pro Baryon einfach die dreifache Quarkmasse:

$$\left. \frac{\epsilon_{\text{br}}(\rho) - \epsilon_0}{\rho_B} \right|_{\min} = 3g\bar{\sigma}_0 . \quad (5.58)$$

Eine notwendige Bedingung um eine stabile gebrochene Phase bei niedrigen Dichten zu haben ist also

$$\left(\frac{3\pi^2\lambda}{2N_c} \right)^{1/4} > g , \quad (5.59)$$

oder wenn wir diese Bedingung umschreiben:

$$\left(\frac{3\pi^2}{4N_c} \right) \bar{\sigma}_0^2 M_\sigma^2 > M_q^4 . \quad (5.60)$$

Wir stellen fest, daß mit $g = 3.23$ diese Bedingung für die Parametrisierung (X) erfüllt ist, nicht jedoch für (Y). Deshalb erhält man mit der Parametrisierung (Y) keine stabile homogene Phase mit gebrochener Symmetrie, wie wir in den Ergebnissen feststellen werden.

Die numerischen Ergebnisse der mean field Rechnung sind in den Abbildungen 5.8–5.10 dargestellt (siehe auch Anhang B). In Abbildung 5.8 zeigen wir die Energie pro Baryon als Funktion der inversen Dichte. Wir betrachten die Energien immer relativ zu ϵ_0 , der Energie der gebrochenen Phase bei $\rho_B = 0$, sie ist durch Gleichung (5.54) gegeben.

Im Niederdichte-Limes nähert sich die Energie pro Baryon der gebrochenen Phase langsam dem Wert der dreifachen Quarkmasse $3M_q = 3g\bar{\sigma}_0$ an, wie auf der

jeweils rechte Seite der Abbildung 5.8 zu erkennen ist. Die Yukawa-Kopplung $g = 3.23$ ist so gewählt, daß die Konstituentenquark-Masse 300 MeV ist. Wir benutzen diese verminderte Quarkmasse weil wir die Rechnungen im chiralen Limes durchführen. Ein "Nukleon" ist in unserem Modell einfach durch drei Konstituentenquarks gegeben, die natürlich nicht gebunden sind, weil wir keinerlei confinement-Effekte berücksichtigen. Die Vakuummasse unseres "Nukleons" liegt also bei 900 MeV, unterhalb der Tatsächlichen Nukleon-Masse 938 MeV (vgl. Tabelle 5.1). Auf der jeweils linken Seite in Abbildung 5.8 ist die parabolische Form der partonischen Phase zu erkennen.

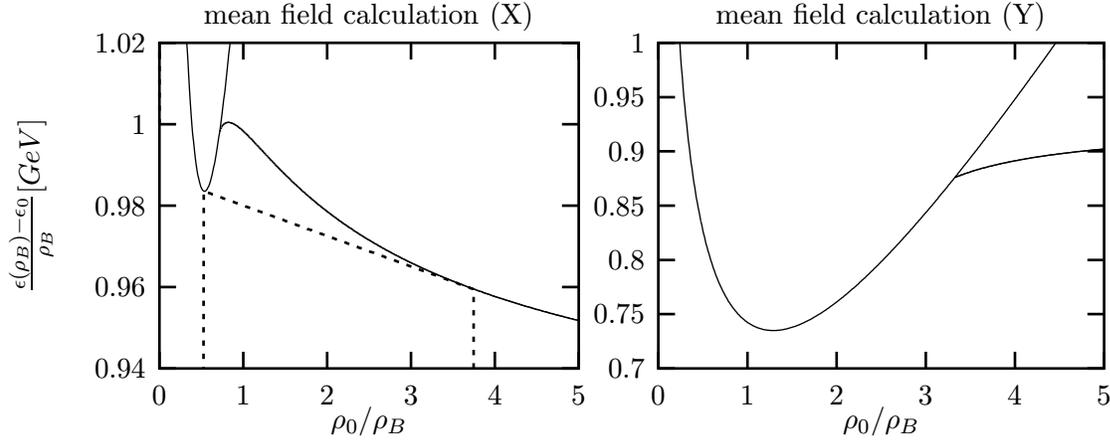


Abbildung 5.8: Die Energie pro Baryon aufgetragen gegen ρ_B^{-1} in Einheiten der normalen Kerndichte $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ für die mean field Parametrisierung X (links) und Y (rechts). Zu beachten sind die unterschiedlichen Energieskalen in beiden Abbildungen. Die gestrichelte Linie in der linken Darstellung zeigt die Maxwell-Konstruktion, die den Koexistenzbereich der chiral symmetrischen und der gebrochenen Phase bestimmt.

Betrachten wir für den Moment nur den linken Teil der Abbildung 5.8: Für die Kopplungen (X) liegt die Energie des Vakuum-Zustandes $\rho_B = 0$ unter der Energie bei endlicher Dichte, d.h die Bedingung (5.60) ist erfüllt und wir finden eine stabile, spontan gebrochene Phase bei niedrigen Dichten. Im Bereich zwischen $0.27 \rho_0$ und $1.9 \rho_0$ ist die Energie pro Teilchen nicht konvex, man erhält daher das Phasendiagramm durch die Maxwell Konstruktion (gestrichelte Linie): Für einen Phasenübergang erster Ordnung ist die Gleichgewichts-Bedingung bei gegebener Temperatur (in unserem Fall $T=0$) und endlichem Druck gegeben als das Minimum der freien Enthalpie $G = F + PV$:

$$G(T, P, N) = \min \quad . \quad (5.61)$$

Im Koexistenz-Bereich der beiden Phasen (I/partonisch) und (II/Konstituenten Quark) müssen Temperatur, Druck und chemisches Potential gleich sein. Die Duhem-Gibbs-Relation lautet also in beiden Phasen

$$\mu_B^{I,II} = \frac{1}{N_B} G(T, P, N_B) = \frac{1}{N_B} (F + PV) = \frac{F}{N_B} + P \frac{1}{\rho_B} \quad , \quad (5.62)$$

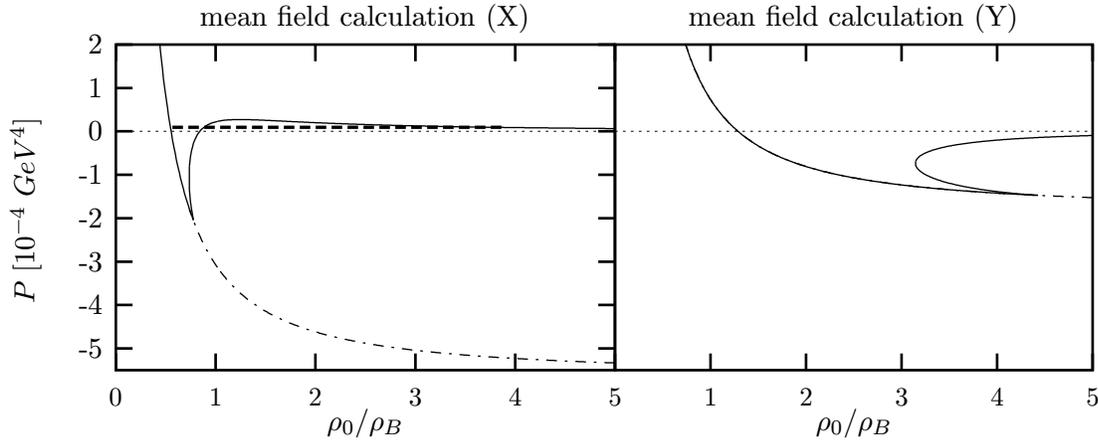


Abbildung 5.9: Der Druck als Funktion der inversen Baryon-Dichte, berechnet in mean field Näherung für die Parameter X (links) und Y (rechts). Die gestrichelte Linie rechts ist die Maxwell-Konstruktion. Im Fall Y existiert die Maxwell-Konstruktion nicht. Die Linien $P < 0$ sind Lösungen der Gleichungen, haben jedoch keine physikalische Interpretation. In beiden Fällen erreicht der Druck der symmetrischen Phase für kleine Dichten asymptotisch den Bag-Druck B (vgl. Tabelle 5.1) (Strich-Punkt-Linie).

wobei der Druck P im Koexistenz-Bereich konstant ist. Bei Temperatur $T=0$ ist die freie Energie pro Baryon F/N_B gerade die Energie pro Baryon $E/N = \varepsilon/\rho_B$. Wir können also in der Darstellung der Energie pro Baryon als Funktion der inversen Dichte den Druck in der Koexistenzphase direkt aus der Maxwell-Tangenten-Konstruktion ablesen.

$$\frac{E}{N_B} = -P \frac{1}{\rho_B} + \mu_B \quad . \quad (5.63)$$

Die Steigung ist der negative Druck und der Achsenabschnitt das chemische Potential am Phasenübergang. Die gestrichelte Linie in Abbildung 5.8 stellt die Tangenten-Konstruktion dar, sie verbindet die Konstituentenquark-Phase bei niedrigen Dichten mit der Parton Phase bei hohen Dichten. Der Übergang findet zwischen 0.27 und 1.90 facher normaler Kerndichte statt. In diesem Bereich koexistieren die chiral gebrochene und die symmetrische Phase.

Für die Kopplungen (Y) liegt die minimale Energie pro Teilchen der partonischen Phase unterhalb der Energie bei $\rho_B = 0$, d.h. die Parameter (Y) erfüllen nicht die Bedingung (5.60). Wir finden folglich keine stabile gebrochene Phase, also existiert auch keine Maxwell-Konstruktion in diesem Fall.

Für beide Parametrisierungen (X) und (Y) kann man den Druck aus Gleichung (5.63) bestimmen. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.9 dargestellt. Die linke Abbildung zeigt die stabile Phase gebrochener Symmetrie im Falle der Parametrisierung (X). Sie zeichnet sich durch einen positiven Druck aus. Die gestrichelte Linie entspricht wieder der Maxwell-Konstruktion. Im Fall (Y) existiert keine stabile gebrochene Phase. Der Druck ist negativ bis zur Dichte $\rho_B = 1.28\rho_0$.

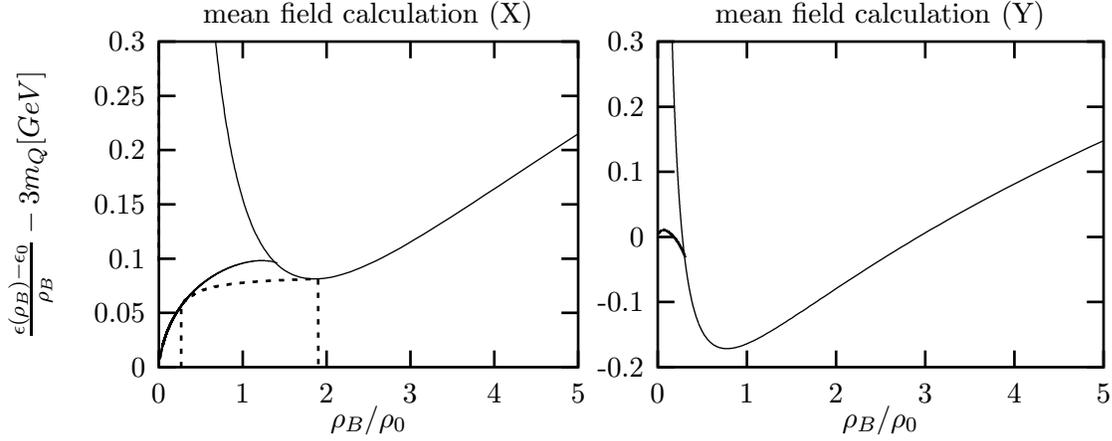


Abbildung 5.10: Die Bindungsenergie pro Baryon ist als Funktion von ρ_B geplottet. Die Ordinate ist jeweils auf normale Kerndichte ρ_0 normiert. Links sind die Ergebnisse der Kopplungen X, rechts die Ergebnisse der Kopplungen Y dargestellt.

Hier befindet sich das System bereits in der chiral symmetrischen Phase. In beiden Fällen erreicht der Druck der symmetrischen Phase für $\rho_B \rightarrow 0$ asymptotisch den bag Druck B (vgl. Tabelle 5.1) was durch die Strich-Punkt-Linie angedeutet ist.

In Abbildung 5.10 ist die Bindungsenergie pro Baryon dargestellt. Die ‘‘Baryonen Masse’’ $3M_q$ ist jeweils von der Energie pro Baryon abgezogen. Im Fall (X) ist das System ungebunden, die Energie der partonischen Phase hat ein Minimum bei ~ 1.8 facher Kerndichte, das am Rande des Koexistenzbereichs der beiden Phasen liegt. In der Parametrisierung (Y) ist das System stark gebunden, das Minimum der partonischen Phase liegt an der Stelle $\rho_B = 0.78 \rho_0$.

