



## СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР, докт. физ.-мат. наук, проф.	(2015.12.25)	Г.С. Воробьев Введение, выводы, разделы 1, 2
Доцент, докт. физ.-мат. наук	(2015.12.25)	А.В. Лысенко Разделы 3, 4
Доцент, канд. физ.-мат. наук	(2015.12.25)	А.И Рубан Подразделы 1.1, 1.3
Доцент, канд. физ.-мат. наук	(2015.12.25)	В.О. Журба Подразделы 1.2, 1.3
Доцент, канд. физ.-мат. наук	(2015.12.25)	А.А. Дрозденко Подразделы 2.1, 2.3
Доцент, канд. физ.-мат. наук	(2015.12.25)	М.В. Петровский Подразделы 2.2, 2.3
Инженер 1 кат	(2015.12.25)	А.В. Демченко Подраздел 3.3.1
Инженер 1 кат	(2015.12.25)	Ю.А. Крутько Подраздел 3.3.2
Студент	(2015.12.25)	В.С. Шубников Подразделы 3.2, 3.3
Студент	(2015.12.25)	А.А. Пурыга Подразделы 4.2, 4.3

## РЕФЕРАТ

Промежуточный отчёт о НИР: 83 стр., 13 рис., 1 табл., 55 источников.

Объект исследований – физика волновых электромагнитных явлений в периодических электромагнитных полях низкоразмерных метаматериальных и металодиэлектрических структур.

Цель работы – установление общих электрофизических закономерностей волновых процессов в периодических электромагнитных полях низкоразмерных метаматериальных и металодиэлектрических структур.

Методы исследований – классические методы современной электродинамики и электроники, а также методы экспериментального моделирования.

В работе описана общая методика моделирования условий возбуждения черенковского и дифракционного излучений на периодических металодиэлектрических структурах, проведено моделирование основных режимов условий возбуждения пространственных гармоник. Приведена новая модификация универсальной экспериментальной установки для измерения электродинамических характеристик генераторов сверхвысоких частот с открытыми резонансными структурами типа оротрон-генератор дифракционного излучения. Выполнена модернизация метода усредненных характеристик в части построения схемы асимптотического интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, с учетом специфики мультигармонических резонансных взаимодействий в устройствах сильноточной электроники. Получена система укороченных дифференциальных уравнений для амплитуд полей, которая описывает множественные резонансные взаимодействия волн.

ВОЛНА, ВОЛНОВОД, МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА, КЛИСТРОН, ЛАЗЕР НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ МЕТОД УСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, МУЛЬТИГАРМОНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ, ЭЛЕКТРОННЫЙ И ПРОТОННЫЙ ПУЧКИ, РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ПУЧКИ.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
РАЗДЕЛ 1 МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ УСЛОВИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЧЕРЕНКОВСКОГО И ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЙ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ.....	7
1.1 Объекты и методика исследований.....	7
1.2 Экспериментальная установка и результаты моделирования.....	15
1.3 О возможности реализации практических устройств вакуумной электроники на основе периодических металлодиэлектрических структур .....	21
Выводы к разделу 1.....	25
РАЗДЕЛ 2 УСТАНОВКА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫХ ПРИБОРОВ СВЧ С ОТКРЫТЫМИ РЕЗОНАНСНЫМИ СТРУКТУРАМИ .....	27
2.1 Описание экспериментального стенда .....	27
2.2 Модификация открытого резонатора ГДИ.....	33
2.3 Результаты тестовых исследований.....	35
Выводы к разделу 2.....	37
РАЗДЕЛ 3 МОДЕРНИЗИРОВАННЫЙ МЕТОД УСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МУЛЬТИГАРМОНИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В УСТРОЙСТВАХ СИЛЬНОТОЧНОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ .....	39
3.1 Анализ общих решений.....	39
3.2 Метод усредненных характеристик .....	41

	5
3.3 Метода усредненных характеристик для решения задач с Модернизация мультигармоническими резонансными взаимодействиями.....	51
3.3.1 Случай одной быстрой фазы .....	52
3.3.2 Случай нескольких быстрых фаз .....	54
Выводы к разделу 3.....	57
РАЗДЕЛ 4 ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕРНИЗИРОВАННОГО МЕТОДА УСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЛАЗМЕННО- ПУЧКОВЫХ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ .....	59
4.1 Описание задачи.....	59
4.2 Модель плазменно-пучкового СЛСЭ Н-убитронного типа .....	61
4.3 Система кубически-нелинейных укороченных уравнений для комплексных амплитуд волн .....	63
4.4 Анализ результатов.....	73
Выводы к разделу 4.....	78
ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК.....	80

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время вакуумная СВЧ электроника в основном развивается по пути создания мощных высококогерентных источников электромагнитного излучения, например, оротрон, генератор дифракционного излучения (ГДИ), лазер на свободных электронах [1, 2]. Вместе с тем, в радиоастрономических инструментах терагерцового диапазона волн требуются источники излучения, обладающие достаточной компактностью, малой массой и мощностью потребления. В связи с этим, несмотря на достигнутые успехи в создании мощных электровакуумных источников колебаний терагерцового диапазона волн [2], актуальным остается вопрос реализации низковольтных гетеродинных источников излучения, которые могли бы конкурировать с твердотельными генераторами. К настоящему времени данный вопрос может быть решен путем использования в вакуумной электронике и технике СВЧ периодических металлодиэлектрических структур (МДС) [3, 4], которые в отличие от традиционных металлических периодических структур имеют ряд специфических особенностей, связанных с возбуждением на МДС черенковского и широкого спектра пространственных гармоник дифракционного излучений (ДИ) [5]. Однако недостаточный объем исследований таких приборов затрудняет их реализацию в практических схемах устройств СВЧ.

Поэтому вопросы дальнейших исследований электродинамических характеристик периодических МДС с заданными типами распределенных источников излучения: электронный пучок (ЭП) или диэлектрический волновод (ДВ), являются актуальными.

В данном отчете представлено обоснование выбора режимов моделирования черенковского и дифракционного излучений на МДС конкретной геометрии, основные из которых реализованы экспериментально и протестированы путем сравнения результатов эксперимента с численным анализом.

# РАЗДЕЛ 1

## МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ УСЛОВИЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЧЕРЕНКОВСКОГО И ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЙ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

В данном разделе описана общая методика моделирования условий возбуждения черенковского и дифракционного излучений на периодических металлодиэлектрических структурах, которая основана на представлении волны пространственного заряда электронного пучка в виде поверхностной волны диэлектрического волновода. На экспериментальной установке миллиметрового диапазона волн проведено моделирование основных режимов условий возбуждения пространственных гармоник черенковского и дифракционного излучений, а также тестирование их путем сравнения с численным анализом и результатами эксперимента на рабочем макете прибора типа оротрон-ГДИ.

### 1.1 Объекты и методика исследований

Исследуемые в работе МДС схематически приведены на рис. 1.1 а,б.

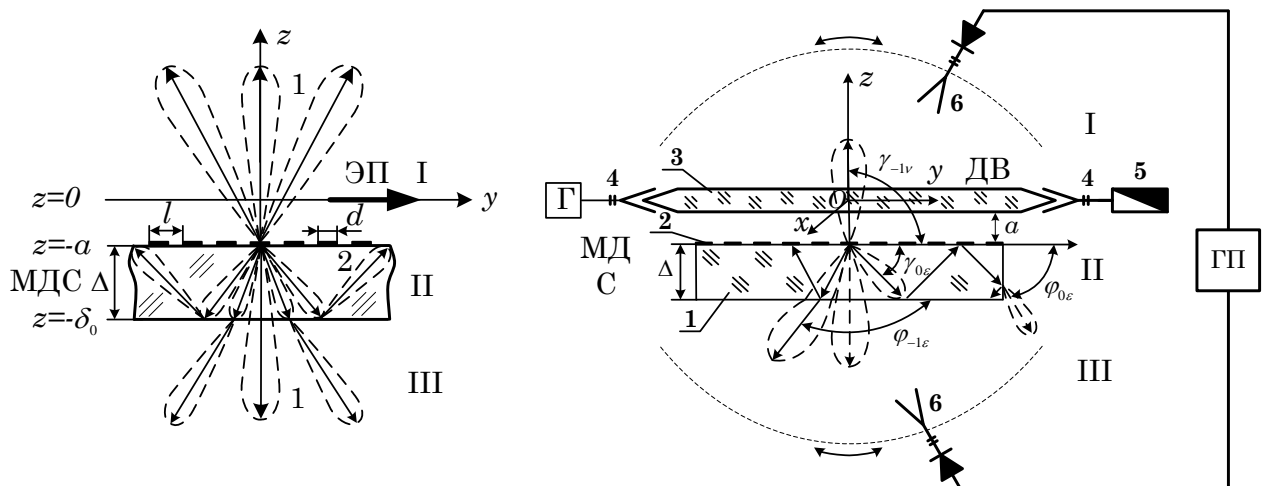


Рисунок 1.1 – Теоретическая и экспериментальная модели возбуждения излучений на периодической МДС: модель возбуждения излучений электронным пучком (а), модель возбуждения излучений поверхностной

волной диэлектрического волновода (б); сплошные линии со стрелками – возможные варианты направления излучений, пунктирные линии – диаграммы направленности излучений

На рис. 1.1а представлена планарная МДС, которая образована поверхностью  $z = -a$  ленточной периодической структуры (период  $-l$ , ширина лент  $-d$ ), нанесенной на диэлектрическую призму толщиной  $\Delta = \delta_0 - a$  с проницаемостью  $\varepsilon$ . Вблизи МДС движется модулированный монохроматический ЭП с плотностью заряда

$$\rho = \rho_0 \delta(z - a) e^{i(ky - \omega t)}, \quad (1.1)$$

где  $\rho_0$  – поверхностная плотность заряда;  $\delta(z - a)$  – дельта-функция;  $k = \omega/v_0$  – волновое число;  $\omega$  – частота модуляции ЭП;  $v_0$  – скорость электронов.

На рис. 1.1б представлена аналогичная, по структурным элементам, планарная МДС с распределенным источником излучения в виде ДВ, расположенного на расстоянии  $a$  от плоскости ДР. Вдоль ДВ движется плоская волна, электромагнитное поле которой, для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  компонент, описывается следующими соотношениями:

для H-волны

$$E_x^0 = ivg \varepsilon_w \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (gb) e^{p(z+b)} e^{i\gamma y}, \quad (1.2a)$$

для E-волны

$$H_x^0 = -ivg \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (gb) e^{p(z+b)} e^{i\gamma y}, \quad (1.2б)$$



где  $g, p, \gamma$  – постоянные распространения вдоль осей  $Ox, Oz$  и  $Oy$ ,  $v$  – волновое число,  $\varepsilon_w$  – диэлектрическая проницаемость материала волновода,  $b$  – полуширина ДВ.

При движении заданного типа волны (1.2) поверхностные волны ДВ преобразовываются с помощью ДР либо в поверхностные, либо в объемные волны, уходящие от ДР. Данный эффект аналогичен трансформации волн при движении ЭП вдоль ДР и позволяет путем решения задач в приближении заданного тока (1.1) и заданного поля (1.2) получить общие соотношения для полей в структуре типа МДС (рис. 1.1а,б). В частности для системы рис. 1.1а электромагнитные поля в областях I ( $z > -a$ ), II ( $-\delta_0 < z < -a$ ), III ( $z < -\delta_0$ ) представляются в виде:

$$\begin{aligned}
 \vec{H}^I &= \vec{H}_c + \vec{i} \sum_n A_n e^{iq_n(z+a)} e^{ik_n y}, \\
 \vec{H}^{II} &= \vec{i} \sum_n \left[ C_n e^{-iq_n(z+a)} + D_n e^{iq_n(z+\delta_0)} \right] e^{ik_n y}, \\
 \vec{H}^{III} &= \vec{i} \sum_n F_n e^{-iq_n(z+\delta_0)} e^{ik_n y}, \\
 \vec{E}^I &= \vec{E}_c + \sum_n \left( -\vec{j} \sqrt{1-\tau_n^2} + \vec{k} \tau_n \right) A_n e^{iq_n(z+a)} e^{ik_n y}, \\
 \vec{E}^{II} &= \sum_n \left[ \left( \vec{j} \frac{\sqrt{\varepsilon - \tau_n^2}}{\varepsilon} + \vec{k} \frac{\tau_n}{\varepsilon} \right) C_n e^{-iq_n(z+a)} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( -\vec{j} \frac{\sqrt{\varepsilon - \tau_n^2}}{\varepsilon} + \vec{k} \frac{\tau_n}{\varepsilon} \right) D_n e^{iq_n(z+\delta_0)} \right] e^{ik_n y}, \\
 \vec{E}^{III} &= \sum_n \left( \vec{j} \sqrt{1-\tau_n^2} + \vec{k} \tau_n \right) F_n e^{-iq_n(z+\delta_0)} e^{ik_n y},
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где  $\vec{H}_c = \vec{i} \beta_e F \text{sign}(z) e^{-q|z|+iky}$ ,  $F = 2\pi\rho_0$ ,  $A_n, C_n, D_n, F_n$  – фурье-компоненты дифракционного поля,  $\vec{E}_c = \left( -\vec{j}i\theta + \vec{k} \text{sign}(z) \right) F e^{-q|z|} e^{iky}$  – собственные поля ЭП

в свободном пространстве,  $q = k\theta = k\sqrt{1 - \beta_e^2}$ ,  $q_n = k\theta_n = k\beta_e\sqrt{1 - \tau_n^2}$ ,  
 $q_{n\varepsilon} = k\theta_{n\varepsilon} = k\beta_e\sqrt{\varepsilon - \tau_n^2}$ ,  $\beta_e = v_0/c$  – относительная скорость ЭП,  $c$  – скорость  
 света,  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды,  $\tau_n = (\eta + n)/\kappa$ ,  
 $\eta = \kappa/\beta_e$ ,  $\kappa = l/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны излучения,  $k_n = k + 2\pi n/l$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  –  
 номер пространственной гармоники.

Физический смысл в соотношениях (1.3) имеют только те ветви корней  
 $q_n$  и  $q_{n\varepsilon}$ , мнимая часть которых положительна, а при  $\text{Im}q_n = 0$ ,  $\text{Im}q_{n\varepsilon} = 0$  –  
 значения  $\text{Re}q_n > 0$ ,  $\text{Re}q_{n\varepsilon} > 0$ .

Из соотношений (1.3) следует, что рассеянное электромагнитное поле  
 представляет собой суперпозицию распространяющихся (объемных) и  
 затухающих (поверхностных) относительно оси  $Oz$  электромагнитных волн.

Углы излучения объемных волн, в зависимости от параметров  $\kappa$ ,  $\beta_e$ ,  $\varepsilon$ ,  
 определяются выражениями:

в вакуум (области I, III)

$$\gamma_{nv} = \arccos \tau_n = \arccos \left( \frac{1}{\beta_e} + \frac{n}{\kappa} \right), \quad (1.4)$$

в диэлектрик (область II)

$$\gamma_{n\varepsilon} = -\arccos \frac{\tau_n}{\sqrt{\varepsilon}} = -\arccos \left( \frac{\frac{1}{\beta_e} + \frac{n}{\kappa}}{\sqrt{\varepsilon}} \right), \quad (1.5)$$

где углы отсчитываются относительно направления движения  
 электронного пучка.

Электромагнитные волны излучаются, как следует из уравнений (1.4) и (1.5), в свободное пространство при условии  $|\tau_n| < 1$ , а в диэлектрическую среду – при условии  $|\tau_{n\varepsilon}| < \sqrt{\varepsilon}$ . То есть при относительных скоростях ЭП:

$$\frac{\kappa}{|n| + \kappa} \leq \beta_e \leq \frac{\kappa}{|n| - \kappa}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\kappa}{|n| + \kappa\sqrt{\varepsilon}} \leq \beta_e \leq \frac{\kappa}{|n| - \kappa\sqrt{\varepsilon}}. \quad (1.7)$$

Неизвестные фурье-компоненты дифракционного излучения, представляющие собой амплитуды пространственных гармоник полей, определяются из решения электродинамической задачи в приближении заданного тока, удовлетворяющей точным граничным условиям на поверхности диэлектрика и граничным условиям на металлических лентах [5].

При равномерном и прямолинейном движении со скоростью  $u_0$  монохроматического ЭП собственное его поле имеет вид неоднородной плоской волны. Подобную волну можно сформировать линией передачи в виде плоского ДВ вдоль которого распространяется с фазовой скоростью  $u_w$  волна  $E$ -типа (1.2).

Фазовая скорость  $u_w$  определяется диэлектрической проницаемостью материала волновода, его поперечными размерами, средой, в которой ДВ расположен. Поэтому эффективная диэлектрическая проницаемость волновода определяется как  $\varepsilon_w = c^2/u_w^2$ . Тогда относительная скорость волны в волноводе  $\beta_w = u_w/c = 1/\sqrt{\varepsilon_w}$ .

Из выражений для полей в отдельных областях системы ДВ-МДС (рис. 1.1б) следует, что углы излучения пространственных гармоник определяются соотношениями:

в вакуум

$$\gamma_{nv} = \arccos\left(\frac{1}{\beta_w} + \frac{n}{\kappa}\right), \quad (1.8)$$

в диэлектрик

$$\gamma_{n\varepsilon} = -\arccos\left(\frac{\frac{1}{\beta_w} + \frac{n}{\kappa}}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad (1.9)$$

где углы отсчитываются относительно направления распространения электромагнитной волны ДВ.

Преобразование поверхностных волн ДВ в объемные гармоники излучения, уходящие в свободное пространство и диэлектрическую среду, становится возможным при относительных фазовых скоростях, соответственно

$$\frac{\kappa}{|n| + \kappa} \leq \beta_w \leq \frac{\kappa}{|n| - \kappa}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\kappa}{|n| + \kappa\sqrt{\varepsilon}} \leq \beta_w \leq \frac{\kappa}{|n| - \kappa\sqrt{\varepsilon}}. \quad (1.11)$$

Аналогично вышеописанной методике, для источника излучения в виде ДВ, путем решения задачи в приближении заданного поля (1.2) волновода строгим методом теории дифракции определяется структура рассеянного поля в виде фурье-составляющих амплитуд объемных и поверхностных волн (1.3).

Формулы (1.8) – (1.11) аналогичны соотношениям (1.4) – (1.7) монохроматического ЭП, если предположить, что относительная фазовая скорость волны ДВ  $\beta_w$  идентична относительной скорости электронов  $\beta_e$ .

Из анализа соотношений (1.4), (1.5), (1.8), (1.9) следует, что в обеих случаях на МДС, при определенных параметрах  $\kappa$ ,  $\beta_e(\beta_w)$  и  $\varepsilon$  в свободном пространстве возбуждаются только отрицательные пространственные гармоники дифракционного излучения с  $n = -1, -2, -3, \dots$  (лучи 1, рис. 1.1а), а в диэлектрической среде – гармоники с  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (лучи 2, рис. 1.1а). Лучи 2 соответствуют режимам черенковского излучения и аномального дифракционного излучения, которые сосредоточены в слое диэлектрика и за счет полного внутреннего отражения от боковых поверхностей могут выходить в свободное пространство через торцы МДС (рис. 1.1б). Излучение на нулевой ( $n = 0$ ) пространственной гармонике происходит при относительных скоростях ЭП или ДВ удовлетворяющих условию  $\varepsilon\beta^2 > 1$  с углом излучения  $\cos \gamma_{0\varepsilon} = 1 / (\beta\sqrt{\varepsilon})$ . Поэтому такое излучение можно условно назвать черенковским, а решетку рассматривать как экранирующий фактор, влияющий на коэффициент связи ЭП или ДВ с диэлектрической средой [6].

Данные особенности эквивалентности условий возбуждения излучений на периодических МДС, полем волны тока пространственного заряда ЭП и полем поверхностной волны ДВ, указывают на возможность экспериментального моделирования процессов возбуждения черенковского, дифракционного и аномального дифракционного излучений.

Как отмечалось выше, в зависимости от параметров  $\kappa$ ,  $\beta_e(\beta_w)$ ,  $\varepsilon$  распределенный источник излучения (ЭП или ДВ) возбуждает объемные или поверхностные электромагнитные волны, область существования которых можно определить путем решения графическим способом неравенств

$$\left| \frac{\eta + n}{\kappa} \right| < 1, \quad \left| \frac{\eta + n}{\kappa} \right| < \sqrt{\varepsilon},$$

в виде диаграмм, определяющих области излучений.

