MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
SUMY STATE UNIVERSITY
UKRAINIAN FEDERATION OF INFORMATICS

PROCEEDINGS

OF THE IV INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE

ADVANCED INFORMATION SYSTEMS AND TECHNOLOGIES

AIST-2016

May 25 –27, 2016
Sumy, Ukraine

Linear-fractional combinatorial optimization problems: model and solving

O.O. Iemets[1], T.M. Barbolina[2]
[1]Poltava University of Economics and Trade, Ukraine, yemetsli@ukr.net
[2]Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University, Ukraine, tm-b@ukr.net

Abstract. Euclidean problems of linear-fractional combinatorial optimization on arrangements are discussed. Authors propose the model of practical problem. Also the polynomial algorithm for solving linear-fractional combinatorial optimization problems on arrangements is discussed.

Keywords. Combinatorial Optimization, Linear-Fractional Optimization, Modeling, Optimization Problems On Arrangements.

ВСТУП

Побудова і дослідження моделей багатьох процесів і систем приводить до розв'язування оптимізаційних задач, у тому числі й з обмеженнями комбінаторного характеру. Такі задачі вивчаються, зокрема, в рамках евклідової комбінаторної оптимізації

Мета доповіді — побудова математичної моделі однієї задачі перевезення як задачі евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях та представлення алгоритму розв'язування такої задачі.

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Нехай фірма з організації перевезень має парк з η транспортних засобів різної вантажопідйомності і $k \le \eta$ маршрутів перевезення. Для кожного маршруту відомі витрати d_j на перевезення одиниці товару і відповідний прибуток c_j; нехай також c_0 – прибуток, а d_0 — витрати, незалежні від розподілу транспортних засобів за маршрутами. Необхідно так розподілити транспортні засоби за маршрутами, щоб максимізувати рентабельність.

Для формалізації обмеження на наявні транспортні засоби доцільно використати апарат евклідової комбінаторної оптимізації [1]. Нехай G — мультимножина значень вантажопідйомності транспортних засобів, тоді кожному розподілу машин за маршрутами взаємно однозначно відповідає вектор, що є елементом загальної множини розміщень: $x = x_1, ..., x_k \in E_\eta^k \ G$. Отже, задача полягає у максимізації на множині $E_\eta^k \ G$ функції $\Phi \ x = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0}$, тобто у знаходженні пари $\left\langle \Phi \ x^* \ , x^* \right\rangle$ такої, що

$$\Phi \ x^* = \max_{x \in E_\eta^k \ G} \Phi \ x \ ; \ x^* = \arg \max_{x \in E_\eta^k \ G} \Phi \ x \qquad (1)$$

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Задача (1) є безумовною дробово-лінійною задачею комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Для її розв'язування може використовуватися аналітичний метод [2], проте теоретичні оцінки складності алгоритму невідомі. Нижче пропонується поліноміальний алгоритм, який спирається на метод параметризації розв'язування дробово-лінійних задач оптимізації.

Розглянемо функцію $\varphi \ x, \lambda = \sum_{j=1}^{k} \bar{c}_j x_j$, де $\bar{c}_j = c_j - \lambda d_j$. Якщо при деякому λ

максимум φ^* функції $\varphi(x,\lambda)$ на множині $E_\eta^k(G)$ дорівнює $\varphi^* = \lambda d_0 + c_0$, то відповідна максималь x^* також задовольняє умову (1).

Для всіх $i \in J_{k-1}^1$ (тут і далі $J_r^s = \{r,...,s\}$), $j \in J_k^{i+1}$ обчислимо величини

$$\alpha(i,j) = \begin{cases} \dfrac{c_i - c_j}{d_i - d_j}, \text{ якщо } d_i \neq d_j; \\ M, \text{ якщо } d_i \neq d_j, c_i > c_j; \\ -M, \text{ якщо } d_i \neq d_j, c_i \leq c_j, \end{cases} \quad (2)$$

де M — велике додатне число.