Der Unterschied zwischen den beiden Parametrisierungen zeigt, daß die Form des effektiven Potentials $\Omega(\Phi^2, k_F)$ die Physik bei niedrigen Skalen stark beeinflußt. In der Mittelfeld-Näherung ist die Stärke der Bindung oder Abstoßung der baryonischen Materie, hauptsächlich von der σ -Masse $M_\sigma^2 = 2\lambda\bar{\sigma}_0^2$ abhängig. Die σ -Massen, die sich aus den Parametern (X) und (Y) ergeben sind in Tabelle 5.1 angegeben. Das Potential (X) ist mit einer hohen σ -Masse von 0.728 GeV weniger anziehend als das Potential (Y) mit einer σ -Masse von 0.404 GeV. Der Meson–Meson-Wechselwirkungsterm λ legt zusätzlich die Struktur der Region mittlerer Dichten fest. Ein Großer Wert λ gibt eine gemischte Phase wie für die Parameter (X) (vgl. Gl. (5.60)).

5.3 Vergleich der Ergebnisse und Diskussion

Wir wollen nun die numerischen Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte vergleichen und diskutieren.

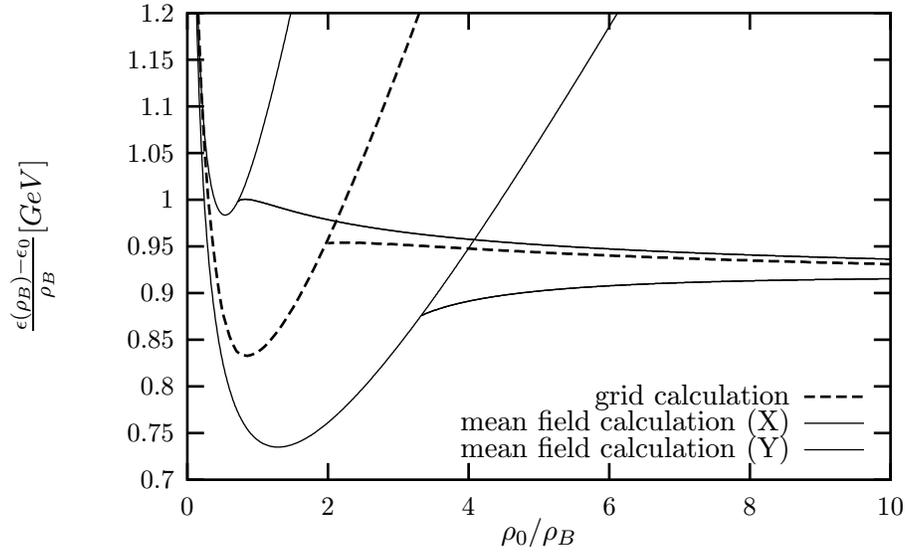


Abbildung 5.11: Normierte Energie pro Baryon, berechnet auf dem Gitter (gestrichelte Linie) und in den mean field Parametrisierungen X (obere durchgezogene Kurve) und Y (untere durchgezogene Kurve). Auf der Ordinate ist die inverse Dichte ρ_B^{-1} aufgetragen, normiert auf normale Kern-dichte.

Die Energie pro Teilchen als Funktion der inversen Baryon-Dichte ρ_B^{-1} ist in Abbildung 5.11 für die Mittelfeld-Rechnung (X) und (Y), und die Rechnung mit Flußgleichungen aufgetragen. Qualitativ zeigen die drei Kurven das gleiche Verhalten. Das Resultat der Renormierungsgruppen-Rechnung liegt zwischen den beiden Mittelfeld-Rechnungen, wie wir es angesichts der “extremen” Parameterwahl auch erwartet hatten.

In allen drei Fällen finden wir den gleichen Grenzfall $\rho_B \rightarrow 0$: Die Energie pro Teilchen nähert sich der dreifachen Quark-Masse an. Diese “Nukleonen-Masse” ist ~ 900 MeV (siehe Tabelle 5.1). Mit steigender Dichte erreicht man den Punkt, an dem das System in die symmetrische Phase übergeht, d.h. in der Mittelfeld-Rechnung hat die Gleichung (5.53) keine nichttriviale Lösung $\bar{\sigma} \neq 0$ mehr. Für die Mittelfeld-Parametrisierung (Y) geschied dies an der Stelle $\rho_{\chi\text{SB}} = 0.32 \rho_0$, für die Gitter-Rechnung bei $\rho_{\chi\text{SB}} = 0.56 \rho_0$. Die Parametrisierung (X) führt zum höchsten Übergangspunkt bei $\rho_{\chi\text{SB}} = 1.32 \rho_0$. In allen drei Rechnungen fällt der Ordnungsparameter diskontinuierlich auf Null wenn die kritische Dichte überschritten wird, d.h. es liegt ein Phasenübergang erster Ordnung vor.

In der Rechnung (Y) und der Renormierungsgruppen-Rechnung liegt das Minimum der Energie pro Baryon in der partonischen Phase, jeweils unterhalb des Minimums in der gebrochenen Phase. Daraus ergibt sich in diesen beiden Fällen folgendes Szenario: Es existiert keine Maxwell-Konstruktion und die gebrochene Phase bei verschwindender Dichte $\rho_B \rightarrow 0$ ist instabil. Der Druck in der chiral

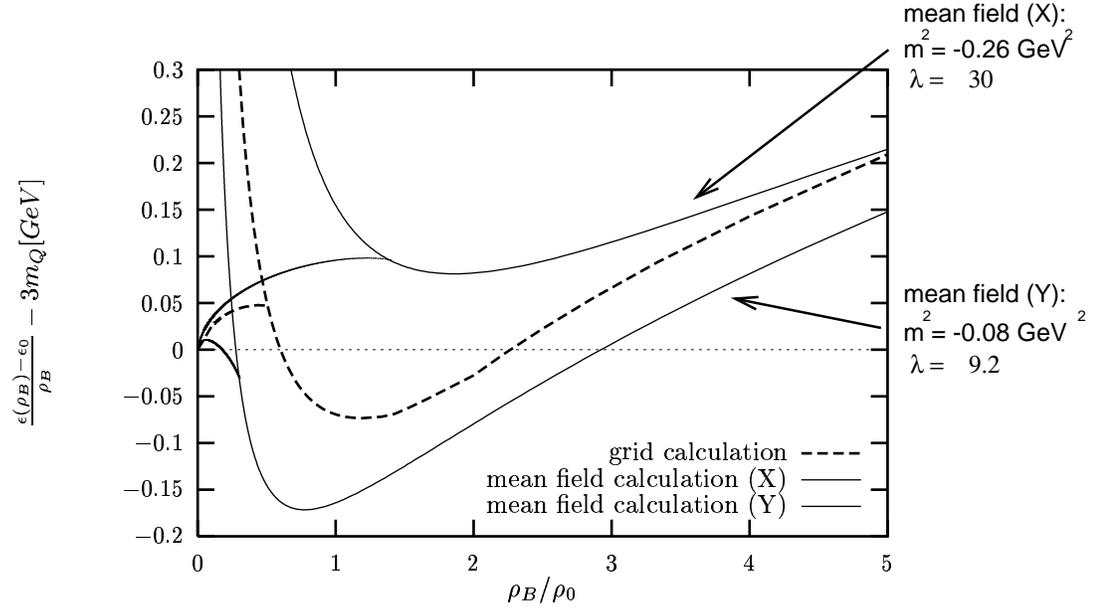


Abbildung 5.12: Bindungsenergie pro Baryon, berechnet auf dem Gitter (gestrichelte Linie) und in den Mean-Field-Parametrisierungen X (obere durchgezogene Kurve) und Y (untere durchgezogene Kurve) aufgetragen gegen die Dichte ρ_B .

gebrochenen Phase ist dementsprechend negativ (Abbildung 5.9). Bei niedrigen Dichten zerfällt ein Quark-System in Tropfen mit chiral symmetrischen Partonen und Regionen spontan gebrochener Symmetrie darum herum. In diesem Szenario findet man keine massenbehafteten Konstituentenquarks, nicht einmal bei verschwindenden Dichten. Die instabile Phase besteht bis zu Dichten von $\rho_B = 1.17 \rho_0$ für die Renormierungsgruppen-Rechnung und $\rho_B = 0.78 \rho_0$ für die Rechnung (Y). Bei diesen Dichten füllen die Tropfen partonischer Materie das gesamte Vakuum. Sie sind dann mit Energien von $\approx 74 \text{ MeV}$ (RG) und $\approx 172 \text{ MeV}$ (Y) pro Baryon gebunden. Wenn man die Dichte im System weiter erhöht, dann bewirkt der Fermi-Druck ein starkes Ansteigen der Energien.

Im Gegensatz dazu ergibt sich für die Rechnung (X) ein zweites Szenario: Hier existiert eine Konstituentenquark-Phase bei Dichten unterhalb von $0.27 \rho_0$. Dieser Bereich hat einen positiven Druck (Abbildung 5.9) und ist damit stabil. Bei diesen Dichten liegen im System stabile Konstituenten-Quarks mit einer Masse von $M_q = 300 \text{ MeV}$ vor. Oberhalb von $0.27 \rho_0$ liegt eine Koexistenzphase, in der die Zustandskurve durch die Maxwell-Konstruktion gegeben ist. Hier findet man die koexistierenden homogenen Phasen von Partonen und Konstituentenquarks. Nimmt man an, daß Kondensationskeime im System vorhanden sind, so bilden sich auch hier Tropfen mit Partonen, die in einem freien Gas aus Konstituenten-Quarks vorliegen. Der Koexistenzbereich endet bei Dichten von $1.90 \rho_0$. Jenseits davon besteht das System nur noch aus chiral symmetrischen Partonen.

In Abbildung 5.12 zeigen wir die Zustandsgleichung für die drei Rechnungen. Die Rechnung (Y) wie auch die Renormierungsgruppen-Rechnung bilden gebundene Systeme. In beiden Fällen ist die Bindung jedoch sehr stark 74 MeV pro Baryon bzw. 172 MeV pro Baryon in Rechnung (Y). Die Sättigungsdichte liegt in beiden Fällen nahe der normalen Kernmaterie, Baryonische Materie ist jedoch in diesen Modellen bereits in der chiral symmetrischen Phase. Für Rechnung (X) findet man keine Bindung, das Minimum der partonischen Phase liegt etwa 80 MeV oberhalb des Vakuum-Wertes.

Vergleichbare Rechnungen im NJL-Modell wurden in [10, 13, 11, 14] bzw. mit exakten Flußgleichungen in [12] durchgeführt, alle Autoren finden einen Phasenübergang erster Ordnung bei endlicher Dichte. Alford, Rajagopal und Wilczek geben die Übergangsdichte zur chiral symmetrischen Phase für verschiedene Parameter mit $\rho_{\chi\text{SB}} = (1.5 - 5.6)\rho_0$ an. Sie finden nur für verschwindend kleinen Dichten einen positiven Druck der chiral gebrochenen Phase, der Druck als Funktion des Fermi-Impulses ist qualitativ vergleichbar mit Abbildung (5.9). Das Minimum der partonischen Phase liegt bei Dichten $\rho_B = (3.1 - 7.4)\rho_0$ [10]. Buballa und Oertel finden in einer NJL-Rechnung $\rho_{\chi\text{SB}} \approx 2\rho_0$ und als Minimum in der partonischen Phase $\rho_B = 2.75\rho_0$ [11]. Sowohl in [10] wie auch in [11] folgern die Autoren ein Szenario mit Tropfen aus partonischen Quarks bei niedrigen Dichten, wie in unserem Fall (Y).

Schwartz, Klevansky und Papp erhalten mit leicht unterschiedlichen Parametern in einer NJL-Rechnung bei endlicher Temperatur und Dichte $\rho_{\chi\text{SB}} \approx \rho_0$ [14], ebenso wie Berges und Rajagopal [13]. In beiden Rechnungen wurde zusätzlich eine Supraleitende Diquark-Phase bei hohen Dichten angenommen. Während Berges und Rajagopal im Grenzfall $T \rightarrow 0$ wieder das Szenario (Y) finden, ergeben die Rechnungen [14] eine stabile Phase von Konstituenten-Quarks bei niedrigen Dichten.

Berges, Jungnickel und Wetterich finden mit Hilfe der exakten Renormierungsgruppen-Flußgleichungen ebenfalls einen Übergang erster Ordnung, mit einer Übergangsdichte knapp oberhalb der normalen Kerndichte [12].

Wir stellen also fest, daß unsere Ergebnisse mit denen vergleichbarer Rechnungen weitgehend übereinstimmen. Wir erhalten Übergangsdichten die mit $\rho_{\chi\text{SB}} = (0.32 - 1.32)\rho_0$ am unteren Ende der Werte anderer Modelle liegen. Aufgrund der starken Abhängigkeit von den Parametern, die wir auch gefunden haben, sind die Ergebnisse kompatibel. Insgesamt liegen die Übergangsdichten bei zu kleinen Werte.

Ein möglicher Grund ist, daß die Baryon-Dynamik bei endlicher Dichte viel sensitiver auf die Vernachlässigung des confinement ist als die Dynamik bei endlicher Temperatur. Ohne die einschließenden confinement-Wechselwirkungen, die die farbneutralen Nukleonen voneinander abstoßen [65] wird die Bindungsenergie pro Baryon im linearen σ -Modell mit Quarks wahrscheinlich überschätzt. Bei endlichen Dichten reicht das lineare σ -Modell also nicht mehr aus um die Physik korrekt zu beschreiben. Wir werden deshalb im nächsten Abschnitt ein Kombiniertes Modell vorstellen, das auch Nukleon-Freiheitsgrade berücksichtigt.