Диаграммы состоят из дискретных областей, ограниченных прямыми линиями  $\kappa = \pm(\eta + n)$ ,  $\kappa = \pm(\eta + n)/\sqrt{\varepsilon}$ , которые обозначены цифрами  $N_s^m$  ( $N = 1 - 5$ ) и определяют наиболее характерные случаи возбуждения ЭП (поверхностной волной ДВ) электромагнитных волн: 1 – черенковское излучение; 2 – поверхностные волны; 3 – дифракционное излучение только в диэлектрическую среду; 4 – одновременно черенковское и дифракционное излучения; 5 – дифракционное излучение в диэлектрик ( $z < -a$ ) и в свободное пространство ( $z > -a$ ). Нижние индексы  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  указывают номера пространственных гармоник, излучаемых в диэлектрик, а верхние индексы  $m = -1, -2, \dots$  – в вакуум.

Наличие в настоящее время достаточно широкого спектра материалов, обладающих малыми потерями на СВЧ, позволяет рассматривать возможность их использования как при экспериментальном моделировании (малые значения  $\varepsilon$  – фторопласт, полистирол, поликор), так и при рассмотрении вариантов создания низковольтных источников колебаний с применением МДС (высокие значения  $\varepsilon$  – керамические материалы на основе оксидов бария и титана). В качестве примера, на рис. 1.2 в координатных осях  $\kappa$  и  $\eta = \kappa/\beta_e(\beta_w)$  приведены диаграммы для двух значений  $\varepsilon = 2, 100$ .

Из приведенных диаграмм видно, что при заданных параметрах  $\beta_e(\beta_w)$  и  $\kappa$  в зависимости от  $\varepsilon$  можно реализовать различные режимы возбуждения излучений и их моделирования. Так, в частности, для больших значений  $\varepsilon$  в области нерелятивистских ЭП появляется возможность реализации как режимов черенковского, так и дифракционного излучений. Например, зоны  $1_0, 4_{0,-1}, 4_{0,-1,-2}^{-1}$  (рис. 1.2б). При этом возникает излучение на положительных дифракционных гармониках, которое направлено под острым углом. Но реализация таких зон для низковольтных ЭП невозможна, поскольку они лежат выше линии  $\beta_e = 0.1$ , характеризующей нерелятивистские скорости электронов. С точки зрения создания низковольтных источников излучения,

практический интерес представляет зона  $3_{-1}$ , в которой дифракционное излучение возникает только в диэлектрике структуры, как и черенковское излучение, но при значительно меньших скоростях электронов. Учитывая специфику условий возбуждения объемной волны такого режима, условно назовем его аномальным дифракционным излучением. При реализации низковольтных приборов типа оротрон практический интерес представляет режим излучения в зоне  $5_{-1}^{-1}$  (рис. 1.2б).

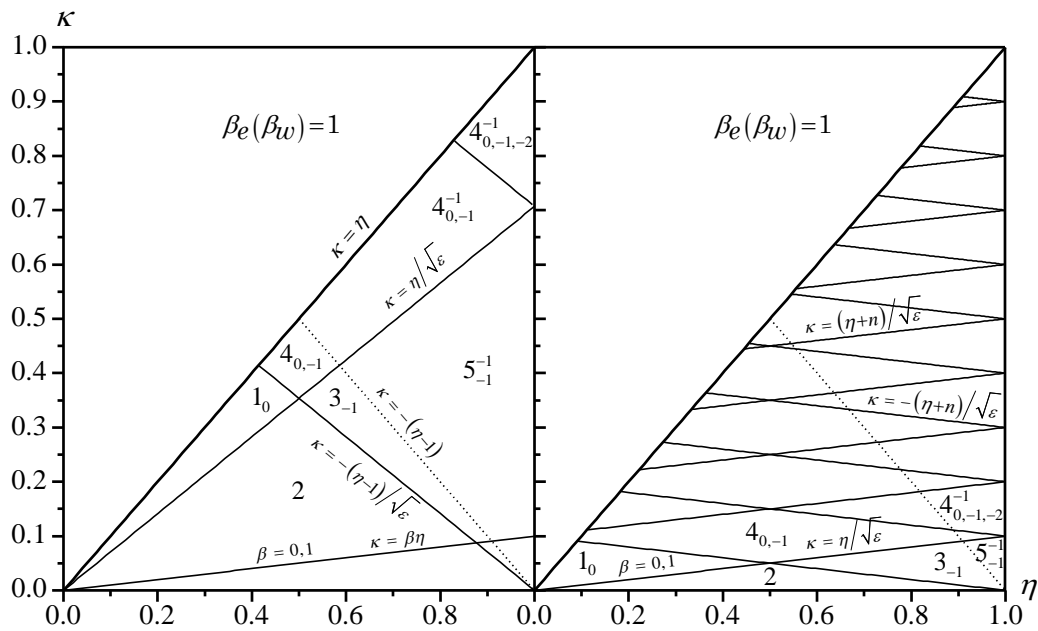


Рисунок 1.2 – Пример областей диаграмм возбуждения излучения на МДС с относительными диэлектрическими проницаемостями:  $\varepsilon = 2$  (а),  $\varepsilon = 100$  (б); сплошные линии – границы области существования гармоник объемных волн в диэлектрике; пунктирные линии – границы области существования гармоник объемных волн в свободном пространстве

## 1.2 Экспериментальная установка и результаты моделирования

Описанные выше режимы моделирования пространственных волн были реализованы как при возбуждении МДС диэлектрическим волноводом (режим моделирования), так и при прохождении ЭП вдоль МДС, расположенной в объеме открытого резонатора (ОР) – модель прибора типа оротрон, ГДИ.

Измерения проводились в диапазоне частот  $f = 53 - 80$  ГГц, что определило выбор панорамного измерителя КСВ и ослаблений данного диапазона и волноводных трактов с комплектом элементной базы сечением  $3.6 \times 1.8$  мм<sup>2</sup>.

В частности на рис. 1.3 показан внешний вид экспериментальной установки с указанием основных её блоков: 1 – измеритель КСВ и ослаблений; 2 – волноводно-измерительный тракт с объектом исследований, представленным на рис. 1.1б; 3 – измеритель мощности СВЧ; 4 – самописец; 5 – графопостроитель.

Объект исследований включался в схему измерения пространственных характеристик СВЧ-полей, которая приведена на рис. 1.1б и содержит следующие основные элементы: диэлектрическую призму 1, с нанесенной на ее боковую поверхность ленточной дифракционной решеткой 2. Призма 1 крепится на специальном юстирующем устройстве, позволяющем осуществлять её пространственную ориентацию по осям  $x, y, z$  с точностью  $\pm 0.1$  мм. Диэлектрический волновод 3 включается в согласующие переходы 4, которые через волноводы заданного сечения, определяемого исследуемым диапазоном волн, сопряжены с блоком измерения волноводных характеристик и согласованной нагрузкой 5. В зависимости от параметров ДВ и МДС, как показано выше, возможны различные режимы трансформации поверхностных волн в объемные. Основные из них схематично представлены в виде диаграмм направленности излучения на рис. 1.1б:  $\gamma$  – углы излучения системы МДС–ДВ,  $\varphi$  – углы соответствующих гармоник излучения в свободном пространстве после прохождения через диэлектрическую призму,  $x, y, z$  – пространственные координаты,  $\Delta$  – толщина диэлектрического слоя,  $a$  – расстояние между ДВ и ленточной решеткой 2 (прицельный параметр).



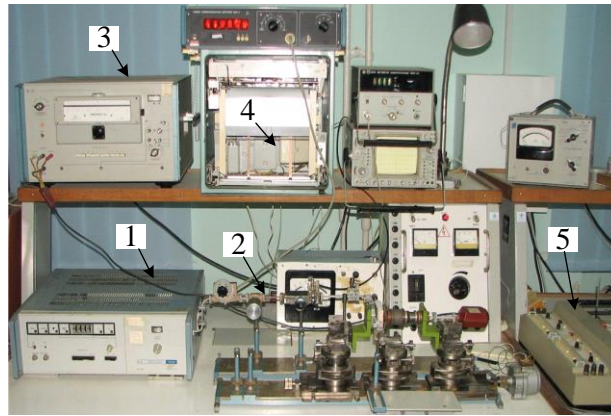


Рисунок 1.3 – Внешний вид экспериментальной установки: 1 – измеритель КСВ и ослаблений; 2 – волноводно-измерительный тракт; 3 – измеритель мощности СВЧ; 4 – самописец; 5 – графопостроитель

В состав блока измерения пространственных характеристик входили также две подвижные рупорные антенны 6, оси вращения которых в  $E$ -плоскости проходят через излучающую апертуру и совмещены с вертикальной осью решетки 2, а ось вращения в  $H$ -плоскости совпадает с продольной осью ДВ 3, что обеспечивает регистрацию углов излучения в интервале  $\varphi = 10 - 170^\circ$  с точностью  $\Delta\varphi = \pm 0.25^\circ$  в дальней зоне исследуемых полей, которая определяется известным соотношением  $z \geq a_m^2/\lambda$ , где  $a_m$  – максимальный размер апертуры антенны. В ходе измерения диаграмм направленности, сигнал, принимаемый рупором 6, поступал на вход «Y» двухкоординатного графопостроителя (ГП), вход «X» которого подключен к датчику угла поворота приемного рупора. Таким образом, при перемещении подвижной антенны на графопостроителе фиксируется диаграмма излучения, которая после преобразования в цифровой вид, используется для компьютерной обработки полученных данных.

Используемые при моделировании диэлектрические волноводы из фторопласта (сечением  $5.2 \times 2.6 \text{ мм}^2$ ) и полистирола (сечением  $7.2 \times 3.8 \text{ мм}^2$ ) позволили реализовать относительные фазовые скорости поверхностной волны в интервале  $\beta_w = 0.6 - 0.8$  и возбудить на МДС из фторопласта три пространственные гармоники излучения, которые на диаграмме рис. 1.2а

обозначены индексами  $1_0$ ,  $3_{-1}$  и  $4_{0,-1,-2}^{-1}$ . Экспериментальные образцы МДС были реализованы на основе прямоугольных фторопластовых призм с поперечными размерами  $54 \times 60 \text{ мм}^2$  (практически исключая влияние эффектов переотражений объемных волн от их торцов на характеристики излучений) для трех значений толщины диэлектрика  $\Delta$ :  $\Delta_1 \approx \lambda/4$ ,  $\Delta_2 \approx \lambda$ ,  $\Delta_3 \approx 4\lambda$ . Требуемая точность нанесения ленточной дифракционной решетки на плоскость призмы достигалась применением процесса фотолитографии, обеспечивающего погрешность по периоду и ширине лент  $\pm 0.01 \text{ мм}$ .

В частности, реализованные в эксперименте параметры МДС для трех основных режимов возбуждения пространственных волн приведены в таблице 1. Здесь параметр  $u = \cos(\pi d/l)$  – коэффициент заполнения решетки. Он выбирался из условия максимума интенсивности основных излучаемых пространственных гармоник в исследуемых зонах диаграмм [6].

Таблица 1 – Параметры исследуемых МДС

Зона излучения	Гармоники возбуждаемых пространственных волн	l, мм	d, мм	κ	u	$\beta w$
10	n = 0 – в диэлектрик	1,17	0,39	0,30	+ 0,5	0,788
$4_{0,-1,-2}^{-1}$	n = 0, -1, -2 – в диэлектрик n = -1 – в свободное пространство	3,07	1,535	0,79	0	0,788
3-1	n = -1 – в диэлектрик	1,36	1,084	0,35	- 0,8	0,598

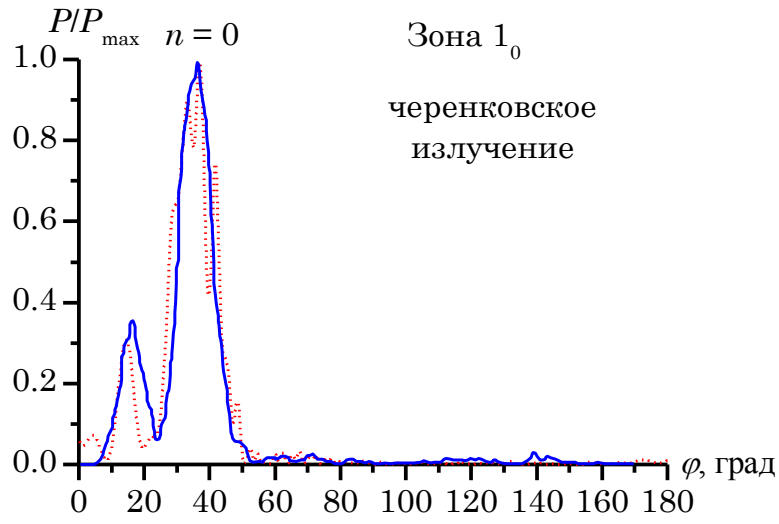
Тестирование полученных результатов экспериментального моделирования проводилось численным методом, который заключается в построении конечно-разностной схемы решения системы уравнений Максвелла в частных производных с учетом материальных уравнений [7].

В результате проведения серии экспериментов на МДС толщиной  $\Delta \approx \lambda/4 - 4\lambda$  установлено, что для режимов моделирования черенковского и дифракционно-черенковского излучений максимальная интенсивность диаграмм направленности наблюдается при толщине призмы, превышающей

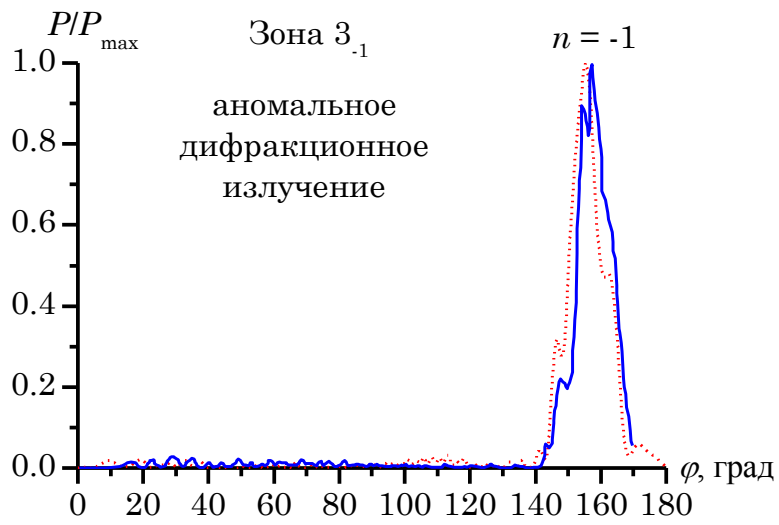
длину волны излучения. На рис. 1.4 для  $\Delta > \lambda$  в относительных единицах мощности  $P/P_{\max}$  ( $P_{\max}$  – максимальная мощность из излучаемых гармоник) представлены типичные диаграммы направленности излучений МДС, параметры которых приведены в таблице 1.

Из графиков рис. 1.4а,б видно, что для черенковского ( $n = 0$ ) и аномального дифракционного ( $n = -1$ ) режимов моделирования наблюдаются однолепестковые диаграммы направленности излучения в области углов, соответствующих результатам численного анализа методом конечных разностей. Для режима дифракционно-черенковского излучения, зона  $4_{0,-1,-2}^{-1}$ , как видно из графика рис. 1.4в, преобладающими и примерно равными по интенсивности являются черенковская и минус первая (излучаемая через диэлектрик в свободное пространство) дифракционные гармоники. Это обусловлено заданным значением коэффициента заполнения решетки  $u \approx 0$ , определяющим условие максимальной плотности энергии гармоники с  $n = -1$  при излучении по нормали [6]. Дифракционная гармоника с  $n = -2$  ( $\varphi_{-2\varepsilon} \approx 140$ ) имеет уровень интенсивности на порядок меньше, чем основная гармоника, и на рис. 1.4в проявляется в виде фонового излучения.

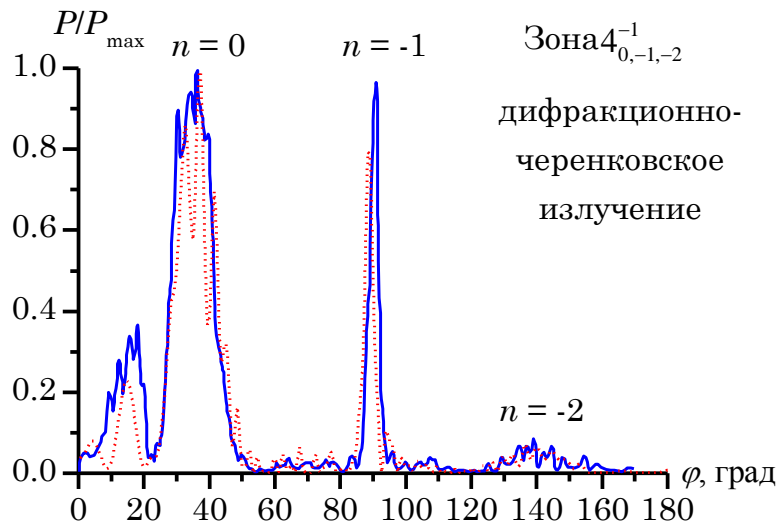
Отличие результатов численного анализа от эксперимента обусловлено приближенностью теоретической модели, которая не учитывает конечной проводимости ленточных решеток, а также технологическими погрешностями при изготовлении МДС.



а



б



в

Рисунок 1.4 – Диаграммы направленности излучений численного и экспериментального моделирования: черенковский режим (а), аномальный дифракционный режим (б), дифракционно-черенковский режим (в); — эксперимент, ..... – численный счет

### 1.3 О возможности реализации практических устройств вакуумной электроники на основе периодических металлодиэлектрических структур

Описанные выше режимы трансформации электромагнитных волн, как следует из соотношений (1.4) – (1.11), можно реализовать как путем возбуждения МДС поверхностной волной ДВ, так и путем возбуждения МДС полем волны тока пространственного заряда ЭП. Первый вариант уже нашел применение при создании квазиоптических направленных ответвителей и делителей мощности [8, 9].

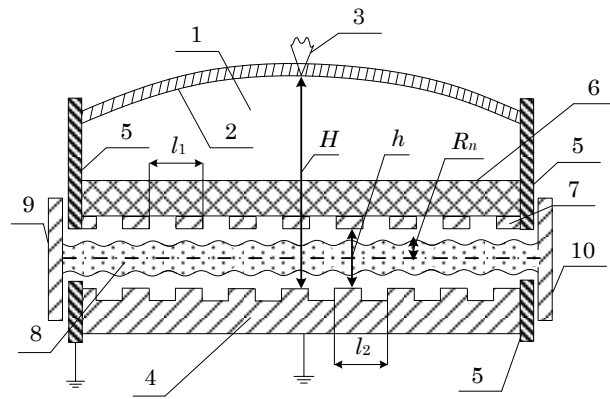
Вариант создания электровакуумных приборов СВЧ с применением МДС является более сложным поскольку требует разработки специальных диэлектрических структур с малыми потерями на СВЧ и специальной электронной оптики, обеспечивающей заданные плотности и скорости ЭП.

Проведенные оценки параметров электродинамических систем рис. 1.1 а,б и других устройств на их основе, показывают, что структуры типа отражательная ДР-МДС или многорядные системы на основе МДС при ускоряющих напряжениях  $U \approx 1000$  В и значениях  $\varepsilon = 100$  (например, керамика на основе оксидов титана) могут быть реализованы в диапазоне длин волн  $\lambda = 1 - 0,1$  мм при периодах  $l \approx 62 - 4$  мкм. К настоящему времени технология изготовления таких структур в достаточной степени освоена и апробирована при изготовлении многорядных замедляющих систем в ЛОВ, где используются специальные способы формообразования такие, как электроэрозионная обработка, холодная штамповка, фотолитография, электронная и рентгенолитография, вакуумное и плазменное напыление пленок. При создании гетеродинных электровакуумных источников излучения, требующих реализации наноразмерных замедляющих систем, могут быть использованы новые методы пучковой ионной литографии в сочетании с наностамповкой.