Упорядкуємо величини (2) за неспаданням:

$$\alpha(i_1, j_1) = ... = \alpha(i_{r-1}, j_{r-1}) = -M < \alpha(i_r, j_r) \leq \\ \leq ... \leq \alpha(i_s, j_s) < M = ... = \alpha(i_m, j_m),$$

де $m = \dfrac{k(k-1)}{2}$. Для всіх $t \in J_{s-1}^r$ позначимо $I(t) = \{\lambda | \alpha(i_t, j_t) < \lambda \leq \alpha(i_{t+1}, j_{t+1})\}$. Нехай також $I(r-1) = \{\lambda | \lambda \leq \alpha(i_r, j_r)\}$, $I(s) = \{\lambda | \lambda > \alpha(i_s, j_s)\}$. Тоді $\forall \lambda \in I(t)$, де $t \in J_s^{r-1}$, коефіцієнти функції $\varphi(x,\lambda)$ задовольняють умови

$$\overline{c}_{i_\tau} \leq \overline{c}_{j_\tau} \quad \forall \tau \in J_t^1, \; \overline{c}_{i_\tau} \geq \overline{c}_{j_\tau} \quad \forall \tau \in J_m^{t+1} \quad (3)$$

З достатньої умови екстремалі в оптимізаційній задачі на розміщеннях [1] випливає, що для визначення максималі функції $\varphi(x,\lambda)$ на $E_\eta^k(G)$ за умови (3) потрібно знати кількість додатних серед коефіцієнтів $\overline{c}_l$.

Зазначимо, що для довільного $l \in J_k^1$ $\overline{c}_l = c_l - \lambda d_l \geq c_l - \alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) d_l$, тому при $c_l > \alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) d_l$ маємо $\overline{c}_l > 0 \quad \forall \lambda \in I(t)$. Якщо v — найбільший індекс такий, що $c_{q_v} > \alpha(i_{t+1}, j_{t+1}) d_{q_v}$, то $\overline{c}_{q_\tau} > 0 \quad \forall \tau \in J_v^1$ $\forall \lambda \in I(t)$. Аналогічно, якщо w — найменший індекс такий, що $c_{q_w} < \alpha(i_t, j_t) d_{q_w}$, то $\overline{c}_{q_\tau} < 0 \;\; \forall \tau \in J_k^w \;\; \forall \lambda \in I(t)$. Отже, додатних чисел серед коефіцієнтів функції $\varphi(x,\lambda)$ для довільних $\lambda \in I(t)$ не менше v і не більше w.

Нехай $p \in J_w^v$, точка x^* є мінімаллю функції $\varphi(x,\lambda)$ на $E_\eta^k(G)$, де $\lambda \in I(t)$, причому серед коефіцієнтів $\overline{c}_l = c_l - \lambda d_l$ маємо p додатних. Обчислимо $\lambda^* = \Phi(x^*)$. Якщо також $\lambda^* \in I(t)$, причому серед чисел $c_l - \lambda^* d_l$ ($l \in J_k$) маємо p додатних, то x^* — також мініималь функції $\varphi(x,\lambda^*)$ на множині $E_\eta^k(G)$. А тоді $\langle \lambda^*, x^* \rangle$, як зазначено вище, є розв'язком задачі (1). Якщо для жодного $p \in J_w^v$ мініималь функції $\Phi(x)$ на множині $E_\eta^k(G)$ знайдена не буде, то перейдемо до розгляду наступного значення t.

Авторами показано, що для алгоритму, побудованого на основі викладених вище положень, справедлива така оцінка часової складності $O(k^4)$.

ВИСНОВКИ

У доповіді побудовано математичну модель однієї задачі організації перевезень як евклідової задачі комбінаторної оптимізації дробово-лінійної функції на розміщеннях. Розглянуто також поліноміальний алгоритм розв'язування таких задач.

REFERENCES

[1] Stoyan Yu.G. Theory and Methods of Euclidean Combinatorial Optimization / Yu. G. Stoyan, O.O. Iemets. — Kyiv : Instytut systemnykh doslidzhen osvity, 1993. — 188 p. (in Ukrainian). — Available: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487

[2] Iemets O.O. Optimization of linear-fractional functions on arrangements / O.O.Iemets, O.O.Chernenko. — Kyiv : Naukova dumka, 2011. — 154 p. (in Russian). — Available: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467.