5.4 Quark-Nukleon-Modell

Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, beschreiben die meisten Modelle, die eine reine Quark-Wechselwirkung annehmen, einen Phasenübergang bei sehr niedrigen Dichten. Auch im Quark-Meson-Modell finden wir Übergangsdichten in der Nähe der normalen Kerndichte. Die Mesonen höherer Masse, z.B. das ω -Meson, werden in diesen Modellen vernachlässigt. Eine Berücksichtigung solcher Mesonen ergibt jedoch zusätzliche abstoßende Kräfte, die das System von der chiralen symmetrischen Phase wegführen. Außerdem sollte der Übergang von Quarks zu Nukleonen, also die Farbeinschließung eine wichtige Rolle spielen.

Wir werden daher in diesem letzten Abschnitt noch einen Schritt weiter gehen und ein Modell für baryonische Materie vorstellen, das freie Konstituenten-Quarks und zusätzlich in Nukleonen gebundene Quarks enthält. Im folgenden stellen wir eine Mittelfeld-Rechnung vor und erweitern so das Quark-Meson-Modell aus Abschnitt 5.2 um Nukleonen und die zusätzliche Möglichkeit des Vektor-Meson-Austausch zwischen Quarks.

Der Nukleon-Sektor unseres Modells entspricht der ‘‘Quanten Hadron Dynamik’’ (QHD). Diese Theorie ist vom Standpunkt der ‘‘klassischen’’ Kernphysik eine sehr erfolgreiche phänomenologische Theorie der Kern-Materie in der Beschreibung einiger Kern-Eigenschaften, z.B die Sättigung bei Kerndichte und das Spin-Orbit-Potential [28]. Dennoch ist die Kompressibilität in diesen Modellen mit $K_\infty > 500$ MeV zu hoch, verglichen mit dem empirischen Wert $K_\infty = 210$ MeV [66].

Obwohl wegen der Farbeinschließung die nukleonischen Freiheitsgrade im Vakuum Quark-Freiheitsgrade abstoßen, werden sich bei steigender Dichte die Wellenfunktionen der Nukleonen aufgrund ihrer endlichen Ausdehnung mehr und mehr überlappen. Dadurch wird die Substruktur der Nukleonen bereits vor dem Phasenübergang wichtig. Wir werden daher die Frage stellen, welche Zusammensetzung sich im Inneren von Kernen ergibt, wenn wir Quarks und Nukleonen in einem einfachen Modell kombinieren. Ähnliche Ideen wurden bereits in den achtziger Jahren zur Beschreibung kovalenter Bindungen eingeführt, siehe beispielsweise [67]. Unser Modell geht jedoch darüber hinaus, wir lassen die Existenz eines unbeschränkten Quark-Substrats zu.

Wir verbinden die Quark- und Nukleon-Dynamik durch ein lineares σ -Modell, über das die beiden Sektoren kommunizieren. Der Übergang zwischen den Quark- und den Nukleon-Freiheitsgraden $n \leftrightarrow 3q$ wird natürlich durch eine komplizierte confinement-Wechselwirkung beschrieben. Im Gleichgewicht müssen wir diese jedoch nicht explizit kennen. Die Lagrangedichte des Modells ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}_n (i\gamma^\mu D_\mu^{(vn)} - g_{sn}(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5))\psi_n + \bar{\psi}_q (i\gamma^\mu \partial_\mu - g_{sq}(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5))\psi_q \\ & + \frac{1}{2} \left((D_\mu^{(sv)}\vec{\pi})^2 + (D_\mu^{(sv)}\sigma)^2 \right) - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} - \mathcal{V}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2), \end{aligned}$$

mit den kovarianten Ableitungen $D_\mu^{(vn/sv)} = \partial_\mu + ig_{vn/sv}\omega_\mu$, dem Feld-Tensor $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$ und dem Potential für die spontane Symmetriebrechung

($m_s^2 < 0$):

$$\mathcal{V}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = \frac{m_s^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2.$$

Der hadronische Teil der Lagrangedichte ist eine modifiziertes Walecka-Modell [28], in dem der explizite Massenterm der Vektor-Mesonen durch eine Kopplung an die skalaren Mesonen ersetzt wurde. Die ω -Mesonen erhalten also ebenso wie die Quarks ihre Masse durch das σ -Feld. Dadurch skalieren alle Hadron-Massen, wie auch von Brown und Rho vorgeschlagen [68], die ebenfalls die Kompatibilität von Quark- und Nukleon-Freiheitsgraden bei endlicher Temperatur und Dichte untersucht haben [47]. Eine Konsequenz dieses Skalierens der ω -Massen ist, daß die chirale symmetrische Phase mit $\langle \sigma \rangle \approx 0$ und kleiner ω -Masse, unterdrückt ist, weil in der Mittelfeld-Näherung die ω -Abstoßung sehr groß wird.

In der klassischen Kernphysik nimmt man an, daß die kurzreichweitige Abstoßung durch den ω -Meson-Austausch zustande kommt. In der Lagrangedichte oben haben wir hingegen die Kopplung zwischen ω -Meson und Quarks vernachlässigt, aber die Anziehung der chiralen Felder berücksichtigt. Diese Näherung basiert auf Untersuchungen des Meson-Propagators in Gitterrechnungen [69] und im Instanton-Modell [70], die zeigen, daß der $\bar{q}q$ Vektor-Kanal wenig wechselwirkt im Vergleich zum pseudoskalaren- und skalaren Kanal. Natürlich gibt es auch Gluon-Austausch im Vektor-Kanal, doch seine Stärke scheint viel schwächer zu sein.

Freie Konstituentenquarks mit derselben Masse wie die in den Nukleonen gebundenen Quarks stellen in unserem Modell einen größeren Cluster dar, für den der baryonische Mittelpunkt nicht länger lokalisiert werden kann. Diese "freien" Quarks beschreiben das ständige Wechseln von String-Konfigurationen.

Zur numerischen Lösung des Modells wählen wir die folgenden Kopplungen: $g_{sq} = 3.23$, $g_{sn} = 3 \cdot g_{sq} = 9.69$, $m_s^2 = -0.26$, $\lambda = 30.0$, $g_{sv} = 8.41$, $g_{vn} = 9.5$. Die Kopplungen des mesonischen Potentials m_s^2 und λ sind die Kopplungen (X) aus Abschnitt 5.2 (siehe Tabelle 5.1). Wir hatten für diesen Parametersatz eine σ -Masse von $M_\sigma = 720$ MeV und eine Nukleonmasse $M_n = 901$ MeV gefunden. In der Mittelfeld-Näherung verschwinden der Erwartungswert der π -Felder und des räumlichen Anteil des ω -Feldes. Mit den konstanten Erwartungswerten $\bar{\sigma}$ und $\bar{\omega}$ nimmt die Lagrangedichte die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MF} = & \bar{\psi}_n(i\gamma^\mu \partial_\mu - g_{vn}\gamma^0\bar{\omega} - g_{sn}\bar{\sigma})\psi_n + \bar{\psi}_q(i\gamma^\mu \partial_\mu - g_{sq}\bar{\sigma})\psi_q \\ & + \frac{1}{2}g_{sv}^2\bar{\sigma}^2\bar{\omega}^2 - \frac{m_s^2}{2}\bar{\sigma}^2 - \frac{\lambda}{4}\bar{\sigma}^4. \end{aligned}$$

an. Die Anzahl der internen Freiheitsgrade ist $\gamma_n = 4$ für Nukleonen und $\gamma_q = 12$ für die Quarks: zwei Spin- und zwei Isospin-Zustände sowie drei verschiedenen Farben für Quarks. Im Grundzustand bilden Nukleonen und Quarks zwei unabhängige Fermi-Gase mit den Fermi-Impulsen k_{Fn} und k_{Fq} , die durch die erhaltene Gesamt-Baryon-Dichte $\rho_B = \psi_n^\dagger\psi_n + \frac{1}{3}\psi_q^\dagger\psi_q$ verbunden sind:

$$(1-x)\rho_B = \frac{\gamma_n}{6\pi^2}k_{Fn}^3 \quad \text{und} \quad 3x\rho_B = \frac{\gamma_q}{6\pi^2}k_{Fq}^3 \quad .$$

Die Variable x gibt die Konzentration der Quarks im System an.

Jetzt können wir die Energiedichte berechnen:¹

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{\gamma_n}{8\pi^2} \left(\sqrt{k_{Fn}^2 + g_{sn}^2 \bar{\sigma}^2} \left(k_{Fn}^3 + \frac{g_{sn}^2 \bar{\sigma}^2 k_{Fn}}{2} \right) - \frac{g_{sn}^4 \bar{\sigma}^4}{2} \ln \left(\frac{k_{Fn} + \sqrt{k_{Fn}^2 + g_{sn}^2 \bar{\sigma}^2}}{g_{sn} \bar{\sigma}} \right) \right) \\ & + \frac{\gamma_q}{8\pi^2} (k_{Fn} \leftrightarrow k_{Fq}, g_{sn} \leftrightarrow g_{sq}) + \frac{\gamma_n^2 g_{vn}^2}{72\pi^4 g_{sv}^2 \bar{\sigma}^2} k_{Fn}^6 + \frac{m_s^2}{2} \bar{\sigma}^2 + \frac{\lambda}{4} \bar{\sigma}^4, \end{aligned} \quad (5.64)$$

wobei der selbstkonsistente Mittelfeld-Wert $\bar{\sigma}$ im Grundzustand gegeben ist durch die Minimierung von ϵ bezüglich $\bar{\sigma}$.

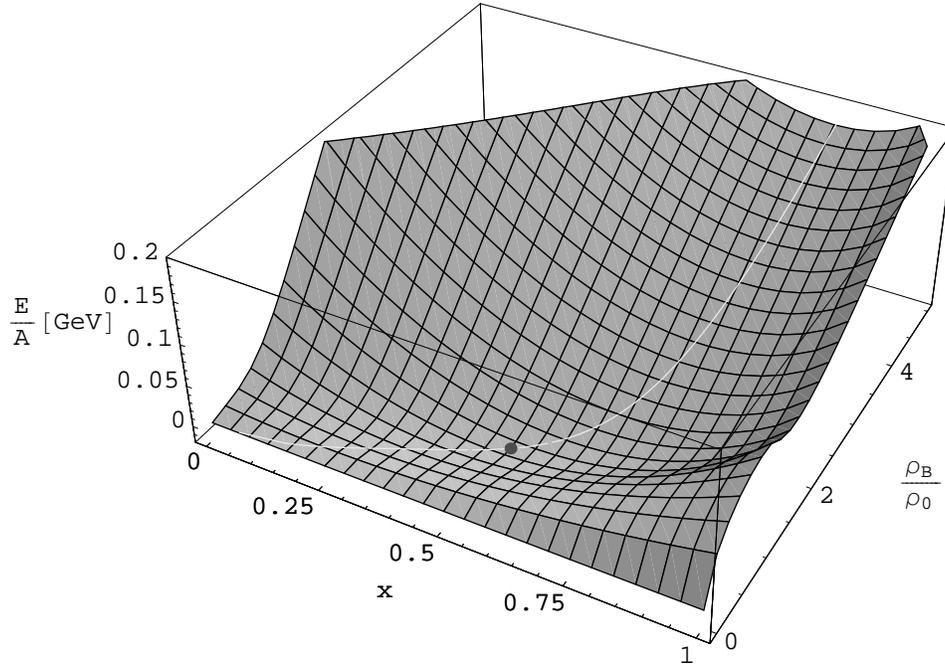


Abbildung 5.13: Bindungsenergie pro Baryon $\frac{E}{N_B} = \frac{\epsilon(\rho_B) - \epsilon(0)}{\rho_B} - M_N$ als Funktion der unabhängigen Variablen x und ρ_B , angegeben in Einheiten der normalen Kerndichte $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$

Das Resultat der Mittelfeld-Rechnung ist in Abbildung 5.13 dargestellt. Links in der Abbildung bei $x = 0$ liegt die reine Hadronphase. Die rechte Grenze $x = 1$ zeigt die reine Quarkphase mit einem Knick in der Kurve aufgrund des ersten Ordnung Phasenübergangs. Der Grenzfall $x = 1$ entspricht dem Ergebnis des vorherigen Abschnittes in Abbildung 5.10 (linke Seite). Dieser erste Ordnung Übergang besteht nur für Quark-Konzentrationen $x \gtrsim 0.99$. Am Endpunkt $x =$

¹Der erste Term der zweiten Zeile hat die gleiche Form wie der Nukleon-Term in der ersten Zeile, mit vertauschten Impulsen und Kopplungen.

0.99 findet man einen Phasenübergang zweiter Ordnung, für kleinere Quark-Konzentrationen erhält man einen crossover. Diese Unterdrückung der chiral symmetrischen Phase kommt durch das skalieren der Massen zustande.

Die weiße Linie in Abbildung 5.13 zeigt die stabile Konfiguration mit minimaler Energie bei gegebener Dichte. Wir finden einen weichen Übergang zwischen einer verschwindenden Quark-Konzentration im Vakuum und einer asymptotischen Konfiguration $x_\infty \approx 0.9$ wenn $\rho_B \rightarrow \infty$. Diese Kurve minimaler Energie ist in unserem Modell die Zustandsgleichung der Kernmaterie. Sie ist als 2D-Projektion nocheinmal in Abbildung 5.14 zusammen mit einer Rechnung von Pandharipande et. al. [55] dargestellt. Während weder Quark- noch Nukleonmaterie alleine zur Bindung führen, ergibt die Mischung eine Sättigungsdichte $\rho_S = 1.14\rho_0$ mit $E_B = 16$ MeV.