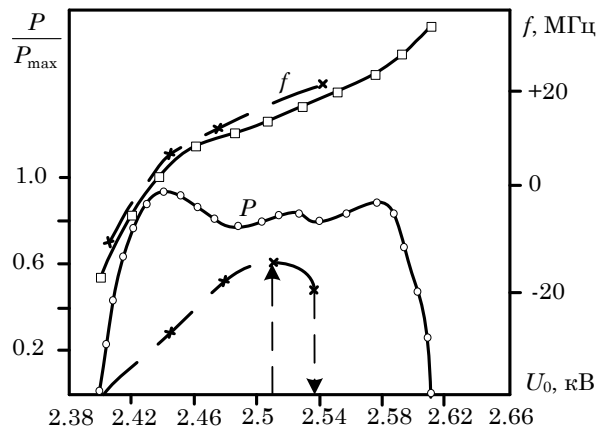
По проведенным оценкам для реализации описанных выше приборов в субмиллиметровом диапазоне толщину ЭП следует уменьшить до значений 0,04 мм. В настоящее время данный вопрос может быть решен за счет применения матричных полевых и щелевых  $L$ -катодов [10], которые позволяют получить равномерную по площади и стабильную во времени электронную эмиссию с высокой плотностью тока при относительно невысоких напряженностях электрического поля.

Для проверки возможности возбуждения объемных волн при движении ЭП вдоль периодической МДС использовалась автоматизированная система измерения параметров резонансных приборов типа ГДИ, которая описана в [11]. Модифицированная часть этой системы с введенной в объем ОР периодической МДС показана на рис. 1.5а, здесь же на рис. 1.5б, приведены основные амплитудно-частотные характеристики ГДИ без МДС (пунктир) и ГДИ с МДС (сплошные линии).

Для реализации модифицированного макета ГДИ в четырехмиллиметровом диапазоне длин волн при сечении ЭП  $5 \times 0.2 \text{ мм}^2$  использовался малогабаритный полусферический ОР, предназначенный для работы на  $TEM_{00q}$  типах колебаний с апертурой зеркал  $D = 55 \text{ мм}$ . Ограничение апертуры зеркал выбиралось минимальным для обеспечения добротности колебаний в ОР порядка  $Q = 400 - 1000$  и максимальной однородности магнитного поля в пространстве взаимодействия ЭП с СВЧ полями ОР. Для вывода энергии из резонансной системы прибора использовался волноводно-щелевой узел связи сечением  $3.6 \times 0.05 \text{ мм}^2$ , расположенный в центре сферического зеркала 2 радиуса кривизны  $R_{сф} = 110 \text{ мм}$ , что обеспечивало возбуждение резонатора на основном  $TEM_{00q}$  типе колебаний, вблизи максимума добротности для интервала расстояний между зеркалами ОР  $H/R_{сф} = 0.7 - 0.8$ . В этом интервале значений  $H$  поддерживалась минимальная связь резонатора с нагрузкой.



а)



б)

Рисунок 1.5 – Модифицированная схема макета ГДИ (а) и его амплитудно-частотные характеристики (б): 1 – открытый резонатор, 2 – сферическое зеркало, 3 – волноводно-щелевой вывод СВЧ мощности ( $P$ ), 4 – отражательная дифракционная решетка, 5 – анодные планки со щелями, 6 – диэлектрическая призма, 7 – металлическая ленточная решетка, 8 – электронный пучок, 9 – катод, 10 – коллектор электронов

Макет ГДИ без МДС был реализован на базе полусферического ОР с нанесением на плоское зеркало металлической ДР при периоде  $l_2 = 0.4$  мм, ширине решетки 10 мм и сечении ЭП  $5 \times 0.2$  мм<sup>2</sup>, который формировался диодной пушкой с  $L$ -катодом косвенного подогрева. Прибор исследовался при различных расстояниях  $H$  между зеркалами ОР  $H/R_{сф} = 0.19 - 0.8$  в интервале значений ускоряющих напряжений  $U_0 = 1.6 - 3.2$  кВ и различных значений отношения рабочего тока ЭП  $I$  к пусковому току  $I_n$ . В результате исследований ГДИ описанной выше

геометрии были определены следующие основные параметры: диапазон комбинированной  $f_k$  перестройки частоты (электронная совместно с механической) –  $f_k = 60 \div 80$  ГГц; максимальная выходная мощность  $P_0$  при  $U_0 = 2 - 2.5$  кВ для  $TEM_{00q}$  типа колебаний в зависимости от  $I/I_n$  составляла величину  $P_0 = 1 - 5$  Вт при значениях  $I_n = 36 - 40$  мА и  $I \approx 120$  мА.

В [12] путем экспериментального моделирования ЭП поверхностной волной диэлектрического волновода показана практическая возможность увеличения полосы пропускания многосвязной электродинамической системы на базе ОР с МДС. Установлено, что такая система обладает качественно новыми электродинамическими свойствами по сравнению с ОР без МДС: путем изменения толщины диэлектрика и значений проницаемости  $\varepsilon$  возможна реализация режимов увеличения амплитуды колебаний их добротности, селекции колебаний. Обнаруженные свойства такой системы нашли объяснения в рамках физической модели дифракционно-черенковского излучения на периодической металлодиэлектрической структуре [5]. Для проверки вышеописанных свойств ОР с МДС при возбуждении ее ЭП использовалась прямоугольная диэлектрическая призма, изготовленная из поликора ( $\varepsilon = 10$ ). На его боковую поверхность методом фотолитографии наносилась ленточная ДР.

При этом периоды ДР  $l$  и толщина диэлектрика  $\Delta$  по нормали к оси ЭП определяются условиями максимальной интенсивности дифракционного излучения под углом  $\gamma = 90^\circ$  и максимальной плотности энергии черенковского излучения в диэлектрик:  $l = |n|\lambda\beta_e$ ,  $\Delta = \lambda\beta_e(\kappa + \varphi_0/\pi)/2\theta_0$ , где  $n = -1$  для основной пространственной гармоники ДИ  $\sqrt{\varepsilon\beta_e - 1}$ ,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний в резонаторе,  $\theta_0 = \sqrt{\varepsilon\beta_e - 1}$ .

При этом период  $l$  и коэффициент заполнения ленточной ДР  $u$ , выбраны таким образом, что решетка незначительно влияет на плотность энергии черенковского излучения и является полупрозрачной для ДИ [6]. Ширина области оптимальных значений  $u = 0.3 - 0.5$  включает оптимальное значение



коэффициента заполнения решеток при возбуждении ДИ в базовом ГДИ, где  $d/l \approx 0.6$  [12]. Поэтому для обеспечения эффективных условий возбуждения колебаний в данном приборе периоды решеток выбираются примерно равными  $l_1 = l_2 \approx 0.4$  мм.

Поверхность МДС с ленточной решеткой 7 расположена относительно поверхности отражательной ДР на расстоянии  $h \leq 2R_n$ , где  $R_n$  – радиус пульсации ЭП 8 при движении в фокусирующем магнитном поле, величина индукции которого  $B \approx 0.4$  Тл.

В процессе экспериментальных исследований описанного выше прибора на макете [11] установлено, что при введении в ОР генератора периодической МДС с описанными выше параметрами увеличивается область пространства взаимодействия резонансного поля ОР с поверхностной волной двойной периодической структуры металлическая ДР – периодическая МДС. Основные результаты таких исследований приведены на рис. 1.5б. Пунктирными линиями показана зона генерации ГДИ без МДС, сплошными линиями показано изменение выходной мощности  $P$  и электронной перестройки частоты  $f$  в интервале значений ускоряющего напряжения  $U_0$ , соответствующего синхронизму скорости электронов с полем ОР. Приведенную на рис. 1.5а схему можно рассматривать как систему из двух связанных резонаторов: диэлектрического – низкодобротного и открытого – высокодобротного. При этом связь резонаторов осуществляется путем преобразования волны тока пространственного заряда ЭП в объемные волны на гармониках с индексами  $n = 0, -1$ , что коррелирует с проведенным теоретическим анализом.

### **Выводы к разделу 1**

В разделе обоснован общий подход к методике экспериментального моделирования черенковского и дифракционного излучений на периодических металлодиэлектрических структурах, который позволяет

достаточно оперативно исследовать электродинамические характеристики таких структур без применения громоздких и энергоемких экспериментальных электровакуумных установок. Данная методика реализована на экспериментальной установке миллиметрового диапазона волн и апробирована путем сравнения экспериментальных результатов моделирования с теоретическими и экспериментальными результатами, полученными на действующем макете электровакуумного прибора типа ГДИ. На основе традиционных и новых технологий производства электровакуумных приборов СВЧ проведена оценка возможности реализации параметров планарных МДС, которые могут быть использованы в новых модификациях приборов типа оротрон и ЛОВ субмиллиметрового и инфракрасного диапазонов волн, что продемонстрировано на примере реализации новой модификации прибора типа ГДИ с периодической металлодиэлектрической структурой.

## **РАЗДЕЛ 2**

### **УСТАНОВКА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫХ ПРИБОРОВ СВЧ С ОТКРЫТЫМИ РЕЗОНАНСНЫМИ СТРУКТУРАМИ**

В данном разделе описана новая модификация универсальной экспериментальной установки для измерения электродинамических характеристик генераторов сверхвысоких частот с открытыми резонансными структурами типа оротрон-генератор дифракционного излучения. Для расширения функциональных возможностей и диапазона электронной перестройки частоты в открытый резонатор введена дополнительная периодическая металлодиэлектрическая структура. Экспериментальные результаты исследований энергетических, вольт-амперных и частотных характеристик макета генератора дифракционного излучения новой модификации сравниваются с характеристиками генератора без металлодиэлектрической структуры.

#### **2.1 Описание экспериментального стенда**

В настоящее время приборы с открытыми резонансными структурами типа оротрон – генератор дифракционного излучения (г.д.и.) являются перспективными для применения их в различных устройствах миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн [13, 14]. Поэтому вопросы модификации таких приборов с целью расширения их функциональных возможностей и улучшения выходных параметров являются актуальными [15]. Построены как линейная, так и основы нелинейной теории, а также экспериментально доказаны их положительные качества в ГГц и ТГц диапазонах волн [13-15]. Однако приближенность данных теорий и

эпизодичность в проведении экспериментов не позволяют получить полное представление о физике процессов в таких приборах.

В данной работе описана универсальная экспериментальная установка, в которую введены металлодиэлектрическая структура (м.д.с.) и микропроцессорная система, позволяющая контролировать различные режимы возбуждения электромагнитных колебаний миллиметрового диапазона волн в г.д.и.: уровень излучаемой мощности с.в.ч.; изменение частоты и спектра излучения в зоне электронной перестройки генератора; нелинейные процессы типа гистерезисных явлений; токовые характеристики прибора в области взаимодействия электронного потока (э.п.) с с.в.ч. полями.

Комплексный экспериментальный стенд для определения электродинамических характеристик устройств типа оротрон – г.д.и. состоит из двух основных блоков (рис. 2.1): магнитно – вакуумной системы – рис.2.1а и анализатора дифракционного излучения (а.д.и.) – рис. 2.1б. В состав блока рис. 2.1а входят: макет г.д.и. – 1, схематическое устройство которого показано на рис. 2.1б, система электромагнитов – 2, юстировочное устройство – 3, вакуумная система – 4, блоки питания, система регистрации напряжений и токов на фокусирующих электродах, стандартный волноводно-измерительный тракт миллиметрового диапазона волн для регистрации уровня излучения на выходе прибора и микропроцессорная система сбора и обработки информации – 5.

Общий вид макета г.д.и. 1, с расположением его относительно электромагнита 2, приведен на рис.2.1б. Основными его узлами являются:

корпус 6, узел пушки 7, узел регистрации излучения 8. Внутри корпуса имеется цилиндрическая полость для размещения конструкций узла пушки и узла регистрации излучения, собранных на присоединительных фланцах. На задней стенке боковой поверхности корпуса имеется патрубок с присоединительным фланцем для подключения вакуумной системы<sup>4</sup>. На передней стенке боковой поверхности корпуса расположено окно, служащее для визуальных наблюдений и фоторегистрации следа свечения электронного пучка в области его движения вдоль электродинамической системы.

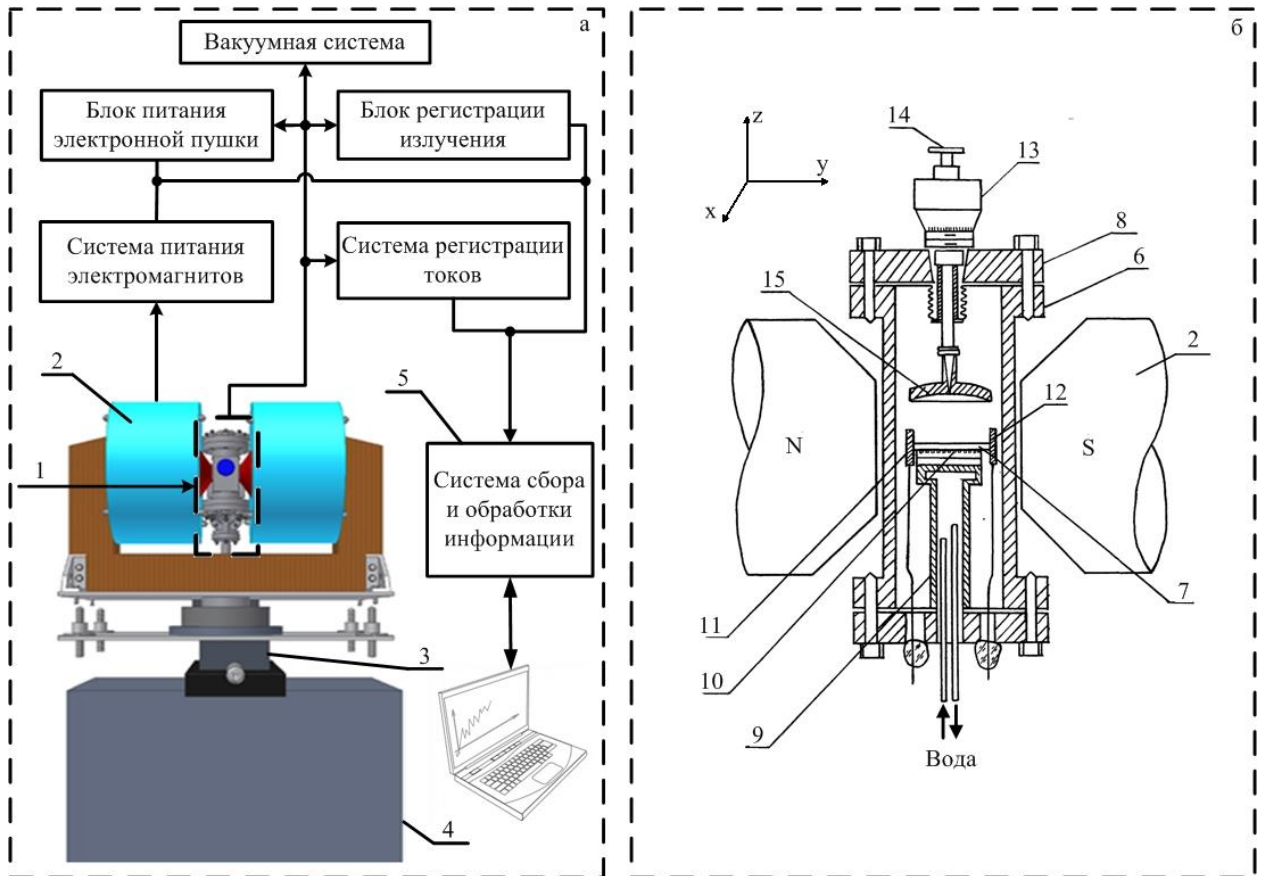


Рисунок 2.1 – Комплексный экспериментальный стенд для определения электродинамических характеристик генераторов с.в.ч. типа оротрон – г.д.и.: а – магнитно – вакуумная система, б – анализатор дифракционного излучения.

На фланце узла пушки размещены: пьедестал 9 с внутренней полостью для водяного охлаждения; нижнее плоское зеркало электродинамической системы с заданным типом дифракционной решетки (д.р.) 10 расположенной вдоль оси; электронная пушка 11 и коллектор электронов 12.

Узел регистрации излучения имеет следующие элементы: микрометрический винт 13 с вакуумным сильфоном, волноводный вывод энергии излучения 14 с присоединительным фланцем и верхнее сферическое зеркало 15 с волноводно-щелевым переходом.

Все элементы и узлы г.д.и. выполнены из немагнитных материалов и соединены между собой через металлические вакуумные уплотнения, что позволяет получить в исследуемой системе степень вакуума  $10^{-5} - 10^{-6}$  Па, которой достаточно для реализации задач по исследуемой системе.

С целью автоматизации процесса сбора информации и снижения количества ошибок при проведении измерений в данную экспериментальную установку введена микропроцессорная система сбора и обработки информации 5.

Данная конструкция а.д.и. позволяет исследовать различные модификации электродинамических систем приборов дифракционной электроники при возбуждении их э.п.. Достигается это путем замены, как основных структурных элементов, так и введением дополнительных элементов – например периодической м.д.с..

Для реализации модифицированного макета г.д.и. в четырехмиллиметровом диапазоне длин волн при сечении э.п.  $5 \times 0.2$  мм<sup>2</sup>

использовался малогабаритный полусферический открытый резонатор (о.р.), предназначенный для работы на  $TEM_{00q}$  типах колебаний с апертурой зеркал  $D = 55$  мм. Ограничение апертуры зеркал выбиралось минимальным для обеспечения добротности колебаний в о.р. порядка  $Q = 400 \div 1000$  и максимальной однородности магнитного поля в пространстве взаимодействия э.п. с с.в.ч. полями о.р.. Для вывода энергии из резонансной системы прибора использовался волноводно-щелевой узел связи сечением  $0.05 \times 3.5$  мм<sup>2</sup>, расположенный в центре сферического зеркала 15 радиуса кривизны  $R_{сф} = 110$  мм, что обеспечивало возбуждение резонатора на основном  $TEM_{00q}$  типе колебаний, вблизи максимума добротности для интервала расстояний между зеркалами о.р.  $H/R_{сф} = 0.7 \div 0.8$ . В этом интервале значений  $H$  поддерживалась минимальная связь резонатора с нагрузкой. С уменьшением расстояния между зеркалами  $H/R_{сф} = 0.19 \div 0.23$  в резонаторе увеличивалась вероятность появления высших типов колебаний, которые могли конкурировать с основным и приводить к явлениям типа контурного гистерезиса [16].

Макет г.д.и. без м.д.с. был реализован на базе полусферического о.р. с нанесением на плоское зеркало металлической д.р. шириной 10 мм и периодом  $l_1 = 0.4$  мм. Э.п. сечением  $5 \times 0.2$  мм<sup>2</sup>, формировался диодной пушкой с L-катодом косвенного подогрева. Прибор тестировался при различных расстояниях между зеркалами о.р.  $H/R_{сф} = 0.19 \div 0.8$  в интервале значений ускоряющих напряжений  $U_0 = 1.6 \div 3.2$  кВ и различных значений отношения рабочего тока э.п.  $I$  к пусковому току  $I_n$ . В результате исследований описанной

выше геометрии г.д.и. были определены следующие основные параметры: диапазон комбинированной  $f_k$  перестройки частоты (электронная совместно с механической) –  $f_k = 60 \div 80$  ГГц; максимальная выходная мощность  $P_0$  при  $U_0 = 2 \div 2.5$  кВ для ТЕМ<sub>00q</sub> типа колебаний в зависимости от  $I/I_n$  составляла величину  $P_0 = 1 \div 5$  Вт при значениях  $I_n = 36 - 40$  мА и  $I \approx 120$  мА.

Основным недостатком описанного выше г.д.и. без м.д.с. является дискретный спектр возбуждаемых с изменением ускоряющего напряжения колебаний, что обусловлено ограниченной полосой пропускания о.р. для заданного типа колебания и параметра рассинхронизма э.п. с с.в.ч. полем.

Вместе с тем в [17] путем экспериментального моделирования э.п. поверхностной волной диэлектрического волновода показана практическая возможность увеличения полосы пропускания многосвязной электродинамической системы на базе о.р. с м.д.с.. Установлено, что такая система обладает качественно новыми электродинамическими свойствами по сравнению с о.р. без м.д.с.: путем изменения толщины диэлектрика и значений проницаемости  $\varepsilon$  возможна реализация режимов увеличения амплитуды колебаний их добротности, селекции колебаний. Обнаруженные свойства такой системы нашли объяснение в рамках физической модели дифракционно-черенковского излучения [18] на периодической металлодиэлектрической структуре.