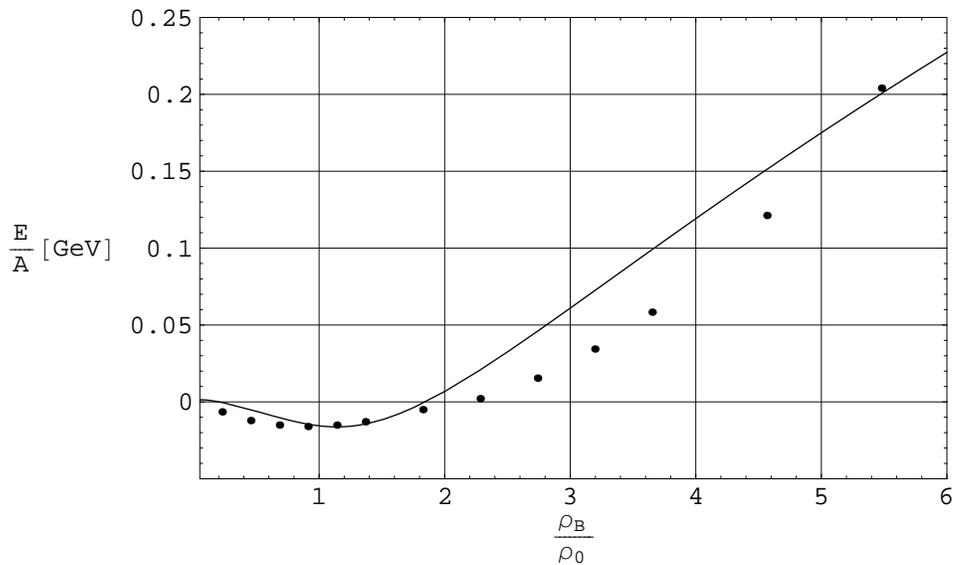


Abbildung 5.14: Die Zustandsgleichung von Kernmaterie. Die durchgezogene Linie ist die Projektion der weißen Linie in Abbildung 5.13. Die Punkte sind Rechnungen von Pandharipande et. al. [55].

Die Dirac-Masse des Nucleons bei Sättigungsdichte ist $M_D^* = g_{sn}\bar{\sigma}_s = 581$ MeV. Wie in [71] dargestellt ist diese Größe nicht das relativistische Analogon der nichtrelativistischen effektiven Masse, die in Kernexperimenten gemessen wird. Die entsprechend relevante Größe ist die Lorentz-Masse M_e^* , gegeben durch $\frac{M_e^*}{M_n} = 1 - \frac{g_{sn}\bar{\omega}}{M_n}$. Wir finden $\frac{M_e^*}{M_n} = 0.71$ verglichen mit einem experimentellen Wert $\frac{M^*}{M_n} \approx 0.74$. Wie auch im Walecka-Modell ist der Kompressionsmodulus $K_\infty = 823$ MeV viel zu groß. Dies ist ein generelles Problem einfacher Mittelfeld-Modelle und könnte durch das Hinzufügen weiterer Meson-Wechselwirkungen oder zusätzlicher Potentialterme korregiert werden.

Die Quark-Konzentration bei der Sättigungsdichte $\rho = 1.14\rho_0$ ist $x_s = 50\%$. Dieser relativ hohe Wert wird in Kernen aufgrund der Oberflächen-Bereiche, de-

ren Dichte unterhalb der Kerndichte liegt, reduziert. Eine einfache Abschätzung mit einer Fermi-Verteilung für die radiale Dichte gibt $\langle x \rangle \approx 40\%$ für ^{208}Pb und $\langle x \rangle < 30\%$ für ^{16}O . Es gibt in der Tat Messungen der Besetzung von tiefer liegenden Orbitalen des Schalen-Modells, die nahelegen, daß diese nicht vollständig besetzt sind. Stattdessen ist die Fermi-Oberfläche aufgeweicht. Dieser Effekt wurde durch eine Mischung von Orbitalen erklärt, in unserem Modell kommt er jedoch einfach durch die Kopplung verschiedener Quark-Impulse an ein baryonisches Drei-Quark-System zustande. Solch ein zusammengesetztes Baryon muß nicht notwendigerweise ein Nukleon sein, sondern es kann sich auch um einen angeregten Baryon-Zustand handeln.

Abbildung 5.15 zeigt die Besetzung der Zustände in einem Blei-Kern, berechnet in unserem Modell. Das Ergebnis ist vergleichbar mit Resultaten in denen Grundzustands-Korrelationen berücksichtigt werden [72]. Die “freien” Konstituenten-Quarks reduzieren die Anzahl der Quasi-Baryonen unterhalb des Fermi-Impulses und erhöhen sie oberhalb des Fermi-Impulses k_{Fn} . Der unveränderte Teil der Fermi-Oberfläche hängt mit dem Residuum-Faktor z zusammen, der experimentell bestimmt werden kann. Weil das 3s-Orbital in Blei beinahe vollständig im Inneren des Kernes liegt, können wir in guter Näherung den Wert für die Quark-Konzentration bei Kerndichte annehmen und damit den Residuum-Faktor für dieses Orbital berechnen. Das Resultat $z = 0.67$ ist guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert $z = 0.64 \pm 0.06$, der in ($e, e'p$) Experimenten bestimmt wurde [73].

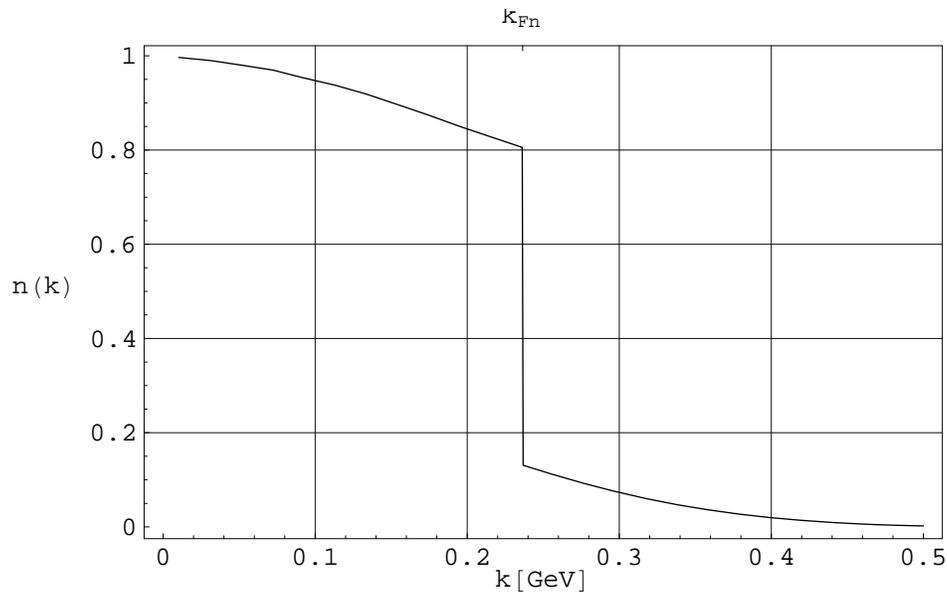


Abbildung 5.15: Die Besetzungszahl $n(k)$ von Quasi-Baryonen in Blei.

Fassen wir also diesen Abschnitt noch einmal zusammen: Wir haben ein schematisches Modell mit Quarks und Nukleonen konstruiert, das zwischen dem Bereich der niederdichten Kernmaterie und dem hochdichten Bereich mit Quarks

kontinuierlich interpoliert. Als Resultate haben wir gefunden, daß unser Modell die Zustandsgleichung von Kernmaterie qualitativ reproduziert und eine einfache Erklärung für den Residuumsfaktor gibt. Allerdings mußten wir die Annahme machen, daß sowohl für Nukleonen wie auch für Quarks jeweils ein unabhängiger Fermi-See existiert. Aufgrund des repulsiven ω -Mittelfeldes bei Sättigungsdichte $g_{\nu n} \bar{\omega}_s = 263$ MeV haben die Nukleonen dann eine wesentlich höhere Energien als die Konstituentenquarks. Des Weiteren ist die Rechnung durch das Auftreten gluonischer Freiheitsgrade bei sehr hohen Dichten beschränkt. Diese Effekte sollten bei Impulsen $k_{UV} \geq 1$ GeV auftreten (vergleiche Abschnitt 4.1 und [22]).

Durch die Hinzunahme der Nukleonen und der ω -Mesonen hat sich das physikalische Bild komplett geändert: Der chirale Phasenübergang 1. Ordnung, den wir in den vorhergehenden Abschnitten gefunden hatten, existiert hier nur für sehr hohe Quark-Konzentrationen. Bei realistischen Werten findet man nur einen Crossover, die Übergangsdichte liegt immer noch knapp über der normalen Kerndichte. Außerdem finden wir selbst für asymptotisch hohe Dichten Nukleonen im System.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel der hier vorgestellten Arbeit bestand in der Erweiterung der bereits vorliegenden Rechnungen zur Evolution des linearen σ -Modells im Heat-Kernel-Formalismus [22]. Diese Erweiterung wurde in zwei Richtungen durchgeführt, einerseits wurden bei $T = 0$ und $\mu = 0$ die Flußgleichungen für die Yukawa-Kopplung und die Wellenfunktions-Renormierungs-Konstanten aufgestellt. Andererseits wurden der Heat-Kernel-Formalismus auf das lineare σ -Modell in Anwesenheit einer endlichen Baryon-Dichte angewendet.

Im einführenden **Kapitel 2** haben wir zunächst das lineare σ -Modell vorgestellt und die PCAC-Relation, sowie die Goldberger-Treimann-Relation angegeben. Die Pion-Quark-Streuung wurde kurz diskutiert.

Der Formalismus der Heat-Kernel-Renormierungsgruppen Flußgleichungen wurde im **Kapitel 3** systematisch entwickelt. Am Beispiel einer skalaren Theorie haben wir die Herleitung von Flußgleichungen für das effektive Potential und die Wellenfunktions-Renormierung durchgeführt und im Detail diskutiert. Die Eigenschaften des Heat-Kernel-cutoffs wurden analysiert um dann im Abschnitt 3.3 die Heat-Kernel-Flußgleichungen mit den exakten Flußgleichungen zu vergleichen. Die Exaktheit der Heat-Kernel-Flußgleichungen konnte zwar nicht bewiesen werden, wir haben uns jedoch durch den numerische Vergleich der effektiven Wirkung beider Methoden davon überzeugt, daß die Heat-Kernel-Flußgleichungen ähnlich zu den exakten Flußgleichungen funktionieren. Als Ergebnis dieses Kapitels wurde dabei die Verschiedenheit der Renormierungsgruppen-Skalen in den beiden Ansätzen verstanden. Außerdem wurde deutlich, daß der in dieser Arbeit verwendete Heat-Kernel-cutoff ($M=2$) den Ultraviolett-Bereich der Impuls-Integrale nur sehr schwach abschneidet.

Der im 3. Kapitel entwickelte Formalismus wurde dann im **Kapitel 4** auf das lineare σ -Modell angewendet. Es stellte sich heraus, daß die Ableitungsentwicklung im Heat-Kernel-Formalismus sehr gut durchführbar ist. Die Schwinger-Eigenzeit-Darstellung ermöglicht es, die gesamte effektive Wirkung relativ einfach nach Ableitungen zu entwickeln. Die resultierenden Flußgleichungen für die

Z-Faktoren der Quark- und Meson-Felder und die Yukawa-Kopplung wurden aufgestellt. Aufgrund der Schwinger-Darstellung und des Heat-Kernel-cutoffs sind diese Gleichungen analytisch berechenbar und haben eine einfache, anschauliche Form.

Das resultierende System von Flußgleichungen wurde zuerst in der Näherung vieler Farbfreiheitsgrade untersucht. Es konnte gezeigt werden, daß die Resultate einer Evolution der reinen Quark-Fluktuationen die gleichen Ergebnisse wie die Lösung der NJL-Gap-Gleichung liefern. Darüber hinausgehende, die Meson-Dynamik einschließende Rechnungen führen im NJL-Modell zu zusätzliche Annahmen. Die vollen Renormierungsgruppen-Gleichungen hingegen ermöglichen die konsistente Berücksichtigung der Meson-Fluktuationen. Es stellte sich heraus, daß der Renormierungsfluß, ausgehend von den NJL-Anfangsbedingungen, das System in den spontan gebrochenen Bereich der Theorie treibt. Die Meson-Fluktuationen wirken der Symmetriebrechung allerdings entgegen und der Wert für die Pion-Zerfallskonstante im Infrarot-Bereich wird verringert.

Die Evolution der vollen Flußgleichungen mit adjustierten Anfangsbedingungen wurde im Abschnitt 4.4 vorgestellt. Das Flußgleichungs-System besitzt, wie gezeigt wurde, ein starkes Fixpunkt-Verhalten, wodurch man Vorhersagen für die Masse des σ -Mesons und die Quark-Masse gewinnt. Qualitativ zeigt der Renormierungs-Fluß der Kopplungen das gleiche Verhalten wie in den Rechnungen mit exakten Flußgleichungen [19]. Das Laufen der Kopplungen kommt in unserem Formalismus jedoch erst bei sehr niedrigen Skalen k zum Stillstand. Dadurch sind die resultierenden Infrarot-Werte der Massen mit 250 MeV für das σ -Meson bzw. 169 MeV für Quarks deutlich zu niedrig. Dies ist wahrscheinlich auf das schwache Ultraviolett-Abschneiden des Heat-Kernel-cutoffs zurückzuführen. Hier sollte untersucht werden, ob mit besser konvergierenden cutoffs auch die Vorhersagen für die Infrarot-Massen verbessert werden können.

Im Abschnitt 4.5 wurde die in höherer Ordnung der Ableitungsentwicklung mögliche Aufspaltung der Z-Faktoren für das Pion- und σ -Feld hergeleitet. Für die Yukawa-Kopplung ergibt sich ebenfalls eine Aufspaltung, wenn man feldabhängige Korrekturen zu g berücksichtigt. Es zeigte sich, daß der Renormierungs-Fluß der Kopplungen für Skalen oberhalb von 200 MeV von diesen Korrekturen nicht beeinflusst wird. Durch diese Beobachtung wird die Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung gerechtfertigt. Bei Skalen unterhalb von 200 MeV verschwindet die Yukawa-Kopplung g_σ und das σ -Meson entkoppelt völlig aus der Theorie. Im Infrarot-Bereich erhält man eine effektive Niederenergie-Theorie, die nur noch Pionen enthält.

Im **Kapitel 5** haben wir die Anwendung des Heat-Kernel-Renormierungsgruppen-Formalismus auf das lineare σ -Modell bei endlicher Baryon-Dichte diskutiert. Die Flußgleichung mit endlichem chemischen Potential konnte analytisch berechnet werden, sie besitzt eine sehr einfache Form. Das Auftreten einer Θ -Funktion bereitet allerdings Schwierigkeiten bei der numerischen Lösung dieser Gleichung. Wir haben daher die Flußgleichung mit chemischem Potential in eine Flußgleichung mit endlicher Dichte transformiert und dabei das chemische Potential als laufende Kopplung behandelt. Zusätzliche Probleme mit

Meson-Instabilitäten, die besonders in Rechnungen endlicher Dichte zutage treten, zwangen uns die Evolution mit einer stark vereinfachten Flußgleichung durchzuführen. Diese Instabilitäten sind mit der Konvexität des effektiven Potentials verknüpft, die durch die Flußgleichungen reproduziert wird. Sie lassen sich wahrscheinlich mit einem anderen cutoff zu kleineren Skalen verschieben, womit bereits einiges gewonnen wäre.

Um die Ergebnisse dieser Rechnung zu überprüfen wurde dann eine Mittelfeld-Rechnungen durchgeführt. Die Ergebnisse stimmen im Rahmen der Parameterwahl mit der Berechnung der Zustandsgleichung durch die Flußgleichung überein. In beiden Rechnungen wurde ein Phasenübergang 1. Ordnung gefunden. Die Dichten bei denen er stattfindet liegen zu niedrig, wie dies auch in NJL-Rechnungen gefunden wurde. Die Übergangsdichte zur chiral symmetrischen Phase liegt bei $\rho_{\chi\text{SB}} = (0.32 - 1.32)\rho_0$ also etwas unterhalb der von anderen Autoren gefundenen Werte.

Im letzten Abschnitt 5.4 wurde dann noch ein kombiniertes Quark-Nukleon-Modell vorgestellt, daß außerdem den Austausch von Vektor-Mesonen beinhaltet. In einer Mittelfeld-Rechnung wurde gezeigt, daß sich der chirale Phasenübergang komplett ändert, wenn man Nukleonen und ω -Mesonen berücksichtigt.

Ausblick Vom formalen Gesichtspunkt her wurde gezeigt, daß der Heat-Kernel-Formalismus eine sehr gut handhabbare Methode zur Untersuchung effektiver Modelle ist. Die erzielten Ergebnisse der Kapitel 4 und 5 sind vergleichbar mit Ergebnissen der exakten Flußgleichungen. Der hier benutzte Heat-Kernel-cutoff hat jedoch ein schwaches Ultraviolett-Konvergenzverhalten. Das führt dazu, daß die Kopplungen unter Renormierungsgruppen-Fluß sehr lange laufen und so beispielsweise die Infrarot-Massen im Kapitel 4 deutlich zu klein sind. Andererseits treten auch die numerischen Probleme in der Rechnung mit endlicher Dichte durch dieses schlechte Konvergenz-Verhalten zutage. Für zukünftige Anwendungen der Methode sollte ein cutoff mit besseren Konvergenz-Eigenschaften benutzt werden.

Der im Abschnitt 4.5 beschriebene Übergang zur effektiven Niederenergie-Theorie, in der das σ -Meson nicht mehr auftritt, stellt die Verbindung zur chirale Störungstheorie her. Hier wäre es interessant zu untersuchen, ob die experimentell bestimmbaren Ableitungs-Kopplungen der chiralen Störungstheorie auch mit Renormierungsgruppen-Methoden zu berechnen sind (siehe auch [74]).

Trotz der Probleme im Quark-Meson-Modell bei endlicher Dichte wäre es auch nach wie vor wünschenswert das gesamte Phasendiagramm bei endlicher Temperatur und Dichte zu berechnen. Im Falle endliche Temperatur sind die Instabilitäten möglicherweise unterdrückt, so daß man das Phasendiagramm von hohen Temperaturen und vergleichsweise geringen Dichten her erkunden könnte.

Weiter stellen wir fest, daß der chirale Phasenübergang bei endlicher Dichte in einem reinen Quark-Meson-Modell noch nicht zufriedenstellend zu beschreiben

ist. Die Physik bei endlicher Baryon-Dichte stellt sich wesentlich komplizierter dar als die QCD bei endlicher Temperatur. Bei niedrigen Dichten sind Nukleonen und Mesonen die entscheidenden Freiheitsgrade, bei hohen Dichten gibt es Effekte wie Farbsupraleitung und Color-Flavour-Locking. In dem Zwischenbereich sind vielleicht auch Quarks und Meson die richtigen Freiheitsgrade, anders als bei endlicher Temperatur ist hier jedoch der Übergang zwischen den Quark- und Nukleon-Freiheitsgraden wesentlich wichtiger.

Dieser Übergang ist aber letztlich nur zu verstehen, wenn man die Gluon-Dynamik korrekt beschreibt und so auch die Farbeinschießung berücksichtigt. Ansätze dazu sind beispielsweise die Arbeiten von Wetterich und Berges zur Gluon-Meson-Dualität, in der die Farbsymmetrie durch einen Higgs-Mechanismus spontan gebrochen wird [75, 76]. Weitere Möglichkeiten die Gluon-Dynamik zu beschreiben sind das farbdielektrische Modell [77] oder Gluon-Feldstärke-Korrelatoren [78].

Anhang A

Nützliche Formeln

A.1 Die Heat-Kernel-Darstellung

Die Heat-Kernel-Darstellung wurde Ursprünglich von Schwinger eingeführt [33]. Sie wird sehr ausführlich in dem Übersichtsartikel von Ball [79] behandelt, zum Einarbeiten eignen sich jedoch einige Abschnitte aus dem Buch von Donoghue, Golowich und Holstein [26] oder beispielsweise die Arbeit von Schäfer und Pirner [35] besser.

Zur Ableitungsentwicklung gibt es eine Reihe von Arbeiten von Zuk, beispielsweise [80] oder [81], in der auch die Schwinger-Eigenzeit-Darstellung benutzt wird. Weitere Arbeiten zur Ableitungsentwicklung sind die von Oleszcuk [36] und Liao [37], wobei letztere sehr zu empfehlen ist. In ihr wird der Heat-Kernel-cutoff mit einem Pauli-Villars-cutoff verglichen und die Flußgleichungen für eine skalare Theorie werden aufgestellt. Die Ableitungsentwicklung eines $O(N)$ -Modells im Heat-Kernel-Formalismus wurde in [39] durchgeführt. Dort sind auch die dafür benötigten Projektoren und einige Spuren über Projektoren aufgeführt.

Fassen wir also einige der wichtigsten Formeln zusammen: In der Schwinger-Eigenzeit-Darstellung wird der Logarithmus eines Operators in ein Integral über die Schwinger-Eigenzeit τ umgewandelt:

$$\mathrm{Tr} \ln \mathcal{D} = -\mathrm{tr} \int d^4x \int \frac{d\tau}{\tau} \langle x | e^{-\tau \mathcal{D}} | x \rangle + C \quad , \quad (\text{A.1})$$

wobei C eine divergierende Konstante ist, die keinen physikalischen Einfluß hat.

Wir benutzen also:

$$\begin{aligned}
\ln A &= - \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau A} \\
\frac{1}{A} &= \int d\tau e^{-\tau A} \\
\frac{1}{A^2} &= \int \tau d\tau e^{-\tau A} \\
\frac{2}{A^3} &= \int \tau^2 d\tau e^{-\tau A} \\
&\vdots \\
\frac{n!}{A^{(n+1)}} &= \int \tau^n d\tau e^{-\tau A} .
\end{aligned}$$

Die Funktionals-Spur in Gleichung (A.1) läßt sich durch das Einschleiben von ebenen Wellen auswerten:

$$\text{Tr} \ln \mathcal{D} = -\text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-ipx} e^{-\tau \mathcal{D}} e^{ipx} , \quad (\text{A.2})$$

dabei wurden die folgenden Relationen benutzt:

$$\langle p|x \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{ipx} \quad (\text{A.3})$$

$$\langle x|x' \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-x')} = \delta^4(x-x') \quad (\text{A.4})$$

$$\langle p'|p \rangle = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{i(p'-p)x} = \delta^4(p'-p) . \quad (\text{A.5})$$

Der Operator $\mathcal{D} = -\partial^2 + m^2$ enthält Ableitungsterme, die auf die Exponentialfunktion links in Gleichung (A.2) wirken. Durch die Beziehungen

$$\partial_\mu e^{ipx} = e^{ipx} (ip_\mu + \partial) \quad (\text{A.6})$$

$$\partial^2 e^{ipx} = e^{ipx} (-p^2 + 2ip_\mu \partial^\mu + \partial^2) \quad (\text{A.7})$$

finden wir die Form

$$\text{Tr} \ln \mathcal{D} = -\text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau(p^2 - 2ip_\mu \partial^\mu - \partial^2 + m^2)} \mathbb{1} , \quad (\text{A.8})$$

die wir auch in den Kapiteln 3 und 4 benutzt haben.

Weiterhin benötigt man die Impulsintegrale

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-\tau p^2} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\tau^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} p_\mu p_\nu e^{-\tau p^2} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{\delta^{\mu\nu}}{\tau^3} . \quad (\text{A.10})$$

A.2 Projektionsoperatoren

Die allgemeinen Projektoren im $O(N)$ -Raum sind gegeben durch

$$X_1^{ab} = \frac{\Phi^a \Phi^b}{\Phi^2} \quad (\text{A.11})$$

$$X_2^{ab} = \delta^{ab} - \frac{\Phi^a \Phi^b}{\Phi^2} \quad , \quad (\text{A.12})$$

mit den Eigenschaften

$$X_i X_j = \delta^{ij} X_j \quad (\text{A.13})$$

$$\text{tr} X_1 = 1 \quad (\text{A.14})$$

$$\text{tr} X_2 = (N-1) \quad (\text{A.15})$$

Wir untersuchen nur den Fall $N = 4$, also schreiben wir $\text{tr} X_2 = 3$. Mit den Projektoren läßt sich die zweifache Ableitung des effektive Potentials $U^{ab}(\Phi^2)$ im $O(4)$ zerlegen als

$$(U'')^{ab}(\Phi^2) = M_\sigma^2(\Phi^2) X_1^{ab} + M_\pi^2(\Phi^2) X_2^{ab} \quad . \quad (\text{A.16})$$

Die Koeffizienten der Projektionsoperatoren, also die Massen M_σ^2 und M_π^2 können wir leicht ausrechnen:

$$\frac{\delta^2 U}{\delta \Phi^a \delta \Phi^b} = \frac{\delta}{\delta \Phi^a} \left(\frac{\delta U}{\delta \Phi^2} 2\Phi^b \right) \quad (\text{A.17})$$

$$= 2 \frac{\delta U}{\delta \Phi^2} \delta^{ab} + 4 \frac{\delta^2 U}{\delta \Phi^2 \delta \Phi^2} \Phi^a \Phi^b \quad (\text{A.18})$$

$$= \left(2 \frac{\delta U}{\delta \Phi^2} + 4 \frac{\delta^2 U}{\delta \Phi^2 \delta \Phi^2} \Phi^2 \right) X_1^{ab} + 2 \frac{\delta U}{\delta \Phi^2} X_2^{ab} \quad . \quad (\text{A.19})$$