## 2.2 Модификация открытого резонатора ГДИ

Для расширения функциональных возможностей и диапазона электронной перестройки частоты прибора в объём о.р. (рис. 2.1б) введена периодическая м.д.с. (рис. 2.2), которая расположена между зеркалами о.р. и выполнена в виде диэлектрического резонатора с нанесенной на его боковую поверхность ленточной д.р..

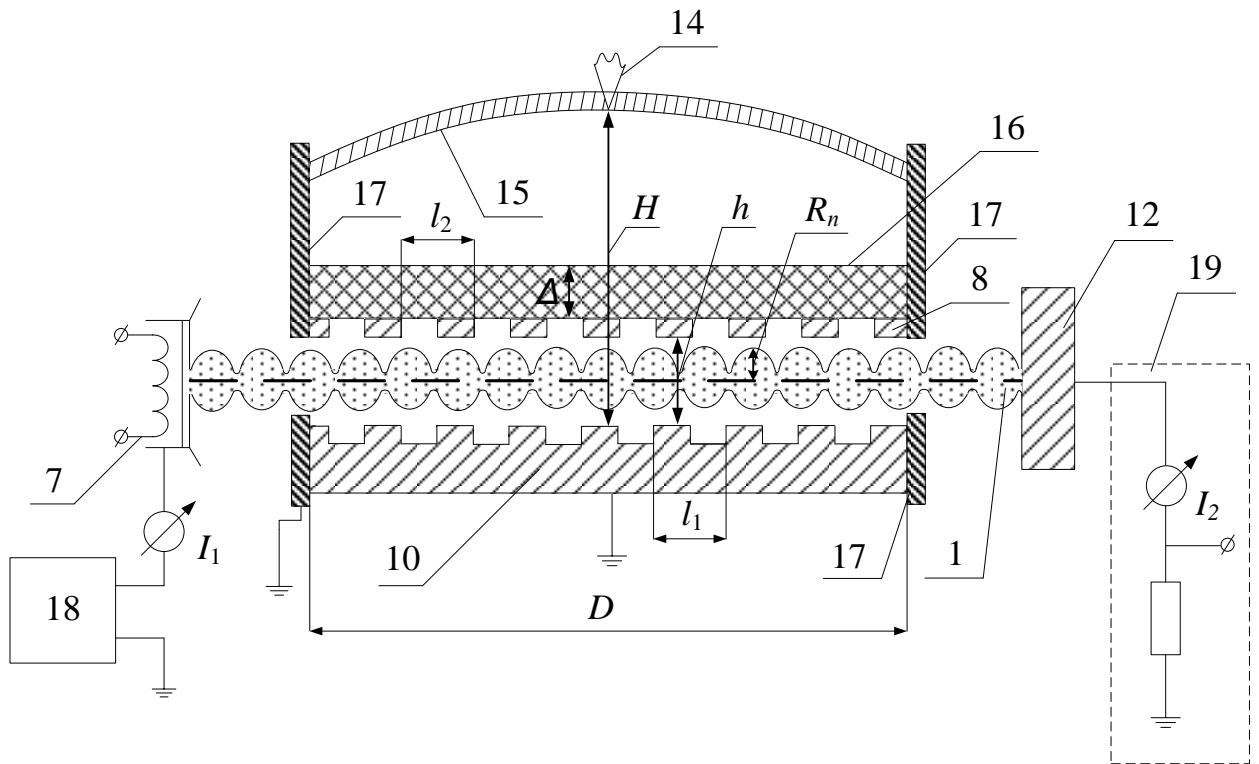


Рисунок 2.2 – Схема включения м.д.с. в открытый резонатор г.д.и..

При этом периоды д.р.  $l$  и толщина диэлектрика  $\Delta$  по нормали к оси э.п. определяются условиями максимальной интенсивности дифракционного излучения под углом  $\gamma = 90^\circ$  и максимальной плотности энергии черенковского излучения в диэлектрике:  $l = |n| \lambda \beta_e$ ,  $\Delta = \frac{\lambda \beta_e}{2\theta_0} (k + \varphi_0/\pi)$ , где  $n = -$

1 для основной пространственной гармоники д.и.,  
 $\lambda$  – длина волны излучения,  $\beta_e = v_e/c$ ,  $v_e$  – скорость электронов,  $c$  – скорость света,  $\theta_0 = \sqrt{\varepsilon\beta_e - 1}$ ,  $\theta = \sqrt{1 - \beta_e^2}$ ,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний в резонаторе.

Период  $l$  и коэффициент заполнения ленточной д.р.  $U = \cos(\pi d/l)$ , ( $d$  – ширина лент решетки) выбраны таким образом, что решетка незначительно влияет на плотность энергии черенковского излучения и является полупрозрачной для д.и. [19]. Ширина области оптимальных значений  $U = 0.3 \div 0.5$  включает оптимальное значение коэффициента заполнения решеток при возбуждении д.и. в базовом г.д.и., где  $d/l \approx 0.6$ . Поэтому для обеспечения эффективных условий возбуждения колебаний в данном приборе периоды решеток выбираются примерно равными  $l_1 = l_2 \approx 0.4$  мм.

Основные идеологические аспекты построения с.в.ч. приборов с м.д.с. приведены в [18] и реализованы в данной работе на базе макета г.д.и..

Общая схема построения макета г.д.и. с м.д.с. аналогична представленной на рис. 2.1б. Кроме того в него введены дополнительные элементы, что изображено на рис. 2.2. Периодическая м.д.с. 16, выполнена в виде диэлектрического прямоугольного резонатора, в нашем случае, материал поликор ( $\varepsilon = 9.7$ ), на его боковой поверхности расположены металлические брусья с заданным периодом  $l_2$ ; 17 – анодные планки для крепления м.д.с. 16 в одном блоке с металлической периодической структурой 10. При этом м.д.с.

16 расположена относительно металлической решетки 10 на расстоянии  $h \leq 2 R_n$ , где  $R_n$  – радиус пульсаций электронного потока 1 при движении в магнитном фокусирующем поле  $B$ . В электронной оптике [20] радиус пульсаций описывает соотношение  $R_n = \sqrt{\frac{m}{e}} \frac{\sqrt{U}}{B} tg \gamma_0$ , где  $m, e$  – соответственно масса и заряд электрона;  $U_0$  – ускоряющее напряжение;  $B$  – индукция магнитного поля, которая в рабочем зазоре электромагнита составляла величину порядка 0.4 Тл;  $\gamma_0$  – угол влета электронов в магнитное поле на выходе из анода 17. Выполнение данного соотношения позволяет обеспечить максимальное токопрохождение электронов в пролетном металлодиэлектрическом канале (м.д.к.) и определить степень влияния поляризационных явлений, возникающих при движении электронов в м.д.к..

Токи на входе в м.д.к. и на выходе из пространства взаимодействия регистрировались индикаторами 18, 19 и передавались в систему сбора и обработки информации 5 (рис.2.1а). Также в 5 регистрировались ускоряющее напряжение, выходная мощность г.д.и. и диапазон электронной перестройки частоты в пределах зоны генерации при фиксированных значениях расстояний  $H$  между зеркалами о.р..

### 2.3 Результаты тестовых исследований

Остановимся кратко на результатах основных тестовых исследований макета г.д.и. без м.д.с. и сравним полученные характеристики с макетом с м.д.с. (рис.2.2). В процессе экспериментальных исследований описанной выше

электродинамической системы г.д.и. было установлено, что характерной особенностью одночастотных колебаний в зоне электронной перестройки г.д.и. является асимметрия энергетических и частотных характеристик относительно точки максимальной мощности  $P_0$ . При этом для большинства колебаний в длинноволновой области зоны генерации наблюдается плавное нарастание мощности с увеличением  $U_0$  (мягкий режим возбуждения генератора), а в коротковолновой – резкий срыв колебаний (жесткий режим генерации), где обычно проявляются гистерезисные явления [21]. Асимметрия зон генерации и наличие электронного гистерезиса обусловлено уменьшением средней скорости электронов в процессе взаимодействия их с полем о.р., основная часть которого при полусферической геометрии сосредоточена в центральной области плоского зеркала с д.р.

При введении в о.р. генератора периодической м.д.с. с описанными выше параметрами увеличивается область пространства взаимодействия резонансного поля о.р. с поверхностной волной двойной периодической структуры металлическая д.р. – периодическая м.д.с.. Основные результаты таких исследований приведены на рис.2.3 в виде вольтамперных (а) и энергетических (б) характеристик генератора с.в.ч. типа оротрон – г.д.и..

Из графиков рис.2.3а видно, что поляризация диэлектрика в м.д.к. приводит к снижению рабочего тока прибора, что требует его дополнительной корректировки путем увеличения тока накала  $I_n$  на спирали подогревателя электронной пушки. Рабочий ток прибора в данной системе соответствовал значениям  $I = 2I_n \approx 70$  мА, что позволило исследовать его основные

характеристики и установить возможность увеличения диапазона электронной перестройки частоты в 1.5 раза при уровне выходной мощности  $P_{max} = P_0 \approx 3$  Вт.

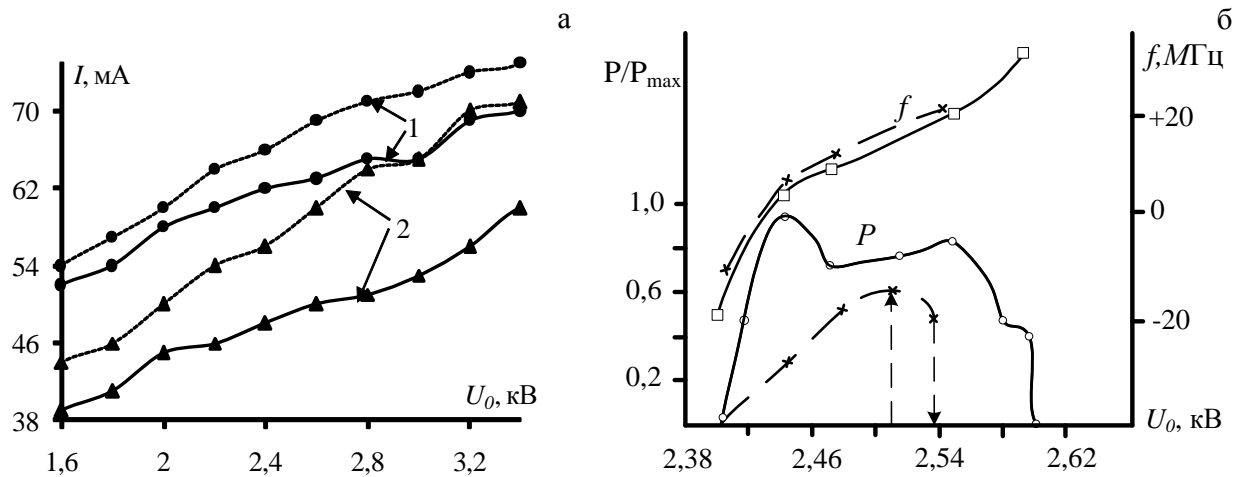


Рисунок 2.3 – Вольт-амперные (а) и энергетические (б) характеристики генератора с.в.ч. типа оротрон – г.д.и.: пунктир – генератор без м.д.с., сплошные линии – генератор с м.д.с; 1 –  $I_n = 8.6$  А, 2 –  $I_n = 5.6$  А.

## Выводы к разделу 2

Экспериментально установлено, что путем введения в о.р. генератора м.д.с. существенно расширяются его функциональные возможности за счет использования дополнительных каналов трансформации поверхностной волны э.п. в объемные волны, излучаемые в диэлектрический резонатор [22]. Это может быть использовано для организации дополнительного вывода энергии из системы г.д.и. с м.д.с..

Следовательно, при введении в объем о.р. дополнительной м.д.с. могут быть расширены его функциональные возможности (организация дополнительного вывода энергии) и увеличен в 1.5 раза диапазон электронной перестройки частоты при сохранении уровня выходной мощности  $P_0 \approx 3$  Вт.

### РАЗДЕЛ 3

## МОДЕРНИЗИРОВАННЫЙ МЕТОД УСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МУЛЬТИГАРМОНИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В УСТРОЙСТВАХ СИЛЬНОТОЧНОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

В данном разделе проведена модернизация метода усредненных характеристик в части построения схемы асимптотического интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, с учетом специфики мультигармонических резонансных взаимодействий в устройствах сильноточной электроники. Получены схемы асимптотического интегрирования, объединяющие процедуры прямого и обратного переходов. Рассмотрен как случай одной быстрой фазы, так и случай многих быстрых фаз.

### 3.1 Анализ общих решений

Как известно, самосогласованную теорию нелинейных процессов в устройствах сильноточной электроники можно разделить на две части [23-28]. Первая из них является задачей движения заряженных частиц в заданных электромагнитных полях, вторая — задача возбуждения электромагнитных полей заряженными частицами при заданном их движении. Решение обоих этих задач позволяет построить полную самосогласованную картину взаимодействия частиц с электромагнитными полями.

Для формирования первой из выше упомянутых задач, задачи движения, используют в наиболее общем случае кинетическое уравнение Власова [23-28]. Во многих случаях для описания нелинейных процессов можно применить менее общие, но более простые квазигидродинамические уравнения [23-28]. Как в случае кинетического подхода, так и в случае квазигидродинамического описания используют уравнения в частных производных.

Для решения задачи движения, которые описывается уравнениями в частных производных, используют различные методы [23-32]. Среди этих методов, учитывающих специфику нелинейных процессов в устройствах сильноточной, плазменной электроники, следует выделить метод усредненных характеристик [23, 24, 32]. Этот метод с одной стороны включают у себя преимущества плазменного подхода, а с другой – базируются на математически обоснованных асимптотических схемах решения систем дифференциальных уравнений. Благодаря использованию асимптотических схем интегрирования можно получать часть результатов, как в аналитическом виде, так и в виде, хорошо адаптированном для численных методов анализа.

Для формирования второй из выше упомянутых задач, задачи возбуждения электромагнитных полей, используют уравнения Максвелла. Плотности электрического тока и плотности заряда, которые входят в уравнения Максвелла, вычисляют, используя уравнения движения. Решения уравнений Максвелла можно находить различными способами, но наиболее часто используемым является метод медленно меняющихся амплитуд [23-29].

В случае если в исследуемом устройстве распространяются волны с широким частотным спектром, то удобно уравнения Максвелла разложить в ряды Фурье и получить дифференциальные уравнения для амплитуд взаимодействующих волн. Чтобы такое разложение можно было осуществить достаточно легко, плотности токов и плотности зарядов, которые находятся с помощью метода усредненных характеристик и входят в уравнения Максвелла, должны быть представлены в виде фурье-гармоник по таким же фазам, какими характеризуются электромагнитные поля в исследуемой системе. Отметим, что при использовании метода усредненных характеристик выполняют переход от неусредненных величин к усредненным, в том числе, и к усредненным фазам. А усредненные и неусредненные фазы являются разными величинами. Именно поэтому в методе усредненных характеристик после получения решений в виде функций от усредненных величин



осуществляется обратный переход к неусредненным величинам, в том числе, и к неусредненным фазам.

Анализируя общую схему решения задач с мультигармоническими резонансными взаимодействиями можно убедиться в том, что обратный переход от усредненных величин к неусредненным с целью использования полученных решений в уравнениях Максвелла можно проводить не для всех величин, а только для некоторых. Оказывается, что в большинстве практически интересных случаях достаточно осуществить обратный переход только лишь для быстрых фаз, по которым происходит разложения в ряды Фурье в уравнениях Максвелла. В этой связи возникает следующий вопрос: нельзя ли модернизировать схему асимптотического интегрирования таким образом, чтобы в ее применения можно было бы получить решения, которые сразу же зависели от неусредненных фаз без дополнительного обратного перехода. Следует ожидать, что такая модернизация упростит общий алгоритм асимптотического интегрирования, позволит увеличить эффективность метода усредненных характеристик.

В первой части данного раздела проведено краткое изложение метода усредненных характеристик, в котором особое внимание уделено алгоритму асимптотического интегрирования и проведению обратного перехода от усредненных переменных к неусредненным. Во второй части изложен модернизированный метод усредненных характеристик. В рамках модернизированного метода усредненных характеристик рассмотрен как случай одной быстрой фазы, так и случай многих быстрых фаз.

### **3.2 Метод усредненных характеристик**

Метод усредненных характеристик применяется для асимптотического интегрирования систем уравнений в частных производных, которые можно записать в стандартной форме [23,24]

$$\mathbf{A}'(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left( \mathbf{Z}'(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \right) \mathbf{U} + \mathbf{C}'(\mathbf{z}, t) \mathbf{U} = \mathbf{R}'(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t), \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{A}', \mathbf{Z}', \mathbf{C}', \mathbf{R}'$  – квадратные матрицы-функции размером  $n \times n$ , компоненты матрицы  $\mathbf{R}'$  являются слабо нелинейными периодическими функциями (в общем случае  $m$ -кратными);  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{z}, t)$  – некоторая вектор-функция в Евклидовом  $n$ -мерном пространстве;  $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n\}$ ,  $z_i \in (-\infty, +\infty)$ ;  $t$  – некоторая скалярная переменная, например, лабораторное время.

Можно показать [23,24], что уравнения в стандартной форме (3.1) могут быть преобразованы в линейные относительно производных уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{Z}(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t), \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{Z}, \mathbf{R}$  – квадратные матрицы размером  $n \times n$ .

Вычислительную процедуру асимптотического интегрирования уравнений вида (3.2) с помощью метода усредненных характеристик можно разбить на три этапа (рис. 1). На первом этапе преобразовываем исходную систему уравнений в частных производных к системе усредненных уравнений  $\kappa$ -го иерархического уровня. При этом осуществляем переход к усредненным переменным и исключаем быстроосциллирующие переменные. На втором этапе находим решения усредненной системы уравнений  $\kappa$ -го иерархического уровня. На третьем этапе проводим обратное преобразование полученных решений на  $\kappa$ -м иерархическом уровне к начальному (нулевому) уровню. То есть, проводим преобразования полученных решений, зависящих от усредненных переменных, к решениям, зависящих от неусредненных переменных, в том числе, и от быстроосциллирующих переменных.

Рассмотрим первый этап вычислительного алгоритма. Он включает в себя две стадии (рис. 3.1). На первой стадии переходим от исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.2) к ее характеристикам, которые уже являются уравнениями в полных производных:

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{Z}(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t); \quad \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{z}, t). \quad (3.3)$$

Как известно, интегрирование уравнений в полных производных (3.3) гораздо проще интегрирования уравнений в частных производных (3.2). Однако, не смотря на достигнутое упрощение, решение системы уравнений (3.3), особенно в случае многопериодических и многорезонансных нелинейных процессов, оказывается не простой задачей. Поэтому на второй стадии (рис. 1) проводим асимптотическое интегрирование уравнений (3.3) с использованием иерархической расчетной схемы [23, 24]. При этом уравнения (3.3) принимаются в качестве исходной системы на *нулевом иерархическом уровне*.

Далее в соответствии с иерархическим подходом [23, 24] классифицируем переменные, входящие в систему уравнений (3.3), на медленные переменные  $\mathbf{x}$  и быстрые фазы  $\boldsymbol{\psi}$ , формируем ряд больших параметров задачи

$$\xi_1 \gg \xi_2 \gg \dots \gg \xi_m \gg \xi_k \gg 1, \quad (3.4)$$

где

$$\xi_m \sim \left| \frac{d\psi_m}{dt} \right| \left/ \left| \frac{dx_q}{dt} \right| \right., \quad (3.5)$$

$\psi_m$  –  $m$ -я компонента вектора быстрых фаз  $\boldsymbol{\psi}$ ;  $x_q$  –  $q$ -я компонента вектора медленных переменных  $\mathbf{x}$ , скорость изменения которой не превышает скорость изменения других медленных переменных.

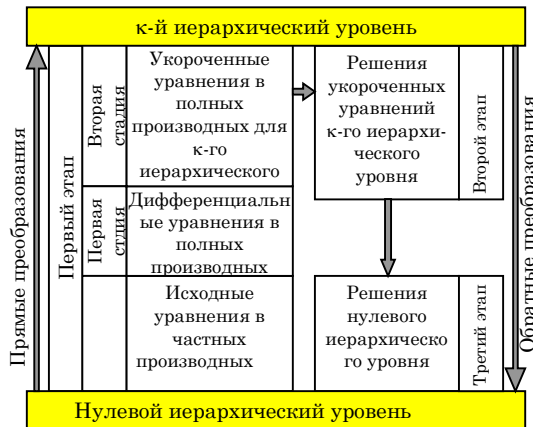


Рисунок 3.1 – Схема вычислительной процедуры метода усредненных характеристик

Следует заметить, что функции  $\mathbf{Z}, \mathbf{R}$  в (3.3) являются периодическими функциями от компонент вектора быстрых фаз  $\boldsymbol{\psi}$ . Также отметим, что возможны расчетные схемы, когда большой параметр  $\xi_m$  (3.5) характеризует скорость изменения не одной быстрой фазы, а группы быстрых фаз.