Wir finden also für die Massen:

$$M_\sigma^2 = 2 \frac{\delta U}{\delta \Phi^2} + 4 \frac{\delta^2 U}{\delta \Phi^2 \delta \Phi^2} \Phi^2 \quad (\text{A.20})$$

$$M_\pi^2 = 2 \frac{\delta U}{\delta \Phi^2} \quad (\text{A.21})$$

In der Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung treten in der niedrigsten Ordnung bereits die Spuren über die Exponentialfunktion auf:

$$\text{tr} e^{-\tau(U'')^{ab}(\Phi^2)} = \text{tr} \left[e^{-\tau M_\sigma^2(\Phi^2)} X_1^{ab} + e^{-\tau M_\pi^2(\Phi^2)} X_2^{ab} \right] \quad (\text{A.22})$$

$$= e^{-\tau M_\sigma^2(\Phi^2)} + 3 e^{-\tau M_\pi^2(\Phi^2)} \quad . \quad (\text{A.23})$$

In höherer Ordnung der Ableitungsentwicklung sind die Spuren von Projektionsoperatoren mit Ableitungen zu berechnen:

$$\text{Tr} [X_a \partial_\mu X_b] = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, c = 1, 2 \quad , \quad (\text{A.24})$$

$$\text{Tr} [X_a \partial_\mu^2 X_b] = 2(-1)^{\delta_{ab}+1} \left(\frac{(\Phi \partial_\mu \Phi)^2}{(\Phi^2)^2} - \frac{(\partial_\mu \Phi)^2}{\Phi^2} \right) \quad , \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Tr} [X_a \partial_\mu X_b \partial_\mu X_c] = (-1)^{\delta_{bc}} \left(\frac{(\Phi \partial_\mu \Phi)^2}{(\Phi^2)^2} - \frac{(\partial_\mu \Phi)^2}{\Phi^2} \right) \quad . \quad (\text{A.26})$$

Die allgemeine Wellenfunktions Renormierungs Konstante $Z^{ab}(\Phi^2)$ lässt sich ebenso wie das effektive Potential im $O(4)$ nach den Projektoren zerlegen:

$$Z^{ab}(\Phi^2) = Z_\sigma(\Phi^2) X_1^{ab} + Z_\pi(\Phi^2) X_2^{ab} \quad . \quad (\text{A.27})$$

Wir können jetzt mit Hilfe der Projektoren den kinetischen Term ordnen nach Operatoren $(\partial_\mu \Phi)^2$ und $(\Phi \partial_\mu \Phi)^2$ und erhalten so die Koeffizienten Z_1 und Z_2 :

$$Z^{ab}(\Phi^2) (\partial_\mu \Phi_a)(\partial_\mu \Phi_b) = Z_\pi(\Phi^2) (\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{Z_\sigma(\Phi^2) - Z_\pi(\Phi^2)}{\Phi^2} (\Phi \partial_\mu \Phi)^2 \quad (\text{A.28})$$

$$:= Z_1(\Phi^2) (\partial_\mu \Phi)^2 + Z_2(\Phi^2) (\Phi \partial_\mu \Phi)^2 \quad (\text{A.29})$$

Wenn wir jetzt die Felder Φ aufspalten $\Phi = (\sigma, \vec{\pi})$ und dann in das physikalische Minimum shiften, so finden wir

$$\begin{aligned} Z^{ab}(\tilde{\Phi}^2) (\partial_\mu \tilde{\Phi}_a)(\partial_\mu \tilde{\Phi}_b) &= Z_\pi(\tilde{\Phi}^2) (\partial_\mu \tilde{\pi})^2 + Z_\pi(\tilde{\Phi}^2) (\partial_\mu \tilde{\sigma})^2 \\ &\quad + \frac{Z_\sigma(\tilde{\Phi}^2) - Z_\pi(\tilde{\Phi}^2)}{\sigma_0^2} (\sigma_0 \partial_\mu \tilde{\sigma})^2 + \dots \\ &= Z_\pi(\tilde{\Phi}^2) (\partial_\mu \tilde{\pi})^2 + Z_\sigma(\tilde{\Phi}^2) (\partial_\mu \tilde{\sigma})^2 + \dots \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Die Z-Faktoren Z_π und Z_σ sind also in der Tat die Koeffizienten der kinetischen Terme des π - und σ -Feldes.

Anhang B

Numerik

Für die numerische Lösung der Flußgleichungen aus den Kapiteln 4 und 5 wurden unterschiedliche Verfahren benutzt.

Die Flußgleichungen Gln. (4.31 - 4.34) wurden mit Mathematica gelöst [82]. Mit der Potenzreihen-Entwicklung Gl. (4.35) bzw. (4.36) erhält man ein System von sieben gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen, die mit Anfangsbedingungen gelöst werden müssen. Dazu wurde die Mathematica-Routine NDSolve verwendet. Diese Routine benutzt die sog. “non-stiff Adams”-Methode oder die “stiff Gear”-Methode. In beiden Fällen passen die Routinen ihre Integrationsschrittweite adaptiv an, bis eine vorgegebene Genauigkeit erreicht wird. Die Ergebnisse sind typischerweise auf 14 Stellen genau, d.h. für die vorliegenden Rechnungen in Kapitel 4 ist die Genauigkeit der Integration größer als 10^{-10} .

Die Mittelfeld-Rechnung im Kapitel 5 wurde mit einem C++-Program und den “numerical recipes”-Routinen durchgeführt [83]. Dabei mußte lediglich die Nullstelle der Selbstkonsistenz-Gleichung (5.53) gefunden werden. Dies ist mit sehr einfachen Methoden bei hoher Genauigkeit durchführbar, in diesem Fall wurde die Routine “zbrnt.c” benutzt, mit einer voreingestellten Genauigkeit von 10^{-15} . Das gleiche gilt für die Mittelfeld-Rechnung in Abschnitt 5.4, die mit Mathematica durchgeführt wurde.

Die numerische Lösung der Flußgleichungen bei endlicher Dichte wurde mit einem Fortran-Programm und der NAG-Library berechnet [84]. Hier wurde die partielle Differentialgleichung (5.42) zunächst auf dem Gitter diskretisiert. Die k -Integration der resultierenden 100 gekoppelten Differentialgleichungen wurde mit der Routine “D02BAF” durchgeführt. Diese Routine benutzt ebenfalls eine adaptive Schrittweite, die in den Rechnungen vorgegebene Genauigkeit war 10^{-5} .

Die größte Ungenauigkeit trat bei dieser Rechnung durch das Bilden der Ableitungen bei extrem flachem Potential auf, also in der Evolution im Bereich kleiner Skalen k und kleiner Felder Φ (vgl. Seite 76). Dadurch wird die Bestimmung der Mesonmassen bei sehr kleinen Feldstärken Φ unsicher. Um dieses

Problem zu beheben wurden Verschiedene Methoden ausprobiert: einfache 4-Punkt-Ableitungen, polynomische Fit-Funktionen oder Splines. Durch einen Fit des Potentials durch Splines läßt sich auch in diesem Bereich immer ein glattes Potential gewinnen.

Für eine verbesserte Genauigkeit wäre es jedoch in erster Linie wichtig, einen besser geeigneten cutoff zu finden, um so möglicherweise das Problem der Instabilitäten zu umgehen. Erst dann wäre eine weitere Verbesserung der numerischen Methode sinnvoll.

Anhang C

Fixpunkt-Verhalten der Flußgleichungen

Das in Abschnitt 4.4 dargestellte Fixpunktverhalten des Verhältnisses λ_R/g_R^2 kann man direkt aus den Flußgleichungen ableiten [19]: Wir stellen zunächst kurz den Zusammenhang zwischen den Flußgleichungen für Renormierte- und ‘bare’-Größen her. Wir benötigen λ_R und g_R :

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \lambda_R}{\partial k} &= k \frac{\partial}{\partial k} (Z_\Phi^{-2} \lambda) = 2\lambda_R \eta_\Phi + Z_\Phi^{-2} k \frac{\partial \lambda}{\partial k} \\ k \frac{\partial g_R^2}{\partial k} &= k \frac{\partial}{\partial k} (Z_\Phi^{-1} Z_q^{-2} g) = g_R^2 \eta_\Phi + 2g_R^2 \eta_q + Z_\Phi^{-1} Z_q^{-2} k \frac{\partial g}{\partial k} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Dabei haben wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \eta_\Phi &= -\frac{1}{Z_\Phi} k \frac{\partial Z_\Phi}{\partial k} \\ \eta_q &= -\frac{1}{Z_q} k \frac{\partial Z_q}{\partial k} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

benutzt. Die Größen η_Φ und η_q sind die anomalen Dimensionen der Meson- bzw. Quarkfelder.

Kommen wir jetzt also zur eigentlichen Herleitung. Wir betrachten das System der vollen Flußgleichungen Gl. (4.31-4.34). Bei sehr hohen Skalen k wird die Evolution des Systems durch die Quark-loops in den einzelnen Gleichungen getrieben. Die Meson-Fluktuationen sind aufgrund der hohen Meson-Massen im Ultraviolett-Bereich unterdrückt. Betrachten wir nur die Quarkfluktuationen so finden wir näherungsweise:

$$k \frac{\partial \lambda_R}{\partial k} = 2\lambda_R \eta_\Phi - \frac{N_c}{\pi} g_R^4 \quad , \quad (\text{C.3})$$

aus Gleichung (4.42) und

$$\eta_\Phi = \frac{N_c}{2\pi} g_R^2 \quad , \quad (\text{C.4})$$

aus Gleichung (4.34). In den Flußgleichungen für g und Z_q stehen in den Nennern die Meson-Massen, wir nehmen also an

$$k \frac{\partial Z_q}{\partial k} = k \frac{\partial g}{\partial k} = 0 \quad (\text{C.5})$$

und $Z_q = 1$. Jetzt können wir die Flußgleichung für das Verhältnis λ_R/g_R^2 ausrechnen:

$$k \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\lambda_R}{g_R^2} \right) = \frac{1}{g_R^2} k \frac{\partial \lambda_R}{\partial k} - \frac{\lambda_R}{g_R^4} k \frac{\partial g_R^2}{\partial k} \quad , \quad (\text{C.6})$$

und wenn wir die Näherungen von oben einsetzen finden wir

$$k \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\lambda_R}{g_R^2} \right) = \frac{N_c}{2\pi} g_R^2 \left(\frac{\lambda_R}{g_R^2} - 2 \right) \quad . \quad (\text{C.7})$$

Aus dieser Gleichung lesen wir den Fixpunkt $(\lambda_R/g_R^2)_* = 2$. Dieser Wert ist natürlich nur gültig, solange die Meson-Fluktuationen tatsächlich zu vernachlässigen sind.

Anhang D

Rechnungen bei endlicher Dichte

D.1 Die Berechnung von $\partial\Omega^F/\partial k$ und $\partial\Omega^B/\partial k$

In diesem Abschnitt leiten wir die Flußgleichungen (5.17) und (5.20) her, ausgehend von den Gleichungen (5.12) und (5.13) für das effektive Potential Ω .

Der fermionische Teil der Flußgleichungen:

Zur Herleitung des fermionische Teil der Flußgleichungen schreiben wir zunächst:

$$\Omega^F = N_c N_f I^F(k), \quad (\text{D.1})$$

mit dem Integral I^F :

$$I^F(k) = 2T \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} f(k^2\tau) e^{-\tau[(\nu_n+i\mu)^2 + \vec{q}^2 + g^2\phi^2]}. \quad (\text{D.2})$$

Die Ableitung des Heat Kernel cutoffs ist

$$\frac{df(k^2\tau)}{dk} = -k^5 \tau^3 e^{-k^2\tau}, \quad (\text{D.3})$$

mit der Kurzschreibweise $E_{q,k}^2 = g^2\phi^2 + \vec{q}^2 + k^2$, ergibt sich für die Ableitung dI^F/dk :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^F}{\partial k} &= -2k^5 T \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\tau \tau^2 e^{-\tau[(\nu_n+i\mu)^2 + E_{q,k}^2]} \\ &= -2k^5 T \left(\frac{d}{dk^2} \right)^2 \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\nu_n+i\mu)^2 + E_{q,k}^2}, \\ &= -k^5 T \left(\frac{d}{dk^2} \right)^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} S^F(q, k) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

mit

$$S^F(q, k) = \sum_n \left[\frac{1}{(\nu_n + i\mu)^2 + E_{q,k}^2} + \frac{1}{(\nu_n - i\mu)^2 + E_{q,k}^2} \right] . \quad (\text{D.5})$$

Wobei benutzt wurde, daß die Summe über die Matsubara-Frequenzen ihr Vorzeichen nicht ändert, wenn die Frequenzen ν_n negativ werden.

Die Summe in $S(q, k)$ kann jetzt wie folgt analytisch ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} S^F(q, k) &= \frac{d}{dx^2} \sum_n \left[\ln[(\nu_n + i\mu)^2 + x^2] + \ln[(\nu_n - i\mu)^2 + x^2] \right]_{x^2=E_{q,k}^2} , \\ &= \frac{d}{dx^2} \sum_n \left[\ln[\nu_n^2 + (x - \mu)^2] + \ln[\nu_n^2 + (x + \mu)^2] \right]_{x^2=E_{q,k}^2} . \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Wenn wir dann die Ableitung wieder ausführen erhalten wir

$$S^F(q, k) = \frac{1}{E_{q,k}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{E_{q,k} - \mu}{\nu_n^2 + (E_{q,k} - \mu)^2} + \frac{E_{q,k} + \mu}{\nu_n^2 + (E_{q,k} + \mu)^2} \right] . \quad (\text{D.7})$$

Jetzt benutzen wir noch die Summenformel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu_n^2 + x^2} = \frac{1}{2Tx} \tanh \frac{x}{2T} , \quad (\text{D.8})$$

und finden schließlich:

$$S^F(q, k) = \frac{1}{2TE_{q,k}} \left[\tanh \frac{E_{q,k} - \mu}{2T} + \tanh \frac{E_{q,k} + \mu}{2T} \right] . \quad (\text{D.9})$$

Einsetzen von $S^F(q, k)$ in (D.4) ergibt

$$\frac{\partial I^F}{\partial k} = -k^5 \left(\frac{d}{dk^2} \right)^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{q,k}} \left[1 - n(E_{q,k}) - \bar{n}(E_{q,k}) \right] . \quad (\text{D.10})$$

Darin sind $n(x)$ und $\bar{n}(x)$ die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktionen:

$$n(x) = \frac{1}{e^{(x-\mu)/T} + 1}, \quad \bar{n}(x) = \frac{1}{e^{(x+\mu)/T} + 1} . \quad (\text{D.11})$$

Am Ende berechnen wir noch die Ableitung nach k^2 , die mit dem Integral vertauscht. Weil k^2 nur in der Kombination $q^2 + k^2$ auftritt, kann man die Ableitung umschreiben in die Ableitung nach q^2 . Nach einer partiellen Integration erhalten wir

$$\frac{\partial I^F}{\partial k^2} = \frac{k^4}{8\pi^2} \frac{d}{dk^2} \int_0^{\infty} dq \frac{1}{E_{q,k}} (1 - n(E_{q,k}) - \bar{n}(E_{q,k})) . \quad (\text{D.12})$$

und (D.12) eingesetzt in (D.1), ergibt:

$$\frac{\partial \Omega^F}{\partial k^2} = \frac{N_c N_f}{8\pi^2} k^4 \frac{d}{dk^2} \int_0^\infty dq \frac{1}{E_{q,k}} (1 - n(E_{q,k}) - \bar{n}(E_{q,k})) \quad . \quad (D.13)$$

Am Ende führen wir noch die verbleibende k^2 -Ableitung aus und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_k^F}{\partial k^2} = & -\frac{N_c N_f}{32\pi^2} k^4 \int_0^\infty dq \left[\frac{1}{E_{q,k}^3} (1 - n(E_{q,k}) - \bar{n}(E_{q,k})) \right. \\ & \left. - \frac{1}{TE_{q,k}^2} \{n(E_{q,k})(1 - n(E_{q,k})) + \bar{n}(E_{q,k})(1 - \bar{n}(E_{q,k}))\} \right] \quad . \end{aligned} \quad (D.14)$$

Der bosonische Teil der Flußgleichungen:

Ähnlich wie beim fermionischen Anteil sind auch im bosonischen Anteil Integrale der Form

$$\Omega^B(k) = -\frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} f(k^2 \tau) e^{-\tau[\omega_n^2 + \vec{q}^2 + m^2]} \quad , \quad (D.15)$$

zu lösen. Wir betrachten an dieser Stelle nur ein einzelnes Meson der Masse m und setzen erst am Ende die entsprechenden Massen ein. ω_n sind die Matsubara Frequenzen für Bosonen. Wir betrachten nur den Fall, in dem die Bosonen kein chemisches Potential haben. Die Ableitung nach k kann analog zum fermionischen Teil durchgeführt werden. Der einzige Unterschied besteht in der Summenformel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 + x^2} = \frac{1}{2Tx} \coth \frac{x}{2T} \quad , \quad (D.16)$$

die wir für die Bosonen benutzen. Also erhalten wir

$$\frac{\partial \Omega^B}{\partial k^2} = \frac{k^4}{32\pi^2} \frac{d}{dk^2} \int_0^\infty dq \frac{1}{E_{q,k}} \coth \frac{E_{q,k}}{2T} \quad , \quad (D.17)$$

wiederum mit der Kurzschreibweise $E_{q,k}^2 = \vec{q}^2 + k^2 + m^2$.

Ausführen der Ableitung gibt wie zuvor

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega^B}{\partial k^2} = & \frac{k^4}{64\pi^2} \left[\frac{1}{m^2 + k^2} \right. \\ & \left. + 2 \int_0^\infty dq \left\{ \frac{1}{E_{q,k}^3} n_B(E_{q,k}) + \frac{1}{TE_{q,k}^2} n_B(E_{q,k})(1 + n_B(E_{q,k})) \right\} \right] \quad , \end{aligned} \quad (D.18)$$

wobei $n_B(x)$ jetzt die Bose-Einstein-Verteilungsfunktion für die Bosonen ist:

$$n_B(x) = \frac{1}{e^{x/T} - 1} \quad . \quad (\text{D.19})$$

Wenn wir den Grenzübergang $T \rightarrow 0+$ bilden, erhalten wir

$$\frac{\partial \Omega^B}{\partial k^2} = \frac{k^4}{64\pi^2} \frac{1}{m^2 + k^2} \quad . \quad (\text{D.20})$$

D.2 Integration der Fermion-Fluktuationen

Wir beschränken unsere Betrachtung auf den dichteabhängigen Teil der Evolutionsgleichungen (5.18). Wenn dieser Anteil von der Meson Evolution entkoppelt, können wir die Gleichung analytisch integrieren:

$$\Omega_{k=0}^F = \int_{k_{\text{uv}}^2}^0 \frac{d\Omega_F}{dk^2} dk^2 \quad (\text{D.21})$$

$$= \frac{N_c \mu}{8\pi^2} \int_{\mu^2 - g^2 \phi^2}^0 \frac{k^4 dk^2}{(k^2 + g^2 \phi^2) \sqrt{\mu^2 - k^2 - g^2 \phi^2}}. \quad (\text{D.22})$$

Das Integral gibt das folgende Resultat:

$$\begin{aligned} \Omega_{k=0}^F = & -\frac{N_c}{8\pi^2} \left(2\mu^3 \sqrt{\mu^2 - g^2 \phi^2} - 4\mu g^2 \phi^2 \sqrt{\mu^2 - g^2 \phi^2} - \frac{2}{3} \mu \sqrt{\mu^2 - g^2 \phi^2}^3 \right. \\ & \left. + 2(g^2 \phi^2)^2 \log \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - g^2 \phi^2}}{g\phi} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Mit den Ersetzungen

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{k_F^2 + g^2 \phi^2} \\ k_F &= \sqrt{\mu^2 - g^2 \phi^2}, \end{aligned}$$

nimmt dann das Potential Ω^F die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \Omega_{k=0}^F = & \frac{N_c}{4\pi^2} \left(2k_F \sqrt{k_F^2 + g^2 \phi^2}^3 - g^2 \phi^2 k_F \sqrt{k_F^2 + g^2 \phi^2} \right. \\ & \left. - g^4 \phi^4 \log \frac{\sqrt{k_F^2 + g^2 \phi^2} + k_F}{g\phi} \right) - \frac{N_c}{4\pi^2} \frac{8}{3} \sqrt{k_F^2 + g^2 \phi^2} k_F^3. \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Wir erinnern uns an den Zusammenhang zwischen Ω und F

$$\Omega = F - 3\rho_B \mu, \quad (\text{D.25})$$

und identifizieren der Tern in den Klammern mit F . Dieser Term ist in der Tat der fermionische Teil unseres Mittelfeld-Resultats Gl. (5.51). In der gleichen Weise können wir die Gleichung (5.42), zwar nicht analytisch, aber doch numerisch überprüfen. Wir finden in der Tat numerisch, daß der Dichte-Teil der Gleichung (5.42) ebenfalls die Mittelfeld-Resultate reproduziert.

Anhang E

Mittelfeld-Rechnung

In die Mittelfeld-Rechnung bei endlicher Dichte geht als entscheidende Größe das Meson-Potential $U(\Phi, k)$ an der Skala k_F ein. In den Rechnungen im Abschnitt 5.2 wird dieses Potential durch eine Parametrisierung mit zwei Parametern

$$U(\Phi, k_F) = \frac{1}{2}m_{MF}^2\Phi^2 + \frac{\lambda_{MF}}{4}\Phi^4 \quad (\text{E.1})$$

wiedergegeben (vgl. Gleichung 5.51). Man kann das Potential auch mit mehr Parametern fiten und die Mittelfeld-Rechnung genauso durchführen. Die Ergebnisse entsprechen im wesentlichen den Ergebnissen der Parametrisierung (Y).

Beschreiben wir das Potential durch 6 Parameter

$$U(\Phi) = A + B\Phi^2 + C\Phi^4 + D\Phi^6 + E\Phi^8 + F\Phi^{10} \quad , \quad (\text{E.2})$$

so ergibt sich durch den Fit (die Einheiten sind weggelassen):

$$\begin{aligned} A &= 0.0318528 \\ B &= -0.0241981 \\ C &= 0.23195 \\ D &= -102.623 \\ E &= 22596.9 \\ F &= -529577 \quad . \end{aligned}$$

Die Parametrisierung (E.2) und das effektive Potential aus der Renormierungsgruppen-Rechnung sind in Abbildung (E.1) dargestellt. Die beiden Kurven liegen fast identisch übereinander.

Die Mittelfeld-Rechnung läßt sich, genauso wie auf den Seiten 82 und 82 beschrieben, durchführen. Als Ergebnis zeigen wir die Bindungsenergie als Funktion der Dichte in Abbildung E.2. Die fette Linie entspricht der erweiterten Mittelfeld-Rechnung, die anderen Linien sind die Ergebnisse aus Abschnitt 5.2.

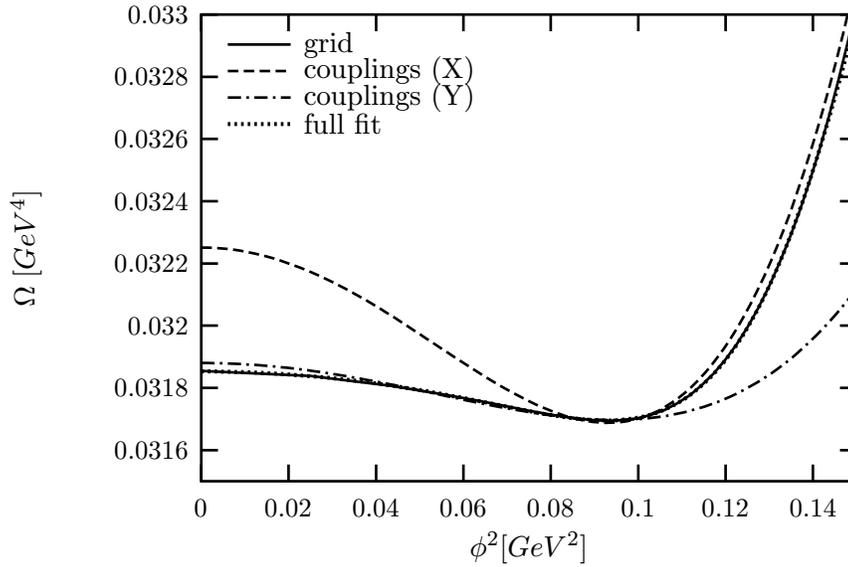


Abbildung E.1: Das Potential $\Omega(\phi^2)$ an der Skala $k = k_F$, berechnet aus den Renormierungsgruppen-Gleichungen (durchgezogene Linie) und verschiedene Fits.