Как следует из (3.4)–(3.5) наибольшей скоростью изменения характеризуется быстрая фаза  $\psi_1$ . Скорости изменения остальных фаз по сравнению с  $\psi_1$  являются малыми, и поэтому остальные фазы при переходе от нулевого иерархического уровня к первому можно отнести к медленным переменным. В результате систему уравнений (3.3) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \frac{1}{\xi_1} \mathbf{X}_1(\mathbf{x}_1, \psi_1), \quad \frac{d\psi_1}{dt} = \Omega_1(\mathbf{x}_1) + \frac{1}{\xi_1} Y_1(\mathbf{x}_1, \psi_1). \quad (3.6)$$

Для нахождения асимптотических решений системы (3.6) используем замену Крылова-Боголюбова [23,24,33-35] и переходим к усредненным величинам  $\bar{\mathbf{x}}_1$  и  $\bar{\psi}_1$  (переменным следующего уровня иерархии):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= \bar{\mathbf{x}}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_1^n} \mathbf{u}_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1), \\ \psi_1 &= \bar{\psi}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_1^n} v_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1).\end{aligned}\quad (3.7)$$

Функции  $\mathbf{u}_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1)$  и  $v_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1)$  подбираем таким образом, чтобы усредненные величины удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}_1}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_1^n} \mathbf{A}_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1), \quad (3.8)$$

$$\frac{d\bar{\psi}_1}{dt} = \Omega_1(\bar{\mathbf{x}}_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_1^n} B_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1). \quad (3.9)$$

Основной смысл замены (3.7) состоит в том, что медленное движение, определяемое вектором  $\bar{\mathbf{x}}_1$ , полностью отделено от быстрой переменной  $\bar{\psi}_1$ . А именно, правая часть системы (3.8) не зависит от  $\bar{\psi}_1$  и поэтому интегрируется независимо от уравнения (3.9). Определив из (3.8)  $\bar{\mathbf{x}}_1$ , подставив полученные решения  $\bar{\mathbf{x}}_1$  в (3.9), мы можем найти из уравнения (3.9)  $\bar{\psi}_1(t)$ , например, вычислив квадратуру. Уравнения (3.8)–(3.9) определяют поведение исследуемой системы на *первом иерархическом уровне*.

Функции  $\mathbf{A}_1^{(n)}, B_1^{(n)}, \mathbf{u}_1^{(n)}, v_1^{(n)}$ , которые входят в систему уравнений (3.7)–(3.9) имеют следующий вид [1,2, 11–13]:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{g}_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1) d\bar{\psi}_1, \\ B_1^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1) d\bar{\psi}_1,\end{aligned}\quad (3.10)$$

$$\mathbf{u}_1^{(n)} = \frac{1}{\Omega_1} \int_0^{\bar{\psi}_1} (\mathbf{g}_1^{(n)} - \mathbf{A}_1^{(n)}) d\bar{\psi}_1 + \phi_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{v}_1^{(n)} = \frac{1}{\Omega_1} \int_0^{\bar{\psi}_1} \left( h_1^{(n)} - B_1^{(n)} \right) d\bar{\psi}_1 + \varpi_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_1). \quad (3.12)$$

Как следует из (3.10)–(3.12), выражения для  $\mathbf{A}_1^{(n)}, B_1^{(n)}, \mathbf{u}_1^{(n)}, \mathbf{v}_1^{(n)}$  определяются через  $\mathbf{g}_1^{(n)}$  и  $h_1^{(n)}$ , которые, в свою очередь, связаны с функциями  $\mathbf{X}_1(\mathbf{x}_1, \psi_1)$ ,  $\Omega_1(\mathbf{x}_1)$  и  $Y_1(\mathbf{x}_1, \psi_1)$  исходной системы уравнений (3.6). Для первых трех приближений функции  $\mathbf{g}_1^{(n)}$  и  $h_1^{(n)}$  имеют следующий вид:

$$\mathbf{g}_1^{(1)} = \frac{1}{\xi_1} \mathbf{X}_1(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1),$$

$$h_1^{(1)} = \frac{1}{\xi_1} \left( \sum_j \frac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} u_1^{(1,j)} + Y(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\psi}_1) \right), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{g}_1^{(2)} = \frac{1}{\xi_1^2} \left[ \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} u_1^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(1)}}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} A_1^{(1,j)} \right) + \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \bar{\psi}_1} v_1^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(1)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(1)} \right], \quad (3.14)$$

$$h_1^{(2)} = \frac{1}{\xi_1^2} \left[ \sum_j \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} u_1^{(1,j)} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} A_1^{(1,j)} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} u_1^{(2,j)} \right) + \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{\psi}_1} v_1^{(1)} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)} \partial \bar{x}_1^{(k)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(1,k)} \right], \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^{(3)} = & \frac{1}{\xi_1^3} \left[ \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} u_1^{(2,j)} + \frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)} \partial \bar{\psi}_1} u_1^{(1,j)} v_1^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(2)}}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} A_1^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(1)}}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} A_1^{(2,j)} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)} \partial \bar{x}_1^{(k)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(1,k)} + \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial \bar{\psi}_1} v_1^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{X}_1}{\partial \bar{\psi}_1 \partial \bar{\psi}_1} \left( v_1^{(1)} \right)^2 - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(2)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^{(1)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_2^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} h_1^{(3)} = & \frac{1}{\xi_1^3} \left[ \sum_j \left( \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} u_1^{(2,j)} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \bar{\psi}_1 \partial \bar{x}_1^{(j)}} v_1^{(1)} u_1^{(1,j)} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} A_1^{(2,j)} - \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} A_1^{(1,j)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)}} u_1^{(3,j)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left( \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)} \partial \bar{x}_1^{(k)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(1,k)} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)} \partial \bar{x}_1^{(k)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(2,k)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \bar{\psi}_1 \partial \bar{\psi}_1} \left( v_1^{(1)} \right)^2 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{j,k,s} \left( \frac{\partial^3 Y_1}{\partial \bar{x}_1^{(j)} \partial \bar{x}_1^{(k)} \partial \bar{x}_1^{(s)}} u_1^{(1,j)} u_1^{(1,k)} u_1^{(1,s)} \right) + \left. \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{\psi}_1} v_1^{(2)} - \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(2)} - \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \bar{\psi}_1} B_1^{(1)} \right]. \quad (3.17)$$

Также следует иметь в виду, что функции  $\phi_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}})$  и  $\varpi_1^{(n)}(\bar{\mathbf{x}})$  в (3.11)–(3.12) имеют смысл постоянных интегрирования. Существуют различные способы задания этих функций. Например, эти функции можно выбирать так, чтобы постоянные составляющие  $\mathbf{u}_1^{(n)}$  и  $v_1^{(n)}$  были равны нулю. Напомним, что в соотношениях (3.13)–(3.17)  $\bar{\mathbf{x}}_1$ ,  $\mathbf{u}_1^{(n)}$  и  $\mathbf{A}_1^{(n)}$  – векторы с компонентами  $\bar{x}_1^{(j)}$ ,  $u_1^{(n,j)}$  и  $A_1^{(n,j)}$  соответственно,  $\bar{\psi}_1$ ,  $v_1^{(n)}$  и  $B_1^{(n)}$  – скаляры. Аналогично  $\mathbf{X}_1$  – вектор-функция, а  $Y_1$  и  $\Omega_1$  – скалярные функции.

Анализируя полученную систему (3.8), видим, что хотя она и не зависит от быстрой фазы  $\bar{\psi}_1$ , но, все же, остается зависимой от других быстрых фаз  $\psi_2, \dots, \psi_m, \dots, \psi_\kappa$ . Поэтому ее интегрирование все еще остается сложной задачей. С другой стороны, для нахождения решений (3.8) мы вновь можем применить изложенный выше алгоритм (3.7), (3.10)–(3.17). В качестве быстрой фазы используем  $\psi_2$  (напомним, на первом иерархическом уровне фаза  $\psi_2$  входит в вектор медленных переменных  $\bar{\mathbf{x}}_1$ ). Фазы, соответствующие большим параметрам  $\xi_3, \xi_4, \dots, \xi_\kappa$ , на этом этапе решения задачи отнесем к вектору медленных переменных  $\mathbf{x}_2$ , то есть  $\bar{\mathbf{x}}_1 = \{\mathbf{x}_2, \psi_2\}$ . В результате система (3.8) может быть записана в виде аналогичном к (3.6):

$$\frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \frac{1}{\xi_2} \mathbf{X}_2(\mathbf{x}_2, \psi_2), \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \Omega_2(\mathbf{x}_2) + \frac{1}{\xi_2} Y_2(\mathbf{x}_2, \psi_2).$$

Далее к этой системе применяем замену Крылова-Боголюбова аналогично как в (3.7), (3.10)–(3.17) и получаем усредненные уравнения второго иерархического уровня

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}_2}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_2^n} \mathbf{A}_2^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_2), \quad (3.18)$$

$$\frac{d\bar{\psi}_2}{dt} = \Omega_2(\bar{\mathbf{x}}_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_2^n} B_2^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_2). \quad (3.19)$$

Видим, что медленное движение (3.18), описываемое вектором  $\bar{\mathbf{x}}_2$ , как и в случае (3.8), уже полностью отделено от быстрой фазы  $\bar{\psi}_2$ , а значит, становится еще более простым. Уравнения (3.18)–(3.19) определяют поведение исследуемой системы на втором иерархическом уровне.

Аналогичную процедуру интегрирования мы можем применить многократно, пока не будут отделены в уравнениях вида (3.8), (3.18) все быстрые фазы, соответствующие ряду больших параметров (3.4). В итоге получим уравнения для медленных переменных на наивысшем  $k$ -м иерархическом уровне, которые имеют такую же структуру, как и уравнения (3.8), (3.18). Уравнения на наивысшем  $k$ -м иерархическом уровне уже не содержат быстрых фаз и поэтому являются более простыми, чем (3.2). Получение укороченных уравнений на наивысшем  $k$ -м иерархическом уровне, которые не зависят от быстрых фаз, и составляет основное содержание первого этапа (рис. 3.1).

Далее переходим ко второму этапу вычислительной процедуры, которая состоит в нахождении решения усредненного уравнения на  $k$ -м иерархическом уровне (рис. 3.1). Для этого можно применить стандартные методы, например метод медленно меняющихся амплитуд [23–29]. Возможны и другие варианты нахождения решений, например, с использованием метода характеристик [23,24,30,31]. В любом случае, находить решение усредненного уравнения на наивысшем  $k$ -м иерархическом уровне гораздо легче, чем решение исходного уравнения, так как оно не содержит быстроосциллирующих фаз.



Однако нам нужны решения не усредненного уравнения на  $k$ -м иерархическом уровне, а решения исходного уравнения (3.2). Поэтому на следующем третьем этапе проведем обратные преобразования. Для этого используем замену переменных Крылова-Боголбова для преобразования переменных из произвольного  $m$ -го иерархического уровня в переменные  $(m - 1)$ -го уровня

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{m-1} &= \bar{\mathbf{x}}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{u}_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m); \\ \bar{\psi}_{m-1} &= \bar{\psi}_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{v}_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m),\end{aligned}\quad (3.20)$$

где  $\bar{\mathbf{x}}_{m-1} = \mathbf{x}_m$ ,  $\bar{\psi}_{m-1} = \psi_m$ , как это следует из соотношений типа (3.7). Напомним, функции  $\mathbf{u}_m^{(n)}$ ,  $\mathbf{v}_m^{(n)}$ , которые входят в систему уравнений (3.20) находятся по известной процедуре (3.11)–(3.17).

Таким образом, соотношения типа (3.7), (3.20) играют двойную роль в обсуждаемой вычислительной схеме. Используя их, мы выполняем как прямые, так и обратные преобразования (рис. 3.1). Благодаря обратным преобразованиям мы переходим от наивысшего  $k$ -го иерархического уровня к исходному (нулевому) иерархическому уровню и находим решения исходного уравнения (3.3).

Сущность выполнения обратных преобразований от переменных  $\{\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m\}$  к переменным  $\{\bar{\mathbf{x}}_{m-1}, \bar{\psi}_{m-1}\}$  состоит в том, чтобы выразить  $\{\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m\}$  как функции  $\{\bar{\mathbf{x}}_{m-1}, \bar{\psi}_{m-1}\}$  по имеющейся обратной связи (3.20) [23,24,32,36,37]. Выражения (3.20), являются нелинейными уравнениями, поскольку зависят, в общем случае, от нелинейных, хотя и известных, функций  $\mathbf{u}_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m)$  и  $\mathbf{v}_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m)$ . Таким образом, проведение обратных преобразований оказывается достаточно непростой задачей.

Для того чтобы в общем виде найти искомую связь между переменными двух соседних иерархических уровней, воспользуемся наблюдением, что разность между произвольными переменными двух соседних иерархических уровней (например,  $(m-1)$  и  $m$ -м, см. (3.20)) пропорциональна  $1/\xi_m \ll 1$ . Это наблюдение позволяет разложить функции  $\mathbf{u}_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m)$  и  $\mathbf{v}_m^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}_m, \bar{\psi}_m)$  в ряд Тейлора в окрестности переменных  $(m-1)$ -го иерархического уровня. Исходя из соотношений (3.20), заменяем в этом разложении все разности типа  $(\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})$ ,  $(\bar{\psi}_m - \bar{\psi}_{m-1})$  через функции  $\mathbf{u}_m^{(n)}$ ,  $\mathbf{v}_m^{(n)}$  и получаем искомую асимптотическую связь между переменными соседних иерархических уровней:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{u}_m^{(n)} \right) \Big|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \\ + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_m^{(n)}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{u}_m^{(n)} \right) \right) \Big|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_m^{(n)}}{\partial \bar{\psi}_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{v}_m^{(n)} \right) \right) \Big|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \dots, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1} - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{v}_m^{(n)} \right) \Big|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \\ + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_m^{(n)}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{u}_m^{(n)} \right) \right) \Big|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_m^{(n)}}{\partial \bar{\psi}_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m^n} \mathbf{v}_m^{(n)} \right) \right) \Big|_{\substack{\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{x}}_{m-1} \\ \bar{\psi}_m = \bar{\psi}_{m-1}}} + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Эти преобразования позволяют перейти от решений, полученных на наивысшем  $k$ -м иерархическом уровне к исходному нулевому иерархическому уровню (рис. 3.1).

Таким образом, в основе метода усредненных характеристик лежит идея замены сложной мультирезонансной и мультигармонической исходной задачи (3.2) на гораздо более простую, в которой отсутствуют осцилляторные

переменные. Решая такую простую задачу, а затем, осуществляя обратный переход, получаем решение исходной сложной задачи.

### **3.3 Метода усредненных характеристик для решения задач с Модернизация мультигармоническими резонансными взаимодействиями**

Как было сказано выше, метод усредненных характеристик применяется для решения задачи движения, которая является частью самосогласованной задачи о динамике электромагнитных полей. Следует учесть, что решения, которые находятся с помощью метода усредненных характеристик, представлены в виде асимптотических рядов по малому параметру  $1/\xi$  и зависящих от быстрых фаз. Это обстоятельство позволяет найти плотности электрического тока и концентрации частиц, движущихся в исследуемых устройствах, в виде рядов Тейлора-Фурье.

Для решения второй части самосогласованной задачи, полевой задачи, используем уравнения Максвелла, в которую входят плотности электрического тока и концентрации частиц. То обстоятельство, что эти величины оказываются разложенными в ряды Тейлора-Фурье, позволяет уравнения Максвелла преобразовать к стандартному для метода медленно меняющихся амплитуд виду [23-29] и получить достаточно легко укороченные уравнения для амплитуд электромагнитных полей.

Также следует учесть, что в уравнениях Максвелла мы должны использовать плотности электрического тока и концентрации, как функции неусредненных быстрых фаз, поскольку в уравнениях Максвелла поля представлены как функции от неусредненных Эйлеровых быстрых фаз. В этой связи, возникает задача в модернизации алгоритма асимптотического интегрирования, которая состоит в объединении процедур прямого (3.7)–(3.17) и обратного преобразования (3.21)–(3.22) в одну процедуру, которая

позволяла бы получать плотности электрического тока (скорости) и концентрации электронных пучков как функции неусредненных быстрых фаз. При этом усредненные медленные переменные, например, постоянная составляющая скорости, постоянная составляющая концентрации и т.д., могут и должны использоваться в укороченных уравнениях для амплитуд полей в уравнениях Максвелла. Поэтому уравнения для амплитуд полей должны быть обязательно дополнены уравнениями для медленных переменных.

Для того чтобы получить усредненные уравнения как функции неусредненных быстрых фаз, в соотношения (3.7)–(3.17) подставим обратное преобразование для быстрой фазы (3.22). В результате довольно громоздких преобразований придем к искомому алгоритму асимптотического интегрирования. Изложим этот алгоритм сначала для случая одной быстрой фазы, а затем обобщим его на случай многих быстрых фаз.

### 3.3.1 Случай одной быстрой фазы

Проведем модернизацию алгоритма асимптотического интегрирования (3.7)–(3.17) с учетом обратного преобразования (3.22) для быстрых фаз. В качестве исходной системы уравнений используем систему подобную к (3.6):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \psi), \quad \frac{d\psi}{dt} = \Omega(\mathbf{x}) + \frac{1}{\xi} Y(\mathbf{x}, \psi). \quad (3.23)$$

Для перехода к усредненным медленным переменным используем замену Крылова-Боголюбова в модернизированной по сравнению с (3.7) форме

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \psi). \quad (3.24)$$

Как видим, в преобразовании (3.24) в отличие от (3.7) быстрая фаза остается неусредненной. Как и прежде функции  $\mathbf{u}^{(n)}$  подбираем таким образом, чтобы правые части усредненных уравнений для медленных переменных не зависели от быстрых фаз

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{A}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (3.25)$$

Функции  $\mathbf{u}^{(n)}$  и  $\mathbf{A}^{(n)}$ , которые входят в (3.24)–(3.25), находим из следующих соотношений

$$\mathbf{A}^{(n)} = \langle \mathbf{g}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \psi) \rangle, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{m=-N, m \neq 0}^{m=+N} \frac{\mathbf{g}_m^{(n)}}{im\Omega(\bar{\mathbf{x}})} \exp(im\psi). \quad (3.27)$$

В уравнениях (3.26)–(3.27) использованы обозначения

$$\mathbf{g}_m^{(n)} = \langle \mathbf{g}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \psi) \rangle_{m\psi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^{(n)} e^{-im\psi} d\psi, \quad (3.28)$$

$$\langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle = \langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle_{0\psi}.$$

Выражения для  $\mathbf{A}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n)}$  определяются через  $\mathbf{g}^{(n)}$ , которые связаны с функциями  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \psi)$ ,  $\Omega(\mathbf{x})$  исходной системы уравнений (3.23) следующим образом:

$$\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \psi), \quad (3.29)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = \frac{1}{\xi^2} \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y \right) \right), \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)} = & \frac{1}{\xi^3} \left[ \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Напомним, что в соотношениях (3.24)–(3.31)  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{u}^{(n)}$  и  $\mathbf{A}^{(n)}$  – векторы с компонентами  $\bar{x}^{(j)}$ ,  $u^{(n,j)}$  и  $A^{(n,j)}$  соответственно,  $\mathbf{X}$  – вектор-функция, а  $\Omega$  – скалярная функция.

Таким образом, алгоритм (3.24)–(3.31) решает поставленную выше задачу. Легко убедиться, что эти соотношения гораздо проще по сравнению с немодернизированными (3.7)–(3.17), (3.21), (3.22).