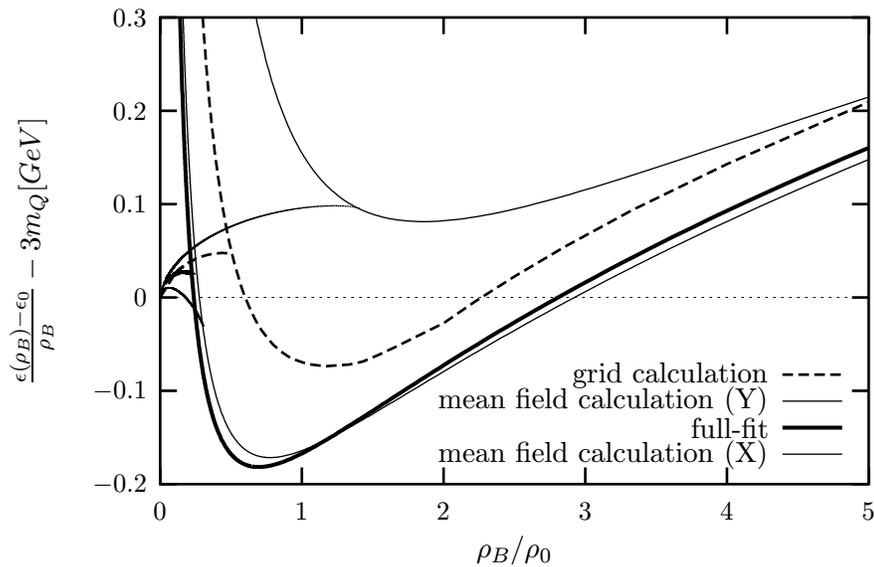


Abbildung E.2: Die Bindungsenergie pro Baryon, berechnet mit RG-Flußgleichungen und in den verschiedenen Mittelfeld-Rechnungen. Die fette Linie entspricht der erweiterten Parametrisierung.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Schmelling, “Status of the strong coupling constant,” hep-ex/9701002.
- [2] J. Gasser and H. Leutwyler, “Chiral Perturbation Theory To One Loop,” *Annals Phys.* **158** (1984) 142, A. Pich, “Chiral perturbation theory,” *Rept. Prog. Phys.* **58** (1995) 563,
- [3] M. Gell-Mann and M. Levy, “The Axial Vector Current In Beta Decay,” *Nuovo Cim.* **16** (1960) 705.
- [4] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I,” *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.
- [5] S. P. Klevansky, “The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics,” *Rev. Mod. Phys.* **64** 649 (1992).
- [6] U. Heinz, “The little bang: Searching for quark-gluon matter in relativistic heavy-ion collisions,” *Nucl. Phys. A* **685** (2001) 414.
- [7] M. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, “Color-flavor locking and chiral symmetry breaking in high density QCD,” *Nucl. Phys. B* **537** (1999) 443;
- [8] I. Barbour, S. Hands, J. B. Kogut, M. Lombardo and S. Morrison, “Chiral symmetry restoration and realisation of the Goldstone mechanism in the U(1) Gross-Neveu model at non-zero chemical potential,” *Nucl. Phys. B* **557** (1999) 327 [hep-lat/9902033].
- [9] F. Karsch, “Lattice results on QCD thermodynamics,” hep-ph/0103314.
- [10] M. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, “QCD at finite baryon density: Nucleon droplets and color superconductivity,” *Phys. Lett. B* **422** (1998) 247.
- [11] M. Buballa and M. Oertel, “Quark droplets in the NJL mean field,” *Nucl. Phys. A* **642** (1998) 39 [hep-ph/9807422].
- [12] J. Berges, D. Jungnickel and C. Wetterich, “The chiral phase transition at high baryon density from nonperturbative flow equations,” *Eur. Phys. J. C* **13** (2000) 323 [hep-ph/9811347].
- [13] J. Berges and K. Rajagopal, “Color superconductivity and chiral symmetry restoration at nonzero baryon density and temperature,” *Nucl. Phys. B* **538** (1999) 215 [hep-ph/9804233].

- [14] T. M. Schwarz, S. P. Klevansky and G. Papp, “The phase diagram and bulk thermodynamical quantities in the NJL model at finite temperature and density,” *Phys. Rev. C* **60** (1999) 055205 [nucl-th/9903048].
- [15] M. Stephanov, K. Rajagopal and E. Shuryak, “Signatures of the tricritical point in QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4816.
- [16] K. Rajagopal, “Mapping the QCD phase diagram,” *Nucl. Phys. A* **661** (1999) 150 [hep-ph/9908360].
- [17] U. Ellwanger and C. Wetterich, “Evolution equations for the quark - meson transition,” *Nucl. Phys. B* **423** (1994) 137 [hep-ph/9402221].
- [18] E. Meggiolaro and C. Wetterich, “Evolution equations for the effective four-quark interactions in QCD,” hep-ph/0012081.
- [19] D. U. Jungnickel and C. Wetterich, “Effective action for the chiral quark-meson model,” *Phys. Rev. D* **53** (1996) 5142 [hep-ph/9505267].
- [20] J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, “Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics,” hep-ph/0005122.
- [21] J. Berges, D. U. Jungnickel and C. Wetterich, “Two flavor chiral phase transition from nonperturbative flow equations,” *Phys. Rev. D* **59** (1999) 034010 [hep-ph/9705474].
- [22] B. Schaefer and H. Pirner, “Renormalization group flow and equation of state of quarks and mesons,” *Nucl. Phys. A* **660** (1999) 439 [nucl-th/9903003].
- [23] J. Meyer, G. Papp, H. J. Pirner and T. Kunihiro, “Renormalization group flow equation at finite density,” *Phys. Rev. C* **61** (2000) 035202 [nucl-th/9908019].
- [24] J. Meyer and H. J. Pirner, “Renormalisation-group flow-equations at finite density,” *In *Trento 1999, Understanding deconfinement in QCD* 178-180.*
- [25] J. Meyer, K. Schwenzer and H. J. Pirner, “Unifying nucleon and quark dynamics at finite baryon number density,” *Phys. Lett. B* **473** (2000) 25 [nucl-th/9908017].
- [26] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, “Dynamics of the standard model,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1992) 540 p. (Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics and cosmology, 2).*
- [27] V. Koch, “Introduction to Chiral Symmetry,” nucl-th/9512029.
- [28] J. D. Walecka, “Theoretical nuclear and subnuclear physics,” *New York, USA: Oxford Univ. Pr. (1995) 610 p.*
- [29] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” *Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.*

- [30] J. Zinn-Justin, “Quantum field theory and critical phenomena”, Oxford 1989
- [31] J. Berges, “QCD in extreme conditions and the Wilsonian ‘exact renormalization group’,” hep-ph/9902419.
- [32] D. U. Jungnickel and C. Wetterich, “Flow equations for phase transitions in statistical physics and QCD,” hep-ph/9902316.
- [33] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951)
- [34] C. Wetterich, “The Average action for scalar fields near phase transitions,” Z. Phys. C **57** (1993) 451; C. Wetterich, “Improvement of the average action,” Z. Phys. C **60** (1993) 461.
- [35] B. Schaefer and H. Pirner, “Application of the heat-kernel method to the constituent quark model at finite temperature,” Nucl. Phys. A **627** (1997) 481 [hep-ph/9706258].
- [36] M. Oleszczuk, “A Symmetry preserving cutoff regularization,” Z. Phys. C **64** (1994) 533.
- [37] S.-B. Liao, “On the Connection Between Momentum Cutoff and Operator Cutoff Regularizations”, Phys. Rev. **D53** (1996) 2020-2036, hep-th/9501124
- [38] G. Papp, B. J. Schaefer, H. J. Pirner and J. Wambach, “On the convergence of the expansion of renormalization group flow equation,” Phys. Rev. D **61** (2000) 096002 [hep-ph/9909246].
- [39] O. Bohr, B. J. Schaefer and J. Wambach, “Renormalization group flow equations and the phase transition in $O(N)$ models,” hep-ph/0007098.
- [40] C. Wetterich, “Exact evolution equation for the effective potential,” Phys. Lett. B **301** (1993) 90.
- [41] A. Bonanno and D. Zappala, “Towards an accurate determination of the critical exponents with the renormalization group flow equations,” hep-th/0010095.
- [42] H. Kleinert and B. Van den Bossche, “No massless pions in Nambu-Jona-Lasinio model due to chiral fluctuations,” hep-ph/9908284.
- [43] G. Ripka, “Quantum fluctuations of the quark condensate,” Nucl. Phys. A **683** (2001) 463 [hep-ph/0003201].
- [44] V. Dmitrasinovic, H. J. Schulze, R. Tegen and R. H. Lemmer, “Chirally symmetric $O(1/N(c))$ corrections to the Nambu-Jona-Lasinio model,” Annals Phys. **238**, 332 (1995).
- [45] M. Oertel, M. Buballa and J. Wambach, “Pion properties in the $1/N(c)$ corrected NJL model,” Phys. Lett. B **477** (2000) 77 [hep-ph/9908475].

- [46] G. Colangelo, J. Gasser and H. Leutwyler, hep-ph/0103088.
- [47] G. E. Brown, M. Buballa and M. Rho, "A Mean Field Theory of the Chiral Phase Transition," Nucl. Phys. A **609** (1996) 519 [nucl-th/9603016].
- [48] H. G. Dosch, T. Gousset and H. J. Pirner, "Nonperturbative gamma* p interaction in the diffractive regime," Phys. Rev. D **57** (1998) 1666 [hep-ph/9707264].
- [49] A. Bonanno and D. Zappala, "Two loop results from the derivative expansion of the blocked action," Phys. Rev. D **57** (1998) 7383 [hep-th/9712038].
- [50] A. Bonanno and D. Zappala, "Chiral symmetry breaking in the Wegner-Houghton RG approach," Nucl. Phys. A **681** (2001) 108 [hep-ph/0006169].
- [51] F. Weber, "From boson condensation to quark deconfinement: The many faces of neutron star interiors," Acta Phys. Polon. B **30** (1999) 3149 [astro-ph/9910371].
- [52] R. Rapp, T. Schafer, E. V. Shuryak and M. Velkovsky, "Diquark Bose condensates in high density matter and instantons," Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 53 [hep-ph/9711396].
- [53] M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 4472 [hep-lat/9604003].
- [54] R. A. Janik, M. A. Nowak, G. Papp and I. Zahed, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 4876 [hep-ph/9606329].
- [55] A. Akmal, V.R. Pandharipande and D.G. Ravenhall, Phys. Rev. C **58** (1998) 1804, nucl-th/9804027
- [56] K. Schwenzer, "Einschluß von Quarkfreiheitsgraden in die Beschreibung von Kernmaterie bei endlicher Baryondichte", Diplomarbeit, Heidelberg 2000
- [57] J. I. Kapusta, "Finite Temperature Field Theory,".
- [58] R. Shankar, "Renormalization group approach to interacting fermions," Rev. Mod. Phys. **66** (1994) 129.
- [59] E. M. Nyman, M. Rho, Nucl. Phys. **A268** (1976) 408
- [60] L. G. Liu, W. Bentz and A. Arima, Ann. Phys. **194** (1998) 387
- [61] J. Alexandre, V. Branchina and J. Polonyi, "Instability induced renormalization," Phys. Lett. B **445** (1999) 351 [cond-mat/9803007].
- [62] S. Borsanyi, A. Patkos, J. Polonyi and Z. Szep, "Fate of the classical false vacuum," Phys. Rev. D **62** (2000) 085013 [hep-th/0004059].
- [63] J. Berges, D. U. Jungnickel and C. Wetterich, "Quark and nuclear matter in the linear chiral meson model," hep-ph/9811387.

- [64] J. Polchinski, Nucl. Phys. **B231** (1984) 269 J. Plochinski, in Recent Developments in Particle Theory, Proceedings of the 1992 TASI, eds. J. Harvey and J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993)
- [65] M. Boyce and P.J.S. Watson, Nucl. Phys. **A580** (1994) 500; H.J. Pirner and M. Wachs, Nucl. Phys. **A617** (1997) 395
- [66] J.P. Blaizot, Phys. Rep. **64** (1980) 171
- [67] G. Chanfray and H.J. Pirner, Phys. Rev. C **35** (1987) 760
- [68] G.E. Brown and M. Rho, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2720
- [69] M.C. Chu, J. Grandy, S. Huang and J.W. Negele, Phys. Rev. D **49** (1994) 6039
- [70] E.V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **65** (1993) 1
- [71] M. Jaminon and C. Mahaux, Phys. Rev. C **40** (1989) 354
- [72] R.W. Hasse, B.L. Friman and D. Berdichevsky, Phys. Lett. B **181** (1986) 5
- [73] I. Sick and P.K.A. de Witt Huberts, Comm. Nucl. Part. Phys. **40** (1991) 177
- [74] D. U. Jungnickel and C. Wetterich, "The linear meson model and chiral perturbation theory," Eur. Phys. J. C **2** (1998) 557 [hep-ph/9704345].
- [75] C. Wetterich, "Gluon-meson duality in the mean field approximation," Eur. Phys. J. C **18** (2001) 577 [hep-ph/9908514].
- [76] J. Berges and C. Wetterich, "Higgs description of two-flavor QCD vacuum," hep-ph/0012311.
- [77] H. Arodz and H. J. Pirner, "Effective Lagrangian for SU(3)_c gluodynamics from lattice color dielectrics," hep-ph/9803392.
- [78] H. G. Dosch, V. I. Shevchenko and Y. A. Simonov, "Field correlators in QCD: Theory and applications," hep-ph/0007223.
- [79] R. D. Ball, "Chiral Gauge Theory," Phys. Rept. **182** (1989) 1.
- [80] J. A. Zuk, "A Functional Approach To Derivative Expansion Of The Effective Lagrangian," Phys. Rev. D **32** (1985) 2653.
- [81] J. A. Zuk, "Expansion Of The One Loop Effective Action In Covariant Derivatives," Phys. Rev. D **33** (1986) 3645.
- [82] S. Wolfram, "The Mathematica Book," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1999)*
- [83] W. H. Press, "Numerical Recipes in C," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1999)*
- [84] Eine Dokumentation der NAG-Library ist im Internet verfügbar:
<http://www.nag.co.uk/numeric/FL/manual/html/FLlibrarymanual.asp>

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Pirner für seine Unterstützung und die vielen Anregungen, die mir beim Anfertigen dieser Dissertation sehr geholfen haben.

Herrn Prof. Wetterich danke ich für die Übernahme des Zweitachtens.

Weiterhin haben Gabor Papp, Teiji Kunihiro und Aldo Deandrea zu Teilen dieser Arbeit beigetragen. Ich bedanke mich bei Ihnen für die vielen interessanten Diskussionen.

Mein besonderer Dank aber gilt Kai Schwenzer für hervorragende Zusammenarbeit und den ständigen Unwillen allzu einfache Erklärungen zu akzeptieren.