### 3.3.2 Случай нескольких быстрых фаз

Обобщим полученный алгоритм (3.24)–(3.31) на случай нескольких быстрых фаз. Принимаем, что  $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\kappa\}$  – вектор быстрых фаз,  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})$  – вектор-функция медленных переменных,  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi})$  – вектор-функция медленных и быстрых переменных. Тогда исходная система преобразуется к виду

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}), \quad \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\xi} \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}). \quad (3.32)$$

Для перехода к усредненным медленным переменным используем замену Крылова-Боголюбова, зависящую от вектора быстрых фаз

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\psi}), \quad (3.33)$$

Функции  $\mathbf{u}^{(n)}$  подбираем таким образом, чтобы правые части усредненных уравнений для медленных переменных не зависели от быстрых

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{A}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad (3.34)$$

Алгоритм нахождения  $\mathbf{u}^{(n)}$  и  $\mathbf{A}^{(n)}$ , которые входят в (3.33)–(3.34), изменяется. Осцилляторные компоненты (3.33) находятся из соотношения

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{m_1=-N}^{m_1=+N} \dots \sum_{m_k=-N}^{m_k=+N} \frac{\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}}{i(m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k)} \exp(i(m_1\psi_1 + \dots + m_k\psi_k)) \quad (3.35)$$

при условии, чтобы ни один из знаменателей (3.35) не обращался в нуль.

Случаи, когда знаменатели в (3.35) равны нулю

$$m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k = 0, \quad (3.36)$$

называют комбинационными резонансами [23,24,-25,33,34,35,36,-37]. Это значит, что осцилляторные слагаемые в (3.35) определяются нерезонансными компонентами  $\mathbf{g}^{(n)}$ .

Функция  $\mathbf{A}^{(n)}$ , в отличие от аналогичной формулы (3.26), определяется как средним значением  $\langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle$ , так и компонентами  $\mathbf{g}^{(n)}$ , связанными с комбинационными резонансами

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)} \Big|_{m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k = 0}. \quad (3.37)$$

В уравнениях (3.35) и (3.37) использовали обозначения

$$\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)} = \langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle_{m_1 \psi_1, \dots, m_\kappa \psi_\kappa} = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^\kappa \cdot \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^{(n)} e^{-i(m_1 \psi_1 + \dots + m_\kappa \psi_\kappa)} d\psi_1 \dots d\psi_\kappa. \quad (3.38)$$

Функции  $\mathbf{g}^{(n)}$ , через которые определяются  $\mathbf{u}^{(n)}$  и  $\mathbf{A}^{(n)}$  в (3.35) и (3.37), имеют следующий вид:

$$\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \psi) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = \frac{1}{\xi^2} \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \left( \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y_s \right) \right), \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)} = \frac{1}{\xi^3} \left[ \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(2,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \left( \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} + \frac{\partial Y_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right) - \right. \\ \left. - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \psi_s} \left( \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y_s \right) \right) + \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} \right) \right]. \quad (3.41) \end{aligned}$$

Таким образом, наличие нескольких быстрых фаз качественно меняет процедуру асимптотического интегрирования – возникает необходимость учета комбинационных резонансов. С точки зрения математической процедуры, учет комбинационных резонансов состоит в разделении  $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)}$  на резонансные компоненты, для которых выполняется условие (3.36), и нерезонансные, для которых это условие не выполняется. Так как частоты  $\Omega_s$ , зависящие от медленных переменных  $\mathbf{x}$ , с течением времени меняются, то в процессе интегрирования мы постоянно должны проверять условие (3.36). Такая проверка с точки зрения компьютерного моделирования сводится к проверке неравенства



$$m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k \leq 1/\xi. \quad (3.42)$$

Так как количество гармоник  $N$ , которое учитывается при компьютерном моделировании, ограничено ( $m_s \leq N$ ), то компьютерная проверка условия (3.42) является несложной задачей.

Также следует учитывать, что исходя из физических соображений, практически все резонансные условия типа (3.36), (3.42) являются известными. Поэтому целесообразно данную проверку объединить с процедурой нахождения  $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$  (3.38). Функции  $\mathbf{g}^{(n)}$ , используемые в задачах сильноточной электроники, как правило, формируются величинами, имеющими вид рядов Фурье с медленно меняющимися амплитудами. Поэтому численное нахождение амплитуд  $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$  при соответствующих комбинационных фазах, по сути, сводится к анализу резонансных условий и формированию  $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$  как функции медленных переменных.

Таким образом, алгоритмы, описанные в (3.33)–(3.41) позволяют решать мультигармонические нелинейные задачи с учетом специфики мультигармонических резонансных взаимодействий в устройствах сильноточной электроники. Сравнивая полученный алгоритм с немодернизированным (3.7)–(3.22), можем убедиться, что модернизированный алгоритм асимптотического интегрирования является более простым.

### Выводы к разделу 3

Таким образом, в данной работе проведена модернизация метода усредненных характеристик в части построения схемы асимптотического интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, с учетом специфики мультигармонических резонансных взаимодействий в устройствах

сильноточной электроники. Получены схемы асимптотического интегрирования, объединяющие процедуры прямого и обратного переходов. В работе представлены кубически нелинейные уравнения, описывающие такую процедуру асимптотического интегрирования, как для случая одной быстрой фазы (3.24)–(3.31), так и для случая многих быстрых фаз (3.33)–(3.41). Сравнивая модернизированные алгоритмы асимптотического интегрирования для одной (3.24)–(3.31) и с многими быстрыми фазами (3.33)–(3.41) с немодернизированным алгоритмом (3.7)–(3.22), можем убедиться, что модернизированный алгоритм асимптотического интегрирования является более простым. Это обстоятельство позволяет существенно увеличить эффективность метода усредненных характеристик. Поэтому следует ожидать, что использование модернизированного метода усредненных характеристик будет эффективным не только в задачах сильноточной электроники, но также и в задачах традиционной нелинейной электродинамики плазмы и в ряде других областей нелинейной физики. Отметим, что для использования модернизированного алгоритма асимптотического интегрирования уравнения движения необходимо свести к достаточно общей форме (3.23), что свидетельствует о высоком уровне универсальности модернизированного метода. Также его помощью возможно описание множественных параметрических резонансов и разного типа неустойчивостей в рамках единого подхода.

Вышесказанное дает основание ожидать, что на базе модернизированного метода усредненных характеристик удастся создать новые эффективные расчетные методики, предназначенные для моделирования физических процессов в устройствах сильноточной электроники. В том числе появляется возможность создания комплекса компьютерных программ для численно-аналитических расчетов многорезонансных нелинейных задач.

## РАЗДЕЛ 4

### ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕРНИЗИРОВАННОГО МЕТОДА УСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВЫХ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫХ ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ

Продемонстрирована техника применения модернизированного метода усредненных характеристик на примере кубически нелинейной теории плазменно-пучкового супергетеродинного лазера на свободных электронах (СЛСЭ) с винтовыми электронными пучками. Получена система укороченных дифференциальных уравнений для амплитуд полей, которая описывает множественные резонансные взаимодействия волн. Получены уровни насыщения сигнальной волны при неосевом влете пучка с учетом мультигармонических взаимодействий ВПЗ. Показано, что при учете множественных параметрических взаимодействий гармоник волны пространственного заряда уровень насыщения сигнала уменьшается в два и более раз. Установлено, что для полного анализа исследуемых систем необходим учет мультигармонических взаимодействий волны пространственного заряда.

#### **4.1 Описание задачи**

Данный раздел является продолжением работы [38], в которой предложена модернизация метода усредненных характеристик для решения задач мультигармонических резонансных взаимодействий в устройствах сильноточной электроники. Также в работе [38] изложены модернизированные схемы асимптотического интегрирования, которые являются более простыми по сравнению с общими схемами метода [32,39]. В результате сделан вывод, предложенный метод является более эффективным.

Представленная работа преследует две цели. Во-первых, в работе на конкретной задаче продемонстрирована техника применения

модернизированного метода усредненных характеристик. Во-вторых, в данном разделе в кубически нелинейном приближении проведен анализ нелинейной динамики волн в плазменно-пучковом супергетродинном лазере на свободных электронах (СЛСЭ) с винтовым электронным пучком. Внимание к СЛСЭ вызвано тем, что такие устройства способны создавать мощное когерентное электромагнитное излучение в миллиметровом-субмиллиметровом диапазоне длин волн [32,36-37,39-54]. Особенностью СЛСЭ является то, что такие устройства обладают высокими усилительными характеристиками по сравнению с другими типами ЛСЭ благодаря использованию дополнительного механизма усиления. В качестве такого механизма в плазменно-пучковых СЛСЭ используется плазменно-пучковая неустойчивость [39, 54, 55], в двухпоточковых СЛСЭ – двухпоточковая неустойчивость [39, 54, 55]. Так как эти неустойчивости обладают исключительно высокими инкрементами нарастания, то и соответствующие СЛСЭ также имеют высокие коэффициенты усиления. Следует отметить, что волны пространственного заряда (ВПЗ), которые усиливаются благодаря плазменно-пучковой или двухпоточковой неустойчивостям характеризуются квазилинейным законом дисперсии [39, 54, 55]. Это приводит к тому, что в исследуемой системе возбуждается большое число взаимодействующих гармоник ВПЗ. Между такими гармониками возникают множественные резонансные взаимодействия [50]. Поэтому задача анализа нелинейной динамики в таких устройствах становится достаточно сложной. Возникает необходимость в поиске новых эффективных вычислительных схем. Модернизированный метод усредненных характеристик как раз и относится к таким новым расчетным схемам.

В данном разделе проведен кубически-нелинейный анализ мультигармонических взаимодействий волн в плазменно-пучковом СЛСЭ с винтовыми электронными потоками. Слабосигнальный анализ таких устройств был проведен в [52, 53]. В этих работах было показано, что использование винтовых электронных пучков в плазменно-пучковых СЛСЭ

приводит к увеличению коэффициента усиления по сравнению с устройствами, в которых электронный пучок входит в систему соосно с фокусирующим магнитным полем. Однако уровни насыщения, влияние на них множественных резонансов, механизмы насыщения найдены не были.

#### 4.2 Модель плазменно-пучкового СЛСЭ Н-убитронного типа

Схема плазменно-пучкового СЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым электронным пучком представлена на рис. 4.1. Электронный релятивистский пучок 2 с ленгмюровской частотой  $\omega_b$  проходит через плазму 1, характеризующейся ленгмюровской частотой  $\omega_p$  ( $\omega_b \ll \omega_p$ ). Плазменно-пучковая система размещена в продольном фокусирующем магнитном поле с индукцией  $B_0$ . Циклотронная частота вращения электронов в магнитном поле много меньше ленгмюровской частоты плазмы ( $\omega_H \ll \omega_p$ ). Вектор скорости электронов винтового релятивистского пучка  $\mathbf{v}_b$  направлен под углом  $\beta$  по отношению к оси  $Z$  (рис. 4.1), так что  $\operatorname{tg}\beta = \bar{v}_{b\perp} / \bar{v}_{bz}$ , где  $\bar{v}_{b\perp}$  и  $\bar{v}_{bz}$  – его усредненная поперечная и продольная компоненты. В качестве накачки используется ондулятор 3 с периодически реверсивным магнитным полем [39, 53, 54]. Период ондуляции  $\Lambda = 2\pi / k_2$ . На вход системы также подаем электромагнитный сигнал с частотой  $\omega_1$  и волновым числом  $k_1$ . В результате параметрического резонанса между волной сигнала  $\{\omega_1, k_1\}$  и полем ондулятора  $\{k_2\}$  в плазменно-пучковой системе возбуждается волна пространственного заряда с частотой первой гармоники  $\omega_{3,1}$  и волновым числом  $k_{3,1}$ . Частоты и волновые числа этих волн в исследуемой системе связаны между собой условием параметрического резонанса

$$\omega_{3,1} = \omega_1, \quad k_{3,1} = k_1 + k_2 \quad (4.1)$$

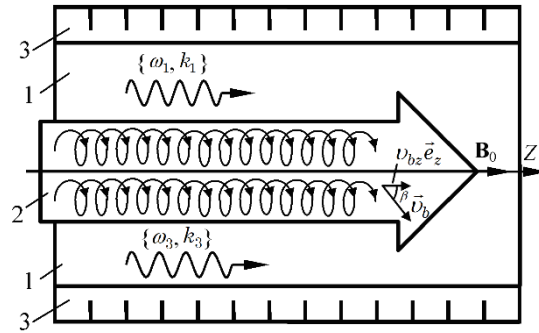


Рисунок 4.1 – Схема плазменно-пучкового СЛСЭ Н-убитронного типа с винтовым электронным пучком

В плазменно-пучковом СЛСЭ используется эффект супергетеродинного усиления. Его суть состоит в использовании дополнительного механизма усиления одной из трех волн, которые принимают участие в трехволновом параметрическом резонансе. В исследуемом СЛСЭ в качестве такого механизма используется усиление волны ВПЗ за счет плазменно-пучковой неустойчивости [39, 54, 55]. Параметры устройства выбираем так, чтобы нарастание волны ВПЗ было максимальным за счет плазменно-пучковой неустойчивости. Известно, что инкременты нарастания плазменно-пучковой неустойчивости являются высокими [39, 54, 55]. Поэтому результирующий коэффициент усиления электромагнитной волны в исследуемом СЛСЭ оказывается также высоким. Именно благодаря дополнительному механизму усиления супергетеродинные ЛСЭ имеют более высокие усилительные характеристики по сравнению с другими типами ЛСЭ.

Еще одной особенностью плазменно-пучкового ЛСЭ является то, что волна ВПЗ, нарастающая за счет плазменно-пучковой неустойчивости, характеризуется квазилинейной дисперсионной зависимостью [39, 54, 55]:

$$k_{3,m} \approx \omega_{3,m} / \bar{v}_{bz}, \quad (4.2)$$

где индекс « $m$ » обозначает номер гармоники,  $k_{3,m}$  и  $\omega_{3,m} = \omega_{3,1} \cdot m$  — волновое число и частота  $m$ -й гармоники соответственно. Это значит, что

частоты и волновые числа  $m$ -х гармоник пропорциональны номеру гармоники  $m$ . Поэтому между гармониками волны пространственного заряда возникает множество трехволновых параметрических резонансов

$$\omega_{3,m_1} = \omega_{3,m_2} + \omega_{3,m_3}, \quad k_{3,m_1} = k_{3,m_2} + k_{3,m_3}, \quad (4.3)$$

где  $m_1, m_2, m_3$  – номера взаимодействующих гармоник. Учитывая (4.2), выражения (4.3) сводятся к соотношению

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (4.4)$$

Заметим,  $m_1, m_2, m_3$  являются целыми числами. Поэтому условие (4.4) может быть выполнено множеством способов, например,  $2 = 1 + 1$ ,  $3 = 2 + 1$  и так далее. Такие трехволновые взаимодействия приводят к возбуждению высших гармоник ВПЗ. Далее будем учитывать при анализе динамики волн в СЛСЭ, множественные трехволновые резонансные взаимодействия гармоник волны ВПЗ, удовлетворяющие условию (4.3). Также хотелось бы отметить, что учет таких резонансных взаимодействий является достаточно не простой задачей при построении кубически-нелинейной теории плазменно-пучковых СЛСЭ. Однако модернизированный метод усредненных характеристик для случая нескольких быстрых фаз позволяет решать задачи такого уровня.

### 4.3 Система кубически-нелинейных укороченных уравнений для комплексных амплитуд волн

Электрические  $\mathbf{E}$  и магнитные  $\mathbf{B}$  компоненты полей сигнала (индекс  $\chi = 1$ ) и накачки (индекс  $\chi = 2$ ) в исследуемом плазменно-пучковом СЛСЭ рассматриваем как монохроматические

$$\mathbf{E}_\chi = (E_{\chi x} \mathbf{e}_x + E_{\chi y} \mathbf{e}_y) e^{ip_\chi} + c.c., \quad \mathbf{B}_\chi = (B_{\chi x} \mathbf{e}_x + B_{\chi y} \mathbf{e}_y) e^{ip_\chi} + c.c., \quad (4.5)$$

где  $p_\chi = \omega_\chi t - k_\chi z$ . Отметим, что электрическое поле накачки отсутствует  $\mathbf{E}_2 = 0$ .

Как было сказано выше, волна ВПЗ характеризуется квазилинейной дисперсионной зависимостью. Это приводит к возбуждению высших гармоник ВПЗ. Поэтому напряженность электрического поля волны ВПЗ имеет мультигармонический характер

$$\mathbf{E}_3 = \sum_{m=1}^N \left( E_{3z,m} e^{ip_{3,m}} + c.c. \right) \mathbf{e}_z, \quad (4.6)$$

где  $p_{3,m} = m\omega_{3,1}t - k_{3,m}z$  – фаза  $m$ -й гармоники;  $N$  – количество гармоник ВПЗ, которое принимается во внимание при решении задачи. Электрические и магнитные поля в рабочем объеме исследуемого СЛСЭ имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_0. \quad (4.7)$$

В качестве исходных уравнений для численного анализа используем релятивистское квазигидродинамическое уравнение [39, 54], уравнение непрерывности и уравнения Максвелла. Решение задачи разбиваем на три формально независимых этапа: 1) нахождение задачи движения электронов плазмы и релятивистского электронного пучка в заданных электромагнитных полях; 2) решение уравнения непрерывности, полагая, что скорости электронного пучка уже известны; 3) решение задачи о возбуждении электромагнитных полей, полагая скорости и концентрации уже известными функциями.

Задачи движения и уравнения непрерывности решаем с помощью модернизированного метода усредненных характеристик [38], задачу о возбуждении электромагнитного поля – с помощью метода медленно меняющихся амплитуд. При этом учитываем особенности параметрически-резонансных взаимодействий (4.1), (4.3).



**Решение задачи движения.** Рассмотрим случай, когда разбросом электронов по скоростям, а также столкновениями можно пренебречь. Для решения задачи движения в соответствии с модернизированным методом усредненных характеристик [38] совершаем переход к характеристикам квазигидродинамического уравнения. Дополним систему уравнениями для быстрых фаз. Будем считать, что амплитуды волн медленно меняются со временем  $t$ . Для описания такой зависимости введем медленное время  $\tau = t / \xi$ . В итоге получаем систему уравнений в стандартном виде (соотношение (4.32) в [38]):

$$\frac{dv_{qx}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left[ E_x + \frac{1}{c} (v_{qy} B_z - v_{qz} B_y) - \frac{v_{qx}}{c^2} (v_{qx} E_x + v_{qy} E_y + v_{qz} E_z) \right], \quad (4.8)$$

$$\frac{dv_{qy}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left[ E_y - \frac{1}{c} (v_{qx} B_z - v_{qz} B_x) - \frac{v_{qy}}{c^2} (v_{qx} E_x + v_{qy} E_y + v_{qz} E_z) \right], \quad (4.9)$$

$$\frac{dv_{qz}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left[ E_z + \frac{1}{c} (v_{qx} B_y - v_{qy} B_x) - \frac{v_{qz}}{c^2} (v_{qx} E_x + v_{qy} E_y + v_{qz} E_z) \right], \quad (4.10)$$

$$\frac{d\gamma_q}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_q} [E_x v_{qx} + E_y v_{qy} + E_z v_{qz}], \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\xi}, \quad (4.11)$$

$$\frac{dp_{1,q}}{dt} = \omega_1 - k_1 v_{qz} \equiv \Omega_{1,q}, \quad \frac{dp_{2,q}}{dt} = -k_2 v_{qz} \equiv \Omega_{2,q}, \quad (4.12)$$

$$\frac{dp_{3,q,m}}{dt} = m\omega_{3,1} - k_{3,m} v_{qz} \equiv \Omega_{3,q,m}, \quad (4.13)$$

$$\frac{dp_{b0}}{dt} = -\frac{\omega_H}{\gamma_b} + \frac{e}{m_e \gamma_b v_{b\perp}} \left[ \cos p_{b0} \left( E_y + \frac{v_{bz}}{c} B_x \right) - \sin p_{b0} \left( E_x - \frac{v_{bz}}{c} B_y \right) \right] \equiv \Omega_{b0} \quad (4.14)$$

В этих уравнениях  $v_{qx}$ ,  $v_{qy}$  и  $v_{qz}$  – компоненты вектора скорости электронов пучка и плазмы (здесь и далее индекс  $q$  принимает значения  $b$  и  $p$ ; индексом  $b$  характеризуем параметры пучка, индексом  $p$  – параметры плазмы);  $\gamma_q = (1 - (v_{qx}^2 + v_{qy}^2 + v_{qz}^2) / c^2)^{-1/2}$  – релятивистский фактор;  $p_{b0} = \arctg(v_{by} / v_{bx})$  – фаза вращения электронов пучка;  $v_{b\perp} = \sqrt{v_{bx}^2 + v_{by}^2}$  – поперечная скорость электронов пучка;  $\omega_H = eB_0 / (m_e c)$  – циклотронная частота вращения электронов в продольном магнитном поле;  $c$  – скорость света;  $e$  и  $m_e$  – заряд и масса электрона. Уравнения (4.8)-(4.11) описывают изменения медленных переменных, (4.12)-(4.14) – быстрых.

Сравним систему (4.8)–(4.14) с (4.32) и запишем вектор медленных переменных  $\mathbf{x}$ , вектор-функции  $\mathbf{X}$ , вектор быстрых фаз  $\boldsymbol{\psi}$  и вектор фазовых скоростей  $\boldsymbol{\Omega}$  в явном виде

$$\mathbf{x} = \{x_{v_x}, x_{v_y}, x_{v_z}, x_\gamma, x_\tau\} = \{v_{qx}, v_{qy}, v_{qz}, \gamma_q, \tau\},$$

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{X} = \frac{1}{\xi} \{X_{v_x}, X_{v_y}, X_{v_z}, X_\gamma, X_\tau\},$$

$$\frac{1}{\xi} X_{v_x} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left[ E_x + \frac{1}{c} (v_{qy} B_z - v_{qz} B_y) - \frac{v_{qx}}{c^2} (v_{qx} E_x + v_{qy} E_y + v_{qz} E_z) \right], \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\xi} X_{v_y} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left[ E_y - \frac{1}{c} (v_{qx} B_z - v_{qz} B_x) - \frac{v_{qy}}{c^2} (v_{qx} E_x + v_{qy} E_y + v_{qz} E_z) \right], \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\xi} X_{v_z} = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left[ E_z + \frac{1}{c} (v_{qx} B_y - v_{qy} B_x) - \frac{v_{zq}}{c^2} (v_{qx} E_x + v_{qy} E_y + v_{qz} E_z) \right], \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{\xi} X_{\gamma_q} = \frac{e}{m_e \gamma_q} [E_x v_{qx} + E_y v_{qy} + E_z v_{qz}], \quad \frac{1}{\xi} X_{\tau} = \frac{1}{\xi}, \quad (4.18)$$

$$\Psi = \{p_1, p_2, p_{3,1}, \dots, p_{3,N}, p_{ob}\},$$

$$\Omega = \{\Omega_{1,p}, \Omega_{2,p}, \Omega_{3,p,1}, \dots, \Omega_{3,p,N}, \Omega_{1,b}, \\ \Omega_{2,b}, \Omega_{3,b,1}, \dots, \Omega_{3,b,N}, \Omega_{b0}\}.$$

Далее используем описанный в [38] алгоритм модернизированного метода усредненных характеристик для случая нескольких быстрых фаз. В соответствии с этим алгоритмом переходим к усредненным переменным

$$v_{qx} = \bar{v}_{qx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{qv_x}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad v_{qy} = \bar{v}_{qy} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{qv_y}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\ v_{qz} = \bar{v}_{qz} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{qv_z}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad \gamma_q = \bar{\gamma}_q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{q\gamma}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\ \tau = \bar{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{\tau}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi). \quad (4.19)$$

Уравнения для усредненных переменных имеют вид

$$\frac{d\bar{v}_{qx}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{qv_x}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{v}_{qy}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{qv_y}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{d\bar{v}_{qz}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{qv_z}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{\gamma}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\gamma}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\tau}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (4.20)$$

Ограничиваемся третьим приближением по  $1/\xi$ . Алгоритм нахождения функций  $\mathbf{u}^{(n)}$  и  $\mathbf{A}^{(n)}$  известен и описан в [38] (соотношения (4.35)–(4.41)). В

итоге получаем  $u_{\tau}^{(n)} = 0$  для любых  $n$ ;  $A_{\tau}^{(1)} = 1$ ,  $A_{\tau}^{(n)} = 0$  для  $n > 1$ ;  $A_{v_z}^{(1)} = A_{v_z}^{(2)} = 0$ ,  $A_{v_x}^{(1)} = A_{v_x}^{(2)} = 0$ ,  $A_{v_y}^{(1)} = A_{v_y}^{(2)} = 0$ ,

$$\frac{1}{\xi} u_{qv_x}^{(1)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \times \sum_{\chi=1}^2 \left[ \left( \frac{\bar{\Omega}_{\chi,q}}{\omega_{\chi}} \right) \frac{(i\bar{\Omega}_{\chi,q} E_{\chi x} + \omega_{H,q} E_{\chi y})}{\left( (\omega_{H,q})^2 - (\bar{\Omega}_{\chi,q})^2 \right)} \exp(ip_{\chi}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{qv_y}^{(1)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_q} \times \sum_{\chi=1}^2 \left[ \left( \frac{\bar{\Omega}_{\chi,q}}{\omega_{\chi}} \right) \frac{(i\bar{\Omega}_{\chi,q} E_{\chi y} - \omega_{H,q} E_{\chi x})}{\left( (\omega_{H,q})^2 - (\bar{\Omega}_{\chi,q,m})^2 \right)} \exp(ip_{\chi}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{qv_z}^{(1)} = \frac{e}{m_e} \left( 1 - \bar{v}_{qz}^2 / c^2 \right)^{3/2} \times \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E(\bar{\tau})_{3,m}}{i\Omega_{3,q,m}} \exp(ip_{3,q,m}) + c.c. \right].$$

и так далее. В результате получаем решения как для проекций скоростей (4.19), так и для их постоянных составляющих (4.20).

**Решение уравнения непрерывности** находим аналогично. Преобразовываем уравнение непрерывности к стандартному виду (соотношение (4.32) в [38]). Скорость считаем известной функцией (4.19), (4.20) от быстрых фаз, постоянной составляющей скорости и медленно меняющихся амплитуд электрических и магнитных полей. Включим в такую систему уравнения для быстрых фаз (4.12)–(4.14). В итоге получим систему в стандартном виде

$$\frac{dn_q}{dt} = -n_q \frac{\partial v_{qz}}{\partial z},$$

$$\frac{dp_{1,q}}{dt} = \omega_1 - k_1 v_{qz} \equiv \Omega_{1,q}, \quad \frac{dp_{2,q}}{dt} = -k_2 v_{qz} \equiv \Omega_{2,q},$$

$$\frac{dp_{3,q,m}}{dt} = m\omega_{3,1} - k_{3,m} v_{qz} \equiv \Omega_{3,q,m}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{b0}}{dt} = & -\frac{\omega_H}{\gamma_b} + \frac{e}{m_e \gamma_b v_{b\perp}} \left[ \cos p_{b0} \left( E_y + \frac{v_{bz}}{c} B_x \right) - \right. \\ & \left. - \sin p_{b0} \left( E_x - \frac{v_{bz}}{c} B_y \right) \right] \equiv \Omega_{b0}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Сравним систему (4.21) со стандартной (соотношение (4.32) в [38]) и запишем вектор медленных переменных  $\mathbf{x}$ , вектор-функции  $\mathbf{X}$ , вектор быстрых фаз  $\Psi$  и вектор фазовых скоростей  $\Omega$  в явном виде для уравнения непрерывности

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \{x_n\} = \{n_p, n_b\}, \quad \frac{1}{\xi} \mathbf{X} = \frac{1}{\xi} \{X_{nq}\} = \left\{ -n_q \frac{\partial v_{qz}}{\partial z} \right\}, \\ \Psi = \{p_1, p_2, p_{3,1}, \dots, p_{3,N}, p_{ob}\}, \quad (4.22) \\ \Omega = \{ \Omega_{1,p}, \Omega_{2,p}, \Omega_{3,p,1}, \dots, \Omega_{3,p,N}, \Omega_{1,b}, \\ \Omega_{2,b}, \Omega_{3,b,1}, \dots, \Omega_{3,b,N}, \Omega_{b0} \}. \end{aligned}$$

Напомним, скорость здесь считается известной функцией. Далее используем описанный в [38] алгоритм модернизированного метода усредненных характеристик. В соответствии с этим алгоритмом переходим к усредненным переменным

$$n_q = \bar{n}_q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{nq}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi). \quad (4.23)$$

Уравнения для усредненной концентрации имеют вид

$$\frac{d\bar{n}_q}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{nq}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (4.24)$$

Используем алгоритм нахождения  $\mathbf{u}^{(n)}$  и  $\mathbf{A}^{(n)}$ , который описан в [38] (соотношения (4.35)–(4.41)). В результате находим функции  $u_{nq}^{(1)} / \xi$ ,  $u_{nq}^{(2)} / \xi^2$ ,  $u_{nq}^{(3)} / \xi^3$ ,  $A_{nq}^{(1)} / \xi$ ,  $A_{nq}^{(2)} / \xi^2$ ,  $A_{nq}^{(3)} / \xi^3$ , которые определяют решения для концентрации (4.23), (4.24) с точностью до кубических слагаемых по  $1 / \xi$ .

**Для получения решений задачи о возбуждении электромагнитных полей** выражения для скорости (4.19) и концентрации (4.23) подставляем в уравнения Максвелла. Учитываем, что выражения для скорости и концентраций парциальных пучков полученные методом усредненных характеристик, имеют вид рядов по малому параметру  $1 / \xi$ . Разлагаем их также в ряды по гармоникам быстрых фаз. В результате проведенных вычислений получаем для амплитуд напряженности электрического поля электромагнитной волны сигнала  $\{\omega_1, k_1\}$  и продольной волны ВПЗ  $\{\omega_{3,m}, k_{3,m}\}$  систему дифференциальных уравнений в кубически-нелинейном приближении

$$\begin{aligned}
 K_2 \frac{\partial^2 E_{1x}}{\partial t^2} + K_1 \frac{\partial E_{1x}}{\partial t} + D_1 E_{1x} &= K_3 E_{3z,1} B_{2x}^* + FX_1, \\
 K_2 \frac{\partial^2 E_{1y}}{\partial t^2} + K_1 \frac{\partial E_{1y}}{\partial t} + D_1 E_{1y} &= K_3 E_{3z,1} B_{2y}^* + FY_1, \\
 C_{2,m} \frac{\partial^2 E_{3z,m}}{\partial t^2} + C_{1,m} \frac{\partial E_{3z,m}}{\partial t} + D_{3,m} E_{3z,m} &= C_{3,m} E_{1x} B_{2y} \delta_{m,1} + \\
 + C_{4,m} \left\langle \int E_z \left( \int E_z dp_3 \right) dp_3 \right\rangle_{p_{3,m}} &+ C_{5,m} \left\langle \left( \int E_z dp_3 \right)^2 \right\rangle_{p_{3,m}} + FZ_{3,m}. \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

В этих уравнениях

$$D_1 = \frac{i}{c\omega_1} \left( k_1^2 c^2 - \omega_1^2 + \sum_q^{b,p} \frac{\omega_q^2 \Omega_{1,q} (\Omega_{1,q} + \eta_1 \omega_{H,q})}{\bar{\gamma}_q \left( (\Omega_{1,q})^2 - (\omega_{H,q})^2 \right)} \right), \quad (4.26)$$

$$D_{3,m} = -\frac{i\omega_{3,m}}{c} \left( 1 - \sum_q^{b,p} \frac{\omega_q^2}{\Omega_{3,q,m}^2 \bar{\gamma}_q^3} \right). \quad (4.27)$$

дисперсионные функции электромагнитной волны сигнала, накачки и продольной волны ВПЗ;

$$K_1 = \frac{\partial D_1}{\partial(i\omega_1)}; \quad K_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_1}{\partial(i\omega_1)^2};$$

$$C_{1,m} = \frac{\partial D_{3,m}}{\partial(i\omega_{3,m})}; \quad C_{2,m} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{3,m}}{\partial(i\omega_{3,m})^2};$$

$$K_3 = \sum_q^{b,p} \frac{\omega_q^2 e}{m_e \Omega_{3,q,1} \bar{\gamma}_q^2 c^2} \left[ - \left( \frac{(\Omega_{1,q} - \eta_2 \omega_{H,q})}{(\omega_{H,q})^2 - (\Omega_{1,q})^2} \left( \left( 1 - 2 \frac{\bar{v}_{qz}^2}{c^2} \right) + \frac{\bar{v}_{qz}^2}{c^2} \frac{(\Omega_{3,q,1} - \eta_2 \omega_{H,q})}{((\Omega_{2,q})^2 - (\omega_{H,q})^2)} \right) \right) + \left( \frac{k_{3,1} \bar{v}_{zq}}{\Omega_{3,q,1}} \left( 1 - \frac{\bar{v}_{zq}^2}{c^2} \right) \frac{(\Omega_{2,q} + \eta_2 \omega_{H,q})}{(\omega_{H,q})^2 - (\Omega_{2,q})^2} \right) \right];$$

$$C_{3,m} = \sum_q^{b,p} \frac{e}{m_e c^3} \frac{\omega_q^2 \omega_{3,m} (1 + \eta_1 \eta_2)}{\Omega_{3,q,m}^2 \bar{\gamma}_q^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{\Omega_{1,q}}{\omega_{1,q}} \frac{\Omega_{1,q} + \eta_1 \omega_{H,q}}{(i\Omega_{1,q})^2 + (\omega_{H,q})^2} - \left( \frac{ck_1}{\omega_1} - \frac{\bar{v}_{qz}}{c} \right) \frac{\bar{v}_{qz} \Omega_{2,q} + \eta_2 \omega_{H,q}}{(i\Omega_{2,q})^2 + (\omega_{H,q})^2} \right];$$

$$C_{4,m} = \sum_q^{b,p} \frac{\omega_q^2}{c \bar{\gamma}_q^4 \Omega_{3,q,m}^3} \frac{e}{m_e} \left[ \frac{2\bar{v}_{z,q} k_{3,m}^2 + \omega_{3,m} k_{3,m}}{\Omega_{3,q,m} \bar{\gamma}_q^2} - 3 \frac{\bar{v}_{z,q} \omega_{3,m}}{c^2} \right];$$

$$C_{5,m} = \sum_q^{b,p} \left[ \frac{\omega_q^2}{c \bar{\gamma}_q^6} \frac{e}{m_e} \frac{k_{3,m}}{\Omega_{3,q,m}^3} \right].$$

$$FX_1 = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_q^{p,b} \frac{1}{\xi^3} \left( \bar{n}_q u_{\nu,q}^{(3)} + u_{nq}^{(1)} u_{\nu,q}^{(2)} + u_{nq}^{(2)} u_{\nu,q}^{(1)} \right) \right\rangle_{p_1};$$

$$FY_1 = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_q^{p,b} \frac{1}{\xi^3} \left( \bar{n}_q u_{\nu,y,q}^{(3)} + u_{nq}^{(1)} u_{\nu,y,q}^{(2)} + u_{nq}^{(2)} u_{\nu,y,q}^{(1)} \right) \right\rangle_{p_1};$$

$$FZ_{3,m} = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_q^{p,b} \frac{1}{\xi^3} \left( \bar{n}_q u_{v_z,q,m}^{(3)} + u_{nq,m}^{(1)} u_{v_z,q,m}^{(2)} + u_{nq,m}^{(2)} u_{v_z,q,m}^{(1)} + u_{nq,m}^{(3)} \bar{v}_{qz} \right) \right\rangle_{p_{3,m}} -$$

функции, учитывающие кубически-нелинейные добавки к соответствующим уравнениям.

Функции  $\frac{1}{\xi} u_{nq}^{(1)}$ ,  $\frac{1}{\xi^2} u_{nq}^{(2)}$ ,  $\frac{1}{\xi^3} u_{nq}^{(3)}$  определяют осцилляторные слагаемые концентрации (4.23) пучка и плазмы в первом, втором и третьем приближении соответственно;  $\frac{1}{\xi} u_{v_x,q}^{(1)}$ ,  $\frac{1}{\xi^2} u_{v_x,q}^{(2)}$ ,  $\frac{1}{\xi^3} u_{v_x,q}^{(3)}$ ,  $\frac{1}{\xi} u_{v_y,q}^{(1)}$ ,  $\frac{1}{\xi^2} u_{v_y,q}^{(2)}$ ,  $\frac{1}{\xi^3} u_{v_y,q}^{(3)}$ ,  $\frac{1}{\xi} u_{v_z,q}^{(1)}$ ,  $\frac{1}{\xi^2} u_{v_z,q}^{(2)}$ ,  $\frac{1}{\xi^3} u_{v_z,q}^{(3)}$  – осцилляторные компоненты 1–3 приближений скоростей  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  (4.19);  $\bar{v}_{bz}$  – средняя продольная скорость электронов пучка;  $\bar{v}_{pz}=0$  – средняя скорость электронов плазмы;  $\delta_{m,1}$  – символ Кронекера;

$$\langle \dots \rangle_{p_{3,m}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \cdot \exp(-ip_{3,m})) dp_{3,m}, \quad \bar{\gamma}_q = 1 / \sqrt{1 - (\bar{v}_q / c)^2}.$$

Следует отметить, что для данной системы собственными являются циркулярно-поляризованные электромагнитные волны, связь между амплитудами которых имеет вид  $\eta_1 = E_{1y,m} / (iE_{1x,m}) = \pm 1$ ,  $\eta_2 = B_{2y,m} / (iB_{2x,m}) = \pm 1$ , где  $\eta_1$  – знаковая функция, характеризующая направление вращения вектора напряженности электрического поля циркулярно-поляризованной волны сигнала,  $\eta_2$  – знаковая функция, характеризующая направление вращения спирального магнитного поля накачки. Коэффициенты  $K_3$ ,  $C_3$  характеризуют параметрически-резонансное взаимодействие волн в исследуемой системе в квадратичном приближении. Из анализа  $C_3$  следует, что для реализации параметрического резонанса в квадратичном приближении необходимо, чтобы электрическое поле волны сигнала и магнитное поле накачки имели одинаковое направление вращения. То есть или по часовой стрелке ( $\eta_1 = +1$ ,  $\eta_2 = +1$ ), если смотреть



вдоль вектора напряженности магнитного поля, или против часовой стрелки ( $\eta_1 = -1, \eta_2 = -1$ ). В противном случае  $C_3$  будет равным нулю.

Коэффициенты в (4.25) также зависят от постоянных составляющих скоростей  $\bar{v}_q$  и концентраций  $\bar{n}_q$  парциальных пучков. Поэтому систему уравнений (4.25) дополним уравнениями для постоянных составляющих

$$\frac{d\bar{v}_q}{dt} = V_q(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_q, \bar{n}_q), \quad (4.28)$$

$$\frac{d\bar{n}_q}{dt} = N_q(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \bar{v}_q, \bar{n}_q). \quad (4.29)$$

Функции  $V_q = \sum_q^{p,b} \frac{1}{\xi^3} A_{qv_z}^{(3)}$ ,  $N_q = \sum_q^{p,b} \frac{1}{\xi^3} A_{nq}^{(3)}$  учитывают кубически

нелинейные слагаемые, зависят от волновых чисел, частот, амплитуд полей, постоянных составляющих скоростей  $\bar{v}_q$  и концентраций  $\bar{n}_q$ .

Полученную систему кубически-нелинейных уравнений (4.25), (4.28)-(4.29) анализируем численно. Эта система уравнений описывает нелинейные процессы в плазменно-пучковом СЛСЭ с Н-убитронной накачкой, позволяет определить уровни насыщения и другие параметры исследуемого устройства.

#### 4.4 Анализ результатов

Анализ динамики волн проведем в плазменно-пучковом СЛСЭ со следующими параметрами: ленгмюровская частота плазмы  $\omega_p = 1 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ , ленгмюровская частота пучка  $\omega_b = 2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ , кинетическая энергия пучка 0,51 МэВ, напряженность фокусирующего магнитного поля  $2,2 \cdot 10^5 \text{ А/м}$ , амплитуда первой гармоники магнитного поля накачки

$$B_{2,1} = \sqrt{|B_{2x,1}|^2 + |B_{2y,1}|^2} = 1,0 \cdot 10^2 \text{ Э}.$$

Используя дисперсионные соотношения для поперечных  $D_1(\omega_1, k_1) = 0$  (соотношение (4.26)) и продольных  $D_{3,1}(\omega_{3,1}, k_{3,1}) = 0$  (соотношение (4.27)) волн, несложно определить частоты и волновые числа волн, которые могут принимать участие в трехволновом параметрическом резонансе (4.1). Как показано в работе [52], трехволновые параметрические взаимодействия в СЛСЭ с Н-убитронной накачкой возможны в четырех различных случаях: режим  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . В режиме  $B$  принимает участие высокочастотная правая циркулярно поляризованная электромагнитная волна сигнала, если смотреть вдоль магнитного поля ( $\eta_1 = -1$ ), в режимах  $A$ ,  $C$  и  $D$  – высокочастотная левая циркулярно поляризованная электромагнитная волна сигнала ( $\eta_1 = +1$ ). В режиме  $D$  высокочастотная электромагнитная волна движется вдоль оси  $Z$  (рис. 4.1), в режимах  $A$ ,  $B$  и  $C$  – в противоположную сторону. При этом волновое число  $k_{3,1}$  и частоту  $\omega_{3,1}$  первой гармоники ВПЗ выбираем так, чтобы ее инкремент нарастания за счет плазменно-пучковой неустойчивости имел максимальное значение.

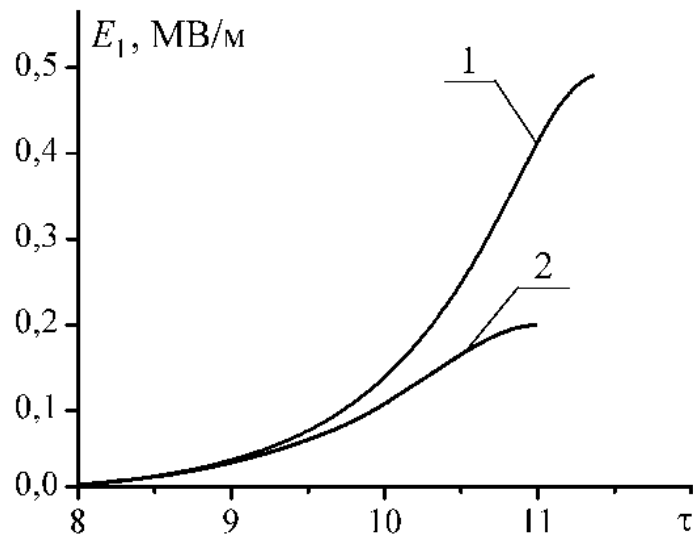


Рисунок 4.2 – Зависимости амплитуды первой гармоники напряженности электрического поля волны сигнала  $E_1$  от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для режима взаимодействия  $C$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Кривая 1 учитывает только первые гармоники взаимодействующих волн, кривая 2

учитывает множественные параметрические резонансы первых десяти гармоник ВПЗ.

Используя стандартные численные методы, проанализируем динамику волн в плазменно-пучковом СЛСЭ с помощью уравнений (4.25), (4.28), (4.29). Выясним, как влияют множественные трехволновые параметрические резонансные взаимодействия гармоник ВПЗ на динамику высокочастотной электромагнитной волны сигнала. На рис. 4.2 изображены зависимости амплитуды первой гармоники волны сигнала  $E_1 = \sqrt{|E_{1x}|^2 + |E_{1y}|^2}$  от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$ , где  $\delta\omega_0$  инкремент нарастания плазменно-пучковой неустойчивости при угле влета пучка  $\beta = 0^\circ$ . Расчеты проведены для режима взаимодействия  $C$ ,  $\beta = 30^\circ$ . На этом рисунке кривая 1 представляет результат расчета, в котором учтено взаимодействие только первых гармоник волн. Кривая 2 получена в результате расчетов, в которых учтено влияние множественных трехволновых резонансных взаимодействий первых десяти гармоник волны ВПЗ. Сравнивая кривые 1 и 2 на рис. 4.2 видим, что влияние высших гармоник ВПЗ приводит к уменьшению уровня насыщения более чем в два раза (кривая 2). Это значит, что множественные резонансные взаимодействия между гармониками волны ВПЗ существенно влияют на нелинейные процессы в плазменно-пучковых СЛСЭ. Также отметим, что с учетом множественных резонансов ВПЗ (рис. 4.2, кривая 2) в области насыщения напряженность электрического поля сигнала достигает значений  $\sim 0,4$  МВ/м. Длина волны сигнала для этого режима в вакууме  $\lambda_1 = 2\pi c / \omega_1 \approx 1,9$  мм. Таким образом, плазменно-пучковый СЛСЭ может использоваться как мощный источник электромагнитного излучения в миллиметровом диапазоне длин волн. Аналогичное влияние множественных резонансных взаимодействий на уровень насыщения имеет место и в режиме работы ( $D$ ) СЛСЭ. Поэтому такие взаимодействия обязательно необходимо учитывать при анализе динамики волн в плазменно-пучковых

супергетеродинных ЛСЭ. Далее все расчеты проводятся с учетом множественных взаимодействий между гармониками волны ВПЗ.

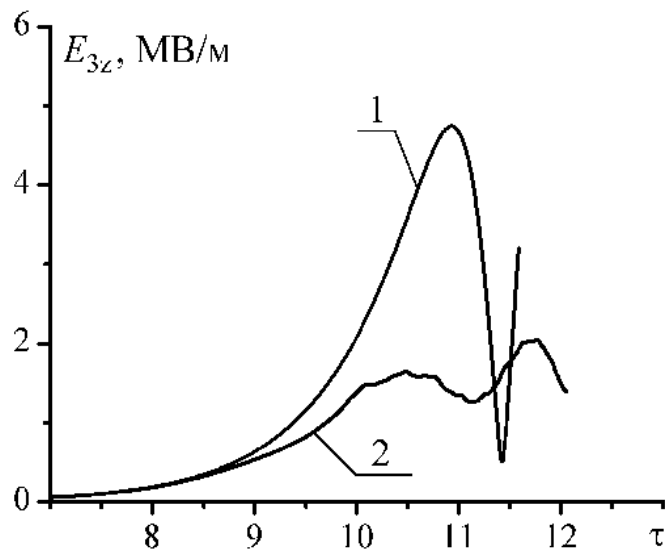


Рисунок 4.3 – Зависимости амплитуды первой гармоники напряженности электрического поля ВПЗ  $E_{3z}$  от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для режима работы  $C$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Кривая 1 учитывает только первые гармоники взаимодействующих волн, кривая 2 учитывает множественные параметрические резонансы первых десяти гармоник ВПЗ

Далее рассмотрим динамику амплитуд первых гармоник напряженности электрического поля волны ВПЗ, которая возбуждается в следствие трехволнового параметрического резонанса (4.1) в плазменно-пучковой системе. На рис. 4.3 представлены зависимости амплитуды первой гармоники напряженности электрического поля ВПЗ  $E_{3z}$  от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для режима работы  $C$  при угле влета электронного пучка  $\beta = 30^\circ$ . Здесь, кривая 1 учитывает только первые гармоники волн участвующих в параметрическом резонансе, кривая 2 учитывает влияние мультигармонических резонансов первых 10 гармоник ВПЗ. При сравнении этих кривых видно, что насыщение волны  $E_{3z}$  при учете первых десяти гармоник ВПЗ (кривая 2) уменьшается более чем в два раза по сравнению с

кривой 1. Уровень насыщения  $E_{3z}$  при этом достигает значения  $\sim 1,75$  МВ/м. Благодаря тому, что в исследуемом СЛСЭ генерируются высшие гармоники ВПЗ соизмеримые по амплитуде с первой гармоникой, амплитуда 1-й гармоники сигнальной волны и ВПЗ уменьшаются в два и более раз (кривая 2, рис. 4.2 и рис. 4.3).

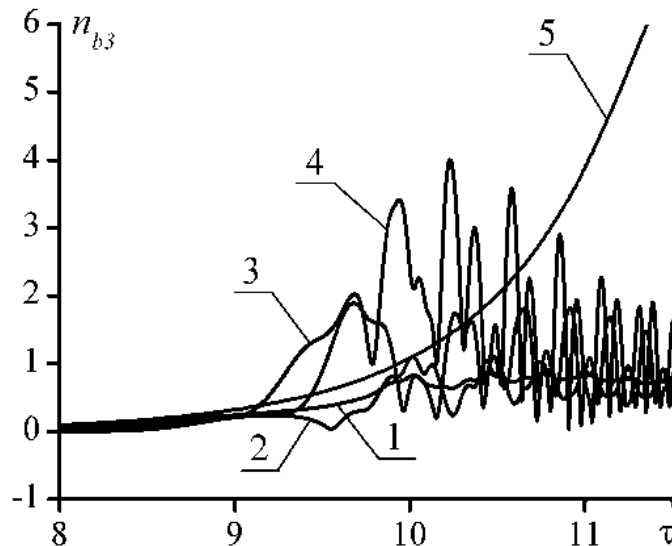


Рисунок 4.4 – Зависимости амплитуд гармоник концентрации пучка  $n_{b3}$  нормированных на постоянную составляющую концентрации пучка  $n_{b3} / n_{b0}$  от нормированного времени  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  с учетом (кривые 1-4) и без учета (кривая 5) множественных параметрических резонансных взаимодействий ВПЗ.

На рис. 4.4 представлены зависимости амплитуд гармоник концентрации пучка  $n_{b3}$  нормированного на постоянную составляющую концентрации пучка  $n_{b3} / n_{b0}$  от нормированного времени с учетом (кривые 1-4) и без учета (кривая 5) множественных параметрических резонансных взаимодействий ВПЗ. Кривая 1 соответствует первой гармонике концентрации пучка  $n_{b3,1}$ , кривая 2 соответствует второй гармонике  $n_{b3,2}$ , кривая 3 соответствует третьей гармонике  $n_{b3,3}$ , кривая 4 соответствует четвертой гармонике  $n_{b3,4}$ , кривая 5 соответствует первой гармонике  $n_{b3,1}$  при расчете которой не учитывались мультигармонические взаимодействия ВПЗ. На

рис. 4.4 видно, что если не учитывать взаимодействие высших гармоник ВПЗ, то насыщения концентрации пучка  $n_{b3}$  не происходит (кривая 5). Обратную картину мы можем наблюдать при их учете (кривые 1-4). Также одной из особенностей рис. 4.4 является то, что амплитуды высших гармоник концентрации пучка соизмеримы с амплитудой первой гармоники или даже превышают ее. Благодаря этому уровень насыщения волны сигнала и ВПЗ уменьшается в два и более раз (см. рис. 4.2 и рис. 4.3, кривая 2). Таким образом, без учета мультигармонических взаимодействий ВПЗ, невозможно провести полный анализ плазменно-пучковых СЛСЭ, так как результаты, не учитывающие множественные параметрические взаимодействия, не будут соответствовать полной физической картине исследуемого устройства.

Выясним влияние высших гармоник на механизмы насыщения в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ Н-убитронного типа с неосевым влетом пучка электронов. Амплитуда первой гармоники концентрации пучка  $n_{b3}$  совершает регулярные колебания. Эти колебания обусловлены захватом электронов пучка полем плазменной волны. В результате такого захвата электроны пучка формируются в сгустки, которые колеблются в пределах квазипотенциальной ямы плазменной волны. Поэтому, насыщение усиления в таких плазменно-пучковых СЛСЭ происходит, благодаря насыщению самой плазменно-пучковой неустойчивости путем захвата электронного пучка плазменной волной.

#### **Выводы к разделу 4**

Таким образом, в данной работе продемонстрирована техника применения модернизированного метода усредненных характеристик [38] на примере кубически нелинейной теории плазменно-пучковых супергетеродинных лазеров на свободных электронах с винтовыми электронными пучками. Описана методика нахождения и получена система укороченных уравнений для амплитуд волн. Учтены множественные резонансные взаимодействия гармоник волны ВПЗ.

Проведен анализ резонансных взаимодействий в исследуемом СЛСЭ. Выяснено, что множественные резонансные взаимодействия гармоник волны пространственного заряда играют существенную роль, в частности, приводят к уменьшению уровня насыщения сигнала и волны пространственного заряда в два и более раз. Это значит, что для проведения анализа динамики волн в СЛВЭ нужно обязательно учитывать множественные параметрические взаимодействия.

Выяснено, что насыщение в плазменно-пучковом СЛВЭ Н-убитронного типа с винтовыми электронными пучками определяется захватом электронов пучка плазменной волной.

Показано, что уровень насыщения в исследуемом СЛВЭ является достаточно высоким (амплитуда напряженности электромагнитной волны сигнала имеет значение  $\sim 0,4$  МВ/м при условии достаточно невысокой накачки  $B_{2,1} = 0,01$  Тл). Это значит, что плазменно-пучковые СЛВЭ Н-убитронного типа с винтовыми электронными пучками могут использоваться как мощные источники когерентного электромагнитного излучения в миллиметровом диапазоне длин волн.

**ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК**

1. Millimeter Wave Range Vacuum Electron Devices (Ed. V.M. Jakovenko, S.P. Rakitin) (Sevastopil: Veber: 2007).
2. V.L. Bratman, B.S. Dumesh, A.E. Fedotov, P.B. Makhalov, B.Z. Movshevich, F.S. Rusin, IEEE T. Plasma Sci. 38 No6, 1466 (2010).
3. G.S. Vorobyov, M.V. Petrovsky, V.O. Zhurba, A.I. Ruban, O.I. Belous, A.I. Fisun, Telecomm. Radio Eng+. 66 No20, 1839 (2007).
4. Electromagnetic waves (Ed. Vitaliy Zhurbenko) (Rijeka: Intech: 2011).
5. Г.С. Воробьев, К.А. Пушкарев, А.И. Рубан, А.И. Цвык, Изв. вузов Радиоэлектроника 42 №10, 42 (1999).
6. Г.С. Воробьев, К.А. Пушкарев, А.И. Цвык, Радиотехника и электроника 42, 1738 (1997).
7. K.L. Shlager, J.B. Schneider, IEEE Antenn. Propag. M. 37 No4, 39 (1995).
8. G.S. Vorobyov, M.V. Petrovsky, A.A. Rybalko, Yu.V. Shulga, Instrum. Exp. Tech+. 55 No1, 56 (2012).
9. G.S. Vorobjov, A.S. Krivets, V.O. Zhurba, A.A. Rybalko, Radioelectronics and Communication System 55 №11, 490 (2012).
10. Ye.V. Belousov, V.V. Zavertanny, A.V. Nesterenko, Telecomm. Radio Eng+. 66 No1, 69 (2007).
11. G.S. Vorobyov, A.I. Ruban, V.O. Zhurba, A.A. Rybalko, D.Y. Doroshenko, J. Nano- Electron. Phys. 6 No1, 01024 (2014).
12. G.S. Vorobjov, Laser Phys. 10 No4, 932 (2000).
13. Электривакуумные приборы диапазона миллиметровых волн / Под ред. Л.В. Касаткина, В.П. Рукина, В.Д. Ерёмки и др.. Севастополь: Вебер. - 2007.
14. Bratman V.L., Dumesh B.S., Fedotov A.E., Makhalov P.B., Movshevich B.Z., Rusin F.S.// Terahertz Orotrons and Oromultipliers // IEEE Transactions on Plasma Science. - 2010. -Vol. 38, No. 6. - P. 1466-1470.



15. Vorobyov G.S., Petrovsky M.V., Zhurba V.O., Ruban A.I., Belous O.I., Fisun A.I. // Perspectives of Application of New Modification of Resonant Quasi-Optical Structures in EHF Equipment and Electronics // Telecommunications and Radio Engineering. - 2007. - Vol. 66, No. 20. - P. 1839-1862.

16. Верин О.Г. // О контурном гистерезисе в отражательных клистронах // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ.- 1977. -Вып. 10. -С. 21-32.

17. Vorobjov G.S. // Electromagnetic properties of coupled quasi-optical open cavities in sources of millimeter radiation // Laser Physics. – 2000. - Vol. 10, No. 4. - P. 932-938.

18. Electromagnetic waves / Edited by Vitaliy Zhurbenko. Rijeka: Intech, 2011 / Part 4, Chapter 13 S4, quasi-optical systems Based on Periodic structures // G. Vorobjov, Y. Sulga and V. Zurbenko. - P. 257-283.

19. Воробьев Г.С., Пушкарев К.А., Цвык А.И. // Численный анализ экранирующих свойств дифракционной решетки при возбуждении электронным потоком излучения на металлодиэлектрических структурах // Радиотехника и электроника. – 1997. - Т. 42. – С. 1738-1740.

20. И.В. Алямовский // Электронные пучки и электронные пушки. - Москва: Советское радио. - 1966.

21. Г.С. Воробьев, А.И. Цвык // Экспериментальное исследование гистерезисных явлений в генераторе дифракционного излучения. //Изв. вузов Радиофизика. – 1982. – Т. 25, №9. – С. 1060-1067.

22. Энергетические характеристики дифракционно-черенковского излучения в периодических металло-диэлектрических структурах / Г.С. Воробьев, К.А. Пушкарев, А.И. Рубан, А.И. Цвык // Изв. вузов Радиоэлектроника. – 1999. – Т.42, №10. - С. 42-66.

23. V. V. Kulish, Hierarchic Electrodynamics and Free Electron Lasers: Concepts, Calculations, and Practical Applications (Boca Raton, London, New York: CRC Press: 2011).

24. V.V. Kulish, Hierarchical methods: Hierarchy and hierarchic asymptotic methods in electrodynamics, Vol. 1 (Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers: 2002).

25. Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов, Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков, Т. 1 (Москва: Физматлит: 2003).

26. М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков, Плазменная релятивистская СВЧ-электроника, (Москва: Изд-во МГТУ им. Баумана: 2002).

27. M.V. Kuzeleev, A.A. Rukhadze, Methods of Wave Theory in Dispersive Media (Singapore, London: World Scientific: 2009).

28. P.M. Bellan, Fundamentals of Plasma Physics (Cambridge: Cambridge University Press: 2006).

29. М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков, Введение в теорию колебаний и волн (Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: 2000).

30. О.В. Капцов, Методы интегрирования уравнений с частными производными (Москва: ФИЗМАТЛИТ: 2009).

31. В.С. Владимиров, Уравнения математической физики (Москва: Наука: 1976).

32. V.V. Kulish, A.V. Lysenko, A.Ju. Brusnik, J. Infrared Milli. Terahz. Waves 33, 149 (2012).

33. Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику (Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: 2004).

34. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний (Москва: Наука: 1974).

35. Н.Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики (Москва: Наука: 1969).

36. V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko, Int. J. of Infrared Milli. Waves 14, 451 (1993).

37. V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko, Int. J. of Infrared Milli. Waves 15, 77 (1994).

38. В.В. Куліш, О.В. Лисенко, Г.А. Олексієнко, Г.В. Биченко, О.А. Колоскова, Ж. наноелектрон. фіз. 7, 02015(8) (2015).
39. V.V. Kulish, Hierarchic Electrodynamics and Free Electron Lasers: Concepts, Calculations, and Practical Applications (Boca Raton, London, New York: CRC Press: 2011).
40. T. Mohsenpour, N. Mehrabi, Phys. Plasmas 20, 082133 (2013).
41. S. Saviz, Z. Rezaei, Z. Farzin, M. Aghamir, Chinese Physics B 21, 094103 (2012).
42. W. Liu, Z. Yang, Z. Liang, Int. J. Infrared Millim. Waves 27, 1073 (2006).
43. N. Mahdizadeh, F.M. Aghamir, J. Appl. Phys 113, 083305(5) (2013).
44. S. Saviz, M. Karimi, Chin. Phys. B 23, 034103(5) (2014).
45. T. Mohsenpour, O.K. Rezaee Rami, Phys. Plasmas 21, 072113 (2014).
46. W. Liu, Z. Yang, Y. Wang, P. Liu, C. Zhao, IEEE Transactions on Plasma Science 42, 42 (2014).
47. B.W.J. McNeil, G.R.M. Robb, Phys. Rev. E 70, 035501 (2004).
48. H. Mehdian, N. Abbasi, Phys. Plasmas, 15, 013111 (2008).
49. D.V. Rose, T.C. Genoni, D.R. Welch, E.A. Startsev, R.C. Davidson, Phys. Rev. ST Accel. Beams 10, 034203 (2007).
50. V.V. Kulish, A.V. Lysenko, M.Yu. Rombovsky, Plasma Physics Reports 36, 594 (2010).
51. V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval, Technical Physics Letters 35, 696 (2009).
52. V.V. Kulish, A.V. Lysenko, G.A. Oleksienko, V.V. Koval, M.Yu. Rombovsky, Acta Physica Polonica A 126, 1263 (2014).
53. V.V. Kulish, A.V. Lysenko, G.A. Oleksienko, V.V. Koval, M.Yu. Rombovsky, Applied Physics 5, 24 (2014).
54. М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков, Плазменная релятивистская СВЧ-электроника (Москва: МГТУ им. Баумана: 2002).
55. P.M. Bellan, Fundamentals of Plasma Physics (Cambridge: Cambridge University Press: 2